Publ. Obs. Astron. Belgrade No. 48 (1995), 7 – 30

СОПСТВЕНИ ЕЛЕМЕНТИ МАЛИХ ПЛАНЕТА

ЗОРАН КНЕЖЕВИЋ

Астрономска опсерваторија, Волгина 7, 11050 Београд

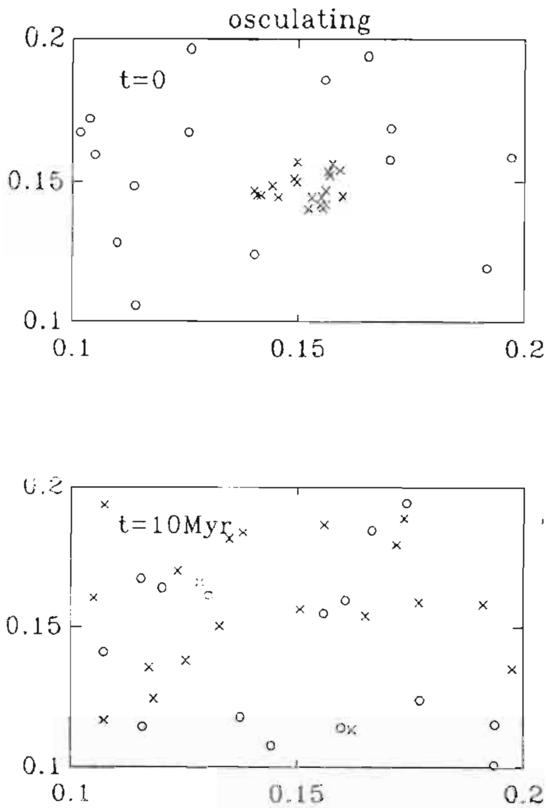
Резиме. У чланку је дат преглед теорија и метода за одређивање сопствених елемената малих планета, који служе као параметри за класификацију малих планета у фамилије. Описана су и упоређена четири решења често коришћена у прошлости, као и пет савремених, чиме је практично у потпуности обухваћен развој и актуелно стање у овој области. Поменуте су и разјашњене неке од уобичајених заблуда и погрешних представа у вези сопствених елемената, њихове дефиниције, намене и примене.

1. Шта су сопствени елементи и за шта се користе?

Премда се за постојање фамилија малих планета зна већ више од 75 година, све до недавно било је врло мало важних достигнућа и напретка када су сопствени елементи, који служе као параметри за класификацију малих планета у фамилије, у питању. То је разумљиво ако се има у виду да унапредити сопствене елементе заправо значи унапредити теорију кретања малих планета, што, међутим, није баш тако једноставан задатак. Најважнији резултати постигнути у прошлости свакако су они које су остварили Хирајама (Hirayama 1918, 1923), Брауер (Brouwer 1951), Вилијамс (Williams 1969, 1979) и Козаи (Kozai 1979). С друге стране, нова знања о улози и значају малих планета за изучавање историје Сунчевог система у целини довела су до повећаног интереса нарочито за проблеме сударне еволуције прстена малих планета, а посебно за фамилије које представљају продукте судара међу малим планетама. Нови посматрачки и теоријски резултати, као и драматично повећане перформансе лако доступних рачунара, створили су услове за појаву низа нових доприноса, од којих су несумњиво најважније дали Милани и Кнежевић (Milani and Knežević 1990, 1992, 1994), Леметр и Морбидели (Lemaitre and Morbidelli 1994), Милани (1993), Шубарт (Schubart 1982, 1991) и Морбидели (1993).

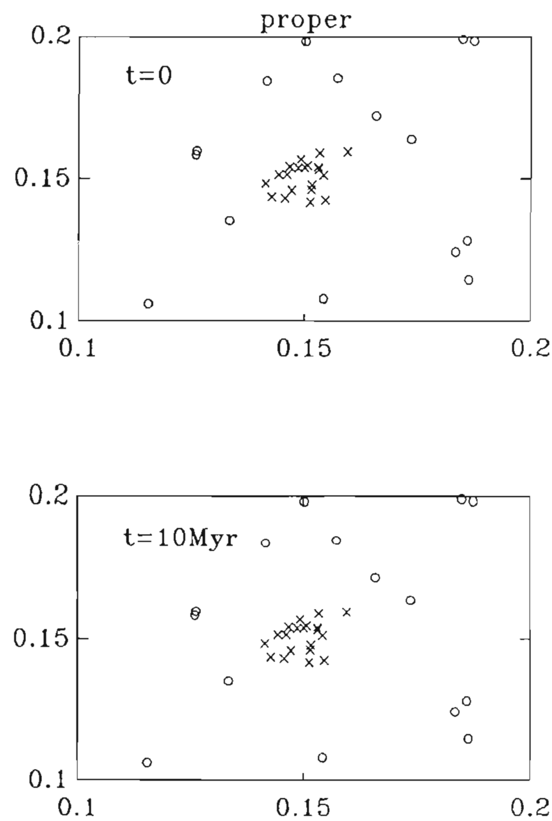
Заједничка карактеристика прошлих резултата је да су сви они били изведени на основу теорија кретања малих планета само првог реда у односу на поремећајну масу, да нису били високе тачности и да чак то колико су нетачни није уопште било познато. Упркос томе, сопствени елементи су у свим тим случајевима рачунати за све мале планете познате у датом тренутку, са изузетком резонантних. Заједничка карактеристика нових резултата је, с друге стране, да су теорије и методе које су коришћене за њихово извођење веома унапређене и усавршене у односу на оне коришћене раније, али да су у исто време постале и далеко комплексније и компликованије. Нађена је могућност посредне оцене тачности изведених сопствених елемената, а са нарастајућим разумевањем проблема и потешкоћа које се сусрећу при њиховом израчунавању јавља се и тренд специјализације процедура и метода у смислу њихове прилагођености за израчунавање сопствених елемената само одређених група и/или субпопулација малих планета. Тако су напр. нумерички метод Миланија и нумеричко-графички метод Шубарта развијени да би се одредили сопствени елементи, или прецизније сопствени параметри (види касније), за Тројанце, односно за мале планете групе Хилда; аналитичка теорија Миланија и Кнежевића посебно је погодна за мале планете са путањама малих до средњих ексцентричности и нагиба; семианалитичка теорија Леметр и Морбиделија даје најбоље резултате за објекте чије путање имају високе ексцентричности и нагибе; слична теорија Морбиделија развијена је посебно за мале планете које се налазе унутар или у непосредној близини најважнијих секуларних резонанци.

Може се учинити помало необичним да чак и данас има доста конфузије око саме дефиниције сопствених елемената. То је наравно у највећој мери последица чињенице да се сопствени елементи добијају помоћу разних теорија и да зато они не могу увек и у потпуности да се уклопе у један исти оквир; штавише, у пракси се понекад користе и разни други параметри, који у датим случајевима можда боље одговарају специфичној динамичкој ситуацији или моделу, него сами класични сопствени елементи. Константност у времену је она суштинска особина свих тих разних параметара која их чини "сопственим" у смислу имплицираном у оригиналном концепту. Чак су и разне постојеће дефиниције сопствених елемената изведених на основу класичне чисто аналитичке теорије секуларних поремећаја понекад оптерећене и замагљене непотребним техничким појединостима или чак нетачним детаљима, односно, насупрот томе, непрецизним и претераним поједностављењима. Тако напр. може се у литератури наћи да су "сопствени елементи први интеграли једначина кретања", што је нетачно једноставно зато што се, као што је добро познато, такви интеграли уопште не могу одредити. Тачнија, али и понешто компликована дефиниција била би да "постоји такав поједностављени систем диференцијалних једначина кретања (ниво поједностављења се при том одређује избором онога што се може сматрати 'занемарљивим поремећајима')



Слика 1. Фамилија малих планета (крстићи) на позадини осталих малих планета (кружићи). На y-оси је оскулаторни синус нагиба, а на x-оси оскулаторна ексцентричност путање. Горња слика даје ситуацију у иницијалном тренутку, одмах након одвајања фрагмената од родитељског тела ($t = 0$), док се доња односи на ситуацију неких 10 милиона година касније (слика преузета из Knežević 1994a)

за који се могу одредити три прва интеграла, које онда зовемо сопствена велика полуоса, сопствена ексцентричност и сопствени нагиб; поврх тога, наравно, имамо и три сопствена угла и њихове фреквенције". Коначно, као нека врста радне дефиниције често се користи једноставна констатација да су сопствени елементи "елементи ослобођени свих кратко- и дуго-периодичних поремећаја и зато константни у времену". У пракси се то своди на елементе ослобођене *скоро* свих поремећаја и отуд *приближно* константних у времену.



