ОСНОВНЕ ЧЕРТЕ

РАВНЕ И СФЕРИЧНЕ

ТРИГОНОМЕТРІЄ.

ЗА ПОТРЕБУ ВЫШИ УЧИЛИШТА КНЯЖ. СРБІЄ

ИЗРАДІО

Емиліанъ Іосимовићъ,

при воєной академіи К. С. основне и више математике, практичне геомеиріє и механике професоръ; школске комисіє и дружства србске словесности членъ.

прегледала и одобрила школска комисія.

цена є 12 гроша.

У БЕОГРАДУ.

У Књигопечатньи Княжества Србіє.

1854.

Wirke! Das ist das große Gesetz, in des Tempels Tafeln gehauen.
Klopstock.

ПРЕДГОВОРЪ.

Три важна узрока, 1.) безъ сумнѣ велика педагогична и практична користь математичнога знаня, — 2.) врло ограничено башъ таково знанѣ кодъ веће части наши учителя, особито по маньимъ школама, и 3.) готово коначна оскудица у цели сходнымъ те струке делама на нашемъ єзику: побудила су ме на израђенѣ математике за школску потребу, одъ првогъ корака у ньой па до найвыше кодъ насъ учеће се нѣне части, найсходніимъ, постепеномъ умномъ развіяню ученика саображаваюћимъ се начиномъ и обзиромъ на горе поменуту нѣну двояку цѣль.

Тимъ се я посломъ занимамъ већъ више година'; но како ми зато збогъ млоги други мои явны и приватны дужностій врло мало времена остає, то ће проћи безъ сумнѣ іошъ неколико година' докъ съ ньимъ сасвимъ и онако готовъ будемъ као што самь радъ.

Тога ради, т. є. да бы и дотле нешто принео къ олакшици и што већемъ успеху учеће се наше младежи у той науци, предузео самь израђивати према потреби, но сасвимъ у кратко све оне нѣне части, кое се кодъ насъ дояко іошъ никако нису училе и о коима іошъ манѣ на нашемъ єзизу каковы кньига има.

Томъ намеромъ дакле и тимъ начиномъ израђене су ове, одъ высокославногъ попечительства просвештеня за школску кньигу примлѣне „**основне черте равне и сферичне тригонометріє.**“

Све ово морао самь напоменути, да ме небы ко окривіо збогъ тога, што се появлюємъ найпре съ онаковымъ частима мога предмета, кое друге простіє предпоставляю, и при томъ зашто у таковой само краткоћи.

У осталомъ еда ли и у колико ово мое делце одговара изявлѣной намери съ ньимъ и потреби наши выши школа', за кое є написано, — као и є ли распорeђенѣ и излаганѣ нѣговы предмета педагогично и практично сходно: нека пресуде они, кои све то, па дакле и исту науку познаю болѣ него я. Критика у томъ обзиру и одъ таковы лица быт'ће ми тимъ милія, што бы се ньомъ осимъ мана, кое на свакій начинъ исправити валя, одкрило уєдно и све оно, што є оригинално, и кое ми се дакле у праву aукторску заслугу брояти има.

При томъ имамъ само іошъ приметити како самь я при израђеню истогъ овогъ делца осимъ већъ познате цели имао іошъ поглавито у виду и практичну потребу оны мои ученика, кои ће остати и после у техничной струци.

Та є ньіова потреба мени као инженіеру и уобште технику, смемъ рећи, врло добро позната. Поуздано надамъ се дакле, да самь съ ньимъ намиріо ако мож' да не и ону другу, а оно баръ ову єдну потребу, и да зато заслужуємъ ако иначе ничію, а оно за цело тій мои ученика признателность. Увиде ли они то поздніє, онда є мой трудъ више него у пола награђенъ.

Напослѣдку у смотреню єзика признаємъ искрено, да самь іошъ доста слабъ, но и сасвимъ наравно, єръ є была такова прилика, да самь и я као млоги други Срби осимъ часловца и псалтира све друго морао учити на туђемъ єзику. Погрешке дакле у томъ смотреню опраштайте да бы вамъ се опростиле.

На Иваньданъ 1854.

Іосимовићъ.

САДРЖАЙ.

Страна

УВОДЪ.

§. 1.

Изъ геометрiе знамо, да е свакiй триугалъ са три нѣгова основка — стране и угли —, међу коима е найманѣ една страна, подпуно определѣнъ.

Часть математике, коя учи изъ три у броввима задата основка триугла остале нѣгове основке и садржай **рачуномъ** определити, или краће рећи: триугалъ разрешити, зове се **тригонометрiя** или триугломерiе.

Ова наука дели се по положеню вопросногa триугла на **равну** и **сферичну** тригонометрiю. Равна тригонометрiя занима се съ триуглима у равнини, а сферична съ триуглима на поврwiю сфере.

§. 2.

Тригонометрiя по горнѣму основана е на строгой међусобной зависимости углова и страна триугла. Но одношенѣ исты нѣговы основака, збогъ ньiове разнородности, неможе се определити непосредствено само броемъ; зато тригонометрiя, да бы свою цѣль постигла, мора узети у помоћь неке одъ углова зависне, а странама сразмерне праве, кое називамо **тригонометричнымъ**, или болѣ **гонiометричнымъ** — угломернымъ — пругама.

Нѣнъ задатакъ састои се дакле найпре у испытиваню свойства гоніометричны пруга и ньіовомъ разномъ определиваню, а потомъ у употребленю исты пруга на разрешенѣ правостраны и сферичны триуглова. Тога ради делимо целу науку на три главне части или кньиге. Прва сматра гоніометричне пруге, збогъ чега називамо ю **гоніометріомъ**; оне друге две пакъ употреблюю докученя прве на разрешенѣ правостраны и сферичны триуглова, и образую дакле равну и сферичну тригонометрію у тешнѣмъ или правомъ смислу.

Гоніометрично разрешенѣ полигона сачинява за себе четврту часть тригонометріе подъ именомъ **полигонометрія**, коя се у новіе доба подигла до особите науке, но о коіой у овоме дѣлу, као о предмету изванъ нѣговы граница лежеђемъ, неможе быти никаковогъ далѣгъ спомена.

§. 3.

Што се найпосле тиче начина у тригонометричнымъ доводима и доказима, то се ови могу извести или геометричнымъ или чисто аналитичнымъ сматранѣмъ. Последньій се начинъ у наше доба, збогъ савршене обштости таковы доказа, веђма употреблюе; но мы ђемо се при свемъ томъ и онымъ првымъ служити свуда, гди се съ ньимъ брже и лакше до цѣли долази.

КНЬИГА ПРВА.

ГОНІОМЕТРІЯ.

А.) Просте или основне функціе.

I. *Основна понятія.*

§. 4.

Ако изъ врха C некогъ угла $ACM = \varphi$ (слика 1.) напишемо мећу нѣгове краке съ произвольнымъ полупречникомъ $AC = CM = r$ лукъ AM, и спустимо потомъ изъ єдногъ края M истога лука на супротный полупречникъ AC управну MD, у другомъ пакъ лука краю A подигнемо на истый полупречникъ управну — дирку — AT до пресецаня съ продуженымъ другимъ полупречникомъ MC у точки T: то се управна MD зове **синусъ** — *sinus* —; часть полупречника AC одъ края A до синуса, т. є. одстояніе AD **попречный синусъ** — *sinus versus* —; часть AT геометричне дирке у A **тангента** — *tangens* —, а продуженый полупречникъ MC до пресецаня съ истомъ диркомъ, т. є. одстояніе CT **секанта** — *secans* — лука AM или угла φ, за полупречникъ r. сл. 1.

Изъ узрока што се ове четири пруге, као што ђемо поздніе увидити, при найманьой премени дотичнога угла или нѣгова лука и саме съ места меняю тако, да ньіова величина свагда само одъ нѣга завысы: наричу се іошъ све четири обштымъ именомъ тригонометричне — болѣ бы было гоніометричне — функціе или дѣйства тичуѣегъ се угла или лука, и означую се слѣдуюѣимъ скраѣенымъ начиномъ.

$$MD = sin.\,\varphi,\ AD = sin.\,v.\,\varphi,\ AT = tang.\,\varphi,$$
$$CT = sec.\,\varphi$$

§. 5.

сл. 1. Продужуюѣи на ниже лукъ AM и нѣговъ синусъ MD до меѣусобногъ пресецаня у M_1 : быт'ѣе лукъ $AM_1 = AM$ т. е $\angle ACM = \angle ACM_1 = \varphi$, и далке $\angle MCM_1 = 2\varphi$, а $MD = DM_1 = \frac{1}{2} MM_1$. По томе

Синусъ некогъ угла ніе ништа друго, но полутетивка удвоеногъ истогъ угла.

Старіи математици употребљавали су у тригономе. тріи тетивке место синуса, и они, кои су се при томъ служили латинскимъ езикомъ, назвали су іи *inscriptae*, а ньине половине *semissis inscriptae*. Скраѣуюѣи ово име у рачуну найпре на *s. ins.*, а позднів на *sin.*, постало е по мнѣню неки ауктора име *sinus*. Други на противъ веле, и то е вѣроватніе, да е то име само преводъ, за дотичву функцію одъ Арапа алегорично употребляване речи џанбъ, коя као и у латинскомъ значи недра.

§. 6.

Допуна некогъ угла до правога, т. е. допуна нѣгове мере до едне четврти круга, назива се нѣговымъ **комплементомъ**; нѣгова пакъ допуна до два права угла или по круга, **суплементомъ**. Комплементъ дакле некогъ угла φ ніе ништа друго но нѣгова разлика одъ едногъ правогъ угла, или $90^0 - \varphi$, а суплементъ **разлика** одъ два права угла, или $180^0 - \varphi$. Обе те допуне быт'ѣе, као што е лако

увидити, одрицателне, ако е угалъ φ односно веѣій одъ едногъ или одъ два права угла.

§. 7.

Ако е у сл. 2. $\angle \varphi + \psi = 90^0$, у сл. пакъ 3. $\angle \varphi - \psi = 90^0$: то е по предходеѣему угалъ ψ у оба случая комплементъ угла φ.

Функціе комплементногъ угла ψ називаю се **кофункціяма** или **садѣйствама** угла φ. По на особъ е ME **косинусъ** — *cosinus* —, BE **попречный косинусъ** — *cosinus versus* —, BG **котангента** — *cotangens* —, а CG **косеканта** — *cosecans* — угла φ за полупречникъ $AC = r$, кое слѣдуюѣимъ начиномъ означуемо:

$$ME = cos.\,\varphi,\ BE = cos.\,v.\,\varphi,\ BG = cot.\,\varphi,\ CG = cosec.\,\varphi.$$

По себи увиђа се, да е обратно $\angle \varphi$ комплементъ угла ψ, и да су нѣгове функціе кофункціе угла ψ.

Додатци. 1.) Изъ саме слике види се, да е $ME = DC$; зато се подъ косинусомъ некогъ угла φ обично разумева одстояніе DC, т. е. одстояніе средишта C одъ синуса. Мы ѣемо одъ яко такођеръ то одстояніе називати косинусомъ. — 2.) У §. 4. описане четири функціе угла и сада споменуте нѣгове кофункціе, именую се купно просте или **основне функціе**, за разлику одъ **сложены'**, съ коима ѣемо се упознати у поздніимъ §§.

II. Свойства основны функція.

§. 8.

Нека су A_1B_1 и A_2B_2 два еданъ на другій управна пречника, а A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3, ... A_1M_8 у разне четврти круга допируѣи луци. сл.

Построивши по §§. 4. и 6. све функціе овы лукова примећавамо, да е ньіово положенѣ, изузимаюћи оно попречны синуса, и косинуса кои се пружаю само на едну едину страну, — двояко и едно другомъ противно, тако: да су по томе, сматраюћи функціе у првой четврти као положителне,

синуси и косеканте у 1. и 2. четврти положителне, а у 3. и 4. одрицателне;

косинуси и секанте у 1. и 4. четврти положителне, у 2. пакъ и 3. одрицателне;

тангенте и котангенте у 1. и 3. четврти положителне, а у 2. и 4. одрицателне; найпосле

попречни синуси и косинуси у свима четвртима положителни.

Одрицателне секанте и косеканте есу оне, при коима се дотичный полупречникъ, ради пресецаня съ тангентомъ или котангентомъ, продужуе преко средишта назадъ.

Додатакъ. Функціе лукова веће одъ едногъ круга, лукова т. е. кои допиру у 5., 6., 7., и т. д. четврть, слажу се по положеню, а као што ћемо мало касніе видити, и величиномъ односно съ онима у 1., 2., 3. и 4. четврти.

§. 9.

Што се тиче величине функція, то находимо простымъ сматранѣмъ слике обзиромъ на предходећій §.

1.) Умаляванѣмъ лука A_1M_1 умаляваю се такођеръ и нѣгова оба синуса, тангента и секанта

расту на противъ оба косинуса, котангента и косеканта тако, да е

за $A_1M_1 = \alpha = 0$:

$sin\, 0 = sin.\, v.\, 0 = tang.\, 0 = 0$,

$cos\, 0 = cos.\, v.\, 0 = sec.\, 0 = r$, а

$cot.\, 0 = cosec = \infty$

2.) Увећаванѣмъ лука A_1M_1 у првой четврти увећаваю се оба нѣгова синуса, тангента и секанта, а умаляваю се на противъ оба косинуса, котангента и косеканта, тако, да е

за $A_1M_1 = A_1A_2 = 90^0$:

$sin\; 90^0 = sin.\, v.\, 90^0 = cosec.\, 90^0 = r$,

$cos\; 90^0 = cos.\, v.\, 90^0 = cot.\, 90^0 = 0$, а

$tang\, 90^0 = sec.\, 90^0 = \infty$

3.) У 2. четврти умаляваю се синусъ, тангента и секанта, расту на противъ попречный синусъ, оба косинуса, котангента и косеканта тако, да е

за $A_1M_1 = A_1A_2B_1 = 180^0 = 2\; R$:

$sin.\; 180^0 = tang.\, 180^0 = 0$,

$sin.\; v.\; 180^0 = 2r$,

$cos.\; 180^0 = sec.\, 180^0 = -r$,

$cot\; 180^0 = -\infty$,

$cosec.\, 180^0 = \infty$

4.) У 3. четврти расту синусъ, попречный косинусъ, тангента и секанта, а умаляваю се попречный синусъ, косинусъ, котангента и косеканта тако, да е

за $A_1M_1 = A_1A_2B_1B_2 = 270^0 = 3\, R$:

$sin.\; 270^0 = cosec\; 270^0 = r$,

$sin.\; v.\; 270 = r$,

$cos.\, 270^0 = cot.\, 270^0 = 0$,

$cos.\; v.\; 270^0 = 2r$,

$tang.\; 270^0 = \infty$,

$sec.\; 270^0 = -\infty$

5.) **У 4.** найпосле четврти умаляваю се оба синуса, попречный косинусъ, тангента и секанта, а расту косинусъ, котангента и косеканта, тако да є

$$\text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1B_2A_1 = 360_0 = 4\,R \quad :$$
$$sin.\,360^0 = sin.\,u.\;360_0 = tang.\,360^0 = 0\,,$$
$$cos.\,360^0 = cos.\,v.\;360^0 = sec.\,360^0 = r\,,$$
$$cot.\,360^0 = cosec.\;360^0 = -\,\infty$$

Додатакъ. Сматраюћій функціє лука кои се найпре одъ нулле, а потомъ одъ 90° или четврти круга єдва разликуюе, увиђамо: да се у првомъ случаю синусъ и тангента одъ самога лука, а косинусъ и секанта одъ полупречника, у другомъ пакъ случаю синусъ и косеканта одъ полупречника, а косинусъ и котангента одъ нулле **приметно** ничимъ неразликую. Найпосле да су у првомъ случаю котангента и косеканта, а у другомъ тангента и секанта безъ сваке сумнѣ безконачно велике.

§. 10.

Докученя предходећа два §§. могу се сложити у слѣдуюћу просту, почетнику веома полезну таблицу, у коіой *рс* показуе растенѣ, а *ум.* умалянанѣ функція.

