

UNIVERZITET U BEOGRADU

---

WILHELM WESTPHAL

# FIZIKA

S NEMAČKOG PREVEO

Dr. SRETEN ŠLJIVIĆ  
PROF. UNIVERZITETA

PROSVETA  
IZDAVAČKO PREDUZEĆE SRBIJE  
BEOGRAD 1947

## Predgovor

Da bi se studentima u što kraćem vremenu dao udžbenik opšteg kursa fizike, iskorišćen je jedan deo ranije prevedenog teksta, uglavnom mehanika čvrstih tela i veći deo geometriske optike. Za ovo su postojali i pedagoški razlozi. Potpisanom nije bila svrha dati prevod Westphala, već udžbenik koji privremeno odgovara potrebama nastave. Zato ovaj prvi deo ne predstavlja potpun prevod izdanja od 1941 god.

Dr. Sreten Šljivić

*Greg. Bantiopolita*

## Uvod

§ 1. **Fizičke veličine i jedinice mera.** Svaki fizički proces dešava se u prostoru i vremenu. Za to su nam dve fizičke veličine neposredno date: dužina kao prostorna veličina i vreme. Za ove dve osnovne veličine nisu stoga potrebne definicije ili bliže određivanje pojma tih veličina. Iskustvo pokazuje, da se bar u oblasti mehanike može upotrebiti sistem veličina, koje se izvode iz osnovnih veličina dužine i vremena i treće neke osnovne jedinice (izvedene veličine). Izbor treće osnovne veličine je u suštini proizvoljan i mogla bi se upotrebiti svaka mehanička veličina, ukoliko ona nije određena samo dužinom i vremenom, kao npr. brzina. Kao treća osnovna jedinica, u fizici se upotrebljava masa, koja dopunjuje pojmove prostornosti i vremena. U tehnici iz praktičnih razloga za treću osnovnu jedinicu uzeta je sila.

Izvedene veličine se prema svojoj definiciji izražavaju kao proizvodi stepena osnovnih veličina. Tako je brzina koja se definiše kao pređeni put u jedinici vremena, dakle kao količnik puta (dužina) sa vremenom jednaka dužina / vreme ili  $\text{dužina} \times \text{vreme}^{-1}$ . Ubrzanje je definisano kao promena brzine u jedinici vremena, dakle kao količnik iz razlike brzina i vremena za koje se ta razlika dešava, prema tome kao  $\text{dužina} / \text{vreme}^2$  ili  $\text{dužina} \times \text{vreme}^{-2}$ . Sila je definisana kao masa puta ubrzanje ili masa puta  $\text{dužina} \times \text{vreme}^{-2}$  itd.

Svaka definicija neke fizičke veličine sadrži u sebi istovremeno i propis za merenje te veličine. Kad se npr. definiše gustina kao masa u jedinici zapremine, to znači da se gustina bilo neposredno ili posredno ne može ninačakav drugi način izmeriti do merenjem mase i zapremine tela i izračunavanjem količnika masa (zapremina).

Svaka fizička veličina može imati svoj merni broj koji pokazuje koliko se osnovnih jedinica, iste vrste, nalaze u toj veličini. Svako merenje neke fizičke veličine znači prema tome upoređivanje te veličine sa svojom jedinicom za merenje. Izbor jedinica za merenje pojedinih fizičkih veličina je u osnovi proizvoljan. Stvarno u praksi imamo za neke veličine različite jedinice npr. metar i santimetar. Promena jedinica za merenje povlači sa sobom i promenu mernog broja. Ukoliko je veća jedinica utoliko je manji merni broj ( $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100.000 \text{ cm}$ ). Fi-

zička veličina je potpuno opisana kad se da njen merni broj i izabrana jedinica za merenje.

U stvari nije ni potrebno, ni pogodno, za svaku fizičku veličinu proizvoljno definisati jedinicu za merenje. Dovoljno je da se definišu jedinice za merenje osnovnih veličina. Tada za izvedene veličine na osnovu njihovih definicija, pomoću osnovnih veličina, dobijamo neposredno jedinice za merenje. Tako npr. kad se sila definiše kao masa  $\times$  ubrzanje = masa  $\times$  dužina  $\times$  vreme<sup>-2</sup> to izlazi samo po sebi da je 1 jedinica sile = 1 jedinici mase  $\times$  1 jedinica dužine  $\times$  1 jedinica vremena<sup>-2</sup>. Zbog svoga velikog značaja su fizičke jedinice mera zakonski utvrđene u svim zemljama na osnovu internacionalnih konvencija.

Često su od početnih jedinica izvedene druge jedinice. Tako reč kilo skraćeno *k* označava hiljadu puta veću jedinicu (1 kg = 1000 g). Mili skraćeno *m* hiljaditi deo jedinice (1 mg =  $\frac{1}{1000}$  g). Reč mega skraćeno *M* označava milion puta veći, a mikro skraćeno  $\mu$  milion puta manji deo jedinice (1 MVolt = 10<sup>6</sup> volta, 1  $\mu$ .volt = 10<sup>-6</sup> volta). U fizici je međutim često pogodnije kad se jave veliki ili mali merni brojevi ne menjati jedinicu za merenje, već upotrebiti početnu jedinicu, pa merni broj izraziti kao proizvod broja bliskog jedinici i stepena broja deset, npr. 1,53786  $\times$  10<sup>6</sup> cm umesto 15,3786 km ili 0,85  $\times$  10<sup>-3</sup> g umesto 0,85 mg.

Jedinica dužine u fizici je 1 santimetar (cm), definisan kao  $\frac{1}{100}$  deo metra. Metar (m) je prvobitno definisan kao desetomilioniti deo jednog zemljinog kvadranta, razdaljine pol-ekvator merene na dužinskom stepenu na nivou mora. Zakonski i internacionalno je metar definisan kao razdaljina dveju crta na prototipu metra od platine-iridijuma, koji se čuva u Parizu. Da bi se izbegli veliki i mali brojevi nezgodni za računanje, upotrebljavaju se pored santimetra i metra još i sledeće izvedene jedinice dužina:

- 1 kilometar (km) = 10<sup>5</sup> cm
- 1 milimetar (mm) = 10<sup>-1</sup> cm
- 1 mikron ( $\mu$ ) = 10<sup>-4</sup> cm
- 1 milimikron (m $\mu$ ) = 10<sup>-7</sup> cm
- 1 angstrom (Å) = 10<sup>-8</sup> cm
- 1 mikromikron ( $\mu\mu$ ) = 10<sup>-10</sup> cm
- 1 Iks-jedinica (X) = 10<sup>-11</sup> cm

Astronomske jedinice dužina su 1 svetlosna godina i 1 parsek (parsec). 1 svetlosna godina je put koji svetlost pređe za jednu godinu, ona iznosi 0,94608  $\times$  10<sup>13</sup> km; parsek je rastojanje sa koga se vidi poluprečnik zemljine putanje oko Sunca pod uglom od 1". Ono iznosi 3,06662  $\times$  10<sup>13</sup> km = 3,26 svetlosnih godina.

Pored dužine i ugao ima važan značaj kao prostorna veličina. On se definiše kao odnos dužina, pa je kao neimenovan broj nezavisan od izbora

jedinica za dužinu. Neka je *s* dužina kružnog luka opisanog iz temena ugla  $\varphi$  poluprečnikom kruga *r*; tada je  $\varphi$  jednako *s/r*. Ova definicija dovodi do jedinice ugla u lučnoj meri, koja se označava kao 1 r a d i j a n (rad). To je onaj ugao kod koga je *s/r* = 1, dakle luk jednak poluprečniku. U stepenima izražen 1 rad = 360/2 $\pi$  = 57°17'45". Ako se hoće merni broj ugla izmerenog stepenima da izrazi lučnom merom, onda se mora pomnožiti sa faktorom 2 $\pi$ /360 = 0,017453.

Kod vrlo malih uglova mogu se njihovi *sin* i *tang* sa velikom približnošću staviti jednaki uglovima izmerenim lučnom merom, *sin*  $\varphi \approx \varphi$ , *tang*  $\varphi \approx \varphi$ . Zatim je *cos*  $\varphi \approx 1 - \varphi^2/2 \approx 1$  npr. 6° = 0,1047, *sin* 6° = 0,1045, *tang* 6° = 0,1051, *cos* 6° = 0,9945. Greška se dakle u mnogim slučajevima može da zanemari.

Zraci koji vezuju jednu tačku u prostoru sa svima graničnim tačkama neke površine grade prostorni ugao. Ako je *F* deo loptine površine poluprečnika *r*, tada svi zraci iz centra lopte spojeni sa ivicom *F* grade prostorni ugao  $\Omega$  čija je veličina data jednačinom

$$F = r^2 \Omega \text{ odnosno } \Omega = F/r^2$$

Pošto je celokupna površina lopte  $F = 4\pi r^2$  to jedan »pun« prostorni ugao (analoško punom uglu u ravni 360° ili 2 $\pi$ ) iznosi 4 $\pi$ . Prema gornjoj jednačini prostorni ugao jednak je jedinici  $\Omega = 1$ , kada on iz loptine površine čiji je poluprečnik *r*, iseče površinu  $r^2$ . Pri tome oblik ove površine može biti sasvim proizvoljan. Prostorni uglovi iste veličine mogu izgledati vrlo različito.

Jedinica za vreme u fizici je jedna sekunda (1 sec). Ona je definisana tako da je 60  $\times$  60  $\times$  24 sec = 86400 sec jednako srednjem sunčanom danu: Srednji sunčani dan je srednja vrednost između vremena dveju uzastopnih kulminacija Sunca, uzeta u toku jedne godine. Za tačno merenje vremena upotrebljavaju se časovnici sa klatnom i tegovima, a za najtačnija merenja kvarcni časovnici.

Jedinica mase je u fizici jedan gram (g). Prvobitna definicija grama je bila, da je on jednak masi 1 cm<sup>3</sup> najčistije vode na 4° C. Zakonski i internacionalno gram je definisan kao  $\frac{1}{1000}$  mase prototipa kilograma od platine-iridijuma koji se čuva u Parizu. Masa 1 cm<sup>3</sup> vode iznosi 0,999973 g, razlika koja je skoro uvek beznačajna.

Pored grama i kilograma kao izvedene jedinice u upotrebi su još 1 tona = 10<sup>3</sup> kg = 10<sup>6</sup> g, miligram (mg) = 10<sup>-3</sup> g i mikrogram ( $\mu$ .g) = 10<sup>-6</sup> g koji se u hemiji često upotrebljava i koga hemičari obeležavaju sa  $\gamma$ .

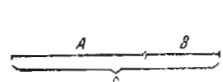
Sistem mera fizičkih veličina i njihovih jedinica zasnovan na osnovnim veličinama dužine, mase i vremena zove se santimetar-gram-sekunda ili skraćeno CGS sistem.

§ 2. **Skalari i vektori.** Fizičke veličine dele se na skalare i vektore. Skalari su takve veličine koje su potpuno određene mernim brojem i jedinicom za merenje kao npr. dužine, površine i zapremine. Kod vektora nije dovoljno dati samo merni broj i jedinicu, već se mora voditi računa i o njihovom pravcu. Primer za to imamo kod brzine. Kretanje npr. jednog voza nije još potpuno određeno veličinom njegove brzine, mora se dati i pravac toga kretanja npr. dajući ugao kretanja spram pravca sever—jug. Vektori se predstavljaju strelicama. Dužina strelice je mera za veličinu vektora (dužina jednaka ili srazmerna mernom broju), pravac u kome je upravljen vrh strelice pokazuje pravac vektora.

Za razliku od skalara vektore ćemo u ovoj knjizi obeležavati goticom npr.  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{u}$ ,  $\mathfrak{v}$ . Svakom vektoru može odgovarati jedna skalarna veličina koja ima isti merni broj kao i vektor. Taj skalar se zove **apsolutni iznos** uočenog vektora.

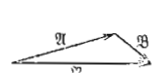
Jednačina između dva vektora (**vektorska jednačina**) ima dvostruko značenje. Ako stavimo npr.  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$  to ne kazuje samo da su među sobom jednaki apsolutni iznosi  $A$  i  $B$  vektora  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$ , već da oni imaju i isti pravac u prostoru. O ovoj činjenici mora se kod jednačina između vektora uvek voditi računa. Može biti da je  $A = B$ , a da pri tome nije  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ . Često se možemo zadovoljiti skalarnim mernim brojevima vektora. Pri tome vektori suprotnih pravaca dobijaju suprotne predznake. U tim slučajevima može se računati sa algebarskim jednačinama između vektora.

§ 3. **Sabiranje i razlaganje vektora.** Kod sabiranja vektora ne uzima se u obzir samo njihova veličina (njihov apsolutni iznos), već i njihov pravac. Obično algebarsko sabiranje važi samo za skalare, ali se nesme primeniti na vektore. To se najbolje može videti kod grafičkog predstavljanja.

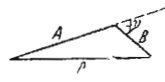


Sl. 1a. Sabiranje skalara.

$$A + B = R$$



Sl. 1b. Sabiranje vektora.



Sl. 1c.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{R} \quad R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \gamma}$$

Sabiranje skalara  $A$  i  $B$  može se grafički tako izvesti, da se dodaju dve duži koje iznose  $A_{cm}$  i  $B_{cm}$  pa  $R$  meri njihovu zajedničku dužinu  $A+B=R$  (sl. 1a). Duži  $A$  i  $B$  ne moraju pri tome ležati na istoj pravoj. One mogu čak biti i krive. Rezultat tj. dužina rezultujuće duži je uvek ista.

Zbir dva vektora  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$  naćićemo kada dovedemo početke vektorskih strelica koje im odgovaraju u jednu tačku, vodeći računa o pravcu, pa spojimo početnu i krajnju tačku tog linijskog sistema vektorskom strelicom

$\mathfrak{R}$  (sl. 1b).  $\mathfrak{R}$  je tada zbir ili rezultanta oba vektora  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$ . Ovaj postupak može se primeniti na proizvoljan broj vektora (sl. 2). Pri tome pojedini vektori mogu biti proizvoljno orijentisani u prostoru i ne ležati u istoj ravni kao na sl. 2. Ni red kojim su vektori poredani ne dolazi u obzir.

Tako vektorsko sabiranje predstavlja se analogo sa algebarskim sabiranjem jednačinom.

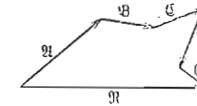
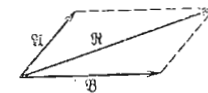
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \dots = \mathfrak{R} \quad (1)$$

Ali ovakva jednačina ne sme se algebarski tumačiti. Neka su  $A$ ,  $B$  i  $R$  apsolutni iznosi vektora  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  i  $\mathfrak{R}$  na sl. 1c tada je  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{R}$ , ali nije  $A + B = R$ , već kao što se primenom kosinusne teoreme na sl. 1c vidi:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \gamma} \quad (2)$$

ako  $\gamma$  predstavlja ugao između vektora  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$ .

Umesto konstrukcije predstavljene na sl. 1b često se upotrebljava paralelogramska konstrukcija (sl. 3). Početci oba vektora polaze iz jednog

Sl. 2  
 $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \dots = \mathfrak{R}$ 

Sl. 3. Paralelogramska konstrukcija.

temena i slika se dopuni do paralelograma, pa se povuče njegova dijagonala iz početnog ugla. Dijagonala je po veličini i pravcu jednaka rezultanti  $\mathfrak{R}$  vektora  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$ .

Veličine  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  itd. iz kojih je dobijena vektorskim sabiranjem rezultanta  $\mathfrak{R}$ , zovu se **vektorske komponente**.

Često je potrebno zamisliti dati vektor razložen na komponente iz kojih on nije ustvari postao sabiranjem, već se može smatrati kao rezultanta njihovog vektorskog zbira. Razlaganje vektora se vrši obrnutim redom gore navedenog postupka. Neka je  $\mathfrak{A}$  vektor koji treba razložiti. Kroz početnu tačku vektora  $\mathfrak{A}$  povuku se dve prave u onim pravcima u kojima komponente treba da leže. Tada se iz vrha strelica povuku paralelne duži sa tim pravcima (sl. 4a i 4b). Tako se dobije paralelogram čija je dijagonala prvobitni vektor, a čije su komponente  $\mathfrak{A}_1$  i  $\mathfrak{A}_2$ . Prema izboru pravaca komponentata njihova veličina može biti vrlo različita, kao što se vidi upoređujući sl. 4a i 4b.

Na ovaj način se može jedan vektor razložiti i na više od dve komponente. Naročito je čest slučaj razlaganja na tri komponente koje leže u pravcima osa pravouglog koordinatnog sistema u prostoru.

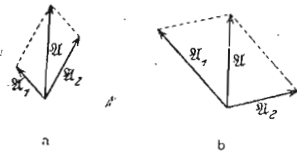
Neka je  $\mathcal{U}$  proizvoljno upravljani vektor,  $\mathcal{U}_x$ ,  $\mathcal{U}_y$  i  $\mathcal{U}_z$  njegove tri komponente koje stoje pod pravim uglom (sl. 5) tada je

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_y + \mathcal{U}_z \quad (3)$$

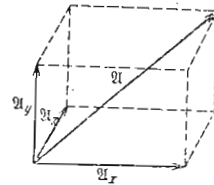
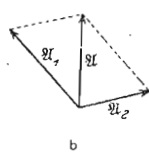
Neka je  $A$  apsolutni iznos vektora  $\mathcal{U}$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  i  $A_z$  apsolutni iznosi njihovih komponenti, onda je

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4)$$

Proizvod  $A \mathcal{U} = \mathcal{B}$  jednog skalara  $A$  i vektora  $\mathcal{U}$  jeste vektor  $\mathcal{B}$  koji ima isti pravac i  $A$  puta veći iznos od vektora  $\mathcal{U}$ .



Sl. 4. Razlaganje jednog vektora.



Sl. 5. Razlaganje vektora na tri komponente u prostoru.

Kao proizvod vektora  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{B}$  (iznos  $A$ ,  $B$ ) čiji pravci sklapaju ugao  $\gamma$ , koji se označava  $[\mathcal{U} \mathcal{B}]$  podrazumeva se vektor sa iznosom

$$|[\mathcal{U} \mathcal{B}]| = AB \sin \gamma \quad (5)$$

i koji stoji normalno na ravni u kojoj leže vektori  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{B}$ . Njegov pravac daje pravilo zavrtnja. On je upravljani u onome smislu u kome se kreće desni zavrtnj pri obrtanju koje odgovara kretanju vektora  $\mathcal{U}$  u pravcu vektora  $\mathcal{B}$ . Pri razmeni mesta vektora  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{B}$  menja se i smisao obrtanja, a s njim i pravac vektorskog proizvoda.

$$[\mathcal{B} \mathcal{U}] = -[\mathcal{U} \mathcal{B}].$$

Prema jednačini (5) iščezava proizvod vektora  $[\mathcal{U} \mathcal{B}]$  kada je  $\sin \gamma = 0$  tj.  $\gamma = 0^\circ$  ili  $180^\circ$ , dakle kad su oba vektora upravljena u istom ili suprotnom pravcu.

Iznos  $[\mathcal{U} \mathcal{B}]$  je prema jednačini (5) jednak površini paralelograma, čije su strane vektori  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{B}$ .

23. VII - 47

## DEO PRVI

### Mehanika čvrstih tela

*U ovom odeljku proučavaćemo savršeno čvrsta tela, tj. takva tela koja pod uticajem sila ne menjaju приметно ni svoj oblik ni svoju zapreminu.*

#### Nauka o kretanju

§ 4. **Definicija materijalne tačke.** Da bi sledeća izlaganja izneli u što prostijem obliku, nećemo uzimati u obzir prava fizička tela, već mala zamišljena tela, čije su dimenzije neznatne, te ih možemo smatrati kao tačku. Takvo zamišljeno telo zovemo *materijalna tačka*. Nju je najbolje zamisliti kao sasvim malu loptu. Ovom pretpostavkom znatno dobijamo, jer položaj materijalne tačke u prostoru možemo mnogo lakše odrediti na koordinatnom sistemu, nego li položaj nekog tela sa znatnim dimenzijama. Već u svakodnevnom životu često se položaj jednog tela sa merljivim dimenzijama uzima kao položaj jedne tačke, kao npr. geografski položaj lađe na okeanu. Glavno je da su dimenzije uočenog tela zanemarljivo male spram dimenzija prostora koji dolazi u obzir. Za određivanje položaja materijalne tačke služimo se po pravilu pravouglim koordinatnim sistemom, čiji početak i pravac osovina biramo kako nam je najzgodnije za dati slučaj. Ponekad je zgodnije uzeti polarni koordinatni sistem.

§ 5. **Kretanje.** Kretanje je svaka promena mesta nekog tela. Pojam kretanja je *relativan*, tj. on zavisi od stanja kretanja posmatrača koji o kretanju sudi. Čovek koji sedi u vagonu, nalazi se u miru ako se posmatra iz voza; posmatrajući sa zemlje, on se kreće zajedno sa vozom. Ako posmatramo sa zemlje, kuće su nepokretne, ali kad bi se posmatralo sa Sunca, one se kreću zajedno za Zemljom. Pri definiciji kretanja tela mora se uvek naglasiti odakle se sudi o kretanju, tj. koji se sistem tom prilikom smatra da je u miru. U fizici je dovoljno uzeti kao nepokretni sistem zemljinu površinu, laboratoriski sto i sl. i posmatrati kretanje u odnosu na njih. To znači, da se za određivanje položaja jednoga tela uzima koordinatni sistem, koji se zamišlja da je nepokretno vezan za zemlju.

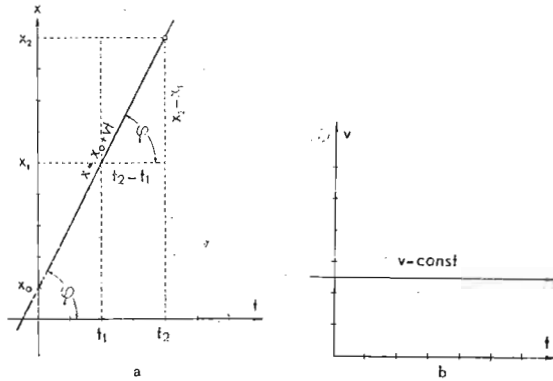
§ 6. **Brzina.** Svako kretanje je okarakterisano brojem koji predstavlja njegovu brzinu  $v$ . Ali nije dovoljno znati samo iznos brzine, mora se znati i njen pravac. Brzina je prema tome vektorska količina. Mera brzine je pređeni put u 1 sec. Telo ima brzinu  $v$ , ako za 1 sec. pređe  $v$  cm. Zato telo sa brzinom  $v$  pređe za  $t$  sec. put

$$s = vt \quad (1)$$

odakle je

$$v = s/t \quad (2)$$

Najprostiji slučaj kretanja imamo, kad se telo kreće pravolinijski nepromenjenom brzinom. Takvo kretanje zove se pravolinijsko, ravn



Sl. 6. Grafičko pretstavljanje pravolinijskog uniformnog kretanja. a) Pređeni put je funkcija vremena  $t$ ; b) brzina kao funkcija od  $t$ .

nomerno (uniformno) kretanje.

Neka se telo kreće po  $x$ -osi koordinatnog sistema. U vremenu  $t_1$  ono se nalazi u tački  $x_1$ , u vremenu  $t_2 = t_1 + t$  u tački  $x_2$ . Tada je njegova brzina prema jed. (2)  $v = (x_2 - x_1)/t$ . Da li je ovaj izraz pozitivan ili negativan, zavisi od pravca koji smo dali pozitivnoj  $x$ -osi, što ima znači samo matematički

a ne i fizički značaj. Ako je brzina u jednom pravcu pozitivna, onda je brzina u potpuno suprotnom pravcu negativna. Razlika između pozitivnih i negativnih brzina, ima s obzirom na njihovu vektorsku prirodu samo onda smisla, kad se tiče kretanja u pravcu jedne iste putanje ili paralelnih putanja.

Na sl. 6a pretstavljena je, u funkciji vremena  $t$ , promena mesta tela koje se uniformno kreće duž  $x$ -ose. Vidi se da je  $v = (x_2 - x_1)/t = tg\varphi$  ako je  $\varphi$  ugao koji gradi prava sa  $t$ -osom. Sl. 6b pokazuje kod uniformnog kretanja zavisnost brzine od vremena.

Neka je  $ds$  element putu,  $dt$  vreme potrebno da se taj put pređe, onda je prema jednačini (2)

$$v = ds/dt \quad (3a)$$

Brzina je diferencijalni količnik puta po vremenu. Obrnuto, pređeni put za vreme  $t$  ravan je

$$s = \int_0^t v dt \quad (3b)$$

Pređeni put je vremenski integral brzine.

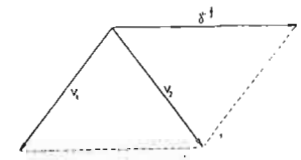
§ 7. **Ubrzano kretanje.** Kretanje čija se brzina sa vremenom menja po veličini ili pravcu, zovemo ubrzano kretanje i to ne samo kad brzina raste, već i kad ona opada. Prema tome je ubrzano kretanje i kretanje po krivoj putanji ravnomernom brzinom. Usporeenje se može smatrati i kao negativno ubrzanje (vidi za to primedbu u pretposlednjem stavu ovog paragrafa). Ubrzanje je utoliko veće, ukoliko se brže menja brzina u pravcu i po veličini. Zbog toga se za ubrzanje uzima promena brzine u 1 sec. Ako je brzina tela u početku vremena  $t$ ,  $v_1$  a po isteku tog vremena  $v_2$ , onda je ubrzanje

$$\gamma = \frac{v_2 - v_1}{t} \quad (4)$$

$$v_2 = v_1 + \gamma t \quad (5)$$

Pri tome se sabiranje na desnoj strani jednačine (5) vrši na vektorski način (zbir vektora  $\gamma t$  i  $v_1$ ). Ubrzanje je dakle takođe vektorska veličina, jer je potrebno pored njegove veličine naznačiti mu i pravac.

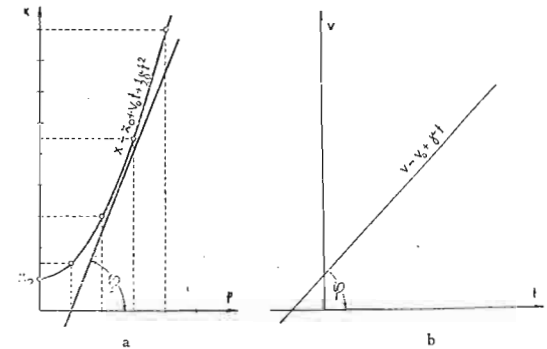
Iz sl. 7 se vidi da jedno telo može dobiti ubrzanje, a da mu se brzina ne promeni. Telo u početku ima brzinu  $v_1$  a na njega deluje u pravcu strelice  $\gamma t$  ubrzanje  $\gamma$ . U ovom slučaju sabiraju se brzina  $v_1$  i dodata brzina  $\gamma t$  u rezultujuću brzinu  $v_2$  koja je po veličini jednaka sa  $v_1$ .



Sl. 7. Slaganje kretanja.

Najprostiji slučaj ubrzanog kretanja jeste pravolinijsko ubrzano kretanje sa stalnim ubrzanjem. Na sl. 8 a i b pretstavljena je zavisnost položaja  $x$  od vremena

$t$  i brzine  $v$  za taj slučaj. Brzina se ovde ne može na tako prost način odrediti kao u jednačini (2), jer se na putu  $s = x_2 - x_1$  stalno menja. Ako je pređeni put  $x_2 - x_1$  vrlo mali —  $dx$  —, a vreme za koje ga telo pređe  $dt$ , onda se brzina na putu  $dx$  može smatrati kao konstantna, pa je prema jednačini (3a)



Sl. 8. Grafičko pretstavljanje podjednako ubrzanog kretanja.

$$v = dx/dt \quad (6)$$

Dakle brzina je jednaka diferencijalnom količniku puta po vremenu. Vidi se da je i u ovom slučaju brzina u vremenu  $t$  pretstavljena tangentom na-

gibnog ugla  $\varphi$  krive  $(x, t)$ , tj. predstavljena je nagibom tangente na krivu u toj tački.

Analogo prema jednačini (6) možemo umesto (4) napisati

$$\gamma = dv/dt = d^2s/dt^2 \quad (7)$$

gde  $dv$  označava priraštaj brzine u vremenu  $dt$ .  $\gamma$  je nagibni ugao krive  $(v, t)$  spram ose  $t$  (8).

Znak ubrzanja  $\gamma$  zavisi prema (4) od znaka  $v_2 - v_1$ , pa od toga i od izbora pozitivnog koordinatnog pravca. Pozitivno ubrzanje u matematičkom smislu je ono, koje brzini saopštava brzinu u pravcu rasteće pozitivne ose. Ali ako se telo kreće nasuprot toga pravca, a pri tome mu brzina opada, ipak je ovo ubrzanje pozitivnog znaka.

Integraljenjem jed. (7), uzev da je  $\gamma$  konstantno u vremenu i prostoru, tj. nezavisno od  $x$  i od  $t$

$$v = dx/dt = v_0 + \gamma t \quad (8)$$

i ponovnom integracijom

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (9)$$

Ovde  $x_0$  i  $v_0$  označavaju mesto i brzinu tela za  $t = 0$ .

**§ 8. Uglovna brzina i uglovno ubrzanje.** Od krivolinijskih kretanja posmatračemo samo kretanje materijalne tačke po krugu, sa uniformnom brzinom. Za određivanje mesta materijalne tačke  $P$ , najzgodnije je u ovom slučaju poslužiti se koordinatnim sistemom u kome je ovo mesto prvo određeno poluprečnikom kruga  $r$ , a zatim uglom  $\varphi$  koji grade poluprečnik što prolazi kroz tačku  $P$  (radius vektor) sa nepokretnom pravom  $OA$  koja takođe prolazi kroz centar kruga (sl. 9). Pošto je poluprečnik konstantan, menja se samo kod kružnog kretanja ugao  $\varphi$ . Ukoliko se brže menja  $\varphi$ , utoliko je brža i promena mesta materijalne tačke na krugu. Kad  $\varphi$  merimo lučnom merom, onda je luk između uglova  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  jednak  $r(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Ako materijalna tačka taj luk pređe za vreme  $t$ , onda je njena brzina prema jednačini (2)

$$v = \frac{r(\varphi_2 - \varphi_1)}{t} \quad (10)$$

ili u obliku diferencijala

$$v = r \frac{d\varphi}{dt} \quad (11)$$

$\omega = d\varphi/dt$  zove se u g l o v n a b r z i n a kružnog kretanja, jer je  $\omega$  brzina promene ugla  $\varphi$ , tj. priraštaj ugla  $\varphi$  u jedinici vremena. Razume se da za

više obrtaja  $\varphi$  poraste i preko vrednosti  $2\pi$ . Za dva puna obrta je  $\varphi = 4\pi$ , a za  $n$  punih obrta  $n \cdot 2\pi$ .

Ako uglovna brzina nije konstantna, može se analogo sa § 7 definisati uglovno ubrzanje  $\eta$  koje je priraštaj uglovne brzine u jedinici vremena

$$\eta = d\omega/dt$$

Uglovna brzina i ubrzanje su takođe vektori, jer je za određivanje obrtnog kretanja potrebno poznavati pravac obrtne ose i smisao rotacije. Uglovne brzine mogu se predstaviti strelicama čija je veličina srazmerna mernom broju brzine, čiji pravac stoji upravno na ravni putanje obrtnog tela u smislu progresivnog kretanja desnog zavrtnja, (većina zavrtnja i burgija su »desni« tj. sa hodom na desno) kad se obrće u smislu date rotacije (sl. 9b). Sabiranje dvaju takvih vektora se vrši na isti način kao i sabiranje ostalih vektora. Ovo isto važi i za uglovno ubrzanje.

**§ 9. Harmonisko kretanje.** Kao specijalni slučaj ubrzanog kretanja posmatračemo još harmonisko kretanje, nazvano tim imenom usled toga, što se čisti tonovi proizvode tom vrstom kretanja. Mnoga tela se tako kreću kad njihovo kretanje izazivaju elastične sile, npr. zategnut elastičan prut.

Posmatračemo prvo uniformno kružno kretanje konstantne uglovne brzine  $\omega$ , i postavimo pravougli koordinatni sistem tako, da mu se početak nalazi u središtu kruga (sl. 10). Koordinate neke tačke na kružnoj putanji su u ovom slučaju

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi \quad (12)$$

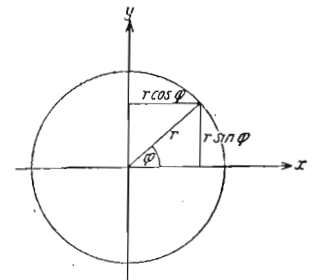
ako sa  $r$  obeležimo poluprečnik kruga, a sa  $\varphi$  ugao između njega i pozitivne  $x$ -ose. Kad je brzina materijalne tačke po kružnoj putanji uniformna, onda je

$$\varphi = \omega t \quad (13)$$

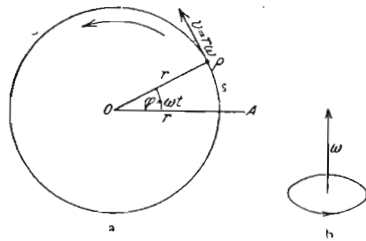
ako sa  $t$  obeležimo vreme proteklo od momenta u kome se tačka nalazi na  $x$ -osi. Prema tome su koordinate materijalne tačke u vremenu  $t$

$$x = r \cos \omega t \quad (14a) \quad y = r \sin \omega t \quad (14b)$$

Ako se npr. posmatra komponenta kretanja u pravcu  $x$ -ose, što se može učiniti očiglednim kad se kružno kretanje posmatra sa jedne tačke ose  $y$  koja se nalazi van kruga, dobija se pravilno tzv. periodsko kretanje ili oscilovanje (talasanje), koje se naziva harmoniskim kretanjem kad odgovara uslovima izloženim u jednačinama 14a i 14b. Da li je tom prilikom uzeta koordinata proporcionalna *sinusu* ili *kosinusu*, sasvim je svedjedno, jer



Sl. 10. Uz harmonisko kretanje.



Sl. 9. Kružno kretanje.



se obe ove funkcije sa rastećim  $\omega t$  menjaju na isti način. Da li se javlja  $\sin$  ili  $\cos$  zavisi jedino od izbora koordinatnog početka.  $r$  je maksimalna vrednost za  $x$  (ili  $y$ ).  $r$  se zove amplituda oscilacije.

Komponente brzine  $v_x$  i  $v_y$  u pravcu  $x$  ili  $y$  dobićemo prema jed. (3) diferenciranjem jed. 14 po  $t$

$$v_x = dx/dt = -r\omega \sin \omega t; \quad v_y = r\omega \cos \omega t \quad (15)$$

a ponovnim diferenciranjem gornjih jednačina (15) po  $t$  dobijamo ubrzanje u tim pravcima

$$\gamma_x = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x; \quad \gamma_y = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \quad (16)$$

koje je proporcionalno koordinatama  $x$  i  $y$ .

Obrnuto možemo zaključiti, da je kretanje uvek harmonisko kad je ubrzanje tela proporcionalno razdaljini tela od jedne određene tačke i upravljeno u pravcu te tačke, u ovom slučaju je tačka  $x=0, y=0$ .

### Ponašanje čvrstih tela pod uticajem sila

§ 10. **Sile kao uzroci promene kretanja.** Do sada smo posmatrali promene brzina bez obzira na uzroke koji su ih izazvali. U prirodi takve promene često srećemo, iako uzroci promena nisu neposredno vidljivi (npr. slobodno padanje, kos hitac), ali ima slučajeva i kad ih na prvi pogled možemo spaziti. To biva naročito onda, ako se uzrok nalazi u našem sopstvenom telu, kad mi snagom svojih mišića utičemo ma na koji način na kretanje tela, bilo da ga iz stanja mira stavimo u pokret, bilo da pokrenuto telo zaustavimo, ili da njegovu brzinu i pravac ma na koji način menjamo. U svima nabrojanim slučajevima dejstvuje »nešto« što mi zovemo silom (snagom) svojih mišića. Kada su neposredne posledice uzroka iste, onda i ti uzroci moraju biti isti, pa zato u svima slučajevima kada nešto ekvivalentno sa snagom naših mišića izaziva promenu kretanja nekog tela, mi to »nešto« zovemo silom. Do istog zaključka dolazimo razmišljanjem, da snagom svojih mišića možemo sprečiti ono što teži da promeni kretanje nekog tela, npr. kad u ruci držimo telo koje bi inače palo na zemlju. Pošto se isto istim može poništiti, to možemo da i ono što bi promenilo stanje kretanja tela (ovde mirovanje) nazovemo i u ovom slučaju sila, koja ovde potiče od zemljine teže.

§ 11. **Princip inercije.** Još Galilej je naglasio, da telo na koje ne deluje nikakva sila zadržava svoje kretanje nepromenjeno, kako po brzini, tako i po pravcu. Iz iskustva se zna da je za održavanje stalne brzine nekoga tela koje se kreće po zemljinoj površini (npr. železnica, kola, lađa), uvek potrebno dejstvo neke sile. Ali to dolazi samo usled sila koje otežavaju i na kraju sprečavaju kretanje, a koje mi zovemo trenje. Trenje poništava ona sila koja održava brzinu tela konstantnom. Kad trenje ne bi postojalo, onda bi se npr. železnički vagoni mogli kretati po ravnoj horizontalnoj

podlozi nepromenjenom brzinom i bez lokomotive. Uglučana čelična lopta bačena po ravnom ledu prelazi vrlo veliki put i brzina joj se lagano smanjuje, zato što je trenje vrlo malo. Uzrok usled koga pokrenuto telo teži da sačuva svoje kretanje nepromenjeno, ili usled koga je potrebno da na to telo dejstvuje neka sila, da bi mu se kretanje promenilo, zove se inercija (lenjivost) tela. To je opšta osobina svih tela i to ona, usled koje pored teže — koja ne postoji uvek — najjasnije zapažamo prisustvo i postojanje tela. Njuto je tu osobinu iskazao u prvom od svoja tri aksioma, koji su osnovi mehanike, na sledeći način:

»Svako telo zadržava svoje pravolinijsko uniformno kretanje, sem u slučaju kad na njega dejstvuje sila, koja njegovo stanje kretanja menja.«

Ovde je obuhvaćen i slučaj kad se telo nalazi u miru, jer se mir može shvatiti kao kretanje sa brzinom  $v=0$ .

Prvi Njutnov aksiom zove se češće princip inercije.

On se može i ovako iskazati:

Kadgod vidimo da telo menja brzinu ili pravac svoga kretanja, možemo tvrditi da na telo dejstvuje neka sila. Ili: Uzrok svake promene brzine i pravca kretanja je neka sila.

§ 12. **Drugi Njutnov aksiom.** Drugi Njutnov aksiom, koji je iskazao Galilej još 1632, glasi:

»Promena kretanja (mutatio motus) srazmerna je sili i vrši se u onom pravcu, u kome dejstvuje sila.«

Šta treba podrazumeti pod »promenom kretanja«? Ako imamo isto telo na koje naizmenično dejstvuju različite sile, onda se ovaj pojam može smatrati kao promena brzine, dakle kao ubrzanje, i može se kazati da je ubrzanje srazmerno sili. Ali ako imamo različita tela, to se više ne sme reći, jer iz svakodnevnog iskustva znamo, da ubrzanja koja različita tela dobijaju od iste sile, mogu biti vrlo različita. Ona promeni svoga stanja kretanja stavljaju nasuprot različite otpore, jer imaju različitu inerciju. To različito ponašanje tela pripisujemo osobini koja se nalazi u samim telima i koju zovemo masa. Masa dakle nije izraz za samu materiju, već za jednu osobinu tela. Ali u isto vreme to je i najzgodnija mera za količinu materije jednog tela.

Dakle iste sile različitim telima daju ubrzanja koja su utoliko manja ukoliko je veća masa tela. Prema tome je ubrzanje  $\gamma$  upravo srazmerno sili  $k$ , a obrnuto srazmerno masi tela  $m$ ,

$$\gamma = \frac{k}{m}, \text{ odnosno } k = m\gamma^* \quad (1)$$

Pod promenom kretanja treba dakle razumeti proizvod iz mase i ubrzanja. Pošto sila nije određena samo svojom veličinom, već i pravcem, to je

<sup>\*</sup>) Sila se najčešće označava slovom  $f$ . Iz tehničkih razloga u tekstu će sila biti obeležena sa  $k$ .

ona vektor i jed. (1) ne izražava samo jednakost mernih brojeva obeju strana, već i pravce oba vektora  $k$  i  $\gamma$ .

Drugi Njutnov aksiom je dopuna prvog aksioma za tačnije definisanje pojma sile. On iskazuje da se sila meri svojom veličinom i ubrzanjem koje saopštava jednom određenom telu, i drugo da se sili pripisuje onaj pravac koji ima i ubrzanje. Najzad on je definicija pojma inertne mase.

Masa je čisto kvantitativna mera i potpuno je određena kad je poznata jedinica i njen merni broj. Prema tome je masa skalarna veličina.

Merenje (upoređivanje) masa ne vrši se obično upoređivanjem njihovih inercija, već njihovih težina (merenje na terazijama).

Internacionalni prototip jednog kilograma čuva se u Parizu, a tačne njegove kopije nalaze se u svima kulturnim zemljama.

§ 13. **Količina kretanja.** Jednačina (1) § 12. može se s obzirom na jednačinu (4), § 7 napisati takođe u obliku

$$k = \frac{m(v_2 - v_1)}{t} = \frac{mv_2 - mv_1}{t} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2)$$

Sila  $k$  je prema tome neposredno jednaka promeni proizvoda iz mase i brzine  $mv$  za vreme  $t$  ili je jednaka diferencijalnom količniku od  $mv$  po  $t$ . Proizvod iz mase i brzine zove se količina kretanja ili impuls mase  $m$ , pa se stoga drugi Njutnov aksiom može iskazati i rečima: Promena količine kretanja u jedinici vremena je jednaka sili koja dejstvuje. I količina kretanja ima se smatrati kao vektor. Stavljanjem znaka jednakosti između dva vektora označujemo da su oni jednaki ne samo po veličini, već i po pravcu.

Sada tek možemo odgovoriti na pitanje postavljeno u početku § 12, šta se podrazumeva pod »promenom kretanja«. Podrazumeva se dakle promena količine kretanja.

Iz jed. (2) neposredno izlazi

$$mv = \int k dt \quad (3)$$

Količina kretanja je vremenski integral sile.

§ 14. **Jedinica sile.** Prema § 13. mora se za jedinicu sile uzeti ona sila koja masi  $m$  daje toliko ubrzanje  $\gamma$ , da je proizvod  $m\gamma = 1$ . To je slučaj u CGS sistemu kad su i  $m$  i  $\gamma$  npr. ravni jedinici. Zbog toga:

Jedinica sile je ona sila koja masi od 1 g saopštava ubrzanje  $1 \text{ cm/sec}^2$ .

Tako definisana jedinica zove se din. Ona je  $\frac{1}{981}$  one sile koju ima jedan gram mase usled teže na morskome nivou ili približno je ravna 1 mg.

§ 15. **Sile inercije. D'Alamber-ov princip.** Količina  $m\gamma$ , koja zavisi od inercije mase  $m$ , označava se kao sila inercije ili kao otpor inercije

mase  $m$  spram ubrzanja  $\gamma$ . Otpor inercije suprotan je sili  $k$  i ima znak suprotan sili. Kad se o ovome vodi računa može se jednačina (1) napisati  $k + (-m\gamma) = 0$ . To je D'Alamber-ov princip (1793) koji iskazuje da je zbir sila koje dejstvuju na jedno telo uvek ravan nuli. Naročiti značaj ima sila inercije kod krivoliniskog kretanja.

§ 16. **Sabiranje sila. Stav o paralelogramu sila.** Kao što je već kazano, za odredbu jedne sile potrebno je pored poznavanja njene veličine, znati još i njen pravac. Sile su dakle vektori i sabiraju se po istom pravilu kao i oni.

Kad na jedno telo dejstvuje istovremeno više sila, ono dobija takvo kretanje, koje bi imalo kad bi na njega dejstvovala jedna jedina sila, koja je po veličini i pravcu jednaka rezultanti svih sila, nađenoj po pravilima vektorskog sabiranja. Sve se te sile mogu dakle zameniti jednom, koja je njihova rezultanta.

Moguće je zamisliti da se dejstvo jedne sile menja ma u kom smislu, dodajući i drugu neku silu. Za taj slučaj ne bi se moglo prosto primeniti vektorsko sabiranje. Ali da je ovo sabiranje stvarno moguće, izlazi iz činjenice da se dejstva više sila uvek nesmetano superponiraju. Ova činjenica koju je još Njutn zapazio, zove se stav o nezavisnosti dejstva sile.

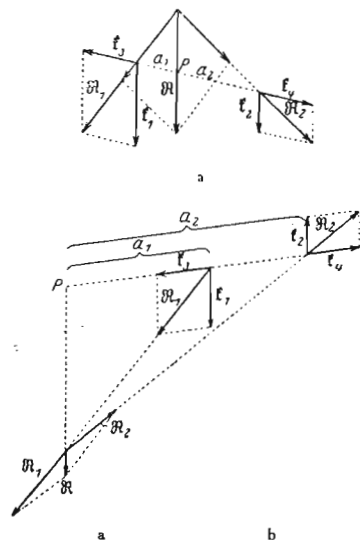
Za grafičko iznalaženje rezultante sila, primenjujemo pravilo o vektorskom sabiranju, izneto u § 3. Pri tome se svakoj sili mora odrediti napadna tačka, tj. mesto na telu u kome se zamišlja da sila dejstvuje. Ako više sila dejstvuje u jednoj tački, iznalaženje rezultante je veoma prosto. Ali kad sile dejstvuju u više tačaka tela, konstrukcija rezultante nije bez daljeg moguća. Ovdje ćemo posmatrati samo onaj slučaj kad sile leže u istoj ravni, a nemaju istu napadnu tačku. Postoji stav da se napadne tačke sila mogu pomerati u istom pravcu i u jednom i u drugom smislu, a da se dejstvo sila ne promeni. Kod dejstva sile na čvrsto telo važan je položaj pravca (linije) dejstva, a ne naročiti položaj napadne tačke na toj liniji. Zbog toga se može pretpostaviti da je napadna tačka sila  $k_1$  i  $k_2$  u tački preseka njihovih produženih pravaca (sl. 11), pa se onda rezultanta može lako konstruisati. Ako još neka sila dejstvuje u istoj ravni, one se jedna za drugom sabiraju sa rezultantom, dok se najzad ne nađe rezultanta svih sila.



Sl. 11.  
Rezultanta sila koje nemaju istu napadnu tačku.

Da bi se izbegao nesporazum mora se naročito naglasiti, da se pri pomicanju napadne tačke u istom pravcu ne menja samo momentalno dejstvo sile. Dalji tok kretanja za koji je sem veličine i pravca spoljne sile, merodavno još i dejstvo otpora inercije, zavisi potpuno od položaja napadne tačke. Ako npr. sila deluje u jednoj tački površine tela i to u

nepromenljivoj pravcu u prostoru, onda će telo pod dejstvom te sile i inercije izvršiti izvesno obrtanje u prostoru, čija vrsta isključivo zavisi od toga da li sila ima napadnu tačku na prednjoj ili zadnjoj strani tela. Po sebi važan slučaj imamo kad dve jednake sile suprotnog pravca dejstvuju duž iste prave i poništavaju se. Dalje se nalazi, da je rezultanta dveju sila istog pravca i istoga smisla (koje leže na istoj pravci) ravna njihovom algebarskom zbiru.



Sl. 12. Rezultanta paralelnih sila.

Paralelne sile istog ili suprotnog pravca ne mogu se neposredno složiti po paralelogramu sila, jer nemaju zajedničke napadne tačke, a i njihova produženja se ne seku. U tom slučaju se spoje napadne tačke sila jednom duži (sl. 12a) i na njoj se dodaju dve proizvoljne ali jednake sile istog pravca, a suprotnog smisla,  $k_3$  i  $k_4$ . Ove sile su bez dejstva, jer se uzajamno potiru, te je dejstvo sve četiri sile isto kao da su ostale samo dve prvobitne  $k_1$  i  $k_2$ . Sada možemo naći rezultante  $R_1$  i  $R_2$  sila  $k_1$  i  $k_3$ , odnosno  $k_2$  i  $k_4$ . Ove rezultante nisu više paralelne, izuzev slučaja kad su  $k_1$  i  $k_2$  po veličini jednake, a po pravcu suprotne, te njihovu zajedničku rezultantu, odnosno rezultantu prvobitnih sila, možemo naći na već poznati način.

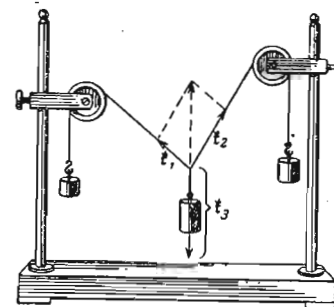
Prost račun pokazuje da je rezultanta paralelnih sila istoga pravca — koja razume se leži u istoj ravni u kojoj i sile — po veličini jednaka zbiru tih sila, po pravcu jednaka sa njima, dakle sa njima paralelna, a njen pravac seče duž koja spaja napadne tačke sila u tački  $P$ , čije se razdaljine od napadnih tačaka sila  $a_1$  i  $a_2$  imaju obrnuto srazmerno kao sile.

$$a_1 : a_2 = k_2 : k_1 \text{ ili } a_1 k_1 = a_2 k_2 \quad (4)$$

Ako su sile  $k_1$  i  $k_2$  paralelne, ali suprotnoga smisla (sl. 12b), onda je rezultanta  $R$  ravna algebarskoj razlici tih sila, paralelna je sa njima i ima pravac veće komponente. Njen pravac seče  $p r o d u \dot{z} e n u$  duž, koja spaja njihove napadne tačke, u produženju koje se nalazi sa strane veće sile, a razdaljine te tačke  $P$  od napadnih tačaka sila  $a_1$  i  $a_2$  imaju se opet obrnuto srazmerno veličini sila.

Ako dve sile koje dejstvuju na telo ne leže u istoj ravni, za njih se ne može naći zajednička napadna tačka. Može se dokazati, da se obe sile u tom slučaju mogu svesti uvek na jednu silu i par paralelnih, jednakih a suprotnih sila (spreg).

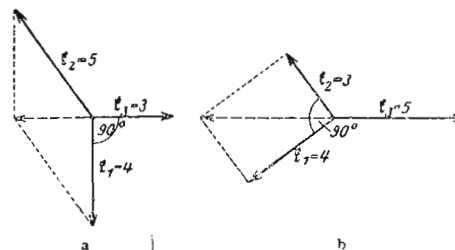
§ 17. Nekoliko ogleda o slađanju sila. Za dokaz gornjih pravila zgodno nam je da upotrebimo sile koje nam pruža teža na raznim telima, mada bi mogli upotrebiti i zategnute opruge, ili električne odnosno magnetne sile.



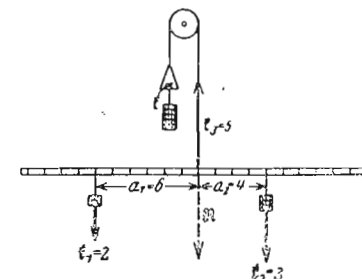
Sl. 13. Paralelogram sila.

Na jednom stativu utvrđena su dva kotura (sl. 13), preko kojih je prebačen konac, na čijim krajevima vise tegovi. Na tome koncu obešen je drugi, takođe opterećen tegom. Mase tih tegova imaju se kao  $k_1 : k_2 : k_3$ . Ovi obešeni tegovi dolaze u ravnotežu u jednom tačno određenom mestu. Čvor u kome se sastaju sva tri konca dolazeći od tegova, možemo smatrati kao materijalnu tačku ili telo vrlo male mase, tako da je dejstvo teže na nju neznatno. Na ovu tačku dejstvuju tri sile  $k_1$  i  $k_2$  levo i desno na gore,  $k_3$  upravno na niže. Ako se materijalna tačka ne kreće, onda znači da je rezultanta svih sila koje na nju dejstvuju ravna nuli. To je onda slučaj, kada je rezultanta od po dve sile jednaka i suprotna sa trećom silom i sa njom leži na jednoj pravci.

Za dokaz gornjih zakona stavi se npr. iza stativa karton na kome se nacrtala paralelogram sila prema pravcu konca. Sl. 14 a i b pokazuju to za



Sl. 14. Rezultanta paralelnih sila



Sl. 15. Paralelogram sila.

slučaj kad se sile imaju u odnosu 3 : 4 : 5, i to u dva različita položaja. U ovom specijalnom slučaju oba para manjih sila grade uglove od po  $90^\circ$ .

Laka ali kruta šipka duga oko 50 cm veže se u sredini koncem koji je prebačen preko nepokretnog kotura, a njena težina se izjednači (neutrališe) tegom  $k$  koji se nalazi u tasu obešenom na drugom kraju konca (sl. 15). Sada se obese ispod tase, kao i sa obadve strane konca, tegovi koji se imaju kao  $k_1 : k_2 : k_3$ . Nalazi se da je sistem u miru kad je

$$1) k_3 = k_1 + k_2 \quad 2) a_1 : a_2 = k_2 : k_1$$

Time je dokazana tačnost ranije izvedene konstrukcije, jer ovo stanje mira

pokazuje da je rezultanta sve tri sile ravna nuli. Znači da je rezultanta  $R$  sila  $k_1$  i  $k_2$  ravna sili  $k_3$  koja dejstvuje upravno naviše, sa njom ima suprotan pravac, a leži sa  $k_3$  u istoj ravni. Ali se isto tako može smatrati i  $k_2$  kao sila, koja poništava dejstvo rezultante sila  $k_1$  i  $k_3$ . Na sl. 15 ovu bi rezultantu trebalo tako nacrtati, da ima istu napadnu tačku sa  $k_2$ , ali da je upravljena naviše i da je jednaka  $k_2$  ( $k_3 - k_1$ ).

Vrlo jednostavno se može pokazati slaganje paralelnih sila i na sledeći način. Laka daščica se postavi na dvoje terazije za pisma, tako da je njena težina na njima podjednako raspoređena. Posle toga se na dasku stavi teg, a terazije obično pokazuju različita opterećenja, i to one su više opterećene kojima je teg bliži. Zbir opterećenja terazija, izuzimajući težinu same daske, uvek je ravan težini tela na dasci. Opterećenja se imaju obrnuto srazmerno sa rastojanjima od tela do terazija.

§ 18. **Pritisak.** Vrlo često se javlja slučaj, da veliki broj paralelnih sila, prosečno ravnomerno raspoređenih, dejstvuje upravno na površinu nekog tela. Tada se zbir tih sila koje dejstvuju na  $1 \text{ cm}^2$  površine zove **pritisak** na površinu. Ako je zbir svih paralelnih sila koje deluju na površinu  $F$  ravan  $k$ , onda je pritisak na površinu (podrazumeva se na jedinicu površine)

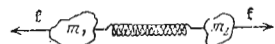
$$p = \frac{k}{F} \quad (5)$$

Ako npr. telo težine od  $1 \text{ kg}$  čija je potpuno glatka površina ravna  $100 \text{ cm}^2$ , leži na isto toliko velikoj ravnoj podlozi, onda na svaku jedinicu površine podloge pritiskuje  $\frac{1}{100}$  deo ukupne težine gornjeg tela. Pritisak na podlogu iznosi dakle  $10 \text{ g}$ . Pojam pritiska se često primenjuje u nauci o tečnostima i gasovima.

U fizici se strogo razlikuje pritisak od sile. U svakidanjem životu se često upotrebljava reč zatezanje koja je suprotnost pritisku. Kad se ovaj izraz upotrebi u fizici, on označava silu istu kao i pritisak, samo što nije upravljena na telo, već ide normalno od njegove površine.

§ 19. **Akcija i reakcija.** (3. Njutnov aksiom). Treći, osnovni Njutnov aksiom mehanike glasi:

»Sile kojima dva tela dejstvuju jedno na drugo po veličini su uvek jednake, po smislu suprotne i leže u pravcu prave koja spaja oba tela.«



Sl. 16. Akcija i reakcija.

Ili se takođe kaže kratko: **akcija** (dejstvo) je jednaka **reakciji** (protivdejstvu). Prost. primer ove vrste imamo kad su dva tela spojena zategnutom ili pritisnutom oprugom (sl. 16). Sila kojom opruga gura masu  $m_1$  na levo isto je toliko velika, koliko i ona koja tera masu  $m_2$  na desno. Isto je npr. slučaj pri sudaru dveju elastičnih lopti. Obe dobiju istu silu koja ih tera u suprotnim pravcima. Ubrzanja koja one dobiju tom prilikom zavise od njihovih masa.

§ 20. **Održanje količine kretanja.** Trećem Njutnovom aksiomu može se dati i drugi jedan važan oblik. Između dva tela masa  $m_1$  i  $m_2$  npr. onih na sl. 16, deluje sila  $k$ , Tada je po trećem Njutnovom aksiomu

$$k = m_1 \gamma_1 = -m_2 \gamma_2 \quad (6)$$

(Ovde su različiti znaci usled toga što ubrzanja imaju suprotne pravce). Prema tome je i

$$m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 = 0 \quad (7)$$

Neka je sada brzina mase  $m_1$  u početku vremena  $t$  ravna  $u_1$ , a po isteku tog vremena  $v_1$ , odgovarajuće brzine mase  $m_2$  neka su  $u_2$  i  $v_2$ . Tada na osnovu jednačine 4, § 7, možemo jednačinu (7) napisati takođe u obliku

$$\frac{m_1(v_1 - u_1)}{t} + \frac{m_2(v_2 - u_2)}{t} = 0$$

Odavde izlazi

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (8)$$

Na desnoj strani jednačine nalazi se zbir količina kretanja obeju masa u početku vremena  $t$ , sa leve strane isti zbir po isteku vremena  $t$ . Ovaj zbir se dakle u toku vremena nije promenio. Pri tome pojedinačne brzine apsolutno uzev mogu postati i manje i veće. Njihov priraštaj, odnosno smanjenje leži u suprotnom pravcu. Ako su  $u_1$  i  $u_2$  tj. početne brzine ravne nuli, onda je  $m_1 v_1 = -m_2 v_2$  tj. po isteku vremena  $t$  dobijene brzine imaju suprotan smisao i obrnuto su srazmerne sa odgovarajućim masama.

Razložimo kretanje obeju masa u pravcima osa pravouglog koordinatnog sistema u prostoru, onda gornji stav važi i za svaku komponentu brzine pojedinačno. Imamo dakle

$$\begin{aligned} m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} &= m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}; & m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} &= m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}; \\ m_1 u_{1z} + m_2 u_{2z} &= m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} \end{aligned} \quad (8a)$$

Ovo isto važi dalje kad imamo više od dve mase  $m_i$ , između kojih dejstvuju samo unutarnje sile. Unutarnje sile su one, koje dejstvuju jedino između samih tela, dakle ne potiču iz okoline van posmatranog sistema. Neka su  $u_{ix}$ ,  $u_{iy}$ ,  $u_{iz}$  komponente njihovog kretanja u pravcu tzv. fundamentalnih stavova o održanju u fizici.

$$\sum m_i u_{ix} = \text{const} \quad \sum m_i u_{iy} = \text{const} \quad \sum m_i u_{iz} = \text{const} \quad (8b)$$

Ovaj stav je nazvan stav o održanju količine kretanja ili stav impulsa. On iskazuje, da se zbir količina kretanja dvaju ili više tela ne menja pod dejstvom unutarnjih sila. Ovaj stav je jedan od t. zv. fundamentalnih stavova o održanju u fizici.

Primeri za održanje količine kretanja su u svakodnevnom životu naročito mnogobrojni. Ako se krećemo unapred u lakim kolima ili u lakom

čamcu, onda se kola odnosno čamac, kreću u suprotnom pravcu. Ako ruke kojima držimo teret naglo ispružimo napred, ostali delovi tela pokrenu se malo unazad. Stav impulsa je jedan oblik stava o akciji i reakciji.

Naročito karakterističan primer je t. zv. trzanje, koje se javlja kad se opali top ili puška. Između zrna i topa dejstvuje dok se zrno nalazi još u cevi pritisak barutnih gasova kao unutarnja sila. Usled ovoga pritiska ne kreće se samo zrno unapred, već i top unazad. Ako je masa zrna npr. hiljadu puta manja od mase topa onda je brzina kojom se top vraća unazad, hiljadu puta manja od brzine projektila. Raketne koje danas dobijaju veoma veliki tehnički značaj za pogon prevoznih i letećih sredstava, kreću se usled reakcije gasova koji izlaze sa vrlo velikom brzinom.

Metalna cev duža 20 cm, široka 2—3 cm a zatvorena na jednome kraju, snabde se izolovanim žicama između čijih krajeva u unutrašnjosti cevi može da skače varnica iz jednog induktora. Cev se namesti bilo kao top na točkove ili se obesi na dva dugačka konca. Ona se napuni smešom svetlećeg gasa i vazduha i zatvori se dobro jednim običnim zapušačem koji je opterećen olovom. Ako se smeša gasa upali varnicom zapušač izleti, a u isto vreme se cev krene unazad. Trzanje je utoliko veće, ukoliko je teži zapušač. Zapušač leti utoliko brže pa prema tome i utoliko dalje ukoliko je lakši.

§ 21. **Ravnoteža.** Ako se neko telo nalazi u miru, ili se kreće uniformno pravolinijski, ne može se iz obrnutog principa inercije zaključiti, da na njega ne dejstvuju sile. Može se samo zaključiti da se u svakom slučaju sile koje na njega dejstvuju uzajamno poništavaju tj. da je njihova rezultanta ravna nuli. Ustvari nema na zemlji nijednog tela, pa ma se ono nalazilo i u miru, na koje ne dejstvuje nikakva sila. Na sva tela deluje bar zemljina teža. Stanje tela u kome se ono nalazi kad se na njemu sile poništavaju, a naročito ako se telo nalazi u miru, zove se **ravnoteža**.

Ako na telo dejstvuju samo dve sile, ono se može nalaziti u ravnoteži jedino ako su te sile jednake, a suprotnog pravca i leže na istoj pravnoj.

Kad na jedno telo dejstvuju dve sile koje ne ispunjavaju ovaj uslov, onda se za uspostavljanje ravnoteže mora upotrebiti bar još jedna sila, koja zajedno sa rezultantom prvih dveju sila ispunjava gornje uslove. Neko telo pod dejstvom proizvoljnog broja sila nalazi se u ravnoteži, kad rezultanta svih ovih sila ima vrednost nulu. Kao primer tela u ravnoteži možemo uzeti čvor na sl. 13 i drvenu šipku na sl. 15.

Često zapažamo da se jedno telo nalazi u miru, iako na prvi pogled izgleda da na njega dejstvuje jedna jedina sila. Pri tačnijem ispitivanju pokazuje se da u ovim slučajevima dejstvuje najmanje još jedna sila, koja je sa prvom jednaka, a suprotnog pravca. Predmet koji se nalazi na stolu svojom težinom ugiba malo sto. Usled toga se u stolu javlja elastična sila, koja je jednaka težini, ali je upravljena na gore, tako da poništava silu

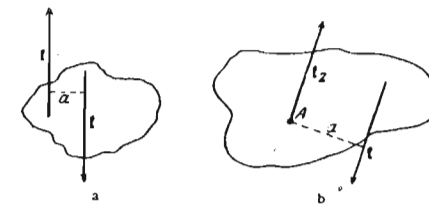
teže. Telo obešeno o spiralnu oprugu razvuče ovu usled čega se u njoj javlja sila koja vuče telo uvis, dakle poništava silu teže. Ovo je naročiti slučaj trećeg Njutnovog aksioma. Sile koje se javljaju tek pod dejstvom neke druge sile obeležavaćemo sa  $k_r$ .

§ 22. **Sprež sila. Obrtni momenat.** Ranije smo izostavili specijalan slučaj, kad na telo dejstvuju dve paralelne sile po veličini jednake, a po pravcima suprotne i uz to ne leže na istoj pravnoj. Takve sile nemaju rezultante. Dejstvo tih sila nazvanih **sprež** različito je od svih dosadanih slučajeva. One ne daju telu ubrzanje u jednom određenom pravcu, već izazivaju obrtanje tela tj. menjaju njegovu uglovnu brzinu.

Proizvod iz veličine sile  $k$  i njene normalne razdaljine  $a$  (sl. 17a) zove se **obrotni momenat** ili **momenat sprege**

$$N = ka$$

Ako je jedno telo utvrđeno na nepokretnoj osovini, a na njega s polja dejstvuje sila  $k$  u ravni koja je upravna na osu  $A$ , onda se u osi uvek javlja usled reakcije sila  $k_r$  jednaka sili  $k$ , a suprotno upravljena. Jedna jedina sila koja dejstvuje na telo obrtno oko nepokretne osovine ili tačke izaziva usled pojave reakcione sile jedan sprež, a s tim i obrtni momenat  $ka$ , ako  $a$  označava upravno rastojanje sile  $k$  od ose.



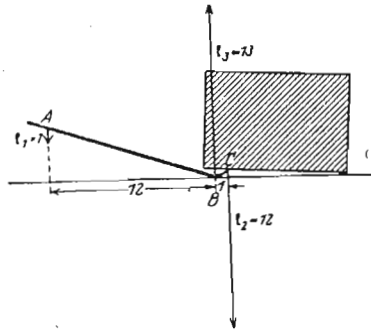
Sl. 17. a) Sprež sila, b) momenat obrtanja koji proizvodi jedna sila.

Obrtni momenat može se predstaviti vektorskom strelom, čija je dužina ravna ili proporcionalna veličini momenta koji stoji upravno na ravni u kojoj leže sile sprege, i čiji je vrh okrenut u onome pravcu u kome bi se napred pomerao desni zavrtnaj, kad bi se obrtao u pravcu obrtnog momenta. Sabiranje obrtnih momenata vrši se kao sabiranje vektora.

Telo na koje dejstvuju više spregova, nalazi se u ravnoteži, kad je vektorski zbir njihovih obrtnih momenata ravan nuli. Ako npr. na jedno telo dejstvuju dva sprega, onda ravnoteža postoji samo onda ako su oba momenata jednaka, a imaju suprotni smisao obrtanja.

§ 23. **Poluga.** Poluga je telo obrtno oko ose ili tačke na koje deluju više sila — najčešće i najmanje tri — od kojih je jedna sila u obrtnoj tački. Osa ili tačka oko koje se telo može obrtati, može biti nepokretna osa ili tačka koja pri promeni položaja tela ne menja svoje mesto u telu. Ali ovo nije potrebno. To npr. nije slučaj kod čuski je poluga (sl. 18). Na čuski u tački A dejstvuje spoljašnja sila, npr. čovečja ruka, kod B i C dejstvuju sile otpora koje ova poluga treba da savlada.

Kao najprostiji slučaj poluge možemo zamisliti telo obrtno oko nepokretne osovine A (sl. 19a). Pustimo da na to telo s polja, npr. preko opruga, dejstvuju sile  $k_1$  i  $k_2$ . Ove izazivaju u A usled reakcije silu  $k_r$ , koja je jednaka rezultanti sila  $k_1$  i  $k_2$  a sa njom ima suprotan pravac, i u opštem slučaju ne leži sa rezultantom na istoj pravoj. Ona dakle sa rezultantom gradi spreg, koji teži da obrće telo.



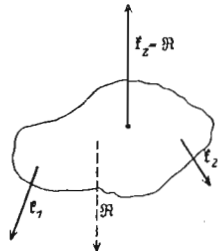
Sl. 18. Shema poluge.

Takva poluga je samo onda u ravnoteži, tj. ne obrće se, kada rezultanta spoljašnjih sila leži sa reakcionom silom na istoj pravoj (sl. 19b). U tom slučaju na polugu ne dejstvuje nikakav obrtni momenat, jer su obrtni momenti sila  $k_1$  i  $k_2$  iste veličine a suprotnog pravca. Prema tome je

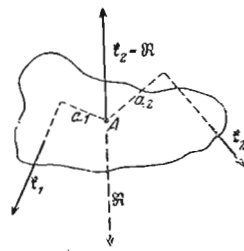
$$k_1 \cdot a_1 = -k_2 \cdot a_2 \text{ ili } k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 = 0 \quad (10)$$

ako su  $a_1$  i  $a_2$  upravna rastojanja osovine od sila  $k_1$  i  $k_2$ , koja se takođe zovu i kraci sile. Dakle poluga je u ravnoteži, kad je zbir obrtnih momenata koji na nju dejstvuju ravan nuli. Ovo je opšti oblik zakona o poluzi i on uvek važi, takođe kad na nju dejstvuju više od dve sile spolja, koje leže u istoj ravni, ne računajući tu silu reakcije u osovinu obrtanja. Dakle

$$\sum k_i \cdot a_i = 0$$



Sl. 19 a. Sile na poluzi.



Sl. 19 b. Poluga u ravnoteži.

§ 24. **Momenat inercije.** Posmatrajmo materijalnu tačku  $m$  koja je krutom šipkom bez težine spojena sa nepokretnom osovinom. Upravnu razdaljinu između tačke i osovine obeležimo sa  $a$ . Na tačku spolja dejstvuje sila  $k$  u ravni koja stoji normalno na osovinu. Tada se shodno jednačini (9) javlja momenat obrtanja  $N$ . Neka je  $N = ka = am\gamma$ , gde je  $\gamma$  ubrzanje koje dobija materijalna tačka. Ali pošto se tačka može da kreće samo po krugu oko osovine, to možemo staviti  $\gamma = ad\omega/dt = a\eta$  gde je  $\omega$  njena uglovna brzina, a  $\eta$  njeno uglovno ubrzanje. Prema tome je

$$N = ma^2\eta = J\eta \quad (11)$$

gde smo stavili da je

$$J = ma^2. \quad (12)$$

Prema poslednjoj jednačini definisano  $J$  zove se momenat inercije materijalne tačke  $m$  u odnosu spram osovine obrtanja na upravnom rastojanju  $a$ .

Sva tela imaju momenat inercije, čija veličina zavisi od pravca i položaja osovine obrtanja. Osovina se može nalaziti u telu, ali je i van tela. Momenat inercije jednog tela, jednak je algebarskom zbiru momenata inercije njegovih pojedinačnih masa  $m_1, m_2, \dots$ , dakle

$$J = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \dots = \sum m_i a_i^2$$

ili u obliku integrala

$$J = \int a^2 dm \quad (13)$$

Za izračunavanje ovoga integrala je potrebno poznavati raspored elemenata mase  $dm$  tela, u funkciji rastojanja  $a$ .

Jednačina (11) koja izražava odnos između  $N, J$  i  $\eta$  važi takođe za tela koja imaju zapreminu. Treba primetiti da je ona formalno jednaka sa drugim Njutnovim aksiomom, jer po jednačini (11) obrtni je momenat ravan momentu inercije umnoženim uglovnim ubrzanjem. Formalno dakle dolazi momenat obrtanja na mesto sile, momenat inercije na mesto mase, a uglovno ubrzanje na mesto običnog ubrzanja. Stvarno ovo i jeste samo promena oblika drugog Njutnovog aksioma.

Označimo sa  $J_0$  momenat inercije u odnosu na osu obrtanja koja prolazi kroz težište tela. Tada je momenat inercije u odnosu na ma koju osu paralelnu sa prvom osom

$$J = J_0 + ma^2 \quad (14)$$

gde je  $m$  ukupna masa tela,  $a$  rastojanje osovine od njoj paralelne prave koja prolazi kroz težište (Steiner-ov zakon).

Momenat inercije jedne homogene lopte mase  $m$  i poluprečnika  $r$ , u odnosu na osovinu koja prolazi kroz njeno središte (težište) iznosi  $J = \frac{2}{5}mr^2$ . Momenat inercije za pravilna geometrijska tela obično se može izračunati, dok se za nepravilna mora određivati eksperimentalno.

§ 25. **Kružno kretanje. Centripetalna i centrifugalna sila.** Telo mase  $m$  kreće se nepromenjenom brzinom  $v$  oko jedne nepomične tačke, po krugu poluprečnika  $r$ . Njegova uglovna brzina neka je  $\omega$ . Brzina na njegovoj putanji je tada  $v = r\omega$ . Krivolinisko kretanje je ubrzano kretanje i onda kada se telo po putanji kreće nepromenjenom brzinom.

Ubrzanja u pravcima normalnih osa koordinatnog sistema su (sl. 20)

$$\gamma_x = -\omega^2 x \text{ i } \gamma_y = -\omega^2 y \quad (15)$$

Pošto vektori  $\gamma_x$  i  $\gamma_y$  stoje jedan na drugom upravno, to je ukupno ubrzanje

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = -\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = -\omega^2 r \quad (16)$$

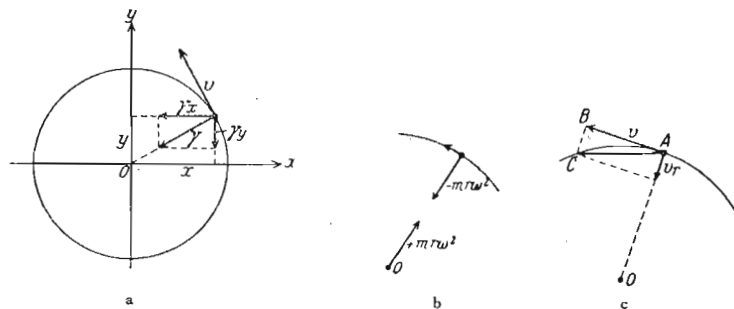
Na masu  $m$  deluje dakle sila

$$k = m\gamma = -m\omega^2 r = -\frac{mv^2}{r} \quad (17)$$

Ova sila je upravljena ka centru kružne putanje, jer je po jednačini (15)

$$\gamma_x : \gamma_y = x : y.$$

To je ona sila, koja prisiljava telo da se kreće po kružnoj putanji (npr. konac kod pračke). Ona se zove centripetalna sila. Ali to nije



Sl. 20. Uz centrifugalnu silu

neka naročita sila koja je svojstvena samo kružnom kretanju, već samo ona sila koja stalno privlači telo ka centru obrtanja. To mogu biti elastične sile u nekoj šipci, opruzi ili zategnutom koncu, dalje to može biti sila teže, električna i magnetna sila. Početak centripetalne sile leži u centru obrtanja. Ako iz centra obrtanja na masu  $m$  deluje sila  $k$ , to po trećem Njutnovom aksiomu mora delovati ista tolika sila suprotnoga pravca, od mase  $m$  na centar obrtanja. Obrtna masa  $m$  vuče dakle radialno centar obrtanja silom  $mr\omega^2$ . To je ona sila koju osećamo kad vrtimo kamen u prački. Ona nam daje utisak kao da od tela deluje neka sila na našu ruku, kojom bi telo htelo da ode u radialnom pravcu. Ustvari ovo je samo protivdejstvo inercije obrtnog tela, protiv dejstva sile koja potiče od ruke, a nije, kao što bi se moglo učiniti, sila koja potiče od rotacije i deluje na obrtno telo u radialnom pravcu, pa se preko njega prenosi na centar. Kad bi to bio slučaj, onda bi moralo obrtno telo, kad bi ga odjednom pustili ili presekli konac koji ga drži, pod zajedničkim dejstvom svoje inercije i ove sile — po prestanku centripetalne sile — ići radialno od centra, međutim ono se čim ga pustimo (kad na njega ne utiču druge sile npr. teža), kreće prema prvom Njutnovom aksiomu konstantnom brzinom  $v = r\omega$  pravolinijski, dakle tangencijalno na svoju prvobitnu putanju. Ova tzv. centrifugalna sila  $+mr\omega^2$  ne napada dakle stvarno obrtno telo, već usled

njegove inercije ide od njega i napada centar obrtanja (sl. 20b). Ona nije ništa drugo do reakcija centripetalne sile.

Stvarni proces obrtanja grubo je šematski pretstavljen na sl. 20c. U vremenu  $t$  nalazi se telo koje rotira u tački A. Kad ne bi delovala centripetalna sila ono bi se usled svoje brzine  $v = r\omega$  kretalo za vreme  $dt$  pravolinijski i došlo bi do tačke B. Ali usled centripetalne sile dobija ono ubrzanje normalno na  $v$  koje mu u toku vremena  $dt$  saopšti početnu brzinu  $v_r$ . Pod zajedničkim dejstvom obeju ovih brzina dospe telo za vreme  $dt$  u tačku C na kružnoj putanji. Ovo kretanje može se pretstaviti samo grubom slikom, jer se stvarno pravac brzine  $v_r$  duž luka AC stalno menja. Mora se zamisliti ovaj proces na elementu kružnog luka, tada su oba vektora  $AB = AC = v$  stvarno jedan drugom jednaki tj. brzina  $v$  ostaje nepromenjena i protiv stalnog ubrzanja upravnog na pravac putanje.

Centrifugalna sila koja se javlja pri rotaciji iznosi dakle

$$k = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r} \quad (18)$$

Često se govori, da pri rotaciji centrifugalna i centripetalna sila drže jedna drugoj ravnotežu. To je tačno. Ali ne treba zaboraviti, da se ta ravnoteža ne odnosi na telo koje se obrće, već na telo (šipku, konac), koje ga spaja sa centrom obrtanja.

Ovo što je kazano važi za svako krivolinijsko kretanje.

Veličina centrifugalne sile u ma kojoj tački krivolinijske putanje izračunava se prema jed. 18, kad se mesto  $r$  stavi poluprečnik krivine putanje u toj tački.

Pojava centrifugalne sile je dakle posledica inercije rotirajućeg tela koje ubrzanju protivstavlja u radialnom pravcu otpor inercije. Po Opštoj teoriji relativiteta potiče inercija tela od prisustva drugih masa u prostoru. Bez ovih ne bi bilo nijednog dejstva inercije, pa dakle ni centrifugalne sile.

### § 26. Centrifugalna sila, posmatrana iz samog rotirajućeg sistema.

U § 25 pretstavili smo odnose sila na rotirajućem telu tako, kao što oni izgledaju posmatraču, koji se nalazi u miru van rotirajućeg sistema. Sada ćemo se staviti u položaj posmatrača koji istovremeno sa uočenim telom rotira sa istom uglovnom brzinom oko iste osovine. U tom položaju se nalazimo baš mi, kad posmatramo dejstvo zemljinog obrtanja. Kao prost primer zamislimo kružnu ploču koja se obrće oko centralne osovine, a u njenom središtu se nalazi posmatrač. Dok bi posmatrač koji se nalazi izvan ploče sve procese rotacije sveo na koordinatni sistem koji se nalazi u miru van ploče, posmatrač koji se obrće sveće to na koordinatni sistem koji je čvrsto vezan sa rotirajućim sistemom. Usled ovoga su oba ova posmatranja u osnovi različita. Zapažanja posmatrača u miru izložili smo već u § 25. Za njega sva tela koja pripadaju obrtnom sistemu — ukoliko se ona nalaze na ploči u miru — baš zato što rotiraju dobijaju trajno ubrzanje pod dej-

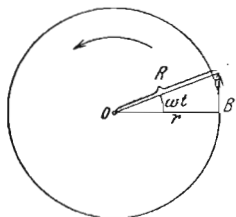
stvom centripetalnih sila, dakle ne nalaze se u ravnoteži. Za posmatrača koji se i sam obrće, nalaze se sva tela, koja se u odnosu na ploču ne kreću, u miru, jer ne menjaju svoje mesto u rotirajućem koordinatnom sistemu. A pošto se ne kreću, to se za ovoća posmatrača nalaze u ravnoteži. Ali i pokretni posmatrač vrlo dobro zapaža, da je za svako takvo telo potrebna jedna sila koja deluje u pravcu osovine obrtanja, dakle centripetalna sila, da tela zbilja ostanu u miru, jer bi se u drugom slučaju krenula odmah na spoljašnju ivicu ploče. I zbilja to ubrzano kretanje koje bi tela dobila da nema centripetalne sile, ne može pokretni posmatrač drugčije protumačiti, nego kao da postoji neka sila sa napadnom tačkom na rotirajućim telima, i teži da ova pokrene radialno van sistema. Ovu će silu on nazvati, sa mnogo više prava nego posmatrač koji se nalazi u miru van sistema, centrifugalna sila. Sa njegove tačke gledišta ona teži da udalji obrtno telo radialno od centra obrtanja.

Ako gledišta oba posmatrača još jednom kratko rezimiramo, izlazi:

Za posmatrača u miru obrtni sistem i tela koja mu pripadaju, a koja su u odnosu spram sistema u miru, ne nalaze se u ravnoteži. Obrtnje sastavnih delova sistema održava se centripetalnom silom koja deluje na svaki sastavni deo pojedinačno, i njima saopštava stalno ubrzanje u radialnom pravcu. Centrifugalna sila je reakcija obrtnih masa na ubrzavajuće dejstvo centripetalne sile, shodno trećem Njutnovom aksiomu, dakle sila inercije.

Za pokretnog posmatrača se nalaze sva tela u ravnoteži kad su ona u relativnom miru spram obrtnog sistema. Ali on zapaža da se svuda u njegovom sistemu javlja dejstvo sile, koja teži da sva korotirajuća tela radialno pokrene van sistema, i koja je proporcionalna masi tela i njihovom rastojanju od jedne određene prave (osovine obrtanja)  $k = mr\omega^2$ . Za njega dakle centrifugalna sila napada na samo korotirajuće telo. Centripetalna sila je potrebna zato, da drži ravnotežu centrifugalnoj sili, dakle da spreči da ona ne pokrene tela koja pripadaju sistemu, ubrzano u radialnom pravcu.

Da za pokretnog posmatrača centrifugalna sila zbilja ima karakter jedne naročite sile, jasno je još iz sledećeg rezonovanja. Slika 21 pretstavlja ploču koja se oko tačke  $o$  obrće uglovnom brzinom  $\omega$ , a na čijoj se ivici  $B$  nalazi masa, koju na tom mestu s početka drži centripetalna sila. Ona se dakle u početku kreće po krugu poluprečnika  $r$ , brzinom  $v = r\omega$ . U vremenu  $t = 0$  prestaje na nju da deluje centripetalna sila, tako da se sada masa, za posmatrača van sistema, usled svoje inercije kreće u tangencijalnom pravcu od ploče brzinom  $v$ . Ona je u tom pravcu za vreme  $t$



Sl. 21. Uz centrifugalnu silu.

prešla put  $vt$ , i njeno rastojanje od osovine obrtanja povećalo se od  $r$  na  $R$ .

$$R = \sqrt{r^2 + v^2 t^2}$$

Dvostrukim diferencijaljem dobijamo ubrzanje sa kojim  $R$  raste,

$$dR/dt = v^2 t / \sqrt{r^2 + v^2 t^2}, \quad d^2 R/dt^2 = v^2 r^2 / (r^2 + v^2 t^2)^{3/2}$$

Za  $t = 0$  kada je masa počela da se kreće sa ivice ploče, dobijamo iz ove jednačine početno ubrzanje  $\gamma$  tj. ubrzanje koje je masa u tom momentu dobila kad se nalazila na rastojanju  $r$  od centra obrtanja. Kad stavimo  $t = 0$  dobijamo

$$\gamma = \left( \frac{d^2 R}{dt^2} \right)_{t=0} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

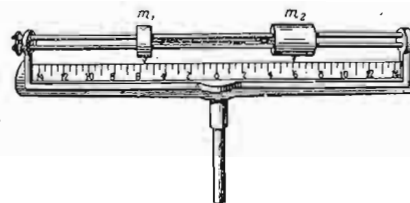
Odavde izlazi da je sila  $k = m\gamma$  koja deluje na masu  $m$

$$k = mr\omega^2$$

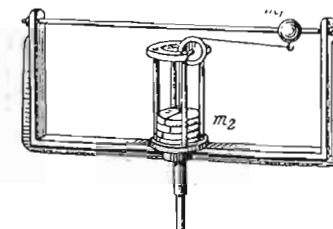
a to je upravo izraz za centrifugalnu silu.

Mi smo naklonjeni čistim rezonovanjem, da prihvatimo gledište posmatrača u miru, onako kako je izloženo u paragrafu 25. Ali ustvari dolazi se, kad se stane na ovde izneto gledište pokretnog posmatrača, do istog rezultata, u odnosu na pojave koje se sreću u prirodi. Od ova dva gledišta upotrebiće se uvek ono, koje nam je za dati slučaj zgodnije. Videćemo još na više primera, da je to često gledište posmatrača koji se i sam kreće.

§ 27. Primeri za sile inercije rotirajućih masa. Za izvođenje oglada o centrifugalnoj sili služimo se tzv. centrifugalnom mašinom, čija se verti-



Sl. 22. Uz centrifugalnu silu.



Sl. 23. Uz centrifugalnu silu (lakše telo diže teže).

kalna osovina na koju se utvrđuje telo za ispitivanje, može staviti u brzu rotaciju. Kao primere navešćemo sledeće oglade:

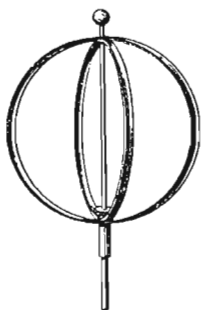
1. Na dvema glatkim horizontalnim šipkama (sl. 22), postavljene su lako pokretne mase  $m_1$  i  $m_2$ , koje su međusobno vezane koncem. Centrifugalna sila mase  $m_1$  koja se javlja pri obrtnju, prenosi se preko konca na masu  $m_2$  i obrnuto (opažanje posmatrača van obrtnog sistema). Centripetalne sile koje deluju na oba tela (zategnutost konca) međusobno su uvek jednake, a suprotnog smisla, dakle uzajamno se potiru. Sistem koji se sastoji iz masa i kanapa, stavi se u pokret u pravcu veće centrifugalne sile.



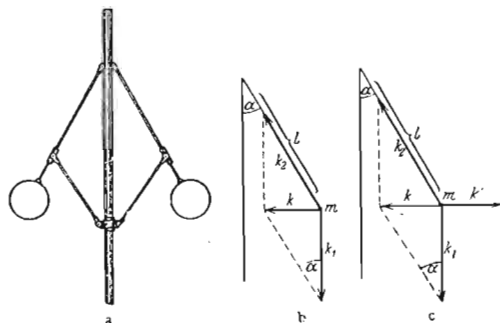
Obeležimo sa  $r_1$  i  $r_2$  rastojanja masa od centra obrtanja i neka je npr.  $m_1 r_1 \omega^2 < m_2 r_2 \omega^2$ , onda masa  $m_2$  vuče k sebi masu  $m_1$ . Ukoliko je ovo privlačenje veće, utoliko više nadmašuje  $m_2 r_2 \omega^2$  proizvod  $m_1 r_1 \omega^2$ , i mase žestoko udare o vertikalnu polugu na kraju šipki.

2. Na aparatu (sl. 23) manja masa  $m_1$  diže težu masu  $m_2$  kad se aparat dovoljno brzo obrće da centrifugalna sila mase  $m_1$  koja se preko kanapa prenosi na  $m_2$ , postane veća od sile teže koja deluje na drugu masu. Ako je  $m_2$  jednom podignuto primećuje se da ponovo pada pri manjoj brzini obrtanja, nego što je bila potrebna ona za njeno podizanje. To se objašnjava time što je pri podizanju razdaljina mase  $m_1$  od osovine obrtanja postala veća, pa je time i njena centrifugalna sila porasla.

3. Aparat napravljen iz metalnih pantljika (sl. 24) često se naziva model zemlje, jer se kao i zemlja spljošti pri rotaciji. Ova sličnost je samo spoljašnja, jer su centripetalne sile sasvim druge vrste. Dejstvo rotacije se



Sl. 24. Tzv. model zemlje.



Sl. 25. Uz centrifugalni regulator.

sastoji u tome da centrifugalna sila spoljašnjih delova pantljika, koja delove bliske osovini vuče ka sredini, izaziva savijanjem pantljika u njima elastične sile takve veličine, da one centrifugalnoj sili održavaju ravnotežu.

4. Vrlo poučan slučaj imamo kod tzv. centrifugalnog regulatora (sl. 25 a), koji se sastoji iz dveju podjednake masa učvršćenih na krajevima šipki koje polaze od vertikalno obrtne osovine. Ukoliko brže aparat rotira, utoliko se više mase dižu.

Ovaj ćemo slučaj prvo posmatrati sa gledišta jednog nepokretnog posmatrača van obrtnog sistema. Na masu  $m$  (sl. 25 b) deluju dve sile, sila teže  $k_1$  i sila reakcije  $k_2$  koja se javlja u šipci  $l$ . Uniformno obrtanje nastupa onda, kada rezultanta  $k$  ovih dveju sila daje potrebnu centripetalnu silu  $ml\omega^2 \sin \alpha$ , za obrtanje po krugu  $r = l \sin \alpha$ . Iz sl. 25 b vidi se da je to slučaj kad je  $k = k_1 \tan \alpha$ . Izlazi da je  $k_1 \tan \alpha = ml\omega^2 \sin \alpha$  ili

$$\cos \alpha = \frac{k_1}{ml\omega^2}$$

Ako isti slučaj posmatramo sa gledišta pokretnog posmatrača, onda se uz sile  $k_1$  i  $k_2$  javlja još centrifugalna sila  $k'$  koja deluje na masu koja je jednaka centripetalnoj, a njoj suprotnog pravca (sl. 25 c). Oba načina posmatranja razlikuju se u tome što kod prvog sile  $k_1$  i  $k_2$  koje deluju na masu nisu u ravnoteži, već imaju rezultantu  $k$ , dok su kod drugog gledišta sve tri sile  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k'$  u ravnoteži.

Centrifugalni regulator nalazi primene u tehnici za regulisanje hoda parnih mašina. Pokretne mase su spojene sa jednom vrstom poluge koja reguliše ulaz pare u mašinu prema visini masa.

5. Kad se u jednom bokastom sudu nalazi tečnost ona pri rotaciji teži da se odmakne od osovine obrtanja i pri dovoljno brzom obrtanju popne se u prstenasto ispupčenje na sudu. Ako se u sudu nalaze istovremeno dve tečnosti različitih gustina, npr. voda i živa, onda živa zauzima spoljašnje mesto, jer usled svoje veće inercije isteruje vodu.

§ 28. Rad i energija. Vršiti rad, znači za ljude onaj posao koji je skopčan sa upotrebom snage mišića, npr. dizanje jednog tela sa zemljine površine na sto. Sa ovim poslom ne bi bio skopčan rad, kad zemljina teža ne bi vukla telo naniže (izuzev onoga rada, koji se upotrebi da se telo protiv svoje inercije stavi u pokret, ali koji se ponovo dobija kad se telo ponovo postavi u položaj mira. Može se ovo kretanje zamisliti kao beskrajno sporo, tako da se ne vrši rad ubrzanja (§ 29) konačne veličine. Da se telo vertikalno podigne na izvesnu visinu, potrebno je prvo raspolagati silom da se telo drži nasuprot sili teže koja ga vuče naniže, drugo treba telo pomerati za izvesnu dužinu protivu sile teže. Kažemo da smo izvršili utoliko veći rad, ukoliko je zato bila potrebna veća sila i ukoliko je bio duži put na kome smo telo pomerili. Ovo važi ne samo kad savladujemo silu teže, već uopšte za svaku silu, npr. kad savladujemo elastične sile neke opruge. Svaki mehanički rad se prema tome neposredno meri proizvodom iz sile i puta

$$\text{Rad} = \text{Sila} \times \text{Put}$$

Pri tome se u račun unosi samo ona komponenta sile, koja je zaista imala udela (bila aktivna) pri vršenju rada. To je ona komponenta koja leži u pravcu puta, dok je komponenta koja stoji upravno na putu neaktivna, dakle može se smatrati kao i da ne postoji (sравни § 55). Prema tome je izvršeni rad ravan proizvodu iz puta  $s$  i komponente sile  $k$  koja leži u pravcu puta.

$$A = ks \quad (19)$$

Dakle kad sila i put grade ugao  $\varphi$

$$A = ks \cos \varphi \quad (20)$$

Poslednja jednačina se može iskazati: Rad je jednak proizvodu iz sile i komponente puta u pravcu sile.

Ako se sila menja duž puta  $s$ , onda se rad izračunava integraljenjem za pojedine elemente puta,

$$A = \int k ds \cos \varphi \quad (21)$$

Rad je integral pređenog puta sile.

Pojam energija (koji su uveli D'Alamber 1785 i Young 1807), znači isto što i rad. Da li će se u pojedinim slučajevima upotrebiti jedan ili drugi izraz, stvar je navike. Najčešće se govori o radu izvršenom na jednom telu, ili koji izvrši neko telo, i o energiji koja je saopštena ili predata nekom telu. Ako se na nekom telu izvrši rad, njegova se energija promeni za isto toliko koliko iznosi izvršeni rad (§ 30).

Primerima ove vrste svuda smo okruženi. Narocito je čest slučaj vršenja rada protiv zemljine teže. Drugi narocito veliki deo izvršenog rada u svakidanjem životu, služi za savlađivanje trenja.

Čovek oseća takođe kao rad, kad npr. mora duže vreme da drži u miru neko teško telo, ma da prema gornjoj definiciji to nije rad. To dolazi od vrlo komplikovanih fizioloških procesa u čovečjem organizmu, i ne stoji, u šta se ovde nećemo dublje upuštati, u opreci sa definicijom rada. Naučna jedinica rada ili energije je 1 erg. To je onaj izvršeni rad, kad je proizvod iz sile i puta ravan jedinici, dakle npr. pri pomeranju tela za 1 cm pod dejstvom sile od 1 dina. Od erga izvedena jedinica je džaul (vat — sekunda) koji iznosi  $10^7$  erga. U tehničar kao jedinica za rad i energiju najčešće se upotrebljava kilogram-metar, to je rad koji se izvrši kad se teret od 1 kg podigne za 1 m. Jedan kilogram ravan je  $9,81 \cdot 10^7$  erga (sravni § 42).

§ 29. Rad pri ubrzanju. Rad se mora vršiti i onda kad se menja brzina jednom telu, to je tzv. rad ubrzanja (akceleracioni rad). Da bi se postigla konačna promena brzine, mora se upotrebiti izvesna sila koja će delovati duž neke putanje. Da je za ubrzanje jednog tela potrebno primeniti silu objašnjava se principom inercije na taj način što svako telo protivstavlja ubrzanju izvestan otpor. Taj otpor inercije je  $ma$ . On je utoliko veći ukoliko su veći masa i ubrzanje. Dalje, rad ubrzanja izvršen na jednom telu ravan je proizvodu iz aktivne komponente sile i puta, duž koga se telo pomeri za vreme dejstva sile. Ako je  $dA$  rad koji izvrši sila  $k$  na masi  $m$  a na pređenom putu  $ds$  onda je

$$dA = k ds = m a ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \text{ gde je } a = \frac{dv}{dt}, \text{ a}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (22)$$

Ako se menja samo pravac, a ne i veličina brzine, onda je prema prvom Njutnovom aksiomu istina potrebno dejstvo jedne sile, ali ta sila ne vrši

nikakav rad, pošto brzina ostaje konstantna. Takav slučaj imamo npr. kod uniformnog kružnog kretanja. Sila koja menja pravac deluje ovde uvek upravno na pravac kretanja (putanju). Centripetalna sila dakle, kod uniformnog kružnog kretanja ne vrši nikakav rad.

Ali dok za povećanje brzine moramo utrošiti rad, pri smanjenju brzine jednog tela rad se može dobiti.

Svako telo, čija se brzina smanjuje, daje od sebe energiju i vrši rad. Jedno telo može se npr. na taj način usporiti (dati mu negativno ubrzanje) što se pušta da ide protiv jedne opruge koja se tom prilikom skuplja (»pufferi« od vagona). Pokretno telo vrši tada rad i gubi svoju brzinu. Čekić ukucava ekser u zid, sekira cepa drvo, sve su to primeri kod kojih se kretanje pretvara u rad. U ovim slučajevima rad se dobija iz kretanja, dok se za pozitivno ubrzanje tj. za povećanje brzine, rad mora utrošiti.

§ 30. Princip održanja (konservacije) energije ili rada. Ogledi, kod kojih je trenje odstranjeno do krajnjih granica mogućnosti, pokazuju da se pri smanjivanju brzine nekoga tela dobije isto toliko u radu, koliko je pre toga bilo potrebno utrošiti, da se telu saopšti brzina koju je izgubilo. Ako se telu koje je u miru saopšti brzina  $v$ , a pri tome je potrebno utrošiti rad  $A$ , onda taj rad (ne vodeći računa o trenju), nije izgubljen. On se u svakom trenutku može ponovo dobiti iz kretanja tela, kad se ono na pogodan način zaustavi. Za sve slučajeve važi stav:

Rad ili energija ne mogu se izgubiti, ali se oni ne mogu ni iz čega ni stvoriti.

Ovaj stav ne važi samo za čisto mehanički rad, već se proteže na sve oblasti fizike. On iskazuje da je nemoguće sagraditi tzv. perpetuum mobile. To nije naprava koja bi se, kao što njeno ime kazuje, večito kretala bez spoljašnjeg dejstva sile (što bi bilo moguće kad bi trenje potpuno odstranili; sravni kretanje bez trenja kod planeta), već mašina koja bi stalno vršila rad bez spoljašnjeg prinosa energije. Ona bi dakle stvarala iz ničega energiju i vršila »besplatno« rad, što je po principu održanja energije nemoguće. Zbog toga se ovaj princip može naznačiti kao stav o nemogućnosti izgradnje perpetuum mobila.

Pošto smo u pravu, da pretpostavimo da su fizički zakoni isti za celu vasionu, to se može reći da se energija nigde u vasioni ni iz čega ne može stvoriti, niti se može uništiti, da je dakle ukupna količina energije u vasioni nepromenljiva. Menja se samo oblik u kome se energija javlja (energija kretanja, električna, magnetna, toplotna itd.). Princip o konservaciji energije je još jedan od fundamentalnih stavova fizike.

§ 31. Energija kretanja ili kinetička energija. Rad koji se utroši pri davanju ubrzanja telu prenosi se na telo. On nije uništen, već je samo prešao u jedan drugi oblik i može se pri prestanku kretanja dobiti u svojoj prvobitnoj formi. Stoga moramo kazati da dok je telo u pokretu i energija

koju ono sadrži nalazi se u obliku njegovog kretanja. Telo koje se kreće ima kinetičku energiju ili energiju kretanja. Veličina ove energije izražava se masom i brzinom tela. Integraljenjem jednačine 22 izlazi

$$A = \int_0^v m v dv = \frac{1}{2} m v^2 \quad (23)$$

Kinetička energija mase  $m$  koja se kreće brzinom  $v$  iznosi  $\frac{1}{2} m v^2$ . Ako se uzme diferencijal kinetičke energije po brzini izlazi

$$\frac{dA}{dv} = m v \quad (24)$$

a to nije ništa drugo, do već poznata količina kretanja ili impuls. Količina kretanja je prema tome diferencijalni količnik iz kinetičke energije po brzini.

§ 32. **Energija položaja ili potencijalna energija.** Ako primenimo princip o održanju energije na takve slučajeve vršenja rada, kod kojih krajnji rezultat nije ubrzanje, već promena položaja protiv dejstva jedne sile (npr. podizanje tela protiv dejstva teže) onda moramo pretpostaviti, da je utrošeni rad prešao u energiju pokrenutog tela, i da ova energija počiva na promeni njegovog položaja. Prema jednačini (19) utrošeni rad za jednu takvu promenu položaja iznosi  $A = ks$ , gde  $s$  označava put na kome je pomereno telo u pravcu dejstvjuće sile. Isti toliki iznos energije morao je preći i na telo. Ta se energija zove energija položaja ili potencijalna energija.