Слика 2. Фамилија малих планета (крстићи) на позадини осталих малих планета (кружићи). На y-оси је сопствени синус нагиба, а на x-оси сопствена ексцентричност путање. Горња слика даје ситуацију у иницијалном тренутку, одмах након одвајања фрагмената од родитељског тела ($t = 0$), док се доња односи на ситуацију неких 10 милиона година касније (слика преузета из Knežević 1994a).

Сопствени елементи малих планета користе се првенствено за идентификацију фамилија малих планета, али су се у последње време почели користити и за изучавање динамичке структуре прстена малих планета (коју одређују локације најважнијих резонанци у средњем кретању и секуларних резонанци у фазном простору елемената кретања), као и за изучавање кретања тела која се налазе у секуларним резонанцама или у њиховој непосредној близини (ради проучавања механизма транспорта метеорита до Земље, напр.). Што се коришћења сопствених елемената за идентификацију фамилија тиче, поменимо да се чак и данас понекад јављају недоумице око тога зашто се баш сопствени елементи користе у ту сврху, а не, рецимо, оскулаторни, када се најпроминентније фамилије могу лако уочити и у фазном простору оскулаторних елемената као изразите концентрације на фону осталих малих планета. Одговор на ово питање може се лако разумети помоћу слика 1 и 2. Ми не знамо старост било које од фамилија малих планета, нити оскулаторне елементе било којег родитељског тела у тренутку његовог распада и формирања фамилије, али знамо да у почетном тренутку, одмах након одвајања фрагмената од родитељског тела ($t = 0$), већи део фрагмената остаје релативно близу родитељског тела, формирајући тако једну изразито збијену концентрацију у фазном простору оскулаторних елемената; отуда би, дакле, у почетном тренутку, свака, па и мања фамилија била лако идентификована, а њени чланови јасно одвојени од осталих малих планета у пољу. Премда би и у фазном простору сопствених елемената имали сличну изразиту концентрацију, очигледно не би било никакве потребе за коришћење сопствених елемената за идентификацију фамилија у том тренутку. Познато је из теорије кретања малих планета, међутим, да се услед поремећаја свака иницијална концентрација у фазном простору оскулаторних елемената већ након неколико милиона година разиђе и оспе у таквој мери, да се фамилије које се састоје од мањег броја фрагмената више уопште не могу препознати, док код већих фамилија долази до стапања њихових рубних области са позадином и непоуздане идентификације чланова фамилије у тим областима. Пошто су, по дефиницији, сопствени елементи константе по времену, растур чланова фамилије у њиховом фазном простору требало би да је сасвим мали и у далеко дужим временским интервалима. Постојеће процене старости фамилија указују да је већина њих вероватно стара од неколико десетина до неколико стотина милиона година, па се отуд оне могу поуздано и прецизно идентификовати једино уз коришћење сопствених елемената као параметара за класификацију.

2. Ранији резултати

К. Хирајама (1918) је открио фамилије малих планета изучавајући расподеле малих планета у ($p = \tan i \sin \Omega$, $q = \tan i \cos \Omega$) и ($u = e \sin \varpi$, $v = e \cos \varpi$) равнима тзв. несингуларних елемената кретања (e означава ексцентричност путање, i њен нагиб, док су Ω и ϖ лонгитуда узлазног чвора, односно лонгитуда перихела путање, респективно). Наносећи на график парове вредности (p, q), односо (u, v), које су припадале истим уским интервалима по средњем дневном кретању (n), он је нашао да положаји једног броја малих планета у тим равнима леже врло приближно на кружницама чији су центри померени у односу на координатни почетак и приближно се поклапају са одговарајућим положајима Јупитера у тим равнима. У том свом пионирском раду Хирајама је користио оскулаторне елементе да би израчунао положаје у поменутим равнима за неких 709 малих планета познатих у то време. Он је, наравно, одмах схватио значење тих расподела и утврдио, на основу теорије секуларних поремећаја кретања малих планета, да се ради о телима међу којима мора да постоји физичка повезаност. Иако није одмах употребио технички термин "сопствени", он је очигледно користио концепт сопствених елемената када је показао да радијуси нађених кружница представљају константе интеграције у решењима једначина кретања које описују секуларне промене путања малих планета. Хирајама је зато нађене групе и назвао "фамилије", чак предпостављајући да су оне настале распадом неке веће мале планете на већи број мањих фрагмената.

Тек у својим каснијим радовима (напр. Hirayama 1923) он експлицитно говори о сопственим елементима, рачуна их и користи за класификацију малих планета у фамилије. Истовремено узима у обзир и већи број поремећајних планета и изводи сопствене елементе за укупно 950 малих планета. Последњу листу сопствених елемената Хирајама публикује у свом раду из 1928 године (Hirayama 1928).

Следећи важан допринос дао је тек Брауер (1951), који је користио класично Лагранжево аналитичко решење из линеарне теорије секуларних поремећаја, да би израчунао сопствене елементе за укупно 1527 малих планета. Најзначајније Брауерово унапређење у односу на Хирајамине резултате односи се на тзв. принудне поремећаје (поремећајне ефекте који се јављају услед тога што су путање великих планета ексцентричне и нагнуте у односу на инваријабилну раван), или "индуковане осцилације" како их је звао Брауер. Ови чланови израчунати су из теорије кретања великих планета Брауера и Ван Веркома (Brouwer and Van Woerkom 1950) у којој су, у поређењу са старом теоријом Стоквела коју је користио Хирајама, коришћене поправљене вредности планетарних маса и где су узети у обзир главни поремећајни чланови другог реда по маси (тзв. "велика неједнакост" Јупитера и Сатурна). Ово последње побољшање је од посебне важности јер је омогућило одређивање знатно тачније вредности за једну од основних фреквенција планетског система, наиме, ону Сатурновог перихела.

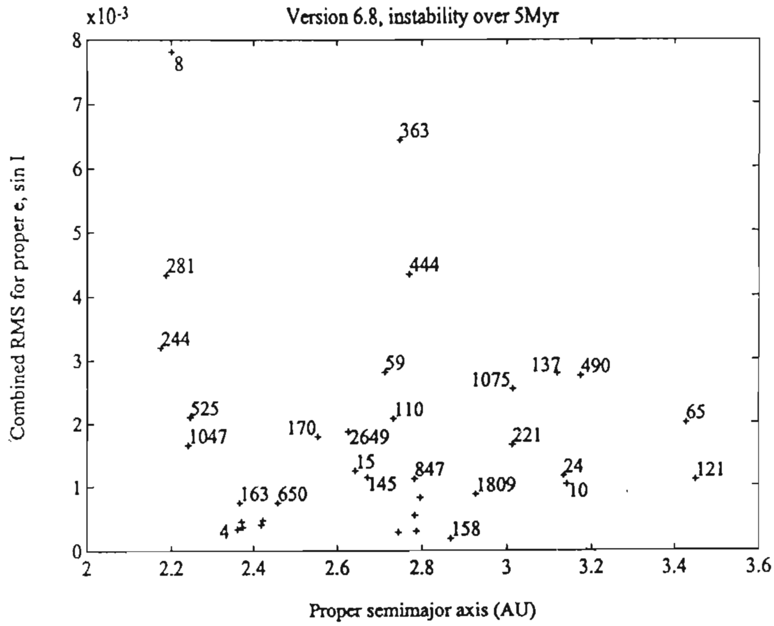
Један од најзначајнијих продора у области изучавања кретања малих планета и одређивања њихових сопствених елемената начинио је Вилијамс (1969). Он је развио семианалитичку теорију секуларних поремећаја кретања малих планета у којој се не користи развој функције поремећаја у ред по степенима ексцентричности и нагиба путања малих планета. Вилијамсова теорија је заснована на Гаусовој методи осредњавања краткопериодичних поремећаја, али се издвајање и одређивање индивидуалних дугопериодичних чланова врши на класичан начин, тј. исто као и стандардној аналитичкој теорији поремећаја. Цена коју је ваљало платити да би се избегао развој функције поремећаја у ред по елементима путање мале планете, је да су се, с друге стране, могли узети у обзир само чланови првог реда и степена развоја по ексцентричности и нагибу поремећајних, великих планета. Отуда, ова теорија даје резултате приближно исте, али ограничене тачности за све мале планете, без обзира на ексцентричности и нагибе њихових путања. У поређењу са сопственим елементима добијеним помоћу аналитичке линеарне теорије сопствени елементи које су одредили Вилијамс (1979, 1989), односно Вилијамс и Хијерат (Williams and Hierath 1987) били су знатно тачнији и поузданији, нарочито за тела са путањама умерених-до-високих ексцентричности и нагиба. Са техничке тачке гледишта, главне карактеристике Вилијамсове процедуре могу се свести на следеће: диференцијалне једначине кретања изражавају се преко несингуларних променљивих и у функцији аргумента перихела путање мале планете ω; тако добијене једначине се затим раздвоје на део нултог реда (поремећаје какве би произвела поремећајна тела на кружним путањама које леже у истој равни) и део првог реда, који се онда нумерички интеграле. Добијени интеграли имају извесне корисне особине, везане за њихову симетричност и периодичност, које се користе ради оптимизације рачуна. Коначно, сопствени елементи се одређују као оне вредности ексцентричности и нагиба, које одговарају вредности аргумента перихела $\omega = 0$ (то су, у ствари, минимална вредност за ексцентричност, односно максимална за нагиб).