	∠ одъ 0°	у I. четвр.	∠ одъ 90°	у II. четвр.	∠ одъ 180°	у III. четвр.	∠ одъ 270°	у IV. четвр.	∠ одъ 360°
синусъ	0	+, рс.	r	+, ум.	0	—, рс.	— r	—, ум.	0
косинусъ	r	+, ум.	0	—, рс.	— r	—, ум.	0	+, рс.	r
попр. синусъ	0	+, рс.	r	+, рс.	2r	+, ум.	r	+, ум.	0
попр. косин.	r	+, ум.	0	+, рс.	r	+, рс.	2r	+, ум.	r
тангента	0	+, рс.	∞	—, ум.	0	+, рс.	∞	—, ум.	0
котангента	∞	+, ум.	0	—, рс.	—∞	+, ум.	0	—, рс.	—∞
секанта	r	+, рс.	∞	—, ум.	— r	—, рс.	—∞	+, ум.	r
косеканта	∞	+, ум.	r	+, рс.	∞	—, ум.	— r	—, рс.	—∞

Изъ ове таблице изводимо іошъ нарочито слѣдуюће две важне приметбе:

1.) Синусъ, попречный синусъ, тангента и секанта у првой четврти расту, кофункціє на противъ умаляваю се: ако углалъ расте, и обратно.

2.) Немотрећи на знакъ,

границе синуса и косинуса єсу 0 — нулла — и полупречникъ,

„ попречногъ синуса и попр. косинуса 0 и пречникъ,

„ тангенте и котангенте 0 и безконачно,

найпосле границе секанте и косеканте полупречникъ и безконачно.

Попречный синусъ и косинусъ употреблюю се одъ свію функція найманѣ, зато іи мы одяко више нећемо сматрати.

§. 11.

Найвећій є синусъ, као што смо видили, раванъ полупречнику. Овай синусъ назива се целымъ синусомъ или *sinus totus* и узима се обично, ради простієгъ рачуна, за єдиницу свію осталы функція.

Мы ћемо одъ сада при свима нашимъ дальимъ испытиванями такођеръ єдиницу сматрати као полупречникъ, докле годъ не условимо другій. Но да бы функціє за полупречникъ 1 разликовали одъ єдноимены функція за другій некій полупречникъ: то ће мо оне у будуће свагда малимъ, а ове великимъ писменима започиняти.

За полупречникъ 1 периферія круга равна є 2π, пола круга $=\pi$, а четврть круга $=\frac{1}{2}\pi$. Тога ради писат'ћемо одъ яко место четврти круга, по круга и цела круга краће $\frac{1}{2}\pi$, π и 2π.

§. 12.

Ако є у сл. 1. по величини лукъ $AM = AM_1$ т. є. $\angle ACM = \angle ACM_1 = \varphi$, и точка A ньіовъ заєднички почетакъ: то су исти луци по положеню єданъ другомъ противни, и зато, сматраюћи горнѣ положенѣ као положително, лукъ є AM положителанъ, а лукъ AM_1 одрицателанъ, или — што є све идно —, $\angle ACM = + \varphi$, а $\angle ACM_1 = - \varphi$. сл.

Да су єдноимене функціє оба угла по величини єднаке, увиђавно є по себи, и мы дакле обзиромъ на §. 8. налазимо

$$\sin.(-\varphi) = -\sin.\varphi \qquad \tan g.(-\varphi) = -\tan g.\varphi$$
$$\cos.(-\varphi) = \cos.\varphi \qquad \cot.(-\varphi) = -\cot.\varphi$$
$$\sec.(-\varphi) = \sec.\varphi$$
$$\mathrm{cosec}.(-\varphi) = -\mathrm{cosec}.\varphi$$

кои изрази важе за сваку безъ разлике величину угла φ.

§. 13.

Ако су (сл. 5.) A_1B_1 и A_2B_2 два єданъ на другій управна пречника, а по величини $\angle A_1CM_1 = A_2CM_2 = B_1CM_3 = B_2CM_4 = \varphi$: то є, изъ лако увиђавны — геометричны — узрока, по величини $M_2N_2 = N_1C$, $M_3N_3 = M_1N_1$, $M_4N_4 = N_1C$, $M_5N_5 = M_1N_1$; обзиромъ дакле на §. 8. и 11. сл.

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = \cos\varphi \qquad \sin(\tfrac{3}{2}\pi + \varphi) = -\cos\varphi$$
$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi \qquad \sin(2\pi + \varphi) = \sin\varphi$$

Поставляюћи у ове изразе $(-\varphi)$ место φ слѣдує по §. 12.

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \cos\varphi \qquad \sin(\tfrac{3}{2}\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$
$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi \qquad \sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$$

Овымъ истымъ начиномъ и остале функціє сматраюћи долазимо найпосле до слѣдуюћи общты докученя:

	Синусъ	Косинусъ	Тангента	Котангента	Секанта	Косеканта
одъ $(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi) =$	$\cos\varphi$	$\mp \sin\varphi$	$\mp \cot\varphi$	$\mp \tan\varphi$	$\mp \operatorname{cosec}\varphi$	$\sec\varphi$
одъ $(\pi \pm \varphi) =$	$\mp \sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm \tan\varphi$	$\pm \cot\varphi$	$-\sec\varphi$	$\mp \operatorname{cosec}\varphi$
одъ $(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi) =$	$-\cos\varphi$	$\pm \sin\varphi$	$\mp \cot\varphi$	$\mp \tan\varphi$	$\pm \operatorname{cosec}\varphi$	$-\sec\varphi$
одъ $(2\pi \pm \varphi) =$	$\pm \sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\pm \tan\varphi$	$\pm \cot\varphi$	$\sec\varphi$	$\pm \operatorname{cosec}\varphi$

Функціє углова веће или мање одъ 4, 5, 6, 7, 8 или више правы, стое према функціяма основногъ угла φ дотично у истомъ одношеню, као функціє у овой таблици назначены углова.

III. Међусобно одношенѣ функція.

§. 14.

Построивши функціє некогъ угла $ACM = \varphi$ (сл. 2.) находимо сл. 2.

а.) изъ триугла MCD

$$\overline{MC}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{DC}^2 \text{, т. е.}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 1 = & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \\ \text{и одтуда} \quad \sin\varphi = & \sqrt{(1-\cos^2\varphi)} \\ \cos\varphi = & \sqrt{(1-\sin^2\varphi)} \end{array}\right\} \ldots .1.$$

б.) изъ триугла ACF

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 \text{, или}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \sec^2\varphi = & 1 + \tan^2\varphi \\ \text{дакле} \quad \sec\varphi = & \sqrt{(1+\tan^2\varphi)} \\ \tan\varphi = & \sqrt{(\sec^2\varphi - 1)} \end{array}\right\} \ldots 2.$$

в.) изъ триугла BCG

$$\overline{CG}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BG}^2 \text{, т. е.}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \operatorname{cosec}^2\varphi = & 1 + \cot^2\varphi \text{, и} \\ \text{зато} \quad \operatorname{cosec}\varphi = & \sqrt{(1+\cot^2\varphi)} \\ \cot\varphi = & \sqrt{(\operatorname{cosec}^2\varphi - 1)} \end{array}\right\} \ldots .3.$$

§. 15.

Збогъ подобія триуглова ACF и DCM (иста сл.) имамо далѣ

$AF : AC = DM : DC$ и
$CF : AC = CM : DC$, то ће рећи
$tang\,\varphi : 1 = sin\,\varphi : cos\,\varphi$, а
$sec\,\varphi : 1 = 1 : cos\,\varphi$, и одтуда

$$tang\,\varphi = \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} \;\ldots\ldots\; 4.$$

$$\left.\begin{aligned} sec\,\varphi &= \frac{1}{cos\,\varphi} \\ \text{обратно}\quad cos\,\varphi &= \frac{1}{sec\,\varphi} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; 5.$$

Подобіе пакъ триуглова BCG и ECM подае
$BG : BC = EM : EC$,
$GC : BC = MC : EC$, или
збогъ $EM = CD$, а $EC = MD$:
$BG : BC = CD : MD$,
$GC : BC = MC : MD$, то ће рећи
$cot\,\varphi : 1 = cos\,\varphi : sin\,\varphi$, а
$cosec\,\varphi : 1 = 1 : sin\,\varphi$, дакле

$$cot\,\varphi = \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi} \;\ldots\ldots\; 6.$$

$$\left.\begin{aligned} cosec\,\varphi &= \frac{1}{sin\,\varphi} \\ \text{обратно}\quad sin\,\varphi &= \frac{1}{cosec.\,\varphi} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; 7.$$

§. 16.

Будући є $\frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} = 1 : \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$, то є по горнѣму (образацъ 4.) $tang\,\varphi = 1 : \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$, но по образцу є 6. $\frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi} = cot\,\varphi$, дакле є

$$\left.\begin{aligned} tang\,\varphi &= \frac{1}{cot\,\varphi} \\ \text{и обратно}\quad cot\,\varphi &= \frac{1}{tang\,\varphi} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; 8.$$

§. 17.

Замењуюћи именителѣ у изразима подъ 5., 7., и 8. съ ньіовымъ вредностима изъ 1., 2., и 3., добыямо редомъ

$$sec\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - sin^2\,\varphi)}} \qquad sin\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + cot^2\,\varphi)}}$$

$$cos\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + tang^2\,\varphi)}} \qquad tang\varphi = \frac{1}{\sqrt{(cosec^2\,\varphi - 1)}}$$

$$cosec\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - cos^2\,\varphi)}} \qquad cot\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(sec^2\,\varphi - 2)}}$$

Поставляюћи обратно за функціе у именительима овы разломака ньіове вредности изъ образаца подъ 5., 7. и 8. налазимо

$$sec\,\varphi = \frac{cosec\,\varphi}{\sqrt{(cosec^2\,\varphi - 1)}} \qquad sin\,\varphi = \frac{tang\,\varphi}{\sqrt{(1 + tang^2\,\varphi)}}$$

$$cos\,\varphi = \frac{cot\,\varphi}{\sqrt{(1 + cot^2\,\varphi)}} \qquad tang\,\varphi = \frac{sin\,\varphi}{\sqrt{(1 - sin^2\,\varphi)}}$$

$$cosec\,\varphi = \frac{sec\,\varphi}{\sqrt{(sec^2\,\varphi - 1)}} \qquad cot\,\varphi = \frac{cos\,\varphi}{\sqrt{(1 - cos^2\,\varphi)}}$$

Найпосле ове разломке преокретаюћи имамо обзиромъ на образце 5., 7. и 8.

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(cosec^2\varphi - 1)}}{cosec\,\varphi} \qquad cosec\,\varphi = \frac{\sqrt{(1 + tang^2\varphi)}}{tang\,\varphi}$$

$$sec\,\varphi = \frac{\sqrt{(1 + cos^2\varphi)}}{cot\,\varphi} \qquad cot\,\varphi = \frac{\sqrt{(1 - sin^2\varphi)}}{sin\,\varphi}$$

$$sin\,\varphi = \frac{\sqrt{(sec^2\varphi - 1)}}{sec\,\varphi} \qquad tang\varphi = \frac{\sqrt{(1 - cos^2\varphi)}}{cos\,\varphi}$$

§. 18.

Ова докученя показую, да се тригонометричне функціе геометричнымъ и аналитичнымъ путемъ една чрезъ другу, и све чрезъ єдну исту изразити даю, кое є, као што ћемо касніе увидити, одъ врло велике ползе. Сватаюћи иста докученя ради лакшегъ прегледа и веће удобности при поздніємъ употребленю, сва у скупъ, имамо

изразъ	синусомъ	косинусомъ	тангентомъ	котангент.	секантомъ	косекант.
синуса	sin	$\sqrt{(1-cos^2)}$	$\frac{tang}{\sqrt{(1-tang^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+cot^2)}}$	$\frac{\sqrt{(sec^2-1)}}{sec}$	$\frac{1}{cosec}$
косинуса	$\sqrt{(1-sin^2)}$	cos	$\frac{1}{\sqrt{(1+tang^2)}}$	$\frac{cot}{\sqrt{(1+cot^2)}}$	$\frac{1}{sec}$	$\frac{\sqrt{(cosec^2-1)}}{cosec}$
тангенте	$\frac{sin}{\sqrt{(1-sin^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-cos^2)}}{cos}$	$tang$	$\frac{1}{cotang}$	$\sqrt{(sec^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(cosec^2-1)}}$
котангенте	$\frac{\sqrt{(1-sin^2)}}{sin}$	$\frac{cos}{\sqrt{(1-cos^2)}}$	$\frac{1}{tang}$	cot	$\frac{1}{\sqrt{(sec^2-1)}}$	$\sqrt{(cosec^2-1)}$
секанте	$\frac{1}{\sqrt{(1-sin^2)}}$	$\frac{1}{cos}$	$\sqrt{(1+tang^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+cot^2)}}{cot}$	sec	$\frac{cosec}{\sqrt{(cosec^2-1)}}$
косеканте	$\frac{1}{sin}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-cos^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1+tang^2)}}{tang}$	$\sqrt{(1+cot^2)}$	$\frac{sec}{\sqrt{(sec^2-1)}}$	$cosec$

Б.) Сложене функціе.

I. Функціе сбира и разлике два угла.

§. 19.

сл. 6. Ако е (сл. 6.) лукъ $AM = \alpha$, лукъ пакъ $MN = \beta$: то е лукъ $AN = \alpha + \beta$ и по §. 4. $MP = \sin\alpha$, $CP = \cos\alpha$, $NQ = \sin\beta$, $CQ = \cos\beta$, $NR = \sin(\alpha+\beta)$, а $CR = \cos(\alpha+\beta)$.

Спустимо $QS \perp AC$, и $QT \perp NR$; бытѣе

1.) триугалъ $CMP \sim \triangle CQS$, и зато

$CM : MP = CQ : QS$, а

$CM : CP = CQ : CS$, или по горнѣму и збогъ $QS = TR$:

$1 : \sin\alpha = \cos\beta : TR$,

$1 : \cos\alpha = \cos\beta : CS$; дакле

$TR = \sin\alpha\cos\beta$ .... (а.

$CS = \cos\alpha\cos\beta$ ...... (б.

2.) $\triangle CMP \sim \triangle NQT$, зато

$CM : MP = NQ : QT$, а

$CM : CP = NQ : NT$, или збогъ $QT = SR$:

$1 : \sin\alpha = \sin\beta : SR$

$1 : \cos\alpha = \sin\beta : NT$, и одтуда

$SR = \sin\alpha\sin\beta$ .... (в.

$NT = \cos\alpha\sin\beta$ .... (г.

Равности подъ (а. и (г. сабираюћи, а равность (в. одъ (б. одузимаюћи добыямо

$$TR + NT = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \text{ и}$$
$$CS - SR = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

будуђи е пакъ $TR + NT = NR = \sin(\alpha+\beta)$, а $CS - SR = CR = \cos(\alpha+\beta)$: то е дакле

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ (\text{I.}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ (\text{II.}$$

§. 20.

Подобнымъ начиномъ могли бы изнаћи и изразе синуса и косинуса разлике два угла. Но ове функціе мы садъ добыямо млого простіе аналитичнымъ путемъ поставляюћи т. е. у прећашнѣ $(-\beta)$ место β, кое учинивши имамо

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \text{ и}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

или обзиромъ на §. 12., т. е. збогъ $\cos(-\beta) = \cos\beta$, а $\sin(-\beta) = -\sin\beta$:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ (\text{III.}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ (\text{IV.}$$

§. 21.

Ова четири образца синуса и косинуса сбира и разлике два угла важе не само за два оштра угла, као што смо у употреблѣной за ньіово довођенѣ слики предпоставили, но у обште за ма какова два угла α и β, о чему се лако уверавамо слѣдуюћимъ начиномъ.