Brojna vrednost potencijalne energije tela u jednom određenom položaju, prema gore rečenom, zavisi od dužine puta koju je telo prešlo protiv sile, da bi se izdiglo do položaja na kome se sada nalazi. To znači da potencijalna energija zavisi od početne tačke ovoga kretanja. Tačnije kazano, mi smatramo da je potencijalna energija tela u tom početnom položaju ravna nuli. Ustvari ovo je i dozvoljeno. Izbor nulte tačke za potencijalnu energiju nigde nam nije propisan u prirodi. Prema tome ga možemo potpuno proizvoljno birati, kako nam je za koji slučaj najzgodnije. Na rezultate računa u kojima se javlja potencijalna energija to nema nikakvog uticaja, jer u račun ulazi uvek samo razlika potencijalnih energija. U mnogim slučajevima najzgodnije nam je da za nultu tačku izaberemo površinu zemlje, morski nivo ili ravan laboratorijskog stola.

§ 33. **Efekat.** Isti rad može se izvršiti za različito dugo vreme. U fizici rad izvršen u jedinici vremena naziva se efekat. Jedinica efekta je erg/sekunda.  $10^7$  puta veća jedinica, dakle džaul za sekundu, zove se vat. Odavde je izveden kilovat koji ima 1000 vata. Tehnička jedinica efekta u kojoj se često izražava efekat parnih mašina jeste konjska snaga koja ima 75 kgm/sec ili 0,736 kilovata.

§ 34. **Mašine.** U tehnici se razlikuju dve vrste mašina. Jedne preobraćaju energiju jedne vrste u onaj oblik energije koji je pogodan za određenu upotrebu. Druge preobraćaju energiju, koju dobijaju od mašina prve vrste, u rad. U prvu grupu mašina spadaju parna mašina, gasni motori, generatori za električnu energiju itd. Oni se mogu napajati mehaničkom, toplotnom ili nekom drugom vrstom energije. Mi ćemo se ovde baviti sa čisto mehaničkim mašinama, tj. sa onim kod kojih su bilo primarna energija, odnosno pretvorena energija i izvršeni rad mehaničke vrste, ukoliko oni nisu usled trenja preobraćeni u toplotu. Zajednička osobina svih tih mašina je da imaju pokretne delove, bilo da se oni kreću translatorno ili rotatorno. Mnoge mehaničke mašine služe bilo za menjanje potencijalne energije (dizanje) bilo za promenu kinetičke energije (ubrzanje) tela ili istovremeno za obe promene. Druge služe za savlađivanje svih vrsta otpora. Svaka mašina mora istovremeno da savlada trenje između njenih pokretnih delova i trenje sa spoljašnom sredinom (vazduhom, vodom). Mašine kod vozila pri kretanju sa konstantnom brzinom na horizontalnom putu savlađuju samo trenje. Pri polasku vrše i rad ubrzanja, a na strmom putu pri penjanju i rad za dizanje tereta.

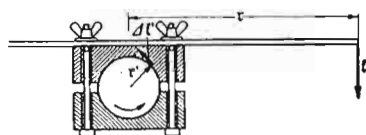
Kod mehaničkih mašina na jednom mestu, moglo bi se reći, ulazi mehanička energija, da bi u promenjenom obliku na drugom mestu izašla. Pri ulazu vrši neka spoljašnja sila rad na mašini, na izlazu mašina deluje silom, koja vrši rad na drugim telima. Tako je unošenje energije u mašinu, kao i izlaženje energije iz nje, skopčano sa dejstvom neke sile. Sila  $k_1$  koja dejstvuje na ulazu u mašinu pomera izvestan deo mašine na putu  $\Delta r_1$ , a istovremeno na izlazu pokrene neki drugi mašinski deo, izvesno telo silom  $k_2$  na putu  $\Delta r_2$ . Ukoliko u samoj mašini ne bi mehanička energija usled trenja prelazila u toplotu, morao bi po principu o održanju energije rad izvršen pri ulazu na mašini  $k_1 \Delta r_1$  biti jednak pri izlazu od mašine izvršenom radu  $k_2 \Delta r_2$ . Ali pošto su gubitci usled trenja neizbežni to je

$$k_2 \Delta r_2 \leq k_1 \Delta r_1$$

(zlatno pravilo mehanike). Ako mašina poveća primarnu silu  $k_2 > k_1$  onda se pomeranje smanjuje  $\Delta r_2 < \Delta r_1$ . Npr. kada se sa dizalicom diže neki teret silom koja je sto puta manja od tereta, tada mora sila pri dizanju tereta za jedan metar, da pređe put od sto metara. Usled gubitaka pri trenju mora ustvari ovaj odnos puteva sila da bude veći.

Većina mašina proizvodi promenu sile. U mašine spadaju takođe naprave koje proizvode promenu puta, npr. mehanizmi kod časovnika kod koга se mala pomeranja teга, odnosno navijanje opruge, pretvaraju u mnogo veći put kazaljki na časovniku. Mehanička energija koja im se dodaje pri navijanju, a koja se gubi pri radu, služi samo za savlađivanje otpora trenja.

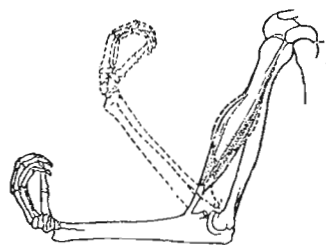
Zbog neizbežnih gubitaka pri unutrašnjem trenju je odnos između rada koji vrši mašina i energije upotrebljene za njeno pokretanje, njen koeficijent korisnog dejstva, uvek manji od jedan (100%). Ukoliko je veći koeficijent dejstva utoliko ekonomičnije radi mašina. Izračunavanje korisnog dejstva  $\eta$  jedne mašine vrši se na taj način što se rad koji izvrši mašina u 1 sec  $L_2$ , njen korisni efekat, podeli sa energijom koja joj se u 1 sec  $L_1$  dovodi,  $\eta = L_2/L_1$ . Kako se meri primarna energija nećemo ovde izlagati, ali ćemo pokazati kako se meri mehanički koristan efekat jednog motora pomoću Prony-eve kočnice. Na osovini motora nameste se dve poluokrugle kočnice koje se pomoću zavrtnja mogu više ili manje stegnuti (sl. 26). Sa kočnicama je spojena poluga na čijem kraju dejstvuje sila  $k_2$  (npr. teg) koja izaziva obrtni momenat  $N = rk_2$  oko ose. Motor se stavi u pokret, i on usled trenja povuče za sobom polugu. Tas se tada toliko



Sl. 26. Prony-eve kočnica.

opteretiti da poluga usled trenja ostaje u miru i drži ravnotežu sili trenja. Neka je to opterećenje  $k_2$ . Na svaki elemenat površine kočnice dejstvuje sila  $\Delta k_1$  na kraku  $r'$  (poluprečnik osovine) i proizvodi obrtni momenat  $\Delta N' = r' \Delta k_1$ . Pošto sve sile trenja imaju iste krake i pošto su svi proizvedeni obrtni momenti istog smisla, to ukupan obrtni momenat sile trenja iznosi  $N' = \Sigma \Delta N' = r' \Sigma \Delta k_1$ . U ravnoteži moraju dva suprotna momenta  $N$  i  $N'$  imati istu vrednost  $rk_2 = r' \Sigma \Delta k_1$ . Ako je  $n$  broj obrta motora to svaka tačka na periferiji osovine pređe u 1 sec put  $2\pi r'n$  i za isti iznos pomere se napadne tačke svih pojedinačnih sila  $\Delta k_1$ . Svaka od tih sila izvrši u 1 sec rad  $2\pi r' \Delta k_1 n$ , pa ukupan koristan efekat motora protiv sile trenja iznosi  $L_2 = 2\pi \Sigma r' \Delta k_1 n = 2\pi rk_2 n$ . On je isti kada motor pri jednakom broju obrta vrši izvestan spoljašnji rad, a ne kao pri merenju rad za savlađivanje sile trenja.

Kod mašina sa krupnim delovima koji se naizmenično pokreću u oba smisla javljaju se velike inercione sile, koje znatno naprežu njihovu podlogu, ukoliko one nisu otklonjene iz jednadženjem masa. Mašine se grade tako, da su ubrzanja njihovih pojedinih delova upravljena u suprotnom smislu i proračunata da se pojedinačne sile inercije međusobom poništavaju.



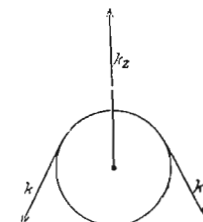
Sl. 27. Ruka kao poluga.

§ 35. **Proste mašine.** Pojedini elementi iz kojih je sastavljena neka mašina, mogu se svesti na osnovne proste mašine, a to su poluga i strma ravan.

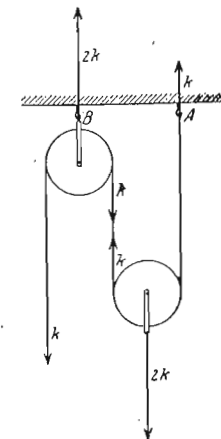
Polugu srećemo u raznim oblicima za raznolike primene, za podizanje tereta ili savlađivanje drugih otpora. Ona se najčešće upotrebljava da neku silu, npr. snagu naših mišića poveća. Tako

je nalazimo kod šmrkova za vodu, na upravljaču kod automobila, pedalama i kočnici bicikla itd. Njena primena za dizanje tereta jasna je iz sl. 18 na str. 26. Mnoge alatke su jednokrake ili dvokrake poluge, npr. makaze i klješta. Kolica za prenos sa jednim točkom su jednokraka poluga, čija se tačka obrtanja nalazi na osovini točka. Često se polugama daje kružni oblik npr. kod ventila. Takav je i točak na vratilu kod bunara. Ljudski i životinjski udovi su takođe poluge (sl. 27).

U poluge takođe spadaju nepokretni i pokretni koturi i koturače. Nepokretni kotur, to je točak obrtan oko čvrste ( $x$ ) osovine, preko kođa je prebačeno uže, kajiš ili lanac (sl. 28). On je u ravnoteži kad na oba kraja užeta deluju jednake sile. Obe ove sile su u ravnoteži sa trećom koja ima napadnu tačku u osovini i koja se javlja usled reakcije. Nepokretni koturi se najčešće upotrebljavaju za promenu pravca sile ili za prenošenje obrtnog kretanja sa jedne osovine na drugu (transmisije). Oni ne menjaju veličinu sile. Pokretni koturi su sastavni delovi koturača (dizalica). Na sl. 29 imamo jednu prostu koturaču sastavljenu od po jednog pokretnog i nepokretnog kotura. Pri ravnoteži prebačeni konopac je ravnomerno zategnut celom svojom dužinom. Kad na slobodnom kraju konopca dejstvuje sila  $k$ , pokretni kotur vuče naviše sila  $-2k$  i ta sila može držati ravnotežu sili  $2k$  koja od pokretnog kotura dejstvuje naniže, uračunavajući tu i težinu samog kotura (težina konopca je zanemarena). Usled reakcije se javljaju sile  $-2k$  u tački vešanja nepokretnog kotura i sila  $-k$  na utvrđenom kraju konopca. Pomoću ove koturače silom  $k$  može se dizati teret i vršiti rad naspram sile  $2k$ . Kao što se lako može videti, teret  $2k$  se diže na putu koji je dva puta manji od puta sile  $k$ .



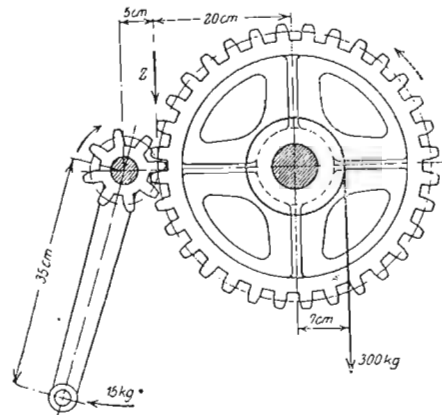
Sl. 28. Nepokretni kotur.



Sl. 29. Prosta koturača.

Točkovi zupčanici takođe spadaju u poluge. Sistem zupčanika na sl. 30 je u ravnoteži pod označenim odnosima sila i njihovih krakova. Sila od 15 kg preko kraka od 35 cm proizvodi na manjem točku na kraku od 5 cm silu od 105 kg ( $35 \times 15 = 105 \times 5$ ). Sila od 105 kg koja ima napadnu tačku u  $Z$  na većem zupčaniku preko kraka od 20 cm, drži na vratilu poluprečnika od 7 cm ravnotežu sili od 300 kg ( $105 \times 20 = 300 \times 7$ ). Lako se može izračunati, da kad se napadna tačka sile od 15 kg pomera na putu  $s$ , napadna tačka 20 puta veće sile, od 300 kg pomera se za  $s/20$ . Prema stavu o održanju energije, rad koji se izvrši na samoj mašini, jednak je radu koji mašina izvrši — ne uzimajući u obzir trenje.

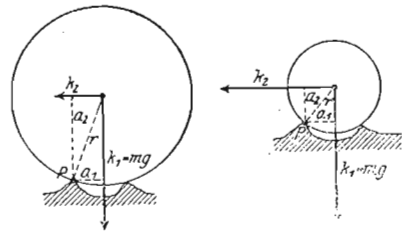
Kola prelaze preko neravnog puta utoliko lakše, ukoliko su im veći točkovi. Na sl. 31 da bi kola išla nalevo mora se točak obrtati oko tačke P. Da bi to nastupilo treba vučna sila  $k_2$  da ima u najmanju ruku isto toliko veliki momenat obrtanja  $k_2 r_2$  u odnosu na tačku P, koliko iznosi i momenat



Sl. 30. Točkovi zupčanici kao poluge.

Lako se izračunava da je za ugao  $\varphi$  klina  $k_2 = k_3 = \frac{1}{2} k_1 / \sin \varphi / 2$ . Kad je ugao klina manji, može se sa datom silom  $k_1$  savladati mnogo veći otpor, nego kad je ugao klina veliki. Sekira i nož dejstvuju kao klinovi.

Zavrtanj je spiralno navijena strma ravan. Na glavu zavrtanja dejstvuje sila  $k_1$  sa krakom  $r$ . Neka je  $s$  visina hoda zavrtanja, a  $k_2$  sila kojom otpor dejstvuje na zavrtanj. Pri punom obrtu napadna tačka sile  $k_1$  pređe put  $2\pi r$  i rad sile je  $2\pi r k_1$ . Po stavu o konzervaciji energije taj rad mora biti jednak radu izvršenom nasuprot sile  $k_2$ . Prema tome je  $k_2 = 2\pi r k_1 / s$ . Sila  $k_1$  savlađuje utoliko veći otpor  $k_2$  ukoliko je veći krak  $r$  i ukoliko je manja visina hoda  $s$ .

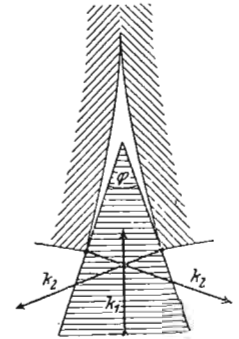


Sl. 31. Dejstvo točka na kolima  
a) malog b) velikog

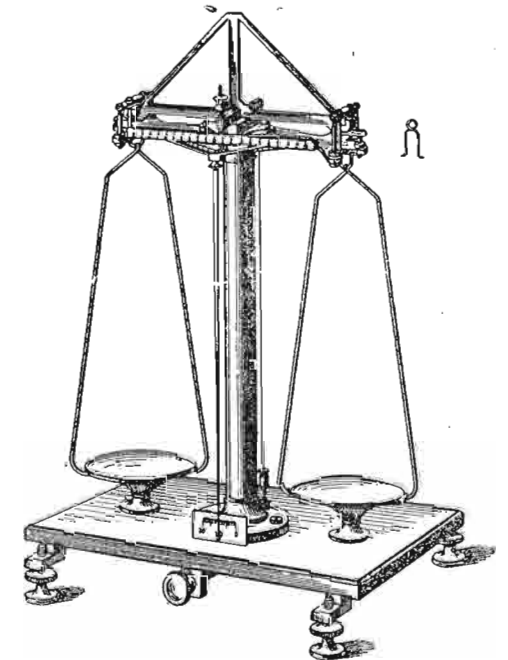
§ 36. **Terazije.** Terazije služe za određivanje mase tela iz njegove težine. Većina terazija, naročito onih za precizna naučna merenja, zasnovana je na principu poluge. Ovde ćemo posmatrati samo hemiske ili analitične terazije, koje se najviše upotrebljavaju u fizici i u hemiji. Njihov glavni deo, poluga postavljena na vertikalnom stubu, ima na sredini fino uglačanu sečicu od ahata koja se oslanja na ahatnu ili čeličnu podlogu horizontalno postavljenu. Ta sečica je osovina obrtanja poluge. Radi čuvanja sečice, poluga se preko naročitog uređaja izdigne sa ležišta, kad

se terazije ne upotrebljavaju. Ukoliko je moguće, na istim rastojanjima od sečice obešeni su na krajevima poluga tasovi, najčešće takođe na sečicama. Za čitanje položaja poluge, uz vertikalni stub pričvršćena je skala pored koje šeta kazaljka. Na poluzi se nalazi mali vertikalno namešten zavrtanj koji služi da pomeri težište poluge naviše ili naniže radi regulisanja osetljivosti (vidi dalje). Takođe je namešten i horizontalan zavrtanj, radi horizontalnog pomeranja težišta.

Merenje se sastoji u tome da se poluga, na čijem se jednom tasu nalazi telo, stavljanjem tegova u drugi tas ponovo dovede u isti položaj koji je zauzimala pre opterećenja. Tegovi manji od jednog santigrama se obično ne upotrebljavaju. Umesto manjih tegova upotrebljava se jahač (sl. 32 gore) koji se pomera duž jednog kraka poluge, izdijeljenog na 10 jednakih delova. Masa jahača iznosi  $10^{-2}$  g (1 cg). Ako se on nalazi na podeoku 10, dakle na istom rastojanju od sečice na kome se nalazi i tas, njegovo dejstvo je isto kao da je 1 cg postavljen na sam tas terazija. Na  $n$ -tom podeoku kraka on ima isto dejstvo kao  $n$  mg na tasu. Na taj način se masa tela može odrediti tačno na miligram. Dobre terazije pokazuju i manje razlike. Tačan položaj poluge terazija određuje se iz njenog oscilovanja. Položaj koji bi poluga zauzela kad se zaustavi, određuje se iz aritmetičkih sredina skretanja skazaljke nalevo i nadesno od srednjeg podeoka.



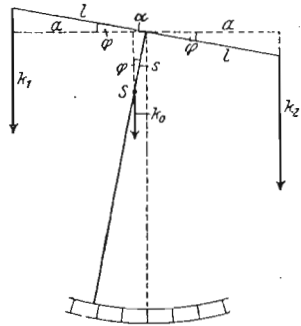
Sl. 32. Shema dejstva klina.



Sl. 33. Analitičke terazije.

Terazije su trokraka poluga, jer sem sile koja usled reakcije deluje u sečici, dejstvuje na polugu tri sile i proizvode tri momenta obrtanja. To su dva približno jednaka momenta koji su suprotno upravljani i dolaze od težine tasova i tela

koja leže u njima, i momenat obrtanja koji potiče od same težine poluge. Možemo pretpostaviti da težina same poluge sa kazaljkom ima napadnu tačku u težištu poluge. Da bi bila moguća stabilna ravnoteža, težište se mora nalaziti ispod sečice. Obrtni momenat koji potiče od težine same poluge iščezava samo u nultom položaju, tj. kad se težište poluge nalazi vertikalno ispod sečice. Tada postoji ravnoteža, s pretpostavkom da su kraci poluge jednaki i da su podjednako opterećeni.



Sl. 34. Uz teoriju terazija.

Neka je  $l$  dužina kraka poluge,  $S$  njeno težište, a  $s$  njegovo rastojanje od srednje sečice (sl. 34). Težina poluge sa napadnom tačkom u  $S$  neka je  $k_0$ . Na levi krak dejstvuje jedan opterećen tas težinom  $k_1$ , a na desni tas nešto veća sila  $k_2 = k_1 + \Delta k$ . Poluga tada stoji nagnuta pod uglom  $\varphi$  spram onoga položaja za koji je  $k_1 = k_2$ , dakle kad je opterećenje isto. Kraci sile  $k_1$  i  $k_2$  iznose ovde  $a = l \cos \varphi$ . Krak sile  $k_0$  iznosi  $a = s \sin \varphi$ . Prema zakonu za polugu postoji ravnoteža

kad je  $k_1 a + k_0 a = k_2 a$  ili  $k_1 l \cos \varphi + k_0 s \sin \varphi = k_2 l \cos \varphi$   
odavde je  $\operatorname{tg} \varphi = (k_2 - k_1) / k_0 \cdot l / s = \Delta k / k_0 \cdot l / s$ .

Za datu razliku težina  $k_2 - k_1 = \Delta k$  ugao skretanja  $\varphi$  je utoliko veći, ukoliko je veća dužina krakova  $l$  i ukoliko je manja razdaljina težišta  $s$ ; utoliko je tada veća i osetljivost terazija. Ukoliko je veći ugao skretanja za jednu određenu razliku težina, utoliko manje razlike težine mogu se pomoću terazija zapaziti.

Postoje izvesne granice do kojih se osetljivost terazija može povećavati produženjem krakova  $l$  i smanjenjem razdaljine težišta  $s$ . Svaka promena na terazijama kojom se povećava osetljivost, povlači za sobom povećanje vremena oscilovanja kao i smanjivanje stabilnosti. Usled toga, ne samo što rad sa terazijama oduzima mnogo vremena, već one postaju i suviše osetljive spram neizbežnih poremećaja (potresa itd.) koji utiču na tačnost merenja. Novije vrste terazija imaju dosta kratke krake.

Kod tačnih, a p s o l u t n i h m e r e n j a nikad se nesme pretpostaviti da su kraci jednake dužine. Njihova dužina se može već nešto razlikovati i usled male temperaturske razlike. O tome se vodi računa kod dvojnog merenja, mereći telo jednom na jednom kraku, a drugi put na drugom i uzimajući srednju vrednost tih rezultata. Zatim se mora voditi računa i o potisku koji telo i tegovi trpe u vazduhu.

§ 37. **Rotaciona energija. Impuls obrtanja.** Ako se materijalna tačka  $m$  kreće po krugu poluprečnika  $r$  uglovnom brzinom  $\omega$ , tj. ako joj je brzina  $v = r \omega$ , onda njena kinetička energija iznosi

$$A = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \quad (25)$$

ili prema jednačini 12

$$A = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (26)$$

Ako imamo telo sa izvesnom zapreminom, sastavljeno od mnogobrojnih pojedinačnih masa  $m_1, m_2, m_3$  itd. koje se nalaze na rastojanjima  $r_1, r_2, r_3, \dots$  od osovine obrtanja, onda je njegova rotaciona energija

$$A = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \omega^2$$

Izraz u zagradi nije ništa drugo do momenat inercije  $J$  tela. Prema tome jednačina 26 važi i za tela sa zapreminom.

Kinetička energija rotirajućeg tela dobija se iz momenta inercije  $J$  i uglovne brzine  $\omega$  na potpuno isti način kao i kinetička energija tela koje se pravolinijski kreće, a koja se dobija iz mase i brzine na putu.

Usled energije koja je skopčana sa rotacijom, potrebno je izvršiti veći rad da se nekom telu koje se kotrlja saopšti brzina  $v$ , nego kad ono klizi bez trenja, jer njegova ukupna energija u prvom slučaju iznosi  $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ . Ali pošto je kod tela koje se brzinom  $v$  kotrlja po ravni  $v = r \omega$ , to njegova ukupna energija iznosi  $\frac{1}{2} (m + J/r^2) v^2$ . Kotrljanje dakle ima taj uticaj, da inertna masa tela izgleda od  $m$  povećana na  $m + J/r^2$ . Kod lopte koja se kotrlja izgleda ova masa povećana za 1,4 puta.

Ovo dejstvo može se pokazati sa dosta efekta na sledeći način. Spreme se dva cilindrična tela, potpuno iste veličine, istog izgleda i jednake težine, od kojih je prvo npr. masivno drvo a drugo šupalj valjak, iznutra ravnomerno obložen olovom. Ova tela se ne mogu razlikovati ni okom ni težinom. Ako se oba istovremeno puste da se kotrljaju niz strmu ravan, npr. niz koso nameštenu dasku, pun cilindar se brže spušta dole od šupljeg. Pošto na oba tela deluje potpuno ista sila to šupalj cilindar izgleda inertniji. Njegov momenat inercije je veći, jer je njegova masa raspoređena na većoj razdaljini od osovine obrtanja, nego kod punog cilindra. Isto tako se nalazi, da pun cilindar brže oscilira kad se obesi na konac u pravcu svoje ose i konac uvrne.

Količina kretanja ili impuls jednog pokrenutog tela je prema jednačini (24) diferencijalni količnik njegove kinetičke energije  $\frac{1}{2} m v^2$  po brzini  $v$ . Analogno se definiše impuls obrtanja jednog rotirajućeg tela kao diferencijalni količnik njegove rotacione energije  $\frac{1}{2} J \omega^2$  po uglovnoj brzini  $\omega$ . Dakle impuls obrtanja ravan je  $D = J \omega$  ili u prostom slučaju za rotirajuću materijalnu tačku ( $J = m r^2$ )

$$D = J \omega = m r^2 \omega \quad (27)$$

Isto kao uglovna brzina  $\omega$  može se i impuls obrtanja pretstaviti vektorskom strelom za čiju veličinu i pravac važe pravila kao i za uglovnu brzinu, a sabiraju se takođe kao vektori. Analogno prema stavu o održanju količine kretanja, važi i za impuls obrtanja stav održanja. Ako između

pojedinih tela u jednom sistemu dejstvuju samo unutarnje sile, to kod svih naizmeničnih dejstava između ovih tela, zbir njihovih impulsa obrtanja ostaje konstantan. Ako sva tela u vasioni smatramo kao jedan jedini sistem, onda izlazi iz ovoga stava, da je zbir svih postojećih impulsa obrtanja konstantna količina i da se ne može ni uvećati ni smanjiti.

Kad se pravni zakoni koji važe za translatorno kretanje sa onima koji važe za rotatorno, nalaze se sledeće formalne sličnosti. Zakoni rotacije dobijaju se iz zakona o translatornom kretanju kad se zameni put  $s$  sa uglom  $\varphi$ , brzina  $v$  i ubrzanja  $dv/dt$  uglovnom brzinom  $\omega$  i uglovnim ubrzanjem  $d\omega/dt$ , masa  $m$  sa momentom inercije  $J$ , sila  $k$  sa obrtnim momentom  $N$ , količina kretanja  $mv$  sa obrtnim impulsom  $D$ . To se jasno vidi i iz sledećeg pregleda.

| Translatorno kretanje:          | Rotatorno kretanje:                       |
|---------------------------------|---|
| Energija $A = \frac{1}{2} mv^2$ | Energija $A = \frac{1}{2} J\omega^2$      |
| $A = \int kds$                  | $A = \int N d\varphi$                     |
| Količina kretanja $q = mv$      | Impuls obrtanja $D = J\omega$             |
| Sila $k = m \frac{dv}{dt}$      | Obrtni momenat $N = J \frac{d\omega}{dt}$ |

Količine iste vrste u fizičkom smislu su samo energije translatornog i rotatornog kretanja, a različite su količine kretanja i impulsi rotacije, sila i momenat obrtanja.

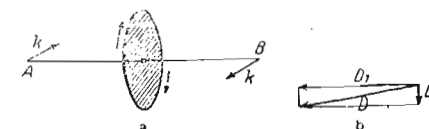
§ 38. **Obrtanje oko slobodne osovine. Čigra.** Obrtanje oko slobodne osovine imamo onda, kada pravac osovine tela nije određen spoljašnjim uslovima (učvršćen položaj). Pored ostalih primera, takvo obrtanje imaju nebeska tela i čigra. Ako na obrtno telo ne dejstvuje nikakva spoljašnja sila, tj. ako je dejstvo tih sila poništeno, onda pri obrtnju oko slobodne osovine težište tela mora ostati u miru (§ 51), odnosno mora zadržati uniformno pravolinisno kretanje. To je moguće samo u slučaju, kada se težište nalazi na osovini obrtanja, dakle kad se rotacija vrši oko ose koja prolazi kroz težište.

Stabilne ose obrtanja su samo ose sa najvećim i najmanjim momentom inercije, od kojih je prva stabilnija.

Pri obrtnju oko slobodne osovine javljaju se, kad neka spoljašnja sila teži da promeni pravac osovine, vrlo upadljiva i komplikovana dejstva inercije. Opšte poznat primer za to imamo kod čigre. Teorija ovih pojava je isuviše složena, te se na ovom mestu ne može izlagati. Zato se moramo ograničiti na nekoliko elementarnih objašnjenja. Na prvom mestu kod rotirajuće čigre pada u oči stabilnost njene osovine obrtanja, tj. činjenica, da ona pri dovoljno brzom obrtnju ne pada. Drugo, primećuje se da dovoljno teška obrtna masa (veliki momenat inercije) žestoko reagira na svaki pokušaj da se pravac njene ose u prostoru promeni i to upravno na pravac

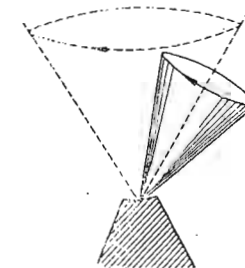
kretanja koje joj se silom nameće. Vrlo lepi ogledi mogu se izvesti sa točkom od bicikla čija se produžena osovina na obema stranama završava drškama za ruke, a radi povećanja momenta inercije, mesto gume, na točak se stavi cev od olova. Točak se stavi u pokret naglim vučenjem kanapa namotanog oko njegove osovine. Olovna cev mora biti vrlo dobro utvrđena jer se inače može s točka otkinuti i prisutne teško povrediti.

Pojave kod čigre objasnićemo kvalitativno na jednom prostom primeru. Sl. 35a pretstavlja kružnu ploču koja se obrće oko osovine  $AB$  u smislu naznačenom strelicom.



Sl. 35. Uz teoriju čigre.

U jednom momentu na osu dejstvuju upravno na ravan crteža, sile  $k$ , koje grade spreg. (Npr. kad se osovina kod  $A$  i  $B$  uhvati rukama i momentalno povuče na naznačeni način.) Ploča tada pored impulsa obrtanja  $D_1$ , koji ima usled rotacije oko ose  $AB$ , dobija još jedan impuls  $D_2$  zbog osovine upravne na  $AB$ , koja leži u ravni crteža. Vektori  $D_1$  i  $D_2$  imaju položaj kao na sl. 35b, a njihova rezultanta, tj. pravac i veličina momenta obrtanja po prestanku dejstva sprega  $kk$ , jeste  $D$ . Pravac rezultante daje istovremeno sadašnji položaj osovine  $AB$ .  $A$  je dakle pomereno na dole,  $B$  na gore, tj. osovina se pomerila upravno na pravac u koji je težio spreg sila da je postavi.



Sl. 36. Precesija čigre.

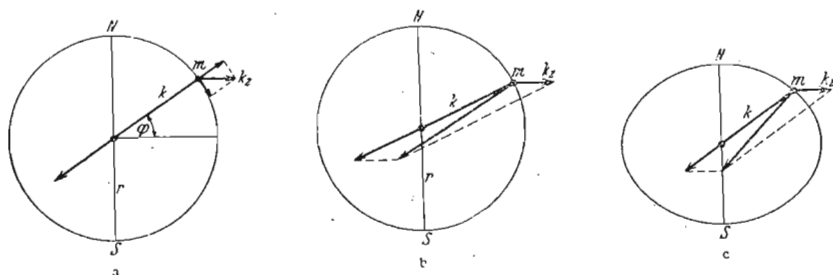
Kod dečije čigre koja se obrće na zemlji, momenat obrtanja  $kk$  dolazi od zemljine teže koja teži da čigru prevrne. Isto kao u gore opisanom ogledu čigra se ne kreće u pravcu koji odgovara tom momentu obrtanja, već upravno na njega. Da bi se momenat obrtanja koji potiče od zemljine teže  $D_1$  uopšte javio, mora se čigra makar malo nagnuti. Čim se ona nagne javlja se i momenat obrtanja  $D_2$ , a to ima za posledicu da se osovina obrtanja kreće sada po omotaču jedne kupe (sl. 36). Ako se čigra obrće bez trenja onda njeno kretanje pri nepromenljivom uglu kupe koji osa opisuje, traje neprestano. Ali pošto se brzina obrtanja usled trenja postepeno smanjuje, to ugao postaje sve veći, i najzad se čigra prevrne. Kretanje ose čigre po kupinom omotaču, naziva se precesija čigre.

§ 39. **Zemljino obrtanje.** Zemlja je telo koje se obrće sa potpuno slobodnom osovinom. Usled privlačenja sunca i meseca i nagnutosti ekliptike javlja se i kod nje precesiono kretanje koje i kod nje, kao i kod čigre, postepeno menja pravac obrtanja njene osovine. Osovina zemlje kreće se po kupinom omotaču. Ona sada privremeno ima pravac polarne zvezde. U toku vremena ona zauzima razne pravce i za 26.000 godina izvrši pun obrt.

Tek posle toga vremena će polarna zvezda imati svoje današnje značenje. Ugao otvora kupe po čijem se omotaču kreće zemljina osa, ravan je dvostrukom iznosu nagutosti ekliptike, tj. uglu koji ekvatorijalna ravan zemlje gradi sa ravinom zemljine putanje, tj.  $47^\circ$ . Izgled neba menja se dakle znatno u toku hiljada godina i bio je u starom veku dosta drukčiji nego danas. Tako u Homerovo vreme zvezda  $\eta$  koja pripada Velikom medvedu nikad nije silazila sa horizonta Grčke, što se danas dešava.

Usled obrtanja zemlje, na telima koja se sa njom pokreću zapaža se čitav niz dejstva inercije.

Zamislimo prvo da je zemlja potpuno pravilna lopta. Na širini  $\varphi$  nalazi se na površini zemlje masa  $m$  (sl. 37a). Na nju prvo dejstvuje sila teže  $k$  upravljena ka središtu zemlje, drugo centrifugalna sila  $k_z$  radijalno od osovine zemljine (to je gledište pokretnog posmatrača). Veličina ove centrifugalne sile iznosi  $k_z = m r \omega^2 \sin \varphi$ , ako je  $r$  zemljin poluprečnik. Potrebnu centripetalnu silu daje zemljina teža. Razlaganjem centrifugalne



Sl. 37. Centrifugalna sila na zemlji.

sile na jednu radijalnu i jednu tangencijalnu komponentu, vidi se da ona s jedne strane dejstvuje nasuprot zemljinoj teži, a s druge strane teži da masu  $m$  odvuče u pravcu ekvatora. Slika 37b objašnjava to na nešto drugi način, pošto su teža i centrifugalna sila složene u rezultantu. Ova ne stoji upravno na zemljinoj površini već ima tangencijalnu komponentu, upravljenu ka ekvatoru. To mora imati za posledicu da sva slobodno pokretna tela koja se nalaze na loptinoj površini teže da odu u pravcu ekvatora. Na potpuno okrugloj zemlji koja se obrće ne može biti ravnoteže. Ravnoteža može tek postojati ako rezultanta sile teže i centrifugalne sile stoji upravno na zemljinoj površini. Iz računa izlazi da bi u tom slučaju zemlja morala da ima oblik spljoštenog rotacionog elipsoida, kao što to i jeste u stvari (sl. 37c). Na sl. 37 je radi jasnoće centrifugalna sila nacrtana suviše velika spram sile teže. Ona iznosi na ekvatoru gde je najveća oko  $1/200$  deo zemljine teže. Zbog toga je i spljoštenost zemljina mala. Zemlja je ovaj oblik dobila još dok se nalazila u tečnom stanju. Ali ako bi zemlja i bila potpuno pravilna lopta onda bi površina okeana imala spljošten oblik.

Ako se neko telo kreće duž jednog širinskog stepena od zapada na istok, dakle u istom smislu u kome se i zemlja obrće, onda je njegova uglovna brzina  $\omega$  veća od brzine zemlje, pa je prema tome i njegova centrifugalna sila veća nego kad bi mirovalo na zemlji, a njegova težina izgleda više smanjena. Obrnuto je za telo koje bi se kretalo od istoka na zapad. Ova dejstva su potvrđena pomoću tačnih ogleda s klatnom na lađi koja brzo plovi.

Ako se telo kreće na severnoj polukugli od juga na sever, ono ima veću komponentu brzine u pravcu zapad—istok, od onog dela zemljine površine na koje dospeva, jer brzina pojedinih tačaka na zemljinoj površini opada idući od ekvatora ka polu. Ako je i ovde  $r$  poluprečnik,  $\omega$  uglovna brzina zemlje, onda je brzina tela koje se obrće sa zemljom na geografskoj širini  $\varphi$   $v = r \omega \cos \varphi$ . Ako se telo kreće u pravcu dužinskog stepena od dužine  $\varphi$  do dužine  $\varphi'$ , onda dospeva na jedan deo zemljine površine koji ima drugu brzinu zapad—istok i koja je ravna  $v' = r \omega \cos \varphi'$ . Telo znači ima spram zemljine površine izvesnu brzinu u zapadno-istočnom pravcu, koja iznosi  $u = v - v' = r \omega (\cos \varphi - \cos \varphi')$ . Ako se ono kreće npr. na severnoj polukugli u severnom pravcu, onda mu je brzina veća od brzine zemljinog obrtanja (žuri ispred zemljinog obrtanja), i obrnuto pri kretanju u južnom pravcu. Uopšte, kretanje od ekvatora ka polovima izaziva izmicanje ispred, a kretanje od polova ka ekvatoru zaostajanje spram zemljinog obrtanja. To se primećuje po tome, što projektili u označenom pravcu skreću sa svoje putanje, i što su kod železničkih linija koje idu u severo-južnom pravcu na severnoj polulopti šine više izlizane s desne strane u pravcu vožnje, a na južnoj šine s leve strane, jer one moraju ovo skretanje da spreče. Odgovarajuće pojave se primećuju i po različito jakoj eroziji na obalama reka koje teku u pravcu jednog meridijana (Beer-ov zakon).

Ako se sa neke visoke kule pusti telo da pada, ono neće pasti vertikalno dole, već nešto koso u pravcu zemljinog obrtanja. Jer na vrhu kule ono ima nešto veću zapadno-istočnu (periferisku) brzinu nego u podnožju kule, jer je na vrhu kule na većem rastojanju od zemljinog centra, odnosno od ose obrtanja.

Važan dokaz za zemljino obrtanje dao je Foucault (1850) na osnovu inercionih sila. Na dugačkom koncu, ili dugačkoj tankoj žici, utvrdi se neko teško telo (Foucault-ov ogled s klatnom). Ako se pusti telo da osciluje kao klatno, primećuje se da se ravan klaćenja polako u prostoru okreće, i to u suprotnom pravcu od zemljinog obrtanja, za ugao  $15^\circ \sin \varphi$  ako je  $\varphi$  geografska širina mesta na kome se ogled vrši. Ravan oscilovanja klatna obrne se dakle za 24 sata na ekvatoru za  $0^\circ$ , u Berlinu za  $285^\circ 36'$ , na polovima  $360^\circ$ . Obrtanje ravni oscilovanja može se učiniti vidljivim za vrlo kratko vreme, ako se raspolaže sa dovoljno dugačkim klatnom, pa se pomoću jakog svetlosnog izvora stvori senka konca na belom zidu, a klaćenje



se udesi u početku da bude upravno na zid. Brzo se primeti da senka počinje da oscilira sa obadve strane, što je dokaz obrtanja oscilatorne ravnine. Sve napred opisane pojave daju se tako razumeti, da pokretno telo usled svoje inercije opisuje onu putanju koja ima najmanju krivinu, moguću pri datim uslovima.

Inercione sile koje potiču od zemljinog obrtanja zovu se Koriolisove sile.

§ 40. **Udaljivanje kontinenata od polova.** Pri posmatranju globusa, pada u oči da su kontinenti u glavnom grupisani oko ekvatora i na srednjim širinama, dok se u oblastima polova nalazi vrlo malo čvrste zemlje. Wegener objašnjava ovo kao posledicu centrifugalne sile. Kontinenti se mogu smatrati kao sante koje plove po magmi i po kojoj su pokretni, iako je ta pokretljivost vrlo mala. Težište takve jedne sante leži više od težišta istisnute magme. Kad sante ne bi postojala, onda bi na tom mestu, usled elipsoidalnog oblika zemlje postojala ravnoteža, i masa magme na tom mestu imala bi upravo onu centrifugalnu silu koja je potrebna da rezultanta zemljine teže i centrifugalne sile stoji upravno na zemljinoj površini. Ali pošto težište sante leži više no što bi ležalo kod magme da sante ne postoji, to na santu deluje veća centrifugalna sila, pa rezultanta teže i centrifugalne sile ne stoji više upravno na površini zemlje, već je nagnuta.



Sl. 38. Uz objašnjenje Wegener-ove teorije.

Ona ima jednu komponentu upravljenu ka ekvatoru koja pomera sante u tome pravcu. Kad bi težište sante ležalo niže od težišta istisnute magme, onda bi se kontinenti grupisali oko polova. Ovo ponašanje može se vrlo lepo pokazati sledećim ogledom. Sl. 38 pretstavlja sud sa vodom koji se može staviti u brzo rotatorno kretanje. U vodu se stavi zapušać sa ekserom. Ako ekser stoji odozgo, zapušać se kreće ka sredini suda, a ako stoji odozdo on ide ka ivici. Prema gornjem to se objašnjava na taj način, što je u prvom slučaju centrifugalna sila koja napada na težište sistema zapušać — ekser manja nego što bi bila za težište istisnute vode, a u drugom slučaju je veća. Što ovaj ogled pokazuje upravo obrnut slučaj onoga što se dešava sa santama kontinenata, dolazi otuda što je krivina vodene površine obrnuta spram zemljine krivine (izdubljena mesto ispupčena). Ovi odnosi na zemlji bi bili jasniji, kad bi se mesto vazduha iznad vode nalazila zemlja.

§ 41. **Elastičan i neelastičan sudar.** Radi objašnjenja stava o održanju energije i stava o održanju količine kretanja posmatraćemo ovde sudar dveju lopti koje se kreću različitim brzinama po jednoj istoj pravoj i centralno se sudaraju (sl. 39).

Pri sudaru se uvek izvestan manji ili veći deo kinetičke energije oba tela pretvara u energiju druge vrste (toplotu, trajnu promenu oblika tela

koja su se sudarila, zvuk). Ukupna kinetička energija tela posle sudara je manja nego pre sudara. Mogu se razlikovati dva idealna krajna slučaja, i to potpuno elastičan sudar kod koga se gubi zanemarljivo mala količina kinetičke energije, i potpuno neelastičan sudar kod koga je pretvaranje energije maksimum i tela se posle sudara ne razdvajaju, već zajedno produžuju svoj put. Prvi slučaj imamo skoro potpuno realizovan kod dveju dobrih čeličnih lopti, a drugi ako su lopte od staklorezačkog kiša.

1. **Elastičan sudar.** Ovde su zbir količina kretanja i kinetička energija isti pre i posle sudara. Obeležimo sa  $m_1$  i  $m_2$  mase lopti, sa  $u_1$  i  $u_2$  njihove brzine pre sudara i sa  $v_1$  i  $v_2$  brzine posle sudara. Iz principa o održanju energije sleduje:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (28)$$

a iz stava o količini kretanja:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (29)$$

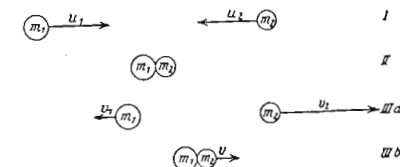
Odavde je

$$v_1 = \frac{u_1 (m_1 - m_2) + 2u_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{u_2 (m_2 - m_1) + 2u_1 m_1}{m_1 + m_2} \quad (30)$$

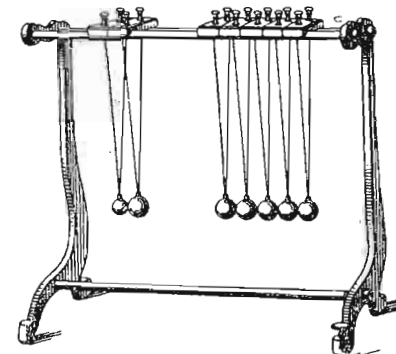
Možemo pretpostaviti da obe lopte imaju istu masu,  $m_1 = m_2$ , i da je druga lopta pre sudara bila u miru,  $u_2 = 0$ .

Iz gornjih jednačina tada dobijamo da je  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = u_1$ . Obe lopte su ovde promenile svoje brzine.

Za pokazivanje ovih pojava služi aparat pretstavljen na sl. 40 na kome je obešen bifilarno (na dva konca) izvestan broj lopti od čelika ili slonove kosti. Od naročitog je interesa sledeći ogled. Sa jedne strane uzdigne se jedna ili više lopti, i puste se da padnu, dakle da se sudare sa ostalima koje su ostale nepokretne. Na kraju reda tada otkoče upravo onoliko lopti, koliko je u početku reda uzdignuto, i to ove ostaju u miru, dok lopte na kraju reda dobiju njihovu pređašnju brzinu. Broj lopti koje udaraju neka je  $a$ , njihova brzina  $u$ , broj lopti koje su posle sudara otkočile neka je  $b$ , a njihova brzina  $v$ . Iz stava o održanju energije i količine kretanja imamo  $a \frac{1}{2} m u^2 = b \frac{1}{2} m v^2$ ;  $am u = bmv$ . Odavde izlazi  $u = v$  i  $a = b$  kao što ogled i pokazuje.



Sl. 39. Centralni sudar. I Pre sudara, II pri sudaru, III a posle elastičnog sudara, III b posle neelastičnog sudara. Uzeto je  $m_2 = m_1/2$ ,  $u_2 = -u_1$ .



Sl. 40. Aparat za pokazivanje sudara lopti.

2. Neelastičan sudar. U ovom slučaju ne možemo primeniti stav o konzervaciji energije, već samo stav o količini kretanja, jer između tela koja se sudaraju dejstvuju samo unutarnje sile. Uz to dolazi još i nov uslov, da oba tela posle sudara imaju brzinu  $v$ . Prema tome je

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v \quad (31)$$

$$v = (m_1 u_1 + m_2 u_2) / (m_1 + m_2) \quad (32)$$

Ako je npr.  $m_1 = m_2 = m$ , a  $u_2 = 0$  onda izlazi  $v = u_1/2$ . Kinetička energija oba tela je u ovom specijalnom slučaju posle sudara ravna  $\frac{1}{2}(2m)(\frac{1}{2}u_1)^2 = \frac{1}{4}m_1 u_1^2$  dok je pre sudara bila  $\frac{1}{2}m u_1^2$ . Ovde je polovina kinetičke energije prešla u drugi oblik (najviše u toplotu i rad pri promeni oblika).

Za pokazivanje neelastičnog sudara, lopte koje se sudaraju na aparatu (sl. 40) oblože se kitom, tako da posle sudara ostaju sastavljene.

Ova razmatranja pokazuju naročito jasno značaj opštih principa za proučavanje fizičkih pojava. U gornjim slučajevima bilo je potpuno dovoljno da se primene stavovi o održavanju energije kretanja, s pretpostavkom da je sudar centralan, pa da ceo tok pojava izračunamo, sa izuzetkom samoga procesa sudara pri dodiru tela, koji nas ovde uostalom i ne interesuje.

Ako tela koja se sudaraju pored kinetičke imaju još i rotacionu energiju, onda se pri računanju mora voditi i o njoj računa, i pored ostalih uslova mora se staviti još i uslov o održanju impulsa obrtanja.

§ 42. Dimenzije i jedinice mehaničkih veličina. Sve mehaničke veličine mogu se, kao što smo to u ovom odeljku već radili, svesti na tri osnovne veličine CGS sistema, masu, dužinu i vreme i prema tome njihove jedinice mogu se izraziti kao proizvodi stepena triju osnovnih jedinica g, cm, sec. Npr. jedinica sile je  $1 \text{ g cm sec}^{-2}$ . Pod dimenzijama neke fizičke veličine podrazumeva se izraz na kojim stepenima se tri osnovne veličine u njoj nalaze, odnosno na kojim stepenima se nalaze tri osnovne jedinice u jedinici te veličine. Dimenzije triju osnovnih veličina označavaćemo sa  $(m)$  masa,  $(l)$  dužina,  $(t)$  vreme. Tada se može dimenzija svake iz njih izvedene veličine izraziti u obliku  $|m^a l^b t^c|$  gde su a, b i c brojevi koji mogu biti pozitivni, negativni ili jednaki nuli. Npr. dimenzija brzine je  $|m^0 l^1 t^{-1}| = |l t^{-1}|$ . Brojni koeficijenti npr. koeficijent  $\frac{1}{2}$  kod kinetičke energije, su bez dimenzija. Takođe i uglovi kao čisti brojevi su bez dimenzija. Poznavanje dimenzija neke veličine je u mnogim slučajevima vrlo korisno. Razume se da se dimenzije mogu primeniti i na tehnički sistem mera, pri čemu na mesto mase dolazi sila kao osnovna veličina, a kilogram težine kao osnovna jedinica. U priloženoj tabeli su skupljene dimenzije najvažnijih mehaničkih veličina, kao i jedinice CGS sistema i tehničkog sistema mera.

## Dimenzije i jedinice mehaničkih veličina

| Dimenzije                  |                     | Jedinica CGS sistem   | Tehnički sistem                                      |
|----------------------------|---------------------|---|--|
| Masa . . . . .             | $ m $               | g   | $\text{kg}^* \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Dužina . . . . .           | $ l $               | cm  | m  |
| Vreme . . . . .            | $ t $               | sec   | sec  |
| Brzina . . . . .           | $ l t^{-1} $        | $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$   | $\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$                     |
| Ubrzanje . . . . .         | $ l t^{-2} $        | $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$   | $\text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$                     |
| Sila . . . . .             | $ m l t^{-2} $      | $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} = \text{din}$                   | $\text{kg}^*$  |
| Pritisak . . . . .         | $ m l^{-1} t^{-2} $ | $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{sec}^{-2}$                                 | $(\text{kg}^* \cdot \text{m}^{-2}) \text{ v. dole}$  |
| Impuls . . . . .           | $ m l t^{-1} $      | $\text{g} \cdot \text{cm} / \text{sec}^{-1}$                                    | $\text{kg}^* \cdot \text{sec}$                       |
| Energija, rad . . . . .    | $ m l^2 t^{-2} $    | $\text{g cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{erg}$                              | $\text{mkg}^*$                                       |
| Efekat . . . . .           | $ m l^2 t^{-3} $    | $\text{g cm}^2 \cdot \text{sec}^{-3} = \text{erg} \cdot \text{sec}^{-1}$        | $\text{mkg}^* \cdot \text{sec}^{-1}$                 |
| Uglovna brzina . . . . .   | $ t^{-1} $          | $\text{sec}^{-1}$   | $\text{sec}^{-1}$                                    |
| Uglovno ubrzanje . . . . . | $ t^{-2} $          | $\text{sec}^{-2}$   | $\text{sec}^{-2}$                                    |
| Broj treptaja . . . . .    | $ t^{-1} $          | $\text{sec}^{-1} = \text{Hz (Herc)}$  | $\text{sec}^{-1} = \text{Hz}$                        |
| Momenat inercije . . . . . | $ m l^2 $           | $\text{g} \cdot \text{cm}^2$  | $\text{kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$      |
| Momenat obrtanja . . . . . | $ m l^2 t^{-2} $    | $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{din} \cdot \text{cm}$ | $\text{kg}^* \cdot \text{m}$                         |
| Impuls obrtanja . . . . .  | $ m l^2 t^{-1} $    | $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$                              | $\text{kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{sec}$        |

$\text{kg}^*$  u tehničkom sistemu mera označava jedinicu sile (kilogram težina). Pritisak se u tehnici meri najčešće u  $\text{kg}^* \cdot \text{cm}^{-2}$ .

## Teža na zemljinoj površini

§ 43. Teža i ubrzanje usled teže. Teža ili gravitacija, to je ona sila, koja privlači sva tela u pravcu zemljinog središta. Nema tela koje ne podleže teži. Teža je isto tako opšta osobina tela kao i inercija. Kod tela u miru ona se manifestuje kao pritisak ili vučenje ka drugim telima na kojima ova prva leže, ili na kojima su ona učvršćena. Kod slobodno pokretnih tela, ona je uzrok njihovom padanju na zemlju, ona im daje ubrzano kretanje.

Veličina teže nije na svima tačkama zemljine površine podjednaka, ona je utoliko veća, ukoliko se telo nalazi bliže zemljinom centru. Ona je usled spljoštenosti zemlje veća na polovima nego na ekvatoru, i veća je na morskome nivou, nego na visokim brdima. Ipak su ove razlike u domenu zemljine površine suviše male (vidi niže).

Tačni ogledi pokazuju da su ubrzanja koja različita tela dobijaju pod dejstvom teže, potpuno jednaka i sasvim nezavisna od vrste tela. To znači da sva tela sa iste visine padaju istom brzinom, s pretpostavkom, da na njih ne dejstvuje nikakva druga sila sem teže (Galilej, 1590). Što obično iskustvo to

osporava (npr. padanje komada drveta i parčeta hartije ili pera) dolazi otuda, što na tela koja slobodno padaju u vazduhu pored teže dejstvuje još i trenje vazduha, koje različita tela različito sprečava u padanju. Sa kule ili neke visoke kuće puste se istovremeno da padaju cigla i komad drveta različitih težina. Na njih dejstvuje trenje vazduha vrlo malo spram dejstva teže. Oba tela stoga padaju istovremeno na zemlju ili skoro istovremeno. Još bolje se pokazuje, da sva tela padaju pod dejstvom teže podjednako brzo sledećim ogledom. U staklenu cev sa slavinom stavi se komad olova i jedno perce, pa se iz cevi pomoću šmrka izvuče vazduh. Kad se cev iskrene vidi se da olovo i perce padnu na drugi kraj cevi istovremeno.

Ubrzanje koje tela dobijaju pri slobodnom padanju na zemlji, iznosi

$$g = 980,62 (1 - 0,00264 \cos 2\varphi - 0,0000003 h) \text{ cm/sec}^{-2} \quad (1),$$

gde je  $\varphi$  geografska širina, a  $h$  visina iznad morske površine u metrima. Ili zaokružljeno za srednje geografske širine

$$g = 981 \text{ cm/sec}^2.$$

Činjenica da su sva tela teška pripisuje se jednoj osobini koja se nalazi u samim telima i koja se — iz razloga koji će odmah biti objašnjeni — isto kao i uzrok inercije zove masa ili tačnije *t e š k a m a s a*. Ispočetka ćemo je obeležiti sa  $m'$ .

Stavljajući da je proporcionalna sili teže, možemo je pošto odredimo za nju jedinice i meriti pomoću teže, posmatrajući npr. istezanje spiralne opruge na kojoj je masa obešena.

Kod tela teške mase  $m'$  a inertne mase  $m$ , sila teže je prema drugom Njutnovom aksiomu ravna  $mg$ , s druge strane prema gornjoj definiciji, srazmerna je teškoj masi  $m'$ , dakle

$$mg = m'a \quad (2)$$

gde je  $a$  konstanta. Pošto je ubrzanje za sva tela na istom mestu jednako to i odnos  $\frac{m'}{m} = \frac{g}{a}$  za sva tela ima istu vrednost. Inertna i teška masa jednog tela su dakle jedna drugoj proporcionalne. Dolazi se do zaključka da ovaj odnos treba staviti ravan jedinici, da su teška i inertna masa jednog tela jedna drugoj ravne. Zbog toga je i jedinica teške mase takođe gram. Uбудuće po pravilu nećemo praviti razlike između inertne i teške mase.

Jednakost inertne i teške mase tela, tj. činjenica da se telo utoliko teže stavlja u pokret, ukoliko je veća njegova težina toliko nam je iz



Sl. 41.  
Sva tela padaju  
podjednako  
brzo.

svakidanjeg iskustva poznata, da onima koji nisu fizičari uopšte i ne pada na um da između tela i teške mase postoji osnovna razlika. Zbog toga se u običnom životu telo, iako je slobodno pokretno na horizontalnoj ravni, naziva teško zbog toga što ga je teško pokrenuti, mada činjenica, na osnovu koje je donet ovaj zaključak, nema sa težom nikakve veze. Jednakost inertne i teške mase, zbog koje je gornji sud ipak tačan nije niukoliko sama po sebi razumljiva, već je čista stvar iskustva. Najtačniji dokaz zato daju ogledi s klatnom (§ 54).

Činjenica da su inertna i teška masa jednake, jeste osnov Einstein-ove opšte teorije relativiteta.

§ 44. **Težina.** Težina je sila koja dejstvuje usled gravitacije na masu. Ona se kao sila i meri i izražava u dinamama. Sila koju telo od 1 g mase dobija usled teže, i kojom je ono u stanju da raspolaže pritiskujući npr. na podlogu na kojoj leži, ravna je proizvodu iz mase i ubrzanja zemljine teže  $mg$ , dakle na morskom nivou iznosi 981 din. Uopšte sila koja odgovara težini tela mase  $m$  iznosi  $mg$  dina. Ali pored toga je uobičajeno, naročito u običnom životu, da se kao jedinica težine ne upotrebljava din, već težina jednog grama, i jedinica težine (sile) izražava se kao jedinica mase.

Pošto  $g$  zavisi od razdaljine između tela i zemljinog centra, to se težina tela menja sa visinom, dok njegova masa ostaje nepromenjena. Na visokom bregu je telo nešto lakše nego u ravnici i to na svakih 1000 metara težina mu se smanji za okruglo  $\frac{1}{3000}$ . Na 3000 m visine 1 kg teži koliko 999 g u ravnici. Ovo opadanje težine sa visinom ne može se zapaziti terazijama sa kojima se težina meri tegovima, jer se i težina tegova na visini smanjuje. Ali se ova promena može konstatovati pomoću terazija sa oprugom (federom), jer se sila opruge ne menja sa visinom.

Za svakidani život je bez značaja ovo opadanje težine sa visinom. Pri merenjima u trgovini ono nema važnosti, zbog toga što je razlika sasvim mala. S druge strane, tim merenjima se ne određuje jedna određena težina, već određena količina supstancije, dakle mase. S pretpostavkom da se ovo merenje vrši na terazijama s tegovima, kupac će na svima visinama tražeći kilogram šećera, dobiti uvek istu količinu supstancije koju bi dobio i u ravnici, a to je za njega od važnosti.

§ 45. **Specifična težina. Gustina. Specifična zapremina.** Ako neko homogeno telo (telo koje ima iste osobine u svima delovima) težine  $k$  a zapremine  $V$  podelimo na delove koji će imati težine  $k_1, k_2, \dots$  i zapremine  $V_1, V_2, \dots$ , nalazi se da je uvek  $k_1/V_1 = k_2/V_2 \dots = k/V$ .

$$\frac{k}{V} = \rho \quad (3)$$

Količnik između težine i zapremine je karakteristična veličina datog tela i odlika njegove materije, to je težina jedinice zapremine.

Jer ako  $V$  kub. cm teže  $k$  g, onda 1 kub. cm teži  $k/V$  g. ó se zove s p e c i f i č n a težina i meri se u  $g/cm^3$ .

Prema definiciji grama, specifična težina vode na  $4^0$  je ravna 1. Specifična težina jednog tela je dakle brojno jednaka odnosu težine jedne određene količine toga tela i težine iste zapremine vode na  $4^0$ . Zbog toga se često specifična težina definiše kao odnos težine tela spram težine iste zapremine vode. U tome slučaju bi specifična težina bila kao odnos prost neimenovan broj. Ova definicija ne može se preporučiti.

Pod gustinom  $\rho$  neke supstance podrazumeva se masa jedinice zapremine. Pošto masa tela i njegova težina izražena u gramovima na morskome nivou imaju isti merni broj, to se gustina i specifična težina izražavaju istim brojevima, ali su zato njihove fizičke dimenzije različite. Gustina je kao i masa nezavisna od visine.

Specifična zapremina  $V_s$  jeste recipročna vrednost gustine, tj. zapremina jedinice mase, dakle jednog grama.

Prema tome je masa izvesne količine supstance sa zapreminom  $V$

$$m = \rho V \quad (4)$$

a težina izvesne količine supstance zapremine  $V$  u gramovima

$$P = \delta V \quad (5)$$

odnosno u dinamama

$$P = g \rho V \quad (5b)$$

zapremina izvesne količine supstance mase  $m$

$$V = V_s m \quad (6)$$

Dalje je

$$V_s = \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

Specifična težina tela sa prostim oblikom, može se direktno odrediti merenjem njihove težine i zapremine. Kod tela sa komplikovanim oblikom primenjuju se naročite metode.

Tabela specifičnih težina

|                      |         |                          |            |
|----------------------|---------|--------------------------|------------|
| Aluminijum . . . . . | 2,7     | Alkohol . . . . .        | 0,791      |
| Olovo . . . . .      | 11,3    | Voda . . . . .           | 0,9997     |
| Gvožđe . . . . .     | 7,6—7,8 | Živa . . . . .           | 13,595     |
| Zlato . . . . .      | 19,3    | Vodonik . . . . .        | 0,00008985 |
| Bakar . . . . .      | 8,9     | Azot . . . . .           | 0,0012507  |
| Natrijum . . . . .   | 0,97    | Kiseonik . . . . .       | 0,0014291  |
| Platina . . . . .    | 21,4    | Vazduh . . . . .         | 0,0012928  |
| Staklo . . . . .     | 2,4—2,6 | Ugljen dioksid . . . . . | 0,0019768  |
| Benzol . . . . .     | 0,881   | Helijum . . . . .        | 0,0001785  |
| Etar . . . . .       | 0,717   |                          |            |

Specifične težine čvrstih tela i tečnosti određene su na  $0^0$ , a gasova na  $0^0$  i pritisku od 1 atmosfere.

§ 46. Slobodno padanje. Vertikalno i kos hitac. Ubrzanje tela pri slobodnom padanju, tj. pri padu kome ne smeta ni trenje niti kakva druga sila — iznosi  $g = 981$  cm/sec<sup>2</sup>. Označimo sa  $x$  visinu iznad zemljine površine, na kojoj se nalazi neko telo. Pošto je ubrzanje od teže upravljeno naniže, dakle smanjuje  $x$ , to ćemo u jed. (7) § 7 staviti  $\gamma = -g$ , pa dobijamo

$$\frac{dv}{dt} = -g \quad (8)$$

Ako je početna brzina u vremenu  $t=0$ ,  $v_0=0$ , onda rešavajući gornju jednačinu imamo

$$v = -gt \quad (9)$$

Negativan znak pokazuje da je brzina upravljena na dole. Ako ovu vrednost za  $v$  stavimo u jednačinu (8) § 7 dobićemo

$$\frac{dx}{dt} = -gt \quad (10)$$

ili kad se integriše

$$x = x_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (11)$$

ako  $x_0$  označava visinu na kojoj se telo nalazi u momentu  $t=0$ . Put pređen pri padu za vreme  $t$  iznosi prema tome  $x_0 - x = \frac{1}{2}gt^2$ . Posle jedne sec. on iznosi  $g_0/2 = 4,905$  m, a posle 2 sec.  $4g/2 = 19,62$  m itd.

Proporcionalnost između pređenih puteva i kvadrata vremena padanja, može se ispitati tek ako imamo na raspoloženju dovoljno dugu putanju, jer za pad od okruglo 80 m, vreme padanja iznosi tek 4 sec. Galilej, koji je prvi otkrio zakone padanja (1604) i iste formulisao, vršio je svoje oglede na čuvenoj nagnutoj kuli u Pizi (Italija), puštajući cigle da padaju sa pojedinih spratova.

Kad se neko telo baci vertikalno uvis, mora mu se saopštiti izvesna početna brzina  $v_0$  upravljena naviše. Brzina po isteku vremena  $t$  nalazi se integraljenjem jednačine (8) § 7

$$v = v_0 - gt \quad (12)$$

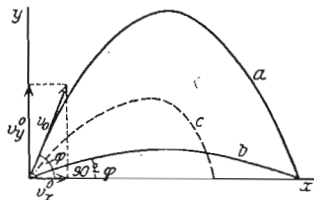
a pređeni put prema jed. (9) istog paragrafa, stavljajući  $x_0 = 0$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (13)$$

Iz jednačine (12) izlazi da je brzina  $v$  ravna nuli, tj. da telo postigne najveću visinu  $h$ , kad je  $t = v_0/g$ ,  $t$  je vreme penjanja. Ako ovu vrednost unesemo u jed. (13), dobijamo da je maksimalna visina tela

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (14)$$

Sa visine  $h$ , telo ponovo slobodno pada naniže.  $x$  postaje opet ravno nuli, kad se telo vrati u svoju polaznu tačku. Ovo se dešava, kao što se lako može videti iz jed. (13), kad je  $t = 2v_0/g$ , dakle po isteku vremena  $t$  računajući ga od početka kretanja, koje je dvaput duže od onoga koje je potrebno telu da se popne do maksimalne visine. Za padanje je dakle potrebno isto vreme kao i za penjanje. Brzina koju telo postigne vraćajući se u polaznu tačku, nalazi se iz jed. (12), stavljajući da je  $t = 2v_0/g$ , i ona iznosi  $v = -v_0$ . Telo je dakle u polaznoj tački dobilo ponovo svoju početnu brzinu ali sa promenjenim znakom, odnosno pravcem. Ovo se može naći po stavu o održanju energije i bez računa.



Sl. 42. Kos hitac.

Ako se telo ne baci vertikalno već koso uvis, tako da njegova početna brzina gradi sa zemljinom površinom ugao  $\varphi$ , onda se njegova brzina može razložiti na dve komponente: jednu vertikalnu i upravljenu naviše  $v_y$ , i jednu paralelnu sa zemljinom površinom  $v_x$  (sl. 42). Ova poslednja komponenta ostaje po zakonu inercije konstantna, jer u tom pravcu ne deluje zemljina teža. Komponenta  $v_y$  ponaša se upravo kao početna brzina kod vertikalnog hitca. Ako je  $v_0$  početna brzina, onda je  $v_y = v_0 \sin \varphi - gt$  a  $v_x = v_0 \cos \varphi$ . Predeni putevi po ovim komponentama po isteku vremena  $t$  iznose

$$x = v_0 t \cos \varphi, \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \quad (15)$$

Ako se iz ove dve jednačine eliminiše  $t$ , dobija se jednačina za oblik putanje;

$$y = x t g \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (16)$$

a to je jednačina parabole. Najveću visinu tela pri tome kretanju naćićemo ako stavimo da je u toj tački  $v_y = 0$ . Tada je vreme potrebno da telo dospe u tu tačku  $t = v_0 \sin \varphi / g$ . Ako ovo vreme unesemo u jed. (15), onda dobijamo za  $y = h$  (najveća visina)

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \quad (17)$$

Pri silaženju telo najzad dobije prvobitnu visinu  $y = 0$ . Jednačina (16), za  $y = 0$ , ima dva rešenja. Prvo daje  $x = 0$ , što odgovara početku kretanja. Drugo daje daljinu dometa  $x = x_m$

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \quad (18)$$

Ako su  $x_m$  i  $v_0$  poznati, i ako je jed. (18) zadovoljena za  $\varphi$ , onda je zadovoljena i za ugao  $\pi/2 - \varphi$ , jer je  $\sin 2(\pi/2 - \varphi) = \sin(\pi - 2\varphi) = \sin 2\varphi$ . To znači da pri istoj početnoj brzini možemo postići isti domet pod dva

različita ugla  $\varphi$ , čiji zbir iznosi  $90^\circ$  (sl. 42 krive  $a$  i  $b$ ). Ovo ima primene kod artiljerijskih gadanja. Najveći domet imamo za  $\varphi = 45^\circ$  i on iznosi tada  $x_m = v_0^2/g$  (u tome slučaju imamo svega jedno rešenje). Maksimalna visina putanje iznosi onda prema jed. (17),  $h = v_0^2/4g$ , dakle četvrtinu dometa.

Usled velike početne brzine projektila pušaka i topova, javlja se veliki otpor vazduha koji menja oblik putanje na taj način, što se telo strmije pušta nego što se penje. Usled toga je znatno smanjena daljina dometa (balistička kriva, sl. 42).

§ 47. Održanje energije kod hitca i slobodnog padanja. Telo mase  $m$  pređe put  $x_0$  vertikalno naviše. Sila teže je u tom slučaju  $mg$ , pa je stoga utrošen rad na tome putu  $mgx_0$ . Telo je dobilo usled penjanja potencijalnu energiju koja je takođe ravna  $mgx_0$ . Ako sa visine  $x_0$  telo počne da pada, potencijalna energija mu se smanjuje, i u tački  $x$  na vertikali ona iznosi  $mgx$ . Ali usled ubrzanja koje je dobilo na putu  $x_0 - x$ , ono je steklo kinetičku energiju u iznosu  $\frac{1}{2}mv^2$ . Prema jed. (9) i (11) izlazi da je njegova brzina

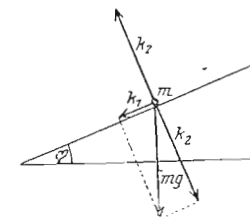
$$v = \sqrt{2(x_0 - x)g} \quad (19)$$

pa je stoga

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(x_0 - x), \quad \text{ili} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgx = mgx_0 \quad (20)$$

Znači da je zbir njegove kinetičke i potencijalne energije ravan njegovoj ukupnoj energiji u početku padanja, kad telo nije imalo još nikakve kinetičke energije. (Hygens 1673.) Izlazi da je kod slobodnog padanja zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan, odnosno, da se ukupna energija tela ne menja. Povećanje kinetičke energije ide na račun potencijalne, odnosno kod hitca naviše obrnuto. Time je tačnost principa o održanju energije dokazana i za ovo kretanje. Isto važi i za sve druge vrste kretanja tela pod uticajem teže.

§ 48. Padanje po strmoj ravni. Neka je  $m$  masa tela, koja se može kretati bez trenja po ravnoj površini nagnutoj za ugao  $\varphi$  spram horizontale (sl. 43). Teža deluje na telo silom  $mg$  koja je upravljena vertikalno naniže. Razložimo ovu silu na dve komponente  $k_1$  i  $k_2$  od kojih je jedna paralelna, a druga upravna na strmu ravan. Od ove dve sile, samo prva je u stanju da telu saopšti izvesno ubrzanje, a njena je vrednost prema slici  $k_1 = mg \sin \varphi$ . Komponenta  $k_2 = mg \cos \varphi$ , upravna na pravu, samo pritiskuje telo uz strmu ravan, i nju ništi sila  $k_r$  koja joj je jednaka, a suprotno upravljena. Prema tome je aktivna sila



Sl. 43. Strma ravan.

$$k_1 = m\gamma = mg \sin \varphi \quad (21)$$

ako je  $\gamma$  ubrzanje tela naniže u pravcu ravni.

Obeležimo sa  $h$  visinu a sa  $s$  dužinu strme ravni na čijem se vrhu nalazi telo, onda je njegovo udaljenje od temena ravni  $s = h/\sin \varphi$ . Kad se telo pusti da pada, ono pređe put  $s$  sa rastećom brzinom, i posle vremena  $t$  pređeni put je (§ 6)

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi \quad (22)$$

a njegova brzina

$$v = \gamma t = g t \sin \varphi \text{ ili } v = \sqrt{2gx \sin \varphi} \quad (23)$$

Kad telo pređe celu strmu ravan  $s$ , njegova brzina iznosi

$$v = \sqrt{2gs \sin \varphi} = \sqrt{2gh} \quad (24)$$

To je ista brzina koju bi telo postiglo da je slobodno palo sa visine  $h$ . U oba slučaja je isti gubitak potencijalne, i isti dobitak kinetičke energije.

Isto nalazimo i ako telo ne pada po strmoj ravni, već po nekoj ravni promenljiva nagiba, koja se može smatrati kao da je sastavljena od malih strmih ravni.

Da bi se telo mase  $m$  podiglo po strmoj ravni do visine  $h = s \sin \varphi$ , tj. da bi po njoj prešlo put  $s$ , potrebno je izvršiti rad

$$A = mgs \sin \varphi = mgh$$

pošto je aktivna komponenta teže  $mg \sin \varphi$ , a pređeni put  $s$ . Vidi se da ovaj rad iznosi isto toliko, koliko bi iznosio i da se telo podigne vertikalno u vis na visinu  $h$ . Za dizanje tela po strmoj ravni potreban je isti rad kao i pri vertikalnom dizanju, ali je potrebna sila utoliko manja ukoliko je manji ugao ravni, jer je aktivna komponenta manja za faktor  $\sin \varphi$  od ukupne sile teže koja se javlja pri vertikalnom dizanju. Zato je odgovarajući pređeni put duži.

Pošto potencijalna energija jednog tela zavisi samo od njegove visine  $h$  to za uniformno pravolinisno kretanje tela na nepromenljivoj visini nije potrebno vršiti nikakav rad, jer energija tela ostaje konstantna. Ali razume se da je ovo tačno samo ako se zanemari trenje.

Za vršenje prostih oglada o slobodnom padanju, može se upotrebiti, kao što je već i Galilej radio, strma ravan polukružno izolučena (izljebljena) niz koju se kotrljaju male lopte. Gornji zakoni se proveravaju na taj način, što se mere vremena potrebna da loptica pređe različite puteve po strmoj ravni. Lako se nalazi da se pri istom nagibu ravni pređeni putevi imaju kao kvadrati vremena, računajući vreme od početka pada. Isto tako se može ispitati zavisnost vremena padanja od nagibnog ugla  $\varphi$ .

U gornjim ogleđima nije upotrebljeno telo koje klizi niz ravan bez trenja, već kuglica koja se kotrlja. Oblik zakona padanja pri tome nije u osnovi izmenjen, samo što se u jed. (22) umesto mase  $m$  mora staviti izraz  $m + J/r^2$ . Za homogenu punu loptu ovaj izraz iznosi  $\frac{7}{5}m$ . Uticaj kotrljanja se svodi na to, kao da ubrzanje teže iznosi svega  $\frac{5}{7}$  od svoje stvarne vrednosti.

§ 49. Mašina za padanje. Pomoću strme ravni smanjuje se ubrzanje teže, pa je usled toga zgodnije proučavati padanje. To se još bolje postiže Atwood-ovom mašinom za padanje (sl. 44). Njeni glavni delovi su: što lakši metalni točak pokretan oko horizontalne osovine sa što manje trenja, preko kojega se prebaci konac sa obešenim jednakim tegovima  $M$ . Jedna od ovih masa može se učiniti težom dodavanjem tege  $m$ . Onda teža masa ide naniže dok se lakša penje. Mašina je tako udešena da se prvo, pomoću naročitih okidača mase mogu u određeno vreme staviti u pokret, drugo da se pomoću jedne probušene ploče može skinuti s tege teret  $m$  pošto teg pređe izvestan put i treće, da se oba tege na jednoj određenoj dužini vertikalne skale mogu zaustaviti (c). Za merenje dužine služi pomenuta skala, a vreme se meri metro-  
nomom ili hronometrom.

Sile teže koje podjednako deluju na iste mase  $M$  uzajamno se poništavaju, a s jedne strane ostaje samo aktivan preteg  $m$  na koji dejstvuje sila  $mg$ . Usled ove sile sva tri tela  $2M + m$  dobijaju ubrzano kretanje. Prema tome je

$$mg = (2M + m)\gamma$$

a samo ubrzanje

$$\gamma = g \frac{m}{2M + m}$$

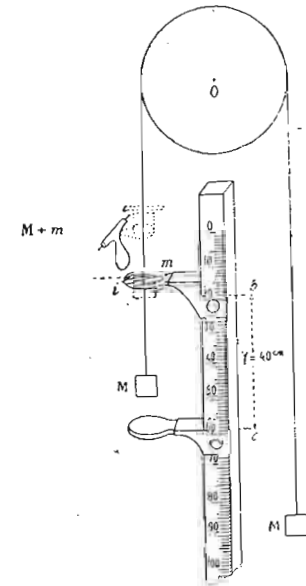
Ukoliko je  $m$  manje, utoliko je manje i ubrzanje (ali se preteg zbog trenja ne sme uzeti sasvim mali) pa se sve pojedinosti padanja mogu pogodno posmatrati.

Sa mašinom za padanje mogu se vršiti npr. sledeći ogladi:

1. Proveravanje jed. (9) iz § 7. Preteg se skine pošto pređe različite putanje  $x$ , i izmere se vremena potrebna za prelaz tih puteva. Ona se imaju kao kvadratni koreni iz dužina padanja. Pri stalnom putu promeni se preteg. Kvadrati vremena padanja obrnuto su srazmerni ubrzanjima  $\gamma$ , odnosno pretezima kad su ovi mali ( $m \ll 2M$ ).

2. Proveravanje jed. (8) § 7. Skine se preteg posle različitih visina  $x_1$  i meri se vreme potrebno za pad sa tih visina i druge konstantne visine  $x_2$ . Ova vremena su obrnuto srazmerna, jer je postignuta brzina usled ubrzanja srazmerna vremenu ubrzanja. Isto se tako nalazi da su postignute brzine srazmerne ubrzanju  $\gamma$ .

Pri tačnijim ispitivanjima mora se voditi računa, da preteg ne pokrene samo obe mase, već takođe obrće i točak preko koga je prebačen konac.



Sl. 44. Atwood-ova mašina.

Ovo obrtanje točka ima dejstvo, kao i kotrljanje lopte, kao da se pokrenuta masa povećala za  $J/r^2$ , ako  $J$  označava momenat inercije točka a  $r$  unutarnji poluprečnik oluka (žljeba) u kome se kreće konac. Stoga je tačniji izraz za ubrzanje

$$\gamma = g \frac{m}{2M + Jr^2 + m}$$

Momenat inercije nalazi se vešajući o konac parove tegova  $M$  različitih masa.

Ako su merenjem poznate mase  $M$  i  $m$ , može se pomoću određenog ubrzanja  $\gamma$  izračunati  $g$ . Ova metoda za određivanje ubrzanja teže je skopčana sa dosta mogućih grešaka i približno tačni rezultati se postižu samo sa usavršenim aparatima i velikom pažnjom.

§ 50. **Težište.** Uočimo dve čvrsto spojene materijalne tačke  $\mu_1$  i  $\mu_2$  čije je rastojanje  $b$ . Na svaku dejstvuje sila teže  $\mu_1 g$  odnosno  $\mu_2 g$ . Rezultanta ovih sila je  $R = (\mu_1 + \mu_2) g$ , paralelna sa obema silama i deli pravu koja spaja tačke na duži koje su obrnuto srazmerne silama, odnosno u ovom slučaju masama  $b_1 : b_2 = \mu_2 : \mu_1$ . Ako ovaj sistem stavljamo u različite položaje ne menjajući rastojanje između materijalnih tačaka, menja se pravac rezultante ali on uvek seče pravu  $b$  u istom malopredašnjem odnosu, tako da se sve ove rezultante u različitim položajima sistema seku u jednoj tački  $S$ . U pogledu dejstva teže možemo smatrati ove dve mase, bez obzira na njihov slučajni položaj, kao sjedinjene u tački  $S$ . Tačka  $S$  zove se težište mase  $\mu_1$  i  $\mu_2$ . Neka se obe ove mase nalaze u pravouglom koordinatnom sistemu sa koordinatama  $x_1 y_1 z_1$  odnosno  $x_2 y_2 z_2$ . Tada su koordinate tačke  $S$

$$x_{12} = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad y_{12} = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad z_{12} = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

Ako je sa ovim masama čvrsto spojena i neka treća masa  $\mu_3$  onda odgovarajuću tačku  $S$  možemo naći isto kao i gore, pa izlazi da je težište za sve tri mase

$$x = \frac{(\mu_1 + \mu_2) x_{12} + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

$$y = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad z = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Na ovaj način možemo naći težište proizvoljnog broja čvrsto vezanih masa  $\mu_i$  koje je dato jednačinama

$$x = \frac{\sum \mu_i x_i}{m}; \quad y = \frac{\sum \mu_i y_i}{m}; \quad z = \frac{\sum \mu_i z_i}{m} \quad (25)$$

Ovde  $m = \sum \mu_i$  označava ukupnu masu svih pojedinih povezanih delova.

Težište je dakle napadna tačka rezultante svih sila teže koje dejstvuju na pojedine delove sistema.

Težište ima značaja ne samo za silu teže, već i za efekte koji su posledica inercije. Ako se jednom složenom telu saopšti ubrzanje, onda na svaki njegov delić mase dejstvuje otpor inercije koji je po pravcu suprotan ubrzanju, a po veličini srazmeran masi delića. I ovde kao i kod teže imamo paralelne i masi proporcionalne sile. Za njihovu rezultantu i njenu napadnu tačku važi sve ono što i za težu. Težište je opet napadna tačka rezultante inercionih otpora. U tome smislu se težište naziva centrom mase.

Za sistem tela koja međusobno nisu čvrsto povezana zove se tačka definisana jed. (25) njihovim zajedničkim težištem, kao npr. zajedničko težište sunčanog sistema, Zemlje i Meseca i slično.

Kod homogenih tela prostog geometrijskog oblika može se lako izračunati položaj težišta. Kod homogene pune ili šuplje lopte to je njihov centar, kod paralelopipeda presek njegovih dijagonala itd.

§ 51. **Stav o održanju kretanja težišta.** Neka se u prostoru slobodno kreću više masa  $m_i$  koje međusobno nisu čvrsto povezane i između kojih nema nikakvih dejstava, ili dejstvuju samo unutarnje sile odbojne ili privlačne. Zajedničko težište tih masa po pravilu menja svoje mesto u prostoru, a njegov položaj se može u svakom trenutku izračunati pomoću jed. (25) ako su date koordinate  $x_i y_i z_i$  pojedinih masa. Brzina kojom se menja položaj težišta u pravcu triju koordinatnih osovina dobija se diferencijalno jed. (25) po  $t$

$$v_x = \frac{\sum m_i \frac{dx_i}{dt}}{m}; \quad v_y = \frac{\sum m_i \frac{dy_i}{dt}}{m}; \quad v_z = \frac{\sum m_i \frac{dz_i}{dt}}{m} \quad (26)$$

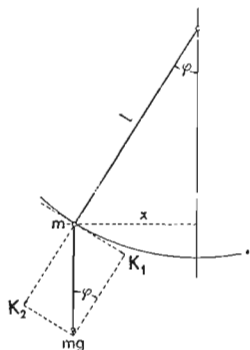
gde je  $m = \sum m_i$ . Ali brojioci ova tri izraza predstavljaju sume količina kretanja pojedinih masa u tri koordinatna pravca, a one su konstantne jer dejstvuju samo unutarnje sile. Prema tome su i tri komponente brzine težišta, pa prema tome i njegova brzina, konstantne, sasvim nezavisno od toga da li se brzine pojedinih masa menjaju usled dejstva unutarnjih sila. Ako na sve pojedinačne mase dejstvuje još i jedna spoljna sila koja im saopštava ubrzanje npr. teža, onda se težište kreće isto onako kao što bi se kretalo kad bi se sve pojedinačne mase našle skoncentrisane u težištu.

Kao što se iz načina izvođenja zapaža, ovaj stav o održanju kretanja težišta ustvari je drugi oblik stava o održanju količine kretanja, dakle na kraju treći Njutnov aksiom.

Primer za održanje težišta daje nam šrapnel koji se rasprskava u vazduhu. Sve dok se šrapnel ne rasprskne težište mu je u unutrašnjosti i opisuje parabolu odnosno balističku krivu. Pri rasprskavanju pojedini se delići razdvoje usled unutrašnjih sila, zajedničko težište delova se pak kreće

i dalje kao da je projektil ostao nepromenjen. Ipak s tom razlikom što je otpor vazduha — dakle spoljašnja sila — veći na deliće nego što je bio na ceo šrapnel, tako da je balistička kriva koju težište opisuje posle rasprskavanja jače na dole savijena, no što bi bila da šrapnel nije eksplodirao.

§ 52. **Matematičko klatno.** Pod klatnom podrazumeva se svako telo na koje dejstvuje teža i koje je obešeno tako, da se slobodno može obrtati oko jedne tačke ili čvrste ose. Matematičko klatno je idealno klatno i zamišlja se sastavljeno od materijalne tačke  $m$  obešene o konac bez težine (sl. 45).



Sl. 45. Uz matematičko klatno.

Neka je dužina klatna  $l$ , i udaljimo ga za ugao  $\varphi$  iz ravnotežnog položaja. Na  $m$  dejstvuje upravno naniže teža  $mg$ . Ovu možemo razložiti na dve komponente  $k_2$  u pravcu konca i  $k_1$  upravno na nju. Prva se poništava usled elastičnosti konca. Druga  $k_1 = mg \sin \varphi$  vuče masu  $m$  po tangenti na luk u ravnotežni položaj, tako da se masa  $m$  kreće po kružnom luku.

Neka je  $s$  dužina luka za koji je  $m$  udaljeno iz ravnotežnog položaja. Tada je  $s = l\varphi$  te je stoga i brzina mase  $mv = ds/dt = l d\varphi/dt$  a njeno ubrzanje  $\gamma = dv/dt = l \cdot d^2\varphi/dt^2$ . Zbog toga je

$$k_1 = m\gamma = ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi \quad (27)$$

Ako uzmemo u obzir samo male amplitude, tj. male uglove  $\varphi$ , možemo napisati  $\sin \varphi = \varphi$  pa dobijamo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (28)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine daje nam

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad (29)$$

gde je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (30)$$

Klatno se dakle kreće harmonijski sa amplitudom  $\varphi_0$ .  $\tau$  je vreme oscilovanja klatna tj. trajanje jednog punog odlaska i povratka, i kao što se vidi srazmerno je kvadratnom korenu iz dužine klatna. Trajanje oscilacije klatna dužine od 100 cm je skoro tačno ravno 2 sec. Uobičajeno je da se klatno sa tim trajanjem oscilacije naziva sekundno, jer je trajanje jedne poluoscilacije ravno jednoj sekundi. Zakone klatna našao je Galilej 1596.

Ako se klatno udalji od ravnotežnog položaja i udari se pri puštanju upravno na pravac u kome bi se inače kretalo, onda se ono kreće po jed-

noj zatvorenoj putanji i njegov konac opisuje kupu. Mi ćemo posmatrati samo slučaj kada se masa  $m$  kreće po krugu. Kao što se vidi to je potpuno identičan slučaj kao kod centrifugalnog regulatora koji smo posmatrali ranije i za njega važe isti uslovi ravnoteže. Ako sada stavimo uvedenu silu teže  $k = mg$ , izlazi kao i tamo

$$\cos \alpha = \frac{k}{ml\omega^2} = \frac{y}{l\omega^2} \text{ ili } \omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} \text{ odnosno } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} \quad (31)$$

U ovim izrazima je  $\omega$  ugaona brzina a  $\tau$  vreme jednog obilaženja klatna. Na mesto  $l$  u jed. (30) ulazi stoga  $l \cos \alpha$ . Trajanje oscilacije ovog koničnog klatna jednako je sa vremenom oscilovanja jednog klatna u ravni čija je dužina  $l \cos \alpha$ , ono dakle oscilira brže od ravnog klatna. Za malo  $\alpha$  razlika u trajanju oscilacija je mala, pošto se  $\cos \alpha$  vrlo malo razlikuje od jedinice, i zbog toga ne mari mnogo ako ravno klatno ima i jednu malu bočnu komponentu.

§ 53. **Fizičko klatno.** Stvarno klatno, dakle ono koje se sastoji od tela sa dimenzijama koje se ne mogu zanemariti, zove se fizičko klatno (sl. 47). Prema jed. (11) § 24 važi za fizičko klatno mase  $m$  — ako ovde sa  $l$  označimo rastojanje težišta  $S$  od ose  $O$ , sa  $J$  momenat inercije u odnosu na tu osu a sa  $N$  obrtni momenat —

$$N = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg l \sin \varphi \quad (32)$$

Ako je  $\varphi$  ponovo tako malo da se može staviti  $\sin \varphi = \varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{J} \varphi \quad (33)$$

a odatle je

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

gde je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}; \quad D = mgl \quad (34)$$

Vidi se da je jed. (30) u prethodnom paragrafu samo specijalan slučaj jed. (34), jer kad se oscilujuća masa skoncentriše u jednu tačku postane  $J = ml^2$ . Fizičko klatno osciluje istom brzinom kao matematičko čija je dužina

$$\lambda = \frac{J}{ml} \quad (35)$$

a pri tome je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \quad (36)$$

$\lambda$  se naziva redukovana dužina fizičkog klatna. Veličina



$D = mgl$  zove se **direkciona sila** (ovaj naziv nije dobar jer  $D$  nije nikakva sila.)

Momenat inercije jedne homogene pune lopte mase  $m$  a poluprečnika  $r$ , u odnosu na osu koja prolazi kroz težište, jeste  $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$ . Ako je ova lopta obešena o konac tako da je rastojanje njenog centra (težišta) od tačke vešanja  $l$ , onda je njen momenat inercije u odnosu na tu tačku, prema jed. (14) § 24

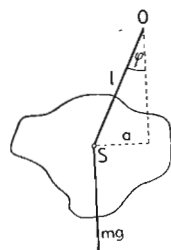
$$J = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = m(l^2 + \frac{2}{5}r^2).$$

Redukovana dužina ovakvog klatna je

$$\lambda = l \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} \right).$$

Ako je npr.  $l = 100$  cm,  $r = 1$  cm onda je  $\lambda = 1,00004 l$  dakle sasvim približno  $\lambda = l$ , i zbog toga se ovakvo klatno može uzeti kao sasvim približno realizovano matematičko klatno.

Sl. 46. Fizičko klatno.



§ 54. **Određivanje ubrzanja  $g$  sa klatnom.** Pomoću klatna koje se sastoji od konca prilične dužine i ne sasvim male mase npr. olovne lopte može se odrediti ubrzanje zemljine teže  $g$  sa priličnom tačnošću.

Znatno tačnije je ovo određivanje sa tzv. reverzionim klatnom. Neka je  $J_0$  momenat inercije nekoga tela u odnosu na horizontalnu osu koja prolazi kroz njegovo težište  $S$  (sl. 47) onu npr. koja je upravna na ravan crteža. Neka je ovo telo obešeno u tački  $A$  na rastojanju  $a$  od težišta  $S$  tako da može oscilovati oko horizontalne osovine. Trajanje jedne njegove oscilacije je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}$$

Sl. 47. Uz teoriju reverzionog klatna.

Može se uvek naći na pravoj koja prolazi kroz tačke  $A$  i  $S$  s druge strane težišta, a na rastojanju  $b$  od njega, jedna tačka  $B$  kroz koju ako povučemo osu paralelnu prvoj i pustimo da telo oko nje osciluje, vreme trajanja oscilacija će biti jednako malopredšnjem. Tada je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mb^2}{mgb}} \quad \text{ili} \quad \frac{J_0 + ma^2}{a} = \frac{J_0 + mb^2}{b}$$

Ako se ove jednačine reše po  $b$  dobijamo za  $b$  vrednosti (sem one  $b = a$ , tj. kad se tačke  $A$  i  $B$  poklapaju)

$$b = \frac{J_0}{ma}$$

$AB$  ravno je zbiru  $a + b$ , dakle

$$AB = a + \frac{J_0}{ma} = \frac{J_0 + ma^2}{ma} = \frac{J}{ma}$$

gde je  $J$  momenat inercije u odnosu na osu koja prolazi kroz  $A$ . To je međutim prema jed. (35) redukovana dužina klatna  $\lambda$  tela koje osciluje oko  $A$ , pa i oko  $B$ , pošto su trajanja oscilacija jednaka. Na ovaj način se dakle može naći redukovana dužina klatna, i pomoću nje, mereći trajanja oscilacija, što se može izvršiti sa vrlo velikom tačnošću, može se dakle izračunati  $g$ .

Jedno prosto i praktično primenljivo klatno prikazuje sl. 48. Na metalnoj šipci nameštene su dve pokretne mase  $m_1$  i  $m_2$ , obično sočivastog oblika, da bi otpor vazduha bio manji. Na šipci se nalaze dalje dva sečiva (prizme) sa oštricama okrenutim jedna drugoj, i to jedno sečivo između, a drugo izvan masa. Naprava može da osciluje oko obeju sečica kao klatno kad se jedna od njih postavi na pogodnu tvrdu podlogu od čelika ili ahata. Obe mase se pomeraju sve dotle, dok trajanja oscilacija oko obeju sečica ne postanu jednaka. Rastojanje sečica je tada ravno dužini redukovanog klatna, i ono se zbog finoće sečica može veoma tačno izmeriti. Mereći vreme oscilovanja  $\tau$  i dužinu klatna  $\lambda$  može se prema jed. (36) izračunati ubrzanje  $g$ .

Klatno daje mnogo tačnije od slobodnog padanja eksperimentalni dokaz za strogu proporcionalnost, odnosno jednakost između inertne i teške mase tela. U jed. (27) § 52 masa  $m$  na levoj strani predstavlja inertnu, a masa  $m$  na desnoj strani tešku masu tela. Kad ove mase ne bi bile jednake, što možemo za momenat pretpostaviti, i kad se ne bi poništavale, onda bi se pod korenom morao nalaziti još jedan faktor koji bi izražavao odnos između teške i inertne mase. Kad ovaj odnos ne bi bio jednak za sva tela to bi se primetilo po tome, što bi dva klatna napravljena od različitog materijala koja po jed. (35) imaju iste redukovane dužine ipak imala različita vremena oscilovanja. Ovo se pitanje može sasvim tačno eksperimentalno proveriti, jer se trajanje jednog velikog broja oscilacija klatna može sasvim tačno izmeriti. Ogladi koji su vršeni sa najvećom preciznošću pokazali su rigoroznu tačnost zakona o jednakosti teške i inertne mase.

§ 55. **Ravnoteža pod dejstvom teže.** Kaže se za jedno telo u miru, koje je podložno dejstvu zemljine teže da se nalazi u ravnoteži. To može biti samo u tom slučaju, ako je sila teže poništena njoj jednakom silom koja dejstvuje u suprotnom pravcu. Bezbrojni primeri takve ravnoteže opkoljavaju nas u svakidanjem životu. Većina predmeta u našoj okolini nalaze se u miru, znači da su u ravnoteži. Ako se takvo jedno telo izvede



Sl. 48. Reverziono klatno.

malo iz ravnotežnog položaja i ostavi samo sebi, ono po pravilu traži, naročito ako nema trenja, da se vrati u svoj prvobitni položaj, npr. klatno, neka kutija na stolu koju malo nakrenemo itd. Takva vrsta ravnoteže naziva se **stabilna**. Ali ima i takvih slučajeva, da i ako je trenje potpuno isključeno telo ostane u novom položaju u koji smo ga doveli, npr. homogena lopta koja leži na potpuno horizontalnoj ravni, točak obrtno utvrđen na jednoj osovini a oko osovine podjednako sagrađen, i uopšte svako telo poduprto tačno u svome težištu. Takva ravnoteža se zove **indiferentna**. Treći slučaj imamo kad se telo sasvim malo izvede iz svog položaja i pusti, ono teži da se i dalje pokrene i da zauzme neki treći stabilni položaj. Takav slučaj bio bi donekle sličan sa štapom koji balansiramo na prstu, ali koji nije u ravnoteži, jer je balansiranje moguće samo pri neprekidnom kretanju štapa. Takva zamišljena ravnoteža zove se **labilna**. Ona se praktično ne javlja, jer i ako bi telo postavili u takvu ravnotežu, bio bi dovoljan beskrajno mali poremećaj pa da ga iz nje udalji, a takvi poremećaji se na zemlji ne mogu izbeći. Labilna ravnoteža ne postoji dakle praktično kao trajno stanje, ali je zato od teoriskog interesa.

Izvesni stabilni položaji su vrlo često slični labilnoj ravnoteži i potrebno je vrlo malo pomeriti tela da se iz stabilne prevedu u labilnu, a iz ove u jedan nov stabilan položaj. Primer za to imamo kod daske postavljene da stoji na uskoj strani ili visok tanak cilindar koji stoji na osnovi. Već usled malog potresa daska će pasti obrćući se oko jedne ivice, pri čemu prolazi kroz položaj labilne ravnoteže, da dospe u položaj stabilne, ostajući da leži na široj strani. Takva ravnoteža se zove **metastabilna**.

Pri svakom ravnotežnom položaju je pokretljivost tela ma na koji način ograničena, i njoj su propisani izvesni uslovi. Klatno obešeno o konac ne može nigde iz lopte koju opisuje dužina konca kao poluprečnik. Kutija koja leži na stolu ne može imati ni jednu svoju tačku niže nego što je daska stola **itd.**

Za sva tri slučaja napred pomenute ravnoteže pod dejstvom teže merodavan je jedan zajednički uslov i to da težište tela zauzima uvek ekstreman položaj.

1. Kod stabilne ravnoteže težište zauzima **na najnižem** položaj koji mu druge okolnosti dozvoljavaju.

2. Kod labilne ravnoteže težište zauzima **najvišem** položaj koji je moguć.

3. Indiferentna ravnoteža čini prelaz između stabilne i labilne ravnoteže. Ona je ostvarena u onom slučaju kad se pri pomeranju tela ne menja visina njegovog težišta.

Vrlo često se dešava da se jedna ravnoteža mora istovremeno označiti i kao stabilna i kao indiferentna, prema tome kakvo se pomeranje iz ravnotežnog položaja uzme u obzir. Cilindar koji leži na horizontalnoj

podlozi može se po njoj valjati, a da mu se visina težišta pri tome ne promeni. U tome smislu on se nalazi u indiferentnoj ravnoteži, a s obzirom na druga moguća kretanja on je u stabilnoj ravnoteži.

Ako se jedno telo pokrene iz ravnotežnog položaja, svaka promena visine njegovog težišta vezana je sa promenom njegove potencijalne energije. Kod stabilne ravnoteže usled pomenutih uslova moguće je jedino **podizati** težište tela, pri tome potencijalna energija pri svakom mogućem pomeranju tela postaje veća, pa se stoga mora utrošiti rad da se izazove takvo kretanje iz ravnotežnog položaja. Kod labilne ravnoteže prema napred rečenom, **moguće je samo spuštanje** težišta, pri tome se potencijalna energija smanjuje i tom prilikom se može dobiti rad, tj. telo dospeva u jednako ubrzano kretanje. Pri pokretanju tela iz indiferentne ravnoteže niti se troši, niti se dobija rad, i ovo pomeranje se vrši bez promene energije tela.

Prema tome uslovi za ravnotežu se mogu i ovako iskazati: **Potencijalna energija** jednog tela u stabilnoj ravnoteži je **minimum**; u labilnoj **maksimum**; indiferentna ravnoteža je **granični slučaj** između stabilne i labilne ravnoteže.

Često jedno telo ima više položaja stabilne i labilne ravnoteže. Kutija koja stoji na stolu ima 6 položaja stabilne i 20 položaja labilne ravnoteže. Stabilne kad stoji na jednoj od 6 pljosni, a labilne kad je položena na jednoj od 12 ivica ili na jednom od 8 rogljeva. Klatno obešeno o konac ima samo jedan položaj stabilne ravnoteže.

Uslovi koje smo dali na poslednjem mestu za ravnotežu ne važe samo za ravnotežu tela pod uticajem teže, već i makoje druge sile npr. elastične, električne, magnetne **itd.**

U slučaju kada telo leži na horizontalnoj ravni, uslov za stabilnu ravnotežu je da se težište nalazi iznad površine koja leži na ravni (površine podupiranja). Kod obešenog tela u stabilnoj ravnoteži stoji težište ispod tačke vešanja na istoj vertikali. Ovi uslovi se ne smeju upotrebiti kao opšta definicija stabilnog ravnotežnog položaja, već su ograničeni samo na pomenute specijalne slučajeve.

Kao mera za stepen stabilnosti jednog ravnotežnog položaja može se uzeti veličina promene položaja tela pre no što ono pređe u labilnu ravnotežu. Stabilnost je prema tome zavisna od pravca, jer jedno telo često pada na jednu stranu lakše nego na drugu.