Преостали ранији резултат који треба поменути је онај Козаија (1979), који је искористио своју познату теорију секуларних поремећаја малих планета са великим нагибима путања (Kozai 1962) да би дефинисао један нарочит сет параметара за идентификацију фамилија: оскулаторну велику полуосу мале планете a, z-компоненту угловног момента $\Theta = (1 - e^2)^{1/2} \cos i$, и минималну вредност нагиба i_{min}, која одговара аргументу перихела $\omega = \pi/2$. У оквиру теорије првог реда и поједностављеног динамичког модела у којем се поремећајне планете крећу по кружним путањама у равни, Θ је константа и може се користити у комбинацији са a и i_{min} уместо класичних сопствених елемената у сврху идентификације фамилија.

3. Савремене теорије и методе за израчунавање сопствених елемената

3.1. Теорија Миланија и Кнежевића

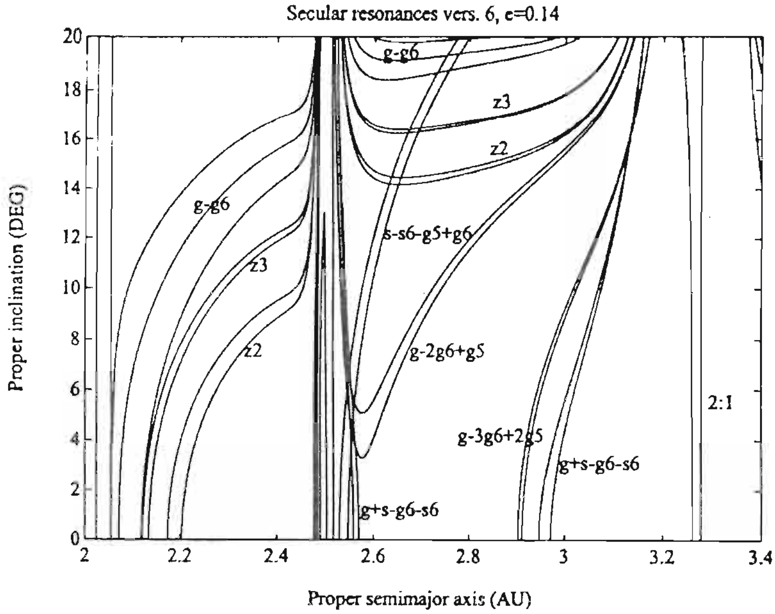
Теорија Миланија и Кнежевића развијена је из аналитичке теорије секуларних поремећаја малих планета М. Јуасе (Yuasa 1973), у којој су узети у обзир чланови развоја поремећајне функције, или прецизније поремећајног Хамилтонијана, до четвртог степена по ексцентричности и нагибу у првом реду по поремећајној маси, као и чланови другог степена у другом реду по маси. У теорији се користи канонички формализам (Hori 1966) за елиминисање краткопериодичних и дугопериодичних чланова из Хамилтонијана, односно израчунавање средњих и сопствених елемената кретања, што се у пракси у ствари своди на две узастопне каноничке трансформације. Милани и Кнежевић су увели многа унапређења и иновације у односу на оригиналну теорију. Из дела поремећајног Хамилтонијана другог реда по маси одстрањене су извесне важне грешке и додат је недостајући индиректни део, дугопериодични Хамилтонијан преуређен је тако да су ефекти другог реда укључени у линеарни део решења, ради налажења коначних сопствених елемената и фреквенција уведена је итеративна процедура, додати су неки резонантни чланови шестог степена у првом реду по поремећајној маси, односно четвртог степена у другом реду, итд.



Слика 3. Резултати теста тачности сопствених елемената (преузето из Milani and Knežević 1994).

Пошто је заснована на скраћеном развоју поремећајног Хамилтонијана, ова теорија је погодна само за мале планете са путањама малих до умерених ексцентричности и нагиба (но, 90% малих планета главног прстена припада управо овој групи), за које у великој већини случајева даје сопствене елементе високе тачности. За мале планете са путањама велике ексцентричности и нагиба ова теорија, у њеном садашњем облику, не обезбеђује поуздане резултате; с друге стране, проширење теорије члановима још вишег реда и степена врло је компликовано и може се само делимично остварити класичном техником (види касније, тачке (б) и (ц)).

Као што су показали Милани и Кнежевић (1994), резултати добијени помоћу њихове аналитичке теорије су више него добри за потребе класификовања малих планета у фамилије. Овај закључак изведен је на основу обимног тестирања стабилности изведених сопствених елемената, које је обухватило 35 објеката из разних области прстена, укључујући и највеће чланове свих фамилија идентификованих уз помоћ тих елемената (Zappala et al. 1994). Тестови су се састојали у нумеричком интеграљењу свих одабраних малих планета у периоду од 5 милиона година (у оквиру динамичког модела који је укључио само четири велике спољне планете) и одређивању временских серија оскулаторних елемената са излазом на сваких хиљаду година, затим у израчунавању сопствених елемената за исте епохе и коначно у праћењу њихових промена (одступања од константности) у току тог временског интервала. Резултати добијени у оквиру ових тестова приказани су на Слици 3, где је корен збира



Слика 4. Положаји важнијих секуларних резонанци у централном делу прстена малих планета, одређени помоћу теорије Миланија и Кнежевића, верзија 6.8 (преузето из Knežević and Milani 1994).

квадрата средњих квадратних одступања сопствених ексцентричности и синуса сопствених нагиба од константе дат у функцији велике полуосе обухваћених малих планета.

Са слике се види да постоји заиста само неколико случајева у којима је тачност изведених сопствених елемената нешто лошија и да су увек ти случајеви последица утицаја неке резонанце (2:1 резонанце у средњем кретању или неке од секуларних резонанци); у таквим случајевима није ни могуће израчунати тачне сопствене елементе, пошто је аналитичка процедура дивергентна, већ је циљ да се они поуздано идентификују, да би се затим прешло на коришћење једне врсте "адаптиране теорије", мање осетљиве на конкретни резонантни ефекат.