Поставимо да е $\angle\alpha$ као и пре оштаръ, угалъ пакъ β тупъ, н. п. $\beta = (90^\circ + \chi) < 180^\circ$; бытѣе по томе

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha + 90^\circ + \chi)$$
$$= \sin\left[\frac{\pi}{2} + (\alpha+\chi)\right] \ \ldots\ (\S.\ 11.)$$
$$= \cos(\alpha+\chi) \ \ldots\ (\S.\ 13.),$$

и тимъ истымъ начиномъ

$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\chi).$$

Но угли су α и χ по предпоставлѣню оштри, дакле є односно по образцима II. и I.

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\chi) = \cos\alpha\cos\chi - \sin\alpha\sin\chi\,,$$ а

$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\chi) = -\sin\alpha\cos\chi - \cos\alpha\sin\chi$$

Будући є найпосле, такођеръ по предпоставлѣню, $\angle\chi = \beta - 90^0 = \beta - \frac{\pi}{2} = -(\frac{\pi}{2} - \beta)$, и

дакле по §. 13.

$$\sin\chi = \sin\left[-(\frac{\pi}{2} - \beta)\right] = -\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = -\cos\beta,$$

а $\cos\chi = \cos\left[-(\frac{\pi}{2} - \beta)\right] = \sin\beta$: то є, ове вредности у предходећа уравненія поставляюћи и ова потомъ уређуюћи,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ за єданъ оштаръ и єдавъ тупъ угалъ, као годъ за два оштра.

Поставляюћи садъ да є осимъ угла β іошъ и $\angle\,\alpha$ тупъ и н. п. $= (180 + y) < 270^0$, налазимо истымъ начиномъ

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^0 + y + 90^0 + \chi) =$$
$$= \sin\left[270^0 + (\chi + y)\right] = -\cos(\chi + y)$$
$$= -\cos\chi\cos y + \sin\chi\sin y$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left[270^0 + (\chi + y)\right] = \sin(\chi + y)$$
$= \sin\chi\cos y + \cos\chi\sin y$, или, збогъ $\chi = \beta - 90^0 = -(90^0 - \beta), y = \alpha - 180^0 = -(180^0 - \alpha)$ и дакле $\sin\chi = -\cos\beta, \cos\chi = \sin\beta, \sin y = = -\sin(180^0 - \alpha) = -\sin\alpha, \cos y = \cos(180^0 - \alpha) = = -\cos\alpha$: —

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

и за два условлѣно тупа угла.

До овы исты образаца долазимо, као што сада већь лако увидити можемо, давајући углима α и β и ма какове друге вредности тако, да по томе ньіова, па дакле и изъ ньи изведены образаца општность, никаковой выше сумньи неподлежи

§. 22.

По 15. є §. $\tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$, или, место овы функція ньіове вредности изъ §§. 19. и 20. узимајући

$$\tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

Делећи броителя и именителя овогъ разломка єданпутъ съ $\cos\alpha\cos\beta$, другій путъ пакъ съ $\sin\alpha\sin\beta$, добыямо

$$\left.\begin{aligned} \tang(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tang\alpha \pm \tang\beta}{1 \mp \tang\alpha\tang\beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta \mp 1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\text{V.}$$

ове пакъ разломке преокретајући слѣдує (по § 16.)

$$\left.\begin{aligned} \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{1 \mp \tang\alpha\tang\beta}{\tang\alpha \pm \tang\beta} \\ \tang(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\text{VI.}$$

Остале функціє сбира и разлике два угла врло се редко употреблюю, зато се съ ньіовымъ опредѣльиванѣмъ нећемо задржавати, но опредѣлюю́ћи іошъ еданъ за рачунанѣ функція потребанъ образацъ, приступитћемо одма другимъ сложенымъ функціяма.

Поставляюћи у прво одъ горньи уравненія подъ V. $\angle\ \alpha = 45^0$, добыямо

$$tang\,(45^0 \pm \beta) = \frac{tang\ 45^0 \pm tang\ \beta}{1 \mp tang\ 45^0\ tang\ \beta},$$ будући е пакъ — изъ лако увиђавны, геометричны узрока — $tang\ 45^0 = 1$, то е

$$tang\,(45^0 \pm \beta) = \frac{1 \pm tang\ \beta}{1 \mp tang\ \beta} \ .\ .\ .\ (VII$$

II. *Сбиръ и разлика едноимены функція два угла.*

§. 23.

Сабираюћи и одузимаюћи уравненія, I. и III. а II. и IV. добыямо

$$\left.\begin{aligned} sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta) &= 2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta, \\ sin\,(\alpha+\beta) - sin\,(\alpha-\beta) &= 2\ cos\ \alpha\ sin\ \beta, \\ cos\,(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta) &= 2\ cos\ \alpha\ cos\ \beta, \\ cos\,(\alpha+\beta) - cos\,(\alpha-\beta) &= -\,sin\ \alpha\ sin\ \beta; \end{aligned}\right\}.\ (v$$

поставляюћи пакъ у ове изразе $\alpha + \beta = \varphi$, а $\alpha - \beta = \psi$, дакле $\alpha = \frac{1}{2}\,(\varphi + \psi)$, $\beta = \frac{1}{2}\,(\varphi - \psi)$, слѣдуе

$$\left.\begin{aligned} sin\ \varphi + sin\ \psi &= 2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi+\psi)\ cos\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi-\psi) \\ sin\ \varphi - sin\ \psi &= 2\,cos\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi+\psi)\ sin\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi-\psi) \\ cos\ \varphi + cos\ \psi &= 2\,cos\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi+\psi)\ cos\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi-\psi) \\ cos\ \varphi - cos\ \psi &= 2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi+\psi)\ sin\ \tfrac{1}{2}\,(\psi-\varphi) \end{aligned}\right\}.\,.\ (1.$$

§. 24.

Обзиромъ на §. 15. (обр. 4. и 6.) имамо

$$tang\,\varphi \pm tang\ \psi = \frac{sin\ \varphi}{cos\ \varphi} \pm \frac{sin\ \psi}{cos\ \psi},$$ а

$$cot\ \varphi \pm cot\ \psi = \frac{cos\ \varphi}{sin\ \varphi} \pm \frac{cos\ \psi}{sin\ \psi}\ ,$$ сабиранѣ пакъ у другимъ частима свршуюћи

$$tang\ \varphi \pm tang\ \psi = \frac{sin\ \varphi\ cos\ \psi \pm cos\ \varphi\ sin\ \psi}{cos\ \varphi\ cos\ \psi}$$ и

$$cot\ \varphi \pm cot\ \psi = \frac{sin\ \psi\ cos\ \varphi \pm cos\ \psi\ sin\ \varphi}{sin\ \varphi\ sin\ \psi},$$ т. е.

$$\left.\begin{aligned} tang\ \varphi \pm tang\ \psi &= \frac{sin\ (\varphi \pm \psi)}{cos\ \varphi\ cos\ \psi} \\ \text{а}\quad cot\ \varphi \pm cot\ \psi &= \frac{sin\ (\psi \pm \varphi)}{sin\ \varphi\ sin\ \psi)} \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (2.$$

§. 25.

Деобомъ сваке равности подъ (1. — §. 23. — чрезъ остале три, добыямо дванаестъ врло потребны образаца, одъ кои̓ наводимо само оне, кои постаю деобомъ прве чрезъ оне друге, оставляюћи налазенѣ осталы почетнику на упражненіе.

$$\frac{sin\ \varphi + sin\ \psi}{sin\ \varphi - sin\ \psi} = tang\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi)\ cot\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi)$$

или место котангенте узимаюћи по §. 16. тангенту

$$\frac{sin\ \varphi + sin\ \psi}{sin\ \varphi - sin\ \psi} = \frac{tang\ \frac{1}{2}\ (\varphi + \psi)}{tang\ \frac{1}{2}\ (\varphi - \psi)}\ \ .\ .\ .\ (3.$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \quad .\ .\ .\ .\ (4.$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\sin\frac{1}{2}\ (\psi - \varphi)}$$

$$= \frac{\cos\left[-\frac{1}{2}(\psi - \varphi)\right]}{\sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}$$

или збогъ $\cos\left[-\frac{1}{2}(\psi - \varphi)\right] = \cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = \cot\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi) \quad .\ .\ .\ .\ (5.$$

У ова три §§. определѣни образци єсу у практики одъ найвеће ползе по томе, што се ньіовомъ помоћи логаритми и онде могу употребити, гди то иначе ніє могуће. Мы ћемо се о томе довольно уверити при разрешеню труиглова.

III. *Функціє двогубогъ угла и полуугла.*

§. 26.

Поставляюћи у образце синуса, косинуса, тангенте и котангенте сбира два угла (§. 19. и 22.) $\angle \beta = \alpha$, слѣдуе

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad .\ .\ .\ (2.$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha} \\ &= \frac{2\cot\alpha}{\cot^2\alpha - 1} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3.$$

$$\left.\begin{aligned} \cot 2\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}{2\operatorname{tang}\alpha} \\ &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4.$$

У другомъ пакъ одъ овы уравненія найпре косинусъ синусомъ а потомъ обратно овай онымъ заменююћи добыямо

$$\left.\begin{aligned} &\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \text{и}\quad &\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5.$$

два образца, у коима є, као што видимо, косинусъ двогубогъ угла израженъ єданпутъ самымъ синусомъ, а другій путъ самымъ косинусомъ простога угла.

§. 27.

Ореде.лююћи изъ предходећа два уравненія $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, и нађене ньіове вредности потомъ деобомъ саюжаваюћи, добыямо редомъ

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \\ \cos\alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (6.$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \\ \cot\alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (7.$$

Разрешаваюћи пакъ прво уравненіє подъ (3 у смотреню $\operatorname{tang}\alpha$ налазимо іошъ

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha)}}{\operatorname{tang} 2\alpha} \ .\ .\ .\ (8.$$

§. 28.

Изъ уравненія подъ (7. слѣдуе далѣ

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \\ \text{и} \quad \cos 2\alpha &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha + 1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9.$$

Найпосле збогъ $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ имамо

$$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha . \cos 2\alpha.$$

Заменююћи у овомъ изразу $\tan 2\alpha$ съ нѣнымъ вредностима подъ (3., $\cos 2\alpha$ пакъ са предходећима подае се

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2 \tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \\ \text{и} \quad \sin 2\alpha &= \frac{2 \cot 2\alpha}{\cot^2\alpha + 1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10.$$

§. 29.

Поставляюћи сада у уравненія подъ (6. и (7. $2\alpha = \beta$, дакле $\alpha = \frac{\beta}{2}$, слѣдуе

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\beta)} \\ \cos\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\beta)} \end{aligned}\right\} \ldots (11.$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}} \\ \cot\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{1 - \cos\beta}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (12.$$

Истымъ начиномъ добыямо изъ уравненія подъ (9. и (10., (3. и (4.

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{1 - \tan^2\frac{1}{2}\beta}{1 + \tan^2\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{\cot^2\frac{1}{2}\beta - 1}{\cot^2\frac{1}{2}\beta + 1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (13.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{2\tan\frac{1}{2}\beta}{1 + \tan\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{2\cot\frac{1}{2}\beta}{1 + \cot^2\frac{1}{2}\beta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14.$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{2\tan\frac{1}{2}\beta}{1 - \tan^2\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{2\cot^2\frac{1}{2}\beta}{\cot^2\frac{1}{2}\beta - 1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (15.$$

$$\left.\begin{aligned} \cot\beta &= \frac{1 - \tan^2\frac{1}{2}\beta}{2\tan\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{\cot^2\frac{1}{2}\beta - 1}{2\cot\frac{1}{2}\beta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (16.$$

§. 30.

Броителя и именителя подкорены разломака у изразима подъ (12. єданпутъ съ $(1 - \cos\beta)$, другій путъ пакъ съ $(1 + \cos\beta)$ множећи, и потомъ $(1 - \cos^2\beta)$ по §. 14. синусомъ заменююћи добыямо іошъ

$$tang\,\frac{\beta}{2} = \frac{1 - cos\,\beta}{sin\,\beta} = \frac{sin\,\beta}{1 + cos\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (17.$$

$$cot\,\frac{\beta}{2} = \frac{sin\,\beta}{1 - cos\,\beta} = \frac{1 + cos\,\beta}{sin\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (18.$$

Поставляюћи пакъ у образацъ подъ (8. $2\alpha = \beta$, слѣдуе

$$tang\,\frac{\beta}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + tang^2\beta)}}{tang\,\beta} \quad \ldots (19.$$

§. 31.

Заменююћи у изразима подъ (11. $cos\,\beta$ по §. 14. синусомъ, налазимо

$$sin\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{(1 - sin^2\beta)}}{2}} \quad и$$

$$cos\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{(1 - sin^2\beta)}}{2}}\ ; \text{ броителѣ}$$

пакъ овы корена, т. є. $\sqrt{\left[1 \mp \sqrt{(1 - sin^2\beta)}\right]}$ познатымъ начиномъ — као сурдске корене — определююћи подає се

$$\left.\begin{aligned} sin\,\frac{\beta}{2} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\,\beta)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,\beta)} \\ cos\,\frac{\beta}{2} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\,\beta)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,\beta)} \end{aligned}\right\} . (20.$$

Найпосле, првый одъ ова два израза другимъ делеће

$$tang\,\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{(1 + sin\,\beta)} - \sqrt{(1 - sin\,\beta)}}{\sqrt{(1 + sin\,\beta)} + \sqrt{(1 - sin\,\beta)}} \ldots (21.$$

B) Преобраћанѣ функція и ньіово броєвно определьиванѣ — рачунанѣ —.

I. *Преобраћанѣ функція.*

§. 32.

Сви до яко изнађени, међусобно одношенѣ гоніометричны функція показуюћи образци тичу се, као што знамо, полупречника 1. Почемъ нама пакъ исти образци у практики више пута требаю и у односу на другій некій, условлѣный полупречникъ; то є нуждно показати, како се изъ нъи добыяю истоветни образци за свакій у обште полупречникъ r.

У име тога напишимо изъ врха угла α (сл. 7.) међу нѣгове краке два лука AB и ab съ разнымъ полупречницима $AC = r$ и $aC = \varrho$, и постройимо потомъ истога угла функціє за оба ова полупречника. То учинивши подає се сл. 7.

1.) Збогъ подобія триуглова BCD и bdC, $BD : bd = DC : dC = BC : bC$;

2.) изъ подобія пакъ триуглова GAC и gaC, $AG : ag = GC : gC = AC : aC$; найпосле

3.) изъ подобія триуглова EHC и ehC, $EH : eh = HC : hC = EC : eC$.

То ће рећи

$$sin\,\alpha_r : sin\,\alpha_\varrho = cos\,\alpha_r : cos\,\alpha_\varrho = r : \varrho\,,$$

$$tang\,\alpha_r : tang\,\alpha_\varrho = sec\,\alpha_r : sec\,\alpha_\varrho = r : \varrho\,,$$

$cot\,\alpha_r : cot\,\alpha_\varrho = cosec\,\alpha_r : cosec\,\alpha_\varrho = r : \varrho$: при чему функціяма придата писма r и ϱ показую комъ полупречнику исте функціє принадлеже.

Изъ овы сразмерносте видимо, да є одношенѣ єдноимены функція єдногъ истогъ угла за разне полупречнике равно одношенію исты полупречника тако, да ако є полупречникъ r н. п. два пута већій одъ полупречника ϱ, свака функція угла α за полупречникъ r такођеръ двапутъ већа єсть одъ єдноимене функціє за полупречникъ ϱ.

§. 33.