Ovom prilikom pomenimo i tzv. bifilarno vešanje koje nalazi primene kod vešanja obrtnih delova nekih instrumenata (npr. nekih elektrometara). Obrtni deo visi obešen o dva paralelna konca u stabilnoj ravnoteži. Prilikom obrtanja tela oko vertikalne osovine njegovo težište se podiže, i stoga se javlja momenat obrtanja koji teži da vrati telo u položaj stabilne ravnoteže. Za male uglove ovaj momenat je njima proporcionalan. On je dalje

težini tela, kvadratu rastojanja obeju konaca upravo, a dužini konaca obrnuto proporcionalan. Ugao za koji obešeno telo izide iz svog ravnotežnog položaja može poslužiti kao mera sile koja telo obrće.

### Opšta gravitacija

§ 56. **Newton-ov zakon gravitacije.** Jedno od najvećih naučnih dela svih vremena je bez svake sumnje zaključak Isaka Newton-a (1642—1727) da dejstva teže nisu ograničena samo na zemaljska tela, već da se javljaju između svih masa u vasioni (opšta gravitacija 1683). Kao prvi rezultat takvog shvatanja Njutn je izneo da sila koja primorava mesec da opisuje kružnu putanju oko zemlje, nije ništa drugo do sila teže koja polazeći od zemlje dejstvuje na mesec isto tako, kao što dejstvuje i na svako drugo telo koje se nalazi na zemljinoj površini. Dalje, isto takva dejstva moraju postojati između Sunca i planeta koje se oko njega kreću, ako je teža zbilja opšta osobina materije, tj. ako svaka masa na makoju drugu dejstvuje privlačnom silom. Sledeći tu ideju postavio je Njutn zakon gravitacije koji daje privlačnu silu  $k$  između masa  $m$  i  $m'$ . Ako je rastojanje njihovih težišta  $r$ , onda je po Njutnovom zakonu

$$k = G \frac{m \cdot m'}{r^2} \quad (1)$$

Sila kojom se dve mase privlače, upravo je srazmerna svakoj od tih masa, a obrnuto je srazmerna kvadratu rastojanja njihovih težišta. Veličina  $G$  se zove opšta gravitaciona konstanta. Njena brojna vrednost je

$$G = 6,65 \times 10^{-8} \text{ din} \cdot \text{cm}^2/\text{gr}^2.$$

Dve mase od po 1 g čija se težišta nalaze na rastojanju od 1 cm privlače se silom od  $6,65 \times 10^{-8}$  dina.

Neka nam  $m$  označava masu jednog tela koje se nalazi na zemljinoj površini. Veličina sile teže koja na telo dejstvuje iznosi  $mg$ , gde je  $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ . S druge strane ova sila mora odgovarati Njutnovom zakonu, ako za  $m$  stavimo masu tela, umesto  $m'$  masu zemlje  $M$ , a na mesto  $r$  zemljin poluprečnik ( $R = 6370 \text{ km}$ ) jer to je rastojanje između tela i zemljinog težišta. Odatle izlazi da je

$$k = mg = G \frac{m \cdot M}{R^2}$$

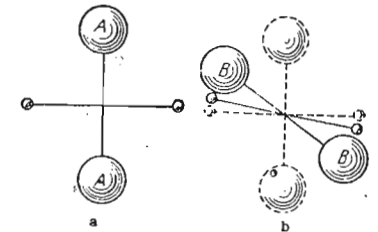
ili

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (2)$$

Iz ovoga izraza se može izračunati masa zemlje pošto je njen radius i ubrzanje  $g$  poznato, ako se i konstanta  $G$  odredi. Nju su vrlo tačnim ogle-

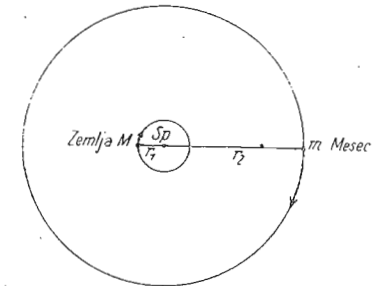
dima izmerili Richarz i Krigar-Menzel mereći privlačenje između teških olovnih masa i lakih tela. Izlazi da je masa zemlje ravna  $6 \times 10^{27} \text{ g}$  ili  $6 \times 10^{21}$  tonu, a njena gustina okruglo 5,5. Iz ovako velike gustine mora se zaključiti da se u unutrašnjosti zemlje nalaze srazmerno teška tela. Iz mnogih razloga se drži kao sigurno da se zemlja najvećim delom sastoji iz gvožđa i nikla.

Privlačenje između masa pokazuje se lepo ogledom koji je prvi izveo Cavandich (1798). Pri tome se služimo torzinom vagom, tj. dvema malim olovnim loptama, utvrđenim na jednoj šipki koja je opet obrtno obešena o jednoj žici (sl. 48a). Ako naspram ovih stoje dve velike olovne lopte u položaju  $AA_1$ , privlačne sile velikih lopti na male uzajamno se poništavaju. Ali kad veće lopte postavimo u položaj  $BB_1$ , onda privlačna sila izaziva obrtanje malih lopti.



Sl. 48a. Cavandich-ov ogled za pokazivanje privlačenja masa.

§ 57. **Kretanje Meseca.** Prvi nepobitan dokaz da je Njutn za svoju gravitacionu teoriju, kad je izračunao vreme obilaska Meseca oko Zemlje. Mesec se kreće vrlo približno po kružnoj putanji oko Zemlje. Ali ni Zemlja nije u miru, zanemarujući u ovom slučaju njeno kretanje oko Sunca i kretanje celog sunčanog sistema. Pre je u miru zajedničko težište  $Sp$  Zemlje i Meseca, pošto se ovde radi samo o dejstovanju unutarnjih sila u sistemu Mesec-Zemlja. Neka je  $r$  rastojanje Meseca od Zemlje,  $M$  masa Zemlje,  $m$  masa Meseca,  $r_1$  rastojanje zemljinog a  $r_2$  mesečevog težišta od  $Sp$ . Njihovo zajedničko težište dato je odnosom  $Mr_1 = mr_2$  (sl. 48b) gde je  $r_1 + r_2 = r$ . Oko zajedničkog težišta  $Sp$  kreće se prema tome Mesec po velikom, a Zemlja po malom krugu i oboje izvrše za isto vreme jedan pun obrt, tj. oni imaju iste ugaone brzine  $\omega$ .  $Sp$  leži ustvari u unutrašnjosti Zemlje, otprilike na  $3/4$  zemljinog poluprečnika od centra Zemlje, i kao što se može lako odatle izračunati iznosi  $M/m$  približno 81, a  $r$  je jednako 60 Zemljinih poluprečnika. Na sl. 48b je to drugičije nacrtano jedino usled veće preglednosti.



Sl. 48b. Kretanje Meseca.

Ravnoteža u sistemu Zemlja-Mesec zahteva i jednakost centripetalne sile (privlačne sile) koja dejstvuje između ova dva nebeska tela, a isto tako i jednakost centrifugalne sile koja dejstvuje na svako od njih, dakle

$$Mr_1 \omega^2 = mr_2 \omega^2 = G Mm/r^2.$$

Oдавde se lako može naći, s obzirom na jednačinu (2)

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) g \frac{R^3}{r^3}$$

Neka je  $\tau$  vreme jednog mesečevog opticanja, onda je  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ . Ako zane-  
marimo vrlo malu vrednost  $m/M$ , dobija se

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^3}} \quad (3)$$

Kad u ovoj jednačini stavimo  $R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm}$ ,  $r = 60,267 R$   
i  $g = 981 \text{ cm/sec}^2$  onda za  $\tau$  dobijamo 27,3 dana, što se poklapa sa  
stvarnošću.

Iz jed. (3) sleduje da je kvadrat vremena opticanja srazmeran trećem  
stepenu mesečevog rastojanja od zemljinog središta. Kad bi zemlja kao  
druge neke planete imala više meseca, onda bi se kvadrati njihovih vremena  
opticanja imali kao kubovi njihovih srednjih rastojanja od zemljinog sre-  
dišta (sravni treći Keplerov zakon).

§ 58. **Kretanje planeta.** Najveći uspeh gravitacione teorije bio je u  
tome što je Njuton čisto matematičkim putem našao zakone kretanja planeta,  
koje je Kepler postavio (1609 i 1618) empirijski na osnovu astronomskih  
posmatranja. Tri Keplerova zakona glase:

1. Sve se planete kreću po elipsama, u čijoj se  
jednoj žiži nalazi sunce.

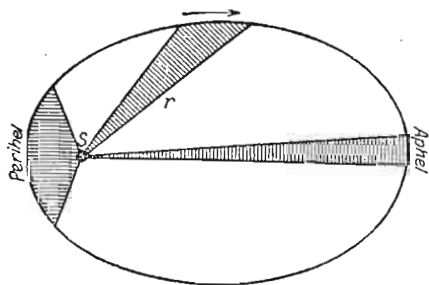
2. Radijus vektor (rastojanje od sunca do planete), za je-  
dnaka vremena opisuje  
jednake površine.

3. Kvadrati vremena  
opticanja imaju se kao  
treći stepeni njihovih  
srednjih rastojanja od  
sunca (treći stepen velike polu-  
ose njihove eliptične putanje).

Ekscentričnost planetskih pu-  
tanja, tj. njihovo odstupanje od  
kružne putanje je vrlo malo. Ono  
je najveće kod Merkura i iznosi

0,20561, a najmanje kod Venusa sa 0,00682. Ekscentričnost zemljine pu-  
tanje je 0,01675.

Značenje drugog Keplerovog zakona pokazuje sl. 49. Ošene površine koje su međusobom jednake odgovaraju ovde istim vremenima. Da  
mora postojati zakon ovoga oblika izlazi već i iz stava o konservaciji



Sl. 49. Uz drugi Keplerov zakon.

energije. Ukoliko je jedna planeta bliža suncu, utoliko je manja njena  
potencijalna energija, stoga njena kinetička energija i njena brzina moraju  
rasti. Brzina na putanji mora biti najveća onda kad je planeta najbliža  
suncu (perihel), a najmanja kad je ona najviše udaljena od njega (afel).

Drugi Keplerov zakon se zove još i zakon površina. On važi  
za sva kretanja koja se vrše pod dejstvom sile upravljene ka nepokretnom  
središtu (centralna sila), dok druga dva zakona važe samo onda ako je  
ta sila obrnuto srazmerna kvadratu razdaljine.

Prvi i treći Keplerov zakon su jedino posledica zakona gravitacije,  
jer je sila obrnuto srazmerna kvadratu razdaljine, što se matematički  
dokazuje. Drugi zakon važi kao što je ranije pomenuto za svaku centralnu  
silu. Ovi zakoni dakle ne važe samo onda kada centralna sila potiče od  
gravitacije, već u svima slučajevima kada između dva tela dejstvuje sila  
koja je obrnuto proporcionalna kvadratu razdaljine, kao npr. kod elek-  
tričnih punjenja. Ova tela će se kretati tada pod sličnim uslovima za koje  
važe Keplerovi zakoni (tzv. Keplerova kretanja). Važnu primenu nalazi  
ova činjenica kod atomske teorije.

§ 59. **Dejstvo na daljinu i dejstvo na blizinu.** Do kraja 19 stoleća  
postojalo je mišljenje da je sila teže tzv. dejstvo na daljinu, tj. da ona  
dejstvuje od jednog tela na drugo, ne izazivajući pri tome neke promene  
u prostoru između tih tela. Pri tome se još pretpostavljalo da se to dejstvo  
prostire beskrajno velikom brzinom. Isto se tako ranije mislilo i za pro-  
stiranje električnih sila.

Ove pretpostavke su međutim odbačene. Teorija relativiteta je poka-  
zala da najveće brzine kojima se mogu prostirati u prostoru ma koja dejstva,  
mogu biti u krajnjem slučaju ravne brzini prostiranja svetlosti u vakuumu  
(300 000 km/sec). Na mesto hipoteze o dejstvu na daljinu, došla je teorija  
o dejstvu na blizinu ili teorija polja. Ova kaže da masa koja se nalazi na  
jednom mestu u prostoru, stavlja ceo okolni prostor, dakle strogo uzev  
celu vasionu, u jedno naročito stanje, koje ima za posledicu da se na  
nekom telu postavljenom u ma kojoj tački prostora oseća uticaj sile, čija  
je veličina data zakonom gravitacije; kaže se da je prostor nosilac polja  
teže odnosno polja sile. Docnije ćemo se upoznati i sa drugom vrstom  
polja sile. Do sada nije bilo moguće meriti brzinu prostiranja dejstva teže.  
Zato bi bilo potrebno da se dejstvo teže jednog tela zaustavi, zatim u  
jednom određenom trenutku ponovo pusti i izmeri vreme posle koga ono  
počinje da dejstvuje na jedno veoma udaljeno telo. Ali izgleda da je  
zaustavljanje dejstva teže principijelno nemoguće. Uprkos tome skoro je  
van sumnje da je brzina prostiranja dejstva teže jednaka brzini prosti-  
ranja svetlosti.

§ 60. **Gravitacioni potencijal i jačina polja.** Ako masa  $m$  stoji pod  
privlačnim dejstvom druge jedne mase  $M$ , onda pri svakom pomeranju

mase  $m$  kad se razdaljina između masa povećava treba vršiti rad nasuprot privlačenju, a pri pomeranju kad se njihova razdaljina smanjuje, dobija se u radu. Odatle izlazi da potencijalna energija koju masa  $m$  ima u odnosu na masu  $M$  zavisi od razdaljine  $r$  tih masa. Ako stavimo da je ona za beskrajno veliku razdaljinu ravna nuli (nulta tačka potencijalne energije može se proizvoljno izabrati), onda je njena vrednost

$$A = \int_s^r G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r} \quad (4)$$

Pod gravitacionim potencijalom  $P$  na jednom mestu prostora podrazumeva se potencijalna energija jedinice mase dakle 1 grama u toj tački. Prema tome je gravitacioni potencijal na razdaljini  $r$  od težišta mase  $M$

$$P = -G \frac{M}{r} \quad (5)$$

Može se takođe reći: Gravitacioni potencijal u jednoj tački prostora jeste rad, koji se dobija, kad se masa od 1 grama od toga mesta prostora odnese na beskrajnu razdaljinu od privlačne mase. Ovaj rad je prema jed. (4) negativan, jer se zbilja protivu sile teže mora vršiti rad.

Pod jačinom polja gravitacije podrazumeva se ona sila koja usled gravitacije deluje na masu od 1 grama u ma kojoj tački prostora. Ona je ako imamo posla samo sa jednom jedinom privlačnom masom data izrazom

$$F = -G \frac{M}{r^2} \quad (6)$$

Prema ovome i prema jed. (2), jačina gravitacionog polja na zemljinoj površini ( $M$  masa zemlje,  $r$  njen poluprečnik) prosto je ravna negativnoj vrednosti ubrzanja zemljine teže  $g$ , na zemljinoj površini, i uopšte u slučaju gravitacije, jačina polja i ubrzanje su identični (kod druge vrste polja sile to nije slučaj, npr. kod električnog).

Površine istog potencijala (ekvipotencijalne površine) jesu kod jedne jedine privlačne homogene lopte, kao što to predstavljaju npr. nebeska tela, loptine površine opisane oko njenoga središta. Kad su mase u prostoru proizvoljno raspoređene, one su znatno komplikovanije. Gravitaciono polje može se predstaviti dajući jačinu polja ili potencijal u pojedinim tačkama prostora. Pravac jačine polja stoji uvek upravno na površinama istog potencijala.

## DEO DRUGI

# Mehanika tela promenljivog oblika i zapremine

## I. Materija

§ 61. Agregatna stanja. Prema otporu koji tela pokazuju pri promeni svoga oblika ili svoje zapremine, mogu se razlikovati tri agregatna stanja: čvrsto, tečno i gasovito. Različito ponašanje čvrstih, tečnih i gasovitih tela naspram sila koje teže da im promene oblik ili zapreminu, dolazi od vrlo različite veličine sila kojima su povezani elementarni sastojci tela i koje ih drže u njihovom trenutnom položaju. Prema opštem ponašanju spram dejstva spoljašnjih sila tela se mogu razlikovati sa sledeće tačke gledišta:

Čvrsta tela suprotstavljaju svakoj promeni bilo oblika ili zapremine veliki otpor. Zbog toga je često moguće zanemariti promene koje se stvarno na njima dešavaju i zamisliti ih kao čvrsta tela.

Tečnosti se opiru promeni svoje zapremine, no taj otpor je u opštem slučaju manji nego kod čvrstih tela, mada je vrlo veliki. Njihov oblik se, naprotiv, može vrlo lako da menja. Zbog toga zauzimaju oblik suda u kome se nalaze.

Gasovi su mnogo lakše stišljivi od tečnosti. Povećanju zapremine i promeni oblika uopšte ne suprotstavljaju nikakav otpor, već sami od sebe ispunjavaju svaki prostor koji im se stavi na raspoloženje.

Dok između gasova i tečnosti pod običnim okolnostima postoji vrlo jasna granica, tako da ne može biti sumnje da li je neko telo tečno ili gasovito, za čvrsta i tečna tela to nije uvek slučaj. Samo kristalna tela, kao npr. led, metali itd. menjajući naglo svoje osobine prelaze na jednoj određenoj temperaturi u tečno stanje. Čvrsta amorfna tela pri zagrevanju postepeno prelaze iz čvrstog u tečno stanje kao npr. vosak, parafin, staklo itd. Ako se u tečnom stanju rashlađuju, njihova viskoznost postepeno raste i naposletku postane toliko velika, da se ponašaju kao čvrsto telo, ukoliko spoljašnje sile ne deluju na njih vrlo dugo vremena. Ali ako se ostavi da na njih dovoljno dugo deluju spoljašnje sile onda se zapaža između njih i kristalnih tela jasna razlika u plastičnosti. Ako se npr. ostavi da metalni novac dugo leži na hladnom crvenom vosku, on postepeno prodire u vosak. Telo koje je u svim svojim delovima sagrađeno

na isti način zove se homogeno, a u protivnom slučaju nehomogeno. Telo koje se u svim pravcima ponaša na isti način je izotropno. Ono se zove anizotropno ako se njegove osobine i ponašanje menjaju sa pravcem. Gasovi i tečnosti su u običnom stanju uvek izotropni, a takođe i amorfna čvrsta tela. Naprotiv, svi su kristali anizotropni.

Na mnogim pojavama se zapaža da se fizičke osobine nekog tela iz osnova menjaju, ili čak izgleda kao da telo iščezava npr. kod isparivanja, rastvaranja u nekoj tečnosti, pri hemiskim transformacijama. U svima tim slučajevima može se dokazati, da materija ustvari nije nestala, već da samo menja svoj oblik. Ta činjenica do koje se došlo iskustvom zove se stav o održanju materije.

Danas međutim znamo da taj stav nije bez izuzetka. U fizici elementarnih procesa poznate su pojave pri kojima se zračenja dovoljno velike energije pretvaraju u materiju (elektrone, pozitrone) i obrnuto. S druge strane znamo takođe da između mase i energije postoji ekvivalentnost. Zato se stav o održanju materije može postaviti kao specijalan slučaj stava o održanju energije, koji uvek važi kada nema pretvaranja materije u zračnu energiju i obrnuto.

§ 62. **Prethodni pojmovi o sastavu materije.** Ako se neko homogeno čvrsto, tečno ili gasovito telo razloži u sitnije delove, to se u početku ti delovi od celine razlikuju samo svojom veličinom i oblikom, ali ne i svojim fizičkim osobinama. Radi upoređenja zamislimo neki veliki skup ljudi izdijeljen u grupe, a ove ponovo u manje grupe. Ove grupe i podgrupe se bitno ne razlikuju od prvobitnog skupa. Ali kao što se podelom skupa u grupe najzad dolazi do granice kad se svaka »grupa« sastoji samo iz jednog čoveka, tako isto postoji granica pri deljenju tela koja se ne može prekoračiti, a da se ne uđe dublje u prirodu same materije. Ono što su kod skupa ljudi pojedinci, to su kod fizičkih tela molekuli i atomi, koji se mogu smatrati kao osnovni delići iz kojih je sastavljeno neko telo. Pojedine vrste materije razlikuju se u tome, što su sagrađene iz različitih molekula i atoma. Svako telo koje možemo da posmatramo sastoji se iz ogromnog broja molekula. U kubnom santimetru vazduha koji nas okružuje nalazi se okruglo  $27 \cdot 10^{18}$  molekula, u jednom gramu vode  $3,37 \cdot 10^{22}$  molekula. Masa jednog molekula gasa vodonika iznosi samo oko  $3,3 \cdot 10^{-24}$  g, a masa kvadriliona ( $10^{24}$ ) vodoničnih molekula oko 3,3 grama.

Pojedini oblici u kojima se javlja materija razlikuju se po načinu rasporeda njenih elementarnih delića i po njihovom rastojanju. U čvrstim telima ovi delići su na vrlo malim rastojanjima i vezani su silama koje između njih dejstvuju za ravnotežni položaj, iz koga se po pravilu ne mogu da udalje. Jedini način njihovog kretanja jesu oscilovanja oko toga ravnotežnog položaja. Kod čvrstih tela moraju se strogo razlikovati

kristali od amorfih tela. Kod kristala su elementarni sastojci sasvim pravilno poređani u nizove koji se stalno ponavljaju i grade tzv. prostornu rešetku. Kod amorfih tela kao i kod tečnosti, ne postoji tako strog red, iako su rastojanja između molekula istog reda veličine kao kod kristala, što dokazuje isti red veličine njihovih gustina. I kod tečnosti i amorfih tela, ipak postoji izvestan red, bar u manjim granicama prostora. Njihovo proučavanje pomoću Rendgenovih zrakova pokazalo je da i u ovim telima postoje manje ili više zapletene prostorne rešetke koje dopuštaju molekulima veliku pokretljivost, kojom se tečnosti baš odlikuju. Oštra razlika između čvrstog i tečnog stanja koja se zapaža kod tela sa tačno određenom tačkom topljenja, objašnjava se na taj način, da između stanja u prostornoj rešetki i zapletenog stanja u tečnosti postoje prelazni stupnjevi koji nisu stabilni tako da ne postoji postepen već nagli prelaz (u skoku) između jednog i drugog stanja. Amorfna čvrsta tela nemaju tačno određenu tačku topljenja već omekšaju pri zagrevanju, odnosno očvrstnu pri hlađenju. Ona se mogu smatrati kao tečnosti koje umesto spontano da očvrstnu mogu vrlo jako da se prehlade i da sa snižavanjem temperature postanu tako viskozna da u velikoj meri dobiju osobine čvrstih tela. Kod gasova su rastojanja između molekula mnogo veća nego kod čvrstih i tečnih tela. Molekuli se kreću u prostoru slobodno velikom brzinom i samo pri sudaru dolazi kod njih do uzajamnog dejstva. Nekog pravilnog rasporeda kod njih nema čak i u najmanjim razmerama. S pravom se upoređuje tečnost sa sandučetom punim mravi, a gas sa prostorom punim komaraca.

### Elastične osobine čvrstih tela

§ 63. **Pojam elastičnosti i opšte činjenice.** Nauka o elastičnosti proučava promene oblika i zapremine tela, koje se javljaju pod dejstvom sila. Pri tome se čvrsta, tečna i gasovita tela ponašaju na različite načine, tako da to njihovo ponašanje može u izvesnoj meri da bude spoljašnja oznaka agregatnog stanja.

Do sada smo pretpostavljali da su tela koja smo susretali čvrsta, dakle takva koja apsolutno ne menjaju svoj oblik. Ustvari svako telo menja svoj oblik i svoju zapreminu, kad na njegove pojedine delove dejstvuju različito velike i različito upravljene sile. Ova osobina naziva se elastičnost. Stoga je svako stvarno telo elastično, tj. može manje ili više da menja svoj oblik.

Ako je jedno čvrsto telo podložno pritisku ili istezanju s jedne ili sa sviju strana, ono menja svoju zapreminu i svoj oblik na način koji zavisi od veličine i pravca dejstvjućih sila, i to utoliko jače, ukoliko su veće sile. Ako su ove promene male, one su opšte uzev srazmerne silama koje deluju i to sve dotle, dok se ne prekorači jedna određena granica karakteristična za svaki materijal, zvana granica elastičnosti. Posle te granice

primećuje se prvo da deformacije nisu više srazmerne silama, i drugo, da one ne iščezavaju odmah po prestanku dejstva sila, već tek posle izvesnog vremena, ako uopšte iščeznu (elastično naknadno dejstvo). Ako sile postaju sve veće telo se lomi ili prekida.

Sile koje dejstvuju mogu prouzrokovati promene linearnih dimenzija tela (pritiskak, istezanje), ili savijanje i uvrtnje. Nasuprot tim silama dejstvuje čvrsto telo drugom jednom silom koja teži da povraća prirodno stanje (elastična sila).

Oblik i zapremina jednoga tela određeni su silama koje vezuju molekularne deliće tela, u njihovom prirodnom ravnotežnom položaju. Svaka promena oblika i zapremine vezana je sa utroškom rada nasuprot sila koje se protive svakom povećavanju ili smanjenju uzajamnog rastojanja pojedinih molekula u telu.

§ 64. **Male promene. Hook-ov zakon.** Male promene koje ostaju u granicama elastičnosti kod čvrstog tela srazmerne su jačini sila koje ih izazivaju. Uzmimo metalnu žicu i učvrstimo jedan njen kraj, a na drugi vešajmo tegove  $p_1, p_2, p_3$  jedan za drugim. Izlazi da se do jedne izvesne granice koja zavisi od materijala i debljine žice, njena izduženja imaju kao  $p_1 : p_2 : p_3$ . Promena dužine  $\Delta l$  je pri tome srazmerna dužini žice  $l$ , a obrnuto srazmerna njenom preseku  $q$ . Za takve deformacije važi H o o k - o v z a k o n (1660)

$$\Delta l = \frac{lp}{qE} \text{ ili } \frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{qE} \quad (1)$$

gde  $\Delta l/l$  označava relativnu promenu dužine.

Isti zakon u granicama elastičnosti važi i ako na jedno telo dejstvuje izvestan pritisak.

Veličina  $E$  zavisi od prirode materijala i zove se modul elastičnosti. Modul je utoliko veći ukoliko je materijal manje podložan deformaciji. Njegove dimenzije su sila/presek. U tabelama se modul elastičnosti obično ne daje u dinamama na  $\text{cm}^2$  već u kilogramima težine na  $\text{mm}^2$ . Sledeća tabela daje izvestan broj vrednosti modula za različita tela.

Tabela modula elastičnosti

|                                |               |                         |               |
|--------------------------------|---------------|-------------------------|---------------|
| Aluminijum . . . . .           | 6.300—7.200   | Iridijum . . . . .      | 53.000        |
| Olovo . . . . .                | 1.500—1.700   | Bakar . . . . .         | 10.000—13.000 |
| Kovno gvožđe i čelik . . . . . | 20.000—22.000 | Mesing . . . . .        | 8.000—10.000  |
| Liveno gvožđe . . . . .        | 7.500—13.000  | Drveno vlakno . . . . . | 500—1.200     |

Ako je jedno telo izloženo uticaju sile koja ravnomerno sa sviju strana dejstvuje upravno na njegovu površinu, onda se menja njegova zapremina. Ako je telo izotropno, tj. ako je njegov modul elastičnosti u svima prav-

cima isti, ono u tom slučaju ne menja svoj oblik, a ako to nije slučaj onda se menja i oblik tela, jer je tada u izvesnim pravcima stišljivije. Takva su anizotropna tela, npr. većina kristala, valjan lim, žica itd.

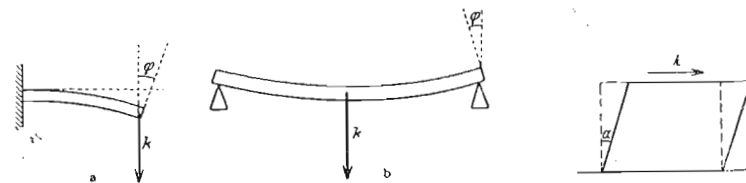
Modul elastičnosti jedne supstance nije strogo određena veličina. Kod mnogih tela pri istezanju javlja se tzv. očvršćavanje, tj. njihov modul elastičnosti raste pri istezanju.

Naročito interesantne pojave se zapažaju kod jednokristalnih žica. To su žice koje se sastoje iz jednog jedinog kristala, dok su metali u svome običnom stanju konglomerat od vrlo mnogo mikrokristala. Te jednokristalne žice su veoma istegljive tako da ih rukama možemo izvući da postanu dva i više puta duže. Pri tome izgleda njihova površina ljuskava. To potiče otuda što pri istezanju pojedini njegovi delovi klize jedan preko drugog duž jedne ravni kristalne rešetke.

§ 65. **Uzdužna dilatacija i poprečna kontrakcija.** Sa promenom dužine (uzdužnom dilatacijom) jednoga tela, usled istezanja, uvek je skopčana i promena njegovih poprečnih dimenzija; njegov presek pri izduženju postaje manji. Odnos ove poprečne kontrakcije (relativna promena poprečnih dimenzija) i uzdužne dilatacije (relativna promena dužine), može u krajnjem slučaju imati vrednost  $1/2$ . U ovome slučaju ostaje zapremina konstantna. Ali po pravilu je sa uzdužnom dilatacijom spojeno i povećanje zapremine. Odgovarajući tome imamo kod jednostranog pritiska povećanje poprečnog preseka.

Pričvrsti se jedan kraj gumenog creva sa debelim zidovima (crevo za vakuum) i preko njega se provuče jedan krug od kartona koji se na crevu drži usled trenja. Ako se drugi kraj creva povuče tako da se ono izduži, karton pada jer se presek creva smanjio.

§ 66. **Savijanje.** Druga jedna vrsta elastičnih deformacija jeste savijanje. Kad se jedna šipka učvrsti na jednom kraju, a na drugom dejstvuje sila, ona menja svoj oblik, pri čemu njeni krajevi koji su pre dejstva sile



Sl. 50. Savijanje.

Sl. 51. Smicanje.

bili paralelni sada grade međusobom ugao  $\varphi$  (sl. 50 a). To isto važi i za šipku čiji su krajevi poduprti, a na sredini njenoj dejstvuje sila (sl. 50 b).

Za šipku pravoulog preseka koja je utvrđena na jednom kraju važi odnos:

$$\operatorname{tg} \varphi = 6 \frac{l^2 p}{a^3 b E} \quad (2)$$

( $l$  dužina,  $a$  visina,  $b$  širina); za istu šipku ali poduprtu na oba kraja kad sila deluje u sredini

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{8} \frac{l^2 p}{a^3 b E} \quad (3)$$

Prema tome se modul elastičnosti može odrediti i putem savijanja. U tu svrhu se na oba kraja šipke nameste ogledala, odredi se ugao koji krajevi grade pod dejstvom jedne sile, iz skretanja svetlosnog zraka koji prelazi preko oba ogledala.

Jedno savijeno telo je podložno i uticaju pritiska i uticaju istezanja. Njegovi delovi koji se nalaze na strani koja je unutra savijena su stisnuti, a na spoljašnjoj savijenoj strani su rastegnuti. Između ovih slojeva nalazi se jedna površina čije se dimenzije pri savijanju ne menjaju, to je tzv. neutralni sloj.

§ 67. **Torzija.** Šipka ili žica utvrđena je na jednom kraju, a na drugom deluje oko njene uzdužne ose spreg koji teži da taj kraj uvrne. To se naziva torzija ili uvrtnje. Ugao za koji su krajevi jedan spram drugog uvrnuti, za male deformacije srazmeran je momentu sprega  $N$ . Ako je dužina cilindrične žice  $l$ , njen poluprečnik  $r$ , ugao uvrtnja dat je jedinačinom

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} N \quad (4)$$

$G$  je modul torzije tela.

Modul torzije jedne supstance određuje se kad se na žicu od te supstance obesi telo poznatog momenta inercije. Ako se telo izvede iz svoga ravnotežnog položaja ono izvodi torzione oscilacije iz čijih se trajanja ako su poznate dimenzije žice, može odrediti modul torzije.

Isto kao i kod dužinskih promena tako i kod torzije postoji za svako telo izvesna granica elastičnosti koja kad se pređe, gornji prosti odnosi više ne važe.

Vrsta torzije je i tzv. smicanje koje se javlja kad na telo npr. paralelopiped utvrđen u svojoj osnovi, deluje sila paralelno sa osnovom na slobodnom kraju tela (sl. 51). Kad je sila ravnomerno raspoređena na sve elemente gornje površine telo se deformiše i njegov presek postaje paralelogram. Prav ugao između prvobitnih strana se deformisao za ugao  $\alpha$ . Ako je  $k$  sila  $F$  onda je

$$\alpha = \frac{k}{Fg}$$

§ 68. **Spiralne opruge.** Spiralna opruga koja se dobija namotavanjem žice na cilindričnom telu, ponaša se prema istezanju ili pritisku kao cilin-

drično telo (obična žica) i u širokim granicama njena promena dužine sleduje Hook-ovom zakonu. Stvarna elastična promena same žice sastoji se međutim u torziji.

Sabijanje ili istezanje takve opruge može se iskoristiti i za merenje sila koje izazivaju te promene. Na tome principu su zasnovane vage sa oprugom kod kojih se izduženja čitaju na skali pored opruge.

Pljosnato namotane metalne pantljike, kao one koje se upotrebljavaju kao opruge kod časovnika ili za pokretanje drugih mehanizama, ponašaju se u celini kad su nategnute kao jedno uvrnuto telo, a stvarni proces pri natezanju sastoji se u savijanju metala.

§ 69. **Elastična energija.** Pri istezanju jednog elastičnog tela potrebno je izvršiti izvestan rad nasuprot sili koja se protivi toj promeni. Neka je  $\Delta l = x$  ta promena dužine, onda prema jed. (1). između  $x$  i sile koja je izazvala promenu postoji odnos

$$p = \frac{q\varepsilon}{l} x$$

Ako povećamo izduženje od  $x$  na  $x + dx$ , onda je potrebno na to utrošiti rad

$$dA = p dx = \frac{q\varepsilon}{l} x dx$$

(sila  $\times$  put). Pri tome smatramo izduženje  $x$  kao vrlo malo spram ukupne dužine šipke  $l$ . Ukupan rad potreban na izduženje dobija se integracijom izraza

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{q\varepsilon}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{q\varepsilon}{l} (\Delta l)^2$$

Ovaj rad se sad nalazi u obliku potencijalne energije u deformisanom telu, i po prestanku dejstva sile koja izaziva deformaciju on se može ponovo dobiti. Odgovarajuće važi i za sve druge oblike elastičnih deformacija. Usled ove činjenice navijene opruge imaju potrebnu energiju za pokretanje raznih mehanizama, u njima je nagomilana potencijalna energija.

Ako je jedno čvrsto telo, jednostavnosti radi jedan paralelopiped sa ivicama  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (a svako telo ma kakvog oblika bilo možemo zamisliti kao sastavljeno iz takvih malih paralelopipeda), podložno sa sviju strana pritisku  $p$  koji deluje upravno na njegovu površinu, onda deluju na njegove tri površine sile  $pab$ ,  $pac$ ,  $pcb$ . Neka su promene dužina njegovih ivica, koje se javljaju tom prilikom  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  i  $\Delta c$ . Izvršeni rad pri promeni oblika iznosi stoga

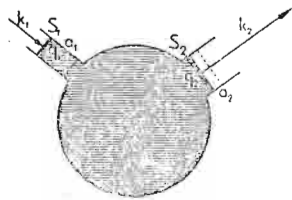
$$\Delta A = p (ab \Delta c + ac \Delta b + bc \Delta a) = p \Delta (abc) = p \Delta V$$

gde  $V$  označava zapreminu tela ( $V = abc$ ).



## Mehanika tečnosti u miru (hidrostatika)

§ 70. **Hidrostatički pritisak.** Neka tečnost, za koju ćemo privremeno pretpostaviti da je nestišljiva i da na nju ne deluje zemljina teža, nalazi se u sudu proizvoljnog oblika koji ima sa strane dva pokretna klip  $S_1$  i  $S_2$  sa presecima  $q_1$  i  $q_2$  (slika 52). Na klip  $S_1$  deluje sila  $k_1$  koja u tečnosti izaziva pritisak  $p = k_1/q_1$ . Po zakonu akcije i reakcije isti toliki pritisak vrši i tečnost na klip. Neka sila  $k_1$  pomeri klip za dužinu  $a_1$ . Pri tome je izvršen rad  $k_1 a_1 = p q_1 a_1 = \rho \Delta V$ , ako  $k_1 a_1 = \Delta V$  predstavlja zapreminu pomerene tečnosti. Kad se klip  $S_1$  pomera u tečnost, mora se i klip  $S_2$  pomeriti van nje i to pod dejstvom sile  $k_2$  kojom tečnost deluje na presek  $q_2$ . Klip  $S_2$  se pomera za dužinu  $a_2$ . Rad klipa  $S_2$   $k_2 a_2$  mora biti jednak radu na klipu  $S_1$   $k_1 a_1$  s pretpostavkom da nema trenja. Neka je  $p'$  pritisak tečnosti na  $S_2$ , dakle  $k_2 = p' q_2$ . Tada je  $p' a_2 q_2 = p a_1 q_1$ , a pošto je zapremina tečnosti koja se pomerila ista, tj.  $a_2 q_2 = a_1 q_1 = \Delta V$  to izlazi da je  $p' = p$ . Pritisak koji



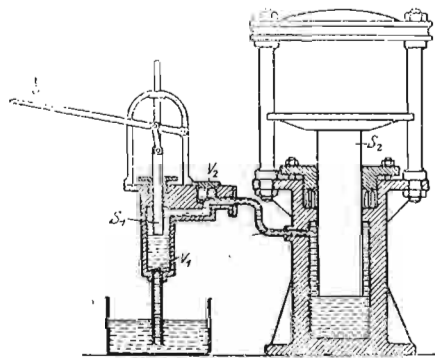
Sl. 52. Pritisak u tečnosti.

vrši tečnost na  $S_2$  isti je koliko i pritisak koji ona vrši na  $S_1$ . Ovo što važi za pokretne zidove suda, važi i za sve delove suda uopšte. Prema tome tečnost na koju ne bi delovala teža vrši isti pritisak na sve delove suda u kome se nalazi.

Ali možemo u samoj tečnosti zamisliti proizvoljan broj tela, čije se površine takođe graniče sa tečnošću. I te površine bi trpele isti pritisak kao i zidovi suda. U tome smislu se govori o pritiscima u tečnosti. U samoj tečnosti i na graničnim površinama tečnosti u miru, na koju ne deluje teža, vlada svuda isti pritisak. Taj pritisak se zove hidrostatički pritisak. Iz gornjih izvođenja sleduje

$$p = k_1/q_1 = k_2/q_2$$

$$\text{ili } k_1 : k_2 = q_1 : q_2 \quad (1)$$

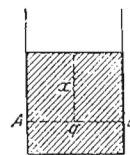
Sl. 53. Hidraulična presa:  $v_1$  i  $v_2$  su ventili.

§ 71. **Hidraulična presa.** Primenu gornjeg stava nalazimo kod hidraulične prese, koja služi za pretvaranje manjih sila u veće.

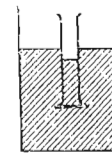
Ako se odnos  $q_2 : q_1$  jed. (1) izabere dovoljno veliki, u stanju smo pomoću male sile  $k_1$  da proizvedemo vrlo veliku silu  $k_2$ . Pri tome su po-

meranja klipa  $S_2$  vrlo mala spram pomeranja klipa  $S_1$ . Kod praktičnog modela (sl. 53)  $S_1$  je klip vođenog šmrka koji vodu spolja pritiskuje u sud, tako da se ovaj proces može ponoviti proizvoljan broj puta.

§ 72. **Dejstvo teže.** Kad je tečnost izložena dejstvu zemljine teže, u njenoj unutrašnjosti ne vlada samo pritisak koji se vrši na njenu površinu, npr. vazdušni pritisak, već i pritisak koji na jednu tačku u unutrašnjosti tečnosti vrše, usled svoje sopstvene težine, tečni slojevi koji se nalaze iznad nje.



Sl. 54. Povećanje pritiska sa dubinom.



Sl. 55. Dokaz povećanja pritiska sa dubinom.

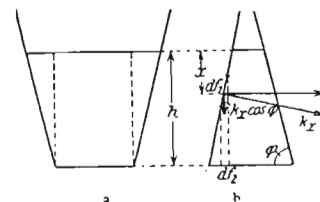
Neka je  $AB$  (sl. 54) horizontalan presek površine  $q$  tečnosti na dubini  $x$ , ispod površine. Ako je specifična težina tečnosti  $\sigma$ , odnosno njena gustina  $\rho$ , onda je težina tečnosti koja pritiskuje na tu površinu  $P = \sigma q x$  g ili  $\rho g q x$  din-a. Pošto se ta

težina ravnomerno rasprostire na celu površinu  $q$ , to je pritisak tj. sila na jedinicu površine

$$p = P/q = \sigma x \text{ [g/cm}^2\text{]} \text{ ili } \rho g x \text{ [din/cm}^2\text{]} \quad (2)$$

Ako na površinu tečnosti spolja deluje još pritisak  $p_0$ , onda je  $p = p_0 + \sigma x$ . Hidrostatički pritisak u unutrašnjosti tečnosti na koju deluje teža, raste proporcionalno sa dubinom. Pri tome se pretpostavlja da se  $\sigma$  ne menja znatno sa dubinom, tj. da tečnost nije stišljiva. Za male dubine taj je uslov sasvim približno ispunjen.

Za pokazivanje promene pritiska sa dubinom može poslužiti sledeći ogleđ (sl. 55). Na donjem kraju staklenog cilindra koji je delimično potopljen u tečnost, nalazi se pokretno dno (izglačana ploča) koje ga dobro zatvara i ne propušta vodu sa strane. Ako je cilindar prazan, pritisak tečnosti drži dno čvrsto pritisnuto uz cilindar. Cilindar se može napuniti tečnošću skoro do nivoa u sudu, a da dno ne padne. Ono se odvaja tek onda, kada težina

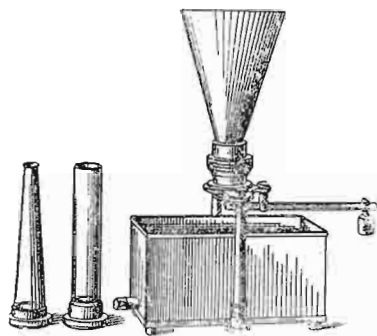


Sl. 56 a i b. Uz pritisak na dno suda - hidrostatički paradoks.

tečnosti u cilindru sa težinom samoga dna postane ravna pritisku tečnosti na onome mestu na kome se nalazi samo dno.

§ 73. **Pritisak na dno.** Zakon izražen jednačinom (2) nezavisan je od oblika suda. Zbog toga je i pritisak na dno jednog suda, napunjenog do visine  $h$  tečnošću, nezavisan od njegovog oblika i uvek ravan  $\sigma h$ . Kod suda predstavljenog na sl. 56a to se objašnjava time da pritisak tečnosti koja se nalazi sa strane obeju tačkasto izvučenih linija nose bočni zidovi suda. Kod suda oblika kao na slici 56b to se objašnjava na sledeći način. Neka je  $df_1$  prstenast element površine zida suda koji se nalazi na dubini  $x$  ispod

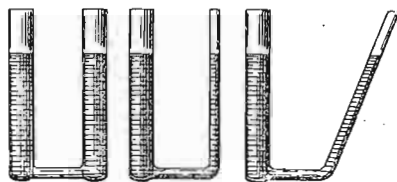
površine,  $df_2$  neka je njegova projekcija na dno suda (zbog preglednosti  $df_1$  je naznačeno samo na levoj strani). U dubini  $x$  vlada pritisak  $p_x$ , znači da na  $df_1$  dejstvuje sila  $f = p_x df_1$ . Ali pošto postoji ravnoteža to i element  $df_1$  dejstvuje istom tolikom silom na tečnost. Ovu ćemo silu razložiti



Sl. 57. Aparat za hidrostatički paradoks.

na dve komponente: horizontalnu i vertikalnu. Horizontalne komponente svih pojedinačnih sila koje dejstvuju na prstenast element površine  $df_1$ , poništavaju se zbog simetrije. Ostaje samo naniže upravljena komponenta čija je veličina  $df_1 p_x \cos \varphi$ , ako je  $\varphi$  ugao koji gradi bočni zid sa dnom suda. Ova se sila prenosi kroz tečnost na odgovarajući element površine  $df_2$  na dnu, i ovdje vrši pritisak  $p' = p_x \cos \varphi df_1/df_2$ , ili, pošto je  $df_1/df_2 = 1/\cos \varphi$ , to je  $p' = p_x$ . Uz ovaj pritisak valja dodati još i pritisak tečnosti koja se nalazi iznad  $df_2$ ,  $p'' = (h-x)\sigma$ , tako da je ukupan pritisak  $p = p_x + \sigma(h-x)$ . Ali pritisak mora biti jednak u svima tačkama na dnu, jer bi inače postojalo horizontalno strujanje tečnosti.  $p$  dakle mora biti nezavisno od  $x$ , a to je moguće samo onda kad je  $p_x = \sigma x$ , dakle  $p = \sigma h$ . Znači pritisak na dubini  $x$  odnosno  $h$  zavisi samo od visine tečnosti, a ne i od oblika suda (ugla  $\varphi$ ). Za pokazivanje ovooga zakona služimo se aparatom kod koga sudovi različitih oblika imaju isto dno, na koje možemo delovati izvesnom silom (sl. 57). Pokazuje se da kad na polugu dejstvuje izvesna sila svi se sudovi moraju napuniti do iste visine tečnošću pa da dno padne, nezavisno od oblika suda (hidrostatički paradoks, Pascal 1660).

§ 74. **Spojeni sudovi.** Ako su dva suda napunjena istom tečnošću i spojena tako da tečnost može da struji iz jednog u drugi, onda pri ravnoteži, s pretpostavkom da sudovi nisu suviše uski, u njima stoji tečnost na istoj visini, a pritisak na istim dubinama je jednak u oba suda. Oblik sudova ne igra pri tome nikakvu ulogu (sl. 58), što izlazi iz gornjeg stava o pritisku na dno. Pritisci u spojenim sudovima moraju biti jednaki u



Sl. 58. Spojeni sudovi.

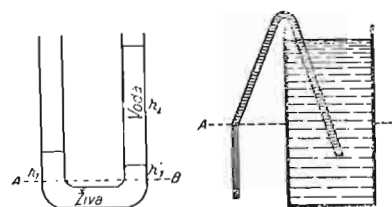
svima horizontalnim ravnima, jer bi se u protivnom javilo strujanje na spojnom mestu, koje bi najzad uspostavilo jednakost pritiska. Da bi pritisci u horizontalnim ravnima bili jednaki, mora i visina tečnosti iznad njih biti svuda ista, tj. površine tečnosti u spojenim sudovima nalaze se na istoj

visini. Ako se u kracima spojenog suda (sl. 59) nalaze dve tečnosti različite gustine koje se ne mešaju, npr. živa i voda, površine tih tečnosti neće se nalaziti na istoj visini. U unutrašnjosti teže tečnosti pritisak u jednoj horizontalnoj ravni  $AB$  će biti isti u oba kraka. Ako je  $\sigma_1$  specifična težina teže, a  $\sigma_2$  sp. težina lakše tečnosti, onda je u nivou  $AB$  levo  $p = \sigma_1 h_1$ , a desno  $p = \sigma_1 h'_1 + \sigma_2 h_2$  g/cm<sup>2</sup>, tako da je

$$\sigma_1(h_1 - h'_1) = \sigma_2 h_2$$

Ako je poznato npr.  $\sigma_2$  može se izračunati  $\sigma_1$  mereći visine  $h_1 - h'_1$  i  $h_2$ .

Kad u jednom spojenom sudu ne postoji isti pritisak u jednom nivou, onda se javlja strujanje tečnosti koje teži da vaspostavi jednak pritisak.



Sl. 59. Spojeni sudovi sa dve različite tečnosti.

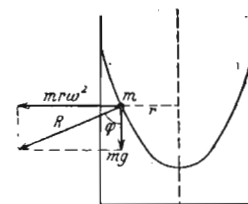
Sl. 60. Kriva natega.

Primer za to imamo kod krive natege (sl. 60). Savijena cev ispunjena tečnošću, potopljena je u sud u kome se takođe nalazi tečnost i to tako, da otvor cevi van suda leži ispod nivoa tečnosti u sudu. Pritisak vazduha dejstvuje i na otvor cevi i na površinu tečnosti u sudu, tako da u ravni  $AB$  vladaju različiti pritisci, i to je pritisak u sudu veći od pritiska u cevi, jer

u sudu dejstvuje još i hidrostatički pritisak. Usled toga iz cevi ističe tečnost sve dotle, dok nivo tečnosti u sudu ne dođe približno na istu visinu sa donjim otvorom cevi. Za pretakanje u nategu se prvo usisa tečnost iz suda.

Spojeni sudovi imaju veliku primenu u vodovodu, dalje važnu ulogu igraju u prirodi kod terenskih voda (izvori).

§ 75. **Slobodna površina tečnosti.** Posmatrajmo jedan delić tečnosti na njenoj slobodnoj površini, tj. na mestu gde se ona ne dodiruje sa zidovima suda. Pošto su pojedini delići tečnosti vrlo lako pokretni, i sleduju proizvoljno malim silama koje na njih dejstvuju, to se sve te sile moraju poništavati kad se delić nalazi u ravnotežnom položaju. Na delić tečnosti koji se nalazi na njenoj površini dejstvuje prvo zemljina teža, drugo odozdo



Sl. 61. Površina tečnosti u rotaciji.

na više upravno na površinu, pritisak tečnosti koji proizvodi sam delić vertikalnom komponentom svoje sopstvene težine (reakcija). Pošto se obe ove sile drže u ravnoteži, one moraju biti po veličini jednake, a po smislu suprotne. Zbog toga mora slobodan delić površine tečnosti, ako je izložen jedino dejstvu teže (naročito kad se zanemare kapilarna dejstva), stajati uvek upravno na pravac dejstva teže, drugim rečima, on mora uvek ležati horizontalno. U drugom slučaju bi teža imala jednu komponentu paralelnu sa površinom tečnosti koja bi delić pokretala u stranu.

Ovo isto važi i za graničnu površinu dveju tečnosti različitih specifičnih težina koje se ne mešaju, kao što su voda i živa ili voda i ulje.

Ako sem teže na tečnost deluje još neka sila, onda slobodna površina njena mora stajati uvek upravno na rezultantu svih sila.

Naročito je interesantan slučaj tečnosti koja se nalazi u cilindričnom sudu koji se obrće. Mi ćemo se staviti u položaj posmatrača koji se obrće zajedno sa tečnošću. Na svaki delić površine tečnosti deluje prvo vertikalno sila teže  $mg$  ( $m$  masa delića), drugo, horizontalno deluje centrifugalna sila  $mr\omega^2$  ( $r$  rastojanje delića od osovine obrtanja,  $\omega$  ugaona brzina). Rezultanta ovih dveju sila mora biti upravna na površinu tečnosti. Iz sl. 61 izlazi da u slučaju ravnoteže mora biti zadovoljena jednačina  $tg\varphi = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}$  ( $\varphi$  je nagibni ugao površine tečnosti). Može se izračunati da je vertikalni presek kroz površinu tečnosti u tom slučaju parabola.

§ 76. **Potisak. Arhimedov zakon.** Ako se telo sa izvesnom zapreminom nalazi potopljeno u tečnosti na koju deluje zemljina teža, pritisak na pojedine deliće tela zavisi od dubine do koje je ono potopljeno. U tečnost specifične težine  $s$  potopimo telo  $K$ , dužine  $l$  i preseka  $q$  (sl. 62). Gornji deo tela neka se nalazi na dubini  $x$  ispod površine tečnosti, njegov donji deo nalazi se dakle na dubini  $l+x$ . Horizontalni pritisci koji deluju na bočnu površinu tela uzajamno se poništavaju, dok su pritisci koji deluju na gornju i na donju površinu različiti. Na gornju površinu deluje prema jed. (2) sila  $k_1 = sqxg$  nadole, a na donju sila  $k_2 = s(l+x)qg$  na gore. Rezultanta ovih dveju paralelnih ali po smislu suprotnih sila je

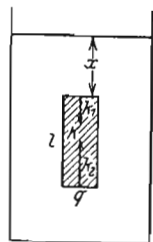
$$k = k_2 - k_1 = sql = sV \text{ grama odnosno } Vdg \text{ din-a} \quad (3)$$

( $V$  zapremina tela). Ova sila je upravljena naviše i zove se potisak. Stav izražen jed. (3) prema svome pronalazaču Arhimedu zove se **Arhimedov zakon**.

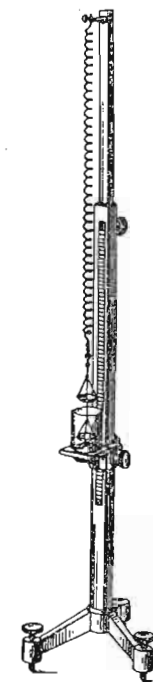
Potisak deluje dakle nasuprot težini potopljenog tela, i ono u tečnosti prividno gubi od svoje težine. Taj gubitak je prema jed. (3) jednak u gramovima težini  $sV$  tečnosti, dakle težini one zapremine koju telo istisne. Zbog toga se Arhimedov zakon može iskazati rečima: Telo potopljeno u tečnost izgubi onoliko od svoje težine, koliko je teška njime istisnuta tečnost. Ovaj zakon ne zavisi od oblika potopljenog tela.

Treba zapaziti da je potisak dejstvo teže, i da ga ne bi bilo u prostoru u kome se ne bi osećala teža.

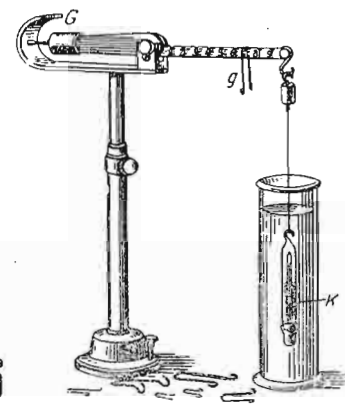
§ 77. **Određivanje specifičnih težina čvrstih tela na osnovu Arhimedovog zakona.** Ako telo potopimo u vodu (tačno u vodu na  $4^0$  C), čija je specifična težina 1, onda je brojno težina istisnute tečnosti izražena u gra-



Sl. 62. Potisak.



Sl. 63. Jolly-eva vaga za određivanje spec. težine.



Sl. 64. Mohr-ova vaga.

movima jednaka njenoj zapremini izraženoj u kubnim santimetrima, dakle istovremeno jednaka zapremini potopljenog tela. Zbog toga određivanje gubitka težine jednog tela potopljenog u vodu, može neposredno da posluži za određivanje njegove zapremine.

Na osnovu ovoga je zasnovana jedna vrlo pogodna i često upotrebljavana metoda koja se pripisuje još Arhimedu, a koja služi za određivanje specifičnih težina. Ona je važna za određivanje sp. težina onih tela čija se zapremina zbog njihovog nepravilnog oblika teško može da odredi na drugi način. Ako je  $p$  prava težina tela,  $p'$  njegova prividna težina kad je ono potopljeno u vodu, onda je njegov potisak jednak  $p - p'$ . Ali je brojna vrednost potiska jednaka brojnoj vrednosti zapremine potopljenog tela, odnosno jednaka težini iste zapremine vode. Odnos  $p/(p-p')$  ozna-

čuje nam koliko je puta teže telo od iste zapremine vode, odnosno, on nam neposredno daje brojnu vrednost specifične težine. Naročito je pogodno kod ove metode što nije potrebno poznavanje apsolutnih vrednosti od  $p$  i  $p'$ , već samo odnos njihovih mernih brojeva. Dovoljno je merenje makoje veličine srazmerne sa  $p$  i  $p'$ , npr. izduženje spirale pod dejstvom  $p$  i  $p'$ . Možemo se dakle za određivanje sp. težina poslužiti spiralnom vagom sa proizvoljnom skalom. Za to se upotrebljava duža spiralna opruga na koju se obesi telo, pa odredimo iste-

zanje opruge kad je telo obešeno u vazduhu i kad je potopljeno u vodi. U prvom slučaju je izduženje srazmerno sa  $p$ , a u drugom sa  $p'$ . Zbog toga je brojna vrednost specifične težine

$$|s| = \frac{k}{k-k_1} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'} \quad (4)$$

ako  $\Delta l$  i  $\Delta l'$  označavaju odgovarajuća izduženja opruge. Za to podešenu vagu sa spiralnom oprugom predstavlja nam sl. 63. Pri merenju treba paziti na to, da na telu nema prionulih mehurava vazduha. Ova metoda se

može upotrebiti za određivanje sp. težina samo onih tela koja su teža od vode.

§ 78. **Određivanje specifičnih težina tečnosti iz potiska.** Pošto potisak koji trpi jedno telo u tečnosti zavisi od njene specifične težine, to pomoću potiska možemo odrediti sp. težinu te tečnosti. Za to služi pored drugih sred-

stava i tzv. Mohr-ova vaga (sl. 64). Ona se sastoji od jedne na sečici pokretne poluge na čijem jednom kraju visi stakleni cilindar  $K$ , koji je najčešće udešen tako da služi i kao termometar (termometarsko telo). Na drugom kraju poluga ima teg  $G$  sa šiljkom koji stoji tačno naspram drugog šiljka, učvršćenog na nosaču poluge kada je telo  $K$  obešeno u vazduhu. Kad se telo  $K$  potopi u tečnost, ono trpi potisak koji se može kompenzovati dodavanjem pretega od žice na polugu koja je podeljena na 10 jednakih delova. Ovi su pretezi (jahači) tako određeni, da najveći od njih kad se obesi na podelak 10, na kraju poluge, tačno kompenzuje potisak termometarskog tela u vodi na  $4^{\circ}\text{C}$ . Ostali pretezi su decimalni razlomci te jedinice.



Sl. 65.  
Areometar.

Za brzo određivanje specifičnih težina tečnosti služi dalje areometar (sl. 65). To je stakleno telo, na donjem kraju otežano (b), a čiji gornji kraj (a) nosi skalu i utoliko više stoji iznad površine tečnosti, ukoliko je ova teža. Na skali se čita neposredno specifična težina. Takvi areometri često se upotrebljavaju u svakodnevnom životu (proba mleka, akumulatorske kiseline itd.).

§ 79. **Plivanje.** Ako je jedno telo specifički lakše od tečnosti, onda, ako ga potpuno potopimo u tečnost, njegov potisak je veći od same njegove težine. Zato na njega deluje sila odozdo naviše koja ga tera iz tečnosti, i to sve dotle, dok potisak onog dela tela koji se nalazi još potopljen, ne postane ravan težini tela. Kaže se da telo pliva. Tada je težina istisnute tečnosti jednaka ukupnoj težini tela koje pliva. Kod tela specifične težine  $s_2$ , ako  $s_1 > s_2$  označava specifičnu težinu tečnosti, izlazi da je deo zapremine  $V$  koji je potopljen

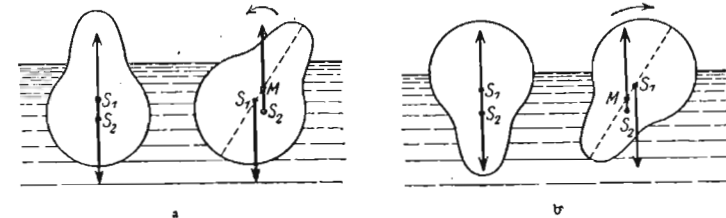
$$s_2 V = s_1 V' \quad (5)$$

gde je  $V$  ukupna zapremina tela. Telo dakle tone u tečnost utoliko dublje, ukoliko je njena specifična težina manja. Time se objašnjava da jedna lađa dublje gazi u slatkoj nego u morskoj vodi, koja je specifički teža, i da ljudi lakše plivaju u morskoj nego u slatkoj vodi.

Čoveče telo ima nešto veću specifičnu težinu od vode, i zbog toga tone u vodu. Plivanje se sastoji u tome da plivač kosim udarcima noću nadole daje sebi ubrzanje naviše, pri čemu on takoreći odbija vodu. Na taj način sprečava da ne potone. Istovremeno horizontalna komponenta tih udara izaziva kretanje unapred.

Kao specifična težina jednog komplikovano sastavljenog tela, u jednačinu (5) ulazi njegova srednja ili prividna specifična težina, tj. njegova ukupna težina podeljena sa njegovom zapreminom. Tako se kod brodova izračunava dubina gaženja iz uslova da njihova težina  $P$  mora biti jednaka potisku  $V's$ , gde je  $V'$  deo zapremine koja se nalazi u vodi a  $s$  sp. težina vode.

Od mnogih različitih položaja u kojima telo može da pliva, ima svega nekoliko, a često samo jedan jedini, kad je ono u stabilnom položaju. Napadna tačka teže je težištu  $S_1$  celog tela (sl. 66). Analogno sa onim što je izloženo o težištu, može se uzeti da potisak dejstvuje u onoj tački tela, u kojoj bi se nalazilo težište istisnute tečnosti  $S_2$ . Obe ove sile stvaraju



Sl. 66. Uz teoriju plivanja.

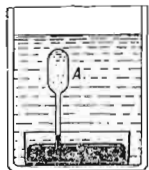
u opštem slučaju jedan spreg, koji teži da telo obrne u drugi položaj. Ravnoteža je onda uspostavljena, kada je prava koja spaja  $S_1$  i  $S_2$  vertikalno upravljena. Ali ona može biti ili stabilna ili labilna. Pri naginjanju tela, u kojoj bi se nalazilo težište istisnute tečnosti  $S_2$ . Obe ove sile stvaraju zapremina ostaje nepromenjena. Zbog toga pri takvom kretanju se obično pomera i njeno težište  $S_2$ . Tačna teorija nam daje sledeći rezultat: Kroz telo se povuče jedna prava koja u ravnotežnom položaju prolazi kroz oba težišta  $S_1$  i  $S_2$ . Tačka  $M$  u kojoj rezultanta potiska seče tu pravu, zove se metacentar. Telo je pri plivanju u stabilnoj ravnoteži kada se metacentar nalazi iznad težišta tela  $S_1$  (sl. 66a), u labilnoj kada leži ispod ovoaga (sl. 66b). U prvom slučaju ako se telo izvede iz svoega ravnotežnog položaja ono se samo vraća u isti. U poslednjem slučaju, malo pomeranje iz ravnotežnog položaja izaziva obrtanje tela oko stabilnog položaja. Ovo se može uostalom i neposredno videti i iz slike 66.

Stabilni položaji plivanja između svih ostalih mogućih položaja jesu oni, koji ispunjavaju uslove stabilne ravnoteže, dakle to su položaji najmanje potencijalne energije. Pri tome se dabome mora voditi računa i o tečnosti. Stabilan je dakle onaj položaj plivanja pri kome je potencijalna energija sistema tečnost — telo koje pliva minimum.

§ 80. **Elastičnost tečnosti.** Neka tečnost se nalazi u cilindričnom sudu visine  $l$  a preseka  $q$ , dakle zapremine  $V = ql$ . Sud je zatvoren pokretnim klipom. Klip se pod dejstvom sile  $k$  pomeri za dužinu  $\Delta l$  tako da smanji zapreminu tečnosti za iznos  $\Delta V = -q \Delta l$ . Sila  $k$  proizvodi u tečnosti pritisak  $p = k/q$ . Relativna promena zapremine  $\Delta V/V$  srazmerna je pritisku. Dakle

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{\chi} = \frac{k}{q\chi} \quad (6)$$

Ova jednačina je u osnovi identična sa Hook-ovim zakonom za čvrsta tela. Konstanta  $\gamma$ , modul kompresije ili stišljivosti ima kod tečnosti isto značenje, kao modul elastičnosti  $E$  kod čvrstih tela. Negativan znak u jednačini (6) dolazi otuda što  $\chi$  ovde određujemo iz kompresije, dok je  $E$  bilo definisano iz istezanja.

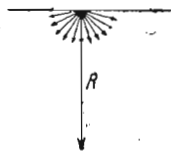


Sl. 67. Oersted-ov piezometar za merenje modula stišljivosti tečnosti.

Pri merenju modula stišljivosti mora se voditi računa o tome, da pritisak koji deluje na tečnost ne poveća i zapreminu suda. Kod Oersted-ovog piezometra (sl. 67) na sud  $A$  u kome se nalazi tečnost, deluje i spolja i iznutra isti pritisak. Sud  $A$  se nalazi u vodi, a otvor mu je potopljen u živu. Pritisak koji se vrši na vodu prenosi se na živu pa i na tečnost u  $A$ . Smanjenje zapremine tečnosti se određuje iz visine živinog stuba koji se penje u usku cev suda  $A$ .

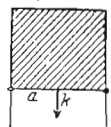
Tečnosti su po redu veličine oko deset puta stišljivije od čvrstih tela.

§ 81. Površinski napon. Slobodna površina tečnosti čini utisak kao da je pokrivena nekom tankom opnom. Tzv. površinski napon postaje usled privlačnih sila između molekula tečnosti. Oko molekula koji su sa svih strana okruženi drugim molekulima ove sile se potiru, jer simetrično deluju. Ali to nije slučaj za molekul koji se nalazi na površini tečnosti. Na njega deluju molekularne sile čija je rezultanta  $R$  upravljena od površine normalno u tečnost (sl. 68). Taj molekul u odnosu na unutrašnjost tečnosti ima izvesnu potencijalnu energiju, veću od molekula koji se nalaze u unutrašnjosti tečnosti.



Sl. 68. Za objašnjenje površinskog napona.

Kad je cela tečnost u stabilnoj ravnoteži, njena potencijalna energija, računajući tu i površinsku energiju, ima minimalnu vrednost. Ako posmatramo samo površinsku energiju, onda će taj slučaj nastupiti onda, kad na površini ima što manje molekula, kad dakle površina bude imala najmanju moguću vrednost. Zbog toga kapi koje slobodno lebde imaju oblik lopti, jer tada za datu zapreminu imaju najmanju površinu. Kad ovaj uslov nije ispunjen, onda se molekuli sa površine kreću u unutrašnjost tečnosti dok se ne postigne najmanja površina.



Sl. 69. Uz teoriju površinskog napona.

Na pravouglom ramu od žice čija je jedna strana pokretna, razapeta je tečna lamela (sl. 69). Ona teži da se smanji i da sa sobom povuče stranu  $a$  ako se to ne spreči izvesnim malim tegom (sila  $k$ ). Uzmimo da se strana  $a$  pod dejstvom te sile pomerila za dužinu  $dx$ . Pošto pri tome obe površine lamele rastu, to njihovo povećanje iznosi  $\Delta F = 2adx$ . Označimo potencijalnu energiju jednog površinskog molekula sa  $\epsilon$ . Ako se na svakom  $cm^2$  površine nalazi  $n$  molekula, onda na  $1 cm^2$  dolazi količina energije  $n\epsilon = \vartheta$ . Sa povećanjem površine je

skopčano i povećanje njene potencijalne energije za iznos

$$dA = \vartheta dF = \vartheta 2adx \text{ erga.}$$

Rad za iznošenje molekula iz unutrašnjosti tečnosti na njenu površinu vrši sila  $k$  na putu  $dx$ . Zato je  $dA = kdx$

$$k = 2a\vartheta \text{ dina.} \quad (7)$$

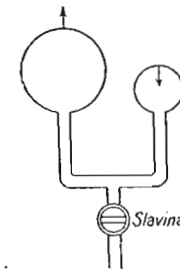
Od ove sile na svaki santimetar dužine tečnosti uz stranu  $a$  (ponovo obe strane lamele) dolazi  $k/2a = \vartheta$ . Jednačina (7) daje silu koja drži lamelu u ravnoteži nasuprot površinskom naponu, prema tome takođe silu kojom teži lamela da se smanji. Lamela dakle napada sa šilom  $k = 2a\vartheta$  dina na stranu  $a$ , ili na svaki  $cm$  svoje ivice silom  $\vartheta$ . Prema jednačini (7) uobičajeno je da se konstanta površinskog napona  $\vartheta = n\epsilon$  daje u jedinicama  $dyn \cdot cm^{-1}$ . Prema svome stvarnom značenju kao energija na jedinicu površine, trebalo bi da se izražava u jedinicama  $erg/cm^2$ . U pogledu dimenzija to je međutim isto, pošto je  $1 \text{ erg} = 1 \text{ din} \cdot 1 \text{ cm}$ .  $\vartheta$  iznosi za vodu 72,8, za etil-etar 17,0, za živu 500  $dyn \cdot cm^{-1}$ .

Na veoma krivim površinama je površinski napon manji nego na ravnim, jer je broj molekula koji jedan površinski molekul vuku u unutrašnjost tečnosti manji, pa je stoga potreban manji rad da se na površinu izvedu novi molekuli. To važi naročito za vrlo sitne kapi.

Mehur od sapunice je u ravnoteži kada višak unutarnjeg pritiska  $\Delta p$  (razlika između spoljašnjeg i unutrašnjeg pritiska) drži ravnotežu sili površinskog napona koja teži da smanji mehur. Ukupna unutrašnja i spoljašnja površina mehura (zanemarujući njegovu debljinu koja je vrlo mala spram poluprečnika  $r$ ) iznosi  $8\pi r^2$ . Sila pritiska na unutrašnjoj površini koja potiče od razlike pritiska  $\Delta p$  iznosi  $4\pi r^2 \Delta p$ . Kad ova sila pritiska poveća poluprečnik mehura za  $dr$ , ona izvrši rad  $4\pi r^2 \Delta p dr$ , koji se utroši na dovođenje novih molekula na površinu. Povećanje površine iznosi  $dF = d(8\pi r^2) = 16\pi r dr$ , a zato potrebna energija  $16\pi r dr \vartheta$ . Stoga je  $16\pi r dr \vartheta = 4\pi r^2 \Delta p dr$  ili

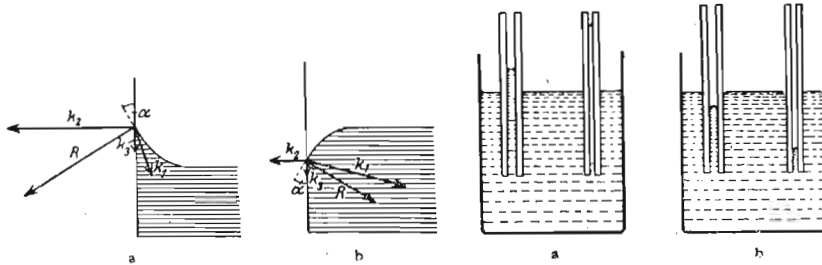
$$r \Delta p = 4\vartheta.$$

Izlazi na prvi pogled iznenađujući rezultat da je višak pritiska  $\Delta p$  u mehuru od sapunice utoliko manji, ukoliko je poluprečnik mehura veći. Kad se duva mehur od sapunice, onda se njegov unutarnji pritisak ne povećava, već smanjuje. Dovodi se samo nova količina vazduha, a unutarnji pritisak opada. Ako su dva po veličini različita mehura spojena jednom cevi (sl. 70), ne može postojati ravnoteža, jer usled različitih poluprečnika su različiti i unutarnji pritisci. Veći mehur raste na račun manjeg.



Sl. 70. Veći mehur raste na račun manjeg.

§ 82. **Kapilarnost.** Ako se tečnost dodiruje sa ma kojim drugim telom, onda između molekula tela i tečnosti takođe postoje privlačne sile, čija veličina zavisi od vrste obe supstance. Na ovome su zasnovane kapilarne pojave, na granici čvrstih i tečnih ili dvaju tečnih tela. Na molekule tečnosti koji se nalaze na graničnoj površini, dejstvuje prvo privlačna sila  $k_1$  molekula iz unutrašnjosti tečnosti, drugo, privlačna sila molekula čvrstog zida  $k_2$  (sl. 71). Zemljinu težu u ovom slučaju možemo da zanemarimo, jer je mala spram ovih sila. Naročito ćemo posmatrati ono mesto, gde slobodna površina tečnosti prelazi u graničnu površinu. Prema odnosu gornjih sila, njihova rezultanta  $k$  je upravljena u pravcu zida ili u tečnost (sl. 71 a i b). Ona mora da stoji upravno na površinu slobodne



Sl. 71. Uz teoriju kapilarnih pojava  $k_2$  označava silu teže.

Sl. 72. Kapilarne pojave.

tečnosti kad je uspostavljena ravnoteža. Tečnost sa zidom suda gradi ivični ugao ili ugao kvašenja  $\alpha$ . Ovaj je jednak  $0^\circ$  u slučaju kad tečnost potpuno kvasi zid (npr. voda čisto staklo), a iznosi  $180^\circ$  kad ga ne kvasi (živa staklo). Kod potpunog kvašenja tečnost teži da ima što veću dodirnu površinu sa čvrstim zidom, a kod potpunog nekvašenja obrnuto. Iz tog razloga se voda penje u zamočene uske kapilarne cevi koje su prethodno iznutra nakvašene. Živa se u takvim cevima spušta ispod nivoa u širem sudu (sl. 72 a i b). Površina tečnosti na kraju tečnog stuba nije ravna, već izdubljena ili ispupčena, prema tome da li tečnost kvasi zid ili ga ne kvasi (menisk).

Kad se kapilarna cev unutrašnjeg poluprečnika  $r$  potopi u neku tečnost kojom je iznutra već nakvašena, tečnost će se u njoj popeti za neku visinu  $h$  iznad nivoa u sudu. Neka je gustina tečnosti  $\rho$ . Da bi se tečnost popela za dalju visinu  $dh$  treba izvršiti rad za izdizanje zapremine tečnosti  $\pi r^2 dh$  čija je masa  $dm = \rho \pi r^2 dh$ , na visinu  $h$ . Taj rad iznosi  $dmgh = \rho \pi r^2 dhgh$ . S druge strane u cevi iščezne jedan deo tečne prevlake na zidovima sa slobodnom površinom  $2\pi r dh$  i pri tome se oslobodi površinska energija  $\oint 2\pi r dh$ . U početku penjanja tečnosti u kapilaru, ta oslobođena energija je mnogo veća od rada potrebnog za podizanje tečnosti. Taj višak se troši na savladavanje unutarnjeg trenja u tečnosti pri njenom penjanju. Kad se

povećava visina stuba  $h$ , rad za njegovo dizanje postaje sve veći. Za izvesnu visinu penjanja, oslobođena površinska energija je taman dovoljna za vršenje ovoga rada. Na veću visinu tečnost ne može da se popne. Maksimalna visina tečnog stuba u kapilari uslovljena je odnosom

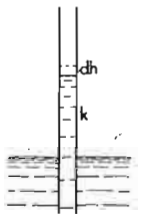
$$\rho \pi r^2 gh dh = 2 \pi r \oint dh \text{ i iznosi} \\ h = \frac{2 \oint}{\rho r g} \quad (8)$$

ili kod nepotpunog kvašenja

$$h = \frac{2 \oint}{\rho r g} \cos \alpha. \quad (9)$$

ako je  $\alpha$  ugao kvašenja. Kod potpunog nekvašenja ( $\cos \alpha = -1$ ) je  $h = 2 \oint / \rho r g$ .

Ulje se širi na vodi usled molekularnih sila koje dejstvuju između molekula vode i ulja, i gradi pri tome jedan vrlo tanak sloj. Data količina ulja ne može pokriti proizvoljnu veličinu vodene površine. Za širenje ulja postoji dakle izvesna granica. Moglo se pretpostaviti da se u tom slučaju površina ulja sastoji samo iz jednog sloja molekula i da debljina te površine ima red veličine prečnika molekula. Debljina se može izmeriti iz veličine površine i količine ulja. Na taj način su Rayleigh, Perrin i dr. našli da je red veličine prečnika molekula u svakom slučaju manji od  $10^{-6}$  cm. Slični zaključci mogu se izvesti iz debljine crnih mrlja na mehurima od sapunice (interferencija svetlosti).



Sl. 73. Uz objašnjenje penjanja tečnosti u kapilari.

Kapilarne sile dejstvuju pored osmotičnih sila pri penjanju biljnih sokova. Usled njih porozna i sunderasta tela upijaju tečnosti.

### Statika gasova

§ 83. **Osnovi kinetične teorije gasova.** Još pre dve stotine godina zapazio je naročito Daniel Bernoulli, da se najglavnije osobine gasova mogu razumeti ako se pretpostavi, da se pojedini gasni molekuli nalaze u stalnom kretanju. Pri tome kretanju se molekuli stalno sudaraju između sebe i sa zidovima suda u kome se nalaze. Za sudare između molekula važe zakoni za elastičan sudar, tj. zbir njihovih energija i količina kretanja ostaju nepromenjeni, ali se menja brzina molekula posle sudara, po veličini i po pravcu. Jedan molekul kreće se dakle, menjajući stalno u skokovima svoju brzinu, po jednoj cikcak putanji. Pri sudaru sa zidovima suda, koji imaju istu temperaturu koju i gas, u opštem slučaju

se menja energija i impuls pojedinih molekula. Ali prosečno uzev i zidovi daju molekulima isto toliko energije, koliko su od molekula primili, tako da usled tih sudara ne nastupa promena ukupne molekularne energije gasa.

Stanje jednoa gasa se stalno menja ako ga »mikroskopski« posmatramo, tj. ako posmatramo mesta i brzine pojedinih molekula. Ali ako se posmatra veća količina gasa »makroskopski«, tj. ako se posmatra uzajamno dejstvo gasa i okoline, onda tu stalnu molekularnu promenu stanja ne zapažamo. To dolazi otuda što su makroskopske veličine stanja jednoa gasa, njegova zapremina, njegov pritisak i temperatura, određeni srednjim vrednostima mikroskopskih veličina stanja molekula, naročito njihovom prostornom gustom i njihovom kinetičkom energijom. Ako su ove srednje vrednosti vremenski konstantne, ako se gas nalazi u dinamičkoj ravnoteži, onda njegovo makroskopsko stanje ostaje nepromenjeno. Ono se menja kad se menjaju i te srednje vrednosti. Kod makroskopski posmatranih gasova, dolazi u obzir kao što ćemo još videti, uvek ogroman broj molekula. Kad bi bilo moguće kod jednoa gasa koji se nalazi u dinamičkoj ravnoteži pratiti sve molekularne promene stanja u svima pojedinostima, onda bi se utvrdilo da svakoj promeni stanja koja se u ma kome momentu dešava na jednome od molekula, praktično odgovara na istom mestu i u istom trenutku na nekom drugom molekulu suprotna promena stanja, tako da je makroskopska promena stanja praktično poništena. Ili još tačnije: kod ogromno velikog broja molekula postoji verovatnoća koja se graniči sa sigurnošću da je tako kao što je gore navedeno. Ovu važnu činjenicu ćemo nazvati princip kompenzacije. Gas koji se nalazi u dinamičkoj ravnoteži može se uporediti sa stanovništvom čiji se uslovi života ne menjaju. Mikroskopsko posmatranje toga stanovništva pokazalo bi nam stalno promenljivi život pojedinih ljudi, rađanje i smrt, bolesti, promenu stana itd. Ako međutim posmatramo stanovništvo makroskopski, dakle prema statističkoj metodi, onda tabele iz godine u godinu pokazuju istu sliku, ukoliko se stanje stanovništva ne menja. Svakom rođenju odgovara prosečno po jedan smrtni slučaj, iz godine u godinu prosečno oboli isti broj lica od boginja, tuberkuloze itd. Koja su pojedina lica upravo pogođena tom promenom stanja ne interesuje ni malo statističara.

Ovakav statistički način posmatranja ima razume se samo onda svoj puni smisao kada se radi o velikom broju individua. On se ne bi mogao primeniti na stanovništvo kuće sa jednom porodicom, jer bi ovde pojedinačni životi i njihove promene malog broja lica izazvali isuviše velika odstupanja. Ovakva odstupanja pokazuju, razume se, i statističarske tabele. Ali ona su, upoređujući ih sa ukupnim brojevima, utoliko manja ukoliko je veći broj lica uzet u obzir, jer utoliko postoji veća verovatnoća da se ova odstupanja izjednače.

Pošto se kod makroskopski posmatranih gasova nalazi uvek ogroman broj molekula — npr. u  $1 \text{ cm}^3$  atmosfetskog vazduha ima  $10^9$  puta više molekula nego stanovnika na zemlji — a uz to se u jednom prostom gasu nalaze potpuno jednake individue, to su svi potrebni uslovi ispunjeni za primenu statističkog načina posmatranja (Maxwell, Boltzmann). Ustvari pomoću statističkih metoda primenjenih na gasove, a koje su zasnovane na računu verovatnoće i traženju srednjih vrednosti, dolazi se do zaključaka koji odgovaraju stvarnom ponašanju gasova, dakle koji imaju karakter strogo važećih zakona.

Statistički način posmatranja se odlikuje naročito time, što uzima u obzir samo srednje vrednosti mikroskopskih veličina stanja pojedinih molekula. Pri tome se uzimaju ili srednja vrednost za jedan određeni molekul, uzeta u toku nekog dužeg vremena (vremenska sredina) ili srednja vrednost istovremenih stanja svih molekula (prostorna sredina).

Zakoni koji se ovim putem mogu izvesti imaju naročito prost oblik kad se molekuli posmatraju kao materijalne tačke i kad se zanemari činjenica da između njih postoje privlačne Van der Waals-ove sile. Kod mnogih gasova, npr. kod plemenitih gasova, vazduha, vodonika, kiseonika, azota itd. to je ustvari uveliko dopušteno. Gas koji bi potpuno ispunjavao ovu pretpostavku zove se idealni gas. Za njega daje kinetička teorija gasova sledeće osnovne zakone:

1. Prostorna i vremenska srednja vrednost kinetičke energije  $\mu \bar{v}^2/2$  molekula jednog gasa iste temperature je podjednako velika, tj. svi molekuli imaju u jednom određenom trenutku prosečno istu kinetičku energiju, koju ima jedan jedini molekul prosečno uzetu za neko duže vreme. Ova srednja vrednost je ista za sve idealne gasove jednake temperature i ne zavisi od pritiska. Oznaka  $\bar{v}^2$  pokazuje da je uzet srednji kvadrat brzine, srednja vrednost pojedinačnih iznosa  $v^2$ . Sa  $\mu$  ćemo ubuduće označavati uvek masu pojedinih molekula ili atoma, za razliku od mase  $m$  tela sa većim dimenzijama. Ako molekuli dva različita gasa imaju mase  $\mu_1$  i  $\mu_2$  onda je prema gornjem  $\bar{v}_1^2 : \bar{v}_2^2 = \mu_2 : \mu_1$ , tj. ukoliko je manja masa molekula jednoa gasa, utoliko je veći na datoj temperaturi njegov srednji kvadrat brzine, a sa tim i njegova srednja brzina.

2. Pri dinamičkoj ravnoteži su brzine molekula ravnomerno raspoređene u svima pravcima prostora.

3. Molekuli gasa ukoliko nisu izloženi nekom spoljašnjem dejstvu ispunjavaju prosečno neki prostor, koji im se stavlja na raspoloženje, potpuno ravnomerno tako da se u jednakim delovima prostora nalazi isti broj molekula.

4. Prosečna kinetička energija molekula zavisi samo od temperature, a ne od pritiska.

5. Broj molekula  $n$  u  $1 \text{ cm}^3$  nekog idealnog gasa zavisi samo od temperature i pritiska, a ne od vrste gasa. On je za sve idealne gasove na istom pritisku i temperaturi podjednako veliki (Avogadrov zakon 1803, dokaz niže). On iznosi pod normalnim uslovima

$$n = 2,688 \cdot 10^{19}$$

Pod normalnim uslovima podrazumeva se temperatura  $0^\circ \text{C}$  i pritisak od  $76 \text{ cm Hg}$ . Uobičajeno je da se konstante gasova u tabelama svode na normalne uslove. Ako je  $\mu$  masa jednog molekula, a  $n$  broj molekula u  $1 \text{ cm}^3$ , onda je gustina gasa na toj temperaturi i pritisku

$$\rho = n \mu \quad (1)$$

Prema tome važi za različite idealne gasove pod istim uslovima (jednako  $n$ )

$$\frac{\rho}{\mu} = n = \text{const} \quad (2)$$

tj. gustina gasa je srazmerna broju molekula u  $1 \text{ cm}^3$ .

Često će nam biti potrebno da tražimo prostorne i vremenske srednje vrednosti. Neka se u zapremini gasa nalaze  $n$  molekula od kojih  $n_1$  imaju izvesnu osobinu  $\Psi$  u iznosu  $\Psi_1$ ,  $n_2$  u iznosu  $\Psi_2$ ,  $n_3$  u iznosu  $\Psi_3$ . Ako imamo vrlo veliki broj molekula na kojima su pojedini iznosi od  $\Psi$  praktično neprekidno podeljeni, onda delimo moguće iznose od  $\Psi$  na beskrajno male vrednosti  $d\Psi$ . Ako je  $dn$  broj molekula koji imaju osobinu  $\Psi$  u iznosu koji se nalazi između  $\Psi$  i  $\Psi + d\Psi$  onda dobijamo integralom da je srednja vrednost od  $\Psi$

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{n} \int_0^n \Psi \, dn \quad (4)$$

Ako jedan molekul ima osobinu  $\Psi$  za vreme  $t_1$  u iznosu  $\Psi_1$  u toku vremena  $t_2$  u iznosu  $\Psi_2$ , uopšte u toku vremena  $t_i$  u iznosu  $\Psi_i$ , onda je vremenska srednja vrednost  $\bar{\Psi}$  od  $\Psi$  onaj iznos koji bi se osobini  $\Psi$  morao pripisati u toku celog vremena  $t = \sum t_i$ , da bi proizvod  $t \bar{\Psi}$  bio jednak proizvodu  $t_i \Psi_i$ . Onda je dakle

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t} \sum t_i \Psi_i \quad (5a)$$

Ako se osobina  $\Psi$  ne menja u skokovima već neprekidno, onda moramo zbir zameniti integralom i dobijamo umesto jedn. (5a)

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t} \int_0^t \Psi \, dt \quad (5b)$$

kao vremensku srednju vrednost veličine  $\Psi$ .

Ne samo za kinetičku energiju, već za sve molekularne veličine stanja važi da su im prostorne i vremenske srednje vrednosti jednake. To odgovara očiglednoj činjenici da se u istovremenim stanjima svih molekula nalaze sa vrlo velikom tačnošću sva stanja kroz koja prođe jedan jedini molekul u toku dužeg vremena, i to utoliko češće ukoliko je vreme duže. Isto tako je veliki broj ljudi svih doba starosti, prosečno uzev, verna slika faza razvića kroz koje prođe jedan jedini čovek u toku svoga života.

§ 84. **Molekulska i atomska težina. Mol i gram atom.** Mase atoma i molekula su vrlo male i zbog toga ih je često nezgodno izražavati u gramovima. U hemiji je već odavno uvedena kao molekulska i atomska jedinica mase  $\frac{1}{16}$  mase atoma kiseonika, što je približno, ali ne sasvim tačno jednako masi vodonikovog atoma. Pošto se mase određuju na terazijama to se govori o molekulskim i atomskim težinama.

U primeni se međutim srećemo stalno sa odgovarajućim masama i bilo bi stoga pravilnije govoriti o masi molekula i masi atoma. Mi ćemo ubuduće bez naročite napomene pod molekulskom i atomskom težinom podrazumevati odgovarajuće mase. Izmerenu molekulsku težinu u molekulskim jedinicama označićemo sa  $M$ , za razliku od mase  $\mu$  jednog molekula izmerene u gramovima. 1 mol ili molekul gram je ona količina nekog tela koja ima toliko grama kolika je njegova molekulska težina, npr. 32,0000 g kiseonika ili 2,0163 g vodonika u gasovitom stanju. U tome smislu može se onda smatrati  $M$  kao masa jednoga mola toga tela izmerena u gramovima. Pošto je  $\mu$  masa jednog jedinog molekula izmerena u gramovima to je

$$M = \mu N \quad \text{ili} \quad N = \frac{M}{\mu} \quad (6)$$

gde  $N$  označava broj molekula u jednom molu.

Kako je međutim molekulska težina srazmerna masi molekula, to izlazi da jedan mol makoga tela, nezavisno od uslova pod kojima se nalazi, sadrži uvek isti broj  $N$  molekula. Broj  $N$  je prema tome univerzalna konstanta i zove se Avogadrov broj. Na više različitih načina određivana je njegova vrednost. Rezultati tih merenja se vrlo dobro podudaraju i našlo se da je

$$N = 6,0244 \cdot 10^{23}$$

Valja primetiti da je  $N$  potpuno nezavisno od stanja dotičnog tela.

Analogo prema mol-gramu je atom-gram jednoga tela ona njegova količina koja iznosi onoliko grama kolika je njegova atomska težina. Istim razmatranjem kao gore dolazi se do zaključka da je takođe i broj atoma u jednom atom-gramu uvek jednak Avogadrovom broju  $N$ .

Poznavanje Avogadrovog broja omogućava izračunavanje mase jednog molekula ili atoma u gramovima, jer je prema jedn. (6)  $\mu = M/N$ . Tako npr.



pošto je molekulska težina kiseonika 32,00, to je masa jednog kiseonikovog molekula  $O_2$   $\mu = 32,00/6,0244 \cdot 10^{23} = 5,312 \cdot 10^{-23}$  g. Na isti način nalazi se da je masa jednog atoma vodonika  $1,00813/6,0244 \cdot 10^{23} = 1,6734 \cdot 10^{-24}$  g.

Pošto jedan mol nekoga tela ima uvek isti broj molekula, to on zauzima po Avogadrovom zakonu pod istim uslovima uvek istu zapreminu (mol-volumen  $V_m$ ), ako se nalazi u idealnom gasnom stanju, bez obzira na vrstu tela. Gustina helijuma je npr. pod normalnim uslovima  $0,0001785$  g  $\cdot$  cm $^{-3}$ , njegova molekulska težina 4.00389. Njegova mol-zapremina iznosi pod istim uslovima  $\frac{4.00389}{0.0001785} = 22431$  cm $^3$  (normalna mol-zapremina). Za druge gasove koji se nalaze u približno idealnom gasnom stanju dobija se isti broj. Ako je  $n$  broj molekula u 1 cm $^3$  onda 1 mol sadrži  $N = nV_m$  molekula. Prema tome je mol-volumen

$$V_m = \frac{N}{n}$$

§ 85. **Maxwell-ov zakon.** U nekome gasu koji se nalazi na stalnoj temperaturi je prostorna i vremenska srednja vrednost kinetičke energije molekula konstantna, iako se stanje kretanja svakog pojedinačnog molekula menja pri svakom sudaru. Ali ukupna energija gasa se ne menja. Ako u jednom određenom trenutku od molekula koji se nalaze u 1 cm $^3$  gasa  $n_1$  imaju brzinu  $v_1$ ,  $n_2$  brzinu  $v_2$ , uopšte  $n_i$  brzinu  $v_i$  i ako je  $n = \sum n_i$  ukupan broj molekula u 1 cm $^3$  onda je srednja kinetička energija molekula data jednačinom

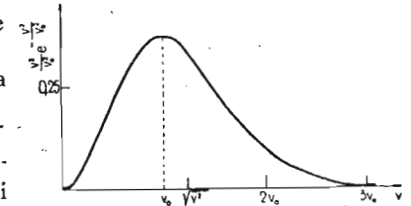
$$n \mu \frac{\bar{v}^2}{2} = \sum n_i \mu \frac{v_i^2}{2}$$

Srednja vrednost  $\bar{v}^2$ , srednji kvadrat brzine ima u teoriji gasova vrlo važnu ulogu. Ako posmatramo gas u nekom docnijem trenutku, pojedini molekuli su potpuno izmenili svoje stanje kretanja. Ali će ponovo isti broj molekula  $n_i$  imati određenu brzinu  $v_i$  pošto se stanje gasa kao celine, tj. bez obzira na pojedine molekule, nije promenilo. Pošto moguće brzine molekula grade neprekidan niz, to ih delimo na beskrajno male oblasti brzina  $dv$  i tražimo broj  $dn_v$  molekula čije se brzine nalaze između vrednosti  $v$  i  $v+dv$ . Ovaj broj će biti utoliko veći ukoliko se češće usled sudara nalazi jedna takva brzina, ukoliko je takva jedna brzina **v e r o v a t n i j a**. Tu verovatnoću je izračunao Maxwell. Može se reći unapred da će se vrlo velike i vrlo male brzine, tj. one koje mnogo odstupaju od srednje vrednosti vrlo retko javljati, kao i da će kriva koja predstavlja tu raspodelu brzina imati svoj maksimum u oblasti ove srednje vrednosti. Mi ćemo ovu najverovatniju brzinu označiti sa  $v_0$ . Tada Maxwell-ov zakon glasi

$$\frac{dn_v}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} d\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad (7)$$

Pošto se u zakonu ne nalazi masa molekula  $\mu$  to zakon važi za sve idealne gasove i ne zavisi od njihove vrste. Na sl. 74 je predstavljeno kako zavisi  $dn_v/n$  dakle relativna učestanost brzina  $v$ , od njoj proporcionalne funkcije

$\frac{v^2}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}}$ . Kriva ne leži simetrično prema maksimumu koji odgovara najverovatnijoj brzini  $v_0$ . Vidi se da je broj molekula koji imaju veću brzinu od  $v_0$  veći od broja molekula sa manjom brzinom. Prema tome srednja vrednost iznosa



Sl. 74. Maxwell-ov zakon.

brzine  $v$ , srednja brzina  $\bar{v}$  nije ista sa najverovatnijom brzinom. Nju možemo prema jedn. (4b) izračunati iz jedn. (7). Izlazi da je

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \int_{v=0}^{v=\infty} v dn_v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 = 1,128 v_0 \quad (8)$$

Isto tako se nalazi da je srednji kvadrat brzine

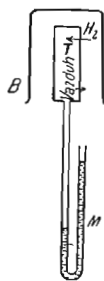
$$\bar{v}^2 = \frac{1}{n} \int_{v=0}^{v=\infty} v^2 dn_v = \frac{3}{2} v_0^2 \quad (9)$$

a odatle je koren iz srednjeg kvadrata brzine  $\sqrt{\bar{v}^2} = 1,224 v_0$ . Još jedanput valja naglasiti da se mora praviti stroga razlika između srednje, najverovatnije brzine i korena iz srednjeg kvadrata brzine. U mnogim slučajevima je dozvoljeno da se računa kao da svi molekuli imaju istu brzinu. Tada se skoro uvek podrazumeva koren iz srednjeg kvadrata brzine.

§ 86. **Difuzija.** Kao neposredna posledica kretanja molekula javlja se difuzija, izjednačenje razlika u gustini. Razlikuju se slobodna difuzija i difuzija kroz porozne zidove, ma da između njih ne postoji osnovna razlika. Difuzija nije ništa drugo do težnja molekula da se ravnomerno raspodele u celom prostoru koji im je stavljen na raspoloženje. Ako je taj prostor podeljen na dva dela nekom pregradom, kroz koju molekuli mogu da prolaze, onda će se difuzija vršiti i kroz tu pregradu.

Ako se u nekom gasu, npr. vazduhu, na ma kome mestu nalazi neki drugi gas, on se širi težeći da ravnomerno ispuni raspoloživi prostor i da se sa prvim gasom ravnomerno pomeša. Ova difuzija je naročito jasna kod mirisa od kojih je dovoljna i najmanja količina pa da se primeti njihovo prisustvo. Difuzija se vrši utoliko brže, ukoliko je veća brzina

molekula difundujućeg gasa, i ukoliko na manje smetnji nailaze molekuli u gasu u kome se vrši difuzija. Sl. 75 pretstavlja negledosan sud  $T$  od pečene zemlje, spojen sa vodenim manometrom  $M$ . Sud propušta gasove.



Sl. 75. Difuzija gasova.

i u početku je napunjen vazduhom. Kad se sud poklopi čašom  $B$  ispod koje se pusti vodonik, manometar u prvom trenutku pokazuje jako povećanje pritiska u sudu, koje brzo nestaje. Brzina molekula vodonika je mnogo veća od molekula vazduha i zbog toga difunduje vodonik u sud brže nego vazduh iz suda. Postepeno se vazduh i vodonik izmešaju u istim odnosima u sudu i van suda, tako da svuda vlada isti pritisak. Ako se čaša udalji, manometar u prvom trenutku pokazuje veliko smanjenje pritiska u sudu, jer vodonik mnogo brže iz njega difunduje, nego li vazduh u sudu. Posle kratkog vremena ponovo se uspostavi isti pritisak.

U tečnostima gdegod postoji razlika u koncentraciji javlja se difuzija. Ako se dve tečnosti, koje se mešaju, sipaju u isti sud npr. voda i alkohol onda se postepeno usled slobodne difuzije dobije ravnomerna mešavina. Razume se u ovome slučaju je difuzija mnogo sporija, jer su smetnje pri kretanju molekula mnogo veće. Molekuli (odnosno joni) rastvorenih tela i sitni delići koji lebde difunduju u neku tečnost isto tako, kao jedan gas u drugome vrlo gustom gasu i teže da ispune ceo prostor ravnomerno. U ovome slučaju celu zapreminu tečnosti. Ako se iznad rastvora bakra sulfata pažljivo sipa čista voda dobije se u početku sasvim oštra granična površina. U toku vremena ona postaje manje oštra, jer se bakra sulfat širi usled difuzije naviše. Posle nekoliko meseci je sud ravnomerno ispunjen plavom tečnošću.

§ 87. **Pritisak gasova.** Pritisak koji jedan gas vrši na zidove suda dolazi usled udara molekula o zidove. Makroskopski posmatrano pritisak je statička, a ustvari dinamička veličina. On se može uporediti sa pritiskom koji se javlja kad vrlo mnogo ljudi pesnicama lupa o neki zid, ili sa pritiskom koji pri padanju vrše kišne kapi. Molekuli se odbijaju od zida. Opšte uzev ovde nemamo slučaj elastičnog sudara između nekog vrlo malog tela i zida mnogo veće mase. Prvo, u makroskopskom smislu ravan zid, u molekularnom smislu je uvek neravan. Drugo, u pojedinačnim slučajevima molekul posle sudara menja svoju brzinu, on dobija ili gubi kinetičku energiju. Ovde princip zamene kompenzacije omogućava da se razmatranje uprosti. Kod vrlo velikog broja molekula uvek će se za molekul koji sa određenom brzinom i u određenom pravcu udara u zid naći parnjak, koji u istom trenutku napušta zid i čija je brzina posle sudara po veličini ista sa brzinom prvog molekula pre sudara i gradi isti ugao  $\alpha$  sa normalom u tački sudara koji je imala brzina prvog molekula pre sudara. Primenjujući princip zamene na svaki par molekula možemo računati kao da se svaki

pojedinačni molekul odbija od zida bez gubitka energije i to pod istim uglom sa normalom pod kojim je udario o zid (pravilno odbijanje sl. 76).