На слици 4 приказане су, као илустрација динамичке структуре главног прстена малих планета, неке најважније резонанце, које утичу на кретање малих планета и одређивање сопствених елемената. Положаји резонанци одређени су тако да одговарају вредности сопствене ексцентричности од 0.14, док су контурне линије одређене за вредности резонантних именилаца од ± 0.5 "/год.; само је велика линеарна резонанца $g - g_6$ (g и g_6 су фундаменталне фреквенције секуларног система за лонгитуду перихела мале планете, односно лонгитуду перихела Сатурна, а $g - g_6$ је одговарајући мали именилац) представљена контурним линијама које одговарају вредности овог имениоца од $-2, 0, +2$ "/год.

Међу приказаним нелинеарним секуларним резонанцама најважније су свакако $g - 2g_6 + g_5, z_1 = g - g_6 + s - s_6$ и $z_2 = 2(g - g_6) + s - s_6$ (s и s_6 су фреквенције лонгитуда чвора мале планете и Сатурна, респективно), и то како због значајних ефеката које производе, тако и због чињенице да пресецају управо најгушће делове прстена и утичу на кретање великог броја малих планета. Резонанце пресецају и неке фамилије, што у случају фамилије са великим бројем чланова (напр. Eos, види Milani and Knežević 1992) не доводи у питање саму идентификацију фамилије, али изазива проблеме са идентификацијом њеног чланства, док у случају мале фамилије (напр. спорна фамилија Lydia, види Zappala et al. 1994) резонантни утицај понекад онемогућује већ и саму идентификацију фамилије.

Описаћемо сада укратко нека од најновијих и најинтересантнијих унапређења уведених у ову теорију у неколико последњих година (детаљан опис може се наћи у Milani and Knežević 1994).

Што се рачуна краткопериодичних поремећаја и одређивања средњих елемената тиче главна новија унапређења своде се на следеће: (i) у рачун су, ради формалне комплетности теорије уврштени и чланови индиректног дела поремећајног Хамилтонијана четвртог степена по ексцентричности и нагибу, који раније нису били узимани у обзир. Како је, међутим, показао Кнежевић (1992б), ови чланови сасвим незнатно утичу на добијене резултате; (ii) највећи део поремећајног утицаја унутрашњих планета узет је у обзир тако што су полазни оскулаторни елементи изражени у односу на барицентар Сунца и унутрашњих планета; ово је важно јер, иначе занемарљиви, индиректни поремећајни ефекти унутрашњих планета могу бити знатно увећани због присуства малих именилаца, што онда може да доведе до знатних промена фундаменталних фреквенција секуларног система; (iii) уведена је посебна ознака квалитета израчунатих средњих елемената, да би се кориснику скренула пажња на проблематичне случајеве за које се помоћу ове теорије нису могли извести тачни средњи елементи. Ове ознаке омогућују да се аутоматски детектују (и по потреби уклоне из каталога) мале планете које се налазе или у самим резонанцама у средњем кретању или у њиховој непосредној близини; (iv) разна техничка унапређења уграђена у софтвер укључују примену технике "генеричког члана" (Knežević 1992a), аутоматски прелаз са једног произвољног референтног система на било који други, могућност директног рачунања средњих елемената без претходног свођења улазних података датих за разне епохе на једну стандардну, рачунање средње средње аномалије, итд.

Унапређења уведена у процедуру за елиминисање дугопериодичних поремећаја укључују: узимање у обзир (а) нелинеарних принудних чланова, (б) чланова другог реда и четвртог степена са квадратом резонантног малог имениоца $3n_5 - n$ (n и n_5 су средња дневна кретања мале планете, односно Јупитера), и (в) неких чланова шестог и осмог степена за z_2 имениоцем; такође, (г) уведена је контролна процедура која омогућује аутоматско прелажење на адаптирану теорију.

(а) Теорија секуларних поремећаја великих планета садржи бројне поремећајне чланове који производе значајне принудне ефекте у кретању малих планета. У ранијим верзијама теорије Миланија и Кнежевића (1990, 1992) узимани су у обзир само ефекти изведени у оквиру линеарне теорије секуларних поремећаја великих планета. Због тога су се код малих планета лоцираних у близини резонантних површи у фазном простору сопствених елемената кретања, које одговарају занемареним нелинеарним принудним члановима, јављале знатне нестабилности изведених резултата. Да би се уклонио овај извор нестабилности, у последњу верзију теорије (са интерном ознаком 6.8) уведено је осам највећих нелинеарних принудних чланова из тзв. "синтетичке" теорије кретања великих планета (Nobili et al. 1989). Резултат ове једноставне операције је знатно побољшање тачности сопствених елемената за све тестиране мале планете, раније подложне овом проблему (стабилност сопствених елемената за тест планету 1272 Gefion, напр., поправљена је за читав ред величине).

(б) Премда су чланови другог реда по поремећајној маси и другог степена по ексцентричности и нагибу били укључени у раније верзије теорије Миланија и Кнежевића, сопствени елементи за неке мале планете у близини 3:1 резонанце у средњем кретању показивали су знатно већа одступања од константности, него што је то био случај са већином осталих тестираних малих планета. Очигледно, то је могло бити последица само чињенице да најважнији поремећајни ефекат другог реда није онај узрокован члановима другог, већ онај узрокован члановима четвртог степена. С друге стране, међу члановима другог реда и четвртог степена већи од осталих су они који у својим имениоцима имају квадрате резонантне фреквенције, па су управо ти чланови и укључени у последњу верзију теорије. Овај додатак теорији се показао као такође веома ефикасан у отклањању узрока нестабилности сопствених елемената малих планета у близини те резонанце, па је тако напр. у случају мале планете 650 Amalasuntha одступање од константности смањено приближно пет пута. За резонанцу 2:1, међутим, додавање исте врсте чланова дало је контрадикторне резултате, наиме, побољшање тачности у једним случајевима, односно извесно погоршање у другим. То се може разумети ако се има у виду да сопствени елементи за мале планете у близини ове резонанце показују типичне карактеристике хаотичног кретања, па их није ни могуће даље побољшавати помоћу детерминистичке теорије. Ипак, сопствени елементи су чак и у овим хаотичним случајевима на одређени начин стабилни, јер хаос остаје унутар одређених релативно уских граница; тај се феномен назива "стабилни хаос" (Milani 1993, 1994).

(в) Још једно само делимично успешно унапређење односи се на укључење чланова шестог и осмог степена са малим имениоцем $z_2 = 2(g - g_6) + s - s_6$. Ова секуларна резонанца је прва и најважнија у каскади резонанци које су груписане уз унутрашњу ивицу велике $g - g_6$ линеарне секуларне резонанце и које пресецају густо "насељени" унутрашњи део главног прстена малих планета (тзв. Флора регион). Резултат додавања ове врло комплексне поправке је доста скроман; за две тестиране мале планете код којих су ови раније занемарени чланови били главни узрок нестабилности изведених сопствених елемената –

1047 Geisha и 525 Adelaide – одговарајућа осцилација смањена је за само око 50%. Због тога је Флора регион практично једини у главном прстену малих планета у којем је и сада идентификација самих фамилија и класификација њихових чланова релативно непоуздана (Zappala and Cellino 1994).

(г) Пошто се у теорији Миланија и Кнежевића до решења долази итеративним путем, процес понекад дивергира, а то значи да се међу дугопериодичним члановима сигурно налази неки чији именилац је близак нули. У узорку од 12,573 мале планете за које су сопствени елементи рачунати помоћу верзије 6.8 теорије Миланија и Кнежевића, дивергенција се јавила у 1,045 случајева. Ти су случајеви означени помоћу специјалног "резонантног кода", а до конвергентног се решења затим покушало доћи преласком на адаптирану теорију из које је одстрањен дати резонантни члан. На овај начин, рачун сопствених елемената даје поузданије, мада нешто мање тачне резултате. Да би се аутоматски детектовао резонантни члан који проузрокује дивергенцију и који треба одстранити, уведена је врло компликована процедура у коју је уграђена побољшана итеративна шема (тачније почетне вредности и строжа контрола конвергенције). У оквиру те шеме проверава се величина свих поремећајних чланова у три узастопне итерације, а њихове разлике и амплитуде се упоређују са неким унапред одређеним критичним вредностима. Баш због овакве сложености процедура аутоматске селекције одговарајуће адаптиране теорије није апсолутно поуздана; понекад алгоритам не може да идентификује резонантни члан одговоран за дивергенцију, понекад процедура дивергира и након одстрањивања претпостављеног "главног кривца", итд. По оцени Миланија и Кнежевића (1994), селектирање погодне адаптиране теорије било је успешно у неких 90% дивергентних случајева, па је отуд број случајева који нису могли бити коректно обрађени мањи од 1% од укупног броја малих планета за које су рачунати сопствени елементи.