Поставляюћи садъ у горнѣ сразмерности полупречникъ $\varrho = 1$, и разликуюћи єдноимене функціє међу собомъ условлѣнымъ у §. 11. начиномъ, налазимо, єдне чрезъ друге определююћи,

$Sin\,\alpha = r.\,sin\,\alpha$, $Cos\,\alpha = r.\,cos\,\alpha$, $Tang\,\alpha = r.\,tang\,\alpha$, $Sec\,\alpha = r.\,sec\,\alpha$, $Cot\,\alpha = r.\,cot\,\alpha$, $Cosec\,\alpha = r.\,cosec\,\alpha$; на противъ пакъ

$$sin\,\alpha = \frac{Sin\,\alpha}{r},\ cos\,\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{r};\ tang\,\alpha = \frac{Tang\,\alpha}{r},$$

$$sec\,\alpha = \frac{Sec\,\alpha}{r},\ cot\,\alpha = \frac{Cot\,\alpha}{r},\ cosec\,\alpha = \frac{Cosec\,\alpha}{r}$$

У обште, означуюћи съ $f\,(\alpha)$ сваку функцію угла α за полупречникъ 1, съ $F\,(\alpha)$ пакъ єдноимену нѣгову функцію за полупречникъ r, имамо $F\,(\alpha) = r.\,f(\alpha)$, а $f\,(\alpha) = \frac{F\,(\alpha)}{r}$; то ће рећи:

Функціє некогъ угла α за полупречникъ 1 преобраћаю се у єдноимене функціє за другій некій полупречникъ r, ако се съ овымъ полупречникомъ помноже; функціє напротивъ за полупречникъ r преводе се у єдноимене функціє за полупречникъ 1, ако се съ истымъ полупречникомъ r разделе.

§. 34.

Да бы ово правило примерима већма обяснили, то преобратимо изнађене за полупречникъ 1 образце 1.) $sin\,\alpha = \sqrt{(1 - cos^2\,\alpha)}$, 2.) $tang\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha}$ и 3.) $cos\,(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta \mp sin\alpha\,sin\,\beta$, у єдноимене образце угла α за полупречникъ r.

По горнѣму є

$$sin\,\alpha = \frac{Sin\,\alpha}{r},\ cos\,\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{r},\ tang\,\alpha = \frac{Tang\,\alpha}{r},\ cot\,\alpha = \frac{Cot\,\alpha}{r},\ cos\,(\alpha \pm \beta) = \frac{Cos\,(\alpha \pm \beta)}{r},\ cos\,\beta = \frac{Cos\,\beta}{r}$$

$sin\,\beta = \frac{Sin\,\beta}{r}$; поставляюћи дакле у горнѣ изразе ове вредности место функція за полупречникъ 1, слѣдує

$$1.)\ \frac{Sin\,\alpha}{r} = \sqrt{(1 - \frac{Cos^2\,\alpha}{r^2})} = \frac{\sqrt{(r^2 - Cos^2\,\alpha)}}{r}$$

и одтуда

$$Sin\,\alpha = \sqrt{(r^2 - Cos^2\,\alpha)},$$

$$2.)\ \frac{Tang\ \alpha}{r} = 1 : \frac{Cot\ \alpha}{r} = \frac{r}{Cot\ \alpha}\ ,$$ дакле

$$Tang\ \alpha = \frac{r}{Cot\ \alpha}$$; найпосле

$$3.)\ \frac{Cos\,(\alpha \pm \beta)}{r} = \frac{Cos\ \alpha}{r} \cdot \frac{Cos\ \beta}{r} \mp \frac{Sin\ \alpha}{r} \cdot \frac{Sin\ \beta}{r} =$$

$$= \frac{Cos\alpha\ Cos\beta \mp Sin\ \alpha\ Sin\ \beta}{r^2}\ ,$$ одатле пакъ

$$Cos\ (\alpha \pm \beta) = \frac{Cos\ \alpha\ Cos\beta \mp Sin\ \alpha\ Sin\beta}{r}$$

II. Рачунанѣ функція за полупречникъ 1.

§. 35.

Велика полза, кою иначе подаю гоніометричне функціє у практики, сасвимъ бы се изгубила, да іи мы при свакомъ употреблѣню найпре морамо израчунати. Зато су исте функціє одавна веѣъ израчунане и за употреблѣнѣ у удобне таблице сложене тако, да нама садъ само іошъ остае показати, коимъ се начиномъ могу определити и како се употребляваю.

Прво урадит' ѣемо сада, и у томъ обзиру имамо приметити, да се гоніометричне функціє найболѣ налазе посредствомъ безконачны редова. Почемъ пакъ мы рачуна съ таковымъ редовима — као предметъ више аналитике, коя ѣе текъ слѣдовати — іошъ незнамо, то смо принуђени служити се за исту цѣль другимъ, такођеръ обичнымъ, но нешто теготніимъ начиномъ, при комъ употреблявамо само нека доякошня наша геометрична и гоніометрична докученя. У осталомъ рачунали мы

поменуте функціє коимъ годъ начиномъ, по смислу §. 13. ніє потребно определити выше, него само функціє прве четврти. Будуѣи є пакъ по §. 7. свакимъ синусомъ определѣнъ свагда и єданъ косинусъ; и будуѣи се по §. 18. све остале функціє синусомъ и косинусомъ лако могу изразити: то є найпосле довольно, ако изнађемо само синусе поменуте четврти. До овы, служеѣи се, као што горе рекосмо, само доякошньимъ нашимъ докученяма, долазимо найпростіє слѣдуюѣимъ путемъ.

§. 36.

По §. є 5. $sin\ \varphi = \frac{1}{2}\ chord.\ 2\,\varphi$; изъ геометріє пакъ знамо, да є за полупречникъ 1

а.) страна правилногъ триугла или $chord.\ 60^0 = 1$ (полупречнику);

б.) страна правилногъ триугла т. є. $chord.\ 120^0 = \sqrt{3}$;

в.) страна квадрата, то ѣе реѣи $chord.\ 90^0 = \sqrt{2}$; найпосле

г.) страна правилногъ 10^0 угла или $chord.\ 36^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; дакле є на основу горнѣгъ образца

$$sin.\ 30^0 = cos.\ 60^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 60^0$$
$$= \tfrac{1}{2} = 5^{\cdot},$$
$$sin.\ 60^0 = cos.\ 30^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 120^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = {}^{\cdot}8660254$$
$$sin.\ 45^0 = cos\ 45^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 90^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = {}^{\cdot}7071068$$
$$sin.\ 18^0 = cos.\ 72^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 36^0$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = {}^{\cdot}3090170$$

§. 37.

Поставляюћи садъ у образацъ I. §-а 19. и у образацъ III. §. 20., $\alpha = 60^o$, а $\beta = 45^o$ добыямо по првомъ

$$sin\ 105^o, \text{ или збогъ } sin\ (\pi - \varphi) = sin\ \varphi\ (\S.\ 13);$$

$$sin\ 75^o = cos\ 15^o = sin\ 60^o\ cos\ 45^o + cos\ 60^o\ sin\ 45^o$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\ (\sqrt{3}+1) = \text{'}9659257,$$

а по другомъ.

$$sin\ 15^o = cos\ 75^o = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\ (\sqrt{3}-1) = \text{'}2588189$$

Заменююћи пакъ у истымъ образцыма α съ 18^o, а β съ 15^o, слѣдуе

$$\text{збогъ } cos\ 18^o = \sqrt{(1 - sin^2\ 18^o)} =$$
$$\sqrt{\left\{1 - \left[\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\right]\right\}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

изъ првога

$$sin\ 33^o = cos\ 57^o = \frac{\sqrt{2}}{16}\ (-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{3}) +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{8}\ (-1+\sqrt{3})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \text{'}5446390$$

а изъ другога

$$sin\ 3^o = cos\ 87^o = \frac{\sqrt{2}}{16}\ (-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{3})$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{8}(-1+\sqrt{3})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \text{'}0523360$$

§. 38.

Найпосле, заменююћи іошъ у првомъ образцу §а 31. подъ 20, т. е. у

$$sin\ \frac{\beta}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+sin\ \beta)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-sin\ \beta)},$$

редомъ β съ 3^o, $\frac{3^o}{2}$, $\frac{3^o}{4} = 45'$, $\frac{3^o}{8} = \frac{45'}{2}$, $\frac{3^o}{16} = = \frac{45'}{4}$ и т. д. до $\frac{45'}{64}$: добыямо после две последнѣ замене

$$sin\ \frac{45'}{32} = \text{'}0002090, \text{ и}$$
$$sin\ \frac{45'}{64} = \text{'}0002045$$

Сравнюћи ова два синуса међу собомъ видимо, да е последньій половина предходећега, и одтуда основано заключуемо, да е одношенѣ овако малы синуса равно одношеню нъіовы лукова. Ползуюћи се овымъ докученѣмъ налазимо

$sin\ \frac{45'}{64} : sin\ 1' = \frac{45'}{64} : 1$, и одатле, место $sin\ \frac{45'}{64}$ горню вредность поставляюћи,

$$sin\ 1' = \text{'}0002908$$

§. 39.

Дошавши овымъ начиномъ еданпутъ до синуса едногъ минута, определюемо затымъ посредствомъ истога найпре све манѣ синусе, а после помоћу іошъ неки одъ овы и све остале веће.

Прве добыямо врло просто поставляюћи ій по горнѣмъ докученю, према синусу еднога минута у онако исто одношенѣ, као дотичный лукъ према едномъ минуту или $60''$. Тако н. п. имамо по томе за синусъ одъ $24''$ сразмерность

$sin\ 24'' : sin\ 60'' = 24 : 60$, или, место $sin\ 60'' =$ $= sin\ 1'$ наћену нѣгову вредность узимаюћи,

$sin\ 24'' : \text{˙}0002908 = 24 : 60$; изъ чега слѣдуе

$$sin\ 24'' = \frac{24}{60} \times \text{˙}0002908 = \text{˙}0001163$$

О овомъ рачунаню маньи синуса ноле размишляваюћи увиђамо, да е довольно определити показанымъ начиномъ само синусе одъ 31″, 37″, 41″, 47″, 53″, 59″, и ма кои іошъ еданъ маньій, еръ се остали, на основу оногъ истогъ докученя, лакше добыяю мложенѣмъ и деобомъ последнѣга, а после опетъ мложенѣмъ и деобомъ тымъ начиномъ изнађены, съ некимъ, лако докучльивымъ броевима. Тако н. ъ. определююћи осимъ поменуты шестъ синуса само іошъ синусъ одъ 6″ — кои врло лако налазимо деобомъ синуса одъ 1′ броемъ 10 —, добыямо изъ истога деобомъ съ 2 и 3 синусе одъ 3″ и 2″; мложенѣмъ пакъ съ 2 и 3 синусе одъ 12″ и 18″. Мложенѣмъ затымъ синуса одъ 2″ съ 2, 5, 7 и другимъ броевима, слѣдую синуси одъ 4″, 10″, 14″ и други; мложенѣмъ пакъ синуса одъ 3″ съ 3, или деобомъ синуса одъ 18″ съ 2, подае се синусъ одъ 9″, и подобнымъ безъ сумнѣ лакимъ начиномъ и сви остали.

§. 40.

Веће синусе налазимо посредствомъ синуса 1′ и неки маньи мож'да найудобніе слѣдуюћимъ начиномъ.

Изъ првогъ образца подъ (*v*. у §. 23. слѣдуе

$$sin\ (\alpha + \beta) = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ (\alpha - \beta)$$

а по замени $cos\ \beta$ нѣговомъ подаюћомъ се вредно-

сти изъ првогъ образца подъ (11. у §. 29. $cos\ \beta =$ $= 1 - 2 sin^2 \frac{\beta}{2}$,

$$sin\ (\alpha + \beta) = 2\ sin\ \alpha - 4\ sin\ \alpha\ sin^2 \frac{\beta}{2} -$$
$$- sin\ (\alpha - \beta)$$, или, увиђавномъ превременомъ десне части,

$$sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha + \left[sin\ \alpha - sin\ (\alpha - \beta)\right] -$$
$$- 4\ sin\ \alpha\ sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Заменююћи садъ у овомъ, тако названомъ Деламбровомъ — *Delambre* — образцу, β съ 1″, α пакъ редомъ съ 1′, 1′ 1″, 1′ 2″, 1′ 3″ и т. д. добыямо све веће синусе и косинусе одъ секунде до секунде, као што изъ слѣдуюћи неколико примера видити можемо.

$$sin\ 1'\ 1'' = cos\ 89^0\ 58'\ 59'' = sin\ 1' + (sin\ 1' - sin\ 59'')$$
$$- 4\ sin\ 1'\ sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$sin\ 1'\ 2'' = cos\ 89^0\ 58'\ 58'' = sin\ 1'\ 1'' + (sin\ 1'\ 1'' -$$
$$- sin\ 1') - 4\ sin\ 1'\ 1''\ sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$sin\ 1'\ 3'' = cos\ 89^0\ 58'\ 57'' = sin\ 1'\ 2'' +$$
$$+ (sin\ 1'\ 2'' - sin\ 1'\ 1'') - 4\ sin\ 1'\ 2''\ sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

$$sin\ 1'\ 59'' = cos\ 89^0\ 58'\ 1'' = sin\ 1'\ 58'' +$$
$$+ (sin\ 1'\ 58' - sin\ 1'\ 57'') - 4\ sin\ 1'\ 58''\ sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$sin\ 2' = cos\ 89^0\ 58' = sin\ 1'\ 59'' + (sin\ 1'\ 59'' -$$
$$- sin\ 1'\ 58'') - 4\ sin\ 1'\ 59''\ sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1'\,2'' = \cos 89^0\,57'\,59'' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1'\,59'') - 4 \sin 2' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

$$\sin 59'\,59'' = \cos 89^0\,0'\,1'' = \sin 59'\,58'' + (\sin 59'\,58'' - \sin 59'\,57'') - 4 \sin 59'\,58'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1^0 = \cos 89^0 = \sin 59'\,59'' + (\sin 58'\,59'' - \sin 59'\,58'') - 4 \sin 59'\,59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

. . . .

$$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \sin 14^0\,59'\,59'' + (\sin 14^0\,59'\,59'' - \sin 14^0\,59'\,58'') - 4 \sin 14^0\,59'\,59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

. . . .

§. 41.

Обичне таблице гоніометричны функція садрже ове само за лукове одъ 10 до 10', минута до минута, или найвише одъ 10 до 10''; остале пакъ определюю се при таковымъ таблицама по потреби особитымъ начиномъ, съ коимъ ћемо се мы упознати на надлежномъ месту позднѣе.

Рачунаюћи синусе за такове таблице 1.) само за лукове одъ минута до минута, валя у истомъ деламбровомъ образцу заменити β съ 1', α пакъ редомъ съ 1', 2', 3', и т. д. чимъ добыямо

$$\sin 2' = \cos 89^0\,58' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 0') - 4 \sin 1' \sin^2 30''$$

$$\sin 3' = \cos 89^0\,57' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1') - 4 \sin 2' \sin^2 30''$$

$$\sin 4' = \cos 89^0\,56' = \sin 3' + (\sin 3' - \sin 2') - 4 \sin 3' \sin^2 30''$$

. . . .

Рачунаюћи ій пакъ 2.) само одъ 10 до 10', треба найпре овымъ начиномъ определити синусъ одъ 10', а потомъ у истомъ образцу β заменити съ 10', а α редомъ съ 10', 20', 30', и т. д. При томъ рачуну имамо

$$\sin 20' = \cos 89^0\,40' = \sin 10' + (\sin 10' - \sin 0) - 4 \sin 10' \sin^2 5'$$

$$\sin 30' = \cos 89^0\,30' = \sin 20' + (\sin 20' - \sin 10') - 4 \sin 20' \sin^2 5'$$

. . . .

Найпосле 3.) определююћи синусе одъ 10 до 10'', морамо β заменити съ 10'', α пакъ редомъ съ 10'', 20'', 30'', и т. д., чимъ находимо

$$\sin 20'' = \cos 89^0\,59'\,40'' = \sin 10'' + (\sin 20'' - \sin 0'') - 4 \sin 10'' \sin^2 5''$$

$$\sin 30'' = \cos 89^0\,59'\,30'' = \sin 20'' + (\sin 20'' - \sin 10'') - 4 \sin 20'' \sin^2 5''$$

. . . .

$$\sin 1'\,10'' = \cos 89^0\,58'\,50'' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 50'') - 4 \sin 1' \sin^2 5''$$

. . . .

$$\sin 2^0\,3'\,40'' = \cos 87^0\,56'\,20'' = \sin 2^0\,3'\,30'' +$$

$+ (\sin 2^0\ 3'\ 30'' - \sin 2^0\ 3'\ 20'') - 4 \sin 2^0\ 3'\ 30'' \sin^2 5''$

. . . .