Neka brzina molekula iznosi  $v$ . Zid stoji upravno na  $x$ -pravcu, tako da je komponenta brzine upravna na zid  $v_x = \dot{x} = v \cos \alpha$ , ako je  $\alpha$  upadni ugao molekula. Komponenta impulsa (količine kretanja) koja stoji upravno na zid pre sudara iznosi  $\mu \dot{x}$ , a posle sudara  $-\mu \dot{x}$ . Usled sudara ona se menja za iznos  $2\mu \dot{x}$ . Komponenta impulsa paralelna sa zidom ostaje nepromenjena. Posmatračemo ravan deo zida čija je površina  $q$  (sl. 77). O njega udaraju molekuli koji dolaze iz svih mogućih pravaca sa svima mogućim brzinama. Od njih ćemo uočiti one koji imaju određenu brzinu  $v$  i padaju pod uglom  $\alpha$  na zid. Ovi molekuli se kreću u unutrašnjosti cilindra koji stoji koso naspram zida. Tražimo sada promenu impulsa tih molekula u toku vremena  $dt$ . Pošto molekuli za vreme  $dt$  pređu put  $v dt$  to za ovo vreme dospe do zida onoliki broj molekula, koliko ih se nalazi u prostoru preseka  $q$  i visine  $v dt \cos \alpha = \dot{x} dt$ . Zapremina toga prostora iznosi dakle  $\dot{x} q dt$ . Ako  $1 \text{ cm}^3$  gasa sadrži  $n_i$  molekula te vrste, onda će u zid za vreme  $dt$  udariti  $n_i \dot{x} q dt$  takvih molekula, i pošto je promena impulsa  $2\mu \dot{x}$ , to ukupna promena impulsa za vreme  $dt$  koju ćemo označiti sa  $dG_x$  iznosi  $dG_x = n_i \dot{x} q dt 2\mu \dot{x} = 2n_i \mu \dot{x}^2 q dt$ . Zbog vrlo velikog broja molekula možemo promenu impulsa smatrati kao neprekidan proces, pa zbog toga i silu koja polazi od zida kao vremenski konstantnu. Po zakonu akcije i reakcije je sila pritiska koju molekuli vrše na zid  $k_i$  po iznosu ista sa silom kojom zid dejstvuje na molekule. Po stavu o impulsu je  $k_i = dG_x/dt$  pa je

$$k_i = 2n_i \mu \dot{x}^2 q$$

Ukupnu silu pritiska  $k$  dobićemo zbirom svih impulsa koji dolaze u obzir

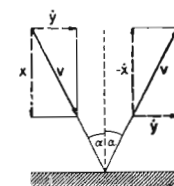
$$k = 2\mu q \sum n_i \dot{x}^2 \quad (11)$$

Ako je  $n$  ukupan broj molekula u  $1 \text{ cm}^3$  gasa, od njih se uzima u obzir samo onaj deo koji se kreće ka zidu. Zbog ravnomerne raspodele brzina u svima pravcima to iznosi svega  $n/2$ . Ako označimo sa  $\overline{\dot{x}^2}$  srednju vrednost od  $\dot{x}^2$  uzeti iz  $n/2$  molekula, onda je  $n/2 \overline{\dot{x}^2} = \sum n_i \overline{\dot{x}^2}$ . Stoga sleduje iz jednačine (11)

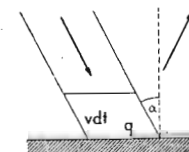
$$k = n \mu \overline{\dot{x}^2} q \quad (12)$$

Ako podelimo gornju jednačinu sa površinom  $q$  dobićemo tada pritisak gasa na zidove suda (sila na jedinicu površine).

$$p = n \mu \overline{\dot{x}^2} \quad (13)$$



Sl. 76. Pravilno odbijanje gasnih molekula.



Sl. 77. Uz izvođenje pritiska u gasovima.

Za svaki molekul važi  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ . Prema tome je takođe srednji kvadrat brzine jednak  $\overline{v^2} = \overline{\dot{x}^2} + \overline{\dot{y}^2} + \overline{\dot{z}^2}$ . Ali pošto nema favorizovanih pravaca to je  $\overline{\dot{x}^2} = \overline{\dot{y}^2} = \overline{\dot{z}^2} = \overline{v^2}/3$  pa dobijamo na posletku

$$p = \frac{1}{3} n \mu \overline{v^2} \quad (14)$$

Ovu važnu jednačinu izveo je još 1738 g. Daniel Bernoulli. Prema jednačini (1) je  $n \mu = \rho$  gustina gasa. Zato možemo takođe napisati

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \quad (15)$$

Vredi zapaziti da se može izračunati molekulska veličina  $\overline{v^2}$  iz makroskopskih veličina  $p$  i  $\rho$ . Za vodonik pod normalnim uslovima je pritisak od 760 mm Hg na 0° C 1013300 din-a/cm<sup>2</sup>. Gustina vodonika je pod istim uslovima 0,00008985. Odatle izlazi da je za vodonik  $\sqrt{\overline{v^2}} = 1837$  m/sec<sup>-1</sup>. Za vazduh je ta brzina 484 m.sec<sup>-1</sup>. Iz  $\overline{v^2}$  može se izračunati prema jednačini (9) srednja brzina  $\bar{v}$  i najverovatnija brzina  $v_0$ .

Ako je gas mešavina više idealnih gasova, svaki od njih vrši isti pritisak koji bi vršio da se sam nalazi u prostoru. Ukupan pritisak je jednak dakle zbiru parcijalnih pritisaka.

$$p = p_1 + p_2 + \dots \quad (16)$$

(Daltonov zakon).

Pošto je srednja kinetička energija jednog molekula  $\frac{1}{2} \mu \overline{v^2}$ , to je kinetička energija koju sadrži 1 cm<sup>3</sup> gasa  $u = n \mu \overline{v^2}/2$ . To je gustina kinetičke energije gasa. Iz jednačine (14) sleduje

$$p = \frac{2}{3} u \quad (17)$$

§ 88. **Izotermne promene stanja gasova.** Ako se u jednačini (15) uvede specifična zapremina  $V_s = 1/\rho$  onda se dobija

$$p V_s = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad (18)$$

Kad se pri promeni stanja gasa njegova temperatura a sa tim i  $\overline{v^2}$  ne menjaju, ako su dakle te promene izotermne (na istoj temperaturi) izlazi da je

$$p V_s = \text{const.} \quad (19)$$

Ako je  $m$  masa gasa čija je zapremina  $V$ , dakle  $V = m V_s$  to izlazi iz jed. (19) opštiji zakon  $p V = m \overline{v^2}/3$  ili

$$p V = \text{const.} \quad (20)$$

Jednačine (19) i (20) su različiti oblici izotermne jednačine stanja idealnih gasova.

Neka se gas nalazi zatvoren u cilindričnom sudu preseka  $q$  čija je jedna strana pokretan klip (sl. 78). Na klip dejstvuje sila  $k$  koja u gasu

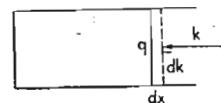
održava pritisak  $p = k/q$ . Na gasu ćemo izvesti jednu izotermnu promenu. Pretpostavićemo da na klip dejstvuje još i sila  $dk$  u suprotnom pravcu. Pri promenjenom pritisku i zapremini uspostaviće se nova ravnoteža pri kojoj je pritisak  $p + dp = \frac{k - dk}{q}$ . Promena pritiska je  $dp = -dk/q$ . Pošto je prema jed. (20)  $p dV + V dp = 0$ , dakle  $dp = -p dV/V$ , to izlazi da je

$$\frac{dV}{V} = \frac{dk}{qp} \quad (21)$$

Ova jednačina odgovara potpuno Hook-ovom zakonu, gde relativna promena dužine žice  $\Delta l/l$  odgovara ovde relativnoj promeni zapremine, a pritisak  $p$  odgovara modulu elastičnosti.

Pri povećanju zapremine  $dV$  vrši gas usled pomeranja klipa za dužinu  $dx$  spoljašnji rad spram sile  $k$ . Taj rad iznosi  $dA = k dx = p q dx$  ili pošto je  $q dx = dV$  onda

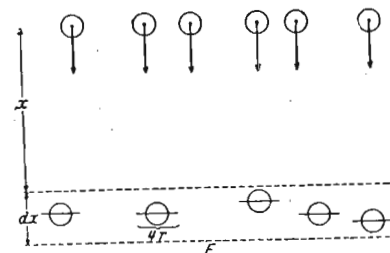
$$dA = p dV \quad (22)$$



Sl. 78. Uz elastičnost gasova.

Ovaj rad se dobija pri povećanju zapremine. Obrnuto, mora se isto toliko rada utrošiti kad se zapremina gasa smanji za  $dV$ . Jed. (22) važi i za neizotermne promene zapremine i za neidealne gasove, jer se neposredno izvodi iz definicije pojma rada.

§ 89. **Slobodna dužina puta. Broj sudara.** Molekuli neidealnih, dakle svih stvarnih gasova imaju konačnu zapreminu i između sebe se sudaraju. Zamislimo ih u obliku lopti sa poluprečnikom  $r$ . Uočićemo grupu od vrlo



Sl. 79. Izračunavanje dužine slobodnog puta.

mного molekula koji se kreću u istom pravcu (slika 79). U vremenu  $t = 0$  njihovo mesto na koordinati koja leži u pravcu kretanja je  $x = 0$  a njihov broj  $z_0$ . U svakom sloju gasa kroz koji prolazi ova grupa izvestan broj molekula  $dx$  će se sudariti i usled toga ispasti iz grupe. Broj molekula u grupi stalno opada, on iznosi na razdaljini  $x$  od početka još  $z$ . Presek grupe neka je  $F$ , dakle  $F dx$  zapremina sloja gasa debljine  $dx$  kroz koju grupa prolazi. Ako je  $n$  broj molekula u jednom cm<sup>3</sup>, onda se u tom sloju nalaze  $n F dx$  molekula. Zamislimo prvo da se ovi molekuli ne kreću. Odmah se uviđa da se broj sudara u sloju neće promeniti ako zamislimo molekule u grupi kao tačke, a molekule u sloju kao kružne ploče poluprečnika  $2r$  koje upravno stoje na pravac kretanja grupe. Neka je sloj tako tanak da se ove ploče uzajamno ne poklapaju. Njihova ukupna površina iznosi  $4\pi r^2 n F dx$  i od broja mole-

kula koji dospeju u sloj zadrže deo  $4\pi r^2 n F dx / F = 4\pi r^2 n dx$ . Relativna promena broja molekula grupe u tom sloju iznosi

$$\frac{dz}{z} = -4\pi nr^2 dx$$

Rešenje ove jednačine glasi

$$\ln \frac{z}{z_0} = -4\pi nr^2 x \text{ ili } z = z_0 e^{-4\pi nr^2 x} = z_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (23)$$

stavljajući  $4\pi nr^2 = 1/\lambda$ . Prema jednačini (4) dobijamo kao srednju vrednost slobodno pređenih puteva  $x$  pojedinih molekula

$$\bar{x} = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} x dz$$

Ako u ovu jednačinu unesemo vrednost za  $x dz$  izračunatu iz jednačine (23) i stavimo  $x/\lambda = y$  dobija se lako parcijalnom integracijom

$$\bar{x} = \lambda \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \lambda \quad (24)$$

$\lambda$  se zove srednja slobodna dužina puta ili kratko slobodna dužina puta. Ako se ne pretpostavi da molekuli u prolaznim slojevima miruju dobija se za slobodnu dužinu puta za  $3/4$  manja vrednost.

Mi smo ovde izračunali slobodnu dužinu puta kao srednju vrednost iz velikog broja molekula, dakle kao prostornu srednju vrednost. Vremenska srednja vrednost za jedan jedini molekul je tada isto toliko velika i  $\lambda$  je stoga takođe srednja vrednost puta koju jedan jedini molekul pređe između dva sudara.

Srednja slobodna dužina puta je obrnuto srazmerna broju molekula  $n$  u  $1 \text{ cm}^3$  i njihovom preseku  $\pi r^2$ , ako pretpostavimo da molekuli imaju oblik lopti. Ako molekuli imaju drugi oblik, umesto  $\pi r^2$  dolazi druga veličina koja se zove površina dejstva molekula.

Slobodna dužina puta može se, kao što ćemo docnije videti, izračunati iz unutarnjeg trenja gasova. Ona razume se zavisi od vrste gasa. Na pritisku od  $76 \text{ cm Hg}$  njen red veličine je  $10^{-5} \text{ cm}$ , na pritisku od  $0,01 \text{ cm Hg}$  iznosi oko  $0,01 \text{ cm}$ . Površina dejstva je oko  $10^{-16} \text{ cm}^2$ , a njen poluprečnik oko  $10^{-8} \text{ cm}$ . Zbir površina dejstva molekula u  $1 \text{ cm}^3$  na pritisku od  $76 \text{ cm Hg}$  iznosi  $1$  do  $3 \text{ m}^2$ . Iz slobodne dužine puta i srednje brzine molekula  $\bar{v}$  može se izračunati prosečno vreme između dva sudara  $\bar{t} = \lambda/\bar{v}$ . Veličina  $1/\bar{t} = \bar{v}/\lambda$  je broj sudara u  $1 \text{ sec}$ . Pod normalnim uslovima on je vrlo veliki i njegov red veličine iznosi  $10^9$  do  $10^{10} \text{ sec}^{-1}$ .

Treba uočiti sledeću važnu činjenicu. Kad je jedan molekul prešao već izvestan deo slobodnog puta, onda je verovatnoća, da će se na jednom određenom delu svoga daljeg puta sudariti ista kao u svakoj drugoj tački

njegovog puta, a ne veća. Činjenica da je on već izvesnu dužinu puta slobodno prešao nema nikakvo uticaja na njegovu dalju sudbinu. Mi se nismo pitali pri gornjem izvođenju, da li su molekuli naše grupe koje smo počeli da posmatramo na mestu  $x=0$  već pre toga prešli izvesnu dužinu puta.

§ 90. **Dejstvo teže na gasove.** Svaki gas koji se nalazi na zemlji podložan je dejstvu zemljine teže koja molekule vuče naniže. Nasuprot tome usled molekularnog kretanja gas teži da se ravnomerno raspodeli po celom prostoru. Pod zajedničkim dejstvom ova dva faktora uspostavlja se pri dinamičkoj ravnoteži stanje pri kome gasni pritisak i gustina opadaju sa visinom. Kao što smo videli srednja brzina molekula je utoliko veća, ukoliko je manja njihova masa, dakle ukoliko je manja molekularna težina gasa. Kod gasa sa manjom molekularnom težinom je rasturanje usled molekularnog kretanja veće nego kod gasa veće molekularne težine. Sila teže, naprotiv, saopštava svakom molekulu isto ubrzanje  $g$  nezavisno od njegove mase. Molekuli jednog gasa raspoređuju se nasuprot zemljine teže utoliko ravnomernije na svima visinama, ukoliko je manja molekularna težina; utoliko sporije opada, dakle, gustina gasa, idući u vis.

Uočićemo u jednome gasu horizontalan sloj vrlo male debljine  $\Delta x$  i preseka  $q$  (sl. 80). Sloj se nalazi na visini  $x$  iznad nivoa  $x=0$ . Ako pritisak na donjoj površini iznosi  $p$ , na gornjoj površini će biti  $p + \Delta x dp/dx$  (Taylor-ov obrazac). Ako je  $\rho$  gustina gasa u tom sloju onda je težina sloja  $\rho g q \Delta x$ . Sila pritiska koja dejstvuje na donju površinu mora biti jednaka zbiru te težine i pritiska na gornju površinu, dakle

$$p q = (p + \Delta x dp/dx) q + \rho g q \Delta x \text{ ili } = \frac{dp}{dx} = -\rho g \quad (25)$$

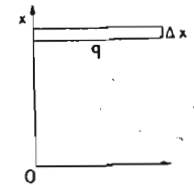
Ali je prema jednač. (15)  $p/\rho$  u jednome gasu svuda iste temperature konstantno. Ako je  $p_0$  pritisak,  $\rho_0$  gustina u nivou  $x=0$  onda je, prema tome,  $p/\rho = p_0/\rho_0$  ili  $\rho = \rho_0 p/p_0$  odatle izlazi zamenom

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dx$$

Rešenje ove jednačine glasi

$$x = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_0}{p} \text{ odnosno } p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \quad (26 \text{ a i b})$$

(barometriska formula za visinu). Pošto je prema jednačini (3) i (15)  $p/p_0 = \rho/\rho_0 = n/n_0$  to izlazi dalje



Sl. 80. Uz izvođenje obrasca za pritisak.

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \quad \text{ili} \quad n = n_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \quad (26 \text{ c i d})$$

Ako u jed. (26) zamenimo u izložitelju gustinu  $\rho_0$  i pritisak  $p_0$  sa izrazima koji se dobijaju prema jed. (1) i (14) izložitelj će imati vrednost  $3gx/\bar{v}^2$ . Pritisak, gustina i broj molekula opadaju dakle sa visinom utoliko brže, ukoliko je manje  $\bar{v}^2$ , dakle ukoliko je veća masa molekula.

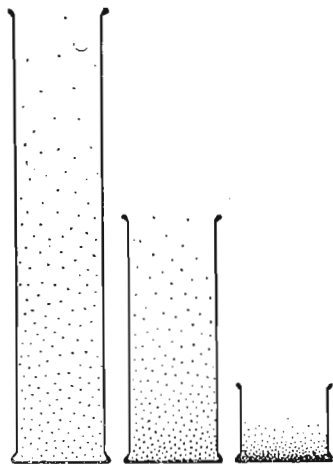
Prema jed. (25) kad se visina smanji za  $dx$ , opadne pritisak za  $\rho dx$  tj. za težinu količine gasa visine  $dx$  i preseka  $1 \text{ cm}^2$ . U atmosferi je stoga pritisak u nekom nivou jednak težini gasnog stuba preseka  $1 \text{ cm}^2$  iznad toga nivoa.

Ako imamo male razlike visina, tako da se gustina može smatrati stalna, izlazi prema jed. (25)

$$p = p_0 - \rho gh \quad \text{ili} \quad p_0 - p = \rho gh \quad (26e)$$

Ova jednačina je identična sa onom za hidrostatički pritisak tečnosti.

Kad se jedan zatvoren sud napuni nekim gasom, on postane teži za onoliko koliko je težak gas. Ova činjenica nije baš tako prosta kao što na prvi pogled izgleda. Treba pomisliti da u svakom trenutku samo jedan neznatan deo molekula dejstvuje na tas terazija, i to upravo oni molekuli koji se u tom trenutku sudaraju sa zidom suda, a svi ostali molekuli se slobodno kreću u prostoru. Terazije pokazuju ustvari razliku sila pritiska upravljenih naviše i naniže. Kao što prost račun pokazuje ta je razlika ustvari tačno jednaka težini zatvorenog gasa.



Sl. 81. Delići koji lebde u gasu.

Sitni delići koji lebde u nekom gasu, čak i oni koji se mogu videti golim okom, ponašaju se u suštini kao gasni molekuli. I oni se stalno kreću, kao što ćemo docnije videti kad bude govora o Brown-ovom kretanju. Njihova srednja kinetička energija  $m\bar{v}^2/2$  jednaka je kinetičkoj energiji molekula okolnoga gasa. Zbog svoje velike mase delići imaju brzinu  $\bar{v}^2$  mnogo

manju od gasnih molekula i njihov broj mnogo brže opada sa visinom. Sl. 81 pokazuje to za različite deliće. Sl. 82 pretstavlja mikrofotografske snimke delića mastiksa prečnika  $1 \mu$ . Ti su snimci dobijeni pomerajući mikroskop za snimanje u različitim horizontalnim ravnima čija je razdaljina bila  $12 \mu$ . Brojeći te deliće može se naći  $\rho_0 g/p_0 = 3g/\bar{v}^2$  i dokazati tačnost jed. (26) za deliće. Slično se ponašaju i delići koji lebde u nekoj tečnosti.

Svako telo koje se nalazi u nekom gasu, trpi od njega prema Arhimedovom zakonu potisak isto kao i u tečnosti. Potisak je dakle jednak težini gasa koji telo istisne. Uzrok potiska se može lako razumeti. On dolazi usled opadanja broja molekula, a sa tim i pritiska sa visinom.

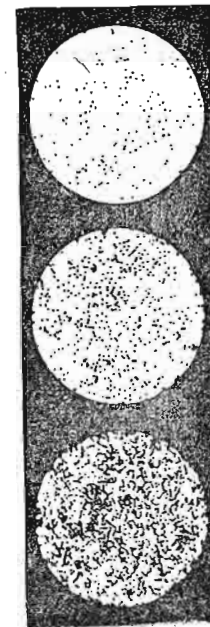
Usled toga trpi telo odozgo manju silu pritiska nego odozdo, pa je razlika tih sila pritiska jednaka težini one količine gasa koju je telo istislo. Ovo je analogo sa gore psmatranim slučajem merenja gasa.

Razume se da je potisak u nekom gasu mali, ako se uporedi sa potiskom u tečnostima. Kod tačnih apsolutnih merenja mora se voditi računa o tome, da telo i tegovi trpe različite potiske u vazduhu, izuzev ako su slučajno iste zapremine. Pošto je potisak tela čija je zapremina  $1 \text{ cm}^3$  u vazduhu oko  $1 \text{ mg}$ , to je njegovo dejstvo na osetljivim terazijama sasvim primetno. Već je Otto von Guericke dokazao potisak u vazduhu na sledeći način. Na krake malih terazija obesio je metalnu loptu i jednu znatno veću šuplju loptu od stakla. One u vazduhu drže jedna drugoj ravnotežu. Pošto staklena lopta trpi mnogo veći potisak, to je ona ustvari teža od metalne lopte. Kad se terazije unesu u sud iz koga se vazduh može da izvuče, onda se terazije nagnu na stranu staklene lopte.

Vazdušni baloni (aerostati) počivaju na dejstvu potiska. Oni se penju u vazduhu do one visine u kojoj je gustina vazduha tako mala, da je težina balona upravo jednaka težini gasne mase koju on istiskuje.

Ako se na makome mestu nekoga gasa nalazi izvesna količina nekog drugog gasa druge gustine, bilo da je to neki stran gas različite molekularne težine ili isti gas na drugoj temperaturi, onda je ravnoteža pritiska na tom mestu poremećena. Specifički teži gas pada u specifički lakšem, specifički lakši se penje u specifički težem gasu. Na tome se zasniva npr. penjanje toplog vazduha iznad vatre.

§ 91. **Vazdušni pritisak.** U atmosferskom vazduhu možemo da pratimo promene pritiska i gustine na vrlo različitim visinama. Na temperaturi  $0^\circ \text{C}$  za vazduh je  $\rho_0 g/p_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$ . Ako merimo visinu  $x$  u metrima tada iznosi eksponent jed. (26b)  $-1,25 \cdot 10^{-4} x = -x/8000$ . Ako temperatura iznosi  $t^\circ \text{C}$  onda ga treba još podeliti sa  $1 + at$  gde je  $a = 1/273$



Sl. 82. Gustine delića koji lebde na različitim visinama (prema Perrin-u). Ovo su tri paralelna sloja čija je visinska razlika po  $12 \mu$ .

(koeficijent širenja gasova). Za vazduh tada glasi jed. (26b)

$$p = p_0 e^{-\frac{x}{8000(1+at)}} \quad (27)$$

Sledeća tabela daje nekoliko brojnih primera za opadanje vazdušnog pritiska sa visinom. Kad se upotrebe Brigg-ovi logaritmi dobija se iz jed. (27), ako se i ovde  $x$  meri u metrima,

$$x = 18\,400(1+at) \log \frac{p_0}{p} \quad (28)$$

Odatle se može izračunati nadmorska visina iz vazdušnog pritiska. Suštinu

Vazdušni pritisak na različitim visinama na 0° C.

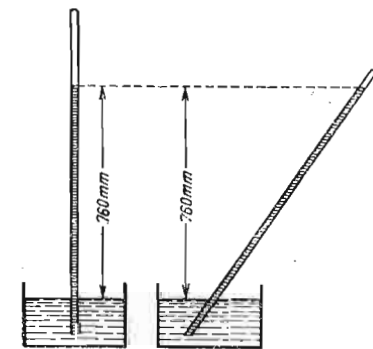
| Visina u m      | Pritisak u mm Hg |
|-----------------|------------------|
| 0 (morski nivo) | 760              |
| 500             | 714              |
| 1000            | 671              |
| 2000            | 592              |
| 4000            | 461              |

vazdušnog pritiska tačno je shvatio prvo Viviani (1643), a skoro u isto vreme i Otto von Guericke. Guericke je naime objasnio činjenicu da šmrk ne može dizati vodu na veću visinu od 10 m. Pascal je 1648 dokazao da vazdušni pritisak opada sa visinom.

Torricelli je dokazao vazdušni pritisak sledećim ogledom. Na jednom kraju zatvorena staklena cev dužine oko 80 cm napuni se živom, pa pošto se zapuši prstom okrene se i potopi u neki širi sud u kome se nalazi takođe živa. Živa se unekoliko spusti u cevi i iznad nje ostane bez-

vazdušni prostor,  $v$  a  $k$  u m. Živin stub u cevi drži ravnotežu atmosferskom pritisku. Pošto pritisak zavisi samo od vertikalne visine tečnosti, to ona ostaje ista ma i nagnuli cev. Visina živinog stuba iznosi na morskome nivou prosečno 76 cm.

Pošto živa na 0° C ima specifičnu težinu 13,5951, to živin stub preseka 1 cm<sup>2</sup>, visine 76 cm teži na 0° C 13,5951 · 76 = 1033,23 g i proizvodi pritisak od 1033,23 g · cm<sup>-2</sup> = 1,01325 · 10<sup>6</sup> dina · cm<sup>-2</sup>. Ovaj pritisak se zove 1 atmosfera (at). Vazdušni pritisak se često daje



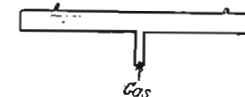
Sl. 83. Merenje atmosferskog pritiska po Torricelli-ju.

odgovarajućom visinom živinog stuba u cm ili mm. Pritisak od 1 din · cm<sup>-2</sup> zove se 1 bar. 10<sup>6</sup> bara zove se 1 megabar. U meteorologiji se umesto ranije upotrebljene jedinice 1 mm Hg upotrebljava i pomenuta jedinica

megabar, ali se označava kao 1 bar, i vazdušni se pritisak daje u jedinicama milibarima (mb). 1 mb = 10<sup>-3</sup> bar = 10<sup>3</sup> din · cm<sup>-2</sup>. 1000 mb iznose skoro tačno 75 cm Hg.

U smeši više gasova važi jed. (26) za svaki od tih gasova posebno uz ev.  $p$  i  $p_0$  su tada parcijalni pritisci. Prema tome u mešavini gasova koja je u ravnoteži, menja se odnos sastavnih delova mešavine, usled različitih molekularnih težina. Zemljina atmosfera je gasna smeša. Ona sadrži u zapreminskim procentima 78% azota, 21% kiseonika i 1% argona, pored tragova drugih gasova. Ali ona nije u ravnoteži. Usled vertikalnih strujanja u vazduhu njeni sastavni delovi se stalno mešaju, tako da je odnos mešavine uvek isti i na vrlo velikim visinama.

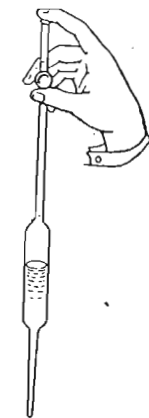
Još je Otto Guericke sredinom 17 veka, pošto je pronašao šmrk za razređivanje vazduha, izveo čitav niz lepih ogleda sa vazdušnim pritiskom i izračunao je težinu zemljinog vazdušnog omotača. Naročito mu je poznat ogled sa Magdeburškim polukuglama koji je izveo 1654. To su dve velike polulopte od bakra koje tačno jedna na drugu naležu, gradeći loptu iz koje se može izvući vazduh. Spoljašnji vazdušni pritisak ih tada tako priljubljuje jednu uz drugu, da ih ni osam konja upregnutih sa obadve strane nisu mogli rastaviti.



Sl. 84. Behn-ova cev.

Specifična težina gasa za osvetljenje je mnogo manja od specifične težine vazduha. Zbog toga pritisak u cevima za gas opada sa visinom mnogo manje od pritiska u vazduhu. Iz toga razloga je razlika gasnog pritiska i vazduha na višim spratovima kuća veća nego u nižim, za razliku od pritiska vode koji sa visinom opada.

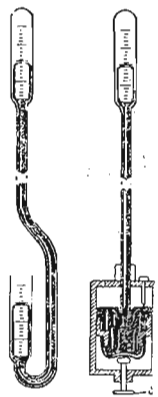
Vrlo osetljiv dokaz za promenu pritiska sa visinom pruža nam Behn-ova cev (sl. 84). U nju se pusti gas za osvetljenje, koji se tako reguliše da mu je pritisak na gornjim otvorima cevi vrlo malo veći od vazdušnog pritiska, kad je cev postavljena horizontalno. Kad zapalimo gas na tim otvorima, plameni su iste visine. Dovoljno je da se cev sasvim malo nagne, pa da se visina plamena znatno promeni. Plamen na gornjem otvoru postaje mnogo duži, što je dokaz da tamo postoji veća razlika u pritisku između gasa i vazduha nego na nižem kraju (opasnost od eksplozije; plamen ugasiti pre nego što se zatvori slavina za gas!).



Sl. 85. Pipeta ili prava natega.

Na dejstvu vazdušnog pritiska zasnovana je i pipeta (sl. 85). Kad se ona potopi u tečnost i zatvori gore prstom, pri izdizanju isprva iscuri iz nje nešto malo tečnosti. Usled toga se u pipeti vazduh raširi i njegov pri-

tlisak spadne toliko da zajedno sa pritiskom tečnosti u pipeti drži ravnotežu spoljašnjem pritisku vazduha na donjem otvoru. Spoljašnji pritisak drži tada tečnost u pipeti. Ako tečnost ne kvasi zidove pipete, onda vazduh duž zidova struji u pipetu i tečnost iscuri. Torricelli-ev ogled bi se mogao izvesti i bez šireg suda kad bi živa kvasila staklo.



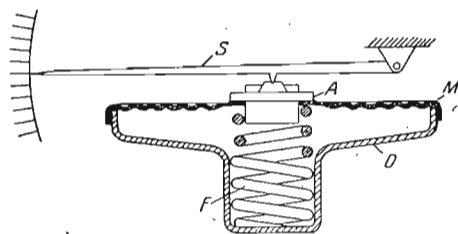
Sl. 86. Barometri sa živom.

Sprave za merenje vazdušnog pritiska zovu se barometri. Najčešće se upotrebljavaju barometri sa živom (sl. 86), koji tačno odgovaraju Torricelli-evom ogledu. Pri čitanju visine živinog stuba potrebno je vršiti izvesne korekcije, jer se prvo sa temperaturom menja specifična težina žive, a sa njom i dužina stuba, drugo, menja se takođe i dužina skale na kojoj se čita visina stuba. Živa je naročito pogodna za punjenje barometarskih cevi zbog svoje velike specifične težine i malog napona pare. I druge tečnosti mogu se uzeti, samo su tada dužine stubova znatno veće. Barometarska cev napunjena vodom imala bi dužinu oko 10 m.

Za manje tačna merenja atmosferskog pritiska služe tzv. aneroidi (sl. 87).

Metalna kutija  $D$  hermetički je zatvorena metalnom membranom  $M$  koja se savija pri promeni spoljašnjeg pritiska. Njeno pomeranje preko sistema poluga se prenosi na kazaljku  $S$ .

§ 92. Tehnika vakuuma. Za merenje gasnih pritisaka ispod 76 cm Hg pa do 0,1 cm, upotrebljavaju se manometri sa živom, koji se spoje sa prostorom u kome se meri pritisak.

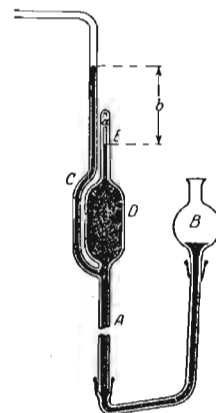


Sl. 87. Barometar aneroid  $D$  metalna kutija,  $F$  opruga,  $M$  metalna membrana,  $A$  ležište,  $S$  kazaljka.

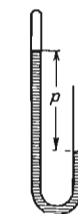
Slika 88 pokazuje takav jedan skraćeni manometar za male pritiske koji je preko desnog kraka u vezi sa sudom u kome se nalazi gas. Za pritiske manje od 0,1 cm Hg, najčešće se uzima MacLeod-ov manometar. On je preko cevi  $C$  spojen sa prostorom u kome se nalazi gas (sl. 89). Prvo se spusti rezervoar sa živom  $B$ , koji je crevom od gume spojen sa cevi  $A$  dužom oko 80 cm, dotle dok živa ne spadne ispod mesta odakle se cev  $C$  odvaja (račva) od cevi  $A$ . Tada u sudu  $D$  vlada isti pritisak kao i u prostoru za merenje. Tada se rezervoar  $B$  diže, gas se u sudu  $D$  zatvori i komprimuje na  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$  ili  $\frac{1}{10000}$  deo svoje zapremine. Pri tome njegov pritisak isto toliko poraste i može se sada neposredno pročitati kao razlika visina žive u cevima  $E$  i  $C$ . Cev  $E$  je kalibrisana, a takođe je poznata i zapremina suda  $D$ .

Primenom Boyl-Mariote-ovog zakona  $pv = \text{const.}$  može se izračunati pritisak gasa. Vrlo mali pritisci mogu se takođe izmeriti npr. iz amortizovanja oscilacija kvarcnog konca u gasu ili toplotne provodljivosti gasa.

Da se iz nekog prostora potpuno izvuče gas, tj. da se u prostoru uspostavi vakuum, praktično je to nemoguće postići. Pod vakuumom se podrazumeva u fizičarskoj terminologiji prostor u kome je pritisak mnogo manji od atmosferskog pritiska. Govori se o visokom vakuumu kad je pritisak reda veličine  $10^{-6}$  do  $10^{-7}$  cm Hg. Moguće je postići pritiske manje od  $10^{-11}$  cm Hg. Može se lako videti da se u prostoru sa tim pritiskom za svaki  $\text{cm}^3$  nalazi još uvek ogroman broj molekula.



Sl. 89. MacLeod-ov manometar.

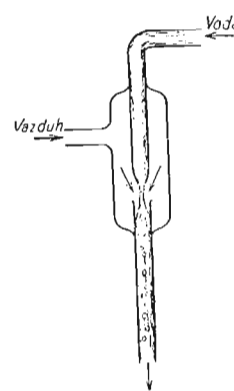


Sl. 88. Skraćeni živin manometar za merenje manjih pritisaka.

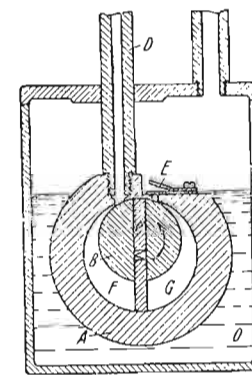
Za razređivanje gasova služe različiti šmrkovi (pumpe). Njihovom usavršavanju savremena fizika ima da zablagodari za dobar deo svoга napretka. Šmrkovi za visok vakuum ne mogu da rade počev od atmosferskog pritiska, već od nekog manjeg i zato oni rade sa drugim pumpama, koje stvaraju predvakuum (prethodno razređenje). Od ogromnog broja šmrkova različ

itih konstrukcija pomenućemo samo neke.

Za predvakuum je vrlo pogodan Bunsen-ov šmrk sa vodom (sl. 90). Iz vodovoda struji voda pod pritiskom kroz cev koja se dole konično sužava i prelazi zatim u širu cev iz koje ističe. Usled suženja mlaza voda tu ima veliku brzinu i stvara se manji pritisak (vidi dalje Bernoulli-evu jednačinu), pa se gas iz suda za koji je šmrk vezan izbacuje. Pritisak koji se postiže ovim šmrkom, ne može biti manji od napona zasićene vodene pare, koji na sobnoj temperaturi iznosi između 1 i 2 cm Hg.



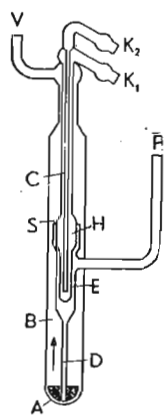
Sl. 90. Šmrk sa vodom po Bunsen-u.



Sl. 91. Gaede-ov šmrk.

Znatno niži pritisak od oko 0,02 cm Hg postiže se Gaede-ovim šmrkom (sl. 91). On radi na istom principu kao i stare pumpe sa klipom. Prostor u kome se nalazi gas

koji treba razrediti, veštački se povećava i time pritisak gasa smanjuje. Tada se jedan deo prostora odvoji od recipijenta sa gasom i isprazni. U metalnom cilindru *A* ekscentrično je namešten drugi cilindar *B* koji se obrće velikom brzinom. Ovaj ima dve lopatice koje opruga pritiskuje hermetički uz zidove cilindra *A*, tako da je unutrašnjost cilindra podeljena na dva dela *F* i *G*. *E* je ventil u vezi sa spoljašnjim vazduhom. Recipijent koji se prazni vezan je za *D*. Ako se cilindar *B* obrće u smislu strelice, onda se prostor *F* koji stoji u vezi sa gasom povećava, dok ga lopatica *C* ne odvoji od *D*. U prostoru *G* gas se sabija i kroz ventil *E* izbacuje iz pumpe.



Sl. 92. Živin difuzioni šmrk.

Dosta niski pritisci postizu se šmrkom koji radi pomoću mlaza živine pare po istom principu kao i Bunsen-ov šmrk. Na mesto vode ovde struji živina para, koju daje ključala živa. Para se, pošto povuče za sobom gas u predvakuu, pomoću hladne vode kondenzuje i odlazi u sud u kome ključa. Za predvakuu se upotrebljava jedna od opisanih pumpi.

Za dobijanje visokog vakuuma se na prvom mestu uzimaju difuzne živine pumpe (sl. 92). Gas koji treba da se odstrani, difunduje u živinu paru koja gas odvodi u predvakuu. Naročitim hlađenjem se sprečava da živina para ne dospe u prostor koji treba evakuisati i da se živina para u predvakuu ponovno kondenzuje, odakle ponovo dospeva u sud za zagrevanje. Kod modela na slici sud u kome treba razrediti gas vezan je za *F*. Cev *V* je u vezi sa jednim većim sudom u kome se održava predvakuu. Živina para se penje u pravcu strelice i povlači za sobom gas koji iz *F* izlazi na diafragmu *S*. Na hladnjaku *C* se para kondenzuje, a isto tako i para koja bi ušla kroz diafragmu kod *H*. Tečna živa klizi niz zidove hladnjaka kroz koji cirkuliše hladna voda i kroz cev *D* dospeva u sud za zagrevanje.

Najniži pritisci dobijaju se na taj način što se iz visokog vakuuma dobijenog pomoću šmrkova odstrane putem apsorpcije, u naročitim vrstama uglja, gasni ostaci. Radi toga se uglj koji apsorbuje hladi tečnim vazduhom, ali za najniže pritiske tečnim vodonikom odnosno heliumom.

## Strujanje tečnosti i gasova

§ 93. Opšte o strujanju tečnosti i gasova. Zakoni o strujanju tečnosti i gasova mogu se proučavati sa iste tačke gledišta ako su promene zapremine koje se javljaju tako male da se mogu zanemariti. Kod tečnosti je, usled njihove male stišljivosti, to uvek slučaj. Ako se kod gasova zanemare promene zapremine koje iznose manje od 1 %, onda npr. za atmosferski vazduh važe isti zakoni kao i za tečnosti, ukoliko brzina strujanja ne pre-

lazi 50 m u sec, a visinske razlike 100 m. Taj se slučaj najčešće javlja. Zato ćemo pod pojmom »tečnost« podrazumevati i gasove.

Nauka o strujanju tečnosti se zove hidrodinamika, primenjena na gasove aerodinamika. Kod jednodimenzijalnih problema, kao kod strujanja kroz cevi govori se o hidraulici. Mi ćemo se u sledećem zadržavati na slučaju stacionarnog strujanja, tj. posmatraćemo samo ona strujanja kod kojih se pravac i brzina delića na svakom čvrstom mestu u tečnosti (gasu) vremenski ne menjaju.

Pod linijama strujanja u nekoj tečnosti podrazumevamo linije koje svuda idu u pravcu strujanja na tom mestu. Linija strujanja pri stacionarnom toku je slika putanje pokretnog delića tečnosti. Linije strujanja koje prolaze kroz sve tačke površine male zatvorene krive, grade cevi strujanja. Tečnost koja se kreće kroz cev strujanja zove se vlakno strujanja. Pošto iz jedne cevi strujanja bočno nigde ne ističe tečnost, niti se gde stalno nagomilava, to u jedinici vremena kroz svaki presek cevi strujanja protiče ista količina tečnosti (uslov kontinuiteta).

Cev strujanja ne može nigde u prostoru, ispunjenom stacionarnim strujanjem, imati ni kraja ni početka. Ona ili počinje negde na granici tečnosti i ide do nekog drugog graničnog mesta, ili je u sebi zatvorena i gradi vrtlog. Prema tome se razlikuju bezvrtložna polja strujanja i vrtložna polja.

Količina tečnosti koja protiče u jedinici vremena kroz svaki presek  $q$ , srazmerna je tome preseku i brzini tečnosti  $v$  u njemu. Prema uslovu o kontinuitetu u jednoj cevi strujanja je

$$qv = \text{const.} \quad (1)$$

To odgovara činjenici da tečnost najbrže teče na najužim mestima u cevi.

U svima tečnostima postoji unutarne trenje, koje više ili manje utiče na strujanje. U mnogim slučajevima je ovaj uticaj mali tako da se može zanemariti. Tečnosti kod kojih se mora voditi računa o unutarnjem trenju zovu se viskozne. Prvo ćemo posmatrati tečnosti kod kojih zanemarujemo unutarne trenje.

§ 94. Bernoulli-eva jednačina. Posmatraćemo element cevi strujanja vrlo male dužine  $\Delta s$ . Njegov poprečan presek na mestu ulaska tečnosti neka bude  $q$ , a na mestu izlaska  $q'$ . Ova dva preseka se vrlo malo razlikuju. Cev sa vertikalom gradi ugao  $\alpha$ . Neka je  $h$  visina merena od proizvoljne horizontalne ravni; visinska razlika između  $q$  i  $q'$  iznosi  $\Delta h$ . U  $q$  vlada hidrostatički pritisak  $p$ , u  $q'$  pritisak  $p'$  koji se vrlo malo razlikuje od  $p$ . Neka je gustina tečnosti  $\rho$ , pa prema tome masa elementa  $\Delta m = \rho q \Delta s$ . Na masu  $\Delta m$  deluje u pravcu  $s$  usled različitih pritisaka, sila  $pq - p'q'$  dalje komponenta —  $\Delta mg \cos \alpha$  zemljine težee, ili, usled toga što je  $\cos \alpha = \Delta h / \Delta s = dh / ds$  sila —  $\Delta mg dh / ds$ . Pošto se  $p'q'$  vrlo malo razlikuje od  $pq$



to prema Taylor-ovom obrascu možemo napisati  $p'q' = pq + \Delta s d(pq)/ds$ . Ukupna sila koja deluje na masu  $\Delta m$  iznosi  $\Delta m dv/dt$  ( $v$  = brzina strujanja). Može se dakle napisati naposljetku:

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = -\Delta s \frac{d(pq)}{ds} - \Delta mg \frac{dh}{ds}$$

Ako još stavimo  $dv/dt = dv/ds \cdot ds/dt = v dv/ds$  i pomnožimo sa  $ds$  dobićemo

$$\Delta m \cdot v dv + \Delta s \cdot d(pq) + \Delta m \cdot g dh = 0$$

Integracijom ove jednačine se dobija

$$\frac{1}{2} \Delta m v^2 + \Delta s p q + \Delta m g h = const.$$

ili deleći sa  $\Delta s \cdot q = \Delta m / \rho$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = const. \quad (2)$$

Ovo je Bernoulli-eva jednačina (1738) koja daje uzajamni odnos između brzine pritiska i visine u jednoj tečnosti.

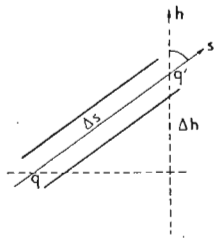
Ako podelimo jednačinu (2) još sa  $\rho g$  dobićemo

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = const. \quad (3)$$

Sva tri člana ove jednačine imaju dimenzije dužine (visine). Član  $v^2/2g$  zove se visina brzine. Ona je jednaka visini sa koje bi tečnost trebala slobodno da pada pa da dobije brzinu  $v$ .  $p/\rho g$  zove se visina pritiska, jer je jednaka visini tečnog stuba u miru koji vrši hidrostatički pritisak  $p$ .  $h$  se zove visina mesta. Prema tome zbir ove tri brzine u unutrašnjosti tečnosti duž jednog vlakna strujanja je konstantan. Za  $v=0$  jed. (2) i (3) postaju identične sa stavom o hidrostatičkom pritisku.

Bernoulli-eva jednačina pored ostalog igra važnu ulogu u svima slučajevima kad se na putu strujanja gasa ili tečnosti nalazi neka čvrsta prepreka, koja na makoji način utiče na strujanje. Za sile strujanja koje se tom prilikom javljaju sasvim je svejedno da li prepreka miruje u struji tečnosti ili se pokreće kroz mirnu sredinu. Teorija dečjeg zmaja koji lebdi u vazdušnoj struji i aviona koji se kreće kroz vazduh u suštini je ista. Ogleđi na modelima pri konstrukciji aviona, vrše se najčešće sa modelima u miru u vazdušnoj struji. Prilikom izrade lađa modela se kreću u kanalima gde voda miruje.

Ako se u struji tečnosti nalazi prepreka nju tečnost zaobilazi i usporava svoje kretanje na čelu prepreke. Tamo gde se tečnost deli na obe strane u tački usporenja  $S$ , brzina strujanja je jednaka nuli (sl. 94). Neka su brzine strujanja i pritiska u tečnosti u nivou tačke usporenja (ista visina mesta), a na većem rasto-



Sl. 93. Uz izvođenje Bernoulli-eve jednačine.

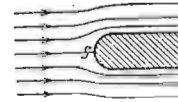
janju od prepreke  $v_0$  i  $p_0$  i neka je pritisak u tački usporenja  $p$ . Tada izlazi iz jednačine (2)

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p \text{ ili } p - p_0 = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \quad (4)$$

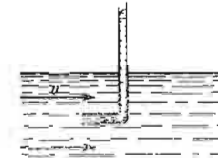
Veličina  $p - p_0$  zove se pritisak usporenja ili hidrodinamički pritisak. Ukupan pritisak  $p$  tečnosti u tački usporenja može se pretstaviti kao zbir hidrostatičkog pritiska  $p_0$  i hidrodinamičkog pritiska  $\rho v_0^2/2$ . Jednačina (4) pruža mogućnost da se odrede brzine u ma kojima tačkama toka npr. neke reke, iz vrednosti  $p_0$  i  $p$ . Pritisak usporenja

može se odrediti pomoću Pitot-ove cevi (sl. 95).

U najprostijem slučaju to je jedna savijena cev, okrenuta na suprot strujanja tečnosti, pa deluje kao prepreka. Voda se penje u cev preko spoljašnjeg nivoa tečnosti za izvesnu visinu



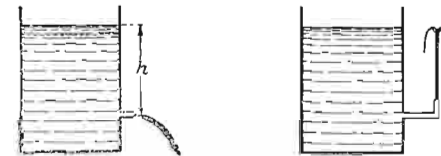
Sl. 94. Uz pritisak usporenja.



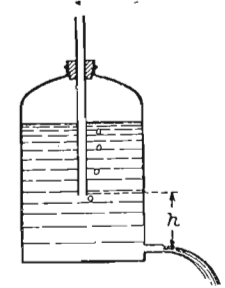
Sl. 95. Pitot-ova cev.

koja odgovara pritisku usporenja. Prandtl je dao kombinovanu cev koja omogućava istovremeno merenje  $p_0$  i  $p$ .

Uzećemo još nekoliko primera za primenu Bernoulli-eve jednačine. Sud na sl. 96a napunjen je tečnošću gustine  $\rho$  i na  $h$  cm ispod površine tečnosti nalazi se otvor kroz koji tečnost ističe. Na gornjoj površini tečnosti, kao i na otvoru, je isti atmosferski pritisak  $p = p_b$ . Visina mesta otvora



Sl. 96. Uz Torricelli-ovu teoremu.



Sl. 97. Mariott-ova flaša.

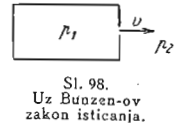
neka bude  $x=0$ , pa je prema tome visina mesta gornje površine tečnosti  $x=h$ . Ako je sud dosta širok, onda će tečnost za vreme isticanja u njemu vrlo sporo da opada, pa možemo staviti da je brzina kretanja vode u sudu  $v=0$ . Tada izlazi iz jednačine (3)

$$\frac{p_b}{\rho g} + h = \frac{p_b}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \text{ ili } v = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

To je Torricelli-eva teorema (1646, za koju je znao još Heron iz Aleksandrije u II veku). Brzina isticanja je tako velika kao da tečnost slobodno

pada sa visine  $h$ . Pri isticanju tečnost može da se popne do nivoa slobodne površine u sudu, dakle na visinu  $h$  (sl. 96b). Ustvari usled trenja i kapi koje padaju naniže, ne penje se tako visoko.

Stalna brzina isticanja tečnosti iz suda dobija se pomoću Mariotte-ove flaše (sl. 97). Kroz zapušač flaše provučena je cev otvorena na oba kraja i donji kraj joj se nalazi u tečnosti na  $h$  cm iznad otvora isticanja. Pritisak vazduha iznad tečnosti je manji od atmosferskog pritiska za hidrostatički pritisak  $h$ . Pri isticanju, vazduh u mehurima ulazi kroz cev. Kad se jednačina (3) primeni na nivo donjeg kraja cevi i na otvor za isticanje, dobije se ponovo jednačina (5), gde  $h$  ima sad drugo značenje. Usled toga što je  $h$  nepromenljivo, ne menja se ni  $v$ .



Sl. 98.  
Uz Buzzen-ov zakon isticanja.

U sudu sa malim otvorom, nalazi se neki gas pod pritiskom  $p_1$ . Van suda vlada manji pritisak  $p_2$ . U sudu se gas ne kreće, a kroz otvor struji brzinom  $v$  (sl. 98). Kod horizontalnog isticanja visina mesta ne dolazi u obzir. Iz jednačine (2) izlazi:

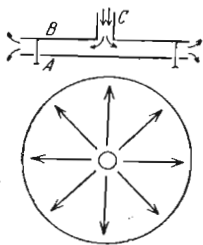
$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{i} \quad v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (6)$$

Pri istoj razlici pritiska  $p_1 - p_2$  je dakle brzina isticanja različitih gasova obrnuto srazmerna kvadratnom korenu iz njihove gustine. Na ovom je zasnovana Bunsen-ova metoda za određivanje gustine gasova.

Ako su razlike visina mesta isticanja tako male da se mogu zanemariti, onda jednačina (2) dobija prostiji oblik

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{const.} \quad (7)$$

Iz ove jednačine izlazi, da je pritisak u tečnosti manji ukoliko je veća njena brzina isticanja. U horizontalnoj cevi je na užim mestima dakle pritisak manji, nego na širim. Na ovoj činjenici zasnovani su pulverizatori, koji razbijaju tečnost u fine kapi. Ispred uskog otvora kroz koji struji vazduh stoji upravno cev, donjim krajem potopljena u tečnost, koja takođe ima mali otvor na gornjem kraju. Usled toga što struja vazduha obilazi oko ovoga otvora, njena je brzina veća oko cevi no dalje od nje, gde vlada atmosferski pritisak, pa je i pritisak oko cevi manji od atmosferskog. Usled toga se tečnost penje i izlazi kroz cev, pa je struja vazduha zahvati i pretvara u vrlo sitne kapi.



Sl. 99. Dokaz hidrodinamičkog pritiska u struji vazduha.

I Bunsen-ov šmrk sa vodom je zasnovan na primeni jednačine (7). Ovim se takođe objašnjava da dimnjaci bolje vuku pri stalnom vetru, nego kad je vazduh miran.

Na ploču  $B$  nameštena je cev  $C$ , a paralelno sa  $B$  na malom rastojanju nalazi se druga ploča  $A$  (sl. 99). Ako se duva kroz cev, ploča  $A$  se ne

udaljuje, već se priljubljuje uz ploču  $B$  (aerodinamički paradoks). Na ivicama ploče vlada atmosferski pritisak, a isto tako i na njihovim spoljašnjim površinama. Pošto je presek vazdušne struje u sredini ploče manji nego na ivicama, to brzina strujanja opada počev od sredine ka ivicama, pa je pritisak između ploča manji od spoljašnjeg. Ova razlika pritiska diže ploču  $A$ . U momentu kad se ploče dodirnu, vazdušni mlaz se prekida, ploča  $A$  pada i to se stalno ponavlja. Ploča  $A$  se periodično diže i spušta. Razdaljina između ploča pri ovom ogledu ne sme biti velika, jer bi tada razlika u pritisacima bila neznatna.

Napravi se kupa od hartije (fišek) sa zatvorenim vrhom tako da tačno, ali bez trenja ulazi u jedan levak. Kad se duva kroz cev levka, hartija se priljubljuje uz njegove zidove. Objašnjenje je isto kao na sl. 99.

Bernoulli-evom jednačinom objašnjava se i Magnus-ov efekat (1810). Njegovu tačnu teoriju, koja uzima u obzir i trenje, ovde ne možemo izlagati, već ćemo se zadržati samo na onome što je osnovno kod ove pojave. Ako se u struji tečnosti nalazi cilindar koji se obrće, a čija osa stoji upravno na pravac strujanja, na njega će delovati sila koja je istovremeno upravna i na osu cilindra i na pravac strujanja. Sl. 100 pokazuje snimak ogleđa izvršenog sa modelom u vodi koja se kreće. Vidi se da su linije strujanja desno gore zbijenije, tako da s desne strane voda brže struji nego s leve. To dolazi usled obrtanja cilindra. Usled toga je i pritisak s desne strane manji nego sa leve (jed. 7) i cilindar se kreće nadesno. Ovaj efekat se iskorišćava kod tzv. Flettner-ovih rotora za kretanje lađa. Cilindar koji se obrće pri vetru podložan je Magnus-ovom efektu i deluje kao jedro.

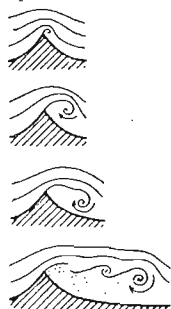


Sl. 100. Strujanje oko rotirajućeg cilindra.

Magnus-ov efekat se javlja i u balistici. Projektili izbačeni iz izolucenih oruđa imaju i veliku brzinu rotacije, pa pri kretanju kroz vazduh skreću ustranu. Teniske lopte koje se tako udare, da se pri kretanju kroz vazduh i brzo obrću, opisuju krive putanje.

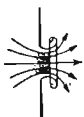
§ 95. Vrtlozi. Ako dve struje različitih brzina dođu u dodir tako da dalje teku paralelno, onda istina na obema stranama površine koja ih razdvaja postoji isti pritisak, ali kako postoji prekid u brzinama, to je ovp stanje nepostojano i na njega se ne može da primeni jed. (2). Tom prilikom se stvaraju vrtlozi duž površine koja razdvaja struje i koji se kreću sa strujom. Ovi vrtlozi se obrću (rotiraju), i to na strani gde je brzina veća, u smislu strujanja, a na strani sa manjom brzinom u suprotnom smislu.

Vrtlozi se mogu javljati na oštrim ivicama, smetnjama i slično. Na sl. 101 pokazano je postepeno stvaranje vrtloga na oštroj ivici. Iza ivice (u zalivu) stoji mirna voda, koja je od struje odvojena slojem vrtloga.



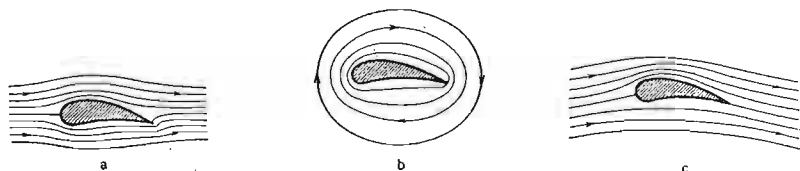
Sl. 101. Stvaranje vrtložnog sistema na oštroj ivici.

Valja zapaziti da svako obrtno kretanje tečnosti nije uvek vrtložno. Ako se tečnost obrće kao celina oko neke ose, ili kad protiče kroz kružno zatvorenu cev, to nije vrtložno kretanje. Kod ovog poslednjeg svaki delić tečnosti u vrtlogu se obrće oko svoje sopstvene osovine.



Sl. 102. Stvaranje vrtloga na otvoru za isticanje.

§ 96. **Strujanje oko površina.** Ovo je tehnički vrlo važan problem, koji ćemo dati samo u glavnim crtama. Ako se noseće površine jednog aviona kreću kroz vazduh, ili ako vazduh struji oko nepokretnih površina kao što je to udešeno kod ogleđa sa modelima, onda oko nosećih površina nastaje strujanje za koje se može smatrati da postaje slaganjem jednog tzv. čistog potencijalnog strujanja (sl. 103a) i cirkulacije vazduha (sl. 103b). To rezultujuće strujanje pretstavljeno je na sl. 103c. U njemu su linije strujanja iznad noseće površine zbijene, a ispod površine su mnogo ređe, pa je zbog toga pritisak vazduha ispod krila veći od pritiska iznad krila



Sl. 103. a) Potencijalno strujanje, b) cirkulacija, c) kombinovano strujanje.

(jed. 2). Na krila dejstvuje stoga sila odozdo naviše, koja se u ovom slučaju može zvati potisak, i koja omogućava let aviona. Ovim se objašnjava i

penjanje zmaja, a takođe i dejstvo — pokretna snaga — propelera na lađama i avionima, i dejstvo jedra i krme na lađi itd.

§ 97. **Viskozne tečnosti. Unutarnje trenje.** Kao što je ranije rečeno, ne postoje ni tečnosti, ni gasovi u kojima nema trenja. Tečnosti i gasovi su u većoj ili manjoj meri viskozni i usled toga se u njima pri kretanju javlja unutarnje trenje (Njutn 1687). Unutarnje trenje se ispoljava na taj način, što pri strujanju tečnosti i gasova, normalno na njihov pravac kretanja, postoji pad brzine. Susedne cevi strujanja imaju različite brzine, između njih dejstvuje sila koja teži da brže slojeve tečnosti uspori, a sporije ubrza. Dakle teži da izjednači brzine kretanja. Ova sila je srazmerna prvo dodirnoj površini cevi strujanja. Ona je zatim utoliko veća ukoliko se više menja brzina računajući normalno na pravac strujanja. Ako koordinatu u tome pravcu obeležimo sa  $x$ , onda je pad brzine jednak  $\frac{dv}{dx}$ . Između dva sloja koja se dodiruju postoji znači sila

$$k = \eta F \frac{dv}{dx} \quad (8)$$

$\eta$  je karakteristična konstanta za svaku tečnost ili gas i zove se koeficijent unutarnjeg trenja ili viskoznosti. Jedinica za koeficijent unutarnjeg trenja je 1 po a z (Poise) = 1 din cm<sup>-2</sup> sec. Odnos  $\eta/\rho$  (koeficijent viskoznosti/gustina) zove se kinematička viskoznost. U vezi sa viskoznošću stoji i lepljivost, koja pored toga zavisi još i od površinskog napona.

Kod gasova se suština unutarnjeg trenja može razumeti u svima pojedinostima na osnovu kinetičke teorije. Trenje kod gasova je nešto sasvim drugo nego trenje kod čvrstih tela, njima je samo ime zajedničko. U mirnome gasu na istoj temperaturi u svima delovima, svi molekuli prosečno imaju istu brzinu i brzine su ravnomerno raspoređene u svima pravcima. Kod gasa koji struji brzinom  $v$  pored te brzine upravljene u jednom pravcu, dolazi u obzir i kretanje molekula (termičko kretanje). Molekuli znači imaju izvestan dodatak brzine u pravcu strujanja. Usled termičkog kretanja, molekuli stalno prelaze iz jedne cevi strujanja u drugu, iz cevi sa većom brzinom u onu sa manjom i obrnuto. Na ovaj se način prenosi količina kretanja jedne cevi na drugu, usled čega bi se sve razlike brzina u gasu koji struji postepeno izjednačile, ako se spolja ne postaramo da se održi prvobitno stanje. Prelaz količine kretanja jednog molekula na neku cev strujanja je okončan, kad se taj molekul sudari sa jednim molekulom u toj cevi. Prvi molekul dolazi sa mesta koje je od cevi strujanja udaljeno za srednju dužinu slobodnog puta. Ukoliko je ova dužina veća, utoliko je veća i razlika u brzinama. Neka je na mestu odakle molekul polazi brzina strujanja  $v$ , a na daljini  $\lambda$  slobodne dužine puta  $v'$ . Onda je

$$v - v' = \lambda dv/dx.$$

Svakoj promeni količine kretanja odgovara izvesna sila, pa stoga u gasu koji struji, između cevi strujanja postoje sile koje dejstvuju ubrzavajući ili usporavajući. Sile su takođe srazmerne sa  $\lambda dv/dx$ . Prema jed. (8) vidi se da unutarnje trenje gasa  $\eta$  mora takođe biti srazmerno dužini puta  $\lambda$ . Ako je  $n$  broj molekula u  $1 \text{ cm}^3$ ,  $\mu$  masa jednog molekula,  $\rho = n \mu$  gustina gasa,  $\bar{v}$  srednja (termička) brzina gasnih molekula, onda se po kinetičkoj teoriji iznalazi da je

$$\eta = \frac{1}{3} n \mu \bar{v} \lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad (9)$$

Ova jednačina pruža najbolje sredstvo za određivanje slobodne dužine puta. Pošto je, kao što smo videli, dužina puta  $\lambda$  obrnuto srazmerna gustini, to je unutarnje trenje nezavisno od gustine gasa. S druge strane kako je  $\eta$  srazmerno sa srednjom brzinom molekula koja je opet srazmerna kvadratnom korenu iz apsolutne temperature, to je i  $\eta$  takođe srazmerno  $\sqrt{T}$ .

Unutarnje trenje kod tečnosti se javlja iz sasvim drugih uzroka. Ono stoji u vezi sa vrlo malim silama smicanja, koje postoje i kod tečnosti kao i kod čvrstih tela, ali u tečnostima traju vrlo kratko vreme. Unutarnje trenje kod tečnosti opada kad temperatura raste. (Sравни ponašanje ulja za podmazivanje na različitim temperaturama. Letnje i zimsko ulje za motorna vozila.)

Među pojavama kod kojih viskoznost igra važnu ulogu, naročito je važno strujanje tečnosti kroz uske cevi. Mi ćemo posmatrati strujanje u cilindričnoj cevi poluprečnika  $r$  i u ovoj jedno aksialno cilindrično vlakno strujanja poluprečnika  $x$  (sl. 104). Neka je na početku cevi uspostavljen  $p_1$  a na kraju pritisak  $p_2$  ( $p_1 > p_2$ ). Na vlakno strujanja dejstvuje tad sila  $(p_1 - p_2) \pi x^2$ . Prema jed. (8) na omotač čija je površina  $F = 2\pi x l$  dejstvuje sila  $\eta 2\pi x l dv/dx$ . Pri stacionarnom strujanju, kad poluprečnik cevi ostaje nepromenjen, nema ubrzanja tečnosti, pa stoga zbir ovih sila mora biti jednak nuli.



Sl. 104. Izvođenje Poiseuille-ovog zakona.

$$(p_1 - p_2) \pi x^2 + \eta 2 \pi x l \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{dv}{dx} = - \frac{p_1 - p_2}{2 \eta l} x$$

Prilikom integracije ove jednačine treba voditi računa o tome da je sloj tečnosti uz zid cevi nepokretan, jer uz nju prianja, i da mu je  $v = 0$ . Tada izlazi

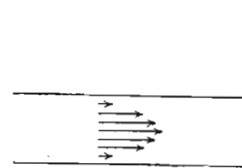
$$v = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (r^2 - x^2) \text{ cm sec}^{-1} \quad (9)$$

Daljom integracijom se nalazi da za vreme  $dt$  kroz svaki presek cevi proteče zapremina tečnosti

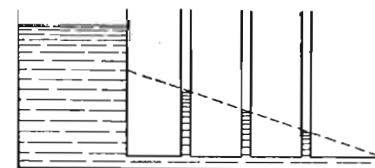
$$dV = \frac{\pi r^4}{8 \eta l} (p_1 - p_2) dt \text{ cm}^3 \quad (10)$$

Ovo je Poiseuille-ev zakon.

Raspored brzina u uskoj cevi pretstavljen je na sl. 105. Brzina raste idući ka sredini cevi. Ali gornja jednačina važi samo za uske, a ne i za



Sl. 105. Strujanje tečnosti kroz usku cev. Strelice označavaju brzine strujanja.



Sl. 106. Pad pritiska u cevi.

široke cevi. Jednačina (10) pokazuje da je količina tečnosti koja protiče kroz cev u toku jedne sekunde srazmerna pritisku koji vlada duž cevi. Pad pritiska je pretstavljen na sl. 106.

Poiseuille-ev zakon važi uz pretpostavku da imamo tzv. l a m i n a r n o strujanje (u slojevima) koje ustvari i postoji, ako brzina strujanja i prečnik cevi nisu veliki. U protivnom slučaju se u cevi stvaraju v r t l o z i i l a m i n a r n o isticanje prelazi u t u r b u l e n t n o. Za turbulentno isticanje gornja razmatranja ne važe. Otpor u cevi pri takom strujanju poraste, pa je količina protekle tečnosti u 1 sec. srazmerna približno kvadratnom korenu iz  $p_1 - p_2$ .

§ 98. **Stockes-ov zakon.** Svako telo koje se kreće kroz tečnost ili gas, nailazi na izvesnu silu otpora sredine. Ovaj otpor ne dolazi kao posledica neposrednog trenja između sredine i tela. Sloj koji direktno naleže na telo, prianja uz njegovu površinu, i otpor koji se javlja dolazi ustvari od unutarnjeg trenja okolne sredine. Otpor zavisi ne samo od vrste sredine, već i od brzine i oblika tela. Za loptu poluprečnika  $r$  koja se kreće brzinom  $v$  u tečnosti ili gasu viskoznosti  $\eta$ , važi uz izvesne uslove S t o c k e s - o v zakon koji daje silu otpora.

$$k = 6 \pi \eta r v \quad (11)$$

Uopšte može se staviti, da je šila pri srednjim brzinama

$$k = \alpha v \quad (12)$$

gde je  $\alpha$  veličina koja zavisi od vrste tečnosti ili gasa i od oblika tela. Kad telo pada kroz neku sredinu, onda u početku sila teže smanjena za silu potiska  $k$  izaziva izvesno ubrzanje, dakle povećanje brzine padanja. Usled toga i otpor trenja poraste. Brzo se uspostavlja ravnoteža pri kojoj

otpor sredine postaje jednak sili teže smanjenoj za veličinu potiska  $k' = mg - k_{\alpha}$ , i telo počinje da pada stalnom brzinom. Tada je

$$k = k' = \alpha v \text{ ili } v = \frac{k'}{\alpha}$$

Kod tela istog oblika npr. lopti, rastu težina  $mg$ , potisak  $k_{\alpha}$  i sila  $k'$  sa trećim stepenom poluprečnika lopte, a sila trenja sa prvim stepenom. Zato padaju manja tela znatno sporije od većih tela istog oblika i od iste supstance. Lebdenje vrlo sitnih delića (prašine, kapljice itd.) je primer lažnog padanja pod dejstvom tih sila.

## TRECI DEO

### Oscilacije i talasi. Zvuk

§ 99. **Oscilatorno kretanje.** Pod mehaničkim oscilacijama podrazumevamo periodsko kretanje nekog tela, ili jednog njegovog dela, oko ravnotežnog položaja u kome ga drži ma kakva sila. Ako se telo ili deo tela iz tog položaja izvedu, a sila teži da ih u taj položaj povрати, onda se u opštem slučaju vraćanje u ravnotežni položaj ne vrši neposredno, već telo osciluje, tj. naizmenično se kreće na jednu i na drugu stranu od onog mesta na kome se nalazilo u miru. Ako pri tome kretanju nema gubitaka energije, onda oscilovanje traje stalno (*ne amortizovane, neprigušene oscilacije*). Kad se pri tome kretanju troši energija, onda oscilacije gube od svoje jačine i naposljetku prestaju (*amortizovane, prigušene oscilacije*).

Postanak oscilatornog kretanja objašnjava se na sledeći način: Da se telo udalji iz ravnotežnog položaja potrebno je izvršiti rad i telo na taj način dobije potencijalnu energiju. Kad se telo pusti, onda mu se potencijalna energija pretvara u kinetičku. Kad telo dođe u svoj prvobitni ravnotežni položaj, sva potencijalna energija je prešla u kinetičku. Usled inercije telo sada ide dalje, kinetička energija mu se ponovo pretvara u potencijalnu i tako naizmenično, dok trenje ili drugi uzroci tu energiju ne utroše i ona se obično pretvara u toplotu. Ovakvu vrstu kretanja upoznali smo već kod klatna.

Najprostiji slučaj kretanja ove vrste imamo kod tzv. *harmoinskih* ili *sinusnih oscilacija*. Ako sa  $\xi$  obeležimo udaljenje tela ili jednog njegovog dela iz ravnotežnog položaja, onda se neamortizovana oscilacija može predstaviti jednačinom

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + a) \quad (1)$$

Udaljenje iz ravnotežnog položaja je periodska funkcija vremena  $t$ .  $\xi_0$  je najveće udaljenje iz ravnotežnog položaja i zove se *amplituda*.  $a$  je *fazna konstanta* oscilacije. Njena vrednost zavisi od toga, kako se izabere početna tačka za vreme  $t$ . Ona nema neki fizički značaj i može se

uvek izbaciti kad se početna tačka vremena pogodno izabere. Ako se izabere da je  $a = \pi/2$  onda je

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t$$

U jed. (1) umesto  $\sin$  može se staviti  $\cos$  jer je  $\sin \alpha = \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$

Da li se harmonisko kretanje označava sa  $\sin$  ili  $\cos$  za jednu oscilaciju je svejedno. Ali ako imamo više istovremenih oscilacija, onda se mora voditi računa o razlici njihovih faznih konstanti. Konstanta  $\omega$  zove se kružna frekvencija oscilacije. Slika (107a) pretstavlja kako zavisi  $\xi$  od vremena  $t$  prema jed. (1) kad je  $a = 0$ .

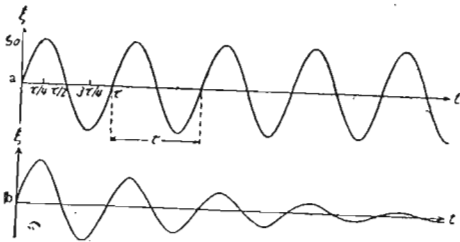
Kad se stavi  $\omega = 2\pi\nu$  ili  $\omega = 2\pi/\tau$ , onda je za  $a = 0$

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi\nu t = \xi_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad (2)$$

gde je

$$\tau = 1/\nu = 2\pi/\omega \quad (3)$$

Šta znači  $\tau$  vidi se iz činjenice, da  $\xi$  pređe po jedanput sve moguće vrednosti u svakom pravcu kad argument  $\sin 2\pi t/\tau$  poraste od  $2\pi \frac{t}{\tau}$  na  $2\pi \frac{t+\tau}{\tau} = 2\pi \frac{t}{\tau} + 2\pi$ , odnosno kad se vreme poveća od  $t$  na  $t + \tau$  (sl. 107 a). Po isteku vremena  $\tau$  ponavlja se isto kretanje. Za vreme  $\tau$  telo izvrši jednu punu oscilaciju i zato se zove vreme oscilovanja.



Sl. 107. a) Neamortizovana harmoniska oscilacija; b) amortizovana.

Broj  $\nu = \frac{1}{\tau}$  pretstavlja broj

oscilacija u 1 sec, i zove se takođe još frekvencija ili učestanost (ne mešati sa kružnom frekvencijom  $\omega$  koja je veća za faktor  $2\pi$ .) Za jedinicu broja oscilacija uzima se 1 Herc — skraćeno Hz. Broj oscilacija ili frekvencija je  $\nu$  herca, ako se izvrši  $\nu$  oscilacija u sekundi.

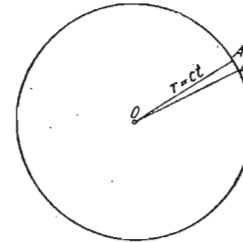
Većinom oscilacije nisu harmoniske, već su neka opštija periodska funkcija  $\xi = f(t)$ . Prema Fourier-u može se jedna takva funkcija svagda razviti u red

$$\xi = f(t) = A_1 \sin(\omega t + a_1) + A_2 \sin(2\omega t + a_2) + A_3 \sin(3\omega t + a_3) + \dots \quad (4)$$

Može se dakle ma kakva oscilacija pretstaviti kao zbir — u opštem slučaju beskrajno mnogo harmoniskih parcijalnih oscilacija od kojih za svaku pojedinačno važi jed. (1). Prva parcijalna oscilacija sa kružnom frekvencijom  $\omega$  zove se osnovna oscilacija, ostale parcijalne oscilacije sa kružnim frekvencijama  $2\omega, 3\omega$  itd. su gornje ili više oscilacije. Njihova frekvencija  $\nu_n = n\nu_1 = n\omega/2\pi$  je ceo multipl osnovne frekvencije  $\nu_1$ . U

većini praktičnih slučajeva, pošto amplituda gornjih oscilacija vrlo brzo opada sa njihovim rednim brojem  $n$ , iz gornjega reda se uzima samo mali broj članova.

§ 100. **Prostiranje poremećaja. Talasi.** Ako se neki delić mase u čvrstom, tečnom ili gasovitom telu trenutno udalji iz ravnotežnog položaja, onda je na tom mestu u telu poremećena elastična ravnoteža. Dok elastične sile teže da uspostave ravnotežu, prenosi se poremećaj pokrenutog delića na prve susedne deliće mase, pa i ovi izlaze iz ravnotežnog položaja. I oni utiču na svoje susedne deliće, pa se poremećaj prostire od centra poremećaja kroz telo. Ako se poremećaj desi samo jedanput, trenutno, onda se unutrašnja ravnoteža uspostavi prvo u centru poremećaja, pa onda od mesta do mesta dalje. Ali ako poremećaj u centru traje duže on postepeno obuhvati celo telo. Poremećaj se prostire kroz telo brzinom koja zavisi od osobine tela. Takav poremećaj koji se prostire u telu naziva se talas.



Sl. 108. Loptast talas.

U homogenim i izotropnim sredinama talas se iz centra poremećaja prostire u svima pravcima istom brzinom  $c$ . Ako je poremećaj potekao u vreme  $t = 0$  iz tačke  $r = 0$  onda je posle vremena  $t$  dospelo na površinu lopte sa poluprečnikom  $r = ct$  i gradi jedan loptast talas (sl. 108). Ako posmatramo vrlo mali deo loptastog talasa (OAB) (sl. 108), na velikom rastojanju od centra  $O$  možemo deo loptine površine  $AB$  približno smatrati za ravnu površinu. Talas sa ravnom površinom naziva se ravan talas. Iz loptastog talasa isečena vrlo uska kupa naziva se zrak ili snop zraka ova. Zrak se pretstavlja pravom; ovo se često javlja naročito u optici.

§ 101. **Periodski talas.** Naročito je važan slučaj kada se u jednoj tački sredine javlja periodski poremećaj, kada dakle to mesto pretstavlja polaznu tačku periodskog talasa. To se može desiti na taj način kad se na tom mestu nalazi telo koje osciluje, koje susedne deliće tela stavlja u periodsko kretanje. I delići osciluju tada sa frekvencijom  $\nu$  koju ima i telo. Neka je kružna frekvencija tela  $\omega$ . Ono znači osciluje prema jednačini  $\xi = \xi_0 \sin \omega t$ . Svaki delić u sredini osciluje prema jednačini

$$\eta = \eta_0 \sin(\omega t + a) \quad (5)$$

gde  $\eta_0$  označava njegovu amplitudu. Pošto je potrebno vreme  $r/c$  pa da poremećaj dospe od centra poremećaja na razdaljinu  $r$ , to u vremenu  $t$  na razdaljini  $r$  od centra vlada stanje koje odgovara stanju u centru u vreme  $t - r/c$  ( $c$  brzina prostiranja). Prema tome je fazna konstanta  $a$  iz poslednje jednačine jednaka  $-\omega r/c$  ako  $a$  u centru ( $r = 0$ ) ima vrednost nula. Tada je na razdaljini  $r$

$$\eta = \eta_0 \sin \omega (t - r/c) \quad (6)$$

Amplituda  $\eta_0$  zavisi kod loptastog talasa od rastojanja od centra. Kod ravnih talasa može se amplituda smatrati kao konstantna. Ako se u ravnom talasu nalaze dve tačke na rastojanju  $x$  jedna od druge u pravcu prostiranja talasa, onda je njihova f a z n a r a z l i k a  $\omega x/c$ .

Sve tačke u kojima se istovremeno javlja poremećaj koji dolazi iz centra, grade t a l a s n e p o v r š i n e. Talasne površine su kod loptastih talasa površine lopti, a kod ravnih talasa ravni.

§ 102. **Talasna dužina.** Posmatračemo ravan periodski talas. Neka je oscilovanje u tački  $x=0$  toga talasa dato jednačinom

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \quad (7)$$

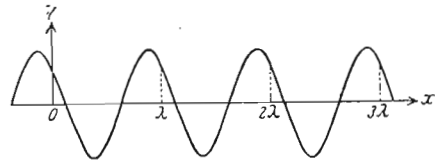
tada je prema jednačini (6) na razdaljini  $x$  (sl. 109)

$$\eta_1 = \eta_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (8)$$

$\eta_1$  i  $\eta_0$  su u istom vremenu  $t$  u opštem slučaju različiti. Oni su jednaki u svakom momentu samo ako je  $\sin \omega (t - x/c) = \sin \omega t$ , ili  $\omega (t - x/c) = \omega t \pm 2n\pi$ , gde je  $n$  ceo broj, dakle kad je

$$x = \pm n \frac{2\pi c}{\omega} = \pm n \frac{c}{\nu} = \pm n \lambda \quad (9)$$

Najbliža tačka u kojoj je ovo ispunjeno data je za  $n=1$  dakle  $x = c/\nu = \lambda$ .



Sl. 109. Uz definiciju talasne dužine.

$\lambda$  se zove talasna dužina. Tačke u kojima vlada isto stanje (tačke iste faze) nalaze se u pravcu prostiranja na razdaljinama od jedne, dve, tri itd. talasne dužine. Stoga je dakle

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \text{ ili } \lambda \nu = c \quad (10)$$

Talasna dužina zavisi dakle pri datome  $\nu$  od vrste sredine kroz koju se talas prostire, tj. od brzine prostiranja  $c$  u toj sredini.

§ 103. **Longitudinalni talasi.** Razlikujemo dve vrste talasa prema pravcu kretanja delića u odnosu na pravac prostiranja talasa. Kod l o n g i t u d i n a l n i h talasa kreću se delići levo i desno od ravnotežnog položaja u pravcu prostiranja talasa. Usled toga u sredini kroz koju talas prolazi, u izvesnim oblastima nastaje zgušnjavanje, a u drugim razređivanje sredine. Na mestima gde se vrši zgušnjavanje kreću se delići u pravcu prostiranja talasa, a gde nastupa širenje, kretanje se vrši u suprotnom smislu. Na prvim mestima postoji povećan, na poslednjim smanjen pritisak.

Da se izračuna brzina  $c$  kojom se prostire longitudinalni talas kroz sredinu čiji je modul elastičnosti  $E$ , a gustina  $\rho$ , posmatračemo na sl. 110 šipku preseka  $q$ . U vremenu  $t=0$  počinje na njenom levom kraju da deluje stalna sila  $k$ . Posle vremena  $t$  pomerena je krajnja površina za iznos  $\Delta l = vt$  na desno, gde  $v$  označava brzinu toga pomeranja. Istovremeno se kroz



Sl. 110. Za izvođenje Newton-ove jednačine.

šipku preneo i talas zgušnjavanja, čije se čelo u vremenu  $t$  nalazi na razdaljini  $l = ct$  od početka poremećaja. Celo parče šipke u dužini  $l$  nalazi se sada u zgušnjavanju i kreće se brzinom  $v$  na desno, dok do ostalog dela šipke zgušnjavanje

i kretanje još nisu doprli. Pri tome pretpostavljamo da je  $v \ll c$ . Usled sile  $k$  je deo šipke dužine  $l$  skraćen za duž  $\Delta l$ . Prema Hook-ovom zakonu je

$$k = qE \frac{\Delta l}{l} = qE \frac{v}{c} \quad (11)$$

Po isteku vremena  $t$  za sledeće vreme  $\tau$  otići će čelo talasa za dužinu  $\lambda = c\tau$  i izvesna nova masa  $m = \rho q \lambda = \rho q c \tau$  dobije ubrzanje do brzine  $v$ . Ubrzanje iznosi  $b = v/\tau$ . Delovi šipke koji su već bili u pokretu ne dobijaju dalje ubrzanje. Zato je

$$k = mb = \rho q c \tau \frac{v}{\tau} = \rho q c v \quad (12)$$

Kad izjednačimo desne strane jednačine (11) i (12) dobija se  $E/c = \rho c$  ili

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (13)$$

Ovo je Njutnova jednačina. Ona važi za sva tela nezavisno od njihovog agregatnog stanja. Kod tečnosti na mesto modula elastičnosti  $E$  dolazi modul stišljivosti  $\chi$ . Kod gasova može se naslutiti da dolazi pritisak  $p$  na mesto modula  $E$ . Ustvari, kao što će se docnije videti, dolazi proizvod iz pritiska i veličine  $\chi = c_p/c_v$  gde su  $c_p$  i  $c_v$  specifične toplote gasova na stalnom pritisku i na stalnoj zapremini. Njihov količnik ( $\chi$ ) za jednoatomne gasove iznosi 1,67, za dvoatomne 1,40 i za višeatomne 1,33. Kod gasova je dakle

$$c = \sqrt{\frac{p\chi}{\rho}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (14)$$

Umesto  $p/\rho$  može se staviti  $p/\rho = \rho V_s = RT/M$  ( $V_s$  specifična zapremina,  $T$  apsolutna temperatura,  $M$  molekulska težina,  $R$  univerzalna gasna konstanta). Tada izlazi

$$c = \sqrt{\frac{RT}{M}} \chi \quad (15)$$

Iz poslednje jednačine se vidi da brzina talasa u gasovima zavisi samo od

temperatura, a ne od pritiska. Ako se umesto apsolutne temperature  $T$  uvede temperatura po Celzijevoj skali  $T = t + 273_0$  i ako sa  $c_0$  označimo brzinu na  $0^0$  C onda prost račun daje

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \quad (16)$$

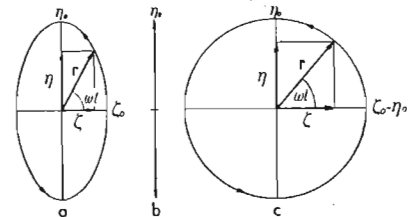
Kako je i zvuk talasno kretanje čija je brzina data gornjim jednačinama, to se  $c$  često zove kod longitudinalnih talasa brzina zvuka. Ona iznosi na  $0^0$  C  $331,5 \text{ m sec}^{-1}$ , a na  $20^0$  C oko  $340 \text{ m sec}^{-1}$ .

Važno je primetiti da se longitudinalni talasi mogu prostirati u svima sredinama.

**§ 104. Transverzalni talasi. Polarizacija.** Talasi kod kojih se delići tela kreću upravno na pravac prostiranja talasa zovu se **transverzalni talasi**. U najprostijem slučaju kreću se delići duž jednog zraka po paralelnim dužima koje su normalne na pravac prostiranja, dakle kreću se svi u istoj ravni sa pravcem prostiranja. Takav jedan talas zove se **linearno polarizovan**. Ako se kretanje pojedinih delića vrši u ravni normalnoj na pravac prostiranja, onda se talas može razložiti na dva linearno polarizovana talasa upravna jedan na drugi. Ove komponente se kreću u izotropnim sredinama istom, u anizotropnim sredinama različitom brzinom. Neka su amplitude tih komponenti  $\eta$ , njihova fazna razlika je  $\pi/2$ . Tada se obe mogu izraziti jednačinama

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \quad \text{i} \quad \xi = \xi_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \xi_0 \cos \omega t$$

Za takav jedan talas kaže se **eliptično polarizovan** (sl. 111).  $\eta_0$  i  $\xi_0$  predstavljaju elipsine poluose. Ako je jedna poluosa, tj. amplituda jedne komponente jednaka nuli onda dobijamo linearno polarizovan talas (sl. 111b). Ako su obe amplitude jednake onda imamo cirkularno polarizovan talas (sl. 111c). Usled polarizacije transverzalni talasi se bitno razlikuju od longitudinalnih. U nedoumici da li je jedan talas transverzalan ili longitudinalan to pitanje rešava polarizacija, kao što je to bio slučaj kod svetlosti. Samo transverzalni talasi mogu se linearno polarizovati.



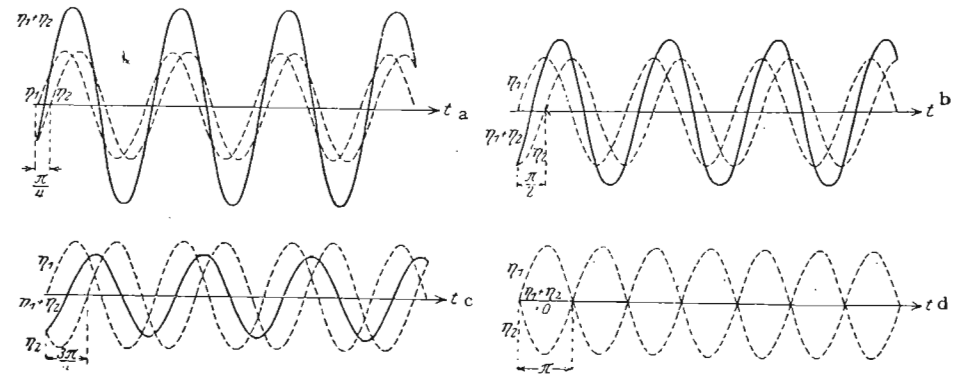
Sl. 111. a) Eliptično, b) linearno, c) cirkularno polarizovan talas.

Kod transverzalnih talasa usled fazne razlike oscilacija, izazvana pomeranja pojedinih delića vezana su sa savijanjem i smicanjem sredine. Takva pomeranja mogu se vršiti samo u čvrstim telima, pa stoga su i trans-

verzalni talasi mogući jedino u čvrstim telima. Njihova brzina prostiranja je manja od brzine prostiranja longitudinalnih talasa.

Kod zemljotresa od centra se prostiru tri vrste talasa: transverzalni, longitudinalni i talasi koji idu po površini zemlje. Sva tri talasa se kreću različitim brzinama, pa zato posle različitih vremena stižu do nekog udaljenog mesta. Iz ove razlike vremena može se na tom mestu zaključiti gde se desio potres.

Za razumevanje polarizacije poučan je ovaj ogled. Duž jednog zategnutog creva od gume mogu se prostirati i longitudinalni i transverzalni talasi. Ako se crevo provuče kroz jednu pukotinu (dve paralelne dasčice), longitudinalni talasi nesmetano prolaze kroz tu pukotinu ma kako je obrnuli oko pravca prostiranja. Od transverzalnih talasa na crevu može proći samo linearno polarizovana komponenta koja leži u ravni pukotine. Ako je talas već linearno polarizovan on prolazi nesmetano kroz pukotinu samo u tom slučaju, ako ravan u kojoj leže pravci oscilacija creva i pravac prostiranja talasa — **polarizaciona ravan** — leži u pravcu pukotine. Ako leži upravno na pukotinu onda talas kroz pukotinu uopšte ne može da prođe.



Sl. 112. Interferencija talasa. Fazne razlike a)  $\pi/4$ , b)  $\pi/2$ , c)  $3\pi/4$ , d)  $\pi$

**§ 105. Interferencija. Stojeci talasi.** Talas kružne frekvencije  $\omega$  izaziva na jednom mestu oscilovanje predstavljeno jednačinom  $\xi_1 = \xi_0 \sin \omega t$ . Sa njim se poklapa drugi talas iste amplitude i iste kružne frekvencije koji bi sam na istom mestu i u istom pravcu proizveo oscilacije date jednačinom  $\xi_2 = \xi_0 \sin (\omega t + \alpha)$ . Obe oscilacije  $\xi_1$  i  $\xi_2$  sabiraju se i daju jednu oscilaciju po jednačini

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \sin \omega t + \xi_0 \sin (\omega t + \alpha) = 2 \xi_0 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (17)$$

Pošto se  $\alpha$  ne menja sa vremenom, to je  $2 \xi_0 \cos \alpha/2$  amplituda zajedničke oscilacije na posmatranom mestu. Ako je fazna razlika  $\alpha$  dveju početnih oscilacija ceo multipl od  $2\pi$ ,  $\alpha = 2n\pi$  odnosno  $\cos \alpha/2 = +1$ , onda zajednička

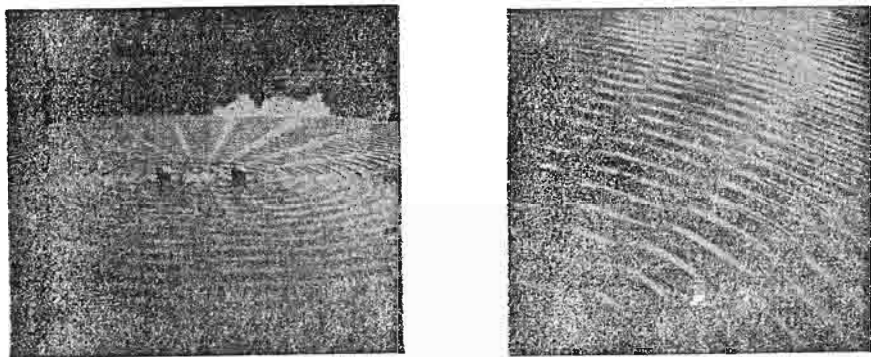


amplituda ima najveću moguću vrednost  $2\xi_0$ . Oscilacije su »u fazi« i maksimalno se pojačavaju. Ako je  $\alpha = (2n+1)\pi$ , dakle  $\cos \alpha/2 = 0$  onda nastupa uzajamno potpuno poništavanje (gašenje) obeju oscilacija. Između ova dva granična slučaja nalaze se svi mogući prelazi. Slika 112 pokazuje to za dva talasa sa faznim razlikama  $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$  i  $\pi$  i amplitudama  $\eta_1$  i  $\eta_2$ . Ako istovremeno dejstvuju u jednoj tački neke sredine dva talasa iste kružne frekvencije (dakle takođe istog broja treptaja) i iste amplitude (iste jačine), onda od njihovih faznih razlika u toj tački zavisi da li će se tu njihovo dejstvo uzajamno pojačati, oslabiti ili potpuno poništiti. Slaganje dva talasa zove se interferencija. Interferencija je nepobitan dokaz talasnog kretanja.

Ako amplitude početnih talasa nisu jednake, onda, razume se, ne može doći do potpunog poništavanja oscilacija. Ako oscilacije  $\xi_1$  i  $\xi_2$  nisu upravljene u istom pravcu, moraju se razložiti na komponente i tražiti interferenciju jednako upravljenih komponenti.

Slika 113 pokazuje interferenciju talasa na vodenoj površini koji se stvaraju istovremenim periodskim potapanjem dva tela u vodu. Duž izvesnih krivih talasi se potpuno poništavaju.

Dva talasa koji iz istoga izvora idu različitim putevima mogu se dovesti do interferencije na jednom mestu npr. posle odbijanja. Ako su oni

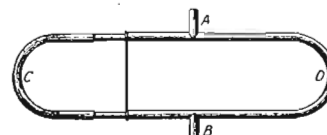


Sl. 113. Interferencija talasa na vodi. Desno uvećan deo leve slike.

do toga mesta u istoj sredini prešli različite puteve  $s_1$  i  $s_2$  računajući od izvora, ako između njih znači postoji putna razlika  $s_1 - s_2$ , onda na tome mestu oni nisu u istoj fazi. Na uočenom mestu jedan talas se može predstaviti jednačinom  $\xi_1 = \xi_0 \sin \omega (t - s_1/c)$ , a drugi sa  $\xi_2 = \xi_0 \sin \omega (t - s_2/c)$ . Njihova fazna razlika iznosi  $\omega (s_1 - s_2)/c$ . Ako je ona ceo multipl od

$2\pi (2n\pi$  gde je  $n$  ceo broj) onda nastupa maksimalno pojačanje. U tome slučaju je  $s_1 - s_2 = 2n\pi c/\omega = n\lambda$  (jed. 9). Maksimalno pojačanje oba talasa nastupa kad je njihova putna razlika  $\lambda$  ili  $n\lambda$ . Ako je međutim putna razlika neparan multipl polovine talasne dužine,  $s_1 - s_2 = (2n+1) \cdot \lambda/2$  onda je fazna razlika jednaka  $(2n+1)\pi$  i nastupa potpuno poništavanje.

Na ovome je zasnovana metoda za merenje talasnih dužina zvučnih talasa. U Quincke-ovu cev sl. 114 ulazi kod  $A$  zvučni talas, a sluša se kod  $B$ . Talas prolazi kroz dve grane cevi  $C$  i  $D$  od kojih se jedna ( $C$ ) može da izvlači, tako da joj se menja dužina i da se na taj način proizvede putna razlika između delova talasa. Izvlačeći cev udesimo da se povećanje du-



Sl. 114. Quincke-ova cev.

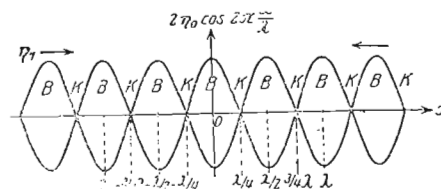
žine odnosi na dva uzastopna tonska minimuma. To odgovara povećanju puta kroz  $C$  za jednu celu talasnu dužinu koja se može izmeriti na ovaj način.

Posmatračemo sada naročiti slučaj kada se dva ravna talasa iste amplitude i frekvencije kreću u suprotnim pravci-

ma duž  $x$ -ose koordinatnog sistema. Njihova fazna razlika će se stalno menjati od tačke do tačke. U tački  $x=0$  neka je njihova fazna razlika nula i svaka oscilacija na tom mestu koju ovi talasi pojedinačno proizvedu može se pretstaviti jednačinom  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0 \sin \omega t$ . Posmatračemo sada stanje oscilovanja jedne tačke na rastojanju  $x$  odatle. Ovdje će oscilacija koju proizvodi talas što se kreće u pozitivnom  $x$ -pravcu biti data jednačinom  $\eta_1 = \eta_0 \sin \omega (t - x/c)$ , a oscilacija koju proizvodi talas koji se kreće u negativnom  $x$ -pravcu biće predstavljena sa  $\eta_2 = \eta_0 \sin \omega (t + x/c)$ . Oba talasa interferuju i njihov zbir daje trenutnu vrednost ukupne oscilacije u tački  $x$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \eta_0 \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) = 2 \eta_0 \cos \omega \frac{x}{c} \sin \omega t \quad (18)$$

Amplituda u tački  $x$  iznosi  $2\eta_0 \cos \omega x/c$  i zavisi od mesta. Ako je  $x = n\pi c/\omega$  ( $n$  ceo broj) dakle  $\cos \omega x/c = \pm 1$ . Ona ima najveću mogućnu vrednost  $2\eta_0$ .



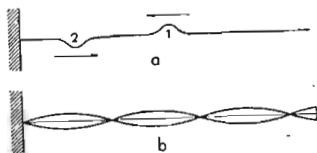
Sl. 115. Stojeci talas. Dve sinusoida predstavljaju granice između kojih se kreću trenutne vrednosti talasa u pojedinim tačkama  $x$ .

Oscilacije se maksimalno pojačaju i u tački  $x$  se stvara trbuh oscilacije. Ako je  $x = (2n+1)\pi c/2\omega$ , dakle  $\cos \omega x/c = 0$ , onda se dejstvo talasa poništava u tom trenutku i u  $x$  imamo sada čvor talasa.

Za dva uzastopna trbuha ili čvora važi  $\omega x_1/c - \omega x_2/c = \pi$  ili  $x_1 - x_2 = \pi c/\omega = \lambda/2$  (jednačina 9). Razdaljina po dva uzastopna čvora ( $K$ ) ili

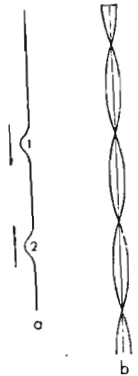
trbuha (B) iznosi polovinu talasne dužine (sl. 115). Ova pojava se zove stojeći talas.

Ako imamo longitudinalan stojeći talas, npr. zvučni talas u vazduhu, onda sleduju i promene pritiska. Na mestima talasnih trbuha javljaju se čvorovi pritiska, na mestima čvorova talasa javljaju se trbusi pritiska. Čvorovi pritiska predstavljaju mesta sa stalnim pritiskom, a trbusi pritiska mesta gde se javlja najveća promena u pritisku. To se lako može razumeti iz toga što u neposrednoj okolini trbuha talasa delići sredine osciluju u istom smislu i između njih se ne javlja promena razdaljine. Sa obe strane čvora talasa oni osciluju u suprotnim pravcima, pa proizvode u



Sl. 116 a i b. Odbijanje talasa od zida.

čvoru naizmenično kompresiju i istezanje. Slično se dešava sa trbusima i čvorovima i kod stojećih transverzalnih talasa. Stojeći talas može postati npr. usled odbijanja jednog ravnog talasa na čvrstom zidu, pri čemu se upadni i odbijeni talas u prostoru pred zidom poklapaju i interferuju. U tome slučaju se mora na zidu nalaziti čvor talasa, pošto usled zida susedni delići sredine ne mogu da osciluju. No to se može desiti samo usled interferencije upadnog i odbijenog talasa koji na zidu moraju imati faznu razliku  $\pi$ . Odatle izlazi da upadni talas na zidu pretrpi faznu razliku za  $\pi$  (skok u fazi) koja odgovara putnoj razlici polovine talasne dužine. Ostali čvorovi imaju od zida razdaljine  $n\lambda/2$  ( $n$  ceo broj). Čvoru talasa na zidu odgovara trbuh pritiska na istom mestu. To je lako razumljivo, jer se delići sredine u blizini zida kreću, a na samom zidu miruju, tako da tamo moraju nastupiti promene pritiska. Da talas prilikom odbijanja na nekoj čvrstoj prepreci pretrpi skok u fazi za  $\pi$  može se lako zapaziti na talasima koji se prostiru duž zategnutog konopca. Ako se otsečnim udarom na konopcu stvori talas on se prostire duž konopca (sl. 116a, 1). Posle odbijanja talas se vraća natrag (sl. 116a, 2). Ako seпусти konopac da slobodno visi, pa se ponovi gornji ogled, na slobodnom kraju konopca se ne javlja takav skok. Talas se reflektuje i sa slobodnog kraja, ali njegovo udubljenje ne menja smisao (sl. 117a). Da kod stojećeg talasa na konopcu postaje na utvrđenom kraju konopca uvek čvor, a na slobodnom kraju uvek trbuh, može se lako zapaziti kad se periodičnim pomeranjem drugog kraja konopca naviše i naniže stvore u njemu stojeći talasi (sl. 116 b i 117 b).



Sl. 117 a i b. Odbijanje na slobodnom kraju konopca.

Mereći razdaljine čvorova i trbuha kod stojećeg talasa može se odrediti talasna dužina  $\lambda$  pa odatle, kad je poznat broj treptaja  $\nu$ , može se izračunati brzina talasa (brzina zvuka)  $c = \lambda\nu$  (jed. 9) u toj sredini. Kod gasova može se po Kundt-u tako raditi da se učvrsti u jednu cev neka

metalna šipka i u njoj trenjem proizvedu longitudinalni talasi, koji se kao zvuk prenose u unutrašnjost cevi napunjene gasom. Cev je na jednom kraju zatvorena (sl. 118). Ako je šipka utvrđena na  $1/4$  ili  $3/4$  svoje dužine onda je talasna dužina longitudinalnih talasa u šipci jednaka dužini šipke (vidi o oscilovanju šipki i žica). U cevi se nalazi prah od plute. Kad se u cevi stvori stojeći talas, ovaj će se prah skupljati u čvorovima, pa se tako može



Sl. 118. Kundt-ova cev.

izmeriti njihovo rastojanje i time i talasna dužina u gasu. Broj treptaja u metalu i gasu je isti. Zato se prema jed. (9) brzine zvuka u gasu i metalu

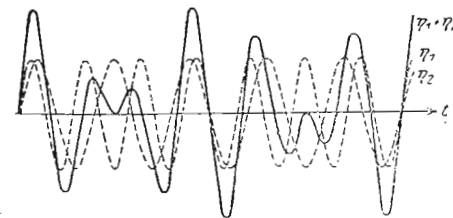
imaju kao odgovarajuće talasne dužine u tim sredinama. U šipci se brzina može izračunati prema jednačini (13). Metoda može da posluži još i za izračunavanje odnosa specifičnih toplota kod gasova (jednačina 14).