Поменимо још да је међу техничким иновацијама, када је софтвер за рачун дугопериодичних поремећаја у питању, најважнија она која се односи на имплементацију технике "генеричког члана" (Knežević 1994). Компјутерски потпрограм за рачун дугоперидичних чланова, која је раније имала више од 1,200 линија и која је била толико компликована да чак није могла бити оптимизована од стране неких компајлера, замењена је потпрограмом од свега 50 линија и датотеком од 1,000 линија која садржи потпуну информацију о 300 дугопериодичних чланова развоја поремећајног Хамилтонијана.

Такође је интересантно приметити да Милани и Кнежевић сматрају да са садашњим нивоом тачности који се постиже помоћу њихове аналитичке теорије, они већ досежу до тзв "Арнолдове мреже" уских резонанци високог реда, које имају мале снаге, али које упркос томе понекад могу да у извесној мери утичу на стабилност сопствених елемената малих планета. Нове идеје и приступи, битно различити од ових до сада коришћених, биће неопходни да би се нестабилност сопствених елемената свела испод данас достигнутог нивоа од 0.001 и да би се оваква стабилност одржала у временским интервалима знатно дужим од оних реда 10^7 год., који су покривени до сада урађеним тестовима.

3.2. Теорија Леметр и Морбиделија

Основна разлика између семианалитичке теорије, каква је ова Леметр и Морбиделија (1994), и чисто аналитичке теорије, каква је она Миланија и Кнежевића, долази отуда што је, како је приметио још Козаи (1962), кретање малих планета са великим нагибима под доминантним утицајем поремећајног ефекта $e^2 i^2 \cos 2\omega$. Овај ефекат због тога мора у таквим случајевима бити укључен у интеграбилни део Хамилтонијана, да би се добили употребљиви резултати. Козаи је овај циљ постигао тако што је користио поједностављени динамички модел: ако се претпостави да се велике поремећајне планете крећу по кружним путањама у равни, секуларни Хамилтонијан (након осредњавања по краткопериодичним ефектима) зависи само од једне угловне променљиве – аргумента перихела поремећеног тела ω. Овако поједностављени Хамилтонијан је интеграбилан и може се користити као прва апроксимација за конструисање комплетне семианалитичке теорије кретања. Пошто је ова интеграбилна апроксимација геометријски сасвим различита од интеграбилне апроксимације у класичној, аналитичкој теорији (линеарна теорија Лагранжевог типа), разлике се јављају и у разним другим аспектима употребе и примене теорија, па тако и код дефиниције сопствених елемената.

Прву комплетнију теорију кретања у којој се користила Козаијева апроксимација као полазна тачка развио је Вилијамс (1969). Као што је већ раније поменуто, у Вилијамсовој теорији се узимају у обзир ексцентричности (e') и нагиби (i') путања поремећајних планета, али само до првог степена. Секуларни поремећаји се рачунају на класичан начин, након што се претходно поремећајна функција и њени парцијални изводи по елементима кретања нумерички осредњи по брзим променљивима (средњим аномалијама/лонгитудама мале планете и великих поремећајних планета). Теорија Вилијамса показала се као веома успешна у своје време, тако да су и сопствени елементи израчунати помоћу ове теорије били релативно добре тачности и доста су дуго коришћени за идентификацију фамилија. Ипак, ова теорија има бар два озбиљна ограничења. Прво, теорија је развијена на бази класичног, неканоничког формализма; резултати првог реда по маси не зависе од формализма, али је било већ тешко и само репродуковати резултате Вилијамса на основу објављених радова; ићи даље, на комплексније, свеобухватније решење, на бази истог формализма било је практично немогуће. Друго, није ни у ком случају тачно да су ефекти другог и вишег реда по маси увек мали. За мале планете у близини главних резонанци у средњем кретању (2:1, 3:1) комплексни нелинеарни ефекти који се јављају као последица одстрањивања краткопериодичних чланова производе секуларне поремећаје који садрже квадрат поремећајне масе, али и квадрате малих именилаца који одговарају датим блиским резонанцама. Теорија која узима у обзир овај ефекат може да се разликује од теорије првог реда и до 50% када су напр. фундаменталне фреквенције у питању, као што је то случај у региону фамилије Темис (Themis). Отуда се у неким областима главног прстена малих планета не може без проширења теорије члановима другог реда постићи тачност сопствених елемената потребна за поуздану и прецизну идентификацију фамилија. Због техничких ограничења која намеће класични формализам, ово се није могло постићи у оквиру Вилијамсове теорије.

Прво од поменутих ограничења семианалитичке теорије елиминисао је Енрар (Henrard 1990), развивши нову семианалитичку методу са каноничким формализмом у којој се решење развија у ред, без да се претходно у ред развијају диференцијалне једначине кретања. У Енраровом методу се користи Арнолд-Јостова теорема да би се дефинисале каноничке променљиве за интеграбилни проблем, променљиве се теоријски одређују помоћу линијских интеграла и у пракси рачунају путем нумеричких квадратура. Поремећајна шема за израчунавање решења неинтеграбилног проблема може се онда изразити помоћу нумеричких квадратура исте врсте. Када се ова процедура примени на Козаијев Хамилтонијан и на поремећаје првог степена по e', i' (Morbidelli and Henrard 1991a, 1991b), Енраров канонички метод репродукује Вилијамсове сопствене елементе и на истим локацијама проналази линеарне секуларне резонанце Вилијамса и Фокнера (Williams and Faulkner 1981). Поврх тога, међутим, Енраров метод омогућује одређивање поремећаја другог реда, поново путем нумеричких квадратура, али се при том морају интегралити нешто сложенији изрази.

Леметр и Морбидели (1994) су управо на овај начин, користећи дакле метод Енрара, успели да развију теорију за израчунавање сопствених елемената малих планета. Очигледно је њихова теорија посебно погодна за објекте са путањама великих нагиба и/или ексцентричности, за које аналитичка теорија не може да обезбеди довољно добре резултате. У теорији се, по угледу на теорију Миланија и Кнежевића, користи итеративна процедура да би се одредиле сопствене фреквенције и сопствени елементи, при чему се као полазне вредности користе средњи елементи такође изведени помоћу теорије Миланија и Кнежевића (Knežević et al. 1988). По вољи се могу користити три различита сета сопствених елемената a, e_{min}, i_{max}, који одговара вредности аргумента перихела $\omega = 0°$, a, e_{max}, i_{min}, који одговара вредности $\omega = 90°$ и $a, \bar{e}, \bar{i}$, који се изводи на посебан начин и приближно одговара класичној дефиницији. Итеративни поступак опет дивергира у близини секуларних резонанци, али, с друге стране, ова теорија може успешно да третира чак и неке мале планете врло високих нагиба, код којих се аргумент перихела ω налази у либрацији.

Иаоко је теорија Леметр и Морбиделија још у фази развоја, ипак су већ саопштени и неки интересантни резултати (Lemaitre and Morbidelli 1994). У првом реду се то односи на неке заиста охрабрујуће домете када је тачност сопствених елемената за мале планете типа Паласа (Pallas) у питању. Овде се, наиме, ради о веома сложеној динамичкој ситуацији, јер се Палас налази близу критичне разделнице (сепаратрисе) између циркулације и либрације аргумента ω. Чак и са најједноставнијом верзијом теорије (са Јупитером као јединим пертурбером и са само три секуларне фреквенције g_5, g_6 и s_6), одступања добијене сопствене ексцентричности и синуса сопственог нагиба нису већа од ± 0.015 (± 1.5 "/год. за фреквенције) у временском интервалу од 2.5 милиона година. Овај ниво стабилности елемената довољан је за идентификацију евентуалних фамилија у области где се, као у овом случају, налази релативно мали број објеката, па су Леметр и Морбидели заиста и успели да идентификују малу фамилију Палас (ову фамилију је у ствари већ раније нашао Вилијамс (1989), али је она у његовој класификацији имала далеко мањи број чланова). Тачност сопствених елемената која се може постићи помоћу ове теорије у мање динамички компликованим случајевима је наравно далеко боља од ове остварене у случају Паласа. Тако напр. за малу планету 185 Eunike, која се налази непосредно изнад главне секуларне резонанце $g - g_6$, стандардна одступања сопствене ексцентричности и синуса сопственог нагиба, изведена из временских серија у распону од читавих 4 милиона година, износе свега 0.006 и 0.002, респективно.