§. 42.

Синусе лукова веѣи одъ 60^0 и косинусе одъ тога маньи лукова определюемо лакше посредствомъ образца

$$\sin (60^0 + \beta) = \sin (60 - \beta) + \sin \beta$$

заменююѣи у истомъ β съ другимъ маньимъ углима, $\sin \beta$ дакле веѣъ израчунанимъ синусима исты углова. Тако н. п. налазимо поставляюѣи β редомъ $= 1', 2', \ldots .\ 1^0\ 10', 1^0\ 20', \ldots .\ 15^0\ 3'\ 10''$, $15^0\ 3'\ 20''$, ...

$$\sin 60^0\ 1' = \cos 29^0\ 59' = \sin 60^0 + \sin 1'$$

$$\sin 60^0\ 2' = \cos 29^0\ 58' = \sin 60^0\ 1' + \sin 2'$$

. . . .

$$\sin 61^0\ 10' = \cos 28^0\ 50' = \sin 58^0\ 50' + \sin 1^0\ 10'$$

$$\sin 61^0\ 20' = \cos 28^0\ 40' = \sin 58^0\ 40' + \sin 1^0\ 20'$$

. . . .

$$\sin 75^0\ 3'\ 10'' = \cos 14^0\ 56'\ 50'' = \sin 44^0\ 56'\ 50'' + \\ + \sin 15^0\ 3'\ 10''$$

$$\sin 75^0\ 3'\ 20'' = \cos 14^0\ 56'\ 40'' = \sin 44^0\ 56'\ 40'' + \\ + \sin 15^0\ 3'\ 20''$$

. . . .

. . . .

Употребл ѣный при овоме образацъ добыямо изъ другогъ образца подъ (v у §. 23. поставляюѣи у истомъ $\alpha = 60^0$; чимъ слѣдуе

$$\sin (60^0 + \beta) = \sin (60^0 - \beta) = 2 \cos 60^0 \sin \beta,$$

или збогъ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ (§. 36. г.)

$$\sin (60^0 + \beta) - \sin (60^0 - \beta) = \sin \beta;$$ и одтуда

$$\sin (60^0 + \beta) = \sin (60^0 - \beta) + \sin \beta$$

§. 43.

Израчунавши овымъ безъ сумнѣ врло лакимъ начиномъ, све синусе и косинусе прве четврти, определюемо затымъ посредствомъньи тангенте, служеѣи се при томъ найболѣ познатымъ веѣъ образцемъ $\tang \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, кои се логаритмички рачунати може.

Съ тангентама, као што е лако увидити, добыямо уедно и котангенте, еръ е по §. 13. $\tang \alpha = \cot (\frac{\pi}{2} - \alpha)$, т. е. свака тангента равна едной котангенти. Остале пакъ функціе, изъ узрока, што се обично неупотреблюю, нерачунаю се.

§. 44.

Тангенте лукова веѣи одъ 45^0, израчунавши найпре све манѣ, добыямо лакше посредствомъ овы маньи замѣнююѣи у образцу

$$\tang (45^0 + \beta) = \tang (45^0 - \beta) - 2 \tang 2 \beta)$$

лукъ β съ маньимъ луцима одъ 45^0.

Образацъ овай налазимо слѣдуюѣимъ начиномъ.

По §. е 23. обр. подъ VII

$$\tang (45^0 + \beta) = \frac{1 + \tang \beta}{1 - \tang \beta},$$ а

$$tang\,(45^0 - \beta) = \frac{1 - tang\,\beta}{1 + tang\,\beta}\ ;\ \text{дакле}$$

$$tang\,(45^0 + \beta) - tang\,(45^0 - \beta) = \frac{4.\ tang\,\beta}{1 - tang^2\,\beta} =$$

$$= 2 . \frac{2\ tang\,\beta}{1 - tang^2\,\beta}\text{, или, збогъ } \frac{2\ tang\,\beta}{1 - tang^2\,\beta} = tang\ 2\,\beta$$

(§. 29.)

$$tang\,(45^0 + \beta) - tang\,(45^0 - \beta) = 2\ tang\ 2\,\beta$$

и одтуда, увиђавномъ пременомъ, горньій образацъ

$$tang\,(45^0 + \beta) = tang\,(45^0 - \beta) - 2\ tang\ 2\,\beta$$

§. 45.

При овомъ рачунаню функція употреблює се као што смо видили, свакій синусъ за определьиванѣ слѣдуюћегъ већегъ, и сви они потомъ за налазенѣ осталы потребны функція. Лако є дакле увидити, да погрешка, коя бы се случайно учинила при єдномъ одъ ньи, прелази не само на све веће синусе, него и на све посредствомъ овы и нѣга изнађене друге функціє; те да є тога ради необходимо нуждно, да се при истомъ рачунаню синуса чешће о ньіовой точности уверавамо. У име тога имамо одъ Айлера — *Euler* — слѣдуюћій врло удобанъ образацъ

$$sin\,\beta = sin\,(36^0 + \beta) - sin\,(36^0 - \beta) + sin\,(72^0 - \beta) -$$
$$- sin\,(72^0 + \beta)$$

Употреблѣнѣ овога образца увиђавно є по себи, и састои се у простой замени угла β съ оныма углима, кои синусе у горнѣмъ смислу испытати желимо; добыямо га пакъ слѣдуюћимъ начиномъ.

По другомъ образцу §. 23. подъ (*v.*, заменююћи у истомъ угалъ α єданпутъ съ 36^0, другій путъ пакъ 72^0, добыямо збогъ $cos\ 36^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, а

$$cos\ 72^0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\quad (*)$$

$$sin\,(36^0 + \beta) - sin\,(36^0 - \beta) = sin\,\beta\ \frac{1 + \sqrt{5}}{1}\text{, а}$$

$$sin\,(72^0 + \beta) - sin\,(72^0 - \beta) = sin\,\beta\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

ова пакъ уравненія єданпутъ сабираюћи, а другій путъ друго одъ првога одузимаюћи слѣдує

$$sin\,(36^0 + \beta) - sin\,(36^0 - \beta) + sin\,(72^0 - \beta) -$$
$$- sin\,(72^0 + \beta) = sin\,\beta,$$

поменутый образацъ.

(*) Да є $cos\ 72^0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ знамо изъ §. 36.; да є пакъ $cos\ 36^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ дознаємо айудобніє образцемъ $cos\ a = \sqrt{\frac{1 + cos\,2a}{2}}$ (§. 27. подъ 6.), поставляюћи у истомъ $a = 36^0$, по чему слѣдує $cos\ 36^0 = \sqrt{\frac{1 + cos\,72^0}{2}}$ или, $cos\ 72^0$ горньомъ вредности заменююћи, $cos\ 36^0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right)}$ и найпосле іошъ $\sqrt{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$ као сурдскій — $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$ — разрешуюћи, $cos\ 36^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Г.) Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица; и преобраћанѣ лучне мере у праву и обратно.

I. Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица.

§. 46.

Сматранѣмъ веће части гоніометричны образаца морамо увидити, да се рачунъ при ньіовомъ употреблѣню, употреблѣнѣмъ логаритама дотичны функція место ньіовы броєвны вредностій, веома олакшава. Тога ради употреблюю се обично не саме функціє, него ньиви логаритми, кои су на тай конацъ већъ и одавна израчунѣни и у удобне таблице сложени. Но будући су, као што знамо, синуси прве четврти за полупречникъ 1, чисти разломци; значице дакле ньіовы логаритама одрицателне и одтудъ рачунъ съ таковымъ логаритмима неудобанъ: то су такове таблице обично израчунѣне за полупречникъ 10^{10}, чимъ значице логаритама поменуты, у 10 деловны места определѣны функція постаю положителне.

Найпосле іошъ валя приметити, да се гоніометричне функціє за разлику одъ ньіовы логаритама називаю **природнымъ**, ови пакъ **умѣтнымъ** или **артистичнымъ** функціяма. Тако є н. п. по §. 36. $\frac{1}{2} = 0\text{'}5$ наравный, по овоме пакъ $log\ 0\text{'}5$ умѣтный синусъ лука одъ 36^0.

§. 47.

Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица учи се найболѣ изъ овы самы, зато ћемо

овде само да наведемо оне гоніометричне истине, на коима су такове таблице основане. Те єсу

1.) Функціє прве четврти расту, кофункціє на противъ умалявaю се увећаванѣмъ лука.

2.) Синуси и тангенте врло малы лукова стоє съ овыма у геометричной, ньіови дакле логаритми съ логаритмима лукова у аритметичной сразмерности, тако да, ако су φ и ψ два врло мала лука, имамо

$$sin\ \varphi : sin\ \psi = tang\ \varphi : tang\ \psi = arc\ \varphi : arc\ \psi, \text{ а}$$

$$log\ sin\ \varphi \div log\ sin\ \psi = log\ tang\ \varphi \div log\ tang\ \psi =$$
$$= log\ arc\ \varphi \div log\ arc\ \psi$$

3.) Разлике веђи, међу собомъ найдалѣ єднымъ минутомъ разликуюђи се лукова, имаю се као разлизе єдноимены функція, и дакле и као разлике истымъ функціяма принадлежеђи логаритама. Найпосле

4.) Логаритми тангенте и котангенте исты лукова имаю єднаке, но разно означене разлике.

Првый одъ овы основа тригонометричны таблица познатъ є іошъ изъ §. 10.; другій слѣдує непосредствено изъ §. 38. и додатка §у. 9., о трећемъ пакъ и четвртомъ можемо се лако уверити, но найпре морамо іошъ приметити, да другій збогъ $cos\ \varphi = sin\ (90^0 - \varphi)$ и $cot\ \varphi = tang\ (90^0 - \varphi)$, постои, и за косинусе и котангенте онаковы углова, кои се одъ правога разликую само некимъ броємъ секунда.

§. 48.

Уверенѣ о трећемъ. За полупречникъ 1 подаѥ се познатымъ изъ геометріѥ начиномъ, у 10 деловны места

$$arc\ 1' = \frac{\pi}{10800} = 0{\cdot}0002908882,$$ а по §у 39.

у исто толико теста

$$sin\ 30'' = 0{\cdot}0001454441$$; дакле

$$2\ sin\ 30'' = 0{\cdot}0002908882 = arc\ 1',$$

или збогъ $2\,sin\ 30'' = chord.\ 1'$, у 10 деловны места

$$chord.\ 1' = arc.\ 1' ;$$

то ће рећи, **луци до єднога минута могу се заменити тетивкама, или такови се луци могу сматрати као праве пруге.**

сл. 8. Ово предпославши условимо у сл. 8, да є $arc\ AM$ = некомъ брою степена и минута α, $arc.\ MP = 1' = 60''$, найпосле $arc.\ MN = v'' < 60''$, и спустимо MQ, PS и $NR \perp$ на AC; бытће $MQ = sin\,\alpha$, $PS = sin\ (\alpha + 60'')$ а $NR = sin\ (\alpha + v'')$. Ако пакъ іошъ повучемо $Mp \parallel Nn \perp PS$, онда є, сматраюћи по горнѣму MP и MN као праве, $\triangle\ MPp \sim \triangle\ MNm$, и одтуда

$$MP : MN = Pp : Nm,$$ или

$$(AP - AM) : (AN - AM) = (PS - MQ) : (NR - MQ)$$

т. є.

$$\left[arc\ (\alpha + 60'') - arc\ \alpha\right] : \left[arc\ (\alpha + v'') - arc\,\alpha\right] = $$
$$= \left[sin\,(\alpha + 60'') - sin\ \alpha\right] : \left[sin\ (\alpha + v'') - sin\ \alpha\right]$$

Луци $(\alpha + 60'')$ и α разликую се међу собомъ само єднымъ минутомъ, луци пакъ $(\alpha + v'')$ и а съ

іошъ манѣ; а мы знамо изъ алгебре, да су разлике броєва, међу собомъ само єдномъ єдиницомъ разликуюћи се, у 7 деловны места сразмерне разликама истымъ броєвима принадлежећи логаритама; дакле є

1.) $$\left[arc\,(\alpha + 60'') - arc\ \alpha\right] : \left[arc\,(\alpha + v'') - arc\ \alpha\right] =$$
$$= \left[sin\,(\alpha + 60'') - sin\alpha\right] : \left[sin\alpha\,(\alpha + v'') - sin\ \alpha\right]$$
$$= \left[log\ sin\,(\alpha + 60'') - log\ sin\ \alpha\right] :$$
$$: \left[log\ sin\,(\alpha + v'') - log\ sin\ \alpha\right]$$

Подобнымъ начиномъ налазимо и

2.) $$\left[arc\,(\alpha + 60'') - arc\,\alpha\right] : \left[arc\,(\alpha + v'') - arc\,\alpha\right] =$$
$$= \left[tang\,(\alpha + 60'') - tang\,\alpha\right] :$$
$$: \left[tang\ (\alpha + v'') - tang\,\alpha\right]$$
$$= \left[log\,tang\,(\alpha + 60'') - log\ tang\ \alpha\right] :$$
$$: \left[log\,tang\,(\alpha + v'') - log\ tang\,\alpha\right]$$

Овымъ є срасмерностима вопросно треће изреченіє, као што є лако увидити, у смотреню синуса и тангенте доказано; почемъ пакъ косинуси и котангенте нису ништа друго, него синуси и тангенте комплементарны, међу собомъ истымъ начиномъ разликуюћи се углова: то постои исто изреченіє и за косинусе и котангенте, и тако дакле доиста за све обично упосреблююће се функціє.

§. 49.

Уверенѣ о четвртомъ. По §. є 16. или 18.

$$tang\ \alpha = \frac{1}{cot\ \alpha}, \text{ а } tang\,(\alpha + d\alpha) = \frac{1}{cot\,(\alpha + d\alpha)}$$

т. є. $tang\ \alpha .\ cot\ \alpha = 1$, и $tang\,(\alpha + d\alpha).\ cot\,(\alpha + d\alpha) = 1$, при чему $d\alpha$ означуе некій нараштай угла α.

Изъ овы уравненія слѣдуе просто

$$tang\ \alpha .\ cot\ \alpha = tang\,(\alpha + d\alpha).\ \ cot\ (\alpha + d\alpha)$$

дакле є

$log\ tang\ \alpha + log\ cot\ \alpha = log\ tang\ (\alpha + d\alpha) + log\ cot\,(\alpha + d\alpha)$ или, увиђавномъ премѣномъ,

$$\left[log\ tang\,(\alpha + d\alpha) - log\ tang\ \alpha\right] = - \\ - \left[log\ cot\ (\alpha + d\alpha) - log\ cot\ \alpha\right]$$

т. є. логаритмичне разлике тангента' и котангента' исты углова, као што є речено, равне, и само разно означене.

§. 50.

На основу прве и друге одъ овы истина (§. 47.) налазимо при рачунаню тригонометричны таблица' логаритме синуса и тангента' лукова до єдногъ минута, и логаритме косинуса и котангента' лукова одъ 89° 59′ до 90°, — врло удобно простымъ сабиранѣмъ и одузиманѣмъ на слѣдуюћій начинъ:

Посредствомъ точно израчунѣны логаритама просты броєва определюємо логаритамъ некогъ синуса, н. п. логаритамъ синуса одъ 30″, и томе додаємо потомъ логаритмичну разлику броєва 30 и 31, чимъ добыямо логаритамъ синуса и тангенте одъ 31″, а косинуса и котангенте одъ 89° 59′ 29″. Додаюћи потомъ овоме логаритму разлику броєва 31 и 32, налазимо логар. синуса и тангенте одъ 32″ а косинуса и котангенте одъ 89° 59′ 28″; и тымъ истымъ начиномъ и далѣ поступаюћи, подаю се логаритми синуса и тангенте осталы већи лукова до єдногъ минута, а логаритми косинуса и котангенте мањи, до 89° 59′. — Одузимаюћи на противъ одъ логаритма синуса одъ 30″ логаритмичну разлику броєва 29 и 30, добыямо логар. синуса и тангенте одъ 29″, а косинуса и котангенте одъ 89° 59′ 31″; одъ овога опетъ одузимаюћи логаритмичну разлику броєва 28 и 29, налазимо логаритамъ синуса и тангенте одъ 28″, а косинуса и котангенте одъ 89° 59′ 32″, и т. д. све друге.