§ 106. Zvučni udari. Kombinacioni tonovi. Ako na jednu tačku u prostoru istovremeno dejstvuju dva talasa sa brojevima treptaja  $\nu_1$  i  $\nu_2$  a istom amplitudom  $\eta_0$ , njihova dejstva se superponiraju i oscilacije koje oni izazivaju, kombinuju se u jednu oscilaciju datu izrazom

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 \sin 2\pi\nu_1 t + \eta_0 \sin 2\pi\nu_2 t$$

$$= 2\eta_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t \quad (19)$$

Ako se  $\nu_1$  i  $\nu_2$  vrlo malo razlikuju, onda je  $(\nu_1 - \nu_2)/2$  malo spram  $(\nu_1 + \nu_2)/2$  pa se  $\cos 2\pi(\nu_1 - \nu_2)t/2$  mnogo sporije menja nego član  $\sin 2\pi(\nu_1 + \nu_2)t/2$ . Ovome članu odgovara oscilacija sa frekvencijom  $(\nu_1 + \nu_2)/2$  koja se vrlo malo razlikuje od oscilacije čiji su brojevi treptaja  $\nu_1$  i  $\nu_2$ , ako se kao što je rečeno u početku  $\nu_1$  i  $\nu_2$  mnogo ne razlikuju. Slaganje dva početna talasa proizvodi u posmatranoj tački prostora oscilaciju sa brojem treptaja  $(\nu_1 + \nu_2)/2$  čija jačina periodski raste i opada. U akustici se ova pojava naziva zvučnim udarima (battements, Schwebung). Amplituda njihova se kreće između  $2\eta_0$  i 0. Vreme trajanja  $T$ , tj. vreme između dva zastopna maksimuma intenziteta je ono za koje  $\cos 2\pi(\nu_1 - \nu_2)t/2$  pređe od +1 do -1, odnosno njegov argument poraste za  $\pi$ , od  $n\pi$  na  $(n+1)\pi$ . Ovdje se može lako izračunati da



Sl. 119. Zvučni udari.  $\nu_1 : \nu_2 = 6 : 5$ .

je  $T = 1/(\nu_1 - \nu_2) = 1/\nu_s$ . Broj udara  $\nu_s$  iznosi dakle u jednoj sekundi  $1/T = \nu_s = \nu_1 - \nu_2$ . Slika 119 pokazuje udare koji nastaju od dva talasa čiji se brojevi odnose kao 6 : 5. Vidi se da za vreme 6 odnosno 5 oscilacija nastupaju dva maksimuma amplituda.

Zvučni udari se mogu vrlo lepo i lako konstatovati. Ako zvuče istovremeno dva zvučna izvora čiji se brojevi treptaja vrlo malo razlikuju, onda se jasno čuje u jednakim intervalima vremena periodično jačanje i slabljenje tona. To možemo postići sa dve zvučne viljuške istog broja treptaja kad na jednu prilepimo malo voska, posle čega će se njena visina tona vrlo malo razlikovati od tona druge viljuške. Isto se može zapaziti i pomoću dve žice na nekom muzičkom instrumentu. Ukoliko je manja razlika u visini oba tona, utoliko su i udari ređi. Zato zvučni udari predstavljaju sredstvo za dovodenje na unisonost, koje je osetljivije no čisto muzičko zapažanje razlike tonova kod većine ljudi.

Čovek može odvojeno da čuje 16 do 20 udara u sekundi. Ako je razlika između broja treptaja između dva tona manja od 16 do 20 treptaja u sekundi, onda se oba tona slivaju u jedan i čuju se zvučni udari. Ako je ta razlika veća, onda se tonovi čuju odvojeno i ne zapažamo udare. Umesto udara može se čuti diferencioni ton sa brojem treptaja  $\nu_1 - \nu_2$ . Oscilacija ove frekvencije ne postoji u zvučnom talasu jer Fourierova analiza daje samo zbirne članove oscilacija sa brojem treptaja  $\nu_1$  i  $\nu_2$ . Diferencioni ton postaje tek u uhu na bubnoj opni. Usled nejednake elastičnosti ove pri ugibanju i ispućenju, njeni treptaji ne odgovaraju tačno jedinačini (19). Zbog toga talas sa frekvencijama  $\nu_1$  i  $\nu_2$  ne izaziva u njoj oscilaciju samo sa ovim frekvencijama, već i oscilacije sa brojem treptaja  $m\nu_1 + n\nu_2$  ( $m$  i  $n$  celi brojevi). Tako proizvedeni tonovi zovu se opštim imenom kombinacioni tonovi, a specijalno sumacioni i diferencioni tonovi. (Sorge 1744; zovu se takođe i Tartini-evi tonovi.) Najjače se čuje prvi diferencioni ton  $\nu_1 - \nu_2$ . Na primer, ako se na klaviru istovremeno udare tonovi  $c^2$  ( $\nu = 517,3$  Hz) i  $g^2$  ( $\nu = 775,0$  Hz), čuje se skoro tačno niža oktava od  $c^2$ ,  $c^1$  ( $\nu = 775,0 - 517,3 = 257,7$  umesto 258,7 Hz). Pri udaranju tonova  $c^2$  i  $fis^2$  ( $\nu = 731,4$  Hz) čuje se ton 214,1 Hz.

§ 107. **Doppler-ov efekat.** Opšte poznata pojava da se visina tona lokomotivine pištaljke menja u momentu kad ona pored nas prolazi punom brzinom zove se Doppler-ov efekat. On se uvek javlja kada se posmatrač i zvučni izvor kreću jedno spram drugog. Doppler-ov efekat se javlja otuda što usled kretanja, do posmatračevog uha ne dospeva uvek isti broj treptaja.

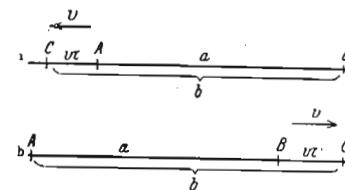
U trenutku  $t = 0$  nalazi se zvučni izvor u tački A i kreće se brzinom  $v$ . Posmatrač se nalazi u tački B (sl. 120 a) i miruje. Vreme trajanja jedne oscilacije zvučnog izvora neka bude  $\tau = 1/\nu$ . Neka se u vremenu  $t = 0$  izvor nalazi u maksimumu oscilacije ( $\xi = \xi_0$ ). Ako se talas od izvora prenosi brzinom  $c$ , onda će ovaj maksimum stići do posmatrača za vreme  $t_1 = a/c$ . Idući maksimum se javlja posle vremena  $\tau$  i zvučni izvor nalazi se tada u tački C. Njegovo udaljenje od posmatrača povećalo se za duž  $v\tau$ , dakle postalo je  $b = a + v\tau$ . Tada je oscilaciji potrebno vreme  $b/c$  da stigne do

posmatrača, a vreme za koje će drugi maksimum stići do posmatrača iznosi  $t_2 = \tau + b/c$ . Oba maksimuma koja stižu do posmatrača nisu razdvojena vremenom  $\tau$  već  $\tau' = t_2 - t_1$ . Pomoću gornjih jednačina dobija se lako da je  $\tau' = \tau(1 + v/c)$ . Talas koji odašilje pokretan zvučni

izvor čini se posmatraču u miru, kao da ima povećano vreme treptaja pa prema tome i manji broj treptaja  $\nu' = 1/\tau'$ , tj.

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}} \quad (20)$$

Ako se zvučni izvor ne udaljuje od posmatrača već mu se približava, onda se menja skok njegove brzine i broj treptaja postaje  $\nu_1 = \nu/(1 - v/c)$ .



Sl. 120 a i b. Doppler-ov efekat. a) Izvor se kreće, posmatrač miruje; b) izvor miruje, posmatrač se kreće.

Nešto drukčiji odnosi postoje kada zvučni izvor miruje, a posmatrač se kreće. Pretpostavićemo da se posmatrač udaljuje od izvora brzinom  $v$  (sl. 120). Izvor se nalazi u tački A. U trenutku  $t = 0$  nalazi se upravo u maksimumu oscilacije. Taj maksimum će do posmatrača doći za vreme  $t_1 = a/c$ , ako  $a$  označava razdaljinu između posmatrača i izvora u tom trenutku. Idući maksimum sleduje za vreme  $\tau$  posle prvoga. On će stići pokretnog posmatrača u C. Posmatrač se sada udaljio od izvora za duž BC koja je jednaka  $v\tau'$  ako  $\tau'$  označava vreme između dolaska oba maksimuma do posmatrača. Posmatrač se sada nalazi na razdaljini  $b = a + v\tau'$ . Vreme  $t_2$  za koje do posmatrača stigne drugi maksimum možemo izračunati na dva načina. Ono je prvo jednako vremenu  $t_1$  plus vreme koje je potrebno posmatraču da dospe iz B u C dakle  $t_2 = t_1 + \tau'$ . Ono je s druge strane jednako vremenu  $\tau$  koje proteče između dva maksimuma plus vreme za koje talas stigne od A do C, dakle  $t_2 = \tau + b/c$ . Iz tih odnosa nalazi se da je  $\tau' = \tau(1 - v/c)$  odnosno za prispeli broj treptaja

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \quad (21)$$

Kad se promeni pravac kretanja, tj. kad se posmatrač približava izvoru izlazi da je  $\nu' = \nu(1 + v/c)$ .

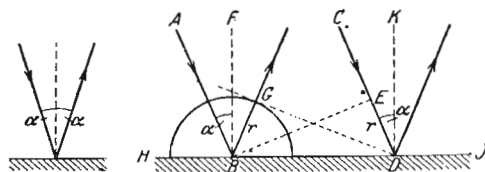
Za dva posmatrana slučaja dobijaju se različiti brojevi treptaja prema tome da li se izvor kreće a posmatrač miruje ili obrnuto. Praktično uzev brzina  $v$  je uvek mala spram  $c$  tako da se može staviti  $\nu/(1 \pm v/c) \approx \nu(1 \mp v/c)$ . Postoji dakle mala razlika da li se rastojanje povećava usled kretanja izvora ili kretanja posmatrača.

§ 108. **Odbijanje talasa.** Ako jedan talas naiđe na granicu između dve različite sredine, jedan deo energije talasa, u izvesnim slučajevima i celokupna njegova energija, odbija se (reflektuje), tj. vraća se u prvu sredinu. Ostali deo energije prelazi u drugu sredinu, pa u njoj menja

pravac prostiranja, prelama se, ukoliko nije apsorbovan u neposrednoj blizini površine. Odnos ovih delova, odbijenih i prelomljenih, može prema prilikama biti vrlo različit.

Najprostiji slučaj imamo na ravnoj graničnoj površini. Ravnom površinom zovemo onu koja nema neravnina po redu veličine jednakih talasnoj dužini. Sa takve površine nastupa pravilno odbijanje. Ako je granična površina u gornjem smislu rapava, onda se površina talasa raspada na različito orijentisanim elementarnim površinama granične ravni. Talas se cepa u vrlo veliki broj elementarnih talasa (zrakova) koji se odbijaju od granične površine u svima mogućim pravcima (difuzno odbijanje.)

Obično se prilikom odbijanja i prelamanja ne posmatra ceo talas, nego upadni zraci za koje važi sledeći zakon odbijanja. Odbijeni i upadni zrak



Sl. 121.  
Uz zakon odbijanja.

Sl. 122. Fresnel-ova konstrukcija odbijenog zraaka.

leže u jednoj ravni i grade sa normalom iste uglove  $\alpha$  (slika 121). Pod normalom se podrazumeva upravna povučena na graničnu površinu u tački gde pada zrak.

Zbog docnije promene pomenućemo ovde Fresnel-ovu konstrukciju odbijanja koja

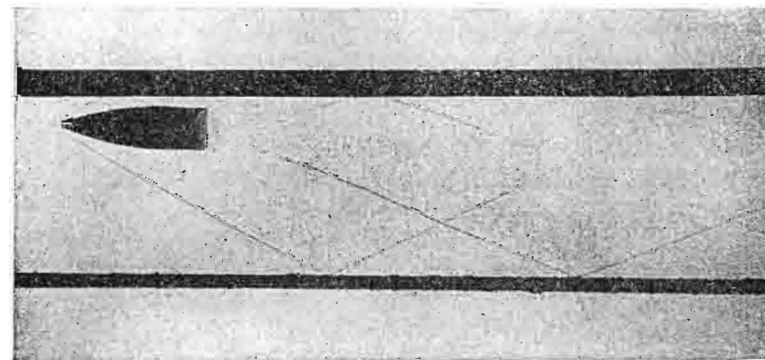
dovodi do toga zakona. Neka su  $AB$  i  $CD$  dva paralelna zraaka jednog ravnog talasa koji pod uglom  $\alpha = \angle ABF$  padaju na ravan  $HJ$  (sl. 122). Kad je zrak  $AB$  iz talasne površine već stigao do tačke  $B$ , zrak  $CD$  nalazi se tek u tački  $E$  i ima da pređe još put  $ED$  do ravni  $HJ$ . Za vreme dok drugi zrak dospe u  $D$ , prvi, koji se reflektovao kod  $B$ , ide u svom novom pravcu i posle odbijanja prešao je put dužine  $r$ , koji je jednak duži  $ED$ . On je došao u tačku koja leži na krugu opisanom iz  $B$  sa poluprečnikom  $r$ . Po Fresnel-u taj novi pravac prvoga zraaka je  $BG$ , gde je  $G$  tačka u kojoj tangenta povučena iz  $D$  dodiruje krug.  $DG$  je površina ravnog talasa koji se odbio. Pošto je  $BG = ED$ , ugao  $\angle BGD = \angle BED = 90^\circ$  to je trougao  $\triangle BGD = \triangle BED$ , pa je stoga  $\angle GBD = \angle EDB$ ; tada je takođe  $\angle FBG = \angle EDK = \angle ABF = \alpha$ . To je zakon odbijanja. Isti odnos važi i za svaki drugi zrak koji pripada tom ravnom talasu. Odbijeni zrak leži sa upadnim zrakom i normalom u jednoj ravni.

§ 109. **Akustika velikih prostorija.** Naročito su upadljive pojave odbijanja kod zvučnih talasa. Oni se od ravnih zidova pravilno odbijaju, a od ivica šume i slično, više ili manje difuzno. Na odbijanju su zasnovane pojave odjeka i jeka.

Akustika prostorija zavisi od geometriskog oblika njihovog, ali sem toga još u velikoj meri i od vrste površina, odnosno od njihove refleksione moći. Prostirke, zavese, ukrasi na zidovima, sakupljena publika, apsorbuju

najveći deo zvuka, tako da se samo jedan mali procenat odbija. Ovi predmeti dakle smanjuju jek koji proizlazi od jednostrukog ili višestrukog odbijanja. U velikim prostorijama gde zvuk prelazi veće puteve odbijanje je naročito štetno. Već razlika u vremenu od 0,1 sec (razlika u putu od oko 30 m) između direktnog i odbijenog zvuka dovoljna je da se ovi poklapaju i da izgovorene reči čine više ili manje nerazumljivim. Od toga naročito trpe muzička izvođenja. Naročito je štetan jek koji duže traje, a dolazi od višestrukog odbijanja zvuka na golim zidovima npr. u crkvama. Takođe interferencija između direktnog i reflektovanog zvuka može neprijatno da utiče. Akustika prostorija je važan i težak arhitektonsko-fizički problem čije se povoljno rešenje često ne može predvideti. Izvesni oblici prostorija proizvode često specifično odbijanje.

§ 110. **Merenje morske dubine. Zona tišine.** Na pojavi odbijanja zvuka zasnovane su metode za merenje dubina mora. Brzina zvuka u vodi iznosi oko 1450 m. Vreme potrebno da zvuk sa lađe dospe u dubinu od 9000 m i natrag iznosi svega 12 sec. Na sl. 123 prikazano je odbijanje talasa pucnja

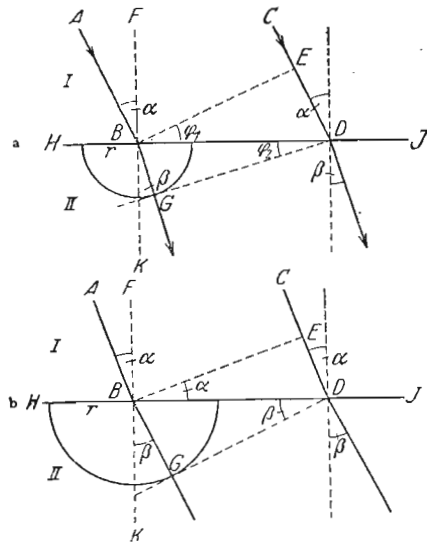


Sl. 123. Odbijanje talasa koji prati zrno.

i površine talasa zgušnjavanja koji se obrazuje na vrhu projektila. Primećuje se da upadni i odbijeni talas sa zidom koji odbija grade iste uglove.

Naročita vrsta odbijanja talasa eksplozija dešava se na granici dve sredine kada je upadni ugao ravan graničnom uglu totalne refleksije. Na ovaj način se objašnjava pored ostalih stvari i činjenica da se jake detonacije (eksplozije, grmljavina topova) čuju na vrlo velikim rastojanjima, na koja zvuk direktnim putem ne može da dospe. Talasi se verovatno odbijaju od površine između dva različita atmosferska sloja na visini između 40 i 80 km i dospevaju na rastojanja od 150 i više kilometara ponovo na zemlju. Između zone u kojoj se eksplozije neposredno čuju i rastojanja gde zvuk dospeva posle refleksije na širini od 100 do 150 km nalazi se »zona tišine« u kojoj se pucanj ne čuje.

§ 111. **Prelamanje.** Ako jedan talas naiđe na granicu dveju sredina u kojima se on prostire različitim brzinama, onda se menja njegov pravac prostiranja. Posmatračemo opet normale talasa, tj. zrake koji prelaze iz sredine (I) u sredinu (II). Njihov pravac prostiranja može se po Fresnel-



Sl. 124. Fresnel-ova konstrukcija prelomljenog talasa. a)  $c_1 > c_2$ , b)  $c_1 < c_2$ .

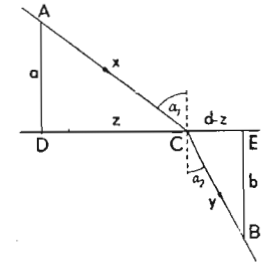
krug u G. Tada je BG pravac zraka u sredini II. Sleduje da je: 1)  $BD = ED \sin \varphi_1$ , 2)  $BD = BG / \sin \varphi_2$ . Dalje je  $\varphi_1 = \alpha$ ,  $\varphi_2 = \beta$ . Odatle

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{ED}{BG} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12} \quad (22)$$

Ovo je zakon prelamanja.  $c_1/c_2 = n_{12}$  zove se relativni indeks prelamanja za obe sredine. On može zavisiti od talasne dužine. Ako je  $c_1 > c_2$  onda se zrak prelama ka normali ( $\alpha > \beta$ ), u protivnom slučaju skreće od normale ( $\alpha < \beta$ ) (sl. 124 a i b).

§ 112. **Fermat-ov princip.** Posmatračemo jedan zrak koji je više puta menjao svoj pravac usled odbijanja i prelamanja. Uzećemo dve proizvoljne tačke na njegovom putu. Fermat-ov princip iskazuje da je vreme potrebno da zrak dospe iz jedne tačke u drugu ili najkraće ili najduže moguće. To znači od svih mogućih puteva koji spajaju dve tačke zrak je stvarno išao onim na kome mu je bilo potrebno ili najkraće ili najduže moguće vreme da dospe iz jedne tačke u drugu. U opštem slučaju potreban je minimum vremena.

Uzećemo slučaj prelamanja. Zrak AB se prelama pri prelazu iz jedne sredine u drugu. Od svih mogućih puteva uzećemo jedan proizvoljan put  $AC + BC$ . Izborom tačaka A i B date su normale spuštene na graničnu površinu  $AD = a$  i  $BE = b$  kao i razdaljina njihova  $DE = d$ . Ostaje da se odredi odnos duži z i  $d - z$  na koje tačka C deli duž DE, a uz to još upadni ugao  $\alpha_1$  i prelomni ugao  $\alpha_2$ . Neka je  $AC = x$ ,  $CB = y$ . Brzine prostiranja talasa u prvoj i drugoj sredini neka budu  $c_1$  i  $c_2$ . Talasu je potrebno da pređe put od A preko C do B.



Sl. 125. Izvođenje zakona prelamanja iz Fermat-ovog principa.

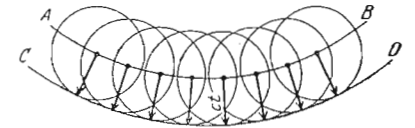
$$t = \frac{x}{c_1} + \frac{y}{c_2} = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-z)^2 + b^2}}{c_2}$$

Prema Fermat-ovom principu mora t imati vrednost ili maksimuma ili minimuma, tj. mora biti  $dt/dz = 0$ . Tada dobijamo

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z}{c_1 \sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{d-z}{c_2 \sqrt{(d-z)^2 + b^2}} = \frac{z}{c_1 x} - \frac{d-z}{c_2 y} = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = 0 \quad (23)$$

Gornja jednačina pretstavlja ustvari zakon prelamanja koji smo ovde izveli iz Fermat-ovog principa.

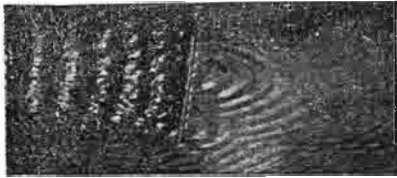
§ 113. **Huygens-ov princip.** Neka je AB (sl. 126) presek kroz površinu loptastog talasa. Huygens (1690) postavio je princip da se svaka tačka u prostoru koju pogodi talas, može smatrati kao sekundarni izvor jednog novog elementarnog loptastog talasa iste vrste, koji se od te tačke prostire na sve strane. Što se pak u opštem slučaju talas od jedne tačke neke talasne površine prostire samo u jednom pravcu, dolazi od interferencije. Kao što se može tačno dokazati, talasi koji polaze iz tačke, ako na njihovom putu ne stoje nikakve prepreke, poništavaju se interferencijom u svima drugim pravcima izuzev u pomenutom pravcu. Da se nađe položaj talasne površine posle vremena t treba iz svake tačke prvoga talasa opisati krug sa poluprečnikom  $r = ct$  (c brzina prostiranja talasa). Zajednička obvojnica CD ovih krugova je površina talasa u vreme t. Slika 126 pokazuje da je to u slučaju slobodnog prostiranja talasa ponovo površina lopte, da se dakle talas ukoliko nema smetnji prostire pravoliniski.



Sl. 126. Uz Huygens-ov princip.

§ 114. **Difrakcija (savijanje).** Pravolinisko prostiranje jednoga talasa, kao što je gore napomenuto, dolazi pod uslovom da se svi elementarni talasi

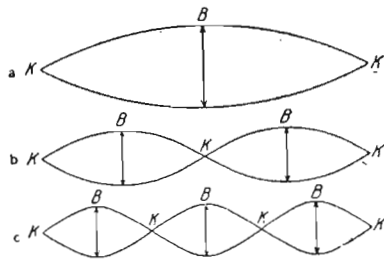
koji potiču iz jedne tačke poništavaju interferencijom u svima pravcima, osim onoga koji se nalazi u produženju dolazećeg zraka. Ako se na kakvom preprekom na putu spreči dolazak jednog dela elementarnih talasa, onda gašenje usled interferencije nije potpuno. Takvi slučajevi ometaju pravolinisko prostiranje i ta pojava se naziva difrakcija ili savijanje.



Sl. 127. Difrakcija talasa na vodi kroz uzak otvor.

Difrakcija se može lepo posmatrati na vodenoj površini. Sl. 127 pokazuje ravan talas na vodi koji nailazi na prepreku sa otvorom na sredini. Veći deo talasa se odbija od prepreke, ali kroz otvor talas prolazi i širi se u koncentričnim krugovima s druge strane, kao da je sam otvor izvor novih talasa. Ista slika pokazuje i stvaranje stojećih talasa (levo). Dalje o difrakciji videti u odeljku o svetlosti.

§ 115. **Oscilovanje žica, šipki i ploča.** Ako se u ma kojoj tački nekog tela proizvodi izvestan periodičan poremećaj, on se prostire kao talas. Ako se talas na kraju tela reflektuje, na onom mestu npr. gde je telo utvrđeno, onda dolazeći i reflektovani talas pod izvesnim uslovima mogu da grade stojeći talas. Ukoliko talas ne gubi svoju energiju, nastaje stacionarno, neamortizovano oscilovanje tela, tj. njegovih delova. Ovo oscilovanje tela treba razlikovati od oscilovanja jednog delića mase u telu i od oscilovanja tela kao celine. Pri ovom poslednjem periodski se kreće težište tela sa obe strane ravnotežnog položaja. Kod gore definisanog oscilovanja tela ostaje težište u miru ako telo nije utvrđeno, samo pojedini delići mase osciluju oko ravnotežnog položaja. Takvo oscilovanje tela sastoji se dakle iz ukupnih oscilacija delića mase tela između kojih postoje, već prema mestu, određeni odnosi u intenzitetu i fazama, prema zakonima za stojeće talase.



Sl. 128. Oscilovanje žica.

Najprostiji slučaj imamo kod tela gde je jedna dimenzija (dužina) znatno veća od poprečnih dimenzija, kao npr. kod žica. Vrlo prost primer pružaju transverzalne oscilacije jedne žice koja je na krajevima utvrđena. Time što je žica na krajevima utvrđena, već je unapred određeno da će se na njenim krajevima stvarati čvorovi stojećeg talasa, jer je tu oscilovanje zaustavljeno. Zato su u žicama mogući samo oni stojeći talasi, kod kojih je dužina žice  $l$   $n$  puta veća od polovine talasne dužine ( $n$  ceo broj),  $l = n\lambda_n/2$  (sl 128).

U žici se dakle mogu javiti samo one oscilacije kod kojih je talasna dužina

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (24)$$

Ako je  $\lambda_1 = 2l$ , tj.  $n=1$  onda imamo osnovnu oscilaciju, kod koje postoji samo jedan trbuh na sredini žice. Ostale oscilacije koje su moguće prema jed. (24) zovu se gornje (harmoniske) oscilacije. Kod prve gornje oscilacije ( $n=2$ ) javljaju se na žici 3 čvora i 2 trbuha. Kod  $p$ -te gornje oscilacije ima  $p+2$  čvorova i  $p+1$  trbuha. U opštem slučaju oscilovanje jedne žice sastoji se iz slaganja (superponiranja) gornjih oscilacija sa osnovnom oscilacijom.

Ako je žica preseka  $q$  i gustine  $\rho$  zategnuta silom od  $k$  dina, brzina prostiranja talasa u žici iznosi

$$c = \sqrt{\frac{k}{q\rho}} \text{ cm sec}^{-1} \quad (25)$$

Broj treptaja jedne od oscilacija iznosi pošto je

$$\nu_n = c/\lambda_n$$

$$\nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{k}{q\rho}} = n\nu_1 \text{ Hz} \quad (26)$$

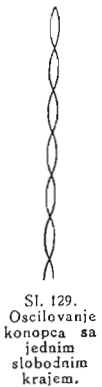
Gornje oscilacije imaju dakle  $n$  puta veći broj treptaja od osnovne oscilacije, pa se zato i zovu gornje harmoniske oscilacije. U gornjem obrascu je  $n$  ceo broj.

Ako se u konopcu koji je utvrđen samo na jednom kraju (sl. 129) izazovu oscilacije, na utvrđenom kraju će se obrazovati čvor, a na slobodnom trbuh. U njemu su dakle moguće sve oscilacije za koje je dužina konopca  $l$ ,  $(n+\frac{1}{2})$  puta veća od polovine talasne dužine  $\lambda$ , tako da je

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n+1} \quad (27)$$

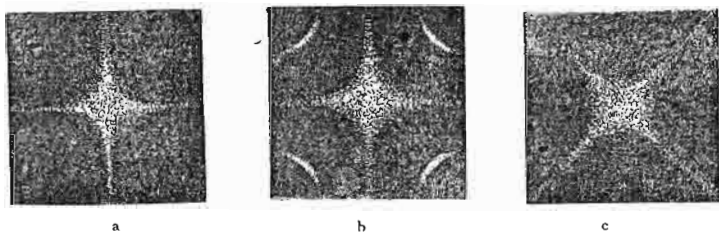
Pri tome je  $n$  ceo broj. Za talasnu dužinu osnovne oscilacije je  $n=0$ , pa talasna dužina njena iznosi  $4l$ , a broj treptaja  $c/4l$ . Talasne dužine prve harmonijske oscilacije ( $n=1$ ) iznosi  $4l/3$ , druge harmonijske oscilacije ( $n=2$ ) iznosi  $4l/5$ . Odgovarajući brojevi treptaja su  $3c/4l$  odnosno  $5c/4l$ . Kod konopca koji je utvrđen samo na jednom kraju ne javljaju se sve gornje harmonijske oscilacije kao kad bi on bio utvrđen na oba kraja, već samo neparne gornje oscilacije čiji brojevi treptaja su 3, 5, 7 itd. puta veći od broja treptaja osnovne oscilacije.

Dosad smo posmatrali transverzalne oscilacije žice ili konopca. Slično važi i za longitudinalne oscilacije koje se mogu proizvesti u šipkama tarući



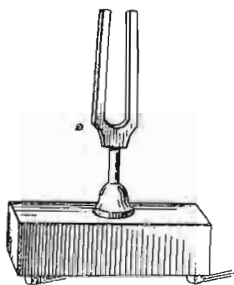
Sl. 129. Oscilovanje konopca sa jednim slobodnim krajem.

ih npr. vlažnom krpom. Ako je šipka utvrđena na oba kraja onda se u tim tačkama moraju stvoriti čvorovi treptaja. Pri osnovnoj oscilaciji na šipci postoje ova dva čvora i u sredini trbuh. Talasna dužina osnovne oscilacije je jednaka dvostrukoj dužini šipke  $2l$ , njen broj treptaja je  $\nu_1 = c/2l$ . Kao kod zategnute žice mogu se javiti svi gornji harmonijski tonovi. Njihove talasne dužine iznose  $2l/n$  a brojevi treptaja  $\nu_n = nc/2l = n \nu_1$ . Brzina prostiranja  $c$  se može izračunati iz Njutnove jednačine ( $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ) ili se može odrediti npr. pomoću Kundt-ove cevi. Ako se šipka utvrdi na  $\frac{1}{4}$  i  $\frac{3}{4}$  svoje dužine kao kod Kundt-ove cevi (v. sl. 118), onda se na tim mestima stvaraju čvorovi, a na slobodnim krajevima i na sredini trbusi. U tome



Sl. 130 a, b, c. Linije čvorova na četvrtastim pločama.

slučaju je talasna dužina osnovne oscilacije jednaka dužini šipke. I ovde se mogu javljati sve gornje harmonijske oscilacije. Šipka koja je utvrđena na jednom kraju ponaša se kao konopac kome je jedan kraj slobodan. Talasna dužina njegove osnovne oscilacije je jednaka četvorostrukoj dužini šipke i javljaju se samo neparne gornje harmonijske oscilacije.



Sl. 131. Zvučna viljuška.

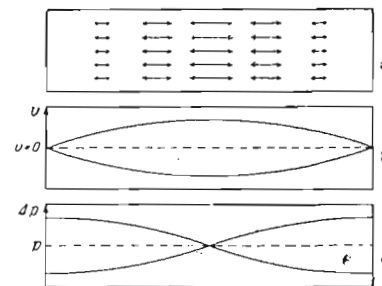
Mnogo komplikovanije su oscilacije drugih tela npr. ravnih ili savijenih ploča, zvona itd. Njihove gornje oscilacije nisu harmonijske. Na mesto tačaka čvorova javljaju se linije čvorova. Na sl. 130 pokazane su linije čvorova četvrtastih ploča utvrđenih na sredini (Chladni-ove figure). Na ploče se pospe sitan pesak koji se skuplja na linijama čvorova gde miruje, a trbusi ga odbacuju. Različite figure postaju na taj način što se ploča na jednom ili dva mesta dodirne prstima (A) i tu se stvaraju čvorovi. U različitim tačkama B se izazivaju oscilacije ploča prevlačeći njihovu ivicu popreko violinskim gudačom i tu postaju trbusi. Na homologim mestima stvaraju se sami od sebe dalji čvorovi i trbusi.

Zvučna viljuška može se smatrati kao savijena šipka koja transverzalno osciluje. Pri njenom oscilovanju javljaju se sa obe strane njenog donjeg

kraja čvorovi, a na slobodnim krajevima i na sredini trbusi (sl. 131). Donji kraj viljuške se prema tome pomalo diže i spušta, pa svoje oscilacije prenosi na druga tela, npr. na rezonantno sanduče koje se nalazi ispod viljuške.

Različiti brojevi treptaja koji se mogu javiti na telu (sistemu) sposobnom da osciluje zovu se njegova sopstvena frekvencija.

§ 116. **Oscilovanje vazdušnih stubova.** Longitudinalno oscilovanje vazdušnih stubova može se proučavati na sličan način kao i longitudinalno oscilovanje šipki. Uzećemo u obzir samo one vazdušne stubove koji se nalaze u dugačkim cevima svuda istog preseka. Ako je cev zatvorena na oba kraja onda se u njoj mogu obrazovati samo takvi stojeći talasi kojima su čvorovi na krajevima cevi. Oscilovanje vazduha u cevi — mada to može biti neki drugi gas — odgovara oscilovanju šipke koja je utvrđena na oba kraja. Talasna dužina osnovne oscilacije je jednaka dvostrukoj dužini cevi,  $\lambda_1 = 2l$ . Njen broj treptaja iznosi  $\nu_1 = c/2l$ . Brzina prostiranja može se izračunati iz jednačina



Sl. 132. Osnovna oscilacija vazdušnog stuba zatvorenog na obe strane, a) shema amplitude, b) grafički predstavljen tok oscilacije, c) grafički predstavljen promena pritiska.

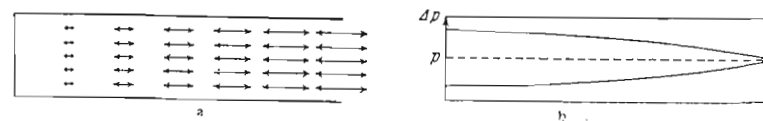
$$c = \sqrt{\frac{p\chi}{\rho}} \text{ ili } c = \sqrt{\frac{RT\chi}{M}}$$

U stubu se mogu javiti sve gornje harmonijske oscilacije i mogući brojevi treptaja iznose prema tome

$$\nu_n = n \frac{c}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{p\chi}{\rho}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{RT}{M}} \cdot \chi \text{ Hz} \quad (28)$$

Slika 132 a pretstavlja amplitude pojedinih delića za osnovnu oscilaciju ( $n=1$ ), sl. 132 b to isto pretstavljeno grafički. Sl. 132 c pretstavlja maksimalne promene pritiska u cevi. Čvor pritiska se nalazi u trbuhu oscilacije i obrnuto.

Kod cevi koja je otvorena na obe strane, odnosi su obrnuti. Na otvo-



Sl. 133 i 134. Oscilacije vazdušnog stuba u cevi zatvorenoj na jednom kraju; sl. 133 promena amplitude; sl. 134 promena pritiska.

renom kraju, ili tačnije u njegovoj neposrednoj okolini vlada atmosferski pritisak. Usled toga se ovde mora stvarati uvek čvor pritiska, dakle trbuh

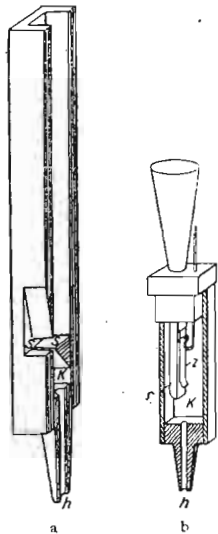
oscilacije (sl. 134). Otvoren kraj cevi odgovara dakle slobodnom kraju jedne šipke. Talasne dužine i brojevi treptaja kod cevi otvorenih na oba kraja su isti kao kod stuba zatvorenog na oba kraja iste dužine (jed. 28). Cev zatvorena na jednom kraju odgovara šipci koja je utvrđena na jednom kraju (sl. 134). Talasna dužina njene osnovne oscilacije je četiri puta veća od dužine stuba  $l$  i javljaju se samo neparne gornje oscilacije

$$\nu_n = \frac{(2n+1)c}{4l} = (2n+1)\nu_1 \text{ Hz} \quad (29)$$

Kod raznih duvačkih instrumenata od kojih su najprostiji razne svirale, imamo oscilacije vazdušnih stubova. Kod usnene svirale (sl. 135a) kroz kanal  $h$  dolazi struja vazduha. Ova ulazi u komoru  $K$  i kroz uzak prorez  $SS$  u tankom mlazu skreće ka sečici koja se nalazi u bočnom useku svirale. Na sečici vazдушna struja počinje da osciluje i stvara u samoj svirali promene pritiska, usled kojih vazdušni stub počinje da osciluje dajući prvenstveno osnovnu oscilaciju. Periodičnost ovog oscilovanja prenosi se na uzak mlaz vazduha, pa na taj način postaje u svirali jako stacionarno oscilovanje. Energija koju svirala izgubi odajući zvuk nadoknađuje se energijom vazdušne struje. Bočni otvor pretstavlja otvoren kraj sviralin, jer su ovde najveće amplitude vazdušnih delića. Ako je i drugi kraj svirale otvoren onda je njena osnovna oscilacija (osnovni ton)  $\nu_1 = c/2l$  Hz i mogu se javiti sve gornje harmoniske oscilacije (gornji harmonijski tonovi). Ako je svirala na jednom kraju zatvorena onda je njen osnovni ton  $\nu_1 = c/4l$  i leži za oktavu niže, nego kod jedne svirale iste dužine koja je otvorena na oba kraja. U zatvorenoj svirali se mogu javiti samo neparne gornje harmoniske oscilacije. Odatle potiče razlika u boji tona kod ove dve vrste svirala.

Ušnena svirala daje, ako vazdušna struja nije isuviše jaka, osnovni ton i mnogo slabije gornje tonove koji po jačini brzo opadaju sa rednim brojem  $n$ . Pogodnim, a naročito jakim duvanjem mogu se izazvati određeni gornji tonovi.

Jezične svirale imaju metalni jezičak  $Z$  (sl. 135b) koji može da osciluje svojom sopstvenom frekvencijom. Jezičak skoro potpuno zatvara uzak otvor u cevi  $r$ . Usled duvanja on počinje da osciluje i periodično otvara i zatvara razrez, a time propušta i prekida vazdušnu struju u cevi. Namešteni levak ozgo na cevi služi da rezonancijom pojača određenu parcijalnu oscilaciju jezička.

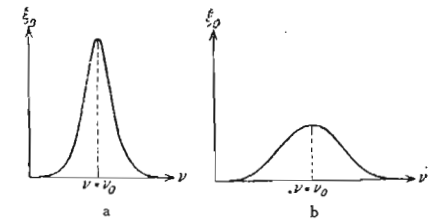


Sl. 135. a) Ušnena svirala, b) svirala sa jezičkom.

§ 117. **Prinudne oscilacije. Rezonancija.** Ako na jedno telo koje može da osciluje sopstvenom frekvencijom  $\nu_0$  dejstvuje periodična sila, npr. talas čija je frekvencija  $\nu$ , onda telo prolazeći prvo kroz izvesnu prethodnu fazu oscilovanja u kojoj se javlja i njegova sopstvena frekvencija, počinje da osciluje sa frekvencijom talasa  $\nu$ . Takva vrsta oscilovanja naziva se **prinudnim oscilacijama**. Da bi nastale stacionarne prinudne oscilacije potrebno je da kod tela postoji ma i mala amortizacija koja će prigušiti njegovu sopstvenu frekvenciju. U protivnom slučaju prethodna faza nestacionarnog oscilovanja traje beskonačno dugo.

Amplituda  $\xi_0$  prirodne oscilacije je najveća — ako amortizacija nije isuviše velika — kad je  $\nu = \nu_0$ . Ovaj slučaj nazivamo **rezonancijom**. Ukoliko se više razlikuju  $\nu_0$  i  $\nu$  utoliko je manje  $\xi_0$  (sl. 136a).

Ukoliko je manje amortizovanje utoliko je manja oblast (razmak) brojeva treptaja u kojoj telo osciluje, ali utoliko je veća njegova amplituda u oblasti rezonancije. Između prinudne oscilacije i one koja izaziva oscilovanje, postoji fazna razlika čija veličina zavisi od broja treptaja i amortizacije.



Sl. 136. Amplituda  $\xi_0$  prinudne oscilacije u funkciji periodične sile broja treptaja  $\nu$ . a) Malo, b) veliko amortizovanje.

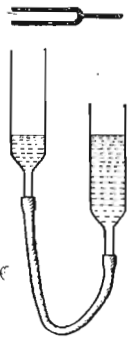
Kako zavisi širina rezonancije može se pokazati pomoću oglada sa klatnom. Ako ono osciluje u vazduhu gde je amortizacija (otpor sredine) mala, možemo ga i najmanjom silom jako zaklatiti, ako sila periodično dejstvuje sa približno istom frekvencijom koju ima i klatno. Ali samo u tom slučaju (primer dečije ljuljaške). Ako se klatno nalazi u vodi gde je amortizacija mnogo veća, onda se može lakše staviti u pokret bilo kojom frekvencijom. Ali njegove amplitude su tada manje i ako je sila ista, nego u vazduhu u blizini rezonancije.

Kod slabog amortizovanja, može veličina amplitude da bude vrlo velika u blizini oblasti rezonancije. Kod mašina se mora voditi računa o tome, da se njihov broj obrta ne poklapa sa sopstvenom frekvencijom delova zgrade koji mogu da osciluju, inače postoji opasnost za samu zgradu. Često se zabranjuje da se preko mostova ide u korak, jer bi se time mogle izazvati oscilacije samoga mosta pri njegovoj sopstvenoj frekvenciji.

Ako se pred otvorenim klavirom na kome je pritisnuta pedala otepeva jedan ton, u klavirom osciluje žica koja odgovara visini toga tona. Predmeti koji mogu da osciluju zveče kad se u njihovoj blizini proizvede ton koji odgovara njihovoj sopstvenoj frekvenciji. Važnu primenu rezonancije imamo kod rezonatora na gudačkim instrumentima kod kojih osciluje vazduh u unutrašnjosti rezonatora. Zvučne viljuške stavljaju se na rezonatore



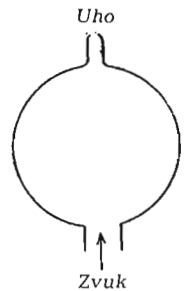
(sl. 131) čija je dužina vazdušnog stuba podešena spram broja treptaja viljuške. Vazdušni stub oduzima od viljuške energiju zvuka i prenosi je bolje na okolni vazduh, nego što bi to viljuška sama činila. Da bi se ton



Sl. 137. Rezonancija vazdušnog stuba.

zvučne viljuške bolje čuo ona se stavi, ako nema rezonatora, svojom drškom na sto ili na rezonator nekog gudačkog instrumenta koji i sami počinju da osciluju i te oscilacije prenose na vazduh. To odgovara emisiji električnih talasa jedne antene koja je spregnuta sa električnim oscilatornim kolom.

Ako se na sl. 137 menja dužina vazdušnog stuba u cevi ispod zvučne viljuške dizanjem ili spuštanjem nivoa vode, onda se usled rezonancije najbolje čuje ton zvučne viljuške kad je dužina vazdušnog stuba jednaka  $1/4$ ,  $3/4$ ,  $5/4$  itd. talasne dužine tona viljuške. Na ovaj način se može meriti talasna dužina. Kad se otvore usta i pred njima drži viljuška koja osciluje, primećuje se da usna duplja rezonira na ton viljuške između 400 do 500 Hz. Helmholtz je upotrebljavao rezonanciju šupljih lopti za analizu zvuka, tj. za iznalaženje osnovnog tona i njegovih harmoniskih delova kod nekog zvuka. On se služio pri tome serijom rezonatora (sl. 138) podešenih za tonove razne visine. Iz rezonancije lopti može se zaključiti iz kojih se tonova zvuk sastoji.



Sl. 138. Helmholtz-ov rezonator.

Ovo važi za sve muzičke instrumente i zato smo ton koji se sastoji iz osnovnog i harmoniskih tonova nazvali muzički ton. Muzički tonovi imaju spektar frekvencija, u kome su pored osnovnog tona zastupljeni i gornji harmoniski tonovi. Slika 139 pokazuje shemu spektra frekvencija praznih violinskih žica. Odnos intenziteta pojedinih gornjih tonova spram osnovnog tona određuje boju tona, dok visina tona zavisi samo od broja treptaja osnovnog tona. Boja tona raznih muzičkih instrumenata dolazi od razlike intenziteta njihovih gornjih tonova. Prost ton zvuči prazno i neprijatno, ali pomešan sa gornjim tonovima dobija muzičku lepotu.

Istovremeno zvučanje tonova približno istih intenziteta zove se akord, ako njihovi brojevi treptaja stoje u prostom brojnom odnosu. Utisak visine akorda daje najviši ton u njemu.

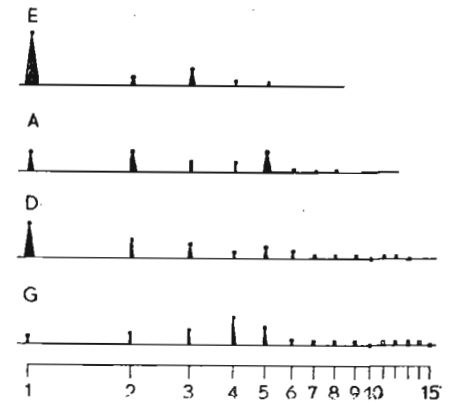
Šum je smeša tonova kojoj odgovara ili više odnosno manje neprekidan zvučni spektar, ili koji se sastoji iz velikog broja pojedinačnih tonova čije se frekvence i amplitude (jačina) vremenski mogu da menjaju.

Najniži ton koji se još čuje kao ton a ne kao brujanje jeste subkontra  $c$  ( $c^{-3}$ ) sa brojem treptaja od 16 Hz i talasnom dužinom u vazduhu od oko 20 m. Mlade osobe mogu da čuju tonove sa brojem treptaja od oko 20.000 Hz (talasna dužina oko 1,7 cm). Ova

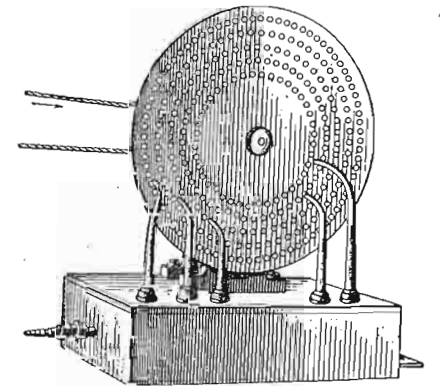
gornja granica čuvenja opada već znatno još u srednjim godinama. U muzici se uglavnom upotrebljavaju tonovi između 16 i 4000 Hz.

Za određivanje broja treptaja može pored ostalih metoda poslužiti i sirena (sl. 140). U najprostijem obliku to je okrugla ploča sa nizovima kružnih otvora. Kad se ploča obrće i pušta na otvore struja vazduha onda na otvorima nastaju periodične promene pritiska koje stvaraju zvučni talas. Broj treptaja osnovnog tona jednak je broju rupa na ploči koje u 1 sec. prođu pored uske cevčice kroz koju se dovodi vazduh. Taj broj otvora može se izračunati iz brzine obrtaja ploče.

§ 119. Ultrazvuk. 1918 godine pošlo je prvo Langevin-u za rukom da proširi oblast zvučnih talasa neobično mnogo — za preko 10 oktava — preko granice čuvenja. Sredstvo za to našao je kod pogodno isečenih kvarcnih pločica u kojima električne oscilacije mogu da izazovu elastične treptaje. Ako se za proizvođenje oscilacija u kvarcu upotrebi frekvencija  $\nu$  kojoj odgovara električna talasna dužina  $\lambda_e = c_0/\nu$  ( $c_0 = 3.10^{10}$  cm . sec<sup>-1</sup>), onda proizvedeni zvuk



Sl. 139. Spektar frekvencija praznih violinskih žica.

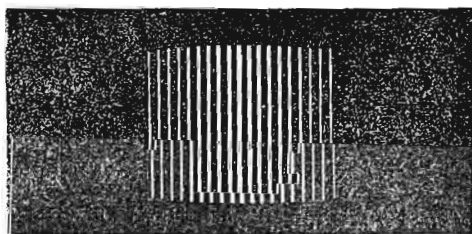


Sl. 140. Prosta sirena.

ima istu frekvencu  $\nu$  i talasnu dužinu  $\lambda = c/\nu$  ( $c$  brzina zvuka u vazduhu približno jednaka  $3 \cdot 10^4 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ ). Odavde je  $\lambda = \lambda_e \cdot c/c_0$  ili u vazduhu  $\lambda \approx \lambda_e \cdot 10^{-6}$ . Ako se upotrebe električni talasi sa talasnom dužinom od  $10 \text{ m} = 10^3 \text{ cm}$  onda se u vazduhu dobija zvuk talasne dužine  $\lambda \approx 10^{-3} \text{ cm}$ . Već se uspelo da se proizvedu zvučni talasi čija je talasna dužina u vazduhu  $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ , što odgovara frekvenciji od oko  $2 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ . Ova talasna dužina je samo malo veća od talasne dužine krajnjeg crvenog u vidljivom spektru  $\lambda \approx 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ . Taj zvuk velikog broja treptaja i male talasne dužine naziva se ultrazvuk.

Oscilujući kvarc može da emituje vrlo veliku zvučnu energiju od 10 vata po  $\text{cm}^2$ , a to je  $10^{10}$  puta više od zračenja sobnog zvučnika po  $\text{cm}^2$ . Usled toga se mogu pomoću ultrazvuka proizvesti vrlo jaka mehanička dejstva na uskom prostoru u nekom telu. Na primer ultrazvukom se mogu proizvesti vrlo fine emulsije i od tela koja se inače ne mešaju kao npr. voda i živa. Mogu se dalje proizvesti fotografske emulsije sa neobično sitnim zrncom. U drugim slučajevima imamo suprotno dejstvo, umesto emulsije koagulaciju, tj. skupljanje sitnijih delića u veće. Visoko polimerizovani molekuli mogu se raspadati, npr. štirak u dekstrin. Rastopljeni metali mogu se oslobađati gasova i tražiti unutarnje greške u izrađenim komadima. Organizmi npr. bakterije čak i male složenije životinje mogu se ultrazvukom uništiti ili oštetiti; crvena krvna zrnca se raspadaju.

U telu kroz koje prolazi ultrazvuk javljaju se znatna zgušnjavanja i razređivanja materije u razmacima od polovine talasne dužine. Usled toga



Sl. 141. Difrakcija svetlosti kroz ultrazvučne talase u ksilolu.

se indeks prelamanja tela menja periodično od mesta do mesta. U tome stanju dejstvuje telo na svetlost isto kao optička rešetka i javlja se difrakcija svetlosti (sl. 141). Pomoću difrakcionih likova može se odrediti »konstanta rešetke«, tj. razdaljina dvaju maksimuma zgušnjavanja ili razređivanja.

Odatle se može izračunati talasna dužina ultrazvuka. Na sličan način može se učiniti vidljivim i prelamanje ultrazvuka pri prelazu iz jedne sredine u drugu i tako ispitivati. Ispitivanja ove vrste dala su već dragocene zaključke u fizici i hemiji. Tako se mogu npr. kad se odredi brzina zvuka naći elastične konstante čvrstih i tečnih tela, pa se mogu izračunati i njihove specifične toplote na stalnoj zapremini; kolorimetričke metode daju specifičnu toplotu na stalnom pritisku. Tako ultrazvuk u nauci i tehnici pretstavlja danas naročito važnu oblast u kojoj ima izgleda na puno novih otkrića.

§ 120. **Konsonanca i disonanca. Intervali.** Pri istovremenom zvučanju dva tona, dobija se utoliko priyatniji utisak ukoliko je prostiji odnos između njihovih brojeva treptaja. Takvo skladno sazvučje tonova naziva se konsonanca, a odnos u kome stoje njihovi brojevi treptaja zove se interval oba tona. Najprostiji interval 2 : 1 je oktava. Dva prosta tona u tome intervalu sa brojevima treptaja  $\nu_2 : \nu_1 = 2 : 1$  naše uho razlikuje po visini tona. Jedan ton je utoliko viši, ukoliko je njegov broj treptaja veći. Posle oktave je najprostiji interval kvinta 3 : 2, zatim dolazi kvarta 4 : 3, velika seksta 5 : 3, velika terca 5 : 4, mala terca 6 : 5. Sledeći intervali u kojima se javlja broj 7, čine utisak neskladnosti disonance, i ne upotrebljavaju se u praktičnoj muzici. To isto važi i za brojeve 11, 13, 14. U dobru konsonancu se računa još i mala seksta 8 : 5. Ako pomoću brojeva od 1 do 16 nagradimo sve intervale koji se nalaze u obimu jedne oktave, između 1 i 2, izostavljajući pri tome četiri pomenuta broja, dobijamo pored pomenutih intervala još i sledeće: mala septima 9 : 5, velika sekunda 9 : 8, mala sekunda 10 : 9, velika septima 15 : 8, mali poluton (polutonska sekunda) 16 : 15. Pet poslednjih intervala su više ili manje disonantni u sazvučju, ali u praktičnoj muzici imaju važnu ulogu. Prema stepenu konsonance, tj. prema jednostavnosti odnosa broja treptaja koji određuju interval, govori se o većoj ili manjoj srodnosti dva tona.

Razlog za konsonancu ili disonancu dva tona leži u broju gornjih harmoniskih tonova u kojima se oni slažu. Ukoliko se dva tona slažu u većem broju gornjih tonova, utoliko je bolja njihova konsonanca. Odavde se može izvesti stepen srodnosti između tonova za pojedine intervale.

§ 121. **Skale (lestvice).** Svi intervali izvedeni na ovaj način počev od jednog određenog tona, uključujući tu i iste intervale u višim i nižim oktavama, čine uz dati ton tonsku skalu ili lestvicu. Taj ton se naziva osnovni ton skale. Postoje dve vrste skale: durska i molska u kojima je zastupljen samo po jedan deo pomenutih intervala. Durska skala pored osnovnog tona ima i sledeće intervale: veliku sekundu, veliku tercu, kvartu, kvintu, veliku sekstu, veliku septimu i oktavu. Kod molske skale na mesto velike terce, sekste i septime dolaze mala terca, seksta i septima. Ako pođemo npr. od osnovnog tona c, onda u c-dur skali u okviru jedne oktave postoje sledeći tonovi

| c | d   | e   | f   | g   | a   | h    | c' |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|------|----|
| 1 | 9/8 | 5/4 | 4/3 | 3/2 | 5/3 | 15/8 | 2  |

Brojevi ispod tonova pokazuju relativan broj treptaja. Kad se broj treptaja svakog od ovih tonova podeli prethodnim brojem, dobija se broj koji pokazuje koliko je puta veći broj treptaja dotičnog tona od

broja treptaja najbližeg nižeg tona. Ovi intervali obeleženi su između tonova

|     |      |       |     |      |     |       |                |
|-----|------|-------|-----|------|-----|-------|----------------|
| c   | d    | e     | f   | g    | a   | h     | c <sup>1</sup> |
| 9/8 | 10/9 | 16/15 | 9/8 | 10/9 | 9/8 | 16/15 |                |

Kod durske kao i kod molske skale intervali između uzastopnih tonova nisu jednaki. Ima ih tri vrste: veliki ceo ton (9/8), mali ceo ton (10/9) i poluton (16/15).

Skalama sa gornjim prostim intervalima odgovara apsolutno čisto, čisto harmonisko zглаšavanje<sup>1)</sup> koje iziskuje muzički razvijen sluh. Takvo zглаšavanje se može ostvariti kod gudačkih instrumenata na kojima samo prazne žice imaju ton nepromenljive visine, a sve ostale tonove i intervale možemo da dobijemo skraćivanjem žica. Ali ono nije moguće kod klavira, orgulja i svih onih instrumenata gde svakom tonu odgovara zasebna žica odnosno svirala. I njih je moguće zglasiti tako da se mogu čisto proizvesti npr. c-dur i c-mol skale. Ali u praktičnoj muzici se postavlja potreba modulacije, tj. mogućnost prelaza iz jedne vrste skala na druge. Zato na tim instrumentima moraju postojati i tonovi pripadajući skalama koje postaju polazeći od ma koga osnovnog tona. Posmatrajmo npr. g-dur skalu (g kvinta od c interval 3/2). U njoj se nalaze čisti intervali od velikih terca (h), kvarta (c<sup>1</sup>), kvinta (d<sup>1</sup>) i seksta (e<sup>1</sup>), dakle oni isti koji se nalaze i u produženoj c-dur skali, ali nedostaju prvo velika septima fis ( $3/2 \cdot 15/8 = 45/16 = 2 \cdot 45/32$  koja leži između f<sup>1</sup> i g<sup>1</sup>). Zatim sekunda od g ( $3/2 \cdot 9/8 = 27/16$ ) leži sasvim blizu pored a (5/3) u c-dur skali, ali je za interval 81/80 (pitagoriska koma) viša od a.

Instrument kao što je klavir, koji bi imao sve potrebne tonove čisto zglasene, zbog svoje komplikovanosti bio bi praktično neupotrebljiv. I pored toga pri svakoj modulaciji bila bi potrebna promena izvesnih tonova za pitagorisku komu, što je iz estetskih razloga nemoguće. Današnja muzika iziskuje da se na instrumentima kao što je klavir sa relativno malim brojem tonova u obliku jedne oktave, mogu svirati durske i molske skale počev od svakog postojećeg tona kao osnovnog. To je moguće postići samo na račun čisto harmoniskog zглаšavanja i danas je u opštoj upotrebi tzv. temperirano zглаšavanje. U oktavi ima pet intervala sa razlikom od celog tona i dva sa polutonskom razlikom. Kod temperiranog zглаšavanja oktava je podeljena na 12 jednakih intervala koji dolaze na mesto čistih polutonskih razmaka. Ako ovaj interval obeležimo sa  $\vartheta$ , onda se počev od osnovnog tona (1) do njegove oktave (2) mora preći preko 12 ovih razmaka. Mora dakle biti  $\vartheta^{12} = 2$  ili  $\vartheta = \sqrt[12]{2} = 1,059$ . Na ovaj način nestaje razlike između velikog i malog celog tona, i na njeno mesto dolazi dvostruki

polutonski razmak koji iznosi  $1,059^{12} = 1,121$  i leži između velikog celog tona ( $9/8 = 1,125$ ) i malog celog tona ( $10/9 = 1,111$ ). Svi intervali sem oktave su spram čistih intervala malo nezglaseni, ali tako malo da se usled navike uopšte ne zapažaju. Na ovaj način, pojedine skale se ne razlikuju od drugih u čistoći svoga zглаšavanja. Niz polutonova u temperiranom zглаšavanju čini hromatsku skalu.

Muzički kamer-ton ili normalno a je ton sa brojem treptaja od 435 Hz (a<sup>1</sup>).

Važna je činjenica da muzička odlika intervala dva tona ne zavisi od razlike, već od odnosa broja treptaja tih tonova. Određenom intervalu  $v_2/v_1$  odgovara izvesna vrednost  $\log v_2/v_1$ , dakle razlika  $\log v_2 - \log v_1$ ; npr. kvinti (3/2) nezavisno od visine tonova odgovara u Brigovim logaritmima 0,1761. Pri grafičkom pretstavljanju skale bolje je ne prenositi brojeve treptaja već njihove logaritme. Tada jednakim intervalima odgovaraju jednake dužine. Pojedine oktave su jedna spram druge pomerene, ali zauzimaju iste dužine.

Konsonanca dva tona u izvesnoj meri zavisi ne samo od intervala, nego i od razlike broja treptaja tih tonova. Na primer, velika terca koja na klaviru daje dobru konsonantnost u srednjim i višim oktavama, u niskim oktavama se čuje kao disonanca. To dolazi od zvučnih udara. Ako je u nižim oktavama razlika u broju treptaja tako mala da izaziva čujne zvučne udare, onda je njihov sklad disonantan. Ako tercu c<sup>3</sup> — e<sup>3</sup> sa (temperiranim) brojevima treptaja 1034,61 i 1303,53 Hz pomerimo za 4 oktave niže, onda terca c<sup>1</sup> — e<sup>1</sup> sa brojevima treptaja 64,66 i 81,47 čini neprijatan sklad.

§ 122. **Muzički instrumenti.** O muzičkim instrumentima može se reći ovde samo ono što je osnovno. Oni se uglavnom mogu podeliti u dve grupe. Kod instrumenata sa žicama tonove daju zategnute žice, kod duvačkih instrumenata i orgulja, tonovi postaju usled treperenja vazдушnih stubova. Drugi instrumenti daju tonove usled oscilovanja šipki, ploča ili membrana [ksilofon, zvono, gong, tasovi, trougao (triangl), doboš, bubanj].

Instrumenti sa žicama imaju žice od creva ili čelika, ili ove žice obavijene drugom tankom metalnom žicom. Tonovi se u njima izazivaju gudačkom, udarom ili čupanjem. Boja njihovog zvuka (spektr tona) zavisi od mesta i načina izazivanja oscilacija. Najpogodnije je izazivanje na 1/7 do 1/9 dužine žice, jer se tada disonantni gornji tonovi najmanje pojavljuju. U gudačke instrumente spada violina, viola, čelo i kontrabas, zatim razne vrste starijih viola koje se više ne upotrebljavaju. Sem onih tonova koji se dobijaju na praznim žicama, ostali tonovi se dobijaju na taj način što se žice skrate pritiskom prstiju. Ako se prst ovlaš nasloni na čvor treptaja gornjeg tona prazne žice, koji nije čvor jednog od nižih gornjih tonova, onda se ne mogu javiti njeni niži parcijalni

<sup>1)</sup> Izrazi »Štimung« i »štímavati« prevedeni su kao zглаšavanje i zглаšavati.

tonovi. Kad se žica pritisne na sredini, onda osciluje samo ona polovina koja je izazvana, druga polovina ostaje u miru. Ako se na sredini samo ovlaš dodirne, onda osciluju pri izazivanju obe njene polovine. Tako dobijeni tonovi zovu se flažoleti. Oscilacije žica prenose se preko kobilice na telo rezonatora, a preko ovoga na okolni vazduh. Za lepotu tona instrumenta osobine rezonatora su od najveće važnosti. Rezonator mora za sve tonove koji se javljaju da osciluje približno istom jačinom. Tradicionalan oblik gudačkih instrumenata potpuno odgovara ovim zahtevima. Usled čega, to nije potpuno objašnjeno, ali do danas njegove osobine nisu mogle biti nadmašene.

Kod klavira žice se udaraju drvenim čekićima prevučeni filcom. Na mnogobrojnim instrumentima sa žicama koji nalaze primene naročito u folklornoj muzici, tonovi se dobijaju čupkanjem žica. U instrumente sa žicama se ubrajaju još preteča klavira klaviokord i cimbalo.

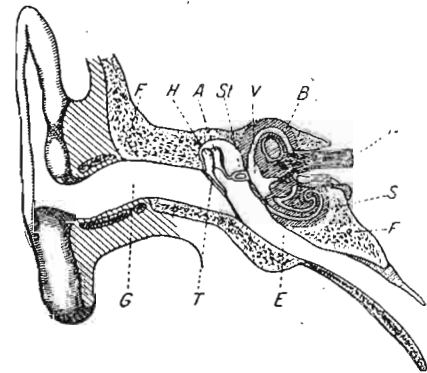
Kod svih ovih instrumenata žice treba da ispune dva različita zadatka. Prvo treba da dadu ton određene visine, i drugo, da daju potrebnu energiju za proizvođenje tona. Između ova dva zadatka ne postoji zadovoljavajući odnos. Stoga se prešlo na konstrukciju instrumenata kod kojih žice daju samo visinu tona, a potrebna zvučna energija se crpe iz drugih izvora. To je postignuto kod raznih električnih muzičkih instrumenata. Oni pružaju mogućnost za sasvim nove zvučne efekte, ali do danas nisu rasprostranjeni.

U duvačkim instrumentima oscilovanje vazdušnih stubova izaziva se usnim duvanjem. Prema materijalu od koga su napravljeni dele se na drvene i metalne instrumente, mada ova podela nije sasvim pravilna. Flauta, oboa, fagot i klarinet prave se obično od drveta. Radi menjanja visine tona na ovim instrumentima postoji niz otvora koji se mogu zatvarati prstima i klapnama. Ako se jedan od otvora otvori onda tamo postaje slobodan kraj cevi i ton je viši. U metalne instrumente pored saksofona koji je po tehnici sviranja sličan klarinetu spadaju truba, horna (rog), pozauna (trombon) itd. Oni pripadaju tipu svirala sa jezičkom. Jezičak grade usne samoga svirača u levkastom otvoru (pisku). Kod izvesnih instrumenata ove vrste dužina vazdušnog stuba menja se izvlačenjem i uvlačenjem cevi (trombon). Kod horne različiti tonovi dobijaju se samo menjanjem pritiska. Isto tako može se menjati ton uvlačenjem ruke u levak (korpus) na kraju instrumenta. Ostali metalni instrumenti imaju ventile pomoću kojih se menja dužina vazdušnog stuba, sprovodeći vazduh kroz bočne kanale. Kod metalnih duvačkih instrumenata promena pritiska prilikom duvanja ima mnogo veći značaj nego kod drvenih.

Orgulje imaju vrlo veliki broj usnenih i jezičnih svirala. Kod vrlo velikih orgulja tonovi se prostiru u obimu od preko osam oktava od subkontre  $c$  ( $c^{-3}$ , 16, 165 Hz) do  $c^5$  (4138,440 Hz). Svaki ton je zastupljen sa

više različito napravljenih otvorenih i zatvorenih svirala koje daju razne boje tona. Usled toga je moguće na orguljama reprodukovati muzičke komade u raznim bojama tona. Ova mogućnost je u neobično velikoj meri povećana registrom, jednom napravom, pomoću koje se pojedinim tonovima dodaju dalji tonovi koji odgovaraju izvesnim harmoniskim tonovima onih prvih i na taj način se dobijaju najrazličitije boje tona. Harmonijum je vrsta malih orgulja koji ima samo jezične svirale. Ručna i usna (dečija) harmonika imaju takođe svirale sa jezičkom.

§ 123. **Sluh i govor.** Uho se sastoji iz tri dela: spoljašnjeg, srednjeg i unutrašnjeg uha ili labirinta (sl. 142 a). Spoljašnje uho ima pored usne školjke koja služi za bolje hvatanje zvuka još i spoljni ušni kanal  $G$  čiji je prvi deo rskavičav a drugi koščat ( $F$ ) i koji je zatvoren kožastom bubnom opnom  $T$ . Srednje uho počinje iza bubne opne i zbog izjednačenja pritiska spojeno je preko Eustahijeve cevi  $E$  sa ždrelom. U njemu se nalazi sistem koščica: čekić  $H$ , nakovanj  $A$  i uzengija  $S$ . Oni grade sistem poluga preko kojih se oscilacije bubne opne prenose na ovalno prozorče unutaršnjeg uha. Oscilacije bubne opne koje imaju relativno veliku amplitudu, ali nisu snažne, preobraćaju se preko poluga u snažnije treptaje ovalnog prozorčeta manje amplitude. Ovo je potrebno otuda što je unutarnje uho napunjeno tečnošću koja je razume se mnogo manje stišljiva od vazduha. Unutarnje uho ili labirint je šupljina u slepoočnoj kosti. Ona se sastoji od vestibula  $V$ , 3 lučna kanala  $B$ , kesica (ampula) i puža  $S$ . Lučni kanali sudeluju pri određivanju pravca iz koga dolazi zvuk i čine organ za održavanje ravnoteže čovečjeg



Sl. 142. Shema čovečjeg uha. a) Shematski presek, b) presek kroz Corti-ov organ.

tela, a sa samim sluhom nemaju verovatno nikakve veze. Organ za ravnotežu kod mnogih životinja je spojen sa čulom sluha. Kesice su verovatno organ za zapažanje šumova, dok je puž osetljiv za zvuk i ton. Puž ima  $2\frac{1}{2}$  uvojaka i podeljen je koščatim spiralskim listićem na dve polovine. Duž puževih navojaka prostire se bazilarna membrana sa Kortijevim organom. Ovaj organ je sastavljen od vrlo velikog broja vlakana (sl. 142 b) koji odgovaraju tonovima iz oblasti ljudskog sluha i koji počinju

da osciluju kad u uho dospe ton njihove sopstvene frekvencije (Helmholtz-ova teorija rezonancije 1867). Spram svakog vlakna stoji jedan kraj nerva koji se mehanički nadraži kad vlakno zatreperi. Ovi nadražaji se preko nerava  $N$  prenose u centar sluha u mozgu, gde postaje osećaj zvuka.

Na slobodnom prostoru može da se oceni vrlo dobro pravac u kome zvuk dolazi. Naročito tačno se ovaj pravac određuje kad se čuje oštar pucanj. Svaki učesnik u ratu zna da se prema sluhu neverovatno dobro može odrediti pravac iz koга puca top ili mesto gde je projektil udario. Ovo dolazi uglavnom otuda što zvuk usled razmaka oba uha koji iznosi oko 25 cm, ima izvesnu faznu razliku koja zavisi od pravca zvuka. Kad se razmak između ušiju veštački poveća, povećava se i osetljivost za određivanje pravca. To se može postići na taj način, što se upotrebe dva zvučna levka na većem rastojanju, a njihovi suženi krajevi se preko creva od gume spoje sa ušima (prislušne sprave).

S a m o g l a s n i c i (vokali) u govoru zvuče na svojstven način blagodareći činjenici da u njihovom zvuku ima izvesnih tonskih oblasti sa prilično tačno određenom apsolutnom visinom tona, koje se zovu *f o r m a n t i* toga vokala (Willis, Wheatstone, Helmholtz). Da se izgovori jedan vokāl nameste se usta i ždrelo na određen način i formanti su sopstvene frekvencije vazdušnih tela ograničenih na taj način. Oni su ustvari gornji harmoniski tonovi onoga tona kojim se vokal izgovara. Usled pogodnog nameštanja usta ti gornji tonovi su rezonancijom naročito pojačani, i daju vokalu njegovu karakterističnu zvučnost. Ako se izgovori neki vokal u otvoreni klavir pri pritisnutoj pedali, isti vokal izlazi iz klavira, jer formanti rezonancijom izazivaju odgovarajuće žice. Ako se pusti gramofonska ploča na kojoj je snimljen neki govor da se obrće sa znatnom razlikom od normalne brzine, i vokali promene svoj karakter usled promene broja treptaja njihovih formanata. Ako se govori pošto se prethodno udahnuo vodonik (Pažnja!) onda vokali koje formiramo na uobičajeni način zvuče obrnuto. Talasne dužine formanata  $\lambda$  su razume se formirane prema veličini usne duplje, ali pošto je brzina prostiranja zvuka u vodoniku mnogo veća nego u vazduhu, to su brojevi treptaja  $\nu = c/\lambda$  приметно veći.

#### ČETVRTI DEO

## Optika i opšta nauka o zračenju

### Opšti deo i geometriška optika

§ 124. **Sadržaj nauke o zračenju.** Nauka o zračenju, u užem smislu nazvana Optika, jeste nauka o svetlosti, dakle o onim fizičkim pojavama koje izazivaju nadražaj našeg oka. Ali ima fizički potpuno istih pojava koje naše oko ne može da zapazi. Optika u užem smislu igra u nauci o zračenju istu ulogu, kao npr. akustika u okviru nauke o mehaničkim oscilacijama. Optika je jedna fiziološki ograničena oblast opšte nauke o zračenju. Pošto opšti pojmovi i zakoni važe za celu nauku o zračenju, to ćemo ih spočetka proučiti i objasniti u optici, tj. u delu nauke o svetlosti koja je neposredno pristupačna našem zapažanju. U sledećem razumećemo pod svetlošću samo takvo zračenje koje neposredno deluje na naše oko, dakle svetlost u običnom značenju reči.

§ 125. **Svetlosni izvori.** Pod svetlosnim izvorom podrazumevamo ono telo koje emituje svetlost. Ovo emitovanje svetlosti može dolaziti od veoma različitih uzroka. U pretežno najvećem broju slučajeva taj uzrok jeste temperatura samoga tela. Čvrsta i tečna tela počinju na 525° C vidno da svetle (Drapper-ov zakon). To početno svetljenje je tako slabo, da se može zapaziti tek u potpuno zamračenom prostoru i to sa organom oka koji je neosetljiv za boje (štapići); svetljenje nam zato izgleda belo-sivo i naziva se sivo usijanje. Pri povišavanju temperature prelazi telo prvo u crveno, zatim u žuto i najzad u belo usijanje. Ali ima i drugih uzroka koji mogu izazvati svetljenje tela, npr. električno pražnjenje kroz gasove, fluorescencija, fosforescencija, hemiski procesi itd. Izvesni organizmi imaju sposobnost da emituju svetlost (svitci, kao i organizmi koji izazivaju svetljenje u moru). Ove poslednje svetlosne pojave ne potiču od visoke temperature svetlosnih izvora, već od drugih uzroka. Ali svetlost koju ovi različiti izvori emituju, po svojoj fizičkoj prirodi je istovetna i za nju važe jedni isti zakoni. Zato je za ispitivanje ovih opštih zakona svedeno koji ćemo svetlosni izvor izabrati, glavno je da nam on daje onu vrstu svetlosti koja nam je potrebna. Najzgodniji svetlosni izvori su usijana tela (električna sijalica, plameni luk, gasno osvetljenje, sveća).

Tela koja nisu svetlosni izvori mogu ipak biti polazna tačka svetlosnog zračenja, ako bar delimično odbijaju svetlost koja pada na njih dolazeći od tela koja sama svetle. Takva tela koja sijaju u pozajmljenoj svetlosti nalaze se svuda oko nas. Tako se ponašaju svi predmeti koje vidimo, a koji po sebi nisu pravi svetlosni izvori, npr. od Sunca obasjana priroda, zidovi ili predmeti u sobi, na nebu Mesec i planete.

Za fizička dejstva svetlosti je bez značaja, da li ona dolazi od tela koje samo svetli ili od tela koje je osvetljeno, s pretpostavkom, da je u oba slučaja vrsta emitovane svetlosti ista.

§ 126. **Svetlosni zraci.** Pošto svetlost od svetlosnih izvora dospeva na druga tela i u naše oko, to se ona mora prostirati kroz prostor. Pokazalo se pri tome da taj prostor ne mora biti ispunjen materijom. Svetlost sa zvezda nekretnica dospeva sa ogromnih daljina do nas kroz prazan prostor. Svetlost se najbolje prostire kroz prazan prostor, tj. najbrže i sa najmanjim gubitkom energije.

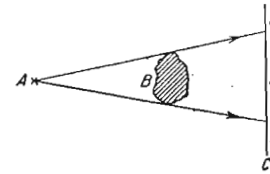
Na putu između jednog i drugog tela svetlost je za nas nevidljiva. Nju primećujemo samo po osvetljenju tela na koja ona padne. Svetlosna putanja može se videti ako je prostor u kome se svetlost prostire ispunjen prašinom ili maglom. Tačnije rečeno, mi ustvari ne vidimo tu putanju, već samo njene krajnje tačke. Ako svetlosni zrak padne na neku prepreku (zrno prašine itd.) on se dalje ne prostire. Kad svetlost prolazi kroz uzan otvor na prozoru u zamračenu sobu, tada se vidi putanja svetlosti po osvetljenim delićima prašine koji lebde u vazduhu. Takav sasvim uzan snop svetlosti naziva se svetlosni zrak. Teoriski se svetlosni zrak zamišlja bes-krajno tanak i pretstavlja se pravom linijom.

§ 127. **Providnost.** Izvesna tela imaju u manjoj ili većoj meri osobinu da propuštaju svetlost, da budu providna. Obično staklo je sasvim providno za sve vrste vidljive svetlosti (boje). Obojena stakla propuštaju samo jedan deo svetlosti. Izvesna tela propuštaju jedan deo svetlosti koja na njih pada, a drugi apsorbuju, i to apsorbuju utoliko više, ukoliko je deblji sloj tela na putu svetlosti. U sasvim tankim slojevima su sva tela manje ili više providna, pa čak i sami metali. Ako uzmemo u obzir i ono zračenje koje ne možemo okom da primetimo, onda je često puta oblast u kojoj je jedno telo providno, veoma uska. Tako npr. staklo koje je providno za vidljivi deo zračenja, ne propušta nevidljivu oblast koja je mnogo veća. Većina gasova je providna za svaku vrstu zračenja.

§ 128. **Pravolinisko prostiranje.** Putanje svetlosnih zrakova koji se nesmetano prostiru, jesu prave linije. Najjasniji dokaz ove činjenice jeste senka neprovidnih tela.

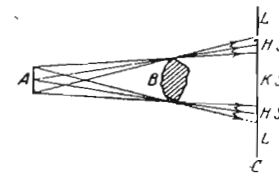
Neka je  $A$  (sl. 143) jedna svetla tačka,  $B$  neprovidno telo koje se nalazi na putu svetlosnih zrakova,  $C$  zaklon na koji pada svetlost, npr. beo

zid. Usled pravoliniskog prostiranja svetlosti dolazimo prostom konstrukcijom do zaključka, da svetlost pada samo na delove zaklona koji su označeni sa  $L$ , a ne pada na deo obeležen sa  $S$ . Taj poslednji deo zove se *senka tela*.



Sl. 143. Senka kad je svetlosni izvor mali.

Svi svetlosni izvori imaju izvesnu površinu i strogo uzet ne mogu se nikad smatrati kao tačke, iako se npr. električni plameni luk sa tankim ugljenim elektrodama može praktično smatrati kao svetla tačka. Ali se zračeća površina jednog svetlosnog izvora može uvek smatrati kao sastavljena iz svetlih tačaka (tačnije od vrlo malih svetlećih elemenata površine) i njeno dejstvo kao zbir dejstava pojedinih tačaka. U slučaju kad svetlosni izvor ne možemo da smatramo kao tačku, neprovidno telo (sl. 144) zaustavlja svetlost i ona ne dospeva samo na deo zaklona  $KS$  koji se ne može pravom linijom što ne prolazi kroz telo, vezati ni sa jednom tačkom svetlosnog izvora. Ovaj deo na zaklonu zove se *jezgro senke*. Telo  $B$  ne smeta osvetljavanju ostalog dela zaklona  $L$  jer se svaki deo površine zaklona može direktno spojiti sa svakom tačkom svetlosnog izvora, kao da neprovidno telo i ne postoji. Između ove zone, dakle između jezgra senke i potpuno osvetljene površine, nalazi se površina  $HS$  tako zvana *polusenka*, čije se tačke mogu samo sa izvesnim delovima izvora vezati. Na ovu površinu pada svetlost, ali samo od jednog dela svetlosnog izvora, i ona je utoliko manje osvetljena, ukoliko se više približavamo granici jezgra senke. Moglo bi se kazati da je osvetljenost jedne površine zaklona utoliko manja, ukoliko se manji deo svetlosnog izvora vidi sa toga mesta. Prelaz između jezgra senke i polusenke, polusenke i ostalog dela zaklona nije nagao, već u polusenci imamo postepen prelaz od potpunog zamračenja do potpunog osvetljavanja. Senka nema oštre granice. Širina polusenke zavisi od veličine svetlosnog izvora i od odnosa rastojanja između izvora tela i zaklona. Ako je presek neprovidnog tela manji od površine svetlosnog izvora, onda se na velikom rastojanju od tela uopšte i ne javlja jezgro senke, već samo polusenka.



Sl. 144. Jezgro senke i polusenka.

§ 129. **Pomračenje Sunca i Meseca.** Pomračenje Sunca se javlja kad Mesec dođe tačno između Sunca i Zemlje, kada dakle mesečeva senka pada na Zemlju. Jezgro mesečeve senke je vrlo malo u odnosu na zemljinu površinu, pa se zbog toga totalno pomračenje Sunca može videti samo na jednom malom delu Zemlje.

Kod pomračenja Meseca nalazi se Zemlja između Sunca i Meseca i baca svoju senku na Mesec. Površina senke je slučajno potpuno jednaka

mesečevoj površini, pa se zbog toga pomračenje meseca može istovremeno videti sa sviju tačaka na Zemlji. Između Meseca i ostalih planeta nastupaju takođe uzajamna pomračenja.

Kod izvesnih dvojnih zvezda, tj. kod sistema od dve vrlo bliske zvezde koje rotiraju jedna oko druge, primećuju se naizmenična menjanja jačine svetlosti koja dolaze otuda, što se čas jedna čas druga zvezda u tačno određenim intervalima vremena nalazi tačno između Zemlje i druge zvezde čiju svetlost zaklanja (vizuelne dvojne zvezde).

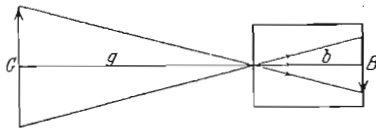
§ 130. **Mračna komora.** Mračna komora (sl. 145) je prostor koji ne propušta svetlost, a na prednjoj strani ima mali otvor spram koга se na suprotnoj strani komore nalazi zaklon. Neka se ispred otvora nalazi svetlo telo  $G$ . Na svaku tačku zaklona padaju kroz uski otvor svetlosni zraci koji polaze od jedne tačke tela, odnosno sa jedne vrlo male površine na telu. Na zaklonu ćemo dobiti dakle vernu sliku tela sa istom raspodelom boja i jačine svetlosti kao u pojedinim tačkama tela. Kao što se i na slici vidi lik je obrnut i ako bi ga posmatrali iza zaklona, kao npr. kod mračne komore fotografskog aparata, na levoj strani zaklona nalazi se desna strana lika, odnosno na desnoj leva. Ako je  $g$  razdaljina predmeta od otvora,  $b$  razdaljina između otvora i zaklona,  $G$  linearna veličina predmeta (tela),  $B$  veličina lika, tada imamo odnos

$$B : G = b : g \quad (1)$$

Odnos  $B/G$  označava se kao uvećanje; ono može biti veće, ali takođe i manje od 1. Ako je otvor dovoljno mali, oštrina lika zavisi vrlo malo od udaljenosti predmeta. Takva jedna komora može se upotrebiti i za fotografiju, stavljajući na mesto zaklona fotografsku ploču. Pri tome se mora znatno duže eksponirati nego sa običnim fotografskim aparatom, ali u naknadu zato ne moramo podešavati oštrinu slike. Sve dok je otvor na komori mali spram površina predmeta od kojih želimo da dobijemo oštar lik, oblik otvora nema nikakvog uticaja na kakvoću lika.

Kratkovida lica mogu udaljene predmete da vide oštro, ako ih posmatraju kroz fini otvor na nekom zaklonu (npr. komadu hartije). Očno sočivo ne igra tada veliku ulogu pri formiranju lika u zadnjem delu oka, već se pretežno javlja lik kao kod mračne komore.

§ 131. **Brzina svetlosti.** Pri običnom posmatranju izgleda nam kao da se svetlost trenutno prostire od svetlosnog izvora do mesta posmatranja. Ustvari to dolazi samo otuda što je brzina kojom se svetlost prostire neobično velika, tako da razdaljine koje dolaze u obzir na zemlji prelazi za veoma kratko vreme. Brzina svetlosti u praznom prostoru (vakuumu) iz-



Sl. 145. Mračna komora.

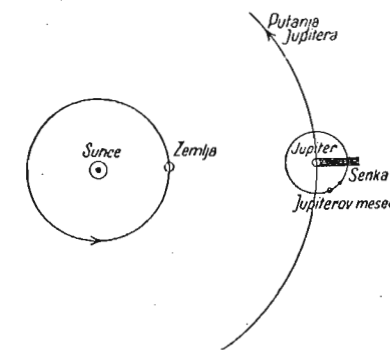
nosi okruglo  $3 \cdot 10^{10}$  cm/sec = 300.000 km/sec. Svetlost prema tome pređe za 1 sec  $7\frac{1}{2}$  zemljinih obima.

Sa Sunca svetlost dospe na Zemlju za 500 sec, sa Meseca za nešto više od 1 sec, sa zvezde  $\alpha$ -centauri koja je najbliža Suncu za 4,3 godine, a ima zvezda na tako velikom rastojanju, sa kojih svetlost stiže na Zemlju tek posle više miliona godina.

U svima telima (staklu, vodi itd.) je brzina svetlosti manja nego u vakuumu.

Najvažnije optičke metode za merenje brzine svetlosti jesu:

1. **Olaf Römer-ova metoda (1676).** Römer je za izračunavanje brzine svetlosti iskoristio pomračenje jednog od Jupiterovih trabanata, koje se javlja u podjednakim razmacima vremena. Da bi razumeli ovu metodu,



Sl. 146. Olaf Römer-ova metoda.

zamislimo u prostoru nepomičan svetlosni izvor  $A$  i jednog posmatrača, koji se brzinom  $v$  udaljuje od svetlosnog izvora. Izvor je tako udešen da se u podjednakim razmacima vremena gasi (zamračuje), tako da ga posmatrač ne vidi. Obeležimo vreme između dva uzastopna zamračenja sa  $T$ . Ako se posmatrač ne kreće ( $v = 0$ ), on će ova zamračenja zapaziti uvek u istom razmaku vremena  $T$  koji je povećan za  $x/c$ , tj. za vreme potrebno svetlosti da pređe put od izvora do posmatrača koji se nalazi na razdaljini  $x$ . Ali ako se posmatrač kreće kao što smo pretpostavili brzinom  $v$ , onda mu vremena između sukcesivnih pomračenja izgledaju sve duža. Neka se jedno zamračenje desi u vremenu  $t = 0$ , kad se posmatrač nalazi u  $x_1$ , a koje on zapazi posle vremena  $t_1 = x_1/c$ . Sledeće zamračenje se desi u vremenu  $t = T$  i njega posmatrač primeti kad se nalazi u položaju  $x_2$  posle vremena  $t_2 = T + x_2/c$ . Razlika u vremenu koju on zapaža jeste  $t_2 - t_1 = T_1 = T + (x_2 - x_1)/c$ . Put koji je on prešao za vreme  $T_1$  iznosi  $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = vT_1$ .

Prema tome je

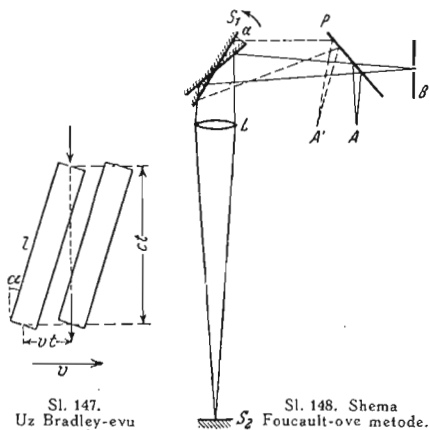
$$T_1 = T + \frac{v}{c} T_1 \text{ ili } c = v \frac{T_1}{T_1 - T}$$

Ako se posmatrač približava svetlosnom izvoru, dobijamo na isti način da je vreme  $T_2 = T - \frac{v}{c} T_2$ . Ako se kreće pod nekim uglom sa pravcem svetlosnih zraka, dobićemo onda neke druge vrednosti.

Zemlja pri svome obilaženju oko Sunca ima u toku vremena sve moguće pravce kretanja spram Jupitera (sl. 146) i tako se vreme između dva

pomračenja Jupiterovog meseca menja prema relativnom kretanju Zemlje i Jupitera. Iz tih posmatranja i iz poznate brzine Zemlje ( $v$ ), može se izračunati brzina svetlosti  $c$ . (Ovaj pojav je samo formalno sličan sa Doppler-ovim efektom o kome će biti govora).

2. Bradley-eva metoda (1727). Da bi razumeli ovu metodu zamislimo da kišne kapi koje vertikalno padaju, treba da propustimo kroz jednu cev sa dva uzana otvora na krajevima i to tako, da kapi ne dodirnu



Sl. 147.  
Uz Bradley-ovu metodu.

Sl. 148. Shema  
Foucault-ove metode.

zidove cevi. Ako se cev ne kreće, zadatak je prost i cev treba postaviti vertikalno. Ali ako se cev kreće npr. brzinom  $v$  paralelno spram zemlje (horizontale), onda da bi postigli željeni rezultat, cev ne smemo ostaviti vertikalnu. Neka je dužina cevi  $l$  a brzina kojom padaju kišne kapi  $c$ , onda je vreme potrebno da kap prođe kroz celu cev  $t = l/c$ . Ali za to vreme cev se je pomerila od svog prvobitnog položaja za dužinu  $x = vt$  (sl. 147). Kišna kap koja je ušla kroz gornji otvor neće više pasti na donji. Da bi to postigli

moramo cev nagnuti za izvestan ugao  $\alpha$  spram vertikale. Iz slike 147 možemo lahko videti da je  $t \tan \alpha = v/c$ . Ako nam je poznat ugao  $\alpha$  i brzina kretanja cevi, možemo izračunati i brzinu kišnih kapljica  $c$ .

Kod Bradley-eve metode mesto kišnih kapi imamo svetlost koja dolazi sa neke zvezde nekretnice, a na mestu cevi imamo durbin (mada bi u osnovi mogli upotrebiti i cev).  $v$  nam ovde pretstavlja brzinu Zemlje po svojoj putanji. U principu sve ostaje isto kao kod gornjeg zamišljenog ogledala sa kišnim kapima. Da bi svetlost prošla kroz durbin i da bi je dobili u sredini vidnog polja, moramo sada durbin nagnuti za izvestan ugao unapred u pravcu zemljinog kretanja. Tada nam izgleda kao da svetlost dolazi sa nekog drugog mesta i zvezda izgleda malo pomerena. Cirkumpolarne zvezde opisuju stoga u toku od godine dana prividno jedan mali krug, čija polovina ugaonog prečnika iznosi  $\alpha = 20,6''$ ; zvezde nekretnice koje leže u ravni ekliptike izgleda kao da se pravolinijski kreću tamo amo po nebu. Izvesne zvezde opisuju prividne ellipse. Sve te pojave nazivaju se *abercija*. Iz poznatog ugla  $\alpha$  i brzine Zemlje (30 km/sec) izračunata brzina svetlosti iznosi 300.000 km/sec.

Pored ove dve astronomske metode raspoložemo i tzv. zemaljskim metodama, tj. metodama pomoću kojih možemo meriti brzinu svetlosti na zemljinoj površini.

Mnogo tačnija od astronomskih metoda su merenja izvršena na Zemlji. Kao najvažniju navešćemo Foucault-ovu metodu. Osnovna ideja je sledeća (sl. 148): Kroz okrugli otvor  $B$  dolazi snop zrakova i pada na ravno ogledalo  $S_1$  prošav prethodno kroz planparalelnu staklenu ploču  $P$ . Ogledalo  $S_1$  može se brzo obrtati oko ose upravne na ravan crteža. Od  $S_1$  se svetlost odbija, pada na sočivo  $L$  koje je skuplja gradeći lik otvora  $B$  na izdubljenom ogledalu  $S_2$ . Posle odbijanja na izdubljenom ogledalu, svetlost se vraća tačno istim putem do ogledala  $S_1$ , od njega se takođe odbija i kad padne na planparalelnu ploču  $P$  jedan deo se odbija i daje lik otvora  $B$  u tački  $A$ . Ali ako se ogledalo  $S_1$  obrće, onda svetlost pri povratku ne ide tačno istim putem, pa će se stoga lik otvora nalaziti npr. u tački  $A'$ , dakle pomeren za duž  $AA'$  (radi jasnosti na slici je ova razmera uvećana).

Prema Foucault-ovoj osnovnoj zamisli je u novije vreme Michelson više puta merio brzinu svetlosti. On pri tome nije upotrebio ravno obrtno ogledalo, već dobro prosrebrenu staklenu prizmu čiji je presek pravilan poligon. Pri poslednjim merenjima taj mnogougao je imao 32 strane. Broj obrta se podesi tako da za vreme puta od obrtnog ogledala do izdubljenog ogledala i natrag na mesto površine sa koje se svetlost odbila, dođe upravo sledeća površina, što odgovara, ako obrtno ogledalo ima  $n$  strana, obrtanju za  $360^\circ/n$ . U tom slučaju lik se pojavi na istom mestu kao kod ogledala u miru. Neka je  $l$  razdaljina između prizme i izdubljenog ogledala, dakle  $2l$  put svetlosti,  $\tau$  vreme potrebno za 1 pun obrt prizme,  $\tau/n$  vreme za koje sledeća strana prizme dođe na mesto prethodne. Tada je vreme kretanja svetlosti  $t = 2l/c = \tau/n$  ili  $c = 2ln/\tau$ . Vreme  $\tau$  može se vrlo tačno odrediti iz broja obrta prizme.

Prva merenja je izvršio Michelson na razdaljini od 35 km između dva brega u Kaliforniji. Greška pri merenju toga rastojanja nije bila veća od 5 cm. Rezultat merenja je bio  $c = 2,99798 \cdot 10^{10}$  cm/sec<sup>-1</sup> sa ocenjenom tačnošću od 0,001 % ( $c$  svedeno na vakuum). Ova vrednost je obračunata na osnovu vrednosti podataka dobijenih u vazduhu. Pošto pri ovakvom svodenju na vakuum postoji izvesna nesigurnost, to je Michelson preduzeo još jedno merenje u cevima dužine 1500 m u kojima bi pritisak mogao da se smanji na 0,01 do 0,001 atmosfere. U cevima se svetlost odbijala 8 do 10 puta u oba pravca, pre no što bi pala po drugi put na obrtno ogledalo. Dužina puta je iznosila znači 12—15 km. Posle Michelson-ove smrti njegovi saradnici su izveli 1900 pojedinačnih merenja i ona su dala za rezultat  $c = 2,99774 \cdot 10^{10}$  cm/sec<sup>-1</sup>, što se vrlo dobro slaže sa prethodnom vrednošću, a tačnost merenja je procenjena i ovde na 0,001 %. Danas se uzima za brzinu svetlosti vrednost

$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}^{-1}.$$

Kako Foucault-ova metoda daje dobre vrednosti i na malim rastojanjima, to se ona može upotrebiti i za merenje brzina svetlosti u raznim telima,



npr. tečnostima. U tom slučaju put  $S_1 S_2 S_1$  ide delimično kroz tečnost. Od naročite važnosti su takva merenja u tečnostima koje se kreću (vidi Jamin-ov interferometar).

§ 132. **Merenje svetlosti.** Pošto je svetlost energija, to se može govoriti o količini svetlosti koju odašilje jedan svetlosni izvor. Tu se podrazumeva samo ona količina energije, koju izvor emituje za jedno određeno vreme u obliku vidljive svetlosti. Ukupna količina svetlosti koju svetlosni izvor izrači u svima pravcima za 1 sec, zove se svetlosna struja (fluks)  $\Phi$  izvora. Gustina svetlosne struje po pravilu nije ista u svima pravcima, tj. izvor u opštem slučaju ne zrači svetlost u svima pravcima podjednako.

Pod jačinom svetlosti koja polazi od izvora u elementarnom prostornom uglu  $d\Omega$  podrazumeva se veličina

$$J = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (2)$$

Struja svetlosti u prostornom uglu  $d\Omega$  iznosi  $d\Phi = Jd\Omega$ . Ako svetlosni izvor podjednako zrači u svima pravcima, onda je ukupna svetlosna struja  $\Phi = 4\pi J$ . Internacionalna jedinica jačine svetlosti je internacionalna sveća koja je tačno 10 % veća od ranije upotrebljavane Hefnerove sveće. Nova sveća je tako određena da odgovara 1/60 jačine svetlosti 1 cm<sup>2</sup> površine crnog tela na temperaturi od 1768° C, a to je temperatura na kojoj platina prelazi iz tečnog u čvrsto stanje.

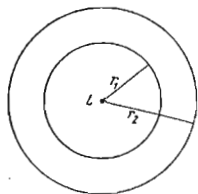
Jedinica svetlosne struje zove se lumen. Ona je jednaka struji koju svetlosni izvor malih dimenzija (svetla tačka) jačine 1 sveće emituje u prostornom uglu  $\Omega = 1$ . To odgovara struji energije od 0,0016 vata.

Pod jačinom osvetljenja neke površine podrazumeva se gustina svetlosne struje na njoj, tj. svetlosna struja koja pada na 1 cm<sup>2</sup> ili 1 m<sup>2</sup> površine. Njena jedinica je prema tome 1 lumen · cm<sup>-2</sup> = 1 fot, ili 1 lumen · m<sup>-2</sup> = 1 luks = 10<sup>-4</sup> fota.

Gustina svetlosti neke površine koja je bilo osvetljena ili sama svetli, jeste jačina svetlosti 1 cm<sup>2</sup> te površine u pravcu upravnom na nju. Njena jedinica je znači 1 sveća · 1 cm<sup>-2</sup> = 1 stilb.

Neka je L (sl. 149) svetlosni izvor jačine L koji se nalazi u središtu jedne lopte poluprečnika  $r_1$  i od koga se svetlosni zraci prostiru u svima pravcima podjednako. Na celu površinu lopte pada dakle količina svetlosne energije L, a na jedinicu površine  $J_1 = L/4\pi r_1^2$ . Zamislimo mesto ove drugu loptu poluprečnika  $r_2$ . Količina svetlosti koja pada na 1 cm<sup>2</sup> ove lopte iznosi  $J_2 = L/4\pi r_2^2$ . Jačine osvetljenja ovih dveju površina odnose se kao

$$J_1 : J_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} = r_2^2 : r_1^2 \quad (3)$$



Sl. 149. Promena jačine osvetljenja sa daljinom.

one su obrnuto srazmerne kvadratima rastojanja. Jačina osvetljenja jedne površine opada sa kvadratom njene razdaljine od svetlosnog izvora. Nalazimo dakle isti zakon kao i onaj za opadanje intenziteta oscilacija u jednom sfernom talasu, i stvarno ovde imamo isti slučaj, samo što ovde nemamo mehaničke oscilacije. Ali svakako oba slučaja imaju se smatrati kao posledica principa o konzervaciji energije. Svetlost je energija. Ako se ne javi nikakvo transformovanje ove energije, onda kroz loptu poluprečnika  $r_1$  mora proći isto toliko svetlosti koliko i kroz loptu sa poluprečnikom  $r_2$ , jer količina energije u pojasu između te dve lopte ne sme da se promeni. Jednačina 2 ne važi ako se svetlost na svome putu oslabi apsorpcijom.

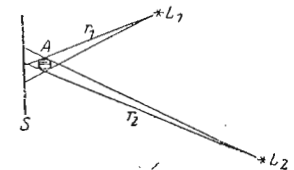
Ako svetlosni zraci koji padaju na površinu grade sa normalom na nju izvestan ugao  $\varphi$  može se lako dokazati da je tada jačina osvetljenja smanjena u odnosu  $\cos \varphi$  spram jačine pri normalnom padanju zrakova (Lambertov zakon). Količina svetlosne energije koja pada na zaklon srazmerna je sa  $\cos \varphi$ .