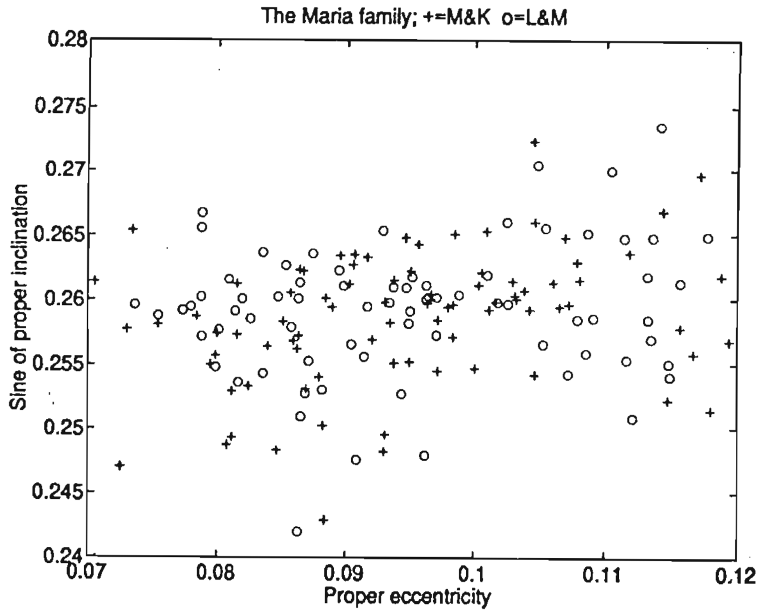
Недавно се појавила нова верзија (верзија 2) сопствених елемената израчунатих помоћу теорије Леметр и Морбиделија, у којој су сада узети у обзир поремећаји две велике планете, Јупитера и Сатурна, са фреквенцијама $g_5, g_6, g_7, s_6, 2g_6 - g_5$, а урађени су такође и неки тестови са s_7 и s_8. Извршена су и два поређење са резултатима Миланија и Кнежевића, с једне стране, да би се стекла представа о општој поузданости семианалитичких резултата, и, с друге стране, да би се одредиле вредности нагиба које одговарају прелазној области где корисници каталога сопствених елемената треба да пређу са елемената израчунатих помоћу једне, на оне добијене помоћу друге теорије. Закључци добијени овим последњим поређењем биће саопштени на другом месту (Knežević et al., 1994), тако да ћемо се овде задовољити само констатацијом да је зона прелаза изгледа негде између 15° и 17° нагиба, нешто ниже, дакле, од $g - g_6$ резонанце. Што се оног првог поређења тиче, његови резултати сумирани су у Табели 1. У табели су дати сопствени елементи изведени помоћу нове верзије теорије Леметр и Морбиделија и њихове разлике у односу на елементе добијене помоћу теорије Миланија и Кнежевића за неколико малих планета главног прстена, малих до умерених нагиба. За већину објеката обухваћену овим поређењем слагање сопствених елемената је сасвим задовољавајуће, али постоје и неке неочекивано велике разлике (напр. 4 Vesta). Већ је више пута напоменуто да сопствене елементе Леметр и Морбиделија не треба користити у случајевима малих ексцентричности и нагиба, пошто су они тада мање стабилни од оних добијених из аналитичке теорије и пошто је њихово израчунавање мање ефикасно, али је важно да смо у могућности да потврдимо да су они, у већини случајева, потпуно конзистентни. Нека од нађених неслагања још увек чекају на објашњење; посебно стабилност нумеричких квадратура које се користе у оквиру семианалитичке теорије захтева допунску верификацију да би се дала коначна оцена о поузданости рачуна сопствених елемената Леметр и Морбиделија. Ипак, може се рећи да су за мале планете високих нагиба и/или ексцентричности ови сопствени елементи на таквом нивоу стабилности и поузданости који је довољан за идентификацију фамилија. Без сумње ће се зато у свакој следећој класификацији малих планета у фамилије морати кориситити "композитни" каталог сопствених елемената израчунатих помоћу разних теорија.

ТАБЕЛА 1. Сопствени елементи изведени помоћу теорије Леметр и Морбиделија и њихове разлике у односу на елементе Миланија и Кнежевића (преузето из Knežević and Milani 1994).

No.	a	e	Δe	$\sin I$	$\Delta \sin I$
4	2.36151	0.0882	−0.0105	0.1137	0.0024
15	2.64366	0.1480	−0.0005	0.2261	0.0002
44	2.42276	0.1743	0.0000	0.0555	0.0025
142	2.41867	0.1589	−0.0006	0.0559	0.0002
145	2.67273	0.1685	−0.0006	0.2036	0.0014
158	2.86881	0.0372	−0.0085	0.0372	−0.0003
163	2.36712	0.2078	−0.0024	0.0824	0.0005
170	2.55374	0.0963	−0.0049	0.2600	0.0004
808	2.74515	0.1267	−0.0066	0.0836	−0.0012
847	2.78276	0.0680	0.0012	0.0620	−0.0010
1272	2.78380	0.1298	0.0007	0.1559	−0.0006
1378	2.37482	0.1580	−0.0052	0.0513	−0.0013
1726	2.78741	0.0320	−0.0149	0.0742	−0.0021
1809	2.92742	0.0751	−0.0007	0.0381	0.0015
1932	2.37179	0.1966	−0.0035	0.0363	−0.0032

Једна независна провера значаја разлика сопствених елемената изведених помоћу аналитичке и помоћу семианалитичке теорије илустрована је на Слици 5, где је, у равни $(a, \sin i)$, приказана област релативно високих нагиба у којој се налази позната фамилија Марија (Maria); подаци из обе теорије нанесени су на исти график. Ово је раније поменута област прелаза између две теорије у којој су сопствени елементи из обе теорије приближно исте тачности.

Два очигледна закључка могу се извести за основу Слике 5: идентификација фамилије, општи облик и структура фамилије не зависе од тога из које теорије ћемо узети елементе за класификацију, али чланство сваке појединe мале планете у фамилији (а нарочито оних на рубовима фамилије) може критично да зависи од употребљеног сета параметара. Зато се, бар за сада, и једни и други сопствени елементи могу равноправно користити у овој области, а најбоље би било користити оба сета и упоређивати резултате.



Слика 5. Фамилија Марија; крстићи означавају податке изведене помоћу аналитичке теорије Миланија и Кнежевића, а кружићи оне добијене помоћу семианалитичке теорије Леметр и Морбиделија (преузето из Knežević and Milani 1994).

3.3. Метода Миланија за Тројанце

Одређивање сопствених елемената за мале планете из групе Тројанаца помоћу једне врсте синтетичке теорије (Фуријеове анализе излаза из нумеричке интеграције), први су извршили Бјен и Шубарт (Bien and Schubart 1987); они су израчунали путање за 41 Тројанца у периоду од $\approx 150,000$ година и извели вредности "путањских параметара" за укупно њих 40. Исту технику је касније усавршио Милани (1993) и применио на узорак од 184 Тројанца. Путање су рачунате за 1 милион година (за 20 објеката интеграција је проширена на чак 5 милиона година), у оквиру модела који је укључивао поремећаје четири спољне велике планете, са корекцијом за индиректни ефекат унутрашњих планета. Сопствени елементи које даје Милани су следећи: da, амплитуда осцилације велике полуосе у току једног периода либрације (као алтернатива може се користити и D, мера амплитуде либрације у лонгитуди), сопствена ексцентричност e_p, добијена нумеричким филтрирањем принудних чланова, и синус сопственог нагиба $\sin i_p$. Такође су дате и сопствене фреквенције f, g, s које се јављају у аргументима чланова са овим амплитудама. У скоро 90%

случајева сопствени елементи су довољно стабилни за примену у било које сврхе, с максималним одступањем испод 0.001 астрономске јединице за da, односно мањим од 0.0015 за e_p и $\sin i_p$. Иако је динамичка природа ових "синтетичких" сопствених елемената различита од природе оних који се добијају у оквирима аналитичке, односно семианалитичке теорије, синтетички елементи се користе на потпуно исти начин као и ови други, напр. за идентификацију фамилија.