§. 51.

Изъ доказаны сразмерностій §а 48 слѣдуе

$$60'' : v'' = \left[log\ sin\ (\alpha + 60'') - log\ sin\ \alpha\right] : \\ : \left[log\ sin\ (\alpha + v'') - log\ sin\ \alpha\right] \\ = \left[log\ tang\ (\alpha + 60'') - log\ tang\ \alpha\right] : \\ : \left[log\ tang\ (\alpha + v'') - log\ tang\ \alpha\right]$$

или, краћине ради прве разлике съ $D\ log\ sin\ \alpha$ и $D\ log\ tang\ \alpha$, друге пакъ съ $d\ log\ sin\ \alpha$ и $d\ log\ tang\ \alpha$ означуюћи,

$$60'' : v'' = D\ log\ sin\ \alpha : d\ log\ sin\ \alpha \\ = D\ log\ tang\ \alpha : d\ log\ tang\ \alpha, \text{ и одтуда}$$

$$d\ log\ sin\ \alpha = v''.\ \frac{D\ log\ sin\ \alpha}{60''},$$

$$d\ log\ tang\ \alpha = v''.\ \frac{D\ log\ tang\ \alpha}{60''}$$

При овоме є, као што лако увиђамо, $\frac{D\ log\ sin\ \alpha}{60}$ разлика, коіомъ логаритамъ синуса одъ α нарашћуе при свакомъ вышку одъ єдне секунде до логаритма синуса одъ $(\alpha + 60'')$, т. є. до логаритма синуса єднымъ минутомъ веѣега лука; а $\frac{D\,log\,tang\,\alpha}{60''}$ иста логаритмична разлика тангенте, и мы по томе налазимо разлику коіомъ логаритамъ синуса или тангенте одъ α нарашѣуе до логаритма синуса или тангенте съ v'' веѣега лука: ако пређашню логаритмичну разлику за $1''$ помложимо съ v.

На основу дакле треѣе, у §. 48. доказане истине довольно є, да тригонометричне таблице садрже логаритме функція лукова веѣи одъ $1'$, само одъ минута до минута; єръ се изъ нъи они други, т. є. логаритми функція, осимъ степена и минута іошъ и некій брой секунда садржаваюѣи лукова, лако могу определити — увиђавнымъ изъ горнѣга начиномъ — посредствомъ израчунѣне разлике за $1''$. При томе само іошъ валя приметити, да се съ обзиромъ на прву истину логаритмична поправка збогъ секунда при косинусима и котангентама предходеѣемъ логаритму нема додати, но одъ нѣга одузети.

§. 52.

Найпосле, на основу четврте, у §. 49. доказане истине, могу быти логаритмичне разлике тангенте и котангенте у таблицама, као заєдничке, само єданпутъ уписане, и таблице дакле тимъ нешто простіє.

§. 53.

При концу овога предмета морамо іошъ показати, коимъ се начиномъ логаритми функція за

полупречникъ 1 преводе у табличне, т. є. у логаритме за полупречникъ 10^{10}, и обратно.

По §. є. 33. $F(\alpha) = r.\ f(\alpha)$, обратно $f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r}$; зато

$$\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + \log r, \text{ на противъ}$$
$$\log f(\alpha) = \log F(\alpha) - \log r; \text{ или збогъ } r = 10^{10}$$
$$\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + 10, \text{ а}$$
$$\log f(\alpha) = \log F(\alpha) - 10; \text{ то ѣе реѣи:}$$

Логаритамъ неке функціє налазимо за табличный полупречникъ 10^{10}, ако нѣномъ логаритму за полупречникъ 1, десетъ єдиница додамо; на противъ пакъ логаритамъ неке функціє за полупречникъ 1 добыя се изъ логаритма таблице, ако се одъ овога 10 єдиница одузму.

II. Преобраѣанѣ лучне мере у праву и обратно.

§. 54.

У практики нуждно є млого пута, да се некій лукъ изрази у частима полупречника, т. є. да се лучна мера преведе у праву; као и обратно некій у частима полупречника, то ѣе реѣи, правомъ меромъ определѣный лукъ, да се изрази нѣговомъ природномъ, т. є. лучномъ меромъ. Извидимо дакле коимъ то начиномъ постизавамо.

У име тога нека намъ представля φ'' некій у секундама израженый лукъ, $arc\ \varphi''$ пакъ истога лука дужину у частима пулупречника. За полупречникъ 1 имамо познатымъ изъ геометріє начиномъ

$$\varphi'' : 180.60.60 = arc\ \varphi'' : \pi\text{, и одтуда}$$

$$\varphi'' = \frac{180.60.60.}{\pi} \cdot arc\ \varphi'' \quad \ldots\ldots \quad (1.$$

Означуюћи подобно съ ϱ'' лукъ у правой мери раванъ полупречнику, бытћe за полупречникъ 1, $arc\ \varrho'' = 1$, дакле

$$\varrho'' : 180.60.60 = 1 : \pi\text{, и одатле}$$

$$\varrho'' = \frac{180.60.60.}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.$$

Почемъ є пакъ найпосле $arc\ \varrho'' = 1 = \varrho''.\ arc\ 1''$, то є

$$\varrho'' = \frac{1}{arc\ 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.$$

а збогъ $arc\ 1'' = sin\ 1''$, iошъ

$$\varrho'' = \frac{1}{sin\ 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.$$

Поставляюћи садъ све ове вредности у равность подъ 1, имамо

За преобраћанѣ лучне мере у праву

$$\varphi'' = \varrho''.\ arc\ \varphi'' = \frac{arc\ \varphi''}{arc\ 1''} = \frac{arc\ \varphi''}{sin\ 1''}$$ и одтуда обратно

За преобраћанѣ праве мере у лучну

$$arc\ \varphi'' = \frac{\varphi''}{\varrho''} = \varphi''.\ arc\ 1'' = \varphi''\ sin\ 1''\ ;$$

при чему є, по равности подъ 2, у секундама израженый полупречникъ

$$\varrho'' = 206265''$$

Додатакъ. Сасвимъ истымъ начиномъ налазимо $\varrho' = \dfrac{1}{arc\ 1'} = \dfrac{1}{sin\ 1'}$; $\varrho^0 = \dfrac{1}{arc\ 1^0}$; и дакле

$$\varphi' = \varrho'\ arc\ \varphi' = \frac{arc\ \varphi'}{arc\ 1'} = \frac{arc\ \varphi'}{sin\ 1'}\text{ , а}$$

$$\varphi^0 = \varrho^0.\ arc\ \varphi^0 = \frac{arc\ \varphi^0}{arc\ 1^0}$$

при чему є

$$\varrho' = \frac{180.60}{\pi} \doteq 3447'8\text{, а}$$

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi} \doteq 57^0 3$$

§. 55.

Ако φ'' нiє веће одъ $2400'' = 40'$, онда $arc\ \varphi''$ у првомъ одъ горньи израза можемо заменити синусомъ, т. є. можемо рећи, да є

$$\varphi'' = \frac{sin\ \varphi}{sin\ 1''}\text{ , и одтуда обратно}$$

$$sin\ \varphi = \varphi''.\ sin\ 1''$$

Узимаюћи у првомъ одъ ова два израза $\varphi = 40'$, грешимо само съ $0''05$; при φ пакъ $= 1^0$, грешимо съ $0''18$.

Ова два израза служе, као што се лако увиђа, првый за налазенѣ малогъ некогъ лука изъ познатогъ нѣговогъ синуса и синуса $1''$, другiй пакъ обратно за налазенѣ синуса некогъ малогъ лука изъ овога и синуса $1''$.

КНЬИГА ДРУГА.

РАВНА ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Б.) Разрешенѣ триуглова.

I. *Општа свойства триуглова.*

§. 56.

Означимо угле произвольногъ триугла ABC
сл. 9. (сл. 9.) са A, B и C, а супротне ньима стране дотично съ a, b и c; и спустимо потомъ съ ма коега угла, н. п. съ B, управну BD на супротну страну b. Сматраюћи потомъ страну c као полупречникъ мере угла A, а страну а као полупречникъ угла C: управна є BD синусъ $\angle\angle$ A и C, т. є. $BD = \underset{c}{Sin}\, A = \underset{a}{Sin}\, C.$

По §у є пакъ 33. за полупречникъ 1
$\underset{c}{Sin}\, A = c.\ sin\ A$, а $\underset{a}{Sin}\, C = a.\ sin\ C$; дакле є

$c.\ sin\ A = a.\ sin\ C$, и одтуда

$$\left.\begin{array}{l} a : c = sin\ A : sin\ C \\ \text{Истимъ начиномъ добыямо} \\ a : b = sin\ A : sin\ B \\ b : c = sin\ B : sin\ C \end{array}\right\} \ldots (1.$$

одкуда види се, да су стране свакогъ триугла сразмерне синусима супротны углова.

§. 57.

Изъ предходећи сразмерностій слѣдує:

$$(a+c) : (a-c) = (sin\ A + sin\ C) : (sin\ A - sin\ C)$$
$$(a+b) : (a-b) = (sin\ A + sin\ B) : (sin\ A - sin\ B)$$
$$(b+c) : (b-c) = (sin\ B + sin\ C) : (sin\ B - sin\ C)$$

т. є.

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{sin\ A + sin\ C}{sin\ A - sin\ C},\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{sin\ A + sin\ B}{sin\ A - sin\ B},$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{sin\ B + sin\ C}{sin\ B - sin\ C};$$

будући є пакъ по §. 25. $\dfrac{sin\ \varphi + sin\ \psi}{sin\ \varphi - sin\ \psi} =$
$= \dfrac{tang\ \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{tang\ \frac{1}{2}(\varphi - \varphi)}$: то є

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{tang\ \frac{1}{2}(A+C)}{tang\ \frac{1}{2}(A-C)} \\ \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{tang\ \frac{1}{2}(A+B)}{tang\ \frac{1}{2}(A-B)} \\ \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{tang\ \frac{1}{2}(B+C)}{tang\ \frac{1}{2}(B-C)} \end{array}\right\} \ldots (2.$$

и дакле уобште:

Количникъ одъ сбира две стране и ньіове разлике, раванъ є количнику тангенте полусбира, подѣлѣне тангентомъ полуразлике истымъ странама супротны углова.

§. 58.

сл. 9. Изъ слике 9. подаѥ се далѣ за полупречникъ 1, $AD = c.\cos A$, $DC = a.\cos C$, дакле

$$b = AD + DC = c.\cos A + a.\cos C.$$

Подобнымъ сматранѣмъ налазимо и

$$a = b.\cos C + c.\cos B$$
$$c = b.\cos A + a.\cos B$$

Мложећи прву равность съ b, другу съ a а трећу съ c добыямо

$$b^2 = bc.\cos A + ab.\cos C$$
$$a^2 = ab.\cos C + ac.\cos B \quad \text{и}$$
$$c^2 = bc.\cos A + ac.B\,;$$

одузимаюћи пакъ одъ сбира сваке две одъ овы равностій дотичну трећу, слѣдуѥ

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab.\cos C,$$
$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac.\cos B$$
$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos A\,; \text{ и одтуда}$$

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (3.$$

то ће рећи:

Квадратъ сваке стране равапъ ѥ сбиру квадрата друге две стране, умалѣномъ удвоенымъ производомъ исты страна и косинуса вопросной страни супротнога угла.

§. 59.

Изъ горньи равностій слѣдую за косинусе углова слѣдуюће три

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Да бы ове ирзазе, ради каснiѥ потребе, успособили за логаритмичанъ рачунъ, то поставимо у образцу $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ (§. 26. подъ 5) редомъ $2a = C$, B и A, дакле односно $a = \frac{C}{2}, \frac{B}{2}$ и $\frac{A}{2}$ Имат' ћемо

$$\cos C = 2\cos^2\frac{C}{2} - 1$$

$$\cos B = 2\cos^2\frac{B}{2} - 1$$

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$$

Заменююћи садъ косинусе у горньимъ равностима съ овима вредностима слѣдуѥ

$$2\cos^2\frac{C}{2} = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab}$$
$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$

$$2\cos^2\frac{B}{2} = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac} =$$
$$= \frac{(a+b+c)(a+c-b)}{2ac}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc};$$ или краћине ради $a+b+c=2S$, дакле $a+b-c=2(S-c)$, $a+c-b=2(S-b)$, а $b+c-a=2(S-a)$ постављаюћи,

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{S(S-c)}{ab}$$

$$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{S(S-b)}{ac}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{S(S-a)}{bc}$$, и одтуда

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}}\\ \cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(4.$$

§. 60.

Овакимъ истимъ начиномъ добыямо изъ образца $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ (§. 26).

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(S-b)(S-b)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(5.$$

Ове пакъ изразе съ предходећима дотично делећи налазимо

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}}\end{aligned}\right\}\ldots(6.$$

Заменюћи найпосле у обраацу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ (§. 26. подъ 1.) 2α редомъ съ A, B и C, а по томъ синусе и косинусе полууглова съ нъіовимъ горньимъ вредностима, находимо

$$\left.\begin{aligned}\sin A&=\frac{2}{bc}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\\ \sin B&=\frac{2}{ac}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\\ \sin C&=\frac{2}{ab}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\end{aligned}\right\}\ldots(7.$$

II. Разрешенѣ правоуглогъ триугла

а.) У обичнымъ случаєвима.

§. 61.

Правоуглый триугалъ определѣнъ є, као што знамо, ако су осимъ правога угла іошъ два нѣгова основка позната, кои само несмеду быти оба угли.

Познати дакле основци могу само быти:

1.) пречница и єдна управница; 2.) пречница и єданъ угалъ; 3.) обе управнице; 4.) єдна управница и на ньой лежећій угаль; 5.) єдна управница и супротный угаль, и мы по томе при разрешеню правоуглогъ триугла можемо имати свега само петъ разны случаєва.

Неупуштаюћи се у особито сматранѣ свакогъ поєдиногъ случая, испытат'ћемо само одношенѣ страна и углова правоуглогъ триугла уобште, изъ чега подат' ће се потомъ и исто нѣгово разрешенѣ.

§. 62.

10. По §. 56. има се у сл. 10.

1.) $c : a = \sin 90^{0} : \sin A = 1 : \sin A$

2.) $c : b = \sin 90^{0} : \sin B = 1 : \sin B$

3.) $a : b = \sin A : \sin B$;

Будући є пакъ $\sin A = \sin (90 - B) = sos\, B$, и обратно $\sin B = \sin (90^{0} - A) = sco\, A$, то имамо іошъ

4.) $c : a = 1 : \cos B$

5.) $c : b = 1 : \cos A$

6.) $a : b = \sin A : \cos A = \cos B : \sin B$

Изъ прве и четврте сразмерности слѣдує

I. $a = c.\ \sin A = c.\ \cos B.$

Изъ 2 пакъ и 5.

II. $b = c.\ \sin B = c.\ \cos A.$

найпосле изъ 6.

III. $a = b.\ \mathrm{tang}\, A = b.\ \cot B$, обратно

IV. $b = a.\ \mathrm{tang}\, B = a.\ \cot A$

По првой є дакле и другой равности свака управница равна производу пречнице са синусомъ управници супротногъ, или косинусомъ на истой лежећегъ угла, по трећой пакъ и четвртой равности свака управница равна производу оне друге управнице са тангентомъ првой супротногъ, или котангентомъ на истой лежећегъ угла.

§. 63.

Помоћу ова два правила и већъ познатогъ трећегъ $c^2 = a^2 + b^2$ у станю смо разрешити правоуглый триугалъ у свакомъ одъ поменуты случаєва. Но будући ово последнѣ уравненіє за употреблѣнѣ логаритама ніє способно, то ћемо сада іошъ показати, како се и оно врло лако зато удесити може.