Kad dva svetlosna izvora jačina  $L_1$  i  $L_2$  osvetljavaju sa razdaljina  $r_1$  i  $r_2$  podjednako jednu istu površinu, tj. ako je  $L_1/4\pi r_1^2 = L_2/4\pi r_2^2$  tada se jačine svetlosnih izvora imaju kao

$$L_1 : L_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad (4)$$

§ 133. **Fotometrija.** Pod fotometrijom podrazumevamo merenje svetlosnih jačina. Svetlosne jačine se mere, kad se dotični svetlosni izvor uporedi sa nekim drugim koji je srađen sa normalnom svećom, odnosno kad se izvor uporedi sa samom svećom. Većina fotometrijskih metoda zasnovana je na primeni gornje jednačine (4). Pri tome nam koristi činjenica, da oko prilično tačno primećuje razlike u jačini osvetljenja, naročito ako svetlosni izvori nisu i suviše jaki. Najprostiji fotometri jesu sledeći:

Fotometar sa senkom. Izvor kome merimo jačinu i izvor koji nam služi za poredjenje, nalaze se ispred belog zaklona S. Pred samim zaklonom postavljen je uspravan štap A (sl. 150). Oba svetlosna izvora bacaju senku štapa na zaklon. Svetlosne izvore treba tako postaviti, da se obe senke nalaze blizu jedna druge. Ove senke nisu potpuno crne, već pretstavljaju, na inače osvetljenom zaklonu od oba svetlosna izvora, mesta osvetljena samo od jednog izvora. Svetlosni izvori se pomeraju sve dotle, dok obe senke ne izgledaju potpuno jednake jačine. Tada se jačine svetlosnih izvora imaju prema jednačini (3) kao kvadrati njihovih rastojanja od zaklona.



Sl. 150. Fotometar sa senkom.

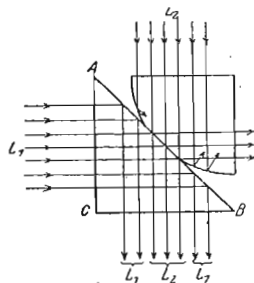
**Ricci-ev fotometar.** U jednoj cevi nalaze se dve bele površine nagnute spram ose cevi pod istim uglom. Cev se stavi između svetlosnih izvora i dotle pokreće, dok obe površine ne izgledaju podjednako osvetljene. Tada ponovo važi jednačina (4), pri čemu se rastojanja mere počev od obeju površina.

**Bunsen-ov fotometar sa masnom mrljom.** U sredini lista hartije, razapetog u jednom okviru, nalazi se masna mrlja (npr. komadić stearina koji je rastopljen zagrevanjem). Uzmimo, da svetlost pada na taj list samo s jedne strane. Oni zraci koji padnu na samu hartiju odbijaju se, a oni koji padaju na masnu mrlju dobrim delom prolaze kroz hartiju (sl. 151). Usled toga, ako posmatramo osvetljenu stranu fotometra, mrlja će nam izgledati tamna na osvetljenoj podlozi, a s druge strane svetla na tamnoj osnovi. Ako sada i s druge strane postavimo takođe jedan svetlosni izvor, možemo podešavanjem rastojanja izvora od zaklona udesiti tako osvetljavanje površine, da npr. posmatrano s desne strane kroz mrlju prolazi od svetlosnog izvora koji se nalazi s leve ista onolika količina svetlosti koju kroz nju gubi desna površina na taj način, što jedan deo svetlosti od desnog izvora prolazi kroz mrlju. U tom slučaju izgleda mrlja isto tako sjajna kao i njena okolina, tj. mrlja iščezne. Isto nastupa ako se posmatra s druge strane i ponova važi jed. (4). Da bi se dobili tačni rezultati mora se svaki izvor jedan za drugim sravniti sa jednim pomoćnim izvorom, i mrlja posmatrati svaki put u istom pravcu. Iščezavanje masne mrlje ne nastupa istovremeno za sve pravce posmatranja.



Sl. 151. Uz Bunsen-ov fotometar.

Za tačnija merenja služi najčešće **Lummer-Brodhun-ov fotometar**. Njegov glavni deo jeste tzv. **fotometarska kocka**. Ona se sastoji iz dve pravouglo prizme od stakla, od kojih je jedna hipotenuza zaokrugljena, izuzev jednog ravnog dela na sredini. Obe se prizme dodiruju kao što je na slici pretstavljeno (sl. 152). Svetlost iz izvora za poređenje pada na katete tih prizama. Kao što će docnije biti tačnije objašnjeno, kad svetlost dospe na graničnu površinu između stakla i vazduha, javlja se totalna refleksija svetlosti, dok kroz dodirnu ravan obeju prizama svetlost prolazi. Kroz površinu  $BC$  izlazi u sredinu vidnog polja samo svetlost koja potiče od izvora  $L_2$  dok na krajevima imamo samo svetlost od izvora  $L_1$ . Površina prizme  $AB$  igra dakle istu ulogu koju i hartija kod Bunsen-ovog fotometra. Svetlost koja od nje potiče, dolazi delimično od jednog, a delimično od



Sl. 152. Fotometarska kocka po Lummer-Brodhun-u

drugog izvora. Dodirna površina obeju prizmi odgovara masnoj mrlji. Zbog toga se ona i zove veštačka ili idealna masna mrlja. Dodirna površina iščezava, ako oba svetlosna izvora obasjavaju stranu  $AB$  podjednako jačinom. U praksi se ne osvetljava direktno prizma, već dve bele površine koje se nalaze na podjednakim rastojanjima od prizme, i podešava se da ove površine budu podjednako osvetljene. Ponova važi jednačina (4), pri čemu se rastojanje računa od površina do svetlosnih izvora. Kod ovoga fotometra ne mora se upotrebiti pomoćni svetlosni izvor.

Pored pomenutih običnih fotometara postoji i veliki broj novijih konstrukcija koje su zasnovane na drugim principima. Ali u svakom slučaju merenje se svodi na poređenje svetlosnog izvora sa izvorom poznatog intenziteta. Tako se npr. može svetlost jačeg izvora slabiti kad se između njega i zaklona umetne jedan sivi klin koji se može pomerati, ili se slabi pomoću dve Nikolove prizme koje se obrću jedna spram druge.

Kod tačnih merenja teži se da se ne meri okom, već da se uvedu neka druga sredstva koja će pokazivati razlike u jačini osvetljenja. Takvo jedno sredstvo jeste fotoelektrični element ili ćelija. Ovi elementi nalaze u fotometriji svaki dan sve više primene, npr. za merenje svetlosnog intenziteta zvezda.

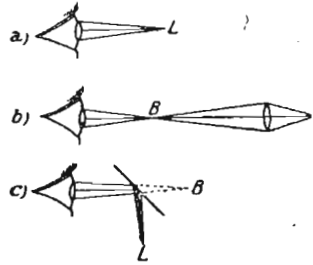
Tačna merenja jačine na čisto optički način mogu se vršiti samo onda kad svetlosni izvori imaju istu boju.

**§ 134. Zakon reciprociteta kod svetlosnih zrakova.** U sledećim stavovima govorićemo o uticaju tela koja se nalaze na putu svetlosnih zrakova i koja utiču na pravac zraka. Pri tome ćemo često upotrebljavati ovaj zakon: Ako je put koji pređe svetlosni zrak pod određenim uslovima poznat, onda će drugi svetlosni zrak koji je jedan deo toga istog puta prešao u suprotnom pravcu, preći i ostatak puta potpuno kao prvi zrak, samo u suprotnom pravcu. Ovaj princip reciprociteta kretanja svetlosti važi za odbijanje i prelamanje, ali ne i za savijanje svetlosti.

**§ 135. O optičkim slikama uopšte.** Kažemo da jedan predmet, u najprostijem slučaju svetlu tačku  $L$ , direktno vidimo, kada svetlosni zraci koji od njega polaze, dospevaju u naše oko bez promene pravca. U tome slučaju svetla tačka je vrh kupe od koja polaze divergentni zraci, naše oko čini bazu kupe, a svetla tačka je neposredan izvor tih zrakova (sl. 153 a). Svetlosni uticaj od jednog predmeta koji se nalazi u prostoru dolazi dakle od upadnih divergentnih zrakova, koji se pravoliniski prostiru od sviju tačaka predmeta do našeg oka.

Mi ćemo se sresti sa slučajevima kada divergentni zraci polazeći od predmeta takođe padaju u naše oko, ali samo ne dolaze pravoliniski kao u gornjem primeru. Za svetlosni utisak je merodavan jedino tok zrakova neposredno pred okom i mi tada vidimo predmet na onom mestu gde zraci

diverguju ili izgleda da postaju divergentni. Takva pojava naziva se slika predmeta. Ovdje su moguća dva slučaja. Ili se putanja zraka nekom optičkom napravom tako menja, da se oni skupljaju (konverguju) u jednoj tački, iz koje zatim diverguju kao od tačke jednog stvarnog predmeta. Ta tačka u prostoru  $B$  zove se **realan lik** odgovarajuće tačke predmeta (sl. 153 b). Realna slika može se uhvatiti na zaklonu. Ali se može takođe desiti da zraci prividno diverguju iz tačke  $B$ , dakle da se u njoj ne seku, već da samo izgleda kao da se seku. U tom slučaju imamo **uobraženu** (virtuelnu) sliku tačke (sl. 153 c, odbijanje na ravnom ogledalu). Takvu sliku ne možemo uhvatiti na zaklonu, jer u geometrijskoj tački  $B$  iz koje



Sl. 153. Kako se vide predmeti i likovi.  
a) Neposredno viđenje; b) stvaran i  
c) uobražen lik.

za oko izlaze svetlosni zraci, nema uopšte svetlosnih zraka koji polaze od predmeta.

Stvarni ili uobraženi likovi od predmeta postaju, kada pojedine tačke predmeta u prostorno pravilnom redu stoje na slici jedna pored druge. Likovi mogu biti veći ili manji od predmeta. Zatim mogu imati isti položaj u prostoru kao predmet, ali mogu biti za ma koji ugao u odnosu na predmet izvrnuti. Od naročitog je interesa slučaj kada lik ima potpuno isti položaj kao predmet, ili kad je sasvim izvrnut. Treba dakle razlikovati da li je lik uvećan ili umanjen, uspravan ili izvrnut. Može se takođe desiti da lik ne bude geometrijski sličan predmetu.

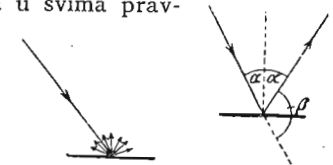
Lik nije oštar kada zraci koji dolaze u oko, a polaze iz iste tačke, ne diverguju ponovo iz jedne tačke, već iz neke veće površine. U tome slučaju ako uhvatimo lik na zaklonu, pojedine tačke predmeta nećemo ponova dobiti kao tačke, već kao male površine koje se delimično poklapaju (sravnj sa jednim fot. snimkom koji nije oštar).

Kod stvarnih likova koji se mogu uhvatiti na zaklonu pojam uvećanja ili umanjenja je jasan sam po sebi kao odnos između linearnih dimenzija lika i predmeta. Kod uobraženih likova koje vidimo samo okom, a koji igraju važnu ulogu kod optičkih instrumenata, uvećanje se posmatra drugojače.

§ 136. **Geometrijska optika.** U sledećim odeljcima nećemo posmatrati svetlost kao talasno kretanje. Za geometrijsku optiku koju u ovim odeljcima izlažemo (nasuprot talasnoj optici o kojoj ćemo govoriti dočnije, dovoljna je pretstava, da se svetlost koja polazi iz jedne svetle tačke sastoji od svetlosnih zraka koji diverguju iz te tačke. Zrake koji se nalaze u prostornom uglu koji polazi iz svetle tačke, nazivamo snop zraka.

Pored zakona o reciprocitetu kod kretanja svetlosnih zraka, služićemo se i Fermat-ovim principom koji je od velike koristi po geometrijsku optiku. Primenjen na optičke probleme on se često zove i princip (zakon) najkraćeg (najdužeg) svetlosnog puta ili zakon o najbržem (najsporijem) prispevanju svetlosti od jednog mesta do drugog.

§ 137. **Difuzno i pravilno odbijanje. Zakon odbijanja.** Svetlost koja pada na neku površinu, odbija se od iste u većoj ili manjoj meri. To je i uzrok što možemo videti tela koja ne svetle sama po sebi. Nema površina koje uopšte ne odbijaju svetlost. Pri ovoj pojavi, odbijanju, svetlost menja svoj pravac. U najvećem broju slučajeva, ova promena pravca nije ista za sve delove zraka; on se po odbijanju cepa u svima mogućim pravcima. Površina na koju pada svetlosni zrak postaje izvor zraka koji se razilaze u svima pravcima. Svetlost se pri ovome pojavu koji se naziva **difuzno odbijanje** rastura u svima pravcima, od jednoga zraka postaje mnogo delova (sl. 154).



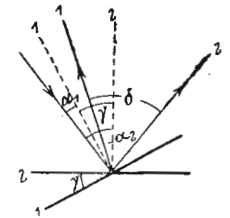
Sl. 154. Difuzno odbijanje.

Sl. 155. Pravilno odbijanje.

Ali na izvesnim površinama, naročito na uglačanim metalima, upadni zrak se ne rastura, već isključivo menja svoj pravac. Ovaj se slučaj naziva pravilno odbijanje ili refleksija. Za njega važi zakon koji smo pomenuli još kod talasnog kretanja. Upadni i odbijeni zrak grade sa normalom na površini povučenoj u tački na koju svetlosni zrak pada iste uglove  $\alpha$ , i oba zraka, upadni i odbijeni leže sa normalom u istoj ravni (sl. 155).

Površina koja pravilno odbija svetlost naziva se takođe i **ogledalo**. Najbolja ogledala za vidljivu svetlost jesu čiste srebrne površine, kao npr. srebrn sloj na običnim posrebnim ogledalima.

I granični slojevi providnih tela kao npr. stakla i vode, uvek odbijaju jedan deo upadne svetlosti i to i pri ulazu i pri izlazu svetlosti u telo (ogledanje sunca u prozorima i na vodenoj površini, udvojeni likovi kod debelih staklenih ogledala kod kojih slabija slika dolazi od odbijanja na prednjoj strani ogledala).

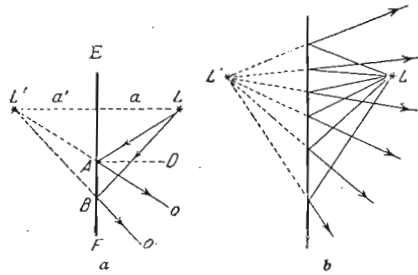


Sl. 156. Promena pravca odbijenog zraka pri obrtanju ogledala.

Ako neki svetlosni zrak pada na površinu koja pravilno odbija pod uglom  $\alpha$  (ugao između upadnog zraka i normale na površinu spuštene u upadnoj tački), on skrene od svoga prvobitnog pravca za ugao  $\beta = 180^\circ - 2\alpha$  (sl. 156). Ako se ogledalo (površina koja pravilno odbija) obrne za ugao  $\gamma$ , pravac odbijenog zraka menja se za ugao  $\delta = 2\gamma$ .

§ 138. **Likovi u ravnim ogledalima.** Na sl. 157 a pretstavljena je jedna svetla tačka  $L$  koja se nalazi na razdaljini  $a$  od ravnog ogledala.

Svetlosni zraci koji padaju na ogledalo odbijaju se u različitim pravcima prema zakonu za pravilno odbijanje, i to tako da izgleda posle refleksije kao da svi polaze iz jedne tačke  $L'$  koja se nalazi iza ogledala na normali povučenoj iz te tačke na ogledalo i na rastojanju  $a$ .

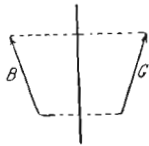


Sl. 157 a i b. Likovi na ravnom ogledalu.

Imamo 1.  $\sphericalangle LAE = \sphericalangle L'AE$ , a takođe i  $\sphericalangle LAB = \sphericalangle L'AB$ . 2.  $\sphericalangle LBA = \sphericalangle L'BA$ . 3.  $AB = AB$ . Zbog toga je trougao  $ABL$  jednak sa trouglom  $ABL'$ ,  $a = a'$  a  $LL'$  upravno na  $EF$ .

Isti dokaz može se izvesti za ma koji drugi zrak. Zraci posle odbijanja izgleda kao da svi polaze iz tačke  $L'$  jer se tamo seku njihova produženja.  $L'$  je uobražen lik tačke  $L$ .

Ako se sve što je kazano za dobijanje lika jedne svetle tačke prenese na pojedine tačke jednog predmeta, dolazimo do konstrukcije lika predmeta  $G$  kao što je naznačeno na sl. 158. Ravna ogledala daju prema tome uobražene likove jednake po veličini i dužinskom pravcu sa predmetom.



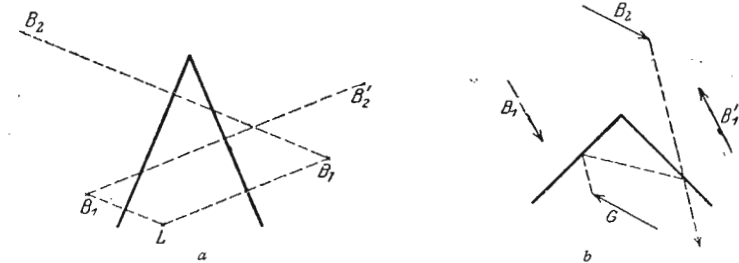
Sl. 158. Lik predmeta u ravnom ogledalu.

Pri dobijanju likova jednog predmeta, npr. nekoga lica, izgleda, što je razumljivo, kao da su leva i desna strana izmenile mesta. U stvari ono što je desno na predmetu desno je i na liku, što je levo levo, samo što strana predmeta koja je okrenuta ogledalu izgleda u liku obrnuta spram stvarnog položaja za  $180^\circ$ . Većina ljudi izgledaju zbog jake asimetrije crta na licu drukčije nego kad se neposredno gledaju.

Kad se dva ogledala postave pod izvesnim uglom, onda pri pogodnom položaju posmatrača svetlost koja potiče od jedne svetle tačke, dospeva u njegovo oko tek pošto se uzastopno jednom ili više puta odbije od oba ogledala. Tada postaje više, u opštem slučaju bezbrojno mnogo likova. Svi likovi zajedno sa svetlom tačkom leže na jednom krugu, čije je središte u temenu ugla koji ogledala međusobom zaklapaju (sl. 159 a).

Naročito je prost odnos kada je ugao između ogledala za ceo broj puta manji od  $360^\circ$ . U tome slučaju izvesni likovi se uvek poklapaju. Na ovome je zasnovan poznati kaleidoskop kod koga usled uzastopnog ogledanja predmeta nepravilnog oblika, postaju pravilne figure. Od interesa su još ogledala pod uglom od  $90^\circ$ . Sl. 159 b pokazuje lik predmeta  $G$  koji je postao posle dva odbijanja. On je obrnut spram lika koji postaje posle odbijanja na jednom prostom ogledalu. Čovek koji gleda u takvo ogledalo vidi vernu sliku sa nepromenjenim stranama. U tom slučaju postaju dva

lika  $B_1$  i  $B'_1$  pri prvom odbijanju. Obadva lika koja postaju pri drugom odbijanju poklope se, a na isto mesto padaju likovi postali posle četvrtog,

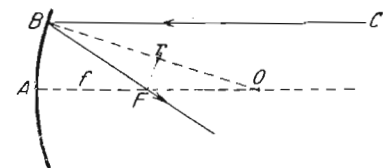


Sl. 159 a i b. Likovi u ogledalima pod uglom.

šestog, osmog itd. odbijanja. Likovi postali posle trećeg, petog, sedmog itd. odbijanja poklapaju se sa likovima postalim posle prvog odbijanja.

Pravilno odbijanje na običnoj ravnoj staklenoj površini pokazuje vrlo lepo sledeći ogled. Ispred i iza staklene ploče nalaze se dve potpuno jednake sveće i to tako, da se lik jedne poklapa tačno sa drugom svećom. Ako se posmatra s jedne strane pa se sveća na toj strani upali, izgleda kao da gori i druga, jer uobraženi lik plamena pada tačno na fitilj druge sveće.

§ 139. **Sierna ogledala.** Od krivih ogledala naročito su važna ona čije su površine sferne, tj. delovi loptine površine. Prema tome, da li je ogledajuća površina ispupčena ili izdubljena, razlikuju se konveksna (ispupčena) i konkavna (izdubljena) ogledala. Pri izvođenju sledećih zakona uvek ćemo pretpostaviti da su ogledala samo mali delovi sferne površine, tj. da su dimenzije ogledala male spram njihovog poluprečnika krivine. Normala podignuta na sredini ogledala zove se osa ogledala, zrak koji pada na ogledalo u pravcu ose zove se glavni zrak. Svetlosni zrak koji pada na ogledalo odbija se od njega tako, kao da se odbijanje vrši na tangencijalnoj ravni u toj tački. Kad pada na ogledalo upravno, odbija se u istom pravcu.



Sl. 160. Odbijanje na izdubljenom ogledalu.

U pravcu  $CB$  paralelno sa osom pada svetlosni zrak u tačku  $B$  ogledala sa poluprečnikom krivine  $r$ , i odbija se u pravcu  $F$  (sl. 160). Označimo sa  $O$  centar krivine ogledala. Po zakonu o odbijanju je  $\sphericalangle CBO = \sphericalangle FBO$  dalje je  $\sphericalangle CBO = \sphericalangle FOB$ . Dakle trougao  $BFO$  je ravnokrak. Zbog toga je dalje  $FO = r/2 \cos \sphericalangle FOB$ . Zbog učinjenih pretpostavki o dimenzijama ogledala ugao  $FOB$  mora biti vrlo mali. U

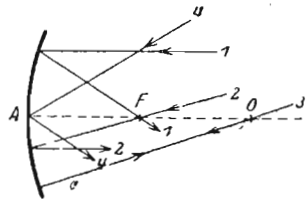
tom slučaju je  $\cos \angle FOB$  približno ravan jedinici, tako da se bez velike greške može staviti  $FO = r/2$ . Odatle izlazi dalje:

$$AF = FO = f = \frac{r}{2} \quad (6)$$

Sa gornjom pretpostavkom ova jednačina važi i za svaki drugi zrak paralelan osi. Odatle izlazi, da se svi zraci koji na ogledalo padaju paralelno sa osom seku u tački  $F$ , koja se zove žiža. Ona leži na glavnoj osi u sredini između ogledala i njegovog centra krivine. Razdaljina  $AF = r = r/2$  zove se žižna daljina izdubljenog ogledala. Ona je jednaka polovini poluprečnika krivine  $r$ .

Po zakonu o reciprocitetu zrak koji polazi iz žiže i pada na ogledalo, odbija se od njega i produžuje put paralelno sa osom.

Zraci koji dolaze iz jedne veoma udaljene svetle tačke na osi, mogu se smatrati sa velikom tačnošću kao paralelni sa osom i paralelni između sebe. Posle odbijanja od ogledala oni svi prolaze kroz žižu i iz nje diverguju. U žiži stoga postaje realan lik te veoma udaljene, ili kako se kaže beskonačno udaljene tačke.



Sl. 161. Četiri najvažnija slučaja odbijanja kod izdubljenog ogledala.

Na sl. 161 predstavljena su četiri najvažnija slučaja za konstrukciju lika kod izdubljenog ogledala.

1. Zrak paralelan sa osom posle odbijanja prolazi kroz žižu.

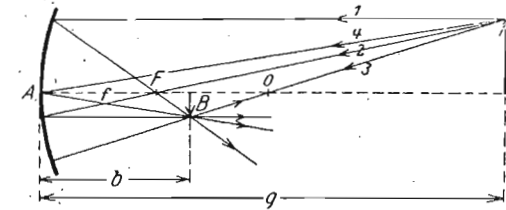
2. Zrak koji pada na ogledalo kroz žižu, posle odbijanja kreće se paralelno sa osom.

3. Zrak koji prolazi kroz centar krivine i pada normalno na ogledalo, posle refleksije vraća se u istom pravcu.

4. Upadni zrak koji gradi sa osom izvestan ugao, posle odbijanja gradi isti toliki ugao sa osom. Ili, zrak koji pada u teme ogledala (tačka preseka ogledala i ose), i pre i posle odbijanja gradi sa osom isti ugao.

Pomoću ovih pravila može se sada konstruisati lik u jednom izdubljenom ogledalu. Pri tome dokle god važi pretpostavka o dimenzijama ogledala, svi zraci koji polaze iz jedne tačke i padaju na ogledalo, posle odbijanja se stvarno seku u jednoj tački (bar približno) koja nam predstavlja stvaran lik, ili izgleda kao da se seku u jednoj tački (uobražen lik). Za iznalaženje ove tačke preseka dovoljna su nam samo dva zraka. Uzmimo da treba naći lik strele  $G$  (sl. 162). Neka je njeno rastojanje od ogledala veće od njegovog poluprečnika  $r$ . Da bi našli mesto gde postaje lik npr. strelinog vrha, povucimo prvo od vrha strele jedan zrak paralelan sa osom,

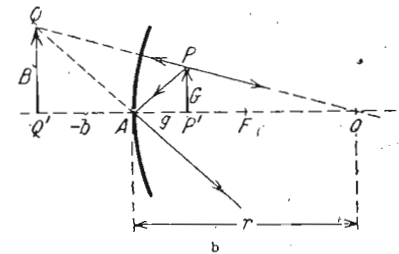
koji posle odbijanja prolazi kroz žižu, i drugo, zrak koji prolazi kroz žižu, a posle odbijanja vraća se paralelno sa osom. Možemo nacrtati i ostala dva



Sl. 162. Konstrukcija lika na izdubljenom ogledalu. Stvaran lik.

zraka i to jedan koji prolazi kroz središte i odbija se u istom pravcu, i drugi koji pada u teme ogledala i odbija se od njega pod istim uglom pod kojim je pao. U zajedničkoj tački preseka ovih zraka postaje realan lik vrha strele. Na isti način možemo dobiti likove i ostalih tačaka predmeta. Lik one tačke predmeta koja leži na osi, ostaje i sam na osi. Na taj način postaje lik predmeta, kao što je to predstavljeno na sl. 162. On je 1. stvaran, jer postaje od stvarnog preseka zraka, 2. umanjen, 3. izvrnut.

Ako predmet postavimo u mesto na kome se na sl. 162 nalazi lik predmeta  $B$ , onda je očigledno po stavu o reciprocitetu hoda zrakova, da će se novi lik nalaziti na onom mestu gde je malo pre bio predmet, tj. u položaju  $G$ . Lik i predmet mogu dakle da izmene svoja mesta. U poslednjem slučaju je lik takođe stvaran, izvrnut, ali uvećan. Kad se svetla tačka nalazi u žiži ogledala, njeni se zraci odbijaju paralelno sa osom, njen se lik nalazi u beskonačnosti. Ako se jedan predmet iz beskonačnosti približava ogledalu, njegov beskrajno mali lik koji se u početku nalazio u žiži, postepeno se udaljuje od ogledala i povećava se. Kad predmet dođe u središte ogledala i lik se nalazi u središtu, realan je i po veličini isti kao i predmet, samo je izvrnut. Ako se predmet i dalje približava i dospe u žižu, njegov lik se udaljuje do beskonačnosti i postaje beskrajno veliki. Pri daljem približavanju ne dobijamo više stvaran lik. Kad se dakle predmet nalazi na razdaljini od ogledala koja je veća od dvostruke žižne daljine, njegov lik je umanjen; ako se nalazi tačno na dvo-



Sl. 163. Uobražen lik kod izdubljenog ogledala.

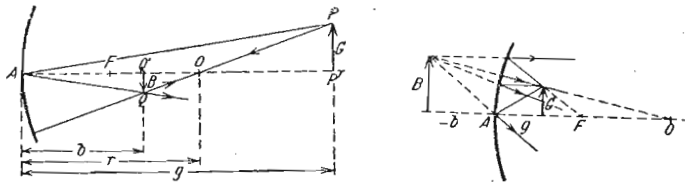
strukoj žižnoj daljini, lik ima istu veličinu kao i predmet; kad se nalazi između žiže i centra krivine, lik je povećan.

U slučaju kad je predmet između žiže i ogledala, dobijamo njegov uobražen lik iza ogledala. Konstrukciju lika koji se dobija po istim zakonima kao i malo pre pokazuje sl. 163. Likovi koji se odbijaju iza ogledala su uobraženi, uspravni i uvek uvećani. Treba zapaziti, da je pri

konstrukciji lika svejedno da li zraci stvarno polaze iz žiže ili centra krivine, ili dolaze samo iz tog pravca, dakle njihova produženja prolaze kroz te tačke.

Mnoga toaletna ogledala su udubljena i daju uobražen malo uvećan lik. Kod reflektora upotrebljavaju se ova ogledala da se svetlost koncentriše u jednom pravcu. Svetlosni izvor se postavi u žižu, tako da se svi zraci odbijaju paralelno sa osom ogledala. Deo svetlosti koncentrisane na ovaj način je utoliko veći, ukoliko je veći otvor ogledala, tj. otvor kupe u kojoj se nalaze zraci koji padaju na ogledalo. Ali za veličinu toga otvora postavljena je dosta uska granica zbog dimenzija ogledala o kojoj je govoreno. Ovo ograničenje ne važi za paraboloidno ogledalo koje sve zrake koji dolaze iz njegove žiže odbija paralelno sa osom nezavisno od veličine otvora, kao što se može dokazati na osnovu geometrijskih osobina parabole.

Na sl. 164 konstruisan je lik predmeta pomoću dva zraka od kojih jedan prolazi kroz središte  $O$ , a drugi pada u teme ogledala  $A$ . Zbog toga



Sl. 164. a) Stvaran lik. b) Uobražen lik na izdubljenom ogledalu.

što je  $\sphericalangle PAP' = \sphericalangle QAQ' = 90^\circ$  i  $\sphericalangle AP'P = \sphericalangle AQQ' = 90^\circ$ , trougli  $APP'$  i  $AQQ'$  su slični. Neka je  $G$  veličina predmeta, a  $B$  veličina lika,  $g$  daljina predmeta, a  $b$  daljina lika od temena  $A$ . Tada imamo:

$$B : G = b : g \quad (7)$$

Ali su i trougli  $OQQ'$  i  $OPP'$  slični. Iz njih izlazi

$$B : G = (r-b) : (g-r),$$

te je

$$b : g = (r-b) : (g-r) \text{ ili } \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (8)$$

Jednačina (8) dobija naročito prost oblik ako umesto  $g$  i  $b$  uvedemo nove veličine  $g' = g - f$ , i  $b' = b - f$ . Prostim računom nalazimo da je

$$g'b' = (g-f) \cdot (b-f) = f^2 \quad (9)$$

Žižna daljina  $f$  je dakle reometrijska sredina iz daljina  $g$  i  $b$ .

Odnos  $B/G = \gamma$  pretstavlja uvećanje ogledala (odnosno umanjeње). Prema jednačini (7) imamo:

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (10)$$

Jednačina (8) odnosno (9) omogućava nam da izračunamo mesto lika kad je poznata daljina predmeta  $g$  i žižna daljina  $f$ .

Tačnost gore izvedenih jednačina može se eksperimentalno ispitati, stvarajući na zaklonu lik jedne sijalice (najbolje one sa jednim usijanim koncem) i mereći daljine  $g$  i  $b$ ,  $1/g + 1/b$  pokazuje se kao konstantno i jednako je  $1/f$ . Na ovaj način se može odrediti i žižna daljina  $f$ , kao i poluprečnik krivine ogledala  $r = 2f$ .

Potpuno analognim putem dobijaju se odnosi za virtuelne likove (slika 165). U tome slučaju je ponovo:

$$B : G = b : g \quad (11)$$

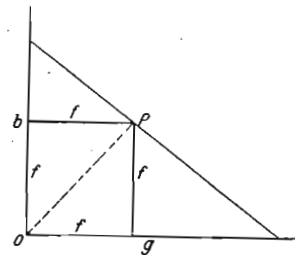
ali je

$$B : G = (r+b) : (r-g).$$

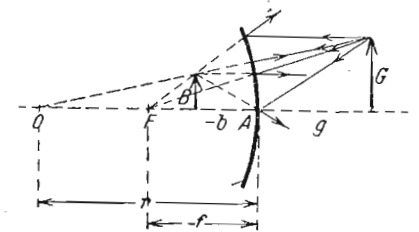
Iz ove jednačine izlazi:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (12)$$

Ovaj rezultat se već nalazi i u jednačini (8) kad se uzme da je za  $g < f$  veličina  $1/b$  negativna, što fizički znači da se  $b$  nalazi s druge strane



Sl. 165a. Grafičko određivanje  $f$  iz  $b$  i  $g$ .



Sl. 165b. Konstrukcija lika na ispupčenom ogledalu.

ogledala. Likovi su uvek uspravni i uvećani. I u ovom slučaju je uvećanje

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (13)$$

Žižna daljina izdubljenog ogledala kao i sočiva može se iz veličina  $b$  i  $g$  naći lako grafičkim putem, kad se iz početka  $O$  (sl. 165) prenesu  $g$  i  $b$  na ose pravouglog koordinatnog sistema i spoje njihovi krajevi jednom pravom. Iz  $O$  se povuče pod uglom od  $45^\circ$  druga prava koja seče ovu prethodnu. Iz tačke preseka  $P$  se povuku normale na  $b$  i  $g$  i na taj način dobijemo kvadrat sa stranom  $f$ . Iz sl. 165 a se odmah vidi da je  $(g-f) : f = f : (b-f)$ , što je identično sa jednačinom (9).

§ 140. **Likovi na ispupčenim ogledalima.** Kod ispupčenih ogledala svi zraci koji padaju paralelno sa osom odbijaju se tako, kao da dolaze iz tačke  $F$  iz a ogledala, koja leži na osi, a udaljena je za  $r/2 = f$  od temena (sl. 165). Ova tačka se zove uobrazena žiža i duž  $f$  se označava kao (negativna), žižna daljina izdubljenog ogledala. Zraci koji dospevaju upravno na ogledalo, odbijaju se u istom pravcu; oni koji padaju u teme, odbijaju se pod istim uglom sa osom. Odavde vidimo da se likovi kod ispupčenih ogledala (sl. 165) konstruišu na potpuno isti način kao i kod izdubljenih.

Istim rezonovanjem, kao i kod izdubljenog ogledala, izlazi da je i kod ispupčenog uvećanje

$$r = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (14)$$

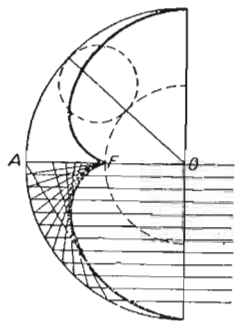
Jednačina ogledala glasi ovde:

$$-\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (15)$$

I ovaj obrazac postaje identičan sa jednačinom (8), kad se uzme da  $b$  i  $f$  imaju negativne vrednosti jer leže iza ogledala.

Ako je predmet u beskrajnosti, njegov lik je beskrajno mali i nalazi se u (uobrazenoj) žiži. Kad se predmet približava i lik se približava ogledalu i raste, ali uvek ostaje umanjen, uspravan i uobrazen.

Izdubljena i ispupčena cilindrična ogledala daju od predmeta koji se nalaze pred njima, na daljini manjoj od polovine poluprečnika krivine, deformisane uobrazene likove, pri čemu dimenzije predmeta koji leže u pravcu ose ostaju nepromenjene, a one upravne na osu, uvećane odnosno smanjene.



Sl. 166. Katakauстика na izdubljenom ogledalu.

Ako izdubljena ogledala nisu mala u odnosu na poluprečnik, tj. ako pomenuta pretpostavka o dimenzijama ogledala nije ispunjena, onda se zraci koji padaju paralelno sa osom ne seku više svi u jednoj tački. Odbijeni zraci imaju jednu anvelopu, tzv. katakaustiku (sl. 166). Može se zamisliti, da presek te površine postaje kad se krug poluprečnika  $r/4$  obrće po periferiji kruga sa poluprečnikom  $r/2$  opisanom iz centra krivine. Katakaustiku opisuje tada ona tačka manjega kruga, koja dodiruje veći krug u tački ose  $F$  tj. u žiži prema ranijoj definiciji. Katakauстика je dakle epicikloida. Zraci koji padaju paralelno skupljaju se posle odbijanja u prostoru između ogledala i katakaustike.

## Prelamanje svetlosti.

§ 141. **Zakoni prelamanja.** Kad svetlost koso pada na neko providno telo, npr. staklo, kvarc, vodu itd. primećuje se da ona, kako pri ulazu tako i pri izlazu iz tela, menja svoj pravac. Svetlost se prelama i ta pojava se naziva prelamanje ili refrakcija. Prelamanje se javlja uvek kad svetlosni zrak prelazi iz jednog tela u drugo koje nema sa prvim iste optičke osobine. Ono dolazi usled različitih brzina svetlosti u tim telima. Kod običnog prelamanja upadni zrak, normala podignuta u upadnoj tački i prelomljeni zrak nalaze se uvek u istoj ravni.

Mi smo slučaj prelamanja posmatrali već u opštem delu nauke o talasnom kretanju. Svetlost je takođe talasno kretanje, iako ne mehaničke prirode. Ali ipak i za svetlost važe isti zakoni koje smo tamo izveli, a naročito zakon o prelamanju

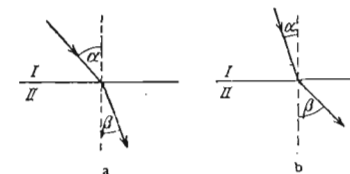
$$n_{12} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (16)$$

koji je za svetlost otkrio Snellius 1615.  $n_{12}$  je uzajamni indeks prelamanja za ta dva tela.

U jednačini (16)  $c_1$  i  $c_2$  označavaju brzine svetlosti u I i II sredini;  $\alpha$  je upadni, a  $\beta$  prelomni ugao koji zrak gradi sa normalom na graničnoj ravni tih dveju sredina (sl. 167).

**Tabela**  
indeksa prelamanja nekih tela

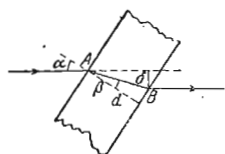
|                                    |        |
|------------------------------------|--------|
| Voda . . . . .                     | 1,3332 |
| Led . . . . .                      | 1,31   |
| Ugljen disulfid . . . . .          | 1,6291 |
| Kron staklo, lako . . . . .        | 1,5153 |
| Kron staklo, teško . . . . .       | 1,6152 |
| Flint staklo, lako . . . . .       | 1,6085 |
| Flint staklo, teško . . . . .      | 1,7515 |
| Flint staklo, najteže . . . . .    | 1,9    |
| Fosfor u CS <sub>2</sub> . . . . . | 1,97   |



Sl. 167 a i b. Uz prelamanje svetlosti.

Fresnel-ova konstrukcija prelomljenog zraka važi razume se i u optici. Ako je brzina svetlosti u I sredini veća nego u II, onda se zrak lomi ka normalu,  $\alpha > \beta$  (sl. 167a), a u obrnutom slučaju lomi se od normale (slika 167b). Brzina svetlosti u vakuumu je veća nego u ma kome telu, shodno tome vakuum ima najmanji indeks prelamanja. Obično se stavlja da je indeks prelamanja praznog prostora ravan jedinici. Indeksi prelamanja svih materijalnih tela su dakle veći od 1 u odnosu na vakuum. U tabeli 30 dato je nekoliko primera indeksa prelamanja raznih tela u odnosu na vakuum. Oni se odnose na natrijumovu žutu (D) liniju i na 18° C. Kao što ćemo docnije videti, indeks prelamanja zavisi od boje (talasne dužine) svetlosti. Indeksi prelamanja gasova, pa dakle i vazduha, vrlo malo se razlikuju od 1. U većini slučajeva može se smatrati da na granici jedne prelamajuće sredine nema vazduha, nego da se nalazi prazan prostor.

Uzajamni indeks prelamanja  $n_{12}$  dveju sredina može se naći iz njihovih indeksa prelamanja  $n_1$  i  $n_2$  spram vakuuma. Imamo da je



Sl. 168. Prelamanje kroz planparalelnu ploču.

Izraz

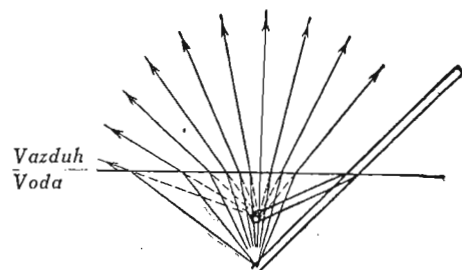
$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$R = \frac{M n^2 - 1}{\rho n^2 + 2}$$

zove se molekularna refrakcija jednog tela sa indeksom prelamanja  $n$ .  $M$  označava molekularnu težinu, a  $\rho$  gustinu tela.

Telo koje ima veći indeks prelamanja od nekog drugog, zove se optički gušće, a ovo sa manjim indeksom optički ređe. Ovi nazivi nemaju nikakve veze sa gustinom, odnosno specifičnom težinom tela.

Pustimo svetlosni zrak da pada na beo zaklon. Ako se na put zrakova stavi koso debela staklena ploča sa planparalelnim stranama ili stakleni



Sl. 169. Prelamanje svetlosti u vodi.

sud sa planparalelnim zidovima napunjen vodom, svetla mrlja se pomakne na zaklonu. Iz slike 168 vidi se da je ovo pomeranje u stranu  $\delta = AB \sin (\alpha - \beta)$ , i da je dalje  $AB = d / \cos \beta$  ( $d$  je debljina ploče). Prema tome je  $\delta = d (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) / \cos \beta$  ili kako je  $\sin \alpha = n \sin \beta$

$$\delta = d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{V n^2 - \sin^2 \alpha} \right)$$

Iz prelamanja svetlosti u vodi objašnjava se zašto jedan koso zamočen predmet izgleda na površini izlomljen, a ispod površine skraćen (sl. 169).

Pod optičkom dužinom puta jednog zaka podrazumeva se proizvod  $ns$  iz pređenog puta  $s$  i indeksa prelamanja  $n$  na koji zrak nailazi. Neka je  $c$  brzina svetlosti u toj sredini,  $c_0$  brzina u vakuumu; da zrak pređe put  $s$  potrebno mu je vreme

$$t = \frac{c}{s} = \frac{ns}{c_0}$$

Odavde izlazi, da zrak jednake optičke puteve prelazi uvek za isto vreme.

§ 142. Savijeni svetlosni zraci. Prelamanje u atmosferi. Ako dva sloja istog tela naležu jedan na drugi, i u toj dodirnoj površini imaju različite indekse prelamanja, onda se prelamanje javlja i u toj graničnoj ravni. To se može dogoditi, kada se od mesta do mesta menja gustina tela, npr. u vazduhu usled promene temperature sa visinom. Ako je promena indeksa

prelamanja neprekidna, onda se i zrak neprekidno savija, kao što je to shematski pretstavljeno na sl. 170. To npr. izaziva poznatu pojavu Fata morgana i slične druge pojave. Vazduh koji se diže uvis od zagrejane



Sl. 170. Savijanje svetlosnog zraka pri promeni indeksa prelamanja.  $n$  opada odozdo naviše.

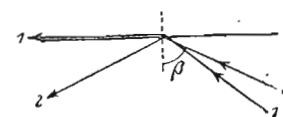
zemlje, usled svoje termičke nehomogenosti, nije ni optički homogen. Svetlost koja prolazi kroz takav vazduh lomi se stalno i sasvim nepravilno, pa zbog toga i posmatrani predmeti izgledaju deformisani. Ista pojava savijanja zapaža se i u rastvorima u kojima koncentracija još nije izjednačena na svima mestima.

Zbog istih optičkih poremećaja javlja se i treperenje zvezda. Kupa svetlosnih zrakova koja od zvezda nekretnica dospeva do našeg oka, zbog ogromne udaljenosti zvezde, jedva je i u najvišim slojevima atmosfere nešto šira. Mali mestimični optički poremećaji u atmosferi izazivaju stoga i poremećaj prostiranja svetlosti do našeg oka. Svetlosni konus koji dolazi do oka od planeta koje su mnogo bliže, ima u gornjim atmosferskim slojevima znatan prečnik, npr. kod Marsa okruglo 10 m. Male se mestimične optičke nepravilnosti uzajamno izjednačuju i ne izazivaju jaču promenu u njihovom svetljenju. Time se objašnjava da planete ne trepere.

§ 143. Totalna refleksija. Svetlosni zrak pada pod uglom  $\beta$  na graničnu ravan između dve sredine, optički gušće i optički ređe. Uzajamni indeks prelamanja za ove dve sredine neka je  $n_{12} = n_1/n_2$  ( $n_1 > n_2$ ). Prelomni ugao u drugoj sredini ravan je tada

$$\sin \alpha = n_{12} \sin \beta$$

Ako je  $\sin \beta = 1/n_{12}$  onda je  $\sin \alpha = 1$  dakle  $\alpha = 90^\circ$  zrak dakle izlazi iz gušće sredine paralelno sa graničnom ravninom (sl. 171, zrak 1). Ako se



Sl. 171. Uz totalnu refleksiju.

upadni ugao  $\beta$  još poveća (sl. 171, zrak 2) onda je  $n_{12} \cdot \sin \beta > 1$  i nema više ni jednog ugla koji bi jednačinu zadovoljio, jer  $\sin \alpha$  ne može biti veće od 1. U tom slučaju više nemamo prelamanja, već se svetlosni zrak odbija od granične ravni, kao od savršenog ogledala natrag u prvu

sredinu, i to prema poznatom zakonu o odbijanju. Ova pojava naziva se totalna refleksija i to stoga, što se svetlost stvarno potpuno odbija, dok kod obične refleksije uvek jedan deo svetlosti prodire u reflektujuću sredinu, dakle ne odbija se. Ugao dat jednačinom

$$\sin \beta = \frac{1}{n_{12}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{17}$$

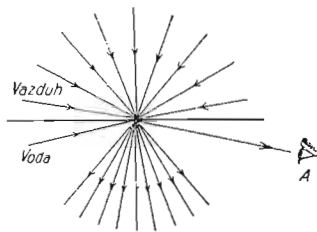
zove se granični ugao totalne refleksije za uočene dve sredine. Ako



se sredina graniči sa vakuumom odnosno vazduhom ( $n_2 = 1$ ,  $n_1 = n$ ), tada je  $\sin \beta = 1/n$ . Totalnu refleksiju otkrio je Kepler (1611).

Kad se u staklenom sudu sa vodom nalazi jedno obrtno ogledalo na koje padaju svetlosni zraci i od koga se odbijaju ka površini, može se lako posmatrati totalna refleksija, naročito ako se vodi doda malo fluoresceina, tako da se svetlosna putanja učini vidljivom. Granični ugao totalne refleksije iznosi za vodu/vazduh  $48,5^\circ$ .

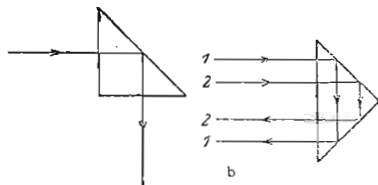
Po principu reciprociteta koji važi za prostiranje jednog svetlosnog zraka, svetlost koja pada na graničnu ravan između optički ređe i optički gušće sredine paralelno sa samom ravinom, prelama se u gušćoj sredini



Sl. 172. Uz prelamanje i totalnu refleksiju u vodi.

pod graničnim uglom. Ako na jednu tačku granične površine na vodi npr. pada svetlost u svima pravcima (npr. difuzna dnevna svetlost), onda će se svetlost koja prodire u vodu iz svake tačke na površini nalaziti skupljena u vodi u kupi čiji je otvor dvaput veći od graničnog ugla (sl. 172). U posmatračevo oko A u pravcu predstavljenom na slici ne dospeva nijedan svetlosni zrak izvan vodene površine. Oko može videti samo one zrake koji su se totalno reflektovali na graničnoj ravni, dakle koji dolaze iz neke tačke u samoj vodi. Zbog toga izgleda vodena površina, ako se posmatra iskosa odozdo, kao sjajno ogledalo. Iz vode se može »gledati« samo ako se oko nalazi u kupi ugla totalne refleksije. Ova pojava se zapaža npr. kod velikih akvarijuma sa bočnim prozorima, kod kojih se uopšte nemože videti šta se nalazi iznad vodene površine, a sadržina akvarijuma izgleda kao da se ogleda na površini.

Mehuri vazduha, koji se ponekad nahvataju na predmete u vodi, izgledaju srebrno sjajni zbog totalne refleksije. Kad se epruveta napunjena donekle živom stavi u vodu, tamo gde je prazna izgleda da jače svetli, nego u delu napunjenom živom, a to stoga što je totalna refleksija savršenija od refleksije na sjajnoj živinoj površini. Uvek je gubitak svetlosti pri totalnoj refleksiji manji, nego pri običnom odbijanju.



Sl. 173a i b. Prizme za totalnu refleksiju.

173 a i b na pravouglu prizmu, on se u njoj totalno reflektuje i izlazi iz prizme pod uglom od  $90^\circ$  (a) odnosno  $180^\circ$  (b) sa svojim prvobitnim pravcem. Ovo je iskorišćeno kod durbina sa prizmama.

pod graničnim uglom. Ako na jednu tačku granične površine na vodi npr. pada svetlost u svima pravcima (npr. difuzna dnevna svetlost), onda će se svetlost koja prodire u vodu iz svake tačke na površini nalaziti skupljena u vodi u kupi čiji je otvor dvaput veći od graničnog ugla (sl. 172).

U posmatračevo oko A u pravcu predstavljenom na slici ne dospeva nijedan svetlosni zrak izvan vodene površine. Oko može videti samo one zrake koji su se totalno re-

flektovali na graničnoj ravni, dakle koji dolaze iz neke tačke u samoj vodi. Zbog toga izgleda vodena površina, ako se posmatra iskosa odozdo, kao sjajno ogledalo. Iz vode se može »gledati« samo ako se oko nalazi u kupi ugla totalne refleksije. Ova pojava se zapaža npr. kod velikih akvarijuma sa bočnim prozorima, kod kojih se uopšte nemože videti šta se nalazi iznad vodene površine, a sadržina akvarijuma izgleda kao da se ogleda na površini.

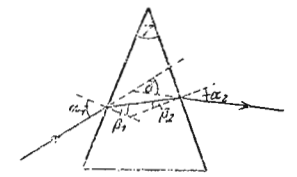
Mehuri vazduha, koji se ponekad nahvataju na predmete u vodi, izgledaju srebrno sjajni zbog totalne refleksije. Kad se epruveta napunjena donekle živom stavi u vodu, tamo gde je prazna izgleda da jače svetli, nego u delu napunjenom živom, a to stoga što je totalna refleksija savršenija od refleksije na sjajnoj živinoj površini. Uvek je gubitak svetlosti pri totalnoj refleksiji manji, nego pri običnom odbijanju.

Granični ugao za staklo-vazduh manji je od  $45^\circ$ . Ako svetlosni zrak pada, kao što je naznačeno na slici

Na sl. 173 b svetlosni zrak se vraća u istom pravcu iz koga je i došao, samo je pomeren naniže, dakle red zrakova je izmenjen. Ovo se upotrebljava za izvrtanje slika.

Pošto ugao totalne refleksije stoji prema jed. (17) u prostoj vezi sa indeksom prelamanja, to se ovaj poslednji može izračunati poznavajući ugao totalne refleksije. Primenu ovoga imamo kod tzv. refraktometara, aparata sagrađenih u različitim oblicima za odredbu indeksa prelamanja čvrstih i tečnih tela.

§ 144. **Prizme.** Prizma je telo trouglog preseka koje prelama svetlost, i to najčešće od stakla, a za naročite svrhe i od kvarca, fluorita, kamene soli itd. (sl. 174). Dve njene strane moraju biti potpuno ravne i dobro uglačane. Ugao koji one međusobom zaklapaju zove se prelomni ugao prizme ( $\gamma$ ). Vrlo često kod prizme je presek ravnokrani trougao, tada je ugao prizme  $60^\circ$ . Sl. 174 pokazuje prelamanje svetlosnog zraka kroz prizmu. Ma kako zrak padao na prizmu, uvek se pri izlasku prelama ka osnovi prizme.



Sl. 174. Prelamanje kroz prizmu.

Za izračunavanje skretanja svetlosnog zraka koji pada na prizmu pod uglom  $\alpha$  služe nam pored zakona o prelamanju još i odnosi  $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$  i  $\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$  koji se mogu pročitati neposredno iz slike 174, gde je  $\delta$  ugao za koji zrak skreće pri izlasku iz prizme od svoga prvobitnog pravca.

Najmanje skretanje (minimum skretanja) imamo kad zrak simetrično prolazi kroz prizmu, tj. kad je  $\alpha_1 = \alpha_2$  i  $\beta_1 = \beta_2$ . Tada je i  $\beta_1 = \beta_2 = \gamma/2$ , a  $\alpha_1 = \alpha_2 = (\delta + \gamma)/2$ , pa prema tome na osnovu zakona o prelamanju

$$\sin \frac{\delta + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{odnosno} \quad n = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad (18)$$

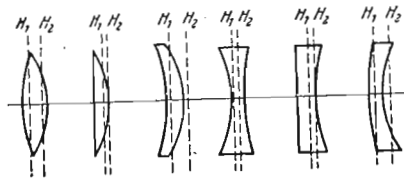
Poslednja jednačina može nam poslužiti da iz ugla minimalnog skretanja odredimo indeks prelamanja supstance od koje je prizma napravljena.

Kad je prelomni ugao  $\gamma$  sasvim mali, a  $n$  nema suviše veliku vrednost, onda je i ugao skretanja  $\delta$  vrlo mali. Sinusi se tada mogu zameniti sa uglovima, te imamo:  $\alpha_1 = n\beta_1$ ,  $\alpha_2 = n\beta_2$ ,  $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = n\gamma$  i najzad

$$\delta = (n - 1) \gamma \quad (19)$$

Kad se kroz prizmu propusti bela svetlost, primećuje se pri izlasku iz prizme da se ona razložila u boje. O toj pojavi (dispersiji) biće govora donije.

§ 145. **Sferna sočiva.** Sferno sočivo je telo, najčešće od stakla, ograničeno dvema koaksijalnim loptinim površinama. Jedna od tih površina može biti i ravna. Shodno gornjoj definiciji, prema kojoj može imati više kombinacija, razlikujemo sledeće



Sl. 175. Vrste sočiva. I Sabirna, II rasipna sočiva.

tipove sočiva (sl. 175):

1. Konveksna (sabirna sočiva),
  - a) bikonveksno, b) plankonveksno,
  - c) konvekskonkavno.

Sočiva ovoğa tipa su u sredini deblja, a na krajevima tanja.

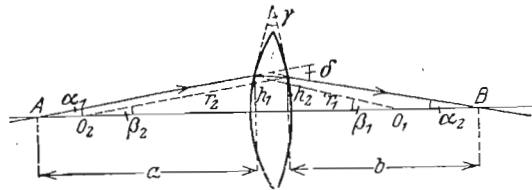
2. Konkavna (rasipna sočiva),

- d) bikonkavno, e) plankonkavno, f) konkavkonveksno.

Ova sočiva su u sredini tanja, a na krajevima deblja (o značaju ravnih  $H, H'$  vidi § 150).

Pri izvođenju sledećih zakona ponovo ćemo pretpostaviti, kao i kod sfernih ogledala, da su dimenzije sočiva male spram poluprečnika krivine njihovih graničnih površina. Ono što je rečeno za sferna ogledala, može se većim delom primeniti i na sočiva, i zato ćemo se na njima manje zadržavati.

§ 146. **Prelamanje kod konveksnih sočiva.** Iz tačke  $A$  (sl. 176) polazi zrak koji pod uglom  $\alpha_1$  spram ose pada na sočivo, i pošto se dvaput prelomi, seće osu pod uglom  $\alpha_2$  u tački  $B$  s druge strane sočiva.  $O_1$  i  $O_2$



Sl. 176. Uz izvođenje obrasca za sočiva.

neka su centri krivina njegovih površina, a  $r_1$  i  $r_2$  pripadajući poluprečnici. Pretpostavićemo da se zrak malo udaljuje od ose, da su dakle uglovi

$\alpha_1$  i  $\alpha_2$  mali, pa zbog toga i pravac zraka u samom sočivu da je skoro paralelan sa osom. Ovaj uslov je praktično uvek dovoljno ispunjen.

Obeležimo sa  $\delta$  ugao za koji zrak skrene od svoga prvobitnog pravca. Ovaj ugao se može izraziti na dva načina. Prvo, kao spoljašnji ugao trougla u kome se nalaze uglovi  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , i drugo, pošto sočivo deluje na zrak kao tanka prizma,  $\delta = (n-1)\gamma = (n-1)(\beta_1 + \beta_2)$ . Pošto su svi uglovi mali, može se napisati

$$\alpha_1 = \text{tg } \alpha_1 = \frac{h_1}{a}, \quad \alpha_2 = \text{tg } \alpha_2 = \frac{h_2}{b}, \quad \beta_1 = \sin \beta_1 = \frac{h_1}{r_1}, \quad \beta_2 = \sin \beta_2 = \frac{h_2}{r_2}$$

Kad se ovi izrazi stave u obe gornje jednačine za  $\delta$  dobijamo:  $h_1/a + h_2/b = (n-1)(h_1/r_1 + h_2/r_2)$ . Ako se po pretpostavci vrednosti

za  $h_1$  i  $h_2$  međusobno malo razlikuju, tako da se bez velike greške može staviti  $h_1 = h_2$ , dobićemo jednačinu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f} \quad (20)$$

odakle je

$$f = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{r_1 \cdot r_2}{(n-1)(r_1 + r_2)} \quad (21)$$

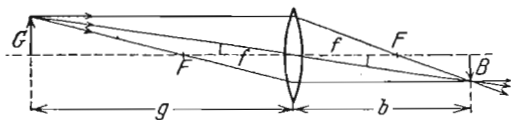
Veličina  $f$  zavisi samo od geometričkih i optičkih osobina sočiva, i ona je za svako sočivo karakteristična konstanta. Ako se tačka  $A$  pomeri u beskrajnost, tako da postane  $a = \infty$ , tj. ako svi zraci koji polaze od  $A$  padaju paralelno na sočivo, jednačina (20) svodi se na  $1/f = 1/b$  što znači da svi zraci koji paralelno sa osom padaju na sočivo, posle prelamanja prolaze kroz tačku  $F$  koja se nalazi na daljini  $f$  od sočiva. Isto kao i kod izdubljenog ogledala tačka  $F$  zove se žiža (focus), a  $f$  žižna daljina sočiva. Iz stava o recipročitetu sleduje da svaki zrak koji polazi iz žiže i pada na sočivo, s druge strane sočiva ide paralelno sa osom. Svako sočivo ima dve žiže, na svakoj strani po jednu. One se nalaze na osi i podjednako su udaljene od sočiva za  $f$ .

Umesto žižnom daljinom, u praksi se često »jačina« sočiva izražava dioptrijom, koja je recipročna vrednost žižne daljine kad se ova izrazi u metrima. Sočivo sa žižnom daljinom  $f = 20$  cm ima prema tome 5 dioptrija. Konveksna (sabirna) sočiva imaju pozitivne, a konkavna (rasipna) negativne dioptrije.

Ako svetlosni zrak pada koso na sredinu sočiva, tj. ako prolazi kroz delove površina koji su međusobno približno paralelni, on ne skreće od svoga pravca, već je malo pomeren u stranu paralelno samom sebi. I ovo se pomeranje može zanemariti pod pretpostavkom da su sočiva tanka. Zbog toga se kod tankih sočiva zrak koji koso prolazi kroz sredinu crta kao prava linija bez skretanja i prelamanja.

§ 147. **Likovi konveksnih sočiva.** Ako svetlosni zraci koji polaze iz jedne tačke padaju na sočivo, konstatuje se — pod učinjenom pretpostavkom koja važi za dimenzije sočiva — da se oni ili stvarno seku u jednoj tački s druge strane sočiva ili izgleda kao da se seku u nekoj tački sa iste strane sočiva. U prvom slučaju sočivo daje stvaran, a u drugom uobražen lik tačke. Za konstrukciju lika ove tačke dovoljna su dva zraka. Prema onome što smo izveli u § 150, raspoložemo čak i sa tri: jednim koji od polazne tačke ide paralelno sa osom i posle prelamanja prolazi kroz žižu; drugim koji prolazi kroz žižu sa iste strane, a koji s druge strane posle prelamanja izlazi paralelno sa osom; i trećim koji prolazi kroz sredinu sočiva i praktično ostaje neprelomljen. Pri konstrukciji lika kod tankih sočiva, crtamo zrak kao da je svega jedanput prelomljen.

Na ovaj način dobijamo lik  $B$  predmeta na sl. 177, koji se nalazi iza žiže. Lik je stvaran, izvrnut i u ovom slučaju umanjen. Ako sada obrnuto



Sl. 177. Stvaran lik sabirnog sočiva.

uzmemo  $B$  kao predmet, a  $G$  kao lik, konstrukcija je potpuno ista, samo je lik ovde uvećan. Iz sl. 177 vide se sledeći odnosi:  $B : G = b : g$  ( $g$  udaljenje predmeta,  $b$  udaljenje lika od sočiva), dalje:  $B : G = (b - f) : f$  i najzad  $B : G = f : (g - f)$ . Gornji izrazi daju dve jednačine za izračunavanje odnosa između  $b$ ,  $g$  i  $f$ , dok nam je ustvari potrebna svega jedna. Ali kako se vidi one daju isti rezultat, i baš u tome leži geometrijski dokaz da se sva tri zraka posle prelamanja stvarno ponovo seku u istoj tački. Iz  $b/g = (b - f)/f$  sleduje

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (22)$$

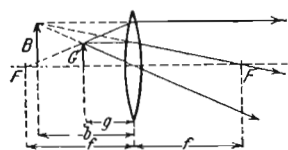
To je tzv. jednačina sočiva, koja je potpuno ista sa jednačinom za izdubljeno ogledalo. Nju možemo svesti, kao i kod ogledala, na oblik

$$(g - f)(b - f) = f^2 \quad (23)$$

Dalje dobijamo za uvećanje (odnosno umanjeње)

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (24)$$

Ako se predmet približi sočivu i dođe u žižu, onda se svi zraci koji polaze iz pojedinih tačaka predmeta seku s druge strane sočiva u beskrajnosti ( $b = \infty$ ), kad se još više približi, zraci diverguju. Tada ne dobijamo realan, već uobražen lik na istoj strani gde se nalazi i predmet.



Sl. 178. Uobražen lik kod sabirnog sočiva.

Konstrukciju ovoga lika pokazuje nam sl. 178. Lik je uobražen, uspravan i uvek uvećan. Iz iste slike može se lako izvesti da je  $B : G = b : g$  i  $B : G = (f + b) : f$  te je stoga

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (25)$$

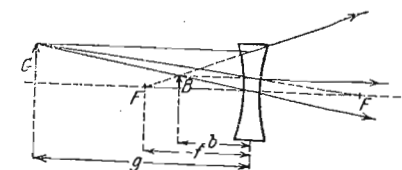
To se potpuno slaže sa jednačinom (22), jer se  $b$  ovde nalazi na suprotnoj strani, i zbog toga mora imati negativan znak. Uvećanje je ponovo

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

§ 148. Likovi kod konkavnih (rasipnih) sočiva. Na konkavna sočiva primenjujemo slična pravila kao i na konveksna. Zraci koji padaju na njih paralelno sa osom, lome se tako da izgleda kao da polaze iz jedne tačke na osi sa iste strane sočiva s koje i dolaze. I ova tačka zove se žiža, u kojoj postaje uobražen (virtuelan) lik tačke koja se nalazi u beskrajnosti. Konkavno sočivo ima stoga negativnu žižnu daljinu  $f$ . Ona je podjednake vrednosti na obema stranama.

Konstrukcija lika jasna je iz sl. 179. Likovi su uvek uobraženi, uspravni i umanjeni. Između daljine lika, daljine predmeta i žižne daljine važi za ova sočiva odnos:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad (26)$$



Sl. 179. Lik kod izdubljenog sočiva.

On je identičan sa jednačinom (22) kad se uzme u obzir da u ovom slučaju moramo računati i  $f$  i  $b$  negativno.

§ 149. Diskusija jednačine sočiva. Iz jednačine (22) izvedene za sabirna sočiva, mogu se izvući sledeći zaključci.

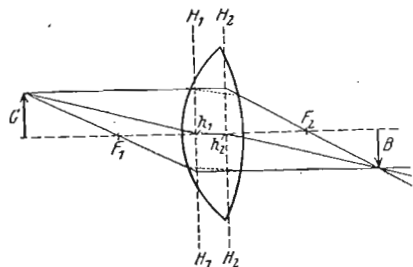
Ako je  $g = \infty$  postaje  $b = f$ , tj. lik se nalazi u žiži (lik sunca!). Kad je  $g = f$ , lik leži u beskrajnosti ( $b = \infty$ ). Za  $g < f$  postaje  $b$  negativno i imamo uobražen lik.  $g$  postaje jednako  $b$ , tj. uvećanje je ravno 1 kad je  $g = b = 2f$ .

Ako je razdaljina  $a = g + b$  između predmeta i lika stalna, tj. kad se jedan utvrđen predmet projektuje na nepomičnom zidu, onda iz jednačine sočiva dobijamo dva para vrednosti  $g_1, b_1$  i  $g_2, b_2$  tako da je  $b_2 = g_1, g_2 = b_1$ . Između predmeta i zaklona postoje dakle dva položaja za sočivo iz kojih ono daje oštre likove. Oni leže simetrično spram sredine od  $a$  i u jednom položaju dobijamo uvećan, u drugom umanjen lik. Ako je  $a = 4f$ , oba položaja se poklapaju, lik i predmet imaju istu veličinu. Kad  $a$  postane manje od  $4f$  nemoguće je dobiti realan lik.

Merenjem  $g$  i  $b$  možemo odrediti žižnu daljinu sočiva, i variranjem tih veličina možemo se uveriti da je  $f$  konstantno.

§ 150. Debeli sočiva. Opisane proste konstrukcije likova ne mogu se primeniti na sočiva čija se debljina ne može zanemariti spram ostalih dimenzija, kao što je to dosad pretpostavljano. Ali kod debelih sočiva uvek se mogu naći dve ravni  $H_1$  i  $H_2$  upravne na osu, nazvane glavne ravni, čije se tačke preseka sa osom  $h_1$  i  $h_2$  zovu glavne tačke, i koje na sledeći način omogućavaju konstrukciju lika. I ova sočiva imaju dve žiže  $F_1$  i  $F_2$  koje se od obeju glavnih tačaka nalaze na podjednakim rastojanjima,  $F_1 h_1 = F_2 h_2 = f$ . Duž  $f$  zove se žižna daljina sočiva. Lik se

konstruiše kao što je naznačeno na sl. 180. Sa osom paralelan zrak s one strane na kojoj se nalazi  $F_1$ , produži se u istom pravcu do glavne ravni  $H_2$  i odatle prolazi kroz  $F_2$ . Zrak koji prolazi kroz  $F_1$ , produži se do  $H_1$



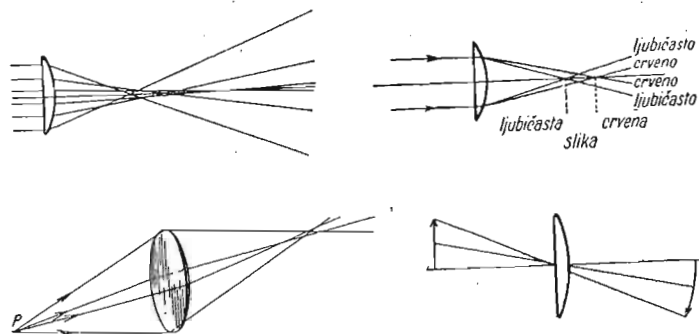
Sl. 180. Konstrukcija lika kod debelog sočiva.

i odatle posle ide paralelno sa osom. Zrak koji pada u glavnu tačku  $h_1$  pomenen je paralelno samom sebi i prolazi kroz tačku  $h_2$ . Stvarni pravac zraka kroz sočivo označen je tačkicama. Odgovarajuće važi i za konvavna sočiva.

Položaj glavnih ravni kod pojedinih tipova sočiva naznačen je već ranije na sl. 175, § 145.

Zakoni, koje smo ranije izveli za dobijanje likova, važe isto tako i ovde. Kod tankih sočiva može se reći da je razmak između glavnih ravni tako mali, da se može zanemariti.

§ 151. **Nedostaci sočiva.** Pri primeni prostih sočiva, zapaža se na njima čitav niz nedostataka, tj. štetnih odstupanja od napred izvedenih prostih zakona. Oni se javljaju na prvom mestu stoga što sočiva nisu beskrajno tanka, odnosno što zraci stvarno ne idu blizu ose, i drugo, što se pojedine boje iz kojih je sastavljena bela svetlost nejednako prelamaју (disperzija). Usled ovog poslednjeg uzroka, jedno sočivo za razne boje nema iste žižne daljine. Najvažniji nedostaci kod sočiva su sledeći:



Sl. 181. Najvažniji nedostaci sočiva. a) Sferna aberacija. b) Hromatična aberacija. c) Astigmatizam. d) Savijanje lika (distorzija).

a) **Sferna aberacija.** Krajevi sočiva jače prelamaју od sredine. Zraci koji padaju na sočivo paralelno sa osom, ali na krajeve sočiva, seku se u jednoj tački koja je bliža sočivu, nego zraci koji padaju na sočivo blizu ose (sl. 181 a).

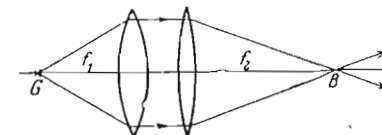
b) **Hromatična aberacija.** Indeks prelamanja stakla nije isti za sve boje, on je za crvenu boju najmanji, a za ljubičastu najveći. Zato se crveni zraci koji polaze od predmeta osvetljenog belom svetlošću seku u jednoj tački koja je dalja od one gde se seku ljubičasti zraci što polaze od istog predmeta (sl. 181 b).

c) **Astigmatizam.** Za tačke predmeta koje leže van ose, žižna daljina sočiva je različita za pojedine ravni koje prolaze kroz osu (sl. 181 c nacrtana u perspektivi). Anastigmati su sočiva kod kojih je taj nedostatak otklonjen.

d) **Distorzija** (krivljenje lika). Lik jedne ravne površine paralelne sa sočivom nije ravan već iskrivljen.

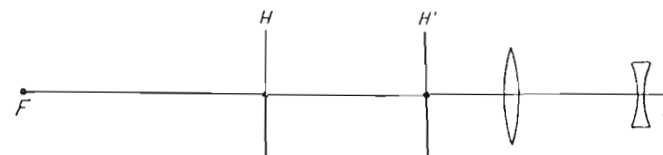
§ 152. **Kombinovana sočiva.** Napred izloženi nedostaci sočiva mogu se u znatnoj meri otkloniti kombinovanjem više sočiva od stakala raznih indeksa prelamanja (kron i flint staklo, v. tabelu) i time dobijamo tzv. anastigmat, ahromate itd. I za ove sisteme sočiva važe postavljene jednačine. Za izračunavanje žižne daljine  $f$  jednog sistema sastavljenog od dva sočiva žižnih daljina  $f_1$  i  $f_2$ , zamislimo da se svetla tačka  $G$  nalazi u žiži jednog od tih sočiva (sl. 182). Odmah se iz slike vidi da se lik te tačke mora nalaziti u žiži drugog sočiva. Ako sad na sistem primenimo jednačinu (22), dobijamo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (27)$$



Sl. 182. Za izvođenje žižne daljine sistema sočiva.

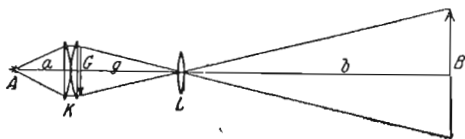
tj. recipročna vrednost žižne daljine sistema, jednaka je zbiru recipročnih vrednosti žižnih daljina komponentata. Pri tome se žižna daljina konkavnih sočiva računa negativno. Kod takvih sočiva se mogu obe glavne ravni nalaziti i izvan sistema. Sl. 183 pokazuje jedan naročito upadljiv slučaj.



Sl. 183. Žiže i glavne ravni jednog naročitog sistema sočiva (teleobjektiv).

§ 153. **Projekcioni aparat.** Glavni delovni projekcionog aparata jesu: jak svetlosni izvor  $A$  (električni plameni luk ili naročita sijalica sa metalnim koncem male svetleće površine), kondenzor  $K$  ispred koga se nalazi predmet za projektovanje  $g$  (dijapozitiv, film, itd.) i projekciono sočivo  $L$

(objektiv, najčešće kombinovano sočivo). Kondenzor  $K$  (sl. 184) je veliko sočivo, obično sistem sastavljen od dva ili tri sočiva malih žižnih daljina, koje služi da zrake od svetlosnog izvora koji padaju na predmet  $G$  tako skupi, da potpuno prolaze kroz objektiv  $L$ . S obzirom na žižne daljine i



Sl. 184. Projekcioni aparat.

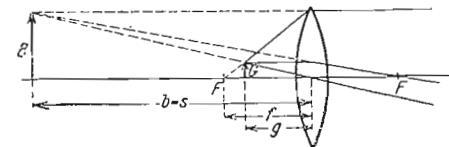
daljinu zaklona, moraju biti ispunjena dva uslova. Obično se smatra da su nam uvećanje  $\gamma$  i razdaljina zaklona od aparata  $l$  (predmeta  $G$ ) unapred dati, dakle  $l = g + b$  i  $\gamma = b/g$  nam je dato, te možemo  $b$  i  $g$  pojedinačno izračunati. Odavde, dalje, možemo pomoću jednačine (22) naći potrebnu žižnu daljinu  $f_1$  za projekciono sočivo. Da bi sva svetlost prolazila kroz isto moraju se svetlosni zraci koji polaze od izvora i idu kroz kondenzor seći u objektivu, tj. u objektivu se mora nalaziti lik svetlosnog izvora. Ako je  $a$  daljina izvora od kondenzora,  $g$  već utvrđena daljina između predmeta  $G$  (kondenzora) i objektiva, onda za kondenzor dobijamo potrebnu žižnu daljinu  $f_2$  iz jednačine  $1/a + 1/g = 1/f_2$ . Prema tome kad su nam dati uslovi za projektovanje, mogu se odrediti potrebne žižne daljine.

§ 154. **Opšte o uvećanju lupe, mikroskopa i durbina.** Kad na zaklonu pomoću sočiva dobijemo lik jednoga predmeta, onda je samo po sebi jasno šta se podrazumeva pod uvećanjem. To je odnos linearnih dimenzija lika i predmeta koji se da neposredno odrediti. Kad od dijapozitiva  $9 \times 12$  dobijemo na zaklonu lik  $270 \times 360$ , imamo tridesetostruko linearno uvećanje.

Kod optičkih instrumenata o kojima će sada biti govora, lupe, dogleda (durbina) i mikroskopa, oko posmatra uobraženi lik predmeta. Ovaj spram predmeta može biti uvećan ili umanjen. Kod lupe i mikroskopa je veći, a kod dogleda manji od predmeta. Uloga ovih instrumenata nije samo da daju likove promenjenih dimenzija, već da učine jasnijom strukturu ili konture predmeta, koji bez tih instrumenata nisu pristupačni našem oku. Ako npr. nismo u stanju da se dovoljno približimo predmetu, onda se služimo dogledom. Kad nismo u stanju da razaznamo detalje na predmetu i ako ga približimo oku do krajnje granice (oko 15 cm, bliska tačka), tada upotrebimo lupu ili mikroskop. Da bi problem sveli na najprostiji moguć slučaj, uočimo dve bliske tačke koje se nalaze na izvesnoj daljini ispred oka. Očno sočivo stvara od njih likove na mrežnjači, na kojoj se oba lika nalaze sasvim blizu jedan drugom. Njih će oko moći da primeti kao dve zasebne pojave samo onda, ako ne padaju na isti organ (čepiće, štapiće) na mrežnjači. Da se to ne desi, ne smeju tačke imati uglovno rastojanje manje od približno  $1'$  posmatrano od oka. Na daljini od 100 m to rastojanje

između tačaka je 3,3 cm. Izvesnu strukturu možemo učiniti jasnijom na taj način, što ćemo povećati ugao pod kojim vidimo pojedine elemente strukture, odnosno ceo predmet. Prirodna mera za uvećanje  $\gamma$  ovih optičkih instrumenata je stoga odnos ugla  $\beta$  pod kojim pomoću njih vidimo uobraženi lik predmeta, i ugla  $\alpha$  pod kojim predmet vidimo neposredno golim okom, odnosno pod kojim bi ga pod povoljnim okolnostima mogli videti. Dakle  $\gamma = \beta/\alpha$ . Pri daljim izračunavanjima možemo smatrati uglove  $\alpha$  i  $\beta$  kao vrlo male, tako da smemo staviti  $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$  i  $\sin \beta = \tan \beta = \beta$ .

§ 155. **Lupa.** Lupa nije ništa drugo do jedno sabirno sočivo dosta male žižne daljine  $f$  koje služi za uveličavanje predmeta, posmatrajući pri tome uobraženi lik koji ono daje. Predmet za posmatranje se stavi iza lupe i to na rastojanju manjem od žižne daljine (sl. 185). Oko se najmanje napreže, ako se lik nalazi na daljini jasnog vida, koja kod normalnog ili tačno korigovanog oka iznosi oko  $s = 25$  cm. Za izračunavanje uvećanja mo-



Sl. 185. Lupa.

ramo naći odnos između ugla  $\alpha$ , pod kojim se predmet vidi golim okom na daljini  $s$ , spram ugla  $\beta$  pod kojim se vidi primenjujući lupu. U prvom slučaju bi bilo  $\tan \alpha = \alpha = G/s$ . Posmatrajući kroz lupu ugao viđenja je (sl. 185)  $\tan \beta = \beta = B/s$ . Znači da je uvećanje  $\gamma = \beta/\alpha = B/G$ . Ali prema § 147  $B/G = b/g$ . Pošto se lupa prinese skoro uz samo oko, to je približno  $b = s$  dakle  $\gamma = s/g$ . Pomoću jednačine (25)  $1/g - 1/b = 1/f$  dobijamo najzd

$$= 1 + \gamma \frac{s}{f} \quad (28)$$

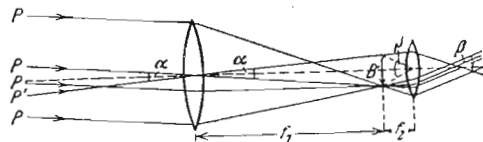
Pošto je u većini slučajeva  $f$  znatno manje od daljine jasnog vida  $s$ , to je i uvećanje vrlo približno ravno  $s/f$ . Zbog toga je i  $g$  približno jednako sa  $f$ .

Ovo rezonovanje je tačno i onda kad  $G$  nije stvaran predmet, već samo realan lik jednog predmeta koji se može posmatrati lupom. To je baš slučaj kod okulara većine optičkih instrumenata, koji nisu ništa drugo nego lupe.

Bolje lupe, a naročito okulari, nisu prosta već kombinovana sočiva.

§ 156. **Durbin (dogled), astronomski dogled** (sl. 186) sastavljen je u najprostijem slučaju od dva sočiva nameštena na krajevima metalne cevi. Sočivo okrenuto predmetu, objektiv, ima veliku žižnu daljinu i većinom veliki prečnik, on daje realan umanjen i izvrnut lik u cevi (tubusu). Drugo sočivo, okular, služi kao lupa za uvećano posmatranje ovoga lika.

Pošto su predmeti koji se posmatraju ovakvim dogledom, po pravilu zvezde, veoma udaljeni, to je razdaljina stvarnog lika od objektiva ravna žižnoj daljini objektiva  $f_1$ . Udaljenje okulara od lika je skoro jednako žižnoj daljini okulara  $f_2$ . Dužina dogleda je dakle ravna zbiru ovih dveju žižnih daljina, ili, pošto je žižna daljina objektiva uvek mnogo veća od



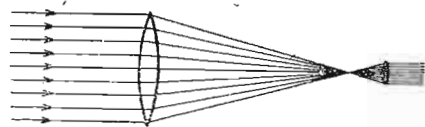
Sl. 186. Astronomski durbin.

žižne daljine okulara, to je dužina dogleda približno ravna žižnoj daljini objektiva. Na sl. 186 sam predmet nije nacrtan, jer jasno pretstavljanje u prirodnim odnosima daljina nije moguće. Označeni su samo zraci  $P$  i  $P'$  koji polaze od krajeva predmeta zamišljenog u obliku strele.  $\alpha$  je ugao pod kojim bi predmet videli golim okom. Ōko koje se nalazi na okularu vidi uobražen lik predmeta  $B$  pod uglom  $\beta$ . Vidi se iz slike 186 da je

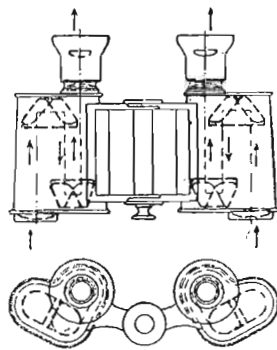
$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \beta : \alpha = f_1 : f_2, \text{ ili samo uvećanje } \gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (29)$$

Uvećanje je dakle utoliko veće, ukoliko je veća žižna daljina objektiva, a manja žižna daljina okulara.

Ovo rezonovanje se odnosi na posmatranje Sunca, Meseca, Planeta i zemaljskih predmeta, čije likove uvek dobijamo izvrnute. Pri posmatranju zvezda nekretnica, ne radi se o tome da od njih dobijemo tačno uzet uvećane likove, već samo da povećamo njihovo prividno svetljenje. Zbog ogromnih udaljenosti zvezda nisu ni izdaleka dovoljni ni najjači durbinu da ugao pod kojim se one vide bar približno uvećaju do 1'. Dogled služi ovde više zato, da širok snop paralelnih zrakova koji dolaze od udaljene zvezde i ulaze u objektiv, pomoću objektiva i okulara skupi u jedan mnogo uži snop širine pupile oka (sl. 187). Usled toga se dejstvo sastoji u povećavanju jačine svetljenja zvezde



Sl. 187. Povećanje sjajnosti jedne zvezde pomoću astronomskog dogleda.



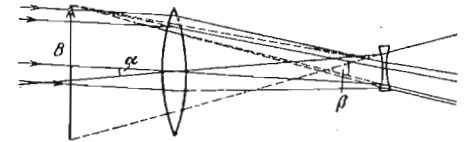
Sl. 188. Durbin (dvoogled) sa prizmama.

u odnosu površina objektiva i okulara, odnosno pupile oka. Na taj način se sa najjačim dogledima mogu videti zvezde 18 veličine, dok se golim

okom u najboljem slučaju mogu videti još zvezde 5—6 veličine. Odnos svetlosnih jačina koji odgovara tome jeste: 1 : 10.000.

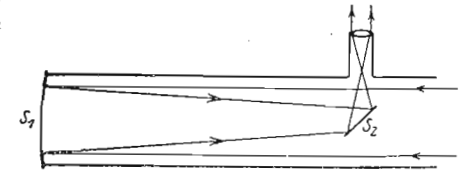
Prost astronomski dogled nije pogodan za posmatranje objekata na zemlji, jer daje izvrnute likove, što je za astronomska posmatranja svejedno. Ovu nezgodu otklanja dogled sa prizmama koji je u osnovi istog principa. Kod njega svetlosni zraci između objektiva i okulara prolaze, kao što je to naznačeno na sl. 188, kroz dve prizme za totalnu refleksiju, od kojih jedna, koja zrake pomera u vertikalnom pravcu, izaziva izvrtnanje lika. Druga prizma služi da ponovo ispravi pravac prostiranja zraka koji je prvom prizmom promenjen. Prva prizma pomera sem toga pravac zraka u stranu. Durbin sa prizmama skoro se uvek upotrebljava za dva oka (dvoogled), pa se usled toga što je pravac zrakova pomeren u stranu dobija to preimućstvo, da je rastojanje između oba objektiva veće od rastojanja između očiju (rastojanja okulara). To opet donosi sobom znatno pojačavanje prostornog utiska pri viđenju, lik izgleda plastičniji, tj. dobija se bolja pretstava o odnosu dubina vidnog polja, nego kod instrumenata kod kojih je rastojanje između objektiva i okulara podjednako (pozorišni dogled).

Druga sredstva za izvrtnanje likova sastoje se u primeni okulara od dva sočiva, od kojih jedno daje od realnog lika drugi, sada ispravljeni lik koji se drugim sočivom posmatra kao lupom (zemaljski dogled). Kod Galilejevog dogleda (pozorišnog dogleda) i ne postaje stvaran lik, već kao okular imamo jedno rasipno sočivo, koje se nalazi na manjem rastojanju od objektiva, nego što iznosi žižna daljina istog. Na sl. 189 pokazano je kako postaje uobražen lik predmeta. Okular Galilejevog dogleda nije prema tome lupa.



Sl. 189. Galilei-ev dogled

Kod onih vrsta dogleda, gde okular služi kao lupa, gde se dakle posmatra realan lik, namešta se u tubusu radi jasnog ograničenja vidnog polja jedan većinom kružni otvor, tzv. dijafragma (»blenda«), koja se oštro vidi istovremeno sa likom predmeta. Kod Galilejevog dogleda to nije moguće i zbog toga on nema oštro ograničeno vidno polje.

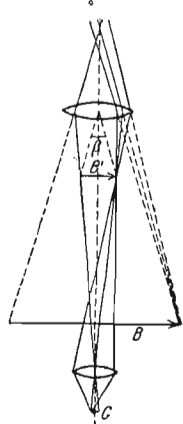


Sl. 190. Teleskop sa izdubljenim ogledalom.

U poslednje vreme se ponovo sve više izrađuju veliki astronomski teleskopi, kod kojih objektiv nije sočivo već izdubljeno ogledalo. Ono pre svega ima tu dobru stranu da je uklonjena disperzija, a istovremeno i

apsorpcija u ultraljubičastom kroz objektiv. Jednu od konstrukcija toga teleskopa sa ogledalom pokazuje sl. 190. Svetlost koja dospeva sa neke zvezde odbija se od izdubljenog ogledala  $S_1$  i pada na ravno ogledalo  $S_2$ , odakle dospeva u okular, koji se nalazi bočno na cevi.

§ 157. **Mikroskop.** Mikroskop ima ulogu da učini vidljivim vrlo male predmete, odnosno vrlo fine strukture. On ima objektiv vrlo male žižne daljine i okular koji služi kao lupa. Predmet  $G$  se postavi na malo veće rastojanje od žižne daljine objektiva  $f_1$  (sl. 191). Radi jasnosti slike odnos žižnih daljina objektiva i okulara nije nacrtan onako kao što odgovara stvarnosti. Objektiv ustvari mnogo jače uvećava nego okular. U tubusu mikroskopa na rastojanju  $B$  od objektiva postaje realan, izvrnut, jako uvećan lik  $B_1$  predmeta, koji se pomoću okulara koji daje uobražen lik  $B_2$  posmatra kao kroz lupu, dakle opet uvećan.

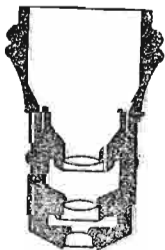


Sl. 191. Mikroskop.

Kad bi predmet posmatrali sa daljine  $s$  jasnoć vida golim okom, videli bi ga pod uglom  $\alpha = G/s$ . U mikroskopu se vidi pak pod uglom  $\beta = B_1/f_2$  pošto je lik  $B_1$  približno udaljen od okulara za njegovu žižnu daljinu  $f_2$  (sl. 191). Uvećanje je dakle  $\gamma = \beta/\alpha = B_1 s / G f_2$ . Ali je  $B_1/G = b/g$  ako  $g$  i  $B$  označavaju razdaljinu predmeta i lika od objektiva. U praktičnim konstrukcijama je  $B$  skoro sasvim približno ravno dužini tubusa  $l$ , a  $g$  opet skoro jednako sa žižnom daljinom objektiva  $f_1$ . Tako za uvećanje dobijamo izraz

$$\gamma = \frac{l s}{f_1 f_2} \quad (30)$$

Ponekad se u obrazac stavi mesto daljine jasnoć vida  $s$ , daljina bliske tačke koja je za normalno oko 15 cm, i poredi se tada vidni ugao pod kojim se vidi predmet sa mikroskopom sa onim, pod kojim bi se video golim okom kad bi ga postavili u blisku tačku.



Sl. 192. Primer jednoć objektiva za mikroskop.

Objektivi i okulari mikroskopa su većinom kombinovana sočiva; time se otklanjaju nedostaci koji se javljaju kod prostih sočiva. Sl. 192 pokazuje primer jednog objektiva.

Tačna teorija mikroskopa ne može se dati, ako se ne vodi računa o difrakciji svetlosti. Kao što su Helmholtz i Abbe pokazali, najmanje rastojanje dveju tačaka koje se pri najvećem uvećanju mogu videti kao odvojene iznosi  $\delta = \lambda/n \sin \omega$ . Ovde nam  $\omega$  označava polovinu ugla kupe zrakova koji polaze iz jedne tačke i dospevaju u objektiv,  $n$  je indeks prelamanja tela koje ispunjava prostor između predmeta i objektiva, a

$\lambda$  talasna dužina upotrebljene svetlosti. Proizvod  $n \sin \omega$  zove se numerička apertura objektiva (Abbe, 1878). Ako se dakle između predmeta i objektiva ne nalazi vazduh, već neka druga sredina većeg indeksa prelamanja, numerička apertura je povećana i time razdaljina  $\delta$  smanjena. Prema Abbe-u upotrebljava se za tzv. imerzionu tečnost kedrovo ulje, čiji je indeks prelamanja jednak sa indeksom prelamanja materijala od koga je objektiv (homogena imerzija). Numerička apertura dostiže tada vrednost do 1,4, a pri upotrebi monobromnaftalina ide čak i do 1,6. Isto tako primenom svetlosti male talasne dužine  $\lambda$  (ultraljubičaste), može se smanjiti  $\delta$ . U tom slučaju prinudeni smo uzimati fotografske snimke, pošto oko ne vidi ultraljubičastu svetlost. Dalje, sva sočiva moraju biti od kvarca, pošto staklo ne propušta te zrake počev od izvesne granice.

Radi osvetljavanja predmeta koji se posmatra, namešteno je ispod istog jedno ogledalo, koje dnevnu ili jaku veštačku svetlost baca na predmet.

Može izgledati čudnovato da izrazi za uvećanje dogleda i mikroskopa izgledaju tako različiti, naročito stoga što se žižna daljina objektiva javlja drugojače. Zbog toga ćemo jednačine (29) i (30) izvesti još jednom iz jednog zajedničkog izvora. Na prvom mestu ćemo izvesti jednačinu za odnos  $B/G$  između veličine lika i veličine predmeta. Neka je  $B'$  linearna veličina stvarnog lika dobijenog objektivom, a koja se okularom posmatra kao »predmet«. Žižna daljina objektiva neka je  $f_1$ , a okulara  $f_2$ . Odgovarajuće daljine predmeta i lika neka su  $g_1$ ,  $b_1$  odnosno  $g_2$ ,  $b_2$ . Tada je prema jednačini (24) § 147,  $B'/G = b_1/g_1$ ,  $B/B' = b_2/g_2$ . Znači da je

$$\frac{B}{G} = \frac{B'}{G} \cdot \frac{B'}{B} = \frac{b_1}{g_1} \cdot \frac{b_2}{g_2}$$

Ali iz § 147 lako se izvodi da je  $b_1/g_1 = f_1/(g_1 - f_1) = (b - f_1)/f_1$  (realan lik) i da je  $b_2/g_2 = f_2/(g_2 - f_2) = (b_2 + f_2)/f_2$  (uobražen lik).

Prema datom slučaju treba upotrebiti jedan ili drugi od ovih izraza. Pošto je okular lupa, to umesto  $b_2$  možemo uvek staviti daljinu jasnoć vida  $s$ .

Posmatrajmo najpre dogled. Za njega možemo napisati

$$\frac{B}{G} = \frac{f_1}{g_1 - f_1} \cdot \frac{s + f_2}{f_2}$$

Ali kod dogleda je uvek  $g_1 \gg f_1$ , dalje kod okulara  $f_2 \gg s$ . Stoga gornju jednačinu možemo bez velike greške uprostiti i napisati

$$\frac{B}{G} = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{s}{g_1}$$

Kod mikroskopa je

$$\frac{B}{G} = \frac{b - f_1}{f_1} \cdot \frac{s + f_2}{f_2}$$

Kod mikroskopa opet imamo  $b_1 \gg f_1$  približno jednako dužini tubusa  $l$ ,

zatim  $b_2 = s \gg f_2$ , te možemo napisati

$$\frac{B}{G} = \frac{l \cdot s}{f_1 \cdot f_2}$$

Sada iz ovih izraza možemo izvesti uvećanja za oba instrumenta. Kod dogleda je ono definisano kao odnos između ugla  $s$  pod kojim vidimo uobraženi lik predmeta, i ugla  $\alpha$  pod kojim bi videli predmet golim okom. Pošto je  $\alpha = G/g_1$ ,  $\beta = B/s$  dakle  $\beta/\alpha = B/g \cdot g_1/s$ . Gornju jednačinu za  $B/G$  moramo dakle pomnožiti još sa  $g_1/s$  da bi dobili uvećanje  $\beta/\alpha$ . Tada se stvarno dobija jednačina (29).

Kod mikroskopa je uvećanje definisano kao odnos između ugla  $\beta$  pod kojim vidimo virtuelan lik predmeta i ugla  $\alpha$  pod kojim bi videli sam predmet, kad bi ga doneli na daljinu jasnog vida. Sad je  $\alpha = G/s$ ,  $\beta = B/s$ , pa stoga  $\beta/\alpha = B/g$ . U slučaju mikroskopa količnik  $B/g$  daje nam neposredno uvećanje, što se i vidi sravnjujući ga sa jednačinom (30).

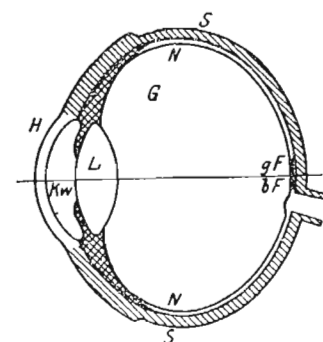
§ 158. **Dijafraĝma, končanica, okularni mikrometar.** Ako se pomoću okulara jednog optičkog instrumenta jasno vidi realan lik koji daje objektiv, onda se istovremeno mogu jasno videti i stvarni predmeti, koji se nalaze na istoj daljini od okulara. Ovo je često u praksi iskorišćeno. Pomenuto je već da se na mestu gde se stvara realan lik umeće mali kružni otvor, dijafraĝma, pomoću koĝa je vidno polje čisto i jasno ograničeno. Mnogi optički instrumenti imaju na mestu postanka realnog lika jednu napravu, koja omogućava da se jedna tačka lika postavi tačno u osu instrumenta. Najčešće se upotrebljava tzv. **končanica**, koja se sastoji od dva pod pravim uglom ukrštena vrlo tanka konca, razapeta na mestu gde postaje stvaran lik, ili od dve urezane crte pod pravim uglom, na tankoj planparalelnoj staklenoj ploči postavljenoj u ravni realnog lika. Kod mikroskopa može se na mestu lika namestiti i fina na staklu izrezana skala (okularni mikrometar), koja se istovremeno vidi oštro sa likom, i leži sa njim u istoj ravni. Vrednost jednog podeoka se određuje kad se skala sa poznatim rastojanjem između podelaka namesti pred objektiv i utvrdi koliko se podeoka skale na okularnom mikrometru poklapa u liku sa jednim podeokom na drugoj skali. Tada se pomoću okularnog mikrometra mogu meriti objekti pod mikroskopom.

§ 159. **Fotografski aparat.** Fotografski aparat služi, kao što je poznato, za zadržavanje lika predmeta koji daje jedno sočivo i omogućava njegovo umnožavanje. Pri tome se pomoću sočiva (najčešće kombinovanog) stvori lik predmeta za reprodukovanje na fotografskoj ploči ili filmu. Hemijskim dejstvom svetlosti na izvesne soli srebra koje su u želatinskom sloju raspoređene po ploči, i naknadnim hemiskim radnjama, dobijamo taj lik na ploči (negativ). Pomoću negativa može se lik umnožiti proizvoljan broj puta. Trajanje dejstva svetlosti na ploču (dužina eksponiranja) od-

ređuje se prema osvetljenju predmeta. Da bi se otklonilo dejstvo neželjene svetlosti na ploču, ona se nalazi zatvorena u jednoj mračnoj komori (promenljive dužine), na čijem se prednjem kraju naspram ploče nalazi sočivo. Za udešavanje oštine lika menjanjem razdaljine između ploče i sočiva, izvestan broj aparata ima naspram sočiva ploču od mutnog stakla na kojoj se vidi izvrnuti lik, a na čije se mesto posle udešavanja namesti osjetljiva fotografska ploča.

Komora fotografskog aparata nije ništa drugo do obična mračna komora, koja umesto finog otvora ima sočivo znatno veće površine. Kod fotografskog aparata u jednu tačku na ploči dospeva svetlost koja ispunjava ceo presek sočiva, dok kod obične mračne komore uzani svetlosni snop ide samo u onom pravcu u kome prolazi kroz otvor.

§ 160. **Oko.** Sastav čovečjeg oka u glavnim crtama pretstavljen je na slici 193. Oko je skoro loptasto i spolja obavijeno beonjačom  $S$ . Na prednjoj strani se nalazi rožnjača  $H$  koja je ispupčena i providna.



Sl. 193. Presek oka.

Iza rožnjače se nalazi prednja komora  $Kw$  ispunjena tečnošću. Zatim dolazi dužica (iris) sa otvorom na sredini zenicom (pupilla), pa sočivo (lens crystallina). Otvor na dužici, zenica, povećava se ili smanjuje prema jačini svetlosti i čuva unutarne organe od preteranog osvetljenja. — Unutrašnjost oka je ispunjena staklastim telom (corpus vitreum)  $G$ , želatinozne konsistencije. Unutrašnjost oka je obložena mrežnjačom (retina)  $N$  koja sadrži osjetljive organe; ovi su preko živca vida vezani sa centrom vida u mozgu.

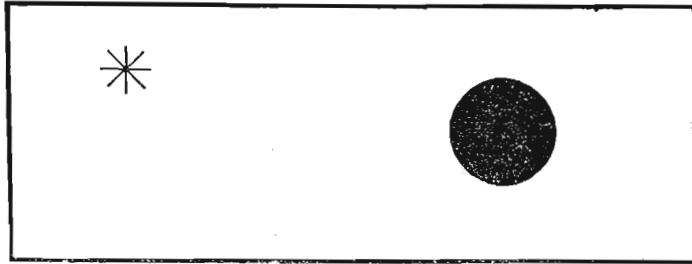
Na mrežnjači se nalaze dve vrste organa osjetljivih na svetlost, čepići i štapići. Sa prvima vidimo pri jakom, drugima pri vrlo slabom osvetljenju. Čepići su osjetljivi na boje, štapići nisu. Zato u mraku ne vidimo boje. Na svetlosti čepići izlaze iz mrežnjače, a u mraku se povlače. Kod optičke ose oka (fovea centralis) na mrežnjači se nalaze samo čepići. U slepoj mrlji, tj. na mestu gde živac vida ulazi u mrežnjaču, nema ni čepića ni štapića. Mi ne znamo da je oko na ovom mestu neosetljivo, jer ova mrlja za oba oka leži na različitim mestima vidnog polja. Ako na sl. 194 posmatramo zvezdu desnim okom kad je levo zatvoreno, na malom rastojanju slike od očiju, vidimo jasno i crni krug. Kad se slika udalji krug iščezava, jer njegov lik pada na slepu mrlju, a za još veće rastojanje on se ponovo pojavljuje.

Nadražaj živca vida dolazi od fotohemiskih procesa koje svetlost izaziva na štapićima i čepićima, pri čemu su izvesna tela (karotinoidi) od važ-



nosti. Tačnije su ispitani naročito štapići. U odmornom stanju ovi sadrže vidni purpur, telo koje je fotohemiski vrlo osetljivo, a koje je sastavljeno od jedne boje, retinina u belančevini. Prilikom osvetljenja purpur se raspada i tom prilikom retinin se odvaja od belančevine i prelazi u vidno žuto.