3.4. Метода Шубарта за мале планете групе Хилда

Шубарт (1982, 1991) је развио један посебан синтетички метод за извођење "сопствених параметара" за мале планете групе Хилда (мале планете које се налазе у резонанци 3:2 у средњем кретању). У основи методе је опет нумеричка интеграција путања у оквиру поједностављеног динамичког модела (Сунце, Јупитер, Сатурн и сунчева маса увећана за збир маса унутрашњих планета), која је, у датом случају, обухватила временске интервале између 36,500 и 109,500 година. У случају малих планете ове групе морају се користити посебно дефинисани сопствени параметри, пошто се, као и у случају Тројанаца, ради о резонантним објектима на које се не може применити никаква општа теорија кретања; либрација изазива велике осцилације велике полуосе, тако да средња вредност ове осцилације нема онај смисао и не може се примењивати у пракси на начин који је погодан за остала, динамички "нормална" тела (средња велика полуоса је напр. скоро идентична за све мале планете ове групе). Параметри које је одабрао Шубарт да би представио карактеристике кретања малих планета групе Хилда су: $\overline{\sigma}_A$ – средња амплитуда либрације критичног аргумента у којем је аргумент перихела замењен својом трансформисаном вредношћу, из које су одстрањени принудни ефекти; $\overline{e}_p$ – средња вредност ексцентричности, такође претходно ослобођене принудних поремећаја; и i_p – сопствени параметар за нагиб, односно проста средња вредност изведена из временске серије оскулаторних нагиба. При практичном извођењу ових параметара Шубарт је користио комбинацију нумеричког филтрирања и графичког представљања преосталих варијација, да би коначне вредности одредио са одговарајућих графика.

На описани начин сопствени параметри одређени су за укупно 57 малих планета групе Хилда, од којих су две (1256 Normannia и 4196 Shuya), са малом ексцентричношћу и критичним аргументом у циркулацији, третиране нешто другачије. Иако су сопствене вредности које је извео Шубарт изгледа доста поуздане (практично исти резултати су добијени када је за 9 ових објеката рачун поновљен помоћу усавршеног модела и другачије нумеричке дефиниције), извесна унапређења су још увек могућа, као напр. дуже интеграције ради ефикаснијег филтрирања ефеката са веома дугим периодама. Динамичка дефиниција Шубартових параметара је веома различита како од аналитичких, тако и од семианалитичких сопствених елемената, али се ти параметри и поред тога могу ефикасно користити за идентификацију фамилија, тако што се разлике сопствених параметара помоћу погодно одабране метрике преводе у разлике релативних брзина. Сам Шубарт (1991) је идентификовао најмање једну фамилију међу Хилда малим планетама.

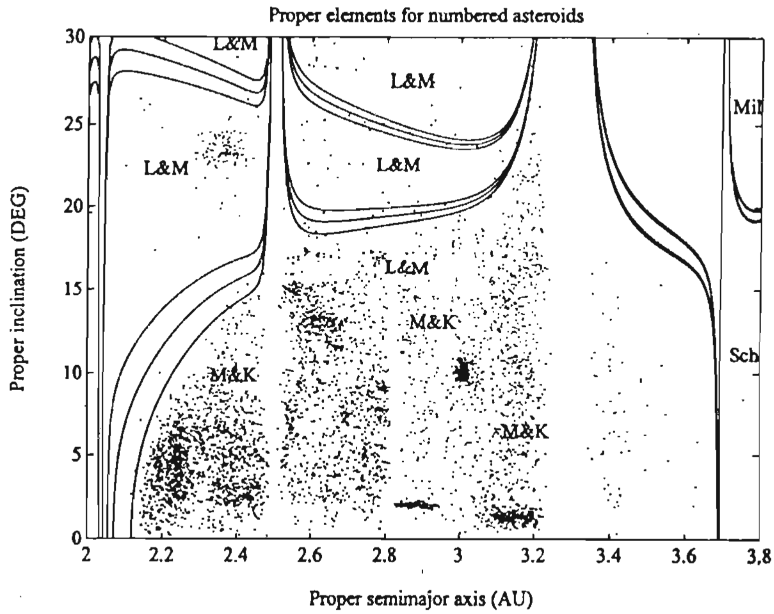
3.5. Метода Морбиделија за мале планете у секуларним резонанцама

Сасвим недавно Морбидели (1993) је развио нови алгоритам специјално за одређивање "резонантних сопствених елемената", који се добијају из једне интеграбилне апроксимације секуларне резонантне динамике и омогућују непосредно и ефикасно изучавање еволуције резонантних путања у дугим временским интервалима. Очигледно, пошто је малих планета унутар или веома близу главних секуларних резонанци релативно мало, циљ одређивања сопствених елемената за ова тела није у функцији идентификације фамилија, већ се ради о настојању да се проникне у специфичности динамике у резонантним областима, чиме би се попунила значајна празнина у нашем досадашњем познавању кретања малих планета. Истовремено, тако би се стекла представа о читавом фазном простору и омогућио увид у глобалну резонантну топологију. Сам метод представља модификацију процедуре Леметр и Морбиделија за нерезонантне објекте, где су сви чланови сем резонантног одстрањени из Хамилтонијана. На тај су начин одређене "семисопствене" вредности промељивих (компонената момента и углова), које онда служе као почетни услови за интеграцију трансформисаних једначина кретања и израчунавање коначних решења. Тестови извршени помоћу новог алгоритма показали су да је могуће открити динамичку природу резонантних објеката и чак показати за који од њих ће се у неком тренутку у будућности ексцентричност путање увећати до те мере да почну пресецати путање великих планета. Тако је напр. нађено да се само 4 мале планете, од укупно 44 нумерисане мале планете лоциране у близини резонанце $g - g_6$, налазе у области у којој је кретање нестабилно, док је исто тако за само неколико објеката показано да ће једно време у будућности њихове путање пресецати путању Марса.

4. Закључне напомене

Покушајмо на крају резимирати овај преглед прошлих достигнућа и садашњег стања у области одређивања сопствених елемената малих планета са неколико кратких напомена:

- У неколико последњих година дошло је до наглог развоја теорије кретања малих планета, па, сходно томе, и до великог квалитативног скока када је одређивање сопствених елемената малих планета у питању. Напуштањем класичних теоријских образаца и усвајањем нових аналитичких, семианалитичких и нумеричких формализама решења система диференцијалних једначина кретања постала су и тачнија и поузданија, за шта су обезбеђени егзактни докази, добијени свеобухватним и детаљним тестирањем резултата.
- Тренутно су у употреби четири различите теорије и методе, које служе за израчунавање сопствених елемената за разне популације или групе малих планета, чији резултати су уврштени у генерални каталог (Milani et al. 1993): аналитичка теорија Миланија и Кнежевића, семианалитичка теорија Леметр и Морбиделија, нумерички метод Миланија за Тројанце и нумеричко-графички метод Шубарта за Хилде. Метода Морбиделија користи се у сврхе изучавања резонантне динамике.
- Пошто се рачунају помоћу разних процедура и како су чак и дефинисани на различите начине, добијени сопствени елементи су и различите тачности и поузданости. Корисник мора имати у виду ове разлике и мора да буде посебно опрезан када упоређује или меша податке из разних извора. Велика већина података је, међутим, довољно тачна да омогући поуздану идентификацију фамилија малих планета на фону оног броја малих планета, чије су путање добро познате у садашњем тренутку.
- Као неку врсту упутства за кориснике, могли бисмо препоручити да се у овом тренутку теорија Миланија и Кнежевића користи испод 15° нагиба, а теорија Леметр и Морбиделија изнад 17° (као и за мале планете група Хунгарија (Hungaria) и Фокеа (Phocaea)), док се област између ове две граничне вредности може сматрати прелазном и у њој се две теорије могу користити еквивалентно или алтернативно. За резонантне мале планете група Тројанаца и Хилде треба користити специјалне методе Миланија, односно Шубарта, а за мале планете унутар или у непосредној близини главних секуларних резонанци методу Морбиделија. На Слици 6, на којој је приказан највећи део прстена малих планета, сумирано је ово упутство – дати су положаји само за нумерисане мале планете и назначене су само три главне, линеарне секуларне резонанце. Ознаке на графику указују на теорију коју треба користити у датој области.