Изъ истогъ уравненія слѣдує

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = a\sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2})}$$

Будући пакъ тангента, као што смо видили, (§. 10.), може имати сваку вредность одъ 0 до ∞, то можемо у овомъ изразу поставити $\frac{b}{a} = \mathrm{tang}\, \varphi$; быт' ће потомъ

$$c = a\sqrt{(1 + \mathrm{tang}^2 \varphi)} = a.\ \sec \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}$$

и одтудъ іошъ $a = c.\ \cos \varphi.$

У случаю дакле, гди бы вопросно уравненіє потребно было, изнаћи ће се найпре изъ израза

$tang\ \varphi = \frac{b}{a}$, дакле $log\ tang\ \varphi = log\ b - log\ a$, помоћный $\angle \varphi$, а съ овымъ потомъ изъ $c = \frac{a}{cos\ \varphi}$ пречница c, или изъ $a = c.\ cos\ \varphi$ управница a.

§. 64.

За површный садржай T правоуглогъ триугла ABC, добыямо изъ уравненія §. 62. подъ I, II, III редомъ

$$T = \tfrac{1}{2}\ bc.\ sin\ A = \tfrac{1}{2}\ bc\, cos\ B = \tfrac{1}{2}\ ac.\ sin\ B = $$
$$= \tfrac{1}{2}\ ac.\ cos\ A \quad \ldots\ldots\ (1$$

$$= \tfrac{1}{2}\ b^2.\ tang\ A = \tfrac{1}{2}\ b^2.\ cot\, B = \tfrac{1}{2}\ a^2.\ tang\ B =$$
$$= \tfrac{1}{2}\ a^2.\ cot\ A \quad \ldots\ldots\ (2$$

по уравненію пакъ $c^2 = a^2 + b^2$ збогъ $b = = \sqrt{(c^2 - a^2)} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ и $a = \sqrt{(c^2 - b^2)} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$ слѣдуе

$$T = \frac{a}{2}\sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{b}{2}\sqrt{(c+b)(c-b)} \ldots (3$$

Ови су изрази, као што се види, сви удесни за рачунъ съ логаритмима, и по нъима е **површный садржай правоуглогъ триугла раванъ половини производа изъ пречнице и едне управнице са синусомъ на управници лежећегъ, или косинусомъ истой супротногъ угла (1); или раванъ половини производа изъ квадрата едне управнице и тангенте на нъой лежећегъ, или котангенте супротногъ іой угла (2); или найпосле раванъ половини производа едне управнице са квадратнымъ кореномъ изъ производа сбира и разлике пречнице и исте управнице (3).**

§. 65.

Сватаюћи сва ова докучевя, удобности ради при употреблѣню, у едну таблицу, имамо

Познати основци	**Непознати** основци триугла и нѣговъ површный садржай
1.) пречница c и управница a . . .	$b = \sqrt{(c^2 - a^2)} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$; $sin\,A = \frac{a}{c}$; $T = \frac{a}{2}\sqrt{(c+a)(c-a)}$
2.) пречница c и еданъ угалъ А .	$a = c.\ sin\,A$; $b = c.\ cos\,A$; $T = \frac{c^2}{2} sin\,A\ cos\,A$ (найудобніе)
3.) обе управнице a и b	$c = \sqrt{(c^2 + b^2)}$; $tang\ A = \frac{a}{b}$; $T = \tfrac{1}{2}\ ab$
4.) една управница b и на нъой лежећій угалъ A	$c = \frac{b}{cos\ A}$; $a = b.\,tang\,A$; $T = \frac{b^2}{2}\ tang\ A$
5.) една управница a и супротный A	$c = \frac{a}{sin\ A}$; $b = a.\ cot\,A$; $T = \frac{a^2}{2}\ cot\ A$
	Приметба. У свима е случаевима $\angle B = 90^0 - A$

б.) у некимъ особитымъ случаєвима.

§. 66.

При разрешеню правоуглогъ триугла догађа се, да є место єдногъ одъ нуждна два основка познатъ сбиръ или разлика друга два, или место оба она да су задата два сбира или две разлике, или єданъ сбиръ и єдна разлика основака. Разрешенѣ у таковымъ случаєвима показат' ћемо у слѣдуюћимъ §§а, ограничаваюћи се при томъ само на найтеже.

§. 68.

1.) **Познатъ є сбиръ пречнице c и веће управнице a, $c + a = S$, или ньина разлика $c - a = D$ и она друга управница b.**

У првомъ случаю разрешавамо правоуглый триугалъ слѣдуюћимъ образцима

$$\cot B = \frac{(S + b)(S - b)}{2\ Sb} \quad \ldots\ldots (1$$

$$a = \frac{(S + b)(S - b)}{2\ S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2$$

$$c = \frac{b}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3$$

$$T = \frac{b\ (S + b)(S - b)}{4\ S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4$$

Првый, и у овомъ случаю, основный образацъ находимо слѣдуюћимъ начиномъ:

$$c = \frac{b}{\sin B} = b.\operatorname{cosec} B = b\sqrt{(1 + \cot^2 B)}$$

$a = b.\cot B$; дакле

$$c + a = S = b\left[\sqrt{(1 + \cot^2 B)} + \cot B\right],$$

или, ово уравненіє у смотреню $\cot B$ разрешаваюћи, вопросный изразъ подъ 1.

Другій подає се изъ $a = b.\cot B$, поставляюћи место $\cot B$ нађену нѣну вредность; а 4. изъ $T = \frac{1}{2}\,ab$ узимаюћи нађену у 2. вредность одъ a.

За другій случай налазимо сасвимъ истымъ начиномъ

$$1.)\quad \cot B = \frac{(b + D)(b - D)}{2Db}$$

$$2.)\quad a = \frac{(b + D)(b - D)}{2D}$$

$$3.)\quad c = \frac{b}{\sin B}$$

$$4.)\quad T = \frac{b\ (b + D)(b - D)}{4D}$$

§. 68.

2.) **Задатъ є сбиръ $a + b = s$, или разлика $a - b = d$ обадве управнице и пречница c.**

У првомъ случаю имамо

$$\cos\frac{A - B}{2} = \frac{s}{c\sqrt{2}} \quad \text{или}$$

$$\cos\ (A - B) = \frac{(s + c)(s - c)}{c^2}$$

чимъ налазимо разлику углова A и B, а помоћу нѣ и сбира $A + B = 90^o$, свакій поєдиный угалъ. Остали непознати основци и садржай триугла определюю се потомъ помоћу нађены углова.

До наведена два образца долазимо слѣдуюћимъ путемъ.

$$a = c.\ sin\ A,\ b = c.\ sin\ B;$$

дакле $a + b = s = c\,(sin\ A + sin\ B)$ одкуда слѣдуе

$$sin\ A + sin\ B = \frac{s}{c}.$$

Но по §. е 23.

$$sin\ A + sin\ B = 2.\ sin\ \frac{A+B}{2}\ cos\ \frac{A-B}{2} =$$

$$= 2.\ sin\ 45^0\ cos\ \frac{A-B}{2} = \sqrt{2}.cos\frac{A-B}{2},$$

(еръ е по §. 36. $sin\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$) слѣдователно

$$\sqrt{2}.\ cos\ \frac{A-B}{2} = \frac{s}{c};\quad \text{а}$$

$$cos\ \frac{A-B}{2} = \frac{s}{c\sqrt{2}}.$$

Онай другій изразъ добыямо изъ овога по образцу $cos\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + cos\ \beta)}$, (у §. 29. подъ 11.) поставляюћи у истомъ $\beta = A - B$, чимъ слѣдуе

$cos\ \frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + cos\ (A-B)\right]}$ а по предходећой равности

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + cos\ (A-B)\right]} = \frac{s}{c\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{2}\left[1 + cos\ (A-B)\right] = \frac{s^2}{2c^2}$, и одтуда

$$cos\ (A-B) = \frac{s^2 - c^2}{c^2} = \frac{(s+c)(s-c)}{c^2}$$

У другомъ случаю овога задатка имамо

$$sin\ \frac{A-B}{2} = \frac{d}{c\sqrt{2}}\quad \text{или}$$

$cos\ (A-B) = \frac{(c+d)(c-d)}{c^2}$, кое изразе добыямо такођеръ вишеназначенымъ путемъ.

§. 69.

3.) **Задатъ е сбиръ или разлика пречнице и едне управнице $c + a = S$, или $c - a = D$, и еданъ уголъ н. пр. A.**

За првый случай имамо найпре пречницу

$$c = \frac{S}{2.\ sin^2\,(45^0 + \frac{A}{2})} = \frac{S}{2\ cos^2\ (45^0 - \frac{A}{2})},$$

коіомъ после помоћу познатогъ угла определюемо остале основке и садржай.

За другій случай имамо

$$c = \frac{D}{2\ sin^2\,(45^0 - \frac{A}{2})} = \frac{D}{2\ cos^2\,(45^0 + \frac{A}{2})}$$

Ови образци добыяю се слѣдуюћимъ начиномъ:

$$a = c.\ sin\ A,\quad \text{дакле}$$

$$c + a = S = c\ (1 + sin\ A)$$

$$c - a = D = c\ (1 - sin\ A),$$

а одтуда

$$\left.\begin{array}{l} c = \dfrac{S}{1 + \sin A} \\ c = \dfrac{D}{1 - \sin A} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha$$

Поставляюћи у образцу §. 23.

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, \quad \text{и}$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

угалъ $\varphi = 90^0$, а $\psi = A$, слѣдуе

$$\sin 90^0 + \sin A, \text{ т. е.}$$

$$1 + \sin A = 2\sin(45^0 + \frac{A}{2})\cos(45^0 - \frac{A}{2})$$

$$1 - \sin A = 2\cos(45^0 + \frac{A}{2})\sin(45^0 - \frac{A}{2});$$

будући е пакъ $(45^0 - \frac{A}{2})$ комплементъ одъ $(45^0 + \frac{A}{2})$ и обратно, т. е. будући е $(45^0 + \frac{A}{2}) + (45^0 - \frac{A}{2}) = 90^0$:

то е $\cos(45^0 - \frac{A}{2}) = \sin(45^0 + \frac{A}{2})$, и обратно

$\cos(45^0 + \frac{A}{2}) = \sin(45^0 - \frac{A}{2})$, — и збогъ тога

$$1 + \sin A = 2\sin^2(45^0 + \frac{A}{2}) = 2\cos^2(45^0 - \frac{A}{2})$$

$$1 - \sin A = 2\cos^2(45^0 + \frac{A}{2}) = 2\sin^2(45^0 - \frac{A}{2})$$

кое вредности, у уравненія подъ α поставлѣне, даю наведена два израза пречнице c.

§. 70.

4. Познатъ е обадве управнице сбиръ $a + b = s$, или ньина разлика $a - b = d$, и еданъ угалъ, н.п. A.

За првый случай имамо

$$c = \frac{s}{\cos\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}}, \quad \text{а за другій}$$

$$c = \frac{d}{\sin\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}};$$

съ пречницомъ пакъ c и познатымъ угломъ A определюемо све остале основке.

Ове образце налазимо слѣдуюћимь начиномъ. По §у е 62.

$$a = c.\sin A,\ b = c.\sin B, \quad \text{дакле}$$

$$s = a + b = c.(\sin A + \sin B), \quad \text{а}$$

$$d = a - b = c.(\sin A - \sin B), \quad \text{и одатле}$$

$$c = \frac{s}{\sin A + \sin B} = \frac{d}{\sin A - \sin B},$$

или обзиромъ на §. 68.

$$c = \frac{s}{\cos\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}} = \frac{d}{\sin\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}}$$

III. *Разрешенѣ косоуглогъ тригула.*

а.) У НАЙОБИЧНІИМЪ СЛУЧАЕВИМА.

§. 71.

Косоуглый триугалъ подпуно определѣнъ е, као што знамо, 1.) Чрезъ све три нѣгове стране,

2.) две стране и заключеный угалъ,

3.) две стране и већой супротный угалъ, и

4.) єдномъ страномъ и оба на ньой лежећа угла.

Извидимо дакле, како се таковый триугалъ разрешава у свакомъ одъ овы случаєва по на особъ, означуюћи при томъ єданпутъ за свагда стране триугла, као у §у 56. съ a, b и c, угле съ A, B и C, а садржай съ T.

1.) Познате су све три стране a, b и c; тражесе дакле угли A, B и C и површный садржай T.

§. 72.

Непознате угле налазимо у овомъ случаю найудобніє посредствомъ образаца §. 60. подъ 5,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}\,,$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}\,,$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}\,;$$

при чему морамо приметити, да бы довольно было изнаћи овымъ начиномъ само два угла, н. п. A и B, єръ є съ ньима, збогъ $A+B+C=180^0$, дакле $C=180^0-(A+B)$, познатъ и трећій; но болѣ є определити и овай поменутымъ, одъ она два угла сасвимъ независнымъ начиномъ. У обште валя одъ яко не само при разрещеню триуглова, него и при другимъ задатцима наблюдавати то начело: да

непознате основке, гди годъ се може, неопределюємо єданъ посредствомъ већъ изнађеногъ другогъ, но свагда само помоћу задаты, да не бы се погрешка при єдномъ одъ ньи учинѣна, пренела и на оне друге.

О точности овако определѣны углова уверавамо се ньіовымъ сабиранѣмъ, по чему, ако су добро изнађени, ньіовъ сбиръ мора быти раванъ 180^0.

Површный садржай найпосле добыямо познатымъ изъ геометріє образцемъ

$$T=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)},$$

при комъ є S као и у горньимъ образцима $=$ $=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

§. 73.

Примера ради нека є у вопросномъ случаю

$$\left.\begin{aligned} a &= 42\\ b &= 38\\ c &= 24\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{дакле } S=\tfrac{1}{2}(42+38+24)=\tfrac{1}{2}\,104=52\\ &S-a=52=42+10\,,\ S-b=52-38=14,\ \text{а}\\ &S-c=52-24=28.\end{aligned}$$

По горнѣму є

$$1.)\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{14\times 28}{38\ \ 24}}=\frac{7}{\sqrt{114}}$$

$$\log\sin\frac{A}{2}=0{\cdot}845098\ \ldots\ldots\ldots\ \log 7$$

$$\underline{-1{\cdot}028453\ \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}\log 114}$$

$0{\cdot}816645-1$, или за полупречникъ таблица (по §. 53.)

$$
\begin{array}{ll}
log\ T = 1{\cdot}322219 \ldots\ldots\ldots & log\ \frac{1}{2}\ a \\
 1{\cdot}579784 \ldots\ldots\ldots & log\ b \\
 0{\cdot}752643 - 1 \ldots\ldots & log\ sin\ C \\
 2{\cdot}654646 & \\
 -562 & \\
 840 : 96 = 8 &
\end{array}
$$

и одтудъ

$$T = 451{\cdot}48$$

3.) Познате су две стране a и b, и већой супротный $\angle A$; траже се дакле трећа страна c, угли B и C и садржай T.

§. 78.

У овоме случаю имамо прво по §у 56.

$a : b = sin\ A : sin\ B$, дакле

$$sin\ B = \frac{b.\ sin\ A}{a}\text{, чимъ добыямо } \angle B$$

а съ овимъ и трећій $\angle C$, єръ є $C = 180 - (A + B)$.

Трећу страну c находимо по томъ изъ сразмерности

$a : c = sin\ A : sin\ C$, изъ коє слѣдуе

$$c = \frac{a.\ sin\ C}{sin\ A}.$$

Найпосле садржай триугла налази се у овомъ случаю као годъ у пређашнѣмъ.

§. 79.