Pri daljem osvetljenju se stvara vidno belo, pri čemu se retinin pretvara u vitamin A. Vitamin A na svetlosti odlazi u mrežnjaču, odakle



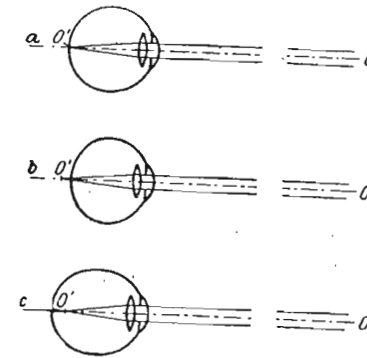
Sl. 194. Za pokazivanje slepe mrlje.

u mraku može ponovo da daje purpur. Zato je potrebno da prođe izvesno vreme da bi mogli videti u mraku, ako smo pre toga bili na svetlosti. U vezi sa istaknutom ulogom vitamina A, imamo važan dokaz da nedostatak ovog vitamina može da izazove noćno slepilo. Slične, ali još komplikovnije fotohemiske reakcije, dešavaju se i u čepićima.

Slika u oku postaje uglavnom dejstvom kristalnog sočiva, ali na njeno formiranje utiču takođe rožnjača i tečnost u prednjoj komori. Ovaj sistem se graniči s jedne strane vazduhom, a s druge staklastim telom. Pošto ove dve sredine imaju različite indekse prelamanja, to izlazi da je unutarnja žižna daljina sistema veća od spoljašnje. Kod neakomodiranog oka, prednja žižna daljina iznosi 1,71 cm (58,5 dioptrijs), a zadnja 2,28 cm; tako oko daje na mrežnjači oštar, izvrnut i jako umanjen lik nekog udaljenog predmeta. Njegova zadnja žiža nalazi se dakle, tačno na mrežnjači, a njegova daljna tačka je u beskrajnosti (sl. 195 a). Normalno neakomodirano oko može oštro da vidi i mnogo bliže predmete — do daljine jasnog vida koja iznosi oko 25 cm; to dolazi od strukture same mrežnjače.

Da bi oko moglo da vidi oštro predmete koji se nalaze bliže od daljine jasnog vida, mora se žiža sistema manje ili više pomeriti u unutrašnjost oka. Ali kako je dubina oka nepromenljiva, to se menjanje žižne daljine dešava promenom krivine očnog sočiva (cilijarni mišićni aparat). Ova akomodacija se vrši i bez našeg voljnog učešća. Kod desetogodišnje dece moć prelamanja se može povećati za 14 dioptrijs, i deca mogu da vide oštro predmete i na daljini od sedam cm (bliska tačka). No širina (moć) akomodacije počinje da opada još od mladosti. U 30 godina ona padne na polovinu i bliska tačka nalazi se tada na 15 cm. U 60 godina

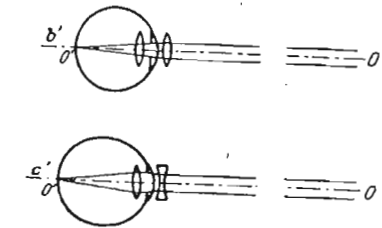
iznosi svega oko 1 dioptriju, a sa 75 godina, po pravilu akomodacija uopšte prestaje. Nedostatak moći akomodacije u većoj meri zove se presbipija. Usled nje sa starošću se udaljuje bliska tačka. U starijim godinama, oko 50, i daljna tačka se približava iz beskrajnosti. Po prestanku akomodacije ona se poklapa sa bliskom tačkom na daljini oko 40 cm. Ovi brojevi prosečno važe za oko koje je bilo normalno.



Sl. 195. a) Normalno, b) dalekovidno, c) kratkovidno oko; b') korigovano dalekovidno, c') korigovano kratkovidno oko.

Oko normalno vidi ako žiža neakomodiranog sočiva pada na mrežnjaču (sl. 195 a). Kod dalekovidnog oka žiža leži iza mrežnjače (sl. 195b), kod kratkovidnog ispred mrežnjače (sl. 195c). Anatomski posmatrano, ove greške u mladosti nisu obično posledica odstupajuće žižne daljine sočiva, već dolaze od male ili velike dubine očne jabuke.

Pošto se akomodacijom žižna daljina može samo da smanji, a ne i da poveća, to kratkovidno oko ne može da vidi oštro ako se predmeti nalaze preko jedne određene daljine. Njegova daljna tačka ne leži u beskrajnosti; ali tako oko akomodacijom može oštro da vidi i bliže predmete od normalnog oka, iste moći akomodacije. Njegova bliska tačka leži bliže od one za normalno oko. Kratkovidom nije tako potrebna lupa kao onima koji normalno vide. Razume se pri posmatranju bliskih predmeta, takođe pri mikroskopiranju itd. kratkovidni mora da skine svoje naočare da to preimućstvo iskoristi.



Sl. 195. a) Normalno, b) dalekovidno, c) kratkovidno oko; b') korigovano dalekovidno, c') korigovano kratkovidno oko.

Dalekovidno oko mora veći ili manji deo svoje moći akomodacije da upotrebi na dovodenje žiže očnog sočiva na mrežnjaču. Dalekovidni moraju u svima slučajevima posmatranja da akomodiraju, zato im za viđenje na malim daljinama preostaje samo jedan mali deo moći akomodacije. Bliska tačka se nalazi na većoj razdaljini, nego kod normalnog oka. Dalekovidnost je veći nedostatak od kratkovidnosti, nema nikakvih preimućstava, a usled potrebe stalne akomodacije oko je trajno napregnuto.

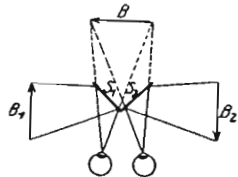
Za popravku vida kod nedostataka raznih vrsta služe naočari. Pošto kratkovidno oko prelama jače, a dalekovidno slabije, to se kratkovidima daju naočari sa rasipnim sočivom, a dalekovidim sa sabirnim (sl. 195 b' c'). Starija lica radi povećanja smanjene akomodacione moći, za posmatranje bliskih predmeta upotrebljavaju sabirna sočiva. U dubokoj starosti za gle-

danje na daljinu potrebna su im sočiva koja smanjuju prelamanje oka, dakle potrebna su im rasipna sočiva. U starosti, kratkovidni i dalekovidni pored svojih naočara za daljinu moraju imati i naočare za blizinu koje povećavaju prelamanje očnog sočiva. Kod kratkovidnih to su »slabija« rasipna sočiva, kod dalekovidnih to su »jača« sabirna sočiva, nego kod njihovih naočara za daljinu.

Naočari se ne nose samo radi oštrog viđenja, već takođe — naročito kod dalekovidnih — da se oko štedi od napora stalne i neobično velike akomodacije. Svaki koji nosi naočare treba da je načisto s tim kad je bolje uzeti naočare za daljinu ili za blizinu, ili kad je bolje gledati golim okom.

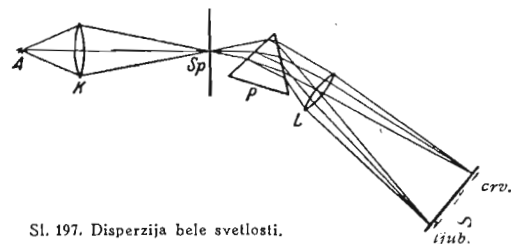
Drugi prilično rasprostranjen nedostatak kod očiju je *astigmatizam*. On se sastoji u tome što optički sistem oka ima različitu moć prelamanja u dva međusobno upravna pravca. Tada se npr. ne vide istovremeno jasno crte koje stoje upravno jedna na drugoj. I ova mana se može korijgovati naočarima sa cilindričnim sočivima.

Preko očiju ne dobijamo samo utiske svetlosti i boja, već i prostornosti. Ovo dolazi usled toga što gledamo sa dva oka. Usled rastojanja između očiju ne vidimo sa oba oka potpuno iste slike. Ovu nejednakost obično ne zapažamo, izuzev na vrlo malim rastojanjima. Lica sa jednim okom teško mogu da cene rastojanja. Kad se od istoga predmeta uzmu dva snimka, sa mesta koja se malo razlikuju, npr. sa fotografskim aparatom koji ima dva objektivna, i posmatraju u *stereoskopu*, dobija se utisak prostornosti. — Najprostiji stereoskop (Wheatstone) pretstavljen je na slici 196.



Sl. 196. Stereoskop.

§ 161. **Disperzija.** Dok se u vakuumu svetlost prostire istom brzinom nezavisno od svojih osobina (broja treptaja, boje), u telima brzina svetlosti zavisi od broja treptaja. Kod vidljive svetlosti opada brzina stalno sa rastućim brojem treptaja, dakle u pravcu od crvenog preko žutog ka ljubičastom, ostavljajući za sad na stranu izuzetke. Usled toga indeks prelamanja u istom pravcu stalno raste; crvena svetlost se prelama najviše, a ljubičasta najviše. Ova pojava se zove *disperzija* ili *rasipanje svetlosti*.



Sl. 197. Disperzija bele svetlosti.

Bela svetlost se može smatrati kao smeša svih spektralnih boja. Pri prelamanju bele svetlosti svaki od njenih sastavnih delova se različito prelama i pojavljuju se boje. Neka je *Sp* (sl. 197) uska pukotina na zaklonu koji je jako osvetljen s leve strane,

$K_1$  sočivo od koga osvetljeni zraci padaju na prizmu *P*. Usled različitih indeksa prelamanja svojih sastavnih delova, bela svetlost će se razložiti na boje poznatih sedam duginih boja od crvenog do ljubičastog. Pri izlasku iz prizme svetlost pada na drugo sočivo *L*. Dovde su zraci svake boje (istog broja treptaja) ostali među sobom paralelni.

Usled toga će se u žižnoj ravni sočiva *L* na belom zaklonu ponovo skupiti i dati lik pukotine *Sp*, i to svakoj boji odgovara jedan lik. Neprekidan niz ovih likova gradi od crvenog preko žutog, zelenog, plavog do u ljubičasto obojenu traku, *neprekidan spektar*. Na sl. 197 je nacrtno samo po jedan lik za crvenu i ljubičastu boju.

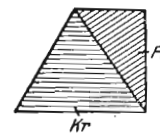
Ove se boje mogu ponovo skupiti u belo npr. na taj način što se prizma za mali ugao brzo obrće na obe strane. Tada različite boje stalno menjaju mesta na zaklonu i njihova smeša daje utisak belog.

Boje spektra, *čiste spektralne boje* ne mogu se dalje razlagati. Ako se iz spektra izdvoji jedna uska traka, stavljajući npr. zaklon sa pukotinom u spektar, pa svetlost koja prolazi kroz pukotinu propustimo kroz prizmu i pomoću sočiva nagradimo lik ove druge pukotine, na zaklonu nećemo dobiti spektar sa svima bojama, već samo izdvojenu boju.

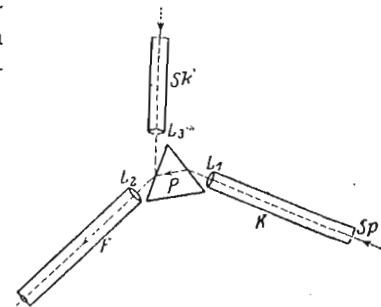
Ako imamo svetlost koja nije bela već sadrži samo mali broj spektralnih boja, onda se ne dobija neprekidan spektar, već niz odvojenih likova pukotine u tim bojama. Zbog toga što likovi pukotine imaju izgled linija, govori se u tom slučaju o *linijskim spektrima*.

Disperzija kod raznih providnih tela je različita. I pojedine vrste stakla (kron, flint itd.) pokazuju različito jaku disperziju, tj. različito obojene oblasti spektra pri prolazu kroz prizme istog prelomnog ugla, različito su jedna od druge odvojene.

Upotrebom dveju prizama različitih indeksa prelamanja (kron staklo *Kr* i flint staklo *Fl*) može se dobiti sistem prizama kod koga je disperzija kroz prvu prizmu otklonjena drugom, a pri tom skretanje nerazložene svetlosti nije poništeno (*ahromatična prizma* sl. 198). Od najvećeg značaja za praktičnu optiku je činjenica da se mogu upotrebom više sočiva od različitih stakala dobiti sistemi sočiva, kod kojih su otklonjene mane potekle od disperzije (*ahromati*).



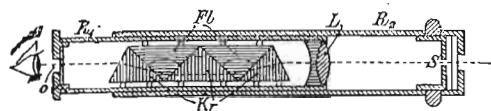
Sl. 198. Ahromatična prizma od kron i flint stakla.



Sl. 199. Prost spektroskop.

Aparati za dobijanje i posmatranje spektra zovu se *spektrometri* i *spektroskopi*. Sastav prostog spektroskopa vidi se na slici 199. Pukotina *Sp* i sočivo *L1*

smešteni su u kolimatorskoj cevi. Sočivo  $L_2$  je objektiv durbina podešenog na beskrajnost, čiji je okular namešten tako da njegova žižna ravan leži tamo gde se na slici nalazi zaklon. Realni likovi pukotine mogu

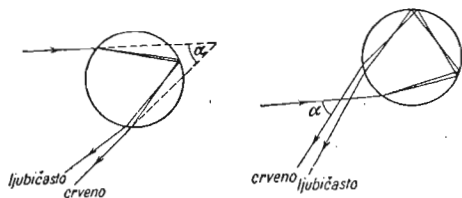


Sl. 200. Džepni spektroskop.  $R_1$ ,  $R_2$  cev za izvlačenje,  $L$  sočivo,  $S$  pukotina,  $Kr$  kron prizma,  $FI$  flint prizma,  $O$  okular.

se tada posmatrati okularom. Radi fotografisanja spektra, namesto zaklona stavlja se fotografska ploča (spektrograf).

Kombinacijom više prizama različitih indeksa prelamanja mogu se dobiti sistemi kod kojih disperzija nije otklonjena, tj. koji daju spektar, ali kod kojih je srednji deo spektra ostao neskrenut. Slika 200 pokazuje konstrukciju džepnog spektroskopa sa takvim prizmama (prav spektroskop, zvani à vision directe).

Duga postaje usled prelamanja i odbijanja sunčeve svetlosti u kišnim kapima (sl. 200a i b). Pošto se pojedine boje različito prelamaju, to ljubičasti deo sunčeve svetlosti skreće najviše, a crveni najmanje za  $360^\circ - \alpha$ . Zraci se skupljaju pri uglu  $\alpha$  od oko  $41^\circ$ , pri čemu su ljubičasti zraci skrenuli nešto više a crveni nešto manje. Dugu vidimo kao obojen kružni luk na suprotnoj strani od Sunca. Ona pokazuje



Sl. 200 a i b. Postanak duge.

boje spektra, crveno spolja, ljubičasto iznutra (sl. 200a). Usled dvostrukog odbijanja u kapljicama, može postati i druga duga u kojoj je red boja obrnut (sl. 200b). Tačnija teorija duge može se dati samo na osnovu talasne teorije svetlosti.

## Svetlost kao talasno kretanje

Interferencija

Difrakcija

Polarizacija

§ 162. **Teorije o prirodi svetlosti.** Prve teorije o tome šta je svetlost datiraju iz XVII veka. Isak Newton postavio je 1669 godine svoju emanacionu teoriju. Prema toj teoriji svetlosni izvor odašilje (emituje) sasvim sitne deliće, kojima je Newton pripisao izvesne osobine, takve da su se njima mogle objasniti sve tada poznate optičke pojave. Nasuprot toj teoriji postavio je Huygens 1667 god. (preteča Descartes 1637, Hooke 1665) talasnu ili undulacionu teoriju, prema kojoj je svetlost talasne prirode.

Mi smo u prethodnom odeljku upoznali karakteristične osobine talasa, naročito pojavu interferencije. Još u Njutnovu doba interferencija je bila

poznata. Branioци emanacione teorije pokušavali su da pomoću ove objasne i pojavu interferencije. Tek 1802 god. Thomas Young baš na osnovu interferencije dao je odlučujući dokaz u prilog talasne teorije. Zatim se utvrdilo da se tada poznate optičke pojave mogu objasniti samo talasnom teorijom. Najzad je otkrićem polarizacije utvrđeno da je svetlost transverzalna talasna pojava. Prema mehanističkim shvatanjima XIX veka smatralo se da je prenosioс svetlosnih talasa nemerljiva materija koja sve ispunjava: etar ili svetlosni etar.

Dok se u prvoj polovini XIX veka smatralo kao sasvim razumljivo da se na kraju svetlost može razumeti samo sa gledišta mehanike, 1871 god. Maxwell je sa genijalnom pronicljivošću uvideo da se osobine svetlosti mogu razumeti, ako se svetlost shvati kao elektromagnetna talasna pojava, koju je on pretstavio svojim jednačinama. Naglašavamo da u to doba elektromagnetni talasi eksperimentalno uopšte nisu bili poznati. Njih je otkrio H. Hertz 1888 god. potstaknut elektromagnetnom teorijom svetlosti, i njegovo otkriće pretstavlja jedno od najsjajnijih dela u istoriji fizike. Tek posle toga je Maxwell-ova teorija svetlosti dobila svoju punu važnost.

Do 1900 godine izgledalo je da je time završena izgradnja svetlosne teorije. Tada se uspostavilo na osnovu Planck-ove teorije zračenja, da talasna teorija, sama, nije dovoljna za razumevanje svetlosnih pojava, već da se pored nje, a ne umesto nje, mora uvesti i teorija kvanta. Talasna teorija objašnjava sve pojave koje se tiču prostiranja svetlosti. Ali promenu energije pri postanku ili gašenju svetlosti može da objasni tačno samo teorija kvanta. O teoriji kvanta govorićemo u poslednjem delu ove knjige. U početku zadržaćemo se samo na prostiranju svetlosti, na koje se potpuno može da primeni talasna teorija.

§ 163. **Broj treptaja i talasna dužina svetlosti.** Kao kod zvuka, može se i kod svetlosti pomoću interferencije meriti talasna dužina  $\lambda$  svetlosne oscilacije. Procesi koji se vrše u svetlosnom izvoru primarno određuju broj treptaja  $\nu$ . On se ne može direktno meriti, ili se može izračunati iz odnosa koji važi za sve oscilatorne procese

$$\lambda \nu = c \quad (1)$$

kada su  $\lambda$  i brzina svetlosti  $c$  poznati. Ako svetlosni zrak prolazi jedno za drugim kroz više različitih sredina u miru, njegov broj treptaja ostaje isti ali se menja  $\lambda$ , jer brzina zavisi od indeksa prelamanja. Ako je  $\lambda_0$  talasna dužina svetlosnog talasa u vakuumu, kad dospe u neku drugu sredinu indeksa prelamanja  $n$  postaće

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2)$$

U gasovima čiji je indeks prelamanja vrlo približno ravan jedinici, talasna dužina zraka se malo razlikuje od one u praznom prostoru. Podaci o

talasnim dužinama koji se nalaze po naročitim tabelama, odnose se na vakuum.

Merenje talasnih dužina pojedinih boja koje grade belu svetlost pokazalo je, da fizička razlika između čistih spektralnih boja leži u njihovom broju treptaja, odnosno u talasnoj dužini. Talasna dužina opada od crvenoga ka ljubičastome i iznosi za granicu crvenoga dela spektra okruglo 770 m $\mu$ , a za granicu ljubičastog oko 400 m $\mu$ . (1 m $\mu$  = 10<sup>-7</sup> cm). Iz jednačine (1) izlazi, da je broj treptaja za granično crveno oko 4.10<sup>14</sup> u sekundi, a za ljubičasto okruglo 8.10<sup>14</sup>. U praktičnoj spektroskopiji služi najviše kao jedinica talasne dužine Ångström (Å). 1 Å = 1/10 m $\mu$  = 10<sup>-8</sup> cm. Izražen u ovim jedinicama vidljivi spektar leži u granicama od 4000—7700 Å, ili kako se kaže u akustici, obuhvata samo jednu nepunu oktavu.

§ 164. **Interferencija svetlosti.** U talasnom kretanju govoreno je o stvarnoj prirodi interferencije talasa. Interferencija između talasa nastupa kada se susretnu dva talasa istog broja treptaja. Tada se javlja prema faznoj razlici pojačavanje i slabljenje treptaja, a u slučaju kad je fazna razlika 180°, a intenziteti isti, nastupa potpuno poništavanje — gašenje oscilacije.

Interferencija zvuka može se dokazati npr. pomoću dve zvučne viljuške istog broja treptaja. Moglo bi se onda pretpostaviti da se analog ogled može izvesti i u optici pomoću dva potpuno jednaka svetlosna izvora. Takav ogled međutim ne uspeva. Interferencija se može dokazati samo sa takozvanom koherentnom svetlošću, tj. samo onda, kada se svetlost koja istovremeno polazi iz iste tačke svetlosnog izvora ponovo skupi u jednoj tački prostora. Razlog tome je u sledećem: Telo odaje svetlost usled izvesnih procesa u samim atomima. Ovi procesi traju vrlo kratko vreme i razdvojeni su mnogo dužim pauzama. Atomi emituju, dakle, nizove talasa ograničene dužine (dužina interferencije) i ti nizovi mogu da interferuju samo ako između njih postoji konstantan fazni odnos za vreme duže od njihovog vremena oscilovanja  $\tau = 1/\nu$ . To nikad nije slučaj kod nekoherentnih svetlosti već samo kod nizova talasa koji potiču od istog elementarnog akta emisije.

Zbog ograničene dužine ovih nizova nije dovoljan uslov za interferenciju ni da dva zraka samo polaze iz jedne tačke svetlosnog izvora. Ako je jedan od ova dva niza prešao put do tačke u kojoj treba da se javi interferencija, koji je veći za više od dužine niza, nego li put drugog niza, onda oni ne deluju u toj tački istovremeno i ne mogu da interferuju, kao što je shematski naznačeno na sl. 201a. Ako je razlika u putevima manja od dužine jednog niza, onda se javlja interferencija koja je utoliko jača, ukoliko se manje ovi putevi razlikuju.

Razlika u hodu ili putna razlika dva koherentna svetlosna zraka jeste razlika puteva koji su oni prešli od svoga zajedničkog

početka do tačke u kojoj interferuju. Ako ova razlika iznosi ceo multipl njihove talasne dužine, onda se javlja maksimalno pojačanje. Ako je razlika neparan multipl polovine talasne dužine, javlja se maksimalno slabljenje. Imamo dakle

za  $\delta = z\lambda$  maksimalno pojačanje,

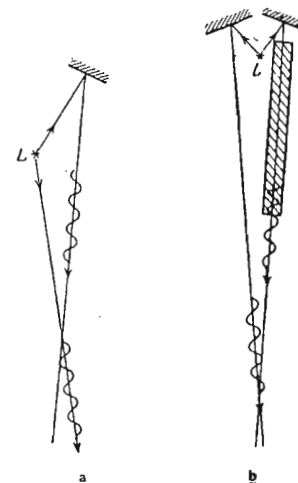
a za  $\delta = \frac{2z + 1}{2}\lambda$  maksimalno slabljenje

( $\delta$  = putna razlika,  $z$  = ceo broj).

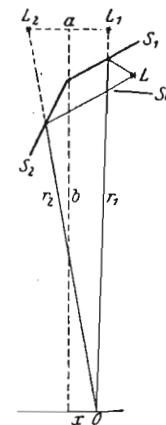
Pri tome putna razlika nije geometrijska razlika između pređenih puteva. Ako dva svetlosna zraka pri istoj geometrijskoj dužini puteva prolaze kroz sredine različitih indeksa prelamanja i njihova brzina je različita, pa jedan niz talasa dolazi ranije do tačke preseka od drugog (sl. 201 b). Za putnu razliku koherentnih zrakova je merodavna razlika optičkih dužina puta, a ne geometrijska razlika.

Razlikujemo Fresnel-ovu i Fraunhofer-ovu interferenciju. Kod prve se svetlosni izvor nalazi na konačnoj razdaljini i zraci koji polaze od njegovih pojedinih tačaka su divergentni. Kod Fraunhofer-ove interferencije svetlosni izvor je optički u beskrajnosti, tj. zraci koji polaze od pojedinih njegovih tačaka učinjeni su paralelnim.

§ 165. **Fresnel-ovi ogledi o interferenciji.** Za dobijanje koherentnih svetlosnih zrakova, mogu se po Fresnelu (1821) upotrebiti likovi jedne tačke u dva ravna ogledala, koja leže skoro u istoj ravni i oni deluju kao koherentni izvori. Od svetlosnog izvora  $L$  (sl. 202) postaju u ogledalima dva lika  $L_1$  i  $L_2$  koji deluju kao da su pravi izvori, a stvarni izvor se zakloni nekim neprovidnim zaklonom  $Sch$ . Neka je  $a$  rastojanje likova  $L_1$  i  $L_2$ , koje se može izračunati iz zakona o odbijanju svetlosti. Da bi se posmatranje svelo na najprostiji oblik, treba upotrebiti izvor koji emituje po mogućstvu svetlost jedne talasne dužine (monohromatsku). Za to je naročito pogodan plamen Bunsen-ovog grejača ili špirituzne lampe, obojen pomoću natrijuma (kuhinjske soli). Ako se na izvesnom rastojanju od ogledala postavi lupa, pomoću koje posmatramo reflektovanu svetlost od ogledala, onda se zapaža da je vidno polje ispresecano svetlim i tamnim pantljikama. Njihov postanak se



Sl. 201 a i b. Uz interferenciju talasa.



Sl. 202. Uz Fresnel-ova ogledala.

tumači interferencijom svetlosti koja polazi od oba svetlosna izvora. Neka su  $r_1$  i  $r_2$  razdaljine likova u ogledalima od jedne tačke u prostoru  $O$ , dakle

duž svetlosnog zraka razdaljine te tačke do samog izvora,  $b$  neka je normalno rastojanje te tačke od  $a$ , a  $x$  neka je neko rastojanje od linije simetrije (simetrane) između  $L_1$  i  $L_2$ . Tada je:

$$r_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2; \quad r_2^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

ili

$$r_2^2 - r_1^2 = 2ax \quad \text{ili} \quad r_2 - r_1 = \frac{2ax}{r_2 + r_1}$$

Pošto je  $b$ , pa prema tome i  $r_1$  i  $r_2$ , vrlo veliko spram  $a$  i  $x$ , te se bez velike greške može staviti da je  $r_1 + r_2 = 2b$ , tako da putna razlika oba zraka iznosi

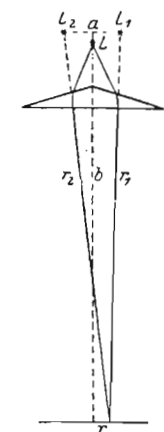
$$r_2 - r_1 = \frac{2ax}{r_1 + r_2} = \frac{2ax}{2b} = \frac{ax}{b}$$

Pokazano je da se dva talasa poništavaju usled interferencije, kad je njihova putna razlika ceo neparan multipl. polovine talasne dužine. Dobijamo dakle najmanje svetlosti kada je  $\frac{ax}{b} = \frac{2z + 1}{2} \lambda$  gde je  $z$  nula ili ma koji ceo broj.

Jednačina daje položaj  $x$  pojedinih tamnih pantljika. Iz razdaljine dveju pantljika  $\delta = \lambda \frac{b}{a}$  može se izračunati  $\lambda$ .

Sl. 203 pokazuje shematski svetlosne pojave na jednom zaklonu postavljenom ispred ogledala.

Ako upotrebljena svetlost nije monohromatska, onda mesta u kojima se poništavaju pojedine boje koje se nalaze u spektru ne leže na istim razdaljinama. U tome slučaju se javljaju obojene pantljike, ili kad je svetlost bela, serije uskih kontinuelnih spektara. Ali ovi nisu kao kod prizme sastavljeni iz čistih spektralnih boja, već postaju usled



Sl. 204.  
Fresnel-ova  
biprizma.

gašenja pojedinih boja u beloj svetlosti, tj. u svakoj tački javlja se komplementarna boja onoj svetlosti koja je u toj tački ugašena.

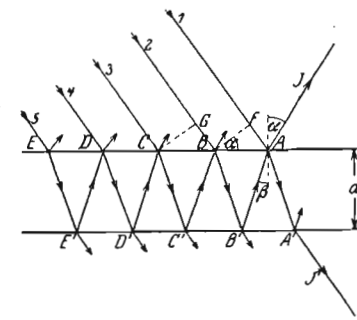
Umesto ogledala pod uglom, upotrebio je Fresnel i tzv. biprizmu predstavljenu na slici 204. Kao što se iz slike vidi, svetlosni zraci izgleda kao da dolaze iz dva svetlosna izvora  $L_1$  i  $L_2$ , i prizma daje, isto kao i ogledalo, dva koherentna zraka.

Interferencija na planparalelnim pločama. Ovaj naročito poučan primer proučićemo nešto opširnije. Na sl. 205 je tanka ploča debljine  $d$  i indeksa prelamanja  $n$ , ograničena paralelnim stranama. Na nju s jedne strane pada snop koherentnih paralelnih zrakova, za koje zamišljamo da dolaze iz neke tačke svetlosnog izvora u beskrajnosti. Kad se izvodi ogled izvor će se postaviti u žižnu ravan sabirnog sočiva, odakle zraci izlaze paralelno. Ovde kao što se vidi imamo slučaj Fraunhofer-ove interferencije.

Kad jedan zrak padne na takvu ploču on će se delimično odbiti od njene površine. Ostatak ulazi u ploču i pri tome se prelama. Na drugoj površini, opet će se jedan deo odbiti u unutrašnjost ploče, a ostatak posle prelamanja izlazi iz ploče. Onaj deo koji je reflektovan u ploči, više puta će se odbijati s jedne površine na drugu, i uvek pri svakom odbijanju njegova energija postaje manja, jer pri svakom odbijanju izvestan deo energije izlazi iz ploče.

Posmatraćemo sada zrak  $J$  koji polazi iz tačke  $A$ . Ukupna njegova energija je zbir više delova i to: od pravilno odbijenog zraka 1 sa površine ploče, uz to dolaze još delovi 2, 3, 4 itd. koji posle višestrukog odbijanja u unutrašnjosti ploče izlaze kod tačke  $A$ . Jačina svetlosti koja izlazi u pravcu zraka  $J$  zavisi i od odnosa faza delova 1, 2, 3 itd. koji izlaze kod  $A$ . Po-

smatraćemo prvo delove 1 i 2 bez obzira na njihov intenzitet. Oba ova zraka u ravni  $BF$  stoje u istoj fazi. Ali do tačke  $A$  moraću da pređu različite optičke puteve, tako da će u  $A$  između njih postajati izvesna fazna razlika, od čije će veličine zavisiti da li će ona u zraku  $J$  pojačavati ili slabiti. Optička dužina puta dela koji pripada zraku 1 od ravni  $BF$  do  $A$  jednaka je dužini  $FA$ , dužina puta dela zraka 2 jednaka je duži  $BB' + B'A$ , pomnoženom indeksom prelamanja ploče  $n$ . Ali i sledeće dolazi u obzir: svetlosni zrak pri odbijanju od optički gušće sredine, promeni svoju fazu za  $\pi$ , dakle za isto onoliko za koliko bi promenio fazu na putu  $\lambda/2$ . Faza dela zraka 1 je usled odbijanja kod  $A$  pomerena spram faze u tački  $F$ , kao da zrak nije prešao samo put  $FA$ , već put  $FA + \lambda/2$ . Prilikom odbijanja od optički ređih sredina, ne javlja se takva promena faze (savrni odbijanje



Sl. 205. Interferencija na planparalelnoj ploči.

na učvršćenom i slobodnom kraju) Iz slike se lako vidi da je  $AB$  jednako  $2d \operatorname{tg} \beta$  a  $FA = AB \sin \alpha$ , tako da je optička dužina puta, dodajući tu i promenu faze, u zraku 1 na putu  $FA$   $s_1 = 2d \sin \alpha \operatorname{tg} \beta + \lambda/2$ . Ili kako je po zakonu o prelamanju  $\sin \alpha = n \sin \beta$

$$s_1 = \frac{2nd \sin^2 \beta}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2} \quad (1a)$$

Prelazimo sada na deo zraka 2 koji dolazi u  $J$ . Njegova geometrijska dužina puta iznosi  $BB' + B'A = 2d/\cos \beta$ . Optička dužina puta na duži  $BA$  izneće

$$s_2 = \frac{2nd}{\cos \beta} \quad (1b)$$

Između oba ova dela postoji putna razlika

$$\delta = s_2 - s_1 = 2nd \cos \beta - \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Ako stavimo još prema zakonu o prelamanju  $n \cos \beta = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$  dobijamo

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (z + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2d} \quad \text{maksimalno pojačanje}$$

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \frac{z\lambda}{2d} \quad \text{maksimalno gašenje} \quad (3)$$

gde je  $z = 0, 1, 2 \dots$

Odavde se mogu izračunati upadni uglovi  $\alpha$ , pod kojima se javlja jedan od ova dva slučaja. Za upadne uglove između ove dve vrednosti  $\alpha$ , javljaju se prelazi od jednog graničnog slučaja ka drugome.

Sada ćemo posmatrati i deo zraka 3. Za putnu razliku koju on u  $A$  ima spram zraka 2, važi isto što smo utvrdili za delove zraka 1 i 2. Razlika geometrijskih puteva u oba slučaja je potpuno ista, pa bi putna razlika i u  $A$  oba dela bila jednaka kao i za zrake 1 i 2, da u ovome slučaju ne izostaje promena faze za  $\pi$ , jer ovde nema odbijanja na optički gušćoj sredini. Kao što se vidi, odnosi su pomereni tako, da se zraci 2 i 3 pod istim upadnim uglom maksimalno slabe, ako se 1 i 2 pojačavaju, i obrnuto. Neka bitna promena usled ovih odnosa se ustvari ne javlja, jer je praktično uzev energija dela 2 mnogo veća od energije u delu 3, tako da to ne utiče mnogo na slabljenje ili pojačavanje dela 2. Ako dalje posmatramo dejstva zrakova 4, 5 itd. dolazi se do zaključka, da u slučaju kad deo 2 maksimalno pojačava deo zraka 1, onda ga pojačavaju i delovi zraka 4, 6, 8 itd., dok delovi 3, 5, 7 itd. slabe deo zraka 1. Za one upadne uglove  $\alpha$ , pri kojima deo zraka 2 maksimalno slabi u  $J$  deo zraka 1, dejstvuju slabeći i delovi zrakova 3, 5, 7 itd. na deo 1 i potpomažu na taj način dejstvo interferencije zraka 2, jer intenziteti ostalih delova vrlo brzo opadaju.

Na slici 205 nisu nacrtani zraci koji idu paralelno sa 1, 2, 3 itd. i koji u drugim tačkama na površini planparalelne ploče proizvode odgovarajuće pojave: Od ploče dakle, paralelno sa  $J$  idu zraci u kojima se pojedini delovi iz kojih oni postaju slabe ili pojačavaju, već prema veličini upadnog ugla  $\alpha$ . Kad se ovi paralelni zraci uhvate na sočivo i skupe u njegovoj žiži, u žiži nastupa osvetljenje ili zamračenje. Isto možemo videti i golim okom. Ako svetlost dolazi od nekog šireg svetlosnog izvora čiji zraci prethodno prolaze kroz sočivo da bi postali paralelni, onda paralelni zraci koji polaze iz raznih tačaka svetlosnog izvora, padaju pod različitim upadnim uglovima na ploču. Lik svetlosnog izvora koji baca drugo sočivo, izbrazdan je svetlim i tamnim prugama. Svaki maksimum ili minimum osvetljenja potiče od zrakova koji padaju na ploču pod istim uglom. Taj slučaj se naziva interferencija istog nagiba.

Ako svetlosni izvor ne daje monohromatsku svetlost, već svetlost različitih talasnih dužina, onda za pojedine boje postoje razni upadni uglovi  $\alpha$  za maksimalna pojačanja i slabljenja. Ako upotrebimo npr. belu svetlost koja sadrži neprekidan niz talasnih dužina, onda su u određenim pravcima samo pojedine određene talasne dužine maksimalno pojačane ili ugašene. Ali to se u određenom pravcu može desiti za više talasnih dužina, a ne samo za jednu. To dolazi otuda što broj  $z$  može biti ma koji ceo broj, tj. za datu vrednost  $\alpha$  još nije određena talasna dužina  $\lambda$  maksimalno pojačana ili oslabljena, već to zavisi od veličine  $(z + \frac{1}{2}) \lambda/2d$  odnosno  $z \lambda/2d$ . Odatle izlazi za svaku vrednost broja  $z$  (redni broj interferencije) druga talasna dužina  $\lambda$ . Iz jed. (3) može se lako izvesti da  $z$  pri maksimalnom slabljenju ne može da ima manju vrednost od  $\sqrt{n^2 - 1} \cdot 2d/\lambda$ , tako da red veličine broja  $z$  mora biti najmanje  $d/\lambda$ . Ako je znači debljina ploče velika spram talasne dužine u pitanju, onda je i  $z$  veliko, pa su i talasne dužine koje su za dato  $\alpha$  maksimalno oslabljene, vrlo bliske jedna drugoj, npr. u slučaju da je najmanja vrednost za  $z$  oko 1000 ( $d \approx 1$  mm). Tada izlazi, ako stavimo  $z = 1000, 1001, 1002 \dots$  za dato  $\alpha$  i  $d$ , da se  $\lambda$  vrlo malo razlikuju. Isto tako izlazi da se za iste talasne dužine vrlo malo razlikuju susedni upadni uglovi  $\alpha$  maksimalnog gašenja, tako da usled tih malih uglovnih razlika oko ne može više da zapazi pojavu. U slučaju koji smo ovde posmatrali, izgledaće nam da svetlosni izvor veće ravnomerno svetleće površine i posle refleksije isto tako ravnomerno svetli. Zato se pruge interferencije u ovom našem slučaju ne javljaju ako je ploča debela spram talasne dužine, već samo ako je debljina ploče tako mala, da se može porediti sa talasnom dužinom.

§ 166. **Boje tankih listića.** Ako na neki tanak sloj pada bela svetlost, onda se usled interferencije u svima pravcima gasi poneka boja. Kad se posmatra jedna tačka na površini takvog sloja, onda se te boje u reflekt-

vanoj svetlosti ne vide; umesto njih vide se komplementarne boje onog ugašenog dela. Pošto se pojedine tačke površine toga sloja vide pod različitim uglovima, to se talasna dužina ugašenih boja, a sa tim i boja svetlosti koja dospeva u oko, menja od mesta do mesta. Sloj sjaji u svima mogućim bojama (boje tankih listića). Najpoznatiji primer za to nam daju mehuri od sapunice. Boje koje se vide na tankim slojevima ulja ili oksidisanim površinama metala imaju isti uzrok.

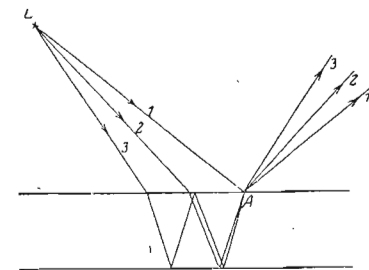
Naročite pojave se javljaju na vrlo tankim slojevima. Ako je debljina  $d$  znatno manja od talasne dužine  $\lambda$ , onda razlika u hodu  $\delta$  delova koji interferuju, dolazi skoro isključivo usled promene faze prilikom refleksije i praktično je nezavisna od upadnog ugla. U ovom slučaju je putna razlika stalno  $\lambda/2$ , pa stoga nezavisno od upadnog ugla i boje dolazi do gašenja. Zato na listićima čija je debljina приметно manja od talasne dužine svetlosti nema pojave interferencije, pa dakle ni boja tankih listića. Ako se na okruglom metalnom ramu napravi lamela od sapunice pa se stavi u brzu rotaciju oko ose, normalne na površinu lamele, onda će ona usled centrifugalne sile i isparavanja postati na sredini sve tanja, razmak između obojenih prstenova koji stalno menjaju svoju boju postajace sve veći. Naposljetku u sredini iščeznu boje i stvori se jasno ograničen bezbojan krug koji u odbijenoj svetlosti izgleda crn (crna mrlja). Ako se sad obrtanje zaustavi, onda se taj krug raspada na mnogobrojne manje mrlje, koje čak pokazuju sklonost da se povećaju.

§ 167. **Interferencija u propuštenoj svetlosti.** Dosad smo posmatrali pojave interferencije na tankom sloju u odbijenoj svetlosti. Sada ćemo uzeti u obzir one delove zrakova 1, 2, 3 itd. koji kod tačke  $A'$  (sl. 205) izlaze iz ploče. Na osnovu prethodnog razmatranja možemo lako naći odnose pojedinih delova u zraku  $J'$ . Zrak  $J'$  sastoji se iz delova svih zrakova 1, 2, 3 itd. i to od onih delova koji su se veći ili manji broj puta odbili u unutrašnjosti ploče. Jasno je da su razlike u hodu po dva susedna upadna zraka u tački  $A'$  isto toliko velike, kao kod dva susedna zraka u odbijenom zraku  $J$ , izuzimajući delove zrakova 1 i 2. Kod odbijenog dela zraka 1 dešava se odbijanje na optički gušćoj sredini. Takvog odbijanja međutim nema kod zrakova koji prolaze kroz ploču. Delovi zrakova koji sačinjavaju  $J'$ , koji izlazi, ponašaju se međusobom kao delovi zrakova koji sačinjavaju zrak  $J$ , izostavljajući pri tome odbijeni zrak 1. Gore smo videli da se u slučaju maksimalnog pojačanja pri refleksiji, parovi zrakova 2, 3, 4 itd. uzajamno slabe, pri čemu se istina parni delovi u  $J$  uzajamno pojačavaju, a isto tako i neparni — izuzimajući pri tome deo 1. Obe ove grupe se međutim uzajamno slabe. U ovome slučaju to se isto mora desiti i kad zrak prolazi kroz ploču. Ako prema tome imamo maksimalno pojačanje u reflektovanom zraku, onda upravo imamo maksimalno slabljenje u propuštenom. Ako u reflektovanom zraku  $J$  nastupa maksimalno slab-

ljenje, onda deluju, kao što smo videli svi, zraci 2, 3, 4 itd. u istom smislu i slabe deo zrakova 1. U propuštenom delu deluju sada opet u istom smislu svi zraci, ali se oni maksimalno pojačavaju. Odatle izlazi da je svetlosno dejstvo propuštenog zrakova maksimum pri istom upadnom uglu, pri kome je ono u odbijenom zraku minimum, i obrnuto. Ovo se može zaključiti već i odatle što upadna energija mora iz ploče da iziđe bez gubitka. Prema tome ukoliko manje svetlosti ima u odbijenom delu, utoliko je više mora imati u propuštenom. I u propuštenoj svetlosti javljaju se boje samo ako je ploča vrlo tanka.

Pri gornjem izlaganju pretpostavljeno je da ploča ima veći indeks prelamanja od njene okoline. U suštini se ne menja ništa ako se plan-paralelna ploča nalazi u sredini većeg indeksa prelamanja. Ovaj slučaj imamo npr. kod sloja vazduha koji je zatvoren između dve paralelne ravne staklene površine. U tome slučaju u jed. (3) namesto  $n$  dolazi recipročna vrednost  $1/n$ , pri čemu sada  $n$  označava indeks prelamanja stakla. Slika 205 trebalo bi u toliko da se promeni, što zraci pri prelamanju kroz sloj vazduha skreću od normale, a pri izlazu skreću ka normali. Sem toga sva odbijanja u unutrašnjosti vazdušnog sloja vrše se na optički gušćoj sredini. Sve druge posledice važe i za ovaj slučaj.

U pogledu odnosa intenziteta zaključuje se sledeće: Neka je  $\rho$  koeficijent odbijanja svetlosti tankog sloja, tj. deo svetlosti koji se odbije sa svake njegove površine; onda je  $1 - \rho$  deo propuštene svetlosti na jednoj takvoj površini. Neka je  $J_0$  jačina upadne svetlosti; onda izlazi da se jačina u reflektovanoj svetlosti kreće između  $J_0 \cdot 4\rho/(1 + \rho)^2$  za maksimum, i 0 za minimum. U propuštenoj svetlosti se kreće između  $J_0$  za maksimum i  $J_0 \cdot (1 - \rho)^2/(1 + \rho)^2$ . Najčešće je  $\rho$  mnogo manje od 1, tako da se intenziteti između maksimuma i minimuma razlikuju za oko 10%. U odbijenoj svetlosti u minimumu intenzitet potpuno iščezava. Zato su pojave interferencije u odbijenoj svetlosti znatno svetlosno slabije nego u propuštenoj, ali su mnogo kontrastnije i upadljivije. Na lamelama od sapunice vide se lepe pojave interferencije skoro isključivo pri reflektovanoj svetlosti. U propuštenoj svetlosti lamela izgleda skoro bezbojna.



Sl. 206. Fresnel-ova interferencija na planparalelnoj ploči.

§ 168. **Interferencija na planparalelnim pločama i klinastim površinama.**

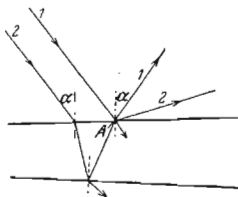
Posmatraćemo sada slučaj kada se na konačnoj razdaljini od planparalelne ploče nalazi svetlosni izvor, tako da svetlosni zraci divergentno padaju na ploču (Fresnel-ova interferencija). Neka je  $L$  svetlosni izvor neznatnih dimenzija (sl. 206). Svetlost koja polazi iz tačke  $A$  sadrži delove zrakova 1, 2, 3 itd.

koji su usled odbijanja odnosno prelamanja u unutrašnjosti ploče od  $L$  do  $A$  prešli različite optičke puteve. Između njih postoje putne razlike slično kao i kod slučaja paralelne svetlosti. Ali ovi delovi zrakova ne sjedinjuju se kao u poslednjem slučaju u jedan jedini zrak, već grade snop zrakova konačnog otvora. Ako posmatramo tačku  $A$ , onda se ovi zraci sjedinjuju na mrežnjači i daju sliku tačke  $A$ , a ova slika izgleda svetla ili tamna prema razlici hoda zrakova 1, 2, 3 itd. koji polaze od  $A$ . U tački  $A$  u kojoj se uočeni zraci seku nastupa interferencija kao i kod zrakova koji se seku u slučaju Fresnel-ovih ogledala. Zbog ranije iznetih razloga dovoljno je ako posmatramo dejstvo zrakova 1 i 2. Sve dok je daljina svetlosnog izvora velika prema debljini ploče, za interferenciju koja se javlja u  $A$  važe isti uslovi kao za paralelnu upadnu svetlost u reflektovanom zraku (jed. [3]).

Posmatrajmo sada slučaj kada paralelna svetlost pada na ravne površine koje iz jednog sloja isecaju tanki klin (sl. 207). Uočimo tačku  $A$  na površini toga sloja. Ako zanemarimo zrake koji su se više od jedanput odbili u unutrašnjosti sloja, onda se u  $A$  javljaju samo delovi dva tačno određena zraka 1 i 2, i to jedan deo koji se neposredno odbio, i deo koji se dva puta prelomio i jedanput u unutrašnjosti sloja odbio. Usled klinastog oblika sloja ti delovi ne idu u istom pravcu, kao u slučaju planparalelnog sloja i paralelne upadne svetlosti, već diverguju iz  $A$ . U reflektovanoj svetlosti dešavaju se pojave koje su iste sa onima na planparalelnoj ploči, kada je svetlosni izvor na konačnom rastojanju. Vidi se da oba zraka interferuju u tački  $A$  i pojačavaju se ili slabe prema svojoj putnoj razlici. Mesto interferencije se nalazi na površini sloja.

Za malu debljinu i mali ugao klina važe i ovde isti uslovi za javljanje osvetljenja ili zamračenja u tački  $A$ , kao i za planparalelnu ploču (jed. 3). Pošto se debljina sloja  $d$  menja od mesta do mesta, to se na tim mestima menja i putna razlika zrakova koji interferuju. Pri osvetljenju sa paralelnom monohromatskom svetlošću vidi se sistem sjajnih i tamnih pruga. Ove su jedna od druge utoliko više udaljene tj. utoliko šire, ukoliko je manji ugao klina. Svakoj pruzi odgovara ista debljina klina na mestima gde se pruge mogu videti. Zato se u ovom slučaju govori o *interferenciji jednake debljine*.

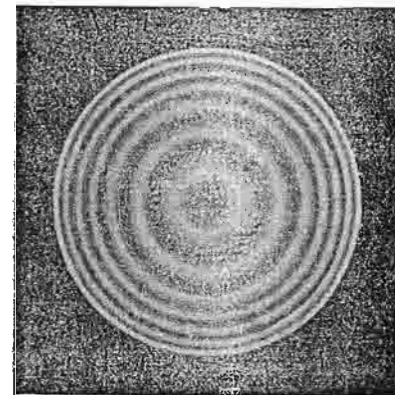
§ 169. **Newton-ovi prstenovi.** Naročiti slučaj gore opisane interferencije imamo kod Newton-ovih prstenova koji su Th. Young-u 1802 god. poslužili kao odlučujući dokaz za talasnu teoriju svetlosti. Newton-ovi prstenovi postaju kada svetlost pada na sloj vazduha koji se nalazi između ravne staklene ploče i slabo ispupčenog sočiva. Pojedine isečke toga vazdušnog sloja možemo smatrati kao klinove. Kad se upotrebi monohromatska svet-



Sl. 207. Interferencija na klinastom sloju.

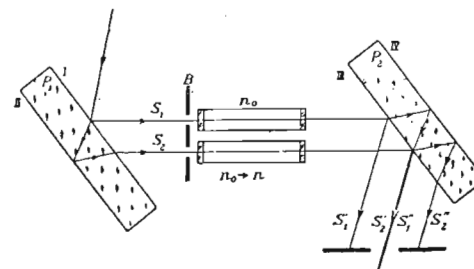
lost vide se sjajni i tamni krugovi čije se središte nalazi u dodirnoj tački između ploče i sočiva. Kad je sočivo dobro pritisnuto uz ploču onda se vide »crne mrlje« oko dodirne tačke zato što je tu sloj vazduha vrlo tanak. Širina svetlih i tamnih prstenova opada počev od centra, zato što debljina sloja u tom pravcu raste (sl. 208).

Kad se upotrebi bela svetlost javljaju se usled interferencije obojeni prstenovi. Boja dolazi otuda što se na svakom mestu usled interferencije gase određene talasne dužine, tako da se na tom mestu javlja komplementarna boja one boje koja je ugašena.



Sl. 208. Newton-ovi prstenovi u odbijenoj svetlosti.

§ 170. **Interferometri.** Interferometri su zasnovani na interferenciji koherentnih svetlosnih zrakova. Kao primer posmatraćemo Jamin-ov interferometar. Pored ostalog on može poslužiti i za merenje vrlo malih razlika ili promena indeksa prelamanja. On se uglavnom sastoji iz dve dobro urađene planparalelne staklene ploče  $P_1$  i  $P_2$  koje su jedna spram druge nagnute za vrlo mali ugao (sl. 209 na kojoj taj ugao, pošto je vrlo mali, nije označen). Na površinu prve ploče  $P_1$  pada svetlosni zrak koji se deli na odbijeni deo  $S_1$  i prelomljeni deo  $S_2$ . Ti delovi se još je-



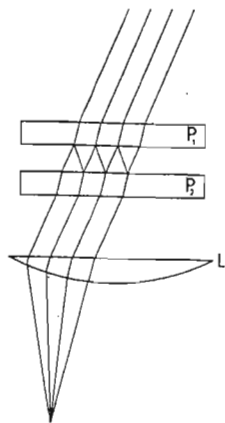
Sl. 209. Jamin-ov interferometar.

dnom razlažu na površini druge ploče  $P_2$  kao što se to iz slike vidi. Tako od jednog upadnog zraka dobijamo četiri koherentna zraka, od kojih se  $S_1'$  i  $S_1''$  pogodnim zaklonima eliminišu. Dva druga zraka koji prolaze kroz zaklon  $S_2'$  i  $S_2''$  pala bi zajedno da ploče nisu malo nagnute jedna spram druge. Usled toga malog nagiba njihovi optički putevi su nešto različiti, i oni se prostiru pod malim uglom isto kao zraci, koji dolaze od dva sekundarna svetlosna izvora na Fresnel-ovim ogledalima. Usled toga se javlja sistem interferencionih pantljika isto kao kod Fresnel-ovih ogledala. Položaj interferencionih pantljika zavisi od razlike optičkih puteva. Ako se na put svakog zraka  $S_1$  i  $S_2$  stavi po jedna cev iste dužine i napunjena u početku istim telom, npr. gasom (indeks prelamanja  $n_0$ ), onda se interferencija ne



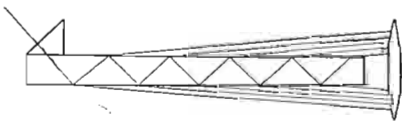
menja, jer se ne menja ni razlika optičkih puteva. Ali ako se sada u jednoj od cevi promeni indeks prelamanja od  $n_0$  na  $n$ , npr. povećanjem pritiska, onda se menja razlika optičkih puteva, što ima za posledicu pomeranje interferencionih pantljika. Iz veličine ovoga pomeranja može se izračunati promena indeksa prelamanja.

Ako se ma na koji način menja brzina svetlosti u jednoj od cevi, to dejstvuje isto kao promena indeksa prelamanja odnosno kao promena dužine optičkog puta. To se može izvesti npr. time, što se u obe cevi sipa ista tečnost koja u jednoj cevi miruje, a u drugoj struji duž cevi. Mora se očekivati da će svetlost kroz cev proći brže kada strujanje ima pravac prostiranja svetlosti, i da će proći sporije kad su ti pravci suprotni. Strujanje bi trebalo u prvom slučaju da skрати dužinu optičkog puta, a u drugom da je poveća. Ova veličina, koeficijent prenosa svetlosti, koju je Fresnel eksperimentalno našao, ima svoje kvantitativno objašnjenje u teoriji relativiteta i predstavlja istovremeno i važan oslonac te teorije. Na ovom mestu možemo samo napomenuti, da brzina svetlosti nije jednaka zbiru brzina svetlosti i strujanja, kao što bi trebalo očekivati, već je manja od ovog zbira.



Sl. 210. Perot-Fabry-ev interferometar.

Perot-Fabry-ev interferometar (sl. 210) je važno pomoćno sredstvo u spektroskopiji za merenje talasnih dužina. On se sastoji iz dve staklene ploče  $P_1$  i  $P_2$  sasvim ravne, čije površine nisu paralelne, već vrlo malo nagnute. Naspramne površine ovih ploča su providno posrebljene. Ako na interferometar pada paralelna svetlost, ona će se više puta odbijati u sloju vazduha koji se nalazi između ploča, pre nego što izide iz  $P_2$ . Pomoću sočiva  $L$  ta svetlost se skupi u jednoj tački. Prema razlikama u putu pojedinih zraka koji interferuju, dakle prema njihovom nagibu spram ploča, nastupa na mestu skupljanja uzajamno pojačavanje ili slabljenje. Iza sočiva se javlja sistem interferencionih pantljika. Poznavajući debljinu vazdušnog sloja i redni broj interferencije može se izračunati talasna dužina.



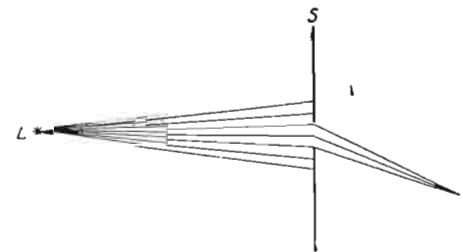
Sl. 211. Lummer-Gehrcke-interferometar.

Od ostalih interferometara pomenućemo još Lummer-Gehrcke-ov (sl. 211). Svetlost koja se ispituje pada na slici s leve strane kroz pravouglu staklenu prizmu i ulazi u tačno izrađenu planparalelnu staklenu ploču, sa čijih se strana delimično prelama i izlazi iz ploče, a delimično se u ploči odbija. Na taj način postaju snopovi paralelnih koherentnih zraka koji

među sobom imaju, kao što se lako vidi, velike putne razlike. Ugao pod kojim zraci izlaze iz ploče zavisi od njihove talasne dužine. Jedno sočivo skuplja paralelne zrake koji izlaze u svojoj žižnoj ravni. Interferometar ove vrste može se upotrebiti za ispitivanje strukture spektarskih linija u već dobijenom spektru.

§ 171. **Difrakcija (savijanje) svetlosti.** Huygens-ov princip se može primeniti na svetlosne kao i na druge talase. U ovome slučaju on iskazuje, da se svaka tačka na koju pada svetlost može smatrati kao polazna tačka zrakova koji se oko nje prostiru kroz prostor. Ako na svome putu svetlost ne pada na tela, ili ako su tela odnosno otvori na njima na koja svetlost pada veliki spram talasne dužine svetlosti, onda imamo pravolinijsko prostiranje svetlosti. Ali ako su tela ili otvori malih dimenzija koje se mogu porediti sa talasnom dužinom, onda se javljaju pojave difrakcije (savijanja) svetlosti. Prema tome da li se upotrebi divergentna ili paralelna svetlost, razlikuje se Fresnel-ova ili Fraunhofer-ova difrakcija.

§ 172. **Pojave Fresnel-ove difrakcije.** Svetlosni izvor malih dimenzija (sl. 212) nalazi se na izvesnom rastojanju od zaklona  $S$ , na kome je napravljen okrugli otvor, čije dimenzije nisu isuviše velike spram talasne dužine svetlosti koju emituje svetla tačka  $L$ . Po Huygens-ovom principu taj otvor postaje izvor svetlosti, od koga se u svima pravcima prostire svetlost. Ovaj otvor se razlikuje od jedne svetleće površine u tome, što su svi zraci koji polaze sa ovoga otvora koherentni, tj.

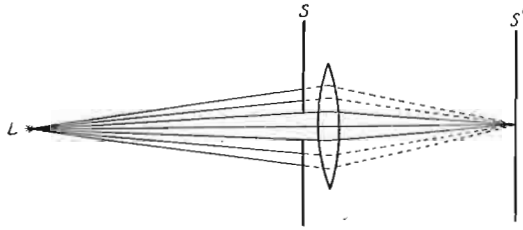


Sl. 212. Fresnel-ova difrakcija.

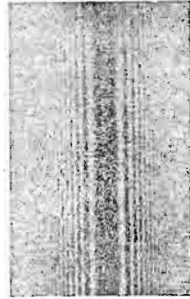
možu da interferuju, jer potiču od iste svetle tačke  $L$ . Posmatračemo jednu proizvoljnu tačku  $P$  iza otvora. U njoj se seku zraci koji dolaze od  $L$  do  $P$  prelaze različite puteve, dakle imaju međusobnu razliku u hodu. Svetlosno dejstvo u  $P$  zavisi od toga da li se pojedini zraci zbog svojih pređenih puteva, koji su različiti, pojačavaju ili slabe, i to će se dejstvo menjati od mesta do mesta prema položaju tačke  $P$ . U prostoru iza zaklona, krećući se u jednom određenom pravcu, npr. pomerajući jednu ravan paralelnu sa zaklonom  $S$ , jačina osvetljenja će periodično rasti i opadati.

Ova se pojava najlakše zapaža ako se prvo svetlosni izvor  $L$  pomoću sočiva projektuje jasno na zaklonu  $S'$ , pa se tada otvor za difrakciju namesti između sočiva i izvora  $L$  (sl. 213). Praktično se za svetlosni izvor uzima pukotina koju intenzivno osvetljava plamena lampa, a za uzak otvor

druga, sa prvom paralelna pukotina. Kada se namesti druga pukotina ispred sočiva, na zaklonu  $S'$  ne vidi se više oštar lik prvoga razreza, već više ili manje donekle pomešanih paralelnih pantljika čija jačina osvetljenja opada počev od sredine idući levo i desno. Ako svetlosni izvor emituje monohromatsku svetlost, onda se na zaklonu vide tamne i svetle pruge. Pri beloj svetlosti dobijaju se pantljike razli-



Sl. 213. Dobijanje Fresnel-ove difrakcije.

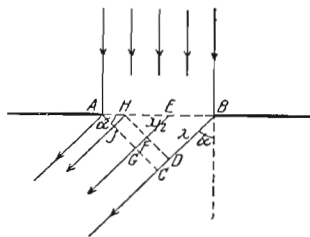


Sl. 214. Difrakcija na vlaknu.

čitih boja, koje kao boje tankih listova postaju na taj način, što je na svakom mestu izvesna boja usled interferencije oslabljena, i tu se javlja njoj odgovarajuća komplementarna boja.

Potpuno odgovarajuće pojave dobijaju se kad se na mesto pukotine stavi na put svetlosnih zraka sasvim uzak zaklon. Od njega se tada ne dobija oštra senka, već više pomešanih tamnih i svetlih (odnosno obojenih) pantljika (sl. 214). Difrakcija na nekom malom predmetu, npr. okruglom zaklonu je ista kao i na otvoru u zaklonu koji ima istu veličinu i oblik (Babinet-ov teorem).

§ 173. **Fraunhofer-ove pojave difrakcije.** Odnosi kod difrakcije pokazuju se mnogo prostiji i pregledniji kada na objekat koji izaziva difrakciju (pukotinu, zaklon) padaju paralelni koherentni zraci i kada se paralelni zraci koji su prošli kroz pukotinu skupe pomoću sočiva na zaklonu (sl. 215).



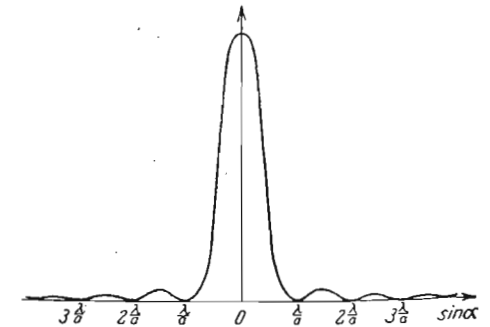
Sl. 215. Fraunhofer-ova difrakcija.

U ravni pukotine su zraci, ako padaju normalno na nju, svuda u istoj fazi. Posmatraćemo sada iza pukotine  $AB$  snop zraka koji sa pravcem upadnih zraka grade ugao  $\alpha$  i povucimo normalu  $AC$ . U toj ravni pojedini zraci nisu više u istoj fazi kao u ravni pukotine, jer od nje do ravni  $AC$  oni su prešli različite puteve. Neka je npr.  $BD$  ravno talasnoj dužini svetlosti  $\lambda$ , a  $EF = \lambda/2$ , tada postoji između zraka koji prolaze kroz  $C$  i  $G$  razlika u putu ravna polovini talasne dužine. Ti zraci se mogu dakle poništiti, ako se sjedine u ma kojoj tački prostora. Isto tako za svaki zrak

između pravih  $BC$  i  $EG$  može se naći takav jedan zrak između  $EG$  i  $HJ$ , za koji isto važi. Ako se dakle ispred zraka stavi sočivo koje paralelne zrake skuplja u jednoj tački, onda se svi zraci iz pomenute oblasti, sa razlikom u fazi za  $\lambda/2$ , gase usled interferencije i ostaje samo dejstvo onih zraka koji dolaze iz prostora između  $A$  i prave  $HJ$ . Pri većem nagibu ima više oblasti u kojima se zraci uzajamno gase. Pri tome, usled interferencije potpuno gašenje nastupa samo u onim pravcima kod kojih između ivičnih zraka koji prolaze kroz  $A$  i  $B$  postoji razlika u putu za ceo multipl talasne dužine. U tom slučaju nema ni jednog zraka u zoni  $AH$  koji se ne bi mogao poništiti interferencijom. Za svaki zrak u tome pravcu naći će se drugi koji je do ravni  $AC$  prešao put koji se razlikuje za  $\lambda/2$ . Kao što se iz slike 215 vidi postoji između tih zraka odnos:

$$\sin \alpha = \frac{z\lambda}{a} \quad (5)$$

gde je  $AB = a$  širina pukotine,  $z$  ma koji ceo broj. U pravcu upadnih zraka ( $\alpha = 0$ ) dobija se naravno maksimalno pojačanje, jer u tome pravcu zraci u ravnima normalnim na pravac zraka imaju uvek istu fazu. Kroz pukotinu dakle prolazi svetlost i pravolinijski i to više no ma u kom drugom pravcu. Sl. 216 pokazuje grafički raspodelu intenziteta pri savijanju kroz pukotinu.

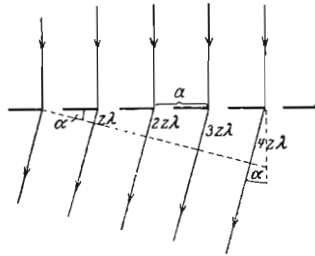


Sl. 216. Raspodela intenziteta pri savijanju monohromatske svetlosti kroz pukotinu.

Vidi se iz jed. (5) da je  $\alpha$ , tj. skretanje utoliko veće ukoliko je veća talasna dužina. U vidljivom delu spektra crveno je najviše, a ljubičasto najmanje skrenuto. Pošto se  $z$ ,  $\alpha$  i  $a$  mogu lako odrediti, može se pomoću savijanja na pukotini odrediti i talasna dužina  $\lambda$  upotrebne svetlosti. Kod bele svetlosti poklapaju se difrakcioni likovi pojedinih spektralnih boja, i postaju kao kod ogleda sa Fresnel-ovim ogledalima obojene pantljike. Prema vrednosti za  $z$  u jed. (5) govori se o interferenciji prvog, drugog itd. reda.

§ 174. **Optička rešetka.** Svetlosni zraci koji interferuju na nekoj pukotini grade povezan snop koherentnih zraka. Kod optičkih rešetki (Fraunhofer 1817) imamo interferenciju velikog broja vrlo uskih snopova koji su svi među sobom koherentni. Optička rešetka je obično planparalelna staklena ploča na kojoj se s jedne strane pomoću dijamanta izreže vrlo veliki broj finih crta, do dve hiljade na jedan mm. Svetlost prolazi

samo kroz uske pruge koje se nalaze između dva zareza. Takva rešetka predstavlja veliki broj vrlo uskih i bliskih pukotina (sl. 217). Rešetka se može izrezati i na uglačanim konkavnim površinama. Tada mesta između crta, koja jedino pravilno odbijaju svetlost, dejstvuju kao i pruge između crta na optičkoj rešetki. Kod rešetki na izdubljenim površinama imamo to preimućstvo, što za snimanje spektara koje rešetka daje nije potrebno sočivo.



Sl. 217. Difrakcija na optičkoj rešetki.

Posmatrajmo sada slučaj kada na rešetku padaju upravo monohromatski koherentni zraci. Da bi posmatrali pojave interferencije s druge strane rešetki, treba paralelne zrake koji iz nje izlaze skupiti pomoću sočiva. Dovoljno je i očno sočivo, dakle posmatranje golim okom. Iz upadnog snopa uočićemo sada homologe zrake, na primer one koji na sl. 217 prolaze pored leve ivice pojedinih pukotina na ploči. Iza ovih će se svetlost prostirati po Huygens-ovom principu u svima pravcima kao kod jedne proste pukotine. Posmatrajmo sada zrake koji od pojedinih pukotina idu u jednom određenom pravcu. Jasno je, da će se zraci koji polaze od dve susedne pukotine uzajamno najviše pojačavati kad je njihova putna razlika u posmatranom pravcu jednaka celom broju talasnih dužina ( $z\lambda$ ). Ako je taj uslov ispunjen za gore pomenute zrake, onda je on ispunjen i za sve druge zrake koji prolaze kroz rešetku u istom pravcu, s pretpostavkom da su širine pukotina iste i na istom rastojanju  $a$ . Iz slike 217 se vidi da su pravci maksimalnog pojačanja dati odnosom:

$$\sin \alpha = z \frac{\lambda}{a} \quad (6)$$

gde  $a$  označava rastojanje dveju susednih homologih tačaka na rešetki — konstantu rešetke, a  $z$  je ma koji ceo broj. Prema veličini broja  $z$  razlikuju se interferencije prvog, drugog itd. reda. Pri upotrebi monohromatske svetlosti dobijaju se iza rešetke kroz sočivo oštre spektralne linije razdvojene tamnim međuprostorima; od bele svetlosti dobija se spektar.

Treba obratiti pažnju da pojave interferencije na rešetki postaju na sasvim drugi način, nego na jednoj pukotini. To se može već i odatle videti što su jed. (5) i (6) formalno identične, ali da jed. (5) koja se odnosi na pukotinu daje pravac maksimalnog slabljenja, a jed. (6) koja se odnosi na rešetku daje pravac maksimalnog pojačanja.

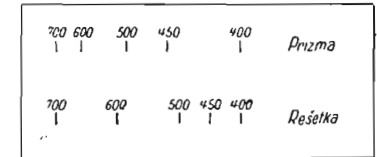
Ako se iza rešetke nalazi sredina indeksa prelamanja  $n$ , onda umesto  $\lambda$  talasne dužine za vakuum treba staviti u jed. (6) talasnu dužinu u toj sredini  $\lambda/n$  pa dobijamo:

$$\sin \alpha = \frac{z\lambda}{na} \quad (7)$$

Ako se posmatra svetlosni izvor manjih dimenzija kroz gustu tkaninu, npr. udaljena ulična sijalica kroz raširen kišobran, vide se spektralne boje koje dolaze usled difrakcije svetlosti na malim otvorima u tkanini. Tkanina gradi ovde ukrštenu rešetku kao staklena ploča na kojoj bi bile urezane pukotine upravo jedna na drugu.

Pomoću optičke rešetke mogu se kao i pomoću prizme dobiti spektri svetlosnih izvora. Ukoliko je viši red spektra utoliko je veća i disperzija, tj. rastojanje dveju spektralnih linija sa određenom razlikom u talasnim dužinama. U praktičnim slučajevima najčešće imamo mala skretanja  $\alpha$ , pa se umesto jed. (6) može napisati  $\alpha \approx z\lambda/a$ .

Skretanje svetlosti kroz rešetku je dakle približno srazmerno talasnoj dužini, dok to nije slučaj kod spektra koji se dobija kroz prizmu (sl. 218). Zato se spektar dobijen pomoću rešetke zove takođe normalni spektar. Kad se poznaje konstanta optičke rešetke  $a$ , može se iz skretanja (ugao  $\alpha$ ) izračunati talasna dužina. Prema jed. (6) izlazi da je kod rešetke skretanje utoliko veće, ukoliko je veća talasna dužina, a kod prizminih spektara obrnut je slučaj. U vidljivom delu spektra crvena svetlost je skrenuta najviše a ljubičasta najmanje. Jačina spektra kod rešetke vrlo brzo opada sa rednim brojem spektra. Kod običnih rešetki usled male jačine svetlosti ne ide se dalje od spektra trećeg reda. Uz to dolazi još i delimično sve veće poklapanje spektara višeg reda.

Sl. 218. Spektri koji se dobijaju kroz prizmu i kroz rešetku. Talasne dužine u  $m\mu$ . Spektri su tako nacrtani da se kod 400 i 700  $m\mu$  poklapaju.

Kod rešetki treba praviti razliku između disperzije i moći razlaganja. Disperzija je utoliko veća ukoliko je veća i razlika uglova  $\alpha$  za ma koje dve različite talasne dužine, dakle ukoliko je manja konstanta rešetke  $a$ . Moć razlaganja je sposobnost, da se dve vrlo bliske spektralne linije učine vidljivim kao razdvojene. To istina zavisi od disperzije, ali ne samo od nje, već i od oštine spektralnih linija. Pri istoj disperziji mogu se dve bliske linije još stapati ako su dovoljno široke. Spektralne linije su utoliko oštrije ukoliko je veći broj crta na rešetki. Zato moć razlaganja jedne rešetke zavisi od toga broja crta.

§ 175. Difrakcija i rasipanje svetlosti na vrlo malim telima. Kao što je već pomenuto difrakcija se ne javlja samo na malim otvorima, već i na preprekama na putu svetlosnoga zraka, ako ove nisu suviše velike spram talasne dužine. Većim delom se ovim objašnjavaju nejasni likovi predmeta koje posmatramo kroz maglu, dim itd. Ovim se objašnjavaju takođe i svetli obojeni prstenovi koji se ponekad vide oko Meseca i Sunca (halo), a koji postaju difrakcijom na ledenim iglicama u visokim slojevima atmo-

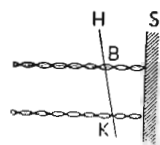
sfere. Delići koji izazivaju difrakciju ne bacaju oštro ograničene senke, već se umesto njih javljaju sistemi sa svetlim i tamnim prstenovima.

Ako se osvetljen kružni otvor pomoću sočiva projektuje na zaklon, pa se između otvora i sočiva unese zamagljena staklena ploča ili još bolje staklena ploča posuta lipopodijumom, onda se na zaklonu vide iste pojave kao oko Sunca i Meseca.

Od difrakcije na delićima koji su istog reda veličine kao i talasna dužina svetlosti, treba razlikovati rasipanje ili difuziju svetlosti, koja se javlja na još sitnijim delićima. Svetlost pri tome skreće sa svoga puta, ali se između pojedinih skrenutih zraka ne javljaju fazni odnosi koji dovode do pojava interferencije. Ovim se objašnjava što se u nekim potpuno providnim telima vidi svetlosni zrak na celome putu kroz njih, tako da tela izgledaju nekad mutna.

Plava boja neba je prema Rayleigh-u posledica rasipanja svetlosti u atmosferi. Ona dolazi usled Brown-ovog kretanja molekula vazduha i sa njim u vezi skupčanim promenama gustine vazduha. Usled toga je i indeks prelamanja vazduha različit od mesta do mesta. Optička nehomogenost vazduha deluje utoliko jače na svetlost, ukoliko je manja njena talasna dužina, dakle jače deluje na svetlost manjih talasnih dužina u sunčanom spektru. Zato ova znatno više skreće sa svoga puta i rastura se u svima pravcima, nego što je to slučaj sa većim talasnim dužinama. Atmosfera koju obasjava Sunce u svima tačkama je izvor ove rasute svetlosti, pa kako je ovo rasipanje jače za male talasne dužine to nebo izgleda plavo. U neposredno posmatranoj sunčevoj svetlosti nema ovog rasutog dela. Zato nam Sunce izgleda crvenije, nego što je ustvari i to utoliko više ukoliko je njegov put kroz atmosferu duži. Zato nam Sunce i Mesec pri izlasku i zalasku izgledaju naročito crveni što je tada njihov optički put kroz atmosferu naročito dug. Usled prašine, vodenih kapi i ledenih iglica ovo dejstvo se može još pojačati.

Pošto su difrakcija i rasipanje utoliko manji ukoliko je veća talasna dužina svetlosti, to se za automobile pri magli upotrebljavaju farovi koji daju crvenkasto-žutu svetlost. Još mnogo manje skreće svetlost većih talasnih dužina u infracrvenom delu spektra. Od kako se prave fotografske ploče koje su dovoljno osetljive za infracrveni deo, mogu se uzimati snimci brda sa daljine od više stotina kilometara, iako ta brda usled neprovidne atmosfere na toj daljini obično ne možemo da vidimo golim okom.



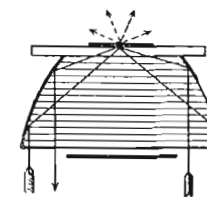
Sl. 219. Dokaz svetlosnih stojećih talasa.

§ 176. **Svetlosni stojeći talasi.** Jedan od najlepših dokaza za talasnu prirodu svetlosti jesu svetlosni stojeći talasi (Wiener 1890). Pusti se da paralelna svetlost pada upravno na ogledalo S tako da upadni i odbijeni zraci grade stojeće talase (sl. 219). Ispred ogledala, pod vrlo malim uglom sa ogledalom, postavi se

lamela od kolodiuma na kojoj se nalazi osetljiv fotografski sloj. Kad se sloj razvije vide se crne pruge i sloj je najjače pocrneo na mestima koja odgovaraju čvorovima K, a najmanje na mestima koja odgovaraju trbusima stojećih talasa. Pomoću stojećih talasa ranije su se pravile i fotografije u boji (Lippmann).

§ 177. **Difrakcija u mikroskopu. Ultramikroskop.** Raspoznavanje detalja na sitnim predmetima ima svoju donju granicu kod optičkih instrumenata usled pojava difrakcije. Zamislimo da se ispod objektiva mikroskopa nalazi optička rešetka. Da bi od njene strukture u cevi (tubus-u) postao realan lik, potrebno je da pored centralnog zraka koji kroz rešetku prolazi bez skretanja uđe u objektiv bar još zrak difrakcije prvog reda. Ako je međutim konstanta optičke rešetke vrlo mala, dakle skretanje dosta veliko, onda taj zrak ne dospeva u mikroskop, pa se ne dobija slika strukture. Ovo se isto dešava i sa strukturama druge vrste koje se posmatraju mikroskopom. U toj činjenici leži razlog za granicu moći razlaganja mikroskopa. Ako se između predmeta i objektiva stavi telo velikog indeksa prelamanja  $n$  (imerziona tečnost), onda će ugao skretanja, kao što se iz jed. (7) vidi, biti manji i moći će se videti razložene još finije strukture.

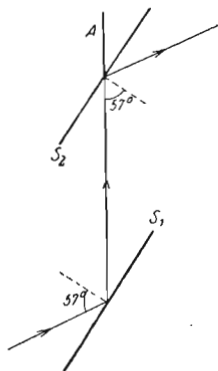
Kad je potrebno da se vrlo mali predmeti učine bar vidljivim, npr. vrlo sitne bakterije, delići zlata u koloidnom rastvoru kod Brown-ovog kretanja, žrtvujući pri tome lik njihovog oblika, onda se može predmet odozdo koso osvetliti. U tome slučaju u objektiv ne dospevaju zraci interferencije nižeg reda, već mnogo zbijeniji zraci višeg reda. U tome slučaju vide se i oni predmeti koji leže ispod vidne granice običnog mikroskopa do otprilike  $4 \cdot 10^{-6}$  milimetara. Oni izgledaju kao svetli okrugli difrakcioni zakloni različitih boja u tamnom polju. Takvu vrstu mikroskopa nazivamo — ultramikropi.



Sl. 220. Kondenzor za koso osvetljenje kod ultramikroskopa.

§ 178. **Doppler-ov efekat u optici.** Kao kod svakog drugog talasnog kretanja tako se i u svetlosti javlja Doppler-ov efekat, tj. promena broja treptaja kada se svetlosni izvor kreće u odnosu na posmatrača. Veličina toga efekta koji se pokazuje u pomeranju spektralnih linija prema crvenom ili ljubičastom zavisi od odnosa  $v/c$  brzine kretanja svetlosnog izvora  $v$  i brzine prostiranja svetlosti  $c$ . Zato se efekat može primetiti samo kod brzina koje prelaze nekoliko kilometara u sekundi, a takve brzine na zemlji dosad nismo mogli saopštavati svetlosnim izvorima većih dimenzija. Naprotiv svetleći atomi u kanalskim zracima imaju znatno veće brzine i kod ovih je nađeno pomeranje linija u pravoj veličini. I termičko kretanje svetlećih atoma se može videti pomoću Doppler-ovog efekta po tome, što su spektralne linije nejasne. Ovo je naročito jako izraženo, kao što je to Stark otkrio, kod vrlo lakih, pa stoga vrlo brzih vodonikovih atoma.

§ 179. **Polarizacija svetlosti.** Ostaje nam sada da raspravimo pitanje dali je svetlost longitudinalan ili transverzalan talas. Govoreći o talasnom kretanju naglašeno je da to pitanje rešava polarizacija. Sledeća pojava koju je zapazio prvo *Malus* (1808) daje odgovor u prilog transverzalnosti. Svetlosni zrak pada pod upadnim uglom od  $57^\circ$  na staklenu ploču  $S_1$  (kron staklo) i od ove se odbija na drugu staklenu ploču  $S_2$ . Ova ploča može se obrtati oko ose  $A$  koja leži u pravcu zraka koji na nju pada, a taj zrak i ovde zaklapa sa normalom na ploču ugao od  $57^\circ$  (sl. 221). Reflektovani



Sl. 221. Za dokaz polarizacije prilikom odbijanja.

zrak od druge ploče hvata se na jednom zaklonu. Kad se druga ploča obrće oko ose  $A$ , pri čemu upadni ugao ostaje stalno  $57^\circ$ , onda se pokazuje na zaklonu najjače osvetljenje kada obe ploče stoje paralelno, ili kad je druga ploča obrnuta za  $180^\circ$  spram paralelnog položaja. Ako se ona obrne samo za  $90^\circ$  na jednu ili na drugu stranu spram paralelnog položaja, na zaklonu se ne vidi svetlost, jer ploča  $S_2$  više ne odbija zrake koji na nju padaju. To pokazuje na prvom mestu da je kod svetlosti prilikom odbijanja na ploči  $S_1$  već nastupila neka promena. To pokazuje dalje, da se ta promena desila u samoj svetlosti i da odgovara onim promenama koje se mogu javiti jedino kod transverzalnih talasa, kao što je to ranije objašnjeno na mehaničkim primerima.

Svetlost koja se odbila od ogledala  $S_1$  je linearno polarizovana, tj. njene oscilacije posle odbijanja vrše se samo u jednoj određenoj ravni upravno na pravac prostiranja. Prema tome svetlost se osniva na periodskoj promeni jednoga vektora koji u svakoj tački prostora stoji upravno na pravac prostiranja svetlosti. U početku ne moramo tačno znati kakve je vrste ovaj vektor. Privremeno će biti dovoljno da se definiše pojam jednog svetlosnog vektora, za koji ćemo utvrditi da kod svetlosti koja je linearno polarizovana usled odbijanja stoji upravno na upadnoj ravni, na slici 221 upravno na ravan slike. Ova ravan se zove polarizaciona ravan linearno polarizovane svetlosti.

Pri upadnom uglu od  $57^\circ$  koji se zove polarizacioni ugao stakla, od svetlosti koja pada na ploču odbija se samo ona čija ravan polarizacije leži u upadnoj ravni, čiji svetlosni vektor stoji upravno na ovoj. Svetlost koja se nije od ploče odbila prolazi kroz staklo. Ona sadrži, pored komponente koja osciluje upravno na upadnu ravan, u manjoj meri još i svetlost drugih komponenata. Ona je zato delimično polarizovana. Ako se upotrebi više staklenih ploča koje leže jedna na drugoj (slog ploča) može se i ova propuštena (prelomljena) svetlost u mnogo većoj meri linearno polarizovati.

Ako kod opisanog ogleada obe ploče stoje paralelno ili obrnute za  $180^\circ$ , onda kod druge ploče polarizaciona ravan upadne svetlosti leži u upadnoj ravni i svetlost se odbija. Za druga dva položaja upravna na ove pret hodne, u upadnoj svetlosti nema nijednog dela čija polarizaciona ravan leži u upadnoj ravni i ne može se dakle odbijati. Prva staklena ploča zove se polarizator, druga analikator. Ovaj ogled pokazuje da je svetlosni talas transverzalan.

Ugao polarizacije jednoga tela određen je Brewster-ovim zakonom: za polarizacioni ugao reflektovani zrak sa površine i prelomljeni zrak u telu stoje jedan na drugom upravno. Pošto je tada  $\sin \beta = \cos \alpha$ , to izlazi iz zakona o prelamanju:

$$\tan \alpha = n \quad (8)$$

Rasuta svetlost je takođe više ili manje polarizovana (Tyndall-ova pojava). Usled toga je i svetlost u gornjim slojevima atmosfere delimično polarizovana. Samo u dvema tačkama neba koje zavise od visine Sunca ova se polarizacija ne zapaža (Arago-va i Babinet-ova tačka). Polarizacija svetlosti na nebu ima izvesnog značaja za meteorologiju.

§ 180. **Prirodna i polarizovana svetlost.** Kod prirodne, tj. nepolarizovane svetlosti koju emituje svetlosni izvor ne postoji nikakva zakonska veza između dve vremenski susedne faze svetlosnog vektora. Ako posmatramo svetlosni vektor u ma kojoj tački prostora on stalno i nepravilno menja svoju veličinu i pravac u ravni koja je upravna na pravac prostiranja. Kad je jačina svetlosti nepromenljiva iznos svetlosnog vektora se kreće oko jedne određene srednje vrednosti, a pojedini pravci koji stoje upravno na pravcu prostiranja prosečno vremenski se javljaju podjednako često. Ovde ne postoji samo analogija, već dublja uzajamna veza sa stanjem molekula jednoga gasa čije se brzine stalno kreću oko jedne srednje vrednosti i čiji se pravci brzina takođe stalno menjaju, ali tako da su vremenski prosečno podjednako raspoređeni u svima pravcima prostora.

Polarizovana svetlost razlikuje se od prirodne u tome, što se kod nje iznos i pravac svetlosnoga vektora periodski menjaju, što dakle između dve uzastopne faze postoji pravilna veza. Mi smo već ranije u talasnom kretanju objasnili pojmove eliptične, cirkularne i linearne polarizacije i ovde ćemo ih samo preneti na svetlost. Kod linearno polarizovane svetlosti svetlosni vektor ostaje stalno na istoj pravnoj i samo između određenih granica menja svoju vrednost i znak. Kod eliptično polarizovane svetlosti obrne se pravac svetlosnog vektora za  $360^\circ$  konstantnom brzinom u ravni upravnoj na pravac prostiranja za vreme jedne oscilacije. Pri tome se menja njegova vrednost, jer vrh vektorske strelice opisuje elipsu. Eliptički polarizovana svetlost može se shvatiti da je postala slaganjem dva upravno linearno

polarizovana svetlosna vektora različitih amplituda, između kojih postoji fazna razlika  $\pi/2$ . Cirkularno polarizovana svetlost je specijalan slučaj eliptične polarizacije, kod koje su amplitude obeju komponenta iste veličine. Govori se o desno i levo cirkularno polarizovanoj svetlosti, prema tome dali svetlosni vektor obilazi pravac prostiranja u smislu kretanja kazaljki na satu ili u suprotnom smislu. Trajanje jedne oscilacije na jednu i na drugu stranu kod linearno polarizovane svetlosti i jednoga obilaska kod eliptično ili cirkularno polarizovane svetlosti iznosi

$$\tau = \frac{T}{\nu} = \frac{\lambda}{c}$$

Transverzalni talasi mogu se poništavati usled interferencije samo ako osciluju u istoj ravni. Zato dva linearno polarizovana talasa koji stoje



Sl. 222. Uz prelamanje u krečnjaku.

normalno jedan na drugom ne mogu da interferuju čak i ako su koherentni, tj. iako postaju iz istog talasa prirodne svetlosti.

Treba izbegavati da se linearno polarizovana svetlost prosto zove polarizovana svetlost, jer između pojedinih slučajeva polarizacije postoji razlika, kao što smo sad videli.

§ 181. **Dvojno prelamanje.** Ako se neki predmet npr. slova posmatraju kroz kristal krečnjaka, ona izgledaju udvojena. Zraci koji prolaze iz jedne jedine tačke predmeta cepaju se kroz kristal na dva dela i različito se lome. Ova pojava koju je prvi opisao Huygens (1690) zove se dvojno prelamanje (sl. 223).



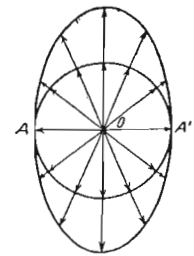
Sl. 223. Dvojno prelamanje kod kristala krečnjaka.

Projektujemo na zaklon jednu jako osvetljenu dijafragmu. Ako se iza sočiva namesti na put svetlosnih zrakova jedan kristal krečnjaka, onda umesto jednoga lika dijafragme na zaklonu vidimo dva, i to ako kristal stoji upravno na pravac svetlosnih zrakova jedan lik je ostao na ranijem mestu, a drugi je pomeren u stranu. Kad se kristal obrće oko svetlosnog zraka kao ose, prvi lik ostaje nepokretan, a drugi se obrće oko prvoga. Ako se mesto prirodne upotrebi linearno polarizovana svetlost, stavljajući ispred kristala staklenu ploču nagnutu pod polarizacionim uglom, oba lika su tada obično različito osvetljena. Za dva položaja kristala koji se razlikuju za  $180^\circ$  vidi se samo jedan

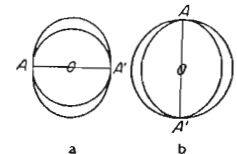
(1 i 5), pri obrtanju za  $90^\circ$  vidi se samo drugi lik (3 i 7). Između tih položaja leže svi mogući prelazi od svetlog do tamnog (sl. 222).

Ovaj ogled dokazuje da su oba lika koje kristal daje linearno polarizovana svetlost, i to zrak koji daje prvi lik je linearno polarizovan i normalan na polarizovan zrak koji daje drugi lik. On pokazuje dalje, da se prirodan svetlosni zrak koji dospeva u kristal cepa u dve upravne linearno polarizovane komponente koje se različito lome.

Izotropna amorfna tela kao staklo, kristali regularnog sistema (kamena so), ne pokazuju pojave dvojnog prelamanja. Ono postoji kod svih drugih kristala. Dvojno prelamanje se objašnjava time što brzina svetlosti u tim anizotropnim telima zavisi prvo od pravca svetlosnog zraka u kristalu, i drugo od polarizacione ravni upadne svetlosti. Neka je  $O$  tačka u unutrašnjosti jednoga kristala koji dvojno prelama, iz koje se prostire svetlost (sl. 224). Dokazuje se da je ta svetlost podeljena na dve normalne komponente, obe linearno polarizovane. Kod tzv. jednoosnih kristala (trigonalnog, tetragonalnog i heksagonalnog sistema) prostire se jedna od tih komponenti u svim pravcima sa podjednakom brzinom i gradi u kristalu jednu talasnu loptu. Brzina druge komponente nije jednaka za sve pravce. Površina njenih talasa jeste rotacioni elipsoid. Površina lopte i rotacioni elipsoid dodiruju se u krajnjim tačkama velike (pozitivni jednoosni) ili male ose (negativni jednoosni) poslednjega (sl. 225 a i b). Prava  $AA'$  dakle pravac u kome se obe komponente prostiru istom brzinom zove se optička osa kristala. Zrak koji se prostire u svima pravcima istom brzinom zove se redovni (obični), a drugi čija brzina zavisi od pravca prostiranja zove se neredovni (neobični) zrak. Zbog zavisnosti brzine prostiranja od indeksa prelamanja, indksi prelamanja za ova dva zraka su takode različiti. Prvi je  $n_o$  i  $n_a$  nepromenljiv, a drugi zavisi od pravca u kristalu. U pravcu optičke ose je  $n_o = n_a$ . Za običan zrak važi Descartes-Snelius-ov zakon prelamanja, a za neobični ne važi. Kod njega samo u izuzetnim slučajevima leži prelomljeni zrak sa normalom i upadnim zrakom u istoj ravni. Zraci koji se prostiru u kristalu u pravcu optičke ose imaju istu brzinu za obe komponente. Ako se jedna kristalna ploča iseče tako da njene granične ravni stoje upravno na optičku osu i ako svetlost pada normalno na kristal, onda se ne javlja dvojno prelamanje, jer se obe komponente prostiru kroz kristal istom brzinom. Ako su međutim granične ravni isečene paralelno sa optičkom osom, onda se istina pri normalnom upadu zrakova ne javlja dvojno prelamanje, ali se komponente



Sl. 224. Uz objašnjenje dvojnog prelamanja.

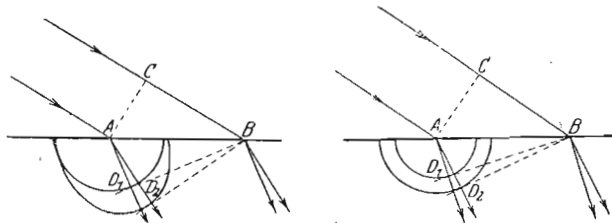


Sl. 225 a i b. Talasne površine u jednoosnom kristalu.

Descartes-Snelius-ov zakon prelamanja, a za neobični ne važi. Kod njega samo u izuzetnim slučajevima leži prelomljeni zrak sa normalom i upadnim zrakom u istoj ravni. Zraci koji se prostiru u kristalu u pravcu optičke ose imaju istu brzinu za obe komponente. Ako se jedna kristalna ploča iseče tako da njene granične ravni stoje upravno na optičku osu i ako svetlost pada normalno na kristal, onda se ne javlja dvojno prelamanje, jer se obe komponente prostiru kroz kristal istom brzinom. Ako su međutim granične ravni isečene paralelno sa optičkom osom, onda se istina pri normalnom upadu zrakova ne javlja dvojno prelamanje, ali se komponente

prostiru u kristalu sa različitim brzinama i izlaze sa izvesnom putnom razlikom. Usled različitih indeksa prelamanja i njihovi optički putevi su različiti.

Ova činjenica može poslužiti da se iz linearno polarizovane svetlosti dobije cirkularno polarizovana. Zato se upotrebljava kristalna ploča koja je isečena paralelno sa optičkom osom, a koja dvojno prelama. Njena debljina se tako podesi da se vremena potrebna običnom i neobičnom zraku, pri normalnom upadu, da prođu kroz kristal razlikuju za jednu četvrtinu treptaja. Na ploču se upravno projektuje linearno polarizovana svetlost čija je polarizaciona ravan nagnuta za  $45^\circ$  spram ravni redovnog i neredovnog zraka u kristalu. Upadni zrak se raspada na dve komponente koje su pri ulazu u kristal u istoj fazi. Pri izlazu iz kristala ova se dva zraka ponovo sjedinjuju, ali nemaju više istu fazu. Zadocnjenje jednoga zraka spram drugog za četvrtinu oscilacije čini da između njih postoji fazna razlika za  $\pi/2$ . Oni dakle grade pri izlasku, pošto su im amplitude iste, cirkularno polarizovani talas. Ako se ravan polarizacije drugičije orijentiše, amplitude nisu više jednake i dobija se eliptično polarizovana svetlost. U tu svrhu se najčešće upotrebljavaju listići liskuna (mica) pogodno debljine.



Sl. 226 a i b. Fresnel-ova konstrukcija dvojnog prelamanja.

Kod kristala rombičkog, monokliničnog i trikliničnog sistema brzina o b a polarizovana i upravna zraka zavisi od pravca. U njima nema običnih, već dva neobična zraka i dva pravca u kojima se komponente prostiru istim brzinama. Ti kristali imaju dve optičke ose i zovu se dvoosni.

Izvesni kristali koji dvojno prelamaју imaju tu osobinu da jedan od dva linearno polarizovana zraka više apsorbuju nego drugi. Ova pojava nazvana d i h r o i z a m naročito je jako izražena kod turmalina. U debljem sloju turmalina skoro potpuno apsorbuje jednu komponentu, dok je druga malo oslabljena. Turmalinska ploča, paralelno isečena sa optičkom osom može da se upotrebi, bilo kao polarizator za dobijanje linearno polarizovane svetlosti, bilo kao analizador, pa se stoga mnogo upotrebljava u mineralogiji i kristalografiji.

§ 182. **Fresnel-ova konstrukcija dvojnog prelamanja.** Prema Fresnel-u mogu se prelomljeni zraci u slučaju dvojnog prelamanja konstruisati na

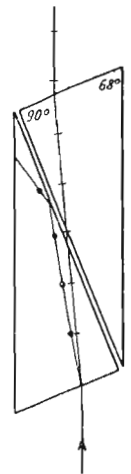
sledeći način. Ograničićemo se na jednoosne kristale i na dva prosta slučaja kada i neredovni zrak ostaje u upadnoj ravni.

1. Optička osa leži u upadnoj ravni (ravan slike 226 a). Presek jedne talasne površine u kristalu je krug, a druge elipsa koja krug dodiruje na optičkoj osi. Iz B se povuku dirke  $BD_1$  i  $BD_2$  na krug i elipsu.  $AD_1$  je redovni,  $AD_2$  neredovni zrak. Prema tome da li elipsa leži van kruga kao na sl. 226 a, ili u krugu, neredovni zrak se slabije, odnosno jače prelama od redovnog.

2. Optička osa stoji upravno na upadnoj ravni (ravan slike 226 b). U tome slučaju preseći obe talasne površine su krugovi.

Treba primetiti da su samo kod redovnog zraka normale na talas identične sa zracima, kao kod tela koja obično prelamaју. Kod neredovnog zraka ne stoje talasne površine upravno na zracima, dakle na pravcu prostiranja svetlosti.

§ 183. **Nicol-ova prizma.** Nicol-ova prizma služi za dobijanje linearno polarizovane svetlosti. Kristal krečnjaka se raseče pod naročitim uglom na dva jednaka dela (sl. 227) i ti se delovi tada ponova slepe pomoću kanada balsama. Sem toga se njegovi krajevi tako uglašaju da sa bočnim površinama grade ugao od  $68^\circ$ . Ako na prizmu pada prirodna svetlost, kao što je to predstavljeno na sl. 227, onda se ona razlaže na redovni, u ovom slučaju jače prelomljeni, i neredovni zrak koji je u njoj manje prelomljen. Oba padaju na sloj kanada balsama. Za redovan zrak je indeks prelamanja kanada balsama manji od indeksa prelamanja kristala i pošto on pada pod uglom koji je veći od graničnog ugla za totalnu refleksiju, to se reflektuje i ne prolazi kroz prizmu. Za neredovni zrak je indeks prelamanja kanada balsama veći od indeksa prelamanja krečnjaka, ne može biti dakle totalne refleksije i neredovni zrak izlazi iz prizme kao linearno polarizovan. Nicol-ova prizma dejstvuje dakle tačno kao staklena ploča postavljena pod uglom od  $57^\circ$ , tj. kao polarizator.



Sl. 227. Nicol-ova prizma.

Ali ona može poslužiti i kao analizador, tj. za dokaz linearne polarizacije. Ako se pusti svetlost da prolazi kroz dve Nicol-ove prizme, onda će ona moći da prođe kroz drugu prizmu neoslabljena, samo ako su obe prizme u prostoru orijentisane na isti način, ili ako su obrnute jedna spram druge za  $180^\circ$  (paralelni nikoli). Ako su pak obrnute za  $90^\circ$ , onda druga prizma uopšte ne propušta svetlost (ukršteni nikoli). U položajima između ovih pomenutih, druga Nicol-ova prizma više ili manje slabi svetlost.

§ 184. **Interferencija polarizovane svetlosti.** Talasi se mogu potpuno poništiti samo onda kada se prostiru u istoj ravni. Zbog toga dva linearno

polarizovana zraka koji stoje jedan na drugom normalno, iako su koherentni, tj. iako usled dvojnog prelamanja potiču od jednog svetlosnog zraka, ne mogu interferovati. I u ovome faktoru leži dokaz o transverzalnoj prirodi svetlosnih talasa.

Kao što je pomenuto ranije, linearno polarizovana svetlost koja pada na kristal sa osobinom dvojnog prelamanja, izlazi iz njega po pravilu kao eliptično polarizovana. Kad se takav jedan kristal unese između ukrštenih nikola, onda na mesto malopredašnjeg zamračanja javlja se osvetljenje, jer svetlost koja pada na analizator nije više linearno polarizovana. Ako se upotrebi bela svetlost, onda je jačina osvetljenja zbog različitosti indeksa prelamanja, različita za pojedine spektralne boje. To povlači za sobom javljanje boja. Ako se ploča kristala koja se nalazi između nikola projektuje pomoću sočiva na zaklon, ona je obojena različitim bojama i izbrazdana crnim prugama. Pojava se menja sa promenom položaja optičke ose spram polarizacione ravni i menja se pri obrtanju kristala oko jedne ose koja leži u pravcu svetlosnog zraka. Od neke tačnije teorije moramo ovde odustati.

Ove pojave mogu poslužiti za određivanje optičkih osa kristala. Na isti način se može dokazati i dvojno prelamanje kod stakla koje je naglo hladeno ili pritisnuto u jednom pravcu, pa usled toga u njemu postoji izvestan napon i nije više izotropno.

Za neposredno posmatranje opisanih pojava koje su od neobične važnosti za kristalografska ispitivanja, služi Nörrenberg-ov polarizacioni aparat, kod koga se svetlost prethodno linearno polarizuje refleksijom na jednoj staklenoj ploči pod uglom od  $57^\circ$ . Tada prolazi kroz kristal koji se ispituje, a posmatra se pomoću Nicol-ove prizme koja služi kao analizator.