Слика 6. Сопствени елементи нумерисаних малих планета. Ознаке на графику односе се на теорије које се препоручују за коришћење у датим областима прстена (преузето из Knežević and Milani 1994).

Референце

Bien, R. and Schubart, J. 1987, Three characteristic parameters for the Trojan group of asteroids. *Astron. Astrophys.* **175**, 292–298.

Brouwer, D. 1951, Secular variations of the orbital elements of the principal planets. *Astron. J.* **56**, 9–32.

Brouwer, D. and Van Woerkom, A.J.J. 1950, The secular variations of the orbital elements of the principal planets. *Astron. Papers Amer. Ephem. Naut. Almanac* **13**, 81–107.

Henrard, J. 1990, A semi-numerical perturbation method for separable hamiltonian systems. *Celestial Mechanics* **49**, 43–67.

Hirayama, K. 1918, Groups of asteroids probably of common origin. *Astron. J.* **31**, 185–188.

Hirayama, K. 1923, Families of asteroids. *Japan J. Astron. Geophys.* **1**, 55–93.

Hirayama, K. 1928, Families of asteroids, second paper. *Japan J. Astron. Geophys.* **5**, 137–162.

Hori, G. 1966, Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *Publ. Astron. Soc. Japan* **18**, 287–296.

Knežević, Z. 1992a, An efficient algorithm for the analytic computation of planetary short-periodic perturbations. *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts (Sci. math.)* **104**(18), 39–46.

Knežević, Z. 1992b, Minor planet short–periodic perturbations: the indirect part of the disturbing function. *Celestial Mechanics* **55**, 387–404.

Knežević, Z. 1994a, Asteroid proper elements: past and present. In: *Seventy-Five Years of Hirayama Asteroid Families* (Y. Kozai, R.P. Binzel and T. Hirayama, Eds.), ASP Conference Series Vol. 63, San Francisco, pp. 129–139.

Knežević, Z. 1994b, Asteroid long-periodic perturbations: generic term representation of the determining function. *Planet. Space Sci.* *42*, 15–19.

Knežević, Z., and Milani, A. 1994, Asteroid proper elements: the big picture. In: *Asteroids, Comets, Meteors 1993* (A. Milani, M. Di Martino and A. Cellino, Eds.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 143–158.

Knežević, Z., Carpino, M., Farinella, P., Froeschlé, Ch., Froeschlé Cl., Gonczi, R., Jovanović, B., Paolicchi, P., and Zappalà, V. 1988, Asteroid short-periodic perturbations and the accuracy of mean orbital elements. *Astron. Astrophys.* **192**, 360–369.

Knežević, Z., Froeschlé, Ch., Lemaitre, A., Milani, A., and Morbidelli, A. 1994, Comparison of two theories for calculation of asteroid proper elements. *Astron. Astrophys.*, in press.

Kozai, Y. 1962, Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron. J.* **67**, 591–598.

Kozai, Y. 1979, The dynamical evolution of the Hirayama family. In: *Asteroids* (T. Gehrels, Ed.), Arizona Univ. Press, Tucson, pp. 334–358.

Lemaitre, A., and Morbidelli, A. 1994, Proper elements for highly inclined asteroidal orbits. *Celestial Mechanics* **60**, 29–56.

Milani, A. 1993, The Trojan asteroid belt: Proper elements, stability, chaos and families. *Celestial Mechanics* **57**, 59–94.

Milani, A. 1994, Proper elements and stable chaos. Proceedings of the NATO–ASI, Cortina, August 1993; in press.

Milani, A., and Knežević, Z. 1990, Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements. *Celestial Mechanics* **49**, 347–411.

Milani, A., and Knežević, Z. 1992, Asteroid proper elements and secular resonances. *Icarus* **98**, 211–232.

Milani, A., and Knežević, Z. 1994, Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid belt *Icarus* **107**, 219–254.

Milani., A., E. Bowell, Z. Knežević, A. Lemaitre, A. Morbidelli, and K. Muinonen 1994, A composite catalogue of asteroid proper elements. In: *Asteroids, Comets, Meteors 1993* (A. Milani, M. Di Martino and A. Cellino, Eds.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 467–470.

Morbidelli, A. 1993, Asteroid secular resonant proper elements. *Icarus* **105**, 48–66.

Morbidelli, A. and J. Henrard 1991a, Secular resonances in the asteroid belt: Theoretical perturbation approach and the problem of their location. *Celest. Mech.* **51**, 131–168.

Morbidelli, A. and J. Henrard 1991b, The main secular resonances ν_5, ν_6 and ν_{16} in the asteroid belt. *Celest. Mech.* **51**, 169–198.

Nobili, A.M., Milani, A. and Carpino, M. 1989, Fundamental frequencies and small divisors in the orbits of the outer planets. *Astron. Astrophys.* **210**, 313–336.

Schubart, J. 1982, Three characteristic parameters of orbits of Hilda-type asteroids. *Astron. Astrophys.* **114**, 200–204.

Schubart, J. 1991, Additional results on orbits of Hilda-type asteroids. *Astron. Astrophys.* **241**, 297–302.

Williams, J.G. 1969, Secular perturbations in the Solar System. Ph.D. Thesis, Univ. California Los Angeles.

Williams, J.G. 1979, Proper orbital elements and family memberships of the asteroids. In: *Asteroids* (T.Gehrels, Ed.), Univ.Arizona Press, Tucson, pp. 1040–1063.

Williams, J.G. 1989, Asteroid family identifications and proper elements. In: *Asteroids II* (R. P. Binzel, T.Gehrels, and M.S. Matthews, Eds.), Univ.Arizona Press, Tucson, pp. 1034–1072.

Williams, J.G., and Faulkner, J. 1981, The position of secular resonance surfaces. *Icarus* **46**, 390–399.

Williams, J.G., and Hierath, J.E. 1987, Palomar–Leiden minor planets: Proper elements, frequency distribution, belt boundaries, and family membership. *Icarus* **72**, 276–303.

Yuasa, M. 1973, Theory of secular perturbations of asteroids including terms of higher order and higher degree. *Publ. Astron. Soc. Japan* **25**, 399–445.

Zappalà, V., and Cellino, A., 1994. Asteroid families. In: *Asteroids, Comets, Meteors 1993* (A. Milani, M. Di Martino and A. Cellino, Eds.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 395–414.

Zappalà, V., Cellino, A., Farinella, P., and Milani, A. 1994, Asteroid families: II. Extension to unnumbered multi-opposition asteroids. *Astron. J.* **107**, 772–801.

PROPER ELEMENTS OF MINOR PLANETS

ZORAN KNEŽEVIĆ

Astronomical Observatory, Volgina 7, 11050 Belgrade

Abstract. Theories and methods for the determination of minor planets proper elements, that serve as parameters for identification of minor planet families, are reviewed. The four most important past contributions (Hirayama, Brouwer, Williams, Kozai), and the five contemporary ones (Milani and Knežević for low to moderate eccentricity/ inclination main belt objects, Lemaitre and Morbidelli for high e, i objects, Milani for Trojans, Schubart for Hildas, and Morbidelli for the secular resonant objects) are discussed and compared. The most significant recent improvements are described, in particular those regarding the analytic and the semianalytic solutions. Some common misunderstandings about proper elements, their definition and use, are briefly mentioned and clarified. The dynamical structure of the minor planet belt, as determined by the low order mean motion resonances and by linear and some nonlinear secular resonances, is considered from the point of view of the accuracy of computation of proper elements and of the reliability of identification of minor planet families.