Задржаваюћи узетый већъ примеръ имамо у настоећемъ случаю по горнѣму

1.) $$sin\ B = \frac{38.\ sin\ 81^0\ 55'\ 54''}{42}$$

$$= \frac{19.\ sin\ 81^0\ 55'\ 54''}{21}$$

$$
\begin{array}{ll}
log\ sin\ B = 1{\cdot}278754 \ldots\ldots\ldots\ldots & log\ 19 \\
 9{\cdot}995679 \ldots\ldots\ldots & log\ sin\ A \\
 11{\cdot}274433 & \\
 -1{\cdot}322219 \ldots\ldots\ldots & log\ 21 \\
 9{\cdot}952214 & \\
 -168 & \\
 46 : 1{\cdot}05 = 44'' & \text{дакле}
\end{array}
$$

$\angle B = 63^0\ 36'\ 44''$

$\angle C = 180 - (A + B) = 34^0\ 27'\ 22''$

2.) $$c = \frac{42.\ sin\ 34^0\ 27'\ 22''}{sin\ 81^0\ 55''\ 54''}$$

$$
\begin{array}{ll}
log\ c = 1{\cdot}623249 \ldots\ldots\ldots\ldots & log\ a \\
 \left.\begin{array}{r} 9{\cdot}752576 \\ 67 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots & log\ sin\ C \\
 11{\cdot}375892 & \\
 -9{\cdot}995679 \ldots\ldots\ldots & log\ sin\ A \\
 1{\cdot}380213 & \\
 -1 & \\
 2 &
\end{array}
$$

$$c = 24{\cdot}00$$

4.) Позната є една страна a съ оба на ньой лежећа угла B и C; траже се дакле друге две стране b и c, трећій угалъ A и садржай T.

§. 80.

У овомъ є, одъ свію найпростіємъ случаю, съ углима B и C познатъ и трећій A, и раванъ є

$180^0 - (B + C)$; стране пакъ и садржай триугла налазимо као и у пређашнѣмъ случаю

$$b = \frac{a. \sin B}{\sin A}, \; c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$T = \tfrac{1}{2} ab \sin C = \tfrac{1}{2} ac \sin B = \tfrac{1}{2} bc \sin A$$

Примеръ є овде излишанъ.

б.) у некимъ особитымъ случаєвима.

§. 81.

Осимъ ова четири проста случая, да разрешимо іоштъ неколико одъ оны, у коима є место єдногъ или другогъ нуждногъ основка познатъ сбиръ или разлика друга два. Овы случаєва има при косоугломъ триуглу наравно млого више него при правоугломъ; но мы се овде морамо ограничити на разрешенѣ само оны, кои се логаритмично рачунати могу. Таковы има четири и єсу

1.) **Задате су две стране** a **и** b **и разлика истима супротны углова** $(A - B)$;

2.) **Позната су два угла** A **и** B **— дакле и трећій** C**—, и сбиръ или разлика две стране, н. п.** $(a + b)$ **или** $(a - b)$;

3.) **Познатъ є єданъ угалъ** C**, супротна страна** c **и сбиръ или разлика две друге стране, т. є.** $(a + b)$ **или** $(a - b)$;

4.) **Задата є єдна страна** c**, єданъ на ньой лежећій угалъ н. п.** B**, и сбиръ или разлика остале две стране** $(a + b)$ **или** $(a - b)$

§. 82.

У првомъ случаю определюємо найпре $\angle C$ помоћу образца

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cot \tfrac{1}{2} (A - B);$$

У другомъ разлику страна $(a - b)$ изъ познатогъ сбира образцемъ

$$a - b = (a + b). \tan \tfrac{1}{2} (A - B). \tan \frac{C}{2},$$

обратно сбиръ изъ познате разлике образцемъ

$$a + b = (a - b) \cot \tfrac{1}{2} (A - B) \cot \frac{C}{2}.$$

У трећемъ случаю тражимо найпре разлику углова $(A - B)$, и то: при познатомъ сбиру страна $(a + b)$ образцемъ

$$\cos \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{a + b}{c} \sin \frac{C}{2},$$ а при познатой разлики исты страна образцемъ

$$\sin \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{c} . \cos \frac{C}{2}.$$

У четвртомъ найпосле случаю определюємо угалъ A образцима

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{(a + b) + c}{(a + b) - c} . \tan \frac{B}{2}, \quad \text{и}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{c + (a - b)}{c - (a - b)} . \tan \tfrac{1}{2} B;$$

првимъ, ако є познатъ сбиръ, а другимъ ако є позната разлика страна a и b.

Помоћу овы изнађены количина добыямо по томъ и све остале непознате основке триугла познатымъ већъ начинима одъ пређашньи просты случаева.

§. 83.

1.) Образацъ за првый случай слѣдує изъ познате равности (§. 57. подъ 2.)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tang\,\frac{1}{2}(A+B)}{tang\,\frac{1}{2}(A-B)},$$ узимаюћи место

$\frac{1}{2}(A+B)$ равну вредность $\frac{1}{2}(180-C)=90^0-\frac{C}{2}$; по чему, збогъ $tang\,(90-\frac{C}{2})=cot\,\frac{C}{2}$, слѣдує

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{cot\,\frac{1}{2}C}{tang\,\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{cot\,\frac{1}{2}(A-B)}{tang\,\frac{1}{2}C}$$

и одтуда увиђавнымъ начиномъ првый образацъ, као што є наведенъ

$$tang\,\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,cot\,\frac{1}{2}(A-B).$$

2.) Изъ овога подаю се далѣ

$$a-b=\frac{(a+b)\,tang\,\frac{1}{2}C}{cot\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=(a+b)\,tang\,\frac{C}{2}\,tang\,\frac{1}{2}(A-B)$$ и

$$a+b=\frac{(a-b)\,cot\,\frac{1}{2}(A-B)}{tang\,\frac{1}{2}C}$$

$$=(a-b)\,cot\,\frac{1}{2}(A-B)\,cot\,\frac{C}{2}$$

образци другогъ случая.

§. 84.

1.) Збогъ $cot\,\varphi=\frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$ имамо изъ последнѣ равности предходећегъ §.

$$a+b=(a-b)\cdot\frac{cos\,\frac{1}{2}(A-B)\,cos\,\frac{1}{2}C}{sin\,\frac{1}{2}(A-B)\,sin\,\frac{1}{2}C}.$$

Будући є пакъ $a=\frac{c.\,sin\,A}{sin\,C}$, $b=\frac{c.\,sin\,B}{sin\,C}$; то є

$$a+b=\frac{c\,(sin\,A+sin\,B)}{sin\,C}=\frac{c.\,sin\,\frac{1}{2}(A+B)\,cos\,\frac{1}{2}(A-A)}{sin\,C}$$

или збогъ $sin\,\frac{1}{2}(A+C)=sin\,\frac{1}{2}\,(180-C)=$ $=sin\,(90^0-\frac{C}{2})=cos\,\frac{C}{2}$, и $sin\,C=2\,sin\,\frac{C}{2}\,cos\,\frac{C}{2}$,

$$a+b=\frac{c.\,cos\,\frac{1}{2}(A-B)}{sin\,\frac{1}{2}\,C},$$

кою вредность у горнѣ уравненіе поставляюћи и уєдно скраћуюћи, слѣдує

$$c=(a-b)\,\frac{cos\,\frac{1}{2}\,C}{sin\,\frac{1}{2}(A-B)},$$ и одтуда

$$sin\,\frac{1}{2}\,(A-B)=\frac{a-b}{c}\,.\,cos\,\frac{C}{2},$$

коє є другій образацъ трећегъ случая. Подобнымъ начиномъ налазимо и првый.

2.) По §у є 60.

$$tang\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$tang\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}}$$

Ова уравненія єданпутъ мложећи, а другій путъ прво чрезъ друго делећи, добыямо

$$tang\,\frac{A}{2}\,tang\,\frac{B}{2}=\frac{tang\,\frac{1}{2}\,B}{cot\,\frac{1}{2}\,A}=\frac{S-c}{S}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=$$
$$=\frac{(a+b)-c}{(a+b)+c}$$ и

$$\frac{tang\frac{1}{2}A}{tang\frac{1}{2}B}=\frac{S-b}{S-a}=\frac{a+c-b}{c+b-a}=\frac{c+(a-b)}{c-(a-b)};$$ и одтуда односно

$$cot\ \frac{A}{2}=\frac{(a+b)+c}{(a+b)-c}\ tang\frac{B}{2}$$ и

$$tang\frac{A}{2}=\frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}\ tang\frac{B}{2},$$

образце четвртогъ случая.

Б.) Употребленѣ доякошнѣга на разрешенѣ неколико геометричны задатака.

I. *Разрешенѣ неколико задатака о кругу и правилномъ полигону.*

§. 85.

сл. 1. Нека є у слики 1. лукъ $MM_1=\psi$, нѣгова тетивка $MDM_1=s$, управна на тетивку $CD=h$, найпосле полупречникъ $MC=AC=M_1C=r$. За овай полупречникъ быт' ће тадъ половина тетивке MD синусъ полуугла ψ, т. є. $\frac{s}{2}=Sin_r\frac{\psi}{2}$ или за полупречникъ 1, $\frac{s}{2}=r.\ sin\frac{\psi}{2}$, и одтуда

$$s=2r.\ sin\ \frac{\psi}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.$$

Изъ коє равности слѣдую друге две

$$r=\frac{s}{2\,sin\ \frac{\psi}{2}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2.$$ и

$$sin\ \frac{\psi}{2}=\frac{s}{2r}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3.$$

Помоћу овы равности у станю смо разрешити слѣдуюћа, геометріомъ неразрешена три задатка:

1.) Изъ познатогъ полупречника r и познатогъ лука ψ, изнаћи овоме луку принадлежећу тетивку s.

2.) Изъ познатогъ лука ψ и нѣгове тетивке s определити полупречникъ r; и

3.) Изъ познатогъ полупречника r и тетивке s изнаћи овомъ тетивкомъ затегнутый лукъ ψ.

§. 86.

Првый и другій одъ горньи образаца добыяю особиту важность при правилномъ полигону, єръ се съ ньима изъ познатогъ полупречника r може изнаћи страна свакогъ таковогъ полигона и обратно изъ ове полупречникъ, око истогъ полигона написанога круга. При тыма є задатцима ψ као средиштный угалъ свагда познатъ, и раванъ $\frac{360^0}{n}$, означуюћи съ n брой страна. Половина є дакле тога угла $\frac{\psi}{2}=\frac{180^0}{n}$, и по томе имамо за разрешенѣ исты задатака

$$s=2r.\ sin\frac{180^0}{n},$$ а

$$r=\frac{s}{2\,sin\ \frac{180^0}{n}}$$

§. 87.

Садржай правилнога полигона може се тригонометрично такођеръ изнаћи, и, као што ћемо одма видити, млого лакше него познатымъ изъ геометріє начиномъ. По овоме є садржай полигона

$$P = nt = n.\ \frac{sh}{2},$$

при чему s страну MM_1, а h висину CD триугла MCM_1, дакле $t = \frac{sh}{2}$ садржай овога триугла представляю, каковы триуглова у правилномъ N-няку има као што знамо, n.

Сматраюћи слику налазимо, да є $h = Cos_r \frac{\psi}{2} = r \cos \frac{\psi}{2}$, s є пакъ, по првомъ образцу §а 85, $= 2r \sin \frac{\psi}{2}$; дакле садржай полигона $P = n.\ \frac{s}{2}.\ h = n.\ r^2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}$, или, збогъ $2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} = \sin \psi$ (§. 26. обр. 1.), и дакле $\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2} \sin \psi$, $P = \frac{n}{2} r^2 \sin \psi$; найпосле место ψ нѣгову вредность узимаюћи,

$$P = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{180^0}{n}.$$ То ће рећи:

Садржай правилнога полигона равянъ є полуброю страна, помложеномъ съ производомъ квадрата полупречника и синуса половине средништногъ угла.

§. 88.

Задатакъ. Изъ познатогъ лука ψ и полупречника r, изнаћи садржай окружногъ окрайка MAM_1DM (слика 1.) сл. 1.

Разрешенѣ. Познато є изъ геометріє, да се садржай окрайка добыя, ако се одъ садржая клина $CMAM_1$ одузме садржай триугла MCM_1.

Садржай є клина $K = \frac{\psi}{360^0} \cdot r^2 \pi$, а садржай триугла по §. 87. $t =.\ r^2 \frac{\sin \psi}{2}$; дакле

садржай окракай

$$O = K - t = \frac{\psi}{360} r^2 \pi - r^2 \frac{\sin \psi}{2}$$
$$= \frac{22.\ r^2 \psi}{7.360} - r^2 \frac{\sin \psi}{2}$$
$$= \frac{11\ r^2 \psi}{1260} - r^2 \frac{\sin \psi}{2}$$

Да бы овай изразъ удесили за удобно употреблѣнѣ логаритама, извуцимо найпре $\frac{11}{1260} r^2 \psi$ као чинителя оба члана и заменимо потомъ другій членъ съ косинусомъ помоћногъ некогъ угла ω; быт' ће

$$O = \frac{11}{1260} r^2 \psi \left(1 - \frac{630.\ \sin \psi}{11.\ \psi}\right).$$

Поставляюћи пакъ као што рекосмо

$$\frac{630 \sin \psi}{11.\ \psi} = \cos \omega \ldots\ldots. (\alpha,$$ имамо

$$O = \frac{11}{1260} r^2 \psi \, (1 - \cos \omega), \text{ или због}$$

$1 - \cos \omega = 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}$ (§. 27. обр. првый подъ 6.)

$$O = \frac{11}{630} r^2 \psi \; \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

Садржай окрайка дакле изнаћи ћемо, ако найпре определимо изъ уравненія подъ α помоћный угалъ ω и овога вредность поставимо потомъ у последнѣ уравненіє.

§. 89.

Да є овай рачунъ много краћій него дояко познатый, увиђа се на првый погледъ. Но онъ є уєдно и много лакшій, єръ не само, да при истомъ тетивку никако неупотреблявамо, него се іошъ и оба израза, коє логаритмички израчунати имамо, у већой части изъ єднаки броєва састоє, и дакле єднакимъ и логаритмима рачунаю. Єданъ ће насъ примеръ о свему овоме найболѣ уверити. Нека є дакле $\psi = 38^0$, $r = 8$. У овомъ є случаю

$$\cos \omega = \frac{630 \sin 30^0}{11.38}$$

$\log \cos \omega = 2{\cdot}799341 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \log 630$
$\quad + 9{\cdot}789342 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \log \sin 38^0$
$\quad 12{\cdot}588683$
$\quad - 1{\cdot}041393 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \log 11$
$\quad 1{\cdot}579784 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \log 38$
$\quad 9{\cdot}967506$
$\quad -471$
$\quad 35 : 0{\cdot}85 = 41$

$21^0 \; 54'$
$\quad - 41''$

$$\omega = 21^0 \; 53' \; 19'', \; \frac{\omega}{2} = 10^0 \; 56' \; 39''$$

$$O = \frac{11}{630} \, . \, 64. \; 38. \; \sin^2 10^0 \; 56' \; 39''$$

$\log O = 1{\cdot}041393 \; . \; . \; . \; . \; \log 11$ (само преписанъ)
$\quad + 1{\cdot}806180 \; . \; . \; . \; \log (8^2 = 64)$
$\quad + 1{\cdot}579784 \; . \; . \; . \; . \; \log 38$ (преписанъ)
$\quad 0{\cdot}277991 - 1$
$\quad + 0{\cdot}555982 - 2 \ldots \log \sin \frac{\omega}{2}$ за пол. 1
$\quad 2{\cdot}983339$
$\quad -2{\cdot}799341 \; . \; . \; . \; . \; \log 630$ (преписанъ)
$\quad 0{\cdot}183998$
$\quad -839$
$\quad 1590 : 285 \doteq 5$

$$O = 1{\cdot}5275 = 1{\cdot}53$$

II. *Определьиванѣ неприступны одстоянія.*

§. 90.

1.) Задатакъ. Определити на єдномъ краю *B* неприступно одстояніє *AB*. (сл. 11.) сл. 11.

Разрешенѣ. Изъ приступне точке *A* треба подъ произвольнымъ угломъ означити и измерити праву *AC*, и потомъ угломеромъ узети угле *A* и *C*; тымъ ћемо одъ триугла *ABC* знати єдну страну *AC* и оба на ньой лежећа угла *A* и *C*, непознато дакле одстояніє *AB*, као страна истогъ триугла, быт' ће