§ 185. **Tečni kristali. Električno dvojno prelamanje.** Dvojno prelamanje najtešnje je vezano sa pravilnim prostornim rasporedom atomskih sastavnih delova kristala. U tečnostima i gasovima su molekuli orijentisani bez ikakvog reda i zbog toga u njima u opštem slučaju ne može biti dvojnog prelamanja. Izuzetak čine izvesne organske tečnosti čiji molekuli imaju vrlo komplikovan sastav i verovatno izdužen oblik, ili grade komplekse sa izduženim oblikom. Oni imaju težnju kada se nalaze između dva bliska zida da se postave upravno na te zidove, npr. kada se nalaze između stakla na kome leži objekt i stakla koje ga pokriva pod mikroskopom i na taj način se podjednako rasporede u prostoru. Kod takvih tečnosti se javlja takođe dvojno prelamanje (tzv. tečni kristali, O. Lehmann).

I električno polje može molekule koji su električni dipoli orijentisati u prostoru na isti način, pri čemu oni teže da svoje električne ose postave u pravac polja. Takva tela pokazuju tada tzv. električno dvojno prelamanje. Ovaj Kerr-ov efekat služi u poslednje vreme kao pomoćno sredstvo za električno prenošenje slika na daljinu, u tonfilmu itd.

§ 186. **Obrtanje polarizacione ravni.** Izvesne supstance kao šćerni rastvor, kvarc itd. imaju osobinu da ravan polarizacije linearno polarizovane svetlosti koja kroz njih prolazi obrnu (optički aktivna tela). Kad se takva supstanca unese između ukrštenih Nicol-ovih prizama onda polje postaje osvetljeno. Da se polje ponova zamrača, mora se analizator obrnuti za izvestan ugao  $a$ . Taj ugao ne sme se bez daljeg smatrati kao ugao obrtanja polarizacione ravni, jer obrtanje za  $n \cdot 180 + a$  ili  $-(n \cdot 180 - a)$  moglo bi se takođe kompenzovati pomoću obrtanja analizatora za ugao  $a$  ( $n$  je ceo broj). Stvarno obrtanje može se odrediti tek menjajući debljinu sloja supstance.

Linearno polarizovani talas koji pada na telo, možemo smatrati da je postao od superpozicije desno i levo cirkularno polarizovane komponente. Obrtanje polarizovane svetlosti dolazi otuda, što se ova dva cirkularno polarizovana talasa prostiru različitim brzinama. Smisao obrtanja zavisi od toga, koja je brzina u telu veća, da li ona levo ili desno cirkularno polarizovanog talasa.

Sva optički aktivna tela mogu se javiti u obe modifikacije, tj. mogu obrtati polarizacionu ravan bilo na levo ili na desno (levogira i desnogira). Kvarc npr. može biti ili levogir ili desnogir. Veličina i znak obrtanja zavise od talasne dužine svetlosti i njihova je promena usko vezana sa promenom disperzije. Obrtanje dolazi od asimetrije molekula, a pojava obe modifikacije dolazi otuda, što svakom asimetričnom molekulu može da odgovara još jedan, kao njegova slika u ogledalu (Pasteur, 1848). Kod mnogobrojnih organskih jedinjenja koja obrću polarizacionu ravan dolazi asimetrija usled tzv. asimetričnog ugljenikovog atoma, tj. jednog ugljenikovog atoma čije su četiri valence vezane za četiri različite grupe, kao npr. kod mlečne kiseline ( $\text{CH}_3 \cdot \text{CHOH} \cdot \text{COOH}$ ) za grupe  $\text{COOH}$ ,  $\text{OH}$ ,  $\text{CH}_3$  i  $\text{H}$ . Ove četiri grupe pretpostavljamo da su rasporedene na temenima jednog tetraedra u čijoj se unutrašnjosti nalazi C atom. U tom slučaju postoje dva načina rasporeda grupa u molekulu i jedan sa drugim se ne mogu poklopiti. Kad u telu postoji isti broj jednih i drugih komponenata, onda se njihova obrtanja potiru i telo je optički neaktivno. Takva tela se zovu racemati.

Tela koja sama po sebi ne obrću ravan polarizacije, mogu dobiti tu osobinu ako se nalaze u jakom magnetnom polju, u kome linije sile imaju isti pravac kao i svetlost. Ta pojava se zove magnetno obrtanje polarizacione ravni, rotaciona polarizacija, magnetorotacija, Faradejev efekat. Ugao za koji je obrnuta natriumova D linija za debljinu sloja od 1 cm i jačinu polja od 1 Gausa zove se Verdet-ova konstanta tela.



## Elektromagnetni spektar

§ 187. **Svetlost kao elektromagnetni talas.** — Pregled celog spektra. Po Maxwell-ovoj teoriji smatra se svetlost kao elektromagnetni talas. Elektromagnetni talas, kao što se u toj teoriji dokazuje, prostire se kroz sredinu čija je dielektrična konstanta  $\epsilon$  a permeabilitet  $\mu$  brzinom

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c_0}{n}$$

gde  $c_0$  pretstavlja brzinu prostiranja talasa u vakuumu i identično je sa brzinom svetlosti u vakuumu,  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  je indeks prelamanja sredine u kojoj se talas prostire (Maxwell-ov odnos). On se znači svodi na dielektričnu konstantu i permeabilitet te sredine.

Prvi potstrek za Maxwell-ovu teoriju svetlosti došao je usled identičnosti konstante  $c$  koja se javlja u elektrodinamici i brzine svetlosti u vakuumu. Ova teorija je bila konačno potvrđena Hertz-ovim ogleđima, kome je pošlo za rukom, ne samo da proizvede električne talase, već i da dokaže da oni imaju sve glavne odlike svetlosnih talasa. Zatim je dokazana i tačnost gornjeg Maxwell-ovog odnosa. Zato mi posmatramo svetlost kao elektromagnetni talas koji se razlikuje od električnih talasa dobijenih pomoću oscilatornih kola samo po svojoj maloj talasnoj dužini.

Svetlost, koju kao takvu zapaža naše oko, je samo mali deo celokupnog elektromagnetnog spektra. Ali moguće je tehničkim sredstvima proširiti usku oblast osetljivosti našeg oka i onda se zapaža da se spektar daleko širi iza vidljivog i to kako iza crvenog, tako i iza ljubičastog. Nema nikakvog razloga — bar prema talasnoj teoriji — da se u prirodi ne bi mogle javiti oscilacije u granicama  $\nu = 0$  ( $\lambda = \infty$ ) i  $\nu = \infty$  ( $\lambda = 0$ ). Deo spektra većih talasnih dužina koji se priključuje crvenom zove se *infracrveni spektar*. On se poklapa svojim delom najvećih talasnih dužina sa najkraćim talasima koji se proizvode električnim putem. Iza ljubičastog se prostire ultraljubičasti spektar na koji se naslanjaju Röntgenovi zraci i gama zraci radioaktivnih tela. Na datoj

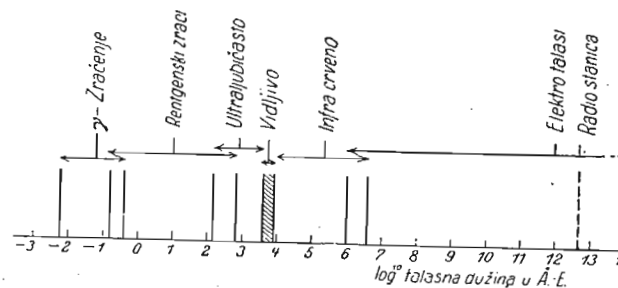
| Vrsta zrakova                      | Talasna dužina u Å-jedinicama         |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| Najkraći $\gamma$ -zraci . . . . . | $0,466 \cdot 10^{-2}$                 |
| Röntgenovi zraci . . . . .         | $1,58 \cdot 10^{-1} - 6,6 \cdot 10^2$ |
| Ultraljubičasti . . . . .          | $1,36 \cdot 10^2 - 3,6 \cdot 10^3$    |
| Vidljivi . . . . .                 | $3,6 \cdot 10^3 - 7,8 \cdot 10^3$     |
| Infracrveni . . . . .              | $7,8 \cdot 10^3 - 3,4 \cdot 10^6$     |
| Električni talasi . . . . .        | $2 \cdot 10^6 - \infty$               |

Da se dobiju talasne dužine u cm, treba gornje brojeve pomnožiti sa  $10^{-8}$

tabeli se vide oblasti pojedinih delova celokupnog spektra, a na sl. 228 su te oblasti grafički pretstavljene. Za apscisu na toj slici nije uzeta sama talasna dužina već  $\log(10)$  talasne dužine izražene u Angström-ovim jedinicama. To odgovara podeli spektra analoga podeli skala na oktave.

Mesto gde se dve oblasti poklapaju označava samo da se isti zraci proizvode na različite načine. Na sl. 228 zapaža se kako je uska oblast osetljivosti našega oka.

Svi dosad pomenuti optički zakoni važe u osnovi za sve oblasti elektromagnetnog spektra. No ovi se zakoni prikazuju često puta drugačije, nego



Sl. 228. Ceo spektar.

u vidljivom delu, između ostalog i stoga, što optičke osobine tela koje se i u vidljivom menjaju sa talasnom dužinom (refleksija, indeks prelamanja, providnost), sa većom promenom talasne dužine menjaju se još u mnogo većoj meri. Zato je potrebno za ispitivanje zračenja koje ne leži u vidljivoj oblasti, da se upotrebe sočiva, prizme itd. ne od stakla, već od drugog materijala. Ukoliko se više udaljujemo od vidljivog dela spektra, utoliko su različitija sredstva za ispitivanje. Način merenja talasne dužine je međutim svuda isti. On je uvek zasnovan — izuzev kod gama zrakova — na pojavama interferencije, bilo neposredno ili posredno.

Pošto su granice vidljivog dela spektra određene samo usled fizioloških razloga i nemaju nikakvo fizičko značenje, to se često svako elektromagnetno zračenje (sa izuzetkom tehničkih električnih talasa) označava kao svetlost, bez obzira da li je vidljivo ili nevidljivo. Govori se o infracrvenoj, ultraljubičastoj, rentgenskoj svetlosti i time se podvlači jedinstvo prirode celog elektromagnetnog spektra.

§ 188. **Disperzija, apsorpcija i odbijanje u celom spektru.** Kao što je ranije izloženo, u vidljivom spektru raste u opštem slučaju indeks prelamanja  $n$  nekog tela počev od većih ka manjim talasnim dužinama (od crvenog ka ljubičastom). Ali ima slučajeva *anomalne disperzije* koji odstupaju od toga pravila. Svaka sredina ima najmanje jednu, a najčešće više oblasti anomalne disperzije koje se nalaze u infracrvenom ili ultraljubičastom. Na osnovu starije svetlosne teorije mogu se ove pojave objasniti kao slučajevi rezonancije atoma i molekula. Rezonancija jednog sistema, koji može da osciluje, javlja se kad na njega deluje frekvencija koja je jednaka njegovoj sopstvenoj frekvenciji. Oblasti anomalne disperzije leže dakle u onom delu, gde se nalaze sopstvene frekvencije atoma ili molekula

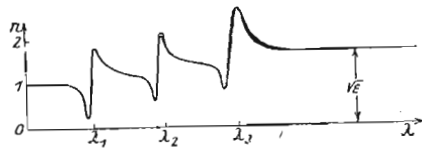
uočene sredine. Kad se ne vodi računa o amortizaciji talasa, onda se na osnovu Maxwell-ove teorije dolazi do zaključka, da se indeks prelamanja  $n$  sredine čiji je permeabilitet  $\mu \approx 1$  za sve talasne dužine  $\lambda$  može izraziti Ketteler-Helmholtz-ovim obrascem

$$n^2 = \epsilon + \frac{\mu_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{\mu_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{\mu_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \dots \quad (1)$$

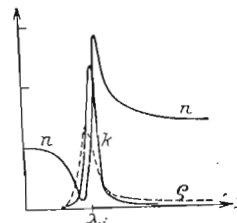
gde je  $\epsilon$  dielektrična konstanta sredine,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  itd. su talasne dužine sopstvenih oscilacija atoma ili molekula,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  itd. su konstante za svaku sredinu, koje pored ostalog, zavise od broja sistema u  $1 \text{ cm}^3$  koji mogu da osciluju.

Nešto ranije smo pomenuli Maxwell-ov odnos  $n^2 = \epsilon\mu$ . Nema providnih tela kod kojih se permeabilitet  $\mu$  razlikuje mnogo od jedinice. Zato se Maxwell-ov odnos može pisati  $n^2 = \epsilon$  za sve slučajeve koji se stvarno javljaju. To uostalom izlazi i iz jed. (1) kao krajnji slučaj vrlo dugih talasa, tj. kad je  $\lambda$  vrlo veliko spram sopstvene talasne dužine  $\lambda_s$  sredine. Zato se Maxwell-ov odnos mogao potvrditi u svima slučajevima gde se dao ispitivati indeks prelamanja sredine za talasne dužine koje su velike spram talasnih dužina njenih najsporijih frekvencija. To je slučaj samo u infracrvenom delu spektra.

Prema jed. (1) bi trebao indeks prelamanja da se popne na  $+\infty$  svaki put kad je  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  itd., pri prolazu kroz te vrednosti da pada na  $-\infty$ , zatim prvo da raste da bi sa daljim povećanjem talasne dužine do iduće oblasti rezonancije ponovo lagano opadao. Usled amortizacije indeks prelamanja se menja približno onako kao što je to shematski pretstavljeno



Sl. 229. Shema promena indeksa prelamanja sa talasnom dužinom u slučaju tri rezonantne oblasti.



Sl. 230. Promena indeksa prelamanja  $n$ , apsorpcije  $k$  i moći odbijanja  $\rho$  u jednoj oblasti rezonancije.

na slici 229. Oblasti rezonancije za  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  su oblasti anomalne disperzije, a oblasti između njih u kojima  $n$  opada sa rastećom talasnom dužinom pripadaju normalnoj disperziji.

Za vrlo male talasne dužine približava se indeks prelamanja svih sredina vrednosti 1. Iz jed. (1) izlazi kad se stavi  $\lambda = 0$  da je dielektrična konstanta  $\epsilon = 1 + \mu_1/\lambda_1^2 + \mu_2/\lambda_2^2 + \mu_3/\lambda_3^2 + \dots$

U oblasti rezonancije se svaki put nalazi i maksimum apsorpcije odbijanja (sl. 230). Kod neznatne amortizacije može moć od-

bijanja i za providnu sredinu da postane tako velika kao kod metala (metalna refleksija), dok je u neposredno bliskoj oblasti mnogo manja (sравни sa § 190, preostali zraci).

U oblasti anomalne disperzije pada vrednost indeksa prelamanja ispod 1. To bi značilo da je brzina prostiranja svetlosti  $c$  veća od brzine svetlosti  $c_0$  u vakuumu. Ali to ne treba razumeti tako, kao da se svetlosna energija kreće brzinom koja je veća od  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ .

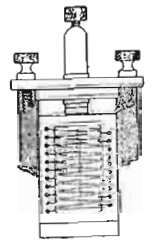
Iz teorije relativiteta sleduje da se ni tela ni energija ne mogu prostirati brzinom koja je veća od brzine svetlosti. Ono što se u ovome slučaju prostire većom brzinom, to je faza svetlosnih oscilacija. Kao što pokazuje teorija prelamajućih sredina, u njima se u opštem slučaju faza jednoga talasa prostire drugom brzinom od energije koju talas prenosi. Prva brzina se zove faza brzina  $c$  talasa. To je ona brzina koju smo mi dosad uvek uzimali kao brzinu svetlosti  $c$  u nekoj prelamajućoj sredini i koja pri datoj frekvenciji određuje talasnu dužinu  $\lambda = c/\nu$  u sredini, njen indeks prelamanja  $n = c_0/c$  i pojave interferencije koje zavise isključivo od odnosa faza. Brzina prostiranja energije označava se kao grupna brzina  $v$  talasa. Ove dve brzine su uvek nejednake kada u sredini postoji disperzija, kad je dakle  $dn/d\lambda$  različito od nule. Između  $v$  i  $c$  postoji odnos

$$v = \frac{1}{\frac{d}{dv} \left( \frac{v}{c} \right)} = c \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (2)$$

(Drugi izraz za  $v$  može se lako izvesti iz prvoga na osnovu odnosa  $v = c/\lambda$  i  $c = c_0/n$ ). Izvan oblasti anomalne disperzije (za koju jed. (2) ne važi strogo) je  $dn/d\lambda < 0$ , dakle  $c > v$ , a može čak da bude  $c > c_0$ , dakle  $n = c_0/c < 1$ . To je, kao što se vidi, dosta približno slučaj u oblasti anomalne disperzije. Ali to ne stoji u protivrečnosti sa teorijom relativiteta, jer se svetlosna energija ne prostire brzinom  $c$  već brzinom  $v$ . Samo kad nema disperzije ( $dn/d\lambda = 0$ ), dakle specijalno u vakuumu je  $v = c = c_0$ .

§ 189. **Pribor za merenje zračenja.** Najvažniji instrumenat za merenje jačina (energije) zračenja je termoelektrična baterija (sl. 231). Ona je zasnovana na termoelektričnom efektu (pretvaranje toplotne u električnu energiju) i sastoji se od većeg broja termoelemenata od tanke žice povezanih u nizu i poredanih tako da su spojevi 1, 3, 5 itd. izloženi zračenju, dok su spojevi koji leže između njih, od zračenja zaštićeni. Spojevi na koje padaju zraci su nađaravljeni i zračenje ih zagreva, pa se stoga javlja termoelektrična (elektromotorna) sila, koja se određuje galvanometrom i služi kao mera jačine zračenja.

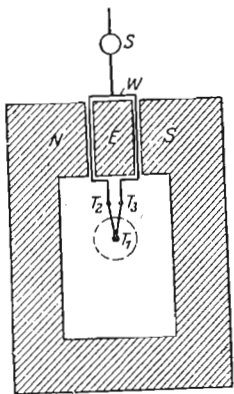
Drugi instrumenat je bolometar. On je napravljen od vrlo tankih metalnih listića, nađaravljenih sa one strane



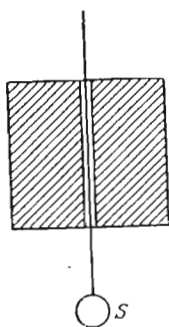
Sl. 231. Termobaterija za merenje zračenja.

odakle padaju zraci. Zraci zagreju listiće, pa se usled toga poveća njihov električni otpor. Promena otpora se meri Wheatstone-ovim mostom. Ako zračenje nije i suviše jako, onda je ova promena upravo srazmerna intenzitetu zračenja.

Često upotrebljavani oblik termoelemenata je Boys-Rubens-ov mikroradiometar (sl. 232). To je galvanometar sa pokretnim kalemom kod koga se kalem sastoji iz jednog jedinog navojka  $W$  u kome se nalazi i termoelement napravljen od dve različite bizmutove legure. Jedan spoj  $T_1$  je nagaravljen i na njega padaju zraci, spojevi  $T_2$  i  $T_3$  su zaklonjeni.



Sl. 232. Shema mikroradiometra. N, S polovi elektromagneta, E jezgro od gvožđa, W kalem, S ogledalo,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  spojevi termoelementa.



Sl. 233. Radiometar. S ogledalo.

Usled temperaturske razlike između spojeva javlja se u kalemom struja i on skreće srazmerno jačini zračenja.

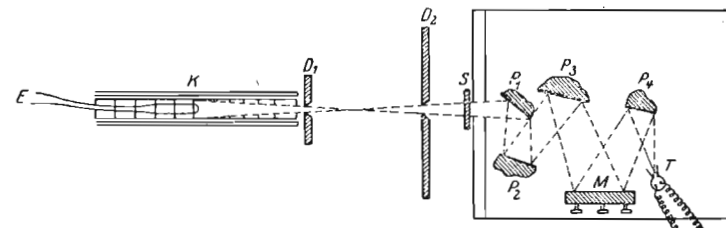
Crookes-ov radiometar (sl. 233) se takođe upotrebljava za merenje zračenja. Na tankom kvarcnom ili svilenom vlaknu su obešena dva tanka metalna krilca od kojih je jedno nagaravljeno sa jedne strane. Sve se to nalazi u staklenom sudu pod pritiskom od  $1/10$ — $1/100$  mm Hg. Kad zraci padaju na nagaravljenu površinu ova se zagreva, pa se usled poremećaja u toplotnoj rav-

noteži između krila i gasa krilo obrće i ovo obrtanje se čita pomoću ogledala. Na istom radiometarskom dejstvu su zasnovane i svetlosne vrteške koje se često viđaju u izlozima optičarskih trgovina. Teorija ovih pojava je vrlo zapletena.

§ 190. **Infracrveni deo spektra.** Projektuje se na zaklon spektar voltinog luka ili još bolje sunčani spektar i unese u njega termobaterija vezana za galvanometar. Ako se baterija pomera od ljubičastog ka crvenom kraju, onda se primećuje da je skretanje galvanometra za ljubičasti deo malo i da se povećava idući ka crvenom. Energija koja pada u crvenom delu na termobateriju veća je od energije u ljubičastom. (Delimično to dolazi i stoga što je u spektru koji se dobija kroz prizmu crveni deo zbijeniji od ljubičastog usled različite disperzije.) Kad se ide i dalje od crvenog, skretanje galvanometra ne prestaje, nego se čak povećava u početku, da bi tek na izvesnoj daljini potpuno iščezlo. To pokazuje da se spektar prostire i iza crvenog, da postoji infracrveni deo spektra (Wollaston i Herschel 1800). Opadanje dejstva u pravcu dužih talasa ne dolazi otuda što bi tamo energija opadala, već pre svega zato što sočiva i prizma od stakla koji daju spektar ne propuštaju sve infracrvene zrake.

Za ispitivanje infracrvenog dela spektra uzimaju se sočiva i prizme od drugog materijala i to za talasne dužine do  $4\mu$  kvarc, do  $8,5\mu$  fluorit (flusšpat), do  $14\mu$  kamena so, do  $20$ , a najviše do  $23\mu$  silvin. Do ove talasne dužine može se još dobiti infracrveni deo spektra pomoću spektroskopa. Do  $11\mu$  može se još spektar snimiti pomoću naročito senzibiliziranih fotografskih ploča, a iznad toga se upotrebljavaju pomenuta sredstva za merenje.

Za izdvajanje i ispitivanje usko ograničenih oblasti u talasnim dužinama preko  $23\mu$  upućeni smo na Rubens-ovu metodu preostalih zrakova. Ona je zasnovana na činjenici, da mnoga tela u infracrvenom imaju oblasti metalnog odbijanja, tj. da izvesne uske oblasti iz spektra vrlo dobro odbijaju, dok susedne oblasti reflektuju vrlo malo. Zraci koji dolaze od svetlosnog izvora, npr. crnog tela (§ 198)  $K$  odbijaju se više puta na površinama  $P_1$ — $P_4$ , kao što je to označeno na sl. 234. Od dela zrakova



Sl. 234. Metoda preostalih zrakova po Rubensu. T termobaterija, M metalno izdubljeno ogledalo,  $P_1$ — $P_4$  ploče na kojima se izdvajaju preostali zraci, S zaklon,  $D_1$ ,  $D_2$  dialragme, K crno telo kao izvor zračenja, E termoelement za merenje temperature crnog tela.

koji su za 95 % reflektovani, ostalo je posle četverostrukog odbijanja samo 0,95<sup>4</sup> ili 82 %. Ako deo zračenja posle odbijanja sa prve površine iznosi 50 %, on je posle četvrtog odbijanja pao na 6,25 %.

Tabela najvažnijih preostalih zrakova  
(Položaj maksimuma energije)

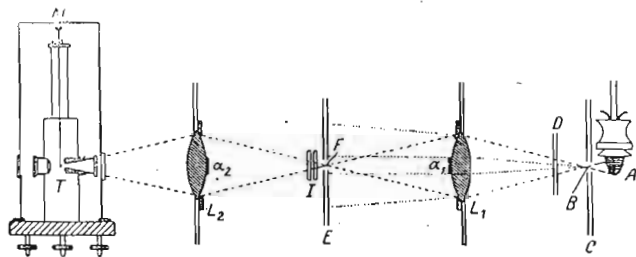
|                          |                 |               |
|--------------------------|-----------------|---------------|
| Krečnjak . . . . .       | $\text{CaCO}_3$ | 6,65 $\mu$    |
| Fluorit . . . . .        | $\text{CaF}_2$  | 22 i 32 $\mu$ |
| Aragonit . . . . .       | $\text{CaCO}_3$ | 39 $\mu$      |
| Kamena so . . . . .      | $\text{NaCl}$   | 52,8 $\mu$    |
| Silvin . . . . .         | $\text{KCl}$    | 63 $\mu$      |
| Kalijum bromid . . . . . | $\text{KBr}$    | 83 $\mu$      |
| Talijum hlorid . . . . . | $\text{TlCl}$   | 92 $\mu$      |
| Kalijum jodid . . . . .  | $\text{KJ}$     | 94 $\mu$      |
| Talijum bromid . . . . . | $\text{TlBr}$   | 117 $\mu$     |
| Talijum jodid . . . . .  | $\text{TlJ}$    | 152 $\mu$     |

izdvajanje zrakova. Za merenje talasnih dužina u infracrvenom velikih talasnih dužina, služimo se interferometrom naročite konstrukcije.

Ukoliko se ide dalje u infracrveno, utoliko postaje teže izdvajanje i ispitivanje usko ograničenih oblasti, već i zbog male energije zrakova velikih talasnih dužina u izvorima kojima raspoložemo. Za odvajanje velikih

u početku bio kao 2 : 1, posle četvrtog odbijanja se ti delovi odnose kao 13 : 1. Oblast talasnih dužina posle svakog odbijanja postaje sve uža i sve sličnija jednoj oštroj spektralnoj liniji. Ovi zraci se mogu upotrebiti za ispitivanje optičkih osobina tela, npr. providnosti u toj oblasti. U tabeli su data tela koja uglavnom dolaze u obzir za

od malih talasnih dužina u infracrvenom, poslužio se Rubens sledećom osobinom kvarca. Kvarc je providan za najkraće infracrvene zrake, zatim dolazi za duže talase široka oblast anomalne disperzije u kojoj on jako apsorbuje i najzad propušta ponovo zrake sasvim velike talasne dužine. U oblasti velikih talasnih dužina ima kvarc mnogo veći indeks prelamanja



Sl. 235. Metoda kvarcnih sočiva po Rubens-u i Wood-u. A Auerov plamen, BF otvori u diafragmama C i E,  $L_1$ ,  $L_2$  kvarcna sočiva, D, I zakloni za zaustavljanje zrakova,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  listići od hartije, M mikroradiometar kao instrument za merenje.

od indeksa za kratke infracrvene zrake. Na ovome je zasnovana metoda kvarcnih sočiva (sl. 235). Od svetlosnog izvora npr. usijane Auer-ove čarapice A zraci padaju kroz mali otvor B na kvarcno sočivo  $L_1$  koje skuplja zrake velike talasne dužine koji se jako prelamaју na drugi otvor F, dok su zraci manje lomljivosti i manje talasne dužine najvećim delom zaustavljeni zidom diafragme. Da bi se odstranio i onaj deo kratkih talasa koji padaju u sam otvor, na sočivo se stavlja listić crne hartije  $\alpha_1$ , koji propušta zrake velikih, a apsorbuje zrake malih talasnih dužina. Drugim sočivom  $L_2$  se ponavlja izdvajanje zrakova tako da preostaju samo zraci velikih talasnih dužina.

Najveće talasne dužine zapazili su Rubens i Bayer u spektru živine lampe. Ovi zraci se prostiru kroz jednu široku oblast i imaju dva maksimuma energije: jedan kod  $218 \mu$ , a drugi kod  $343 \mu$ . Oni se već dodiruju sa najkraćim električnim talasima. Ustvari ovi dugi infracrveni zraci pokazuju već sve osobine električnih talasa. Mogu se npr. polarizovati kroz uske žičane rešetke na isti način kao što je to Hertz učinio za električne talase.

Najveća talasna dužina koja se može konstatovati u sunčanom spektru iznosi  $5,3 \mu$  (Langley). Veće talasne dužine potpuno apsorbuje vodena para u atmosferi.

§ 191. **Ultraljubičasti deo spektra.** Ako se od voltinog luka nagradi spektar, pa se u njemu drži zaklon prevučeni cinka sulfidom (ZnS) tako da prelazi ljubičasto, primećuje se da jedan dobar deo zaklona zelenkasto svetli (fosforescira). To svetljenje izaziva za oko nevidljiva ultraljubičasta svetlost. Pošto staklo počinje da apsorbuje ultraljubičaste zrake odmah po

svršetku ljubičastog dela, to se za ispitivanja u ultraljubičastom moraju uzeti druga tela za sočiva i prizme, na prvom mestu kamena so, kvarc i fluorit. Većina tela apsorbuje ultraljubičaste zrake malih talasnih dužina, apsorbuju čak i gasovi koji ovde imaju svoje oblasti anomalne disperzije. Za ispitivanje ultraljubičastih zrakova najmanjih talasnih dužina (Schumann, Millikan) mora se cela aparatura držati u vakuumu (Vakuumspektrograf).

Sunčeva svetlost je u početku vrlo bogata u ultraljubičastom, ali od njeđa samo jedan mali deo prodire kroz našu atmosferu, jer na visini 20 do 30 km od oko  $2900 \text{ \AA}$  pa naniže apsorbuje jako ozon, a ispod  $2000 \text{ \AA}$  atmosferski kiseonik. Pri tome je formiranje ozona ( $O_3$ ) iz kiseonika ( $O_2$ ) posledica apsorpcije u kiseoniku, dakle fotohemiski proces. Za posmatrača sa Zemlje, sunčev spektar se svršava prilično naglo oko  $2900 \text{ \AA}$ . Jačina ultraljubičaste svetlosti raste sa visinom. Biološko dejstvo klime na visokim planinama dolazi najviše od toga. Čovečja koža upija izvesne delove ultraljubičastog dela spektra (Hauser), što prouzrokuje opekotine na koži.

Jaku ultraljubičastu svetlost daje živina kvarclampa ili druge živine lampe od izvesnih vrsta stakla koje propuštaju ultraljubičasto. Električne varnice između elektroda od cinka i nekih drugih metala, kao i voltin luk, daju dosta ultraljubičaste svetlosti. Izvesne životinje imaju vidne organe osetljive i u ultraljubičastom većih talasnih dužina. To je npr. dokazano za pčele.

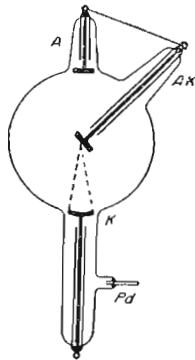
Elementarni proces u atomu koji dovodi do emisije ultraljubičaste svetlosti je isti kao za vidljivi i kratkotalasni infracrveni deo spektra. Zato se ove tri oblasti označavaju zajedničkim imenom: optički spektar.

§ 192. **Röntgen-ovi zraci. Gama zraci.** 1895 je Röntgen prilikom ogleđa sa Lenard-ovom cevi otkrio zrake koje je sam nazvao X zracima, a koji su posle nazvani Röntgen-ovi. On sam je ove nove zrake odmah po njihovom otkriću tako temeljito proučio, da za 17 godina posle toga nije učinjen nikakav važniji napredak u tom pogledu. Otkriće X zrakova pretstavlja granicu između klasične Fizike 19 veka i Fizike današnjice. Ovi zraci prolaze manje ili više, kao što je poznato, kroz sva tela, i to utoliko lakše, ukoliko je gustina tela manja. Prodornost zrakova uglavnom raste kad njihova talasna dužina opada. Ali sva tela pokazuju u pojedinim delovima rentgenskog spektra izvesne selektivne osobine, naročito imaju određene oblasti vrlo velike apsorpcije. Rentgenski zraci imaju jako hemisko dejstvo. Oni zatim jonizuju gasove. Talasne dužine rentgenovih zrakova su tako male, da kod ovih tela leže daleko ispod najkraće talasne dužine rezonancije, dakle na sl. 229 levo od  $\lambda_1$  tamo gde je indeks prelamanja skoro tačno jednak 1. Kao što se vidi, indeks prelamanja je za rentgenove zrake uvek manji od 1, iako vrlo malo. Zato je i prelamanje ovih zrakova neobično malo.

Rentgenovi zraci ne prolaze podjednako kroz sva tela (kosti, mišićno tkivo itd.) i na njihovoj različitoj prodornoj moći zasnovana je mogućnost »prosvetljavanja« čovečjeg tela. Pri tome se delovi koji manje propuštaju pokazuju kao senke. Naročito se jasno vide kosti i pojedini unutrašnji organi (rentgenodijagnostika). Senke se učine vidljivim na taj način, što se zraci koji prolaze kroz telo hvataju na zaklon premazan bariumpatincianom ili sličnom floscentnom zaklonu koji svetli pod dejstvom zrakova. Fotografski snimci rentgenskih slika dobijaju se najčešće tako, što se na osetljiv sloj ploče ili filma stavi florescentni zaklon i kroz to propuštaju rentgenovi zraci. Na taj način je fotografsko dejstvo neobično pojačano.

Biološka dejstva rentgenovih zrakova su znatno jača od dejstva ultraljubičaste svetlosti. Ona se osećaju i u dubini organizma. Zato X zraci imaju široku primenu pri lečenju raznovrsnih obolenja, npr. za suzbijanje raka (rentgenoterapija). Ali stoga oni predstavljaju pri neopreznom postupanju veliku opasnost po čoveka i izazivaju opekotine koje se u teškim slučajevima završavaju smrću (rentgenski rak).

Rentgenovi zraci postaju, kada katodni zraci, dakle brzi elektroni, padaju na neku prepreku. Pošto svako električno punjenje u kretanju predstavlja električnu struju, to zaustavljanju njihovog kretanja odgovara nagla promena jačine struje. Posledica toga je pojava neperiodičnog elektromagnetnog talasa (slično pucnju u akustici). Pored ovog zračenja postoji, kao što je Barkla (1905) otkrio, i drugo jedno periodsko zračenje čije su talasne dužine karakteristične za ono telo na koje elektroni padaju.



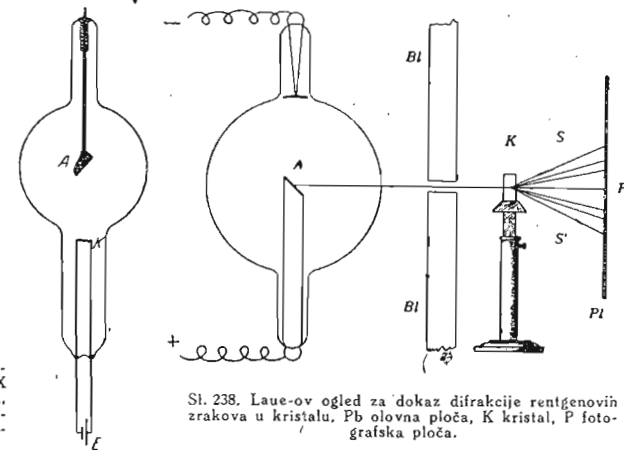
Sl. 236. Starija (jonska) cev za X zrake. K katoda, A anoda, AK antik Katoda.

Umesto cevi napunjenih sa gasovima (sl. 236), danas se najčešće upotrebljavaju cevi u kojima je postignut što je moguće bolji vakuum. Katodne zrake (elektrone) u tim cevima daje usijana katoda. Katodni zraci koji polaze od usijane katode, usled elektrostatičnog dejstva metalnog cilindra, koji je spojen sa katodom (Wehnelt-ov cilindar; ne vidi se na slici) skupljaju se na anodi od volframa A gde prilikom njihovog zaustavljanja postaju rentgenovi zraci (sl. 237). Količina katodnih zrakova može se regulisati menjanjem jačine struje za zagrevanje katode, a njihova brzina menjanjem napona između anode i katode. Na taj način se mogu dobiti zraci i različite vrste i različite ja-

čine. Ovo ima naročiti značaj, ne samo za fizička ispitivanja, već pre svega, za medicinske primene. Odgovarajuće i za bolesnike bezopasno primenjanje rentgenovih zrakova u cilju lečenja postalo je moguće tek upotrebom ovih savremenih cevi.

Rentgenovi zraci zovu se »tvrđi« ili »meki« prema svojoj prodornoj moći, odnosno prema talasnoj dužini. Ukoliko je talasna dužina manja, utoliko su zraci prodorniji (tvrđi).

Još odmah po otkriću rentgenovih zrakova naslućivalo se da su oni svetlost još manje talasne dužine od ultraljubičastog. To je 1912 Laue i dokazao, kad mu je pošlo za rukom da ih dovede do interferencije. Time je dokazana ne samo njihova talasna priroda, već je uspelo da im se odredi i talasna dužina. Zbog male talasne dužine nije tada bilo moguće dobiti njihove spektre sa mehanički napravljenim optičkim rešetkama, pa je Laue došao na ideju da upotrebi kristale kao optičke rešetke. Još onda se pretpostavljalo, da kristali grade prostorne rešetke, tj. da su



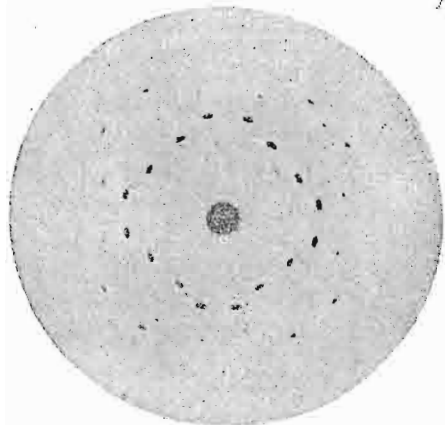
Sl. 237. Savremena cev za X zrake. K katoda, A anoda, E baterija za zagrevanje katode.

Sl. 238. Laue-ov ogled za dokaz difrakcije rentgenovih zrakova u kristalu. Pb olovna ploča, K kristal, P fotografska ploča.

atomi, odnosno joni u kristalima pravilno u prostoru raspoređeni. Kad rentgenovi zraci prolaze kroz takav jedan kristal, onda nastupa difrakcija na svakom takvom deliću. Savijeni zraci interferuju među sobom i usled toga, kao kod običnih rešetki sa povučenim crtama, oni izlaze iz kristala u tačno određenim pravcima. Sličnu pojavu imamo u ravni kad se posmatra svetlosni izvor malih dimenzija kroz neku tkaninu (ukrštene rešetke) i vide obojene figure usled difrakcije.

Slika 238 pokazuje Laue-ov ogled za dokaz difrakcije rentgenovih zrakova. Uzak snop zrakova prolazi prvo kroz otvor na olovnoj ploči, pa zatim kroz kristal i pada na fotografsku ploču koja pocrni na onim mestima gde zraci dospevaju. Na sl. 239 je predstavljen Laue-ov dijagram dobijen na taj način. Srednja mrlja dolazi od nesavijenih zrakova, a ostale od onih zrakova koji su skrenuli. Struktura dijagrama zavisi od prostorne strukture kristala i od njegovog položaja spram upadnih zrakova.

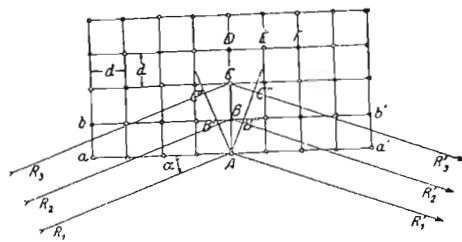
Ovim neobično važnim radom dokazana je ne samo talasna priroda rentgenovih zrakova, već i pretpostavka o strukturi kristala u vidu prostornih rešetki. U daljem toku Laue-ov ogled je omogućio s jedne strane W. L. i W. H. B r a g g - u da razviju spektrometriju rentgenovih zrakova, a s druge strane je dao neverovatnog potstreka kristalografiji i poznavanju strukture materije uopšte. Rentgenovi zraci su postali danas i neophodno pomoćno sredstvo u tehnici.



Sl. 239. Laue-ov difragram na cinka sulfidu (ZnS).

Talasne dužine  $\gamma$ -zrakova ne mogu se određivati na isti način kao za rentgenove zrake, jer su za njih prostorne rešetke u kristalima i suviše grube. One se određuju indirektno. Gama zraci prate radioaktivno raspadanje. Još mnogo prodorniji, dakle još mnogo manje talasne dužine su zraci koji prate kozmičko zračenje.

§ 193. Spektrometrija rentgenovih zrakova. — Analiza struktura. Laue-ov ogled može se primeniti za merenje talasnih dužina, dakle za spektrometriju rentgenovih zrakova, kad se poznaje prostorna rešetka upotrebljenog kristala. Pojave difrakcije koje tada nastupaju su prilično zamršene. Mnogo prostiji je način koji su pronašli W. L. i W. H. B r a g g ,



Sl. 240. Uz refleksiju rentgenovih zrakova na kristalu.

posmatrajući pojave interferencije prilikom refleksije zrakova na kristalnoj rešetki. Uzećemo kao primer naročito prostu prostornu rešetku kamene soli, NaCl, kod koje su pozitivni Na-joni i negativni Cl-joni pravilno i naizmenično poredani na temenima kocki. Slika 240 pokazuje shematski presek jednog takvog kristala. Neka je dužina ivice elementarne kocke  $d$ . Crni krugovi predstavljaju Na-jone, beli Cl-jone (D, E, F). Ravni  $aa'$ ,  $bb'$  itd. zovu se ravni mreže. Na površinu takve jedne ravni  $aa'$  pada pod uglom  $\alpha$

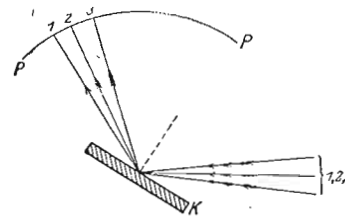
snop paralelnih koherentnih rentgenovih zrakova  $R_1$ ,  $R_2$  itd. Posmatračemo zrake  $R_1$  i  $R_2$  koji padaju na jone A i B. Od ovih se oni savijaju u svima pravcima. Od tih savijenih zrakova posmatrajmo sada zrake  $R'_1$  i  $R'_2$  koji tako idu kao da su se zraci  $R_1$  i  $R_2$  pravilno odbili na kristalu. Pošto su upadni zraci koherentni, to se nalaze u A i B' u istoj fazi, u A i B'' biće samo onda kada je put  $BB' + BB''$  jednak talasnoj dužini  $\lambda$  ili celome multipli talasne dužine. Lako se vidi da je tada

$$2d \sin \alpha = z \lambda \quad (3)$$

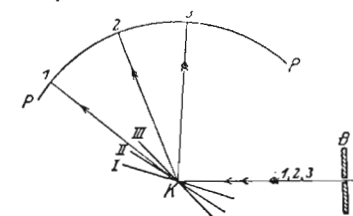
gde je  $z$  ma koji ceo broj. U tome slučaju ne nastupa slabljenje ili gašenje usled interferencije. Isto to važi i za zrake  $R_2$  i  $R_3$ .

Zraci se savijaju i na svima ostalim tačkama rešetke. Može se dokazati da, kad se uzme u obzir sve tačke rešetke i svi na njima savijeni zraci, javlja se primetan intenzitet izlazećih zrakova samo pod onim upadnim uglovima i u onim pravcima koji odgovaraju jed. (3), dakle isto kao kod obične optičke rešetke. Prema tome da li je  $z = 1, 2, 3$  itd. govori se o refleksiji prvog, drugog, trećeg reda, itd.

Na površinu kristala K pada konvergentan snop rentgenovih zrakova raznih talasnih dužina (sl. 241). Pretpostavićemo da se nalaze tri različite



Sl. 241. Odbijanje rentgenovih zrakova na kristalu.



Sl. 242. Metoda obrtnog kristala.

talasne dužine (na sl. 241 one su označene brojem vrhova strelica). Odbijanje se dešava samo u pravcima koji zadovoljavaju jed. (3) i zato se zraci različitih talasnih dužina odbijaju u različitim pravcima. Ako se na put odbijenih zrakova stavi kružno savijen fotografski film PP dobiće se na njemu spektar rentgenove svetlosti.

Danas postoji veliki broj metoda za istu svrhu. Kao primer navešćemo metodu obrtnog kristala (sl. 242). Kroz uzak otvor na olovnoj ploči pada snop rentgenovih zrakova na kristal K koji može da se obrće oko upadne tačke zrakova. Odbijanje se dešava samo u onim položajima kristala pri kojima je za jedan deo zrakova iz snopa zadovoljena jed. (3). Tako će se jedan deo zrakova pri položaju I kristala odbiti u pravcu 1, drugi deo pri položaju II u pravcu 2, itd. Na savijenom filmu PP pri postepenom obrtanju kristala dobiće se spektar, koji će se sastojati iz linija kao i obični optički spektri, ako je B uska pukotina normalna na ravan crteža. Preciz-

nost merenja talasnih dužina rentgenovih zrakova je dosta velika, iako se ne dostiže ona za optičke spektre.

Kad su upotrebe rentgenovi zraci poznatih talasnih dužina, onda interferencija koja se javlja na kristalima može da posluži za ispitivanje rešetkaste strukture kristala. Kod kamene soli (sl. 240) izlazi, da je rastojanje između jona, tj. dužina ivice »elementarne kocke«  $2,83 \cdot 10^{-8}$  cm. To je red veličine prečnika atoma. Tačnost ove vrednosti može se potvrditi i na drugi način. Na svakom temenu elementarne kocke nalazi se po jedan jon. Svaki ovaj jon je u isto vreme zajednički sa osam elementarnih kocki. Zato je broj jona u kristalu jednak broju elementarnih kocki, pa je i masa jedne elementarne kocke jednaka srednjoj masi jona. Srednja atomska težina Na (23,0) i Cl (35,45) iznosi 29,23. Atomska težina je međutim jednaka proizvodu iz mase jednog atoma i Avogadrovog broja  $N = 6,022 \cdot 10^{23}$ . Za srednju masu atoma dobijamo  $29,23 / (6,022 \cdot 10^{23}) = 4,85 \cdot 10^{-23}$  g. S druge strane zapremina jedne elementarne kocke iznosi  $(2,83 \cdot 10^{-8})^3 = 2,265 \cdot 10^{-23}$  cm<sup>3</sup>. Gustina kamene soli iznosi  $2,16$  g. cm<sup>-3</sup>. Prema tome je masa elementarne kocke  $2,16 \cdot 2,265 \cdot 10^{-23} = 4,89 \cdot 10^{-23}$  g, što je u dobroj saglasnosti sa gore nadenom vrednošću.

Drugu važnu metodu dali su Debye i Scherrer kod koje nisu potrebni veliki lepo formirani kristali, već prah od materijala koji se ispituje. Ova metoda je u osnovi ista sa metodom obrtnog kristala. Dok kod



Sl. 243. Debye-Scherrer-ov dijagram na čvrstom  $N_2O_4$ .

ove poslednje veća kristalna površina zauzima različite položaje spram snopa upadnih zrakova, prah se sastoji iz kristalita čije su kristalne površine orijentisane u svima mogućim pravcima, tako da se na njima sva moguća odbijanja dešavaju istovremeno, dok se kod obrtnog kristala dešavaju vremenski jedno za drugim. Ako se prah nalazi u jednoj cevčici, onda se javljaju, kad se on osvetli rentgenovim zracima, pojave interferencije predstavljene na sl. 244, iz kojih se može izračunati struktura malih kristala koji se nalaze u prahu. Pomoću ove metode mogu se takođe izvesti zaključci o strukturi amorfnih tela i molekula.

Docnije je uspelo da se talasne dužine rentgenovih zrakova mere sa istim onim rešetkama koje se upotrebljavaju za obične optičke svrhe. Uvidelo se, da je pri tome potrebno da zraci padaju pod vrlo velikim uglom na metal na kome je izrezana rešetka. Savijanje je isto tako veliko kao i u slučaju kad bi zraci padali normalno na rešetku čija je konstanta jednaka projekciji prave konstante na talasnu ravan rentgenovih zrakova. Usled kosog upada zrakova ova je projekcija vrlo mala i dolazi u red

veličine talasnih dužina rentgenovih zrakova. Posmatraju se od rešetke odbijeni zraci. Mogle su se dobiti vrlo jasne pojave difrakcije i pomoću vrlo uskih pukotina.

§ 194. **Emisioni i apsorpcioni spektri. Spektralna analiza.** Spektar tela koja sama svetle zove se njihov emisioni spektar. On može izgledati vrlo različito prema vrsti tela koje emituje svetlost.

Usijana čvrsta i tečna tela daju neprekidan spektar, tj. njihov spektar je neprekidan niz svih talasnih dužina, u vidljivom od crvenog do ljubičastog, ali i preko toga u infracrvenom i ultraljubičastom. To isto važi i za veoma jako komprimovane gasove, ali ovo stanje sa našim zemaljskim sredstvima ne možemo da ostvarimo. Naprotiv, Sunce sa svojom velikom gustinom (oko  $1$  g. cm<sup>-3</sup>) sastoji se od materije koja ima sve fizičke osobine jednog gasa. Usled velike gustine te sredine emituje sunčeva površina — fotosfera — neprekidan spektar. Luminescentna čvrsta i tečna tela daju spektre koji se po pravilu sastoje od pojedinih linija koje nisu oštre (razvučene), ili iz grupa linija, ili najzad manje više razvučenih grupa talasnih dužina.

Kod gasova koji svetle, npr. prilikom električnog pražnjenja u cevima sa smanjenim pritiskom, razlikuju se dve vrste spektara: linijski spektri i pantljikasti spektri. Linijski spektri (primer na tamnoj osnovi u sredini sl. 244) se sastoje često od vrlo velikog broja pojedinih tankih linija, koje su jasno jedna od druge odvojene, iako se mogu na pojedinim mestima skupiti u većem broju. I pantljikasti spektri su sastavljeni od pojedinih linija. Ali ove su uvek vrlo gusto zbijene i sačinjavaju jasno pojedine pantljike, tj. grupe od vrlo mnogo linija na čijem su kraju (čelo pantljike) naročito gusto zbijene. Linijske spektre emituju svetleći atomi, pantljikaste svetleći molekuli. Zato se govori o atomskim i molekulskim spektrima. O zakonima koji važe za spektre biće docnije govora.

Svetlost iz nekog svetlosnog izvora koji daje neprekidan spektar, npr. Voltin luk, obično se promeni pri prolazu kroz neko telo. U neprekidnom spektru se pojave tamne linije ili pantljike u onim talasnim dužinama čija je svetlost apsorbovana, tj. nije prošla kroz telo. Takav spektar se zove apsorpcioni spektar tela. Delovi apsorpcionog spektra su kod čvrstih tela prilično široki i nejasno određeni, a kod gasova su to tanke linije (sl. 244 gore i dole). Tela koja u vidljivom delu spektra ne apsorbuju ili imaju vrlo uske apsorpcione oblasti su providna, kao staklo ili voda.

Spektar Sunčeve svetlosti je neprekidan, ali u njemu se zapaža veliki broj tankih tamnih Fraunhofer-ovih linija (koje je prvi 1802 zapazio Wollaston). Najjače od njih se obeležavaju slovima A, B itd.

Fraunhofer-ove linije (sl. 244) dolaze otuda što atmosfera oko Sunca (hromosfera) apsorbira izvesne talasne dužine iz neprekidnog spektra koji emituje Sunčevo jezgro (fotosfera). Pojedine od njih potiču i usled apsorpcije u atmosferi oko Zemlje (telurične linije). Sunčev spektar sa Fraunhofer-ovim linijama je apsorpcioni spektar gasova koji se nalaze u hromosferi. Sl. 244 pokazuje apsorpcione linije gvožđa u Sunčevom spektru, upoređujući ga sa emisionim spektrom tog metala.



Sl. 244. Deo Sunčevog spektra sa Fraunhofer-ovim linijama. U sredini je emisioni spektar gvožđa u istom delu spektra.

Emisioni i apsorpcioni spektri jednog elementa su za njega apsolutno karakteristični. Oni mogu poslužiti za dokaz toga elementa. Na ovome su zasnovali Bunsen i Kirchhoff (1859) spektralnu analizu, koja je važno pomoćno sredstvo za hemiska i metalografska ispitivanja. Takođe i rentgenski spektri mogu poslužiti za spektralnu analizu. Na ovaj način je pošlo za rukom, da se dokažu elementi sa rednim brojevima 43 (masurium), 72 (hafnium) i 75 (renium), koji se zbog vrlo male koncentracije u mineralima nisu mogli dokazati ranije hemiskim putem.

Od najvećeg značaja je spektralna analiza za ispitivanje zvezda. Spektralna analiza je pokazala da se na zvezdama bez izuzetka nalaze isti elementi kao i na Zemlji. Pored toga spektri zvezda daju važne podatke o stanju i razviću tih tela.

§ 195. Čiste spektralne i pomešane boje. Teorija triju boja. Čiste spektralne boje su one koje se dobijaju razlažući svetlost pomoću prizme ili optičke rešetke. One dakle odgovaraju svetlosti jedne talasne dužine. Ali postoji činjenica koju treba podvući, da se ton svake spektralne boje može proizvesti na bezbroj različitih načina mešanjem više čistih spektralnih boja. Za ispitivanje ovih odnosa dao je Helmholtz jedan aparat za mešanje boja, pomoću koga se mogu porediti utisci dve svetlosne mešavine, odnosno boja jedne smeše sa jednom čistom spektralnom bojom. Ako se pomešaju dve čiste spektralne boje, onda se dobija prema odnosu u smeši niz tonova boja koje pretstavljaju neprekidan prelaz od jedne ka drugoj čistoj spektralnoj boji. Ali se pri tome zapaža znatna razlika prema tome da li obe čiste boje leže u spektru blizu jedna drugoj, ili su jedna od druge udaljene. Kad se pomešaju npr. čisto crveno i žuto, izgleda mešavina boja potpuno jednaka sa spektralno čistom žuto-crvenom bojom koja se nalazi između njih. One pokazuju isto karakteristično

zasićenje koje i estetski potpuno zadovoljava kad se posmatraju čiste spektralne boje. Ako se međutim pomešaju dve čiste boje koje se u spektru nalaze daleko jedna od druge, i onda se istina javlja neprekidan niz boja između njih, ali u srednjem delu toga niza izgleda boja smeše belja, manje zasićena od tona iste čiste spektralne boje. Zatim za svaku čistu spektralnu boju postoji — izuzev oblast od oko 492 m $\mu$  do 570 m $\mu$  (od žuto-zelenog do žuto-plavog) određena druga čista spektralna boja, koje pomešane u određenom odnosu intenziteta daju čisto belo. Takve dve boje nazivaju se komplementarne boje. Dve komplementarne boje odlikuju se još i time, što kad stoje jedna pored druge, izazivaju utisak naročito zadovoljavajuće harmonije boja. Ova činjenica je od naročitog značaja u slikarstvu (sravni npr. dejstvo plavog i žutog na ogrtaču Madone pod stenama od Leonarda da Vinci). Za boje u gore izuzetoj oblasti nema spektralno čiste komplementarne boje, već postoje takve koje su mešavina čistih spektralnih boja. To su purpurne boje koje u spektru ne postoje, već postaju mešanjem spektralno čistog crvenog i ljubičastog.

Različite nijanse purpurnoga prema odnosu crvenog i ljubičastog čine neprekidan niz boja od čisto crvenog do čisto ljubičastog. Prelaz od jednoga kraja spektra ka drugome može ići neprekidno na dva načina, bilo preko čistih spektralnih boja crvene, žute, zelene, plave, ljubičaste, ili preko purpurno crvenog, purpurnog, ljubičastog. Vidljivi spektar koji se fizički prekida kod crvenog i ljubičastog fiziološki se dopunjava u zatvoreni krug preko purpurnih boja.

Osim purpurnog, u nizu čisto spektralnih boja, izgleda nam da nedostaju još neke boje od kojih naročito mrka (braun) i maslinasto zelena. Ustvari ovde nemamo kao kod purpurnog prave nove tonove boja. Prilikom ispitivanja spektra mrkog tela Helmholtz-ovim aparatom, izlazi da je njegova prava boja žuto-zelena. Mrka, ustvari žutozelena tela, daju naročiti utisak boje blagodareći činjenici da odbijaju jedan relativno neznatan deo upadne svetlosti. Pored svoje boje imaju (zbog malog odbijanja) i nešto crnog u sebi, pa i to utiče na ton boje. Dve ploče mrka i žuto-crvena mogu izgledati potpuno iste boje kad se mrka jače osvetli belom svetlošću nego žuto-crvena. Kad cenimo neku mrku boju, obično se to dešava upoređujući je sa okolnim isto tako jako osvetljenim predmetima i utisak boje konačno zavisi od sjajnosti okoline. Kad se pomoću žuto-crvenog stakla projektuje ta boja na beo zid, onda polje izgleda mrko, ako se oko njega nalazi belo. Druge tipično crnkaste boje su maslinasto, zeleno i sivo — ovo poslednje je crnkasto belo. Prema tome je svaki utisak boje utvrđen sledećim faktorima: tonom boje, zasićenjem i sjajnošću.

Fiziološko tumačenje gore opisanih pojava daje teorija triju boja, čiji su glavni pretstavnici Young i Helmholtz. Prema njoj



zasniva se utisak boja na tri različita pojedinačna procesa u mrežnjači oka, gde se nalaze tri vrste sistema osetljivih na boje (čepići). Svaka vrsta maksimalno reaguje na jednu određenu čistu spektralnu boju, a u smanjenoj meri i na okolne oblasti, kao neki jako amortizovan oscilatorni sistem. Kad se posmatra neka boja, nadražuju se sve tri grupe čepića, ali različitim jačinama i prema odnosu jačine na tim grupama postaje u mozgu utisak boje po tonu, zasićenju i sjajnosti.

Važan oslonac ove teorije čine ispitivanja vršena na licima slepih za boje. Ova lica ne vide spektar kao neprekidan niz boja, već otrpili kao što zdrave oči vide niz boja koje postaju pri mešavini žutog sa odgovarajućim mu komplementarnim plavim. Kraj spektra s jedne strane izgleda žut, a sa druge plav, a oko 500 m $\mu$  izgleda čisto belo. Kod inače zdravih osoba ima dve vrste slepih za boje: slepih za crveno i slepih za zeleno. Ovim poslednjima se čini i izvesno purpurno kao belo. Obe vrste se slažu u tome što mešaju crveno i zeleno, uzimaju dakle jednu boju za drugu. Postoje sem toga slepi za ljubičastu ili plavu boju, ali to se slepilo javlja kao posledica izvesnih oboljenja i njega prate i druge pojave. Slepilo za boje (daltonizam) se tumači kao posledica ispadanja jedne od tri vrste čepića.

§ 196. **Boje tela.** Boje koje tela imaju u upadnoj svetlosti dolaze otuda što tela ne odbijaju sve boje podjednako. Telo koje odbija samo crvenu svetlost izgleda kad se osvetli belom svetlošću crveno. Ako u upadnoj svetlosti nema boja koje telo odbija, npr. kad se crveno telo osvetli plavom svetlošću, ono izgleda crno. Kad se u upadnoj svetlosti nalazi samo jedan deo boja koje telo odbija, ima se utisak koji odgovara smeši preostalih boja, prema odnosu njihovih intenziteta. Pod bojom tela mi pogrešno podrazumevamo njegovu boju u sunčanoj svetlosti, pa nam telo izgleda u veštačkoj svetlosti, čiji je spektar siromašniji u malim talasnim dužinama, često promenjene boje. Poznato je, kako je teško izabrati obojenu tkaninu pri veštačkom osvetljenju.

Naročito važnu ulogu imaju kod boje tela pigmenti ili boje (npr. slikarske). Smeša čistih spektralnih boja koja se može smatrati kao zbir svetlosti ponaša se po drugim zakonima, nego mešavina boja koju upotrebljava slikar, da bi dobio neku određenu nijansu boje. Smeša plave i žute slikarske boje ne daje, kao što je poznato, belo, već zeleno. To dolazi otuda, što smeša ima osobine obeju komponenata, kako u pogledu odbijanja, tako i u pogledu apsorpcije.

Boje tela u propuštenoj svetlosti dolaze uglavnom od apsorpcije određenih delova spektra. Pri tome može jedna ista boja postati na bezbroj načina mešanjem čistih spektralnih boja, kao i kod površinskih boja tela.

## Toplotno zračenje i luminescencija

§ 197. **Toplotno zračenje.** Pod toplotnim ili termičkim zračenjem podrazumeva se svako zračenje koje dolazi usled temperature nekoga tela i čija jačina, kao i raspored energije u spektru, zavise jedino od temperature i osobine tela.

Kad dva tela različitih temperatura stoje jedno pored drugog, a između njih nema provođenja toplote, ipak će im se temperature izjednačiti u toku vremena usled toplotnog zračenja. Pri tome ne zrači samo toplije, već zrači i hladnije telo. Toplije telo zrači utoliko više energije hladnijem nego hladnije toplijem, ukoliko je veća temperaturska razlika tela (Preyst-ov zakon).

Povišenje temperature nekoga tela usled zračenja dolazi otuda, što telo apsorbira zračnu energiju koja na njega pada i ova se pretvara u molekulsku energiju, dakle u toplotu. Obrnuto, telo se hladi usled toga što se jedan deo njegove molekulske energije pretvara u energiju zračenja.

Svako telo zrači na svakoj pa i najnižoj temperaturi. Ali tek na višoj temperaturi to zračenje postaje vidljivo. Prvo slabo svetljenje čvrstih i tečnih tela zapaža se u zamračenom prostoru tek oko 525° C (Drapper-ov zakon) i to samo pomoću štapića odmornoga oka. Ovo svetljenje izgleda stoga bezbojno, sivo-belo. Kad se temperatura dalje povišava prelazi telo u crveno, žuto i najzad u belo usijanje.

§ 198. **Kirchhoff-ljev zakon. Crno telo.** Kirchhoff-ljev zakon (1859) iskazuje da na datoj temperaturi emisija zračenja  $E$  stoji prema apsorpciji zračenja toga tela  $A$  u jednom tačno određenom odnosu

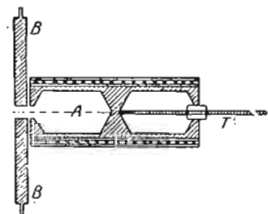
$$\frac{E}{A} = C. \quad (1)$$

Veličina  $C$  zavisi samo od temperature i talasne dužine, a jednaka je za sva tela. Pod emisijom zračenja  $E$  podrazumeva se energija koju u 1 sec emituje 1 cm<sup>2</sup> površine tela. Apsorpcija  $A$  je onaj deo upadnog zračenja koji telo apsorbira, dakle ne propušta ili ne odbija. Kirchhoff-ljev zakon izlazi iz II. stava termodinamike. Pretpostavimo, da se dva tela u početku jednake temperature nalaze jedno spram drugoga i da jedno od njih apsorbira zračenje talasne dužine koje drugo emituje, ali da isto zračenje samo ne emituje. Tada će se u tom telu nagomilavati energija koja je na njega prešla sa drugog tela, i ono će se zagrevati. Drugo telo će stalno gubiti energiju i hladiti se, pa zato ne bi mogla postojati ravnoteža zračenja. To je u suprotnosti sa drugim stavom, prema kome dva tela između kojih postoji uzajamno dejstvo moraju ići ka izjednačenju temperatura. Zato jedno telo mora svako zračenje koje apsorbira takode i da

emituje, i to mora na datoj temperaturi emisija da stoji u određenom stalnom odnosu spram apsorpcije, kao što iskazuje Kirchhoff-ljev zakon.

Kad neko telo potpuno apsorbira sve zrake koji na njega padaju, onda je  $A=1$ . Takvo telo se u svakidašnjem životu zove crno, jer ovde dolazi u obzir samo vidljiva svetlost. U fizici se pod crnim telom podrazumeva ono telo, koje svako zračenje, bez obzira na njegovu talasnu dužinu, potpuno apsorbira. Nijedno telo ne ispunjava potpuno taj uslov. Međutim fizički se može ostvariti crno telo sa približnošću koju želimo i to pomoću suda koji je zatvoren sa svih strana, a samo na jednom zidu ima otvor srednje veličine. Obično je sud iznutra nagařavljen. Kad kroz otvor uđe svetlosni zrak u takvo jedno telo, on je u njemu praktično potpuno apsorbovan, pre nego što posle višestrukog odbijanja slučajno opet izade kroz otvor. Kad se nagařave zidovi, lako se može postići da se od njih dobije svega 5% zračenja, onda posle drugog odbijanja ostaje samo još 0,25%, posle trećeg 0,0125% itd. Takav jedan otvor je praktično potpuno crno telo. Kad se na zidu jedne kutije, čija je unutrašnjost nagařavljena, napravi mali otvor, pa se i oko njega natrlja čađ, onda izgleda otvor mnogo crniji od čađi koja već apsorbira 95% svetlosti.

Ako telo ima najveću moguću apsorpciju  $A$ , onda je prema jed. (1) i njegova emisija veća od emisije ma koĝa drugog tela pod istim uslovima. Zato je zračenje zagrejanog crnog tela »crno zračenje« u svima delovima spektra jače od zračenja svakog drugog tela na istoj temperaturi. Crno telo predstavlja krajnji slučaj za sva tela u prirodi koja zrače. Zračenje ostalih tela je uvek manje jačine od zračenja crnog tela i najčešće nejednako slabije u pojedinim spektralnim oblastima.



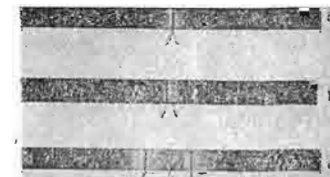
Sl. 245. Primer crnoga tela za merenje zračenja po Rubens-u.

Otvor u zidu zagrejanog praznog suda jače emituje pri datoj temperaturi zidova, no ma koji drugi zračni izvor, zato je njegovo ispitivanje od naročitoĝ značaja. Sl. 245 pokazuje primer jednog »crnog tela« koje može da posluži za merenje zračenja do približno 600°. Ono je načinjeno od komada bakra u kome su napravljene dve šupljine; oko njih je navijena žica za zagrevanje. Kao izvor zračenja uzet je deo  $A$  napred zatvoren zidom sa diafragmom, a ispred ove nalazi se sud za hlađenje kroz koji protiče voda. Na taj način se ispituju samo oni zraci koji dolaze iz šupljine  $A$ . Druga šupljina služi uglavnom da se pomoću termometra  $T$  izmeri temperatura zida  $A$ .

Telo koje ne zrači istom jačinom kao crno telo, ali kod koĝa je zračna energija u svima delovima spektra za isti deo manja od energije crnog tela, zove se sivo, jer takvo telo u odbijenoj svetlosti izgleda sivo. To dolazi otuda što to delo, prema Kirchhoff-ljevom zakonu, apsorbira

isti deo svih spektralnih boja. Ako na njega pada bela svetlost, onda je ona posle odbijanja oslabljena podjednako u svima delovima spektra i telo ne pokazuje neku izrazitu boju.

Jedna od posledica Kirchhoff-ljeva zakona je izvrtanje linija u spektru (Foucault 1849). Projektuje se na zid spektar plamenog luka. Ispred pukotine stavi se Bunsen-ov plamen u kome se nalazi gvozdena kašika sa nešto metalnog natrijuma, tako da natrijum gori dajući žut plamen kroz koji prolazi svetlost od luka. Tada se u spektru u žutom delu vidi jedna tamna linija koja se pri većoj disperziji razlaže u dve (sl. 246b). Ako se ugasi plameni luk dok natrijum još gori, onda se na istom mestu gde je bila tamna linija vidi sada žuta linija koju daje natrijum.



Sl. 246. Izvrtanje spektralnih linija u pari litijuma (a), natrijuma (b) i kalijuma (c).

Ovo izvrtanje linija tumači se na sledeći način. Prema Kirchhoff-ljevom zakonu apsorbiraju atomi natrijumove pare svetlost one iste talasne dužine koju i sami emituju, pošto emisija i apsorpcija uvek idu paralelno. (To ipak važi za one spektralne linije koje atomi u tom svom određenom stanju mogu da emituju. Para ni u kom slučaju ne apsorbira sve linije koje atomi uopšte mogu da emituju, već samo one koje pripadaju tzv. glavnoj seriji atoma, o čemu će docnije biti govora.) Plamen i sam emituje svetlost, ali ona nije dovoljno jaka da zameni onu koja polazi od luka i koju je apsorbirao. Odgovarajuće mesto u spektru, iako je slabo osvetljeno, izgleda tamno prema jače osvetljenim okolnim delovima. Za ogled nije ustvari potrebno da natrijumova para i sama svetli, on se može izvesti i sa parom natrijuma koja se nalazi zatvorena u staklenom sudu. Slike 246 a i c pokazuju iste pojave sa litijumovom i kalijumovom parom.

§ 199. Planck-ov zakon zračenja crnog tela. Zračenje crnog tela predstavlja granični slučaj zračenja svih tela, a crno telo može se već na pomenuti način sa željenom tačnošću napraviti i njegova raspodela energije u spektru ispitivati. Ova raspodela bila je poznata još pre 1900 g. posle merenja Paschen-a i Lummer-Pringsheim-a. Teorisko objašnjenje raspodele nailazilo je međutim na nesavladljive teškoće. Ono se može sprovesti samo ispitivanjem uzajamnog dejstva između zračenja i elementarnih delića crnoga tela koji emituju i apsorbiraju zračenje. Elementarne deliće možemo zamisliti kao električne oscilatore (električna punjenja koja mogu da osciluju) koji su podešeni za pojedine frekvencije i čije su amplitude utoliko veće, ukoliko je viša temperatura tela. Od temperature i od amplitude, dakle od energije oscilovanja oscilatora, mora zavisiti i energija zračenja koja sa njima stoji u ravnoteži. Pod ravnotežom zračenja treba razumeti stanje pri kome oscilatori prosečno u svakom

trenutku apsorbuju isto onoliko zračenja određene talasne dužine koliko i emituju, tako da gustina energije zračenja svake talasne dužine ostaje konstantna u prostoru okruženom crnim zidovima.

Prema klasičnoj teoriji, trebalo bi i za oscilatore da važi princip ekvipartitije energije, tj. da na svaki stepen slobode oscilatora dolazi prosečno ista energija. Oscilator koji linearno osciluje ima svega jedan stepen slobode i srednja kinetička energija trebala bi da mu iznosi  $kT/2$ , a isto toliko i srednja potencijalna energija, dakle ukupna srednja energija  $\epsilon = kT$ . Ako se to pretpostavi, onda se neizbežno dolazi do jednog obrasca za zračenje (jed. 4a) koji se ne slaže sa iskustvom. Planck je video da se do zakona koji se slaže sa merenjem može doći jedino ako se za srednju energiju oscilatora uzme izraz

$$\epsilon = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} \quad (2)$$

gde  $\nu$  znači broj treptaja oscilatora i zračenja koje sa njim stoji u uzajamnom dejstvu.  $h$  je konstanta koja se zove kvantum dejstva. Njena brojna vrednost je  $6,626 \cdot 10^{-27}$  erg. sec, dakle dimenzije su joj energija  $\times$  vreme.  $k$  je Boltzmann-ova konstanta.

$k = 1,3807 \cdot 10^{-16}$  erg. grad $^{-1}$ . O osnovnoj veličini teorije kvanta  $h$  biće opširnije govora u drugom delu.

Stvarno na osnovu jed. (2) može se naći zakon zračenja za crno telo koji se potpuno slaže sa iskustvom. Neka je  $E_\lambda d\lambda$  energija linearno polarizovanog zračenja koje u 1 sec prolazi kroz svaki presek kupe sa otvorom  $\Omega = 1$ , a čija talasna dužina leži između  $\lambda$  i  $\lambda + d\lambda$ . Tada Planck-ov zakon zračenja glasi

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{e^{\lambda k T} - 1} \quad (3)$$

(Pošto je  $c/\lambda = \nu$  to je  $h\nu/kT = ch/k\lambda T$ ).

Vidi se iz jed. (2) da ona prelazi u zakon ekvipartitije  $\epsilon = kT$  kad  $h \rightarrow 0$ . Činjenica po kojoj se Planck-ovo izvođenje bitno razlikuje od klasične teorije leži u konačnoj veličini kvantuma dejstva  $h$ . Ako se u jed. (3) stavi  $h \rightarrow 0$  iz nje izlazi

$$E_\lambda d\lambda = \frac{ckT}{\lambda^4} d\lambda \quad (4a)$$

Ova jednačina pretstavlja odnos koji su iz klasične teorije ranije izveli Rayleigh i Jeans. Planck-ov zakon mu se približava kada veličina  $ch/k\lambda T \rightarrow 0$ , dakle za  $\lambda T \gg ch/k$ . I stvarno jed. (4a) pretstavlja za velike

talasne dužine  $\lambda$  i visoke temperature  $T$  granični slučaj Planck-ovog zakona.

Ako je  $\lambda^* \ll ch/k$  tako da je  $e^{\frac{ch}{k\lambda T}} \gg 1$  onda jed. (3) prelazi u prostiju

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} e^{-\frac{ch}{k\lambda T}} d\lambda \quad (4b)$$

Ovaj zakon je na osnovu izvesnih pretpostavki izveo još 1896 W. Wien, ma da konstante koje se u njemu javljaju  $c^2 h$  i  $ch/k$  nije tada mogao dati u ovom obliku. Valja primetiti da Wien-ov obrazac pretstavlja granični slučaj Planck-ovog zakona za male talasne dužine  $\lambda$  i niske temperature  $T$ .

Na sl. 247 pretstavljena je raspodela energije u spektru crnog tela za izvesne temperature prema jed. (3). ( $E_\lambda$  kao funkcija od  $\lambda$ ).

§ 200. Wien-ov zakon pomeranja. Stefan-Boltzmann-ov zakon. Kao što se vidi iz slike 247, sa povišenjem temperature pomera se maksimum

krive koja pretstavlja raspodelu energije tako, da ako temperatura postane dva put viša, talasna dužina  $\lambda_m$  koja odgovara maksimumu energije postaje dva put manja. Prema tome je  $\lambda_m T = \text{const}$  (Wien-ov zakon pomeranja, 1893). Ovaj zakon, do koega se dolazi iz klasične teorije, može se lako izvesti iz jed. (3). Položaj maksimuma nalazi se kad se stavi  $dE_\lambda/d\lambda = 0$ . Ako se stavi dalje  $ch/k\lambda_m T = x$  dobija se transcendentna jednačina  $x + 5e^{-x} = 5$  sa rešenjem  $x = 4.9651$ . Prema tome je

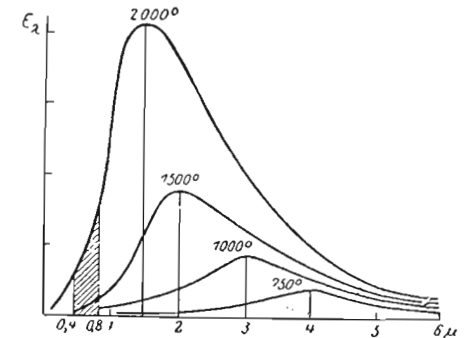
$$\lambda_m T = \frac{ch}{kx} = b \quad (5)$$

Merenja su dala za  $b$  vrednost  $b = 0,288$  cm. grad, što se potpuno slaže sa izračunatom vrednošću iz gornjeg obrasca.

Iz teorije sleduje da je ukupno zračenje  $E$  koje emituje 1 cm $^2$  površine crnoga tela u 1 sec

$$\left. \begin{aligned} E &= \sigma T^4 \\ \sigma &= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \text{ erg cm}^{-2} \text{ grad}^{-4} \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(Stefan-Boltzmann-ov zakon, 1879, 1884.) Ukupno zračenje crnoga tela je dakle srazmerno četvrtom stepenu apsolutne temperature.



Sl. 247. Raspodela energije u spektru crnog tela. Od 0,4 — 0,8  $\mu$  vidljivi deo spektra.

Merenjima je nađeno da je

$$\sigma = 5,73 \cdot 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{grad}^{-4} \cdot \text{sec}^{-1},$$

što je u dobroj saglasnosti sa izračunatom vrednošću iz jed. (6).

Značajno je da se pomoću jed. (5) i (6) može odrediti temperatura crnog tela. Može se merenjem naći  $\lambda_m$  i odatle izračunati  $T = b/\lambda_m$ , ili se meri ukupno zračenje  $E$  od 1 cm<sup>2</sup> površine i izračuna se  $T = \sqrt[4]{E/\sigma}$ . Kod tela koja nisu crna, npr. za zvezde, to ne ide tako jednostavno. Ako se njihova temperatura odredi prema Stefan-Boltzmann-ovom zakonu, kao za crna tela, dobija se niža temperatura od one koju zvezde stvarno imaju, jer je njihovo zračenje slabije od zračenja crnog tela iste temperature. Isto tako u opštem slučaju i primena Wien-ovog zakona daje pogrešne rezultate. Međutim, mnoga tela, pa čak i mnoge zvezde, na visokim temperaturama se ne razlikuju vrlo mnogo od crnoga tela. Tako se njihova temperatura može pomoću ovih zakona odrediti, ako ne sasvim, a ono bar približno tačno. Primena Stefan-Boltzmann-ovog zakona daje iz navedenih razloga donju graničnu vrednost temperature. Za razliku od prave temperature, definisane energijom molekularnog kretanja, ova se zove efektivna ili temperatura zračenja.

Merenje temperature usijanih tela iz njihovog zračenja zove se optička pirometrija. Jedan relativno prost način je sledeći: Uхвати se površina, čiju temperaturu treba odrediti, u diafragmu okulara jednog malog durbina, a na njoj se nalazi vlakno male sijalice. Reguliše se temperatura vlakna tako da ono pokazuje istu sjajnost kao i površina koja se ispituje i tada se više ne razlikuje od te površine. Njegova temperatura zračenja je onda jednaka temperaturi zračenja površine. Iz struje za zagrevanje vlakna, ako je lampa pre toga upoređivana sa crnim telom poznate temperature, može se odrediti temperatura površine. Pri tome se pretpostavlja pri približno tačnom merenju, da površina zrači bar približno kao crno telo.

§ 201. **Koristan optički efekat svetlosnih izvora.** Koristan optički efekat svetlosnih izvora je utoliko veći, ukoliko je viša njihova temperatura, tj. vidljivi deo zračenja raste sa temperaturom tela. Iako obični svetlosni izvori, npr. vlakna električnih sijalica, nisu potpuno crna tela, ipak se na temperaturi usijanja od njih mnogo ne razlikuju. Približno se mogu računati kao takva. Kad se povišava temperatura, raste ukupna zračna energija svetlosnog izvora prema Stefan-Boltzmann-ovom zakonu. Uz to dolazi i pomeranje maksimuma prema Wien-ovom zakonu. Na sl. 248 je vidljivi deo spektra označen crtama. Na nižim temperaturama je ovaj deo daleko ispod maksimuma koji se tada nalazi u infracrvenom. Na vidljivi deo spektra dolazi samo neznatan deo ukupnog zračenja. Ovaj od-

nos se poboljšava utoliko više, ukoliko se sa povišenjem temperature maksimum približava vidljivom delu spektra. Ali to ide samo do jedne određene temperature, jer, kao što se iz sl. 248 vidi, optički efekat opet opada kada maksimum krive rasporeda energije pređe vidljivu oblast. Najveći koristan efekat leži oko 5500<sup>0</sup>, što prilično tačno odgovara temperaturi Sunca. Ljudsko oko je osetljivo upravo u toj oblasti u kojoj Sunce ima svoj maksimum jačine. Nažalost mi ne možemo da pravimo veštačke svetlosne izvore tako visoke temperature. Svi napori elektrotehnike u toku poslednjih decenija su bili usmereni ka povećanju korisnog efekta svetlosnih izvora, idući ka sve višim temperaturama. Na taj način koristan efekat, tj. odnos između dobijene vidljive zračne energije spram upotrebene energije se povećava. Uprkos tome, koristan efekat svih veštačkih svetlosnih izvora je još uvek sasvim mali. Za petroleumsku lampu i gasno osvetljenje on iznosi 0,2 %, za sijalicu sa ugljenim vlaknom 0,5 %, za volframovo vlakno u bezvazдушnom prostoru 1,6 %, a za volframove sijalice napunjene gasom 4 %. Pa i ovo su samo gornje granice pod najpovoljnijim uslovima. Znatno povoljniji su neki novi svetlosni izvori zasnovani na električnom pražnjenju kroz gasove, a naročito onda kada im se ultraljubičasti deo spektra preko luminescentnog tela pretvara u vidljivu svetlost.

§ 202. **Luminescencija.** Kod dosad posmatranih pojava zračenja imali smo uvek toplotno zračenje, tj. zračenje čiji je uzrok temperatura tela. Pojava svetlosnog zračenja u svakom drugom slučaju zove se luminescencija. Pored elektroluminescencije, tj. svetljenja gasova pri električnom pražnjenju, koja se proučava u delu o elektricitetu, ostale pojave luminescencije su sledeće:

**Fluorescencija.** Mnoga tela imaju osobinu da apsorbuju jedan deo upadne svetlosti i da je ponovo emituju kao svetlost iste ili veće talasne dužine. Emisija te svetlosti traje samo za vreme dok traje i dejstvo spoljašnje svetlosti — za razliku od fosforescencije o kojoj će odmah biti govora. Ova pojava koja je prvi puta zapažena na fluoritu zove se fluorescencija. U vidljivom delu spektra fluoresciraju npr. rastvori fluorescina, eksulina i drugih tela. Para joda u staklenom sudu bez vazduha fluorescira zelenkasto-žuto. Fluorescentna svetlost potiče od svih delova tela koja su osvetljena primarnom svetlošću. Zato je putanja svetlosnih zrakova u fluorescentnom delu vidljiva, slično kao u mutnim sredinama, iako je uzrok sasvim drugi. U mutnim sredinama svetlost se rasipa na sitnim delićima, kod fluorescencije nastupa izazivanje svetlosnih oscilacija u atomima i molekulima. Zato je spektar fluorescencije karakterističan za dato telo. Rentgenovi zraci, katodni zraci, kao i zračenje radioaktivnih tela, izazivaju takođe fluorescenciju.

**Fosforescencija.** Fosforescencija je utoliko slična fluorescenciji što i kod nje svetljenje tela proizvodi upadna svetlost. Razlika između

njih koja najviše pada u oči leži u tome, što fosforescencija i po prestanku dejstva spoljašnje svetlosti traje izvesno duže ili kraće vreme. Često je ovo svetljenje tako kratko, da su potrebna naročita sredstva da bi se ono zapazilo (fosforoskopi). Primere za fosforescentna tela, koja se zovu opštim imenom fosfori, imamo kod cinka sulfida i Balmain-ove boje (CaS sa Bi).

Kao što je Leonard dokazao, u svakom fosforu se nalazi mala količina nekog metala koji služi kao aktivator. Tako npr. u 1 g ZnS ima 0,001 g Cu i 0,01 NaCl. Ovaj poslednji služi uglavnom kao rastopina za aktivator. Fosforescencija je tesno vezana sa fotoelektričnim efektom. Upadna svetlost u fosforu oslobađa elektrone čije spajanje sa atomima aktivatora izaziva fosforescentnu svetlost.

Kad se fosfor koji već svetli zagreva, on onda emituje mnogo brže nagomilanu svetlosnu energiju, nego u hladnom stanju. On jače tada svetli, ali mu svetljenje kraće traje.

**Triboluminescencija.** Pri trenju dva parčeta šećera ili pri tucanju šećera, vidi se često u mraku slabo svetljenje — triboluminescencija. Ista pojava se zapaža kod čitavog niza drugih kristala.

**Hemoluminescencija — Bioluminescencija.** Svetljenje se zapaža i pri mnogobrojnim hemiskim reakcijama (hemoluminescencija). U ovu grupu spada i svetljenje na životinjama (bioluminescencija) koje se, sem kod svitca zapaža još i na velikom broju morskih životinja. Sposobnost za svetljenje imaju samo izvesna mala živa bića. Veći organizmi svetle stoga, što žive u simbiozi sa malim. Svetljenje ovih sitnih organizama zavisi od dovodenja kiseonika. Viši organizmi koji sadrže svetleće goste, mogu njihovo svetljenje da izazovu ili ugase regulišući im dovod kiseonika.

## Sadržaj

| §  | Strana |
|--|--------|
| <b>UVOD</b>  |        |
| 1. Fizičke veličine i jedinice mera . . . . .                            | 5      |
| 2. Skalari i vektori . . . . .   | 8      |
| 3. Sabiranje i razlaganje vektora . . . . .                              | 8      |
| <b>DEO PRVI</b>  |        |
| <b>MEHANIKA ČVRSTIH TELA</b>   |        |
| 4. Definicija materijalne tačke . . . . .                                | 11     |
| 5. Kretanje . . . . .  | 11     |
| 6. Brzina . . . . .  | 12     |
| 7. Ubrzano kretanje . . . . .  | 13     |
| 8. Uglovna brzina i uglovno ubrzanje . . . . .                           | 14     |
| 9. Harmonisko kretanje . . . . .   | 15     |
| <b>Ponašanje čvrstih tela pod uticajem sila</b>                          |        |
| 10. Sile kao uzroci promene kretanja . . . . .                           | 16     |
| 11. Princip inercije . . . . .   | 16     |
| 12. Drugi Newton-ov aksiom . . . . .                                     | 17     |
| 13. Količina kretanja . . . . .  | 18     |
| 14. Jedinica sile . . . . .  | 18     |
| 15. Sile inercije. D'Alamber-ov princip . . . . .                        | 18     |
| 16. Sabiranje sila. Stav o paralelogramu sila . . . . .                  | 19     |
| 17. Nekoliko ogleđa o slaganju sila . . . . .                            | 21     |
| 18. Pritisak . . . . .   | 22     |
| 19. Akcija i reakcija (III. Njutnov zakon) . . . . .                     | 22     |
| 20. Održanje količine kretanja . . . . .                                 | 23     |
| 21. Ravnoteža . . . . .  | 24     |
| 22. Spreg sila. Obrtni momenat . . . . .                                 | 25     |
| 23. Poluga . . . . .   | 25     |
| 24. Momenat inercije . . . . .   | 26     |
| 25. Kružno kretanje. Centripetalna i centrifugalna sila . . . . .        | 27     |
| 26. Centrifugalna sila posmatrana iz samog rotirajućeg sistema . . . . . | 29     |
| 27. Primeri za sile inercije rotirajućih masa . . . . .                  | 31     |
| 28. Rad i energija . . . . .   | 33     |
| 29. Rad pri ubrzanju . . . . .   | 34     |
| 30. Princip održanja (konservacije) energije ili rada . . . . .          | 35     |
| 31. Energija kretanja ili kinetička energija . . . . .                   | 35     |
| 32. Energija položaja ili potencijalna energija . . . . .                | 36     |
| 33. Efekat . . . . .   | 36     |
| 34. Mašine . . . . .   | 37     |
| 35. Proste mašine . . . . .  | 38     |
| 36. Terazije . . . . .   | 40     |

| §  | Strana |
|--|--------|
| 37. Rotaciona energija. Impuls obrtanja . . . . .                                      | 42     |
| 38. Obrtanje oko slobodne osovine. Čigra . . . . .                                     | 44     |
| 39. Zemljino obrtanje . . . . .  | 45     |
| 40. Udaljivanje kontinenata od polova . . . . .  | 48     |
| 41. Elastičan i neelastičan sudar . . . . .  | 48     |
| 42. Dimenzije i jedinice mehaničkih veličina . . . . .                                 | 50     |
| <b>Teža na zemljinoj površini</b>  |        |
| 43. Teža i ubrzanje usled teže . . . . .   | 51     |
| 44. Težina . . . . .   | 53     |
| 45. Specifična težina. Gustina. Specifična zapremina . . . . .                         | 53     |
| 46. Slobodno padanje. Vertikalno i kos hitac . . . . .                                 | 55     |
| 47. Održanje energije kod hitca i slobodnog padanja . . . . .                          | 57     |
| 48. Padanje po strmoj ravni . . . . .  | 57     |
| 49. Mašina za padanje . . . . .  | 59     |
| 50. Težište . . . . .  | 60     |
| 51. Stav o održanju kretanja težišta . . . . .   | 61     |
| 52. Matematičko klatno . . . . .   | 62     |
| 53. Fizičko klatno . . . . .   | 63     |
| 54. Određivanje ubrzanja g sa klatnom . . . . .  | 64     |
| 55. Ravnoteža pod dejstvom teže . . . . .  | 65     |
| <b>Opšta gravitacija</b>   |        |
| 56. Newton-ov zakon gravitacije . . . . .  | 68     |
| 57. Kretanje meseca . . . . .  | 69     |
| 58. Kretanje planeta . . . . .   | 70     |
| 59. Dejstvo na daljinu i dejstvo na blizinu . . . . .                                  | 70     |
| 60. Gravitacioni potencijal i jačina polja . . . . .                                   | 71     |
| <b>DEO DRUGI</b>   |        |
| <b>MEHANIČKA TELA PROMENLJIVOG OBLIKA I ZAPREMINE</b>                                  |        |
| 61. Agregatna stanja . . . . .   | 73     |
| 62. Prethodni pojmovi o sastavu materije . . . . .                                     | 74     |
| <b>Elastične osobine čvrstih tela</b>  |        |
| 63. Pojam elastičnosti i opšte činjenice . . . . .                                     | 75     |
| 64. Male promene. Hook-ov zakon . . . . .  | 76     |
| 65. Uzdužna dilatacija i poprečna kontrakcija . . . . .                                | 77     |
| 66. Savijanje . . . . .  | 77     |
| 67. Torzija . . . . .  | 78     |
| 68. Spiralne opruge . . . . .  | 78     |
| 69. Elastična energija . . . . .   | 79     |
| <b>Mehanika tečnosti u miru (hidrostatika)</b>   |        |
| 70. Hidrostatički pritisak . . . . .   | 80     |
| 71. Hidraulična presa . . . . .  | 80     |
| 72. Dejstvo teže . . . . .   | 81     |
| 73. Pritisak na dno . . . . .  | 81     |
| 74. Spojeni sudovi . . . . .   | 82     |
| 75. Slobodna površina tečnosti . . . . .   | 83     |
| 76. Potisak. Arhimedov zakon . . . . .   | 84     |
| 77. Određivanje specifičnih težina čvrstih tela na osnovu Arhimedovog zakona . . . . . | 84     |
| 78. Određivanje specifičnih težina tečnosti iz potisaka . . . . .                      | 85     |

| §                                  | Strana |
|------------------------------------|--------|
| 79. Plivanje . . . . .             | 86     |
| 80. Elastičnost tečnosti . . . . . | 87     |
| 81. Površinski napon . . . . .     | 88     |
| 82. Kapilarnost . . . . .          | 90     |

#### Statika gasova

|  |     |
|--|-----|
| 83. Osnovi kinetičke teorije gasova . . . . .              | 91  |
| 84. Molekulska i atomska težina. Mol i gram atom . . . . . | 95  |
| 85. Maxwell-ov zakon . . . . .                             | 96  |
| 86. Difuzija . . . . .                                     | 97  |
| 87. Pritisak gasova . . . . .                              | 98  |
| 88. Izotermne promene stanja gasova . . . . .              | 100 |
| 89. Slobodna dužina puta. Broj sudara . . . . .            | 101 |
| 90. Dejstvo teže na gasove . . . . .                       | 103 |
| 91. Vazdušni pritisak . . . . .                            | 105 |
| 92. Tehnika vakuma . . . . .                               | 108 |

#### Strujanje tečnosti i gasova

|   |     |
|---|-----|
| 93. Opšte o strujanju tečnosti i gasova . . . . . | 110 |
| 94. Bernoulli-eva jednačina . . . . .             | 111 |
| 95. Vrtlozi . . . . .                             | 115 |
| 96. Strujanje oko površina . . . . .              | 116 |
| 97. Viskozne tečnosti. Unutarnje trenje . . . . . | 117 |
| 98. Stockees-ov zakon . . . . .                   | 119 |

### TREĆI DEO.

#### OSCILACIJE I TALASI — ZVUK.

|   |     |
|---|-----|
| 99. Oscilatorno kretanje . . . . .                | 121 |
| 100. Prostiranje poremećaja. Talasi . . . . .     | 123 |
| 101. Periodski talas . . . . .                    | 123 |
| 102. Talasna dužina . . . . .                     | 124 |
| 103. Longitudinalni talasi . . . . .              | 124 |
| 104. Transverzalni talasi. Polarizacija . . . . . | 126 |
| 105. Interferencija. Stojeći talasi . . . . .     | 127 |
| 106. Zvučni udari. Kombinaциони tonovi . . . . .  | 131 |
| 107. Doppler-ov efekat . . . . .                  | 132 |
| 108. Odbijanje talasa . . . . .                   | 133 |
| 109. Akustika velikih prostorija . . . . .        | 134 |
| 110. Merenje morske dubine. Zona tišine . . . . . | 135 |
| 111. Prelamanje . . . . .                         | 136 |
| 102. Fermat-ov princip . . . . .                  | 136 |
| 113. Huygens-ov princip . . . . .                 | 137 |
| 114. Difrakcija (savijanje) . . . . .             | 137 |
| 115. Oscilovanje žica, šipki i ploča . . . . .    | 138 |
| 116. Oscilovanje vazdušnih stubova . . . . .      | 141 |
| 117. Prinudne oscilacije. Rezonancija . . . . .   | 143 |
| 118. Prost ton. Muzički ton. Šum . . . . .        | 144 |
| 119. Ultrazvuk . . . . .                          | 145 |
| 120. Konsonanca i disonanca. Intervali . . . . .  | 147 |
| 121. Skale (lestvice) . . . . .                   | 147 |
| 122. Muzički instrumenti . . . . .                | 149 |
| 123. Sluh i govor . . . . .                       | 151 |

## ČETVRTI DEO

## OPTIKA ILI OPŠTA NAUKA O ZRAČENJU

## Opšti deo i geometrijska optika

|   |     |
|---|-----|
| 124. Sadržaj nauke o zračenju . . . . .                         | 153 |
| 125. Svetlosni izvori . . . . .                                 | 153 |
| 126. Svetlosni zraci . . . . .                                  | 154 |
| 127. Providnost . . . . .                                       | 154 |
| 128. Pravolinisko prostiranje . . . . .                         | 154 |
| 129. Pomračenje sunca i meseca . . . . .                        | 155 |
| 130. Mračna komora . . . . .                                    | 156 |
| 131. Brzina svetlosti . . . . .                                 | 156 |
| 132. Merenje svetlosti . . . . .                                | 160 |
| 133. Fotometrija . . . . .                                      | 161 |
| 134. Zakon reciprociteta kod svetlosnih zrakova . . . . .       | 163 |
| 135. O optičkim slikama uopšte . . . . .                        | 163 |
| 136. Geometrijska optika . . . . .                              | 164 |
| 137. Difuzno i pravilno odbijanje. Zakon odbijanja . . . . .    | 165 |
| 138. Likovi u ravnim ogledalima . . . . .                       | 165 |
| 139. Sferna ogledala . . . . .                                  | 167 |
| 140. Likovi na ispupčenim ogledalima . . . . .                  | 172 |
| 141. Zakoni prelamanja . . . . .                                | 173 |
| 142. Savijeni svetlosni zraci. Prelamanje u atmosferi . . . . . | 174 |
| 143. Totalna refleksija . . . . .                               | 175 |
| 144. Prizme . . . . .   | 177 |
| 145. Sferna sočiva . . . . .                                    | 178 |
| 146. Prelamanje kod konveksnih sočiva . . . . .                 | 178 |
| 147. Likovi konveksnih sočiva . . . . .                         | 179 |
| 148. Likovi kod konkavnih (rasipnih) sočiva . . . . .           | 181 |
| 149. Diskusija jednačine sočiva . . . . .                       | 181 |
| 150. Debela sočiva . . . . .                                    | 181 |
| 151. Nedostaci sočiva . . . . .                                 | 182 |
| 152. Kombinova sočiva . . . . .                                 | 183 |
| 153. Projekcioni aparat . . . . .                               | 183 |
| 154. Opšte o uvećanju lupe, mikroskopa i durbina . . . . .      | 184 |
| 155. Lupa . . . . .   | 185 |
| 156. Durbin (dogled). Astronomski dogled . . . . .              | 185 |
| 157. Mikroskop . . . . .  | 188 |
| 158. Dijafragma, končanica, okularni mikrometar . . . . .       | 190 |
| 159. Fotografski aparat . . . . .                               | 190 |
| 160. Oko . . . . .  | 191 |
| 161. Disperzija . . . . .                                       | 194 |

## SVETLOST KAO TALASNO KRETANJE

## Interferencija, difrakcija, polarizacija

|   |     |
|---|-----|
| 162. Teorija o prirodi svetlosti . . . . .              | 196 |
| 163. Broj treptaja i talasna dužina svetlosti . . . . . | 197 |
| 164. Interferencija svetlosti . . . . .                 | 198 |
| 165. Fresnel-ovi ogledi o interferenciji . . . . .      | 199 |
| 166. Boje tankih listića . . . . .                      | 203 |
| 167. Interferencija u propuštenoj svetlosti . . . . .   | 204 |
| 168. Newton-ovi prstenovi . . . . .                     | 205 |

|  |     |
|--|-----|
| 169. Interferencija na planparalelnim pločama i klinastim površinama . . . . . | 206 |
| 170. Interferometri . . . . .  | 207 |
| 171. Difrakcija (savijanje) svetlosti . . . . .                                | 209 |
| 172. Pojave Fresnel-ove difrakcije . . . . .                                   | 210 |
| 174. Optička rešetka . . . . .   | 211 |
| 175. Difrakcija i rasipanje svetlosti na vrlo malim telima . . . . .           | 213 |
| 176. Svetlosni stojeći talasi . . . . .  | 214 |
| 177. Difrakcija u mikroskopu. Ultramikroskop . . . . .                         | 215 |
| 178. Doppler-ov efekat u optici . . . . .                                      | 215 |
| 179. Polarizacija svetlosti . . . . .  | 216 |
| 180. Prirodna i polarizovana svetlost . . . . .                                | 217 |
| 181. Dvojno prelamanje . . . . .   | 218 |
| 182. Fresnel-ova konstrukcija dvojnog prelamanja . . . . .                     | 220 |
| 183. Nicol-ova prizma . . . . .  | 221 |
| 184. Interferencija polarizovane svetlosti . . . . .                           | 221 |
| 185. Tečni kristali. Električno dvojno prelamanje . . . . .                    | 222 |
| 186. Obrtanje polarizacione ravni . . . . .                                    | 223 |

## ELEKTROMAGNETNI SPEKTAR

|  |     |
|--|-----|
| 187. Svetlost kao elektromagnetni talas. Pregled celog spektra . . . . . | 224 |
| 188. Disperzija, apsorpcija i odbijanje u celom spektru . . . . .        | 225 |
| 189. Pribor za merenje zračenja . . . . .                                | 227 |
| 190. Infracrveni deo spektra . . . . .                                   | 228 |
| 191. Ultraljubičasti deo spektra . . . . .                               | 230 |
| 192. Röntgen-ovi zraci. Gama zraci . . . . .                             | 231 |
| 193. Spektrometrija röntgenovih zrakova. Analiza struktura . . . . .     | 234 |
| 194. Emisioni i apsorpcioni spektri. Spektralna analiza . . . . .        | 237 |
| 195. Čiste spektralne i pomešane boje. Teorija triju boja . . . . .      | 238 |
| 196. Boje tela . . . . .   | 240 |

## Toplotno zračenje i luminescencija

|   |     |
|---|-----|
| 197. Toplotno zračenje . . . . .                                  | 241 |
| 198. Kirchhoff-ov zakon. Crno telo . . . . .                      | 241 |
| 199. Planck-ov zakon zračenja crnog tela . . . . .                | 243 |
| 200. Wien-ov zakon pomeranja. Stefan Boltzmann-ov zakon . . . . . | 245 |
| 201. Koristan optički efekat svetlosnih izvora . . . . .          | 246 |
| 202. Luminescencija . . . . .                                     | 247 |

ŠTAMPANO U MARIBORSKOJ TISKARI, MARIBOR  
Štampanje završeno 20. septembra 1947. god.