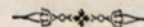


R, 569

ОСНОВНЕ ЧЕРТЕ

РАВНЕ И СФЕРИЧНЕ

ТРИГОНОМЕТРИЈЕ.



ЗА ПОТРЕБУ ВИШИ УЧИЛИШТА КНЯЖ.
СРБИЈЕ

ИЗРАДИО

ВМШТАНИЈЕЪ КОСОВИЧЕВИЊЕЪ,

при войной академіи К. С. основне и више математике, практичне геометрије и механике професоръ; школске комисіи и друштва србске словесности чланъ.

прегледала и одобрила школска комисія.

цена € 12 гроша.

ДРЖАВА СРБИЈА

У БЕОГРАДУ.

У Књигопечатњи Княжества Србије.

1854.

БИБЛИОТЕКА
ПЕДАГОШКОГ МУЗЕЈ БЕОГРАД

Wirke! Das ist das große Gesetz, in des Tempels
Tafeln gehauen. Клопфост.

ИМБ. БР. _____



4433383

ПРЕДГОВОРЪ.

Три важна узрока, 1.) безъ сумнѣ велика педагогична и практична користь математичнога знања, — 2.) врло ограничено башъ таково знањ кодъ веће части наши учителя, особито по мањимъ школама, и 3.) готово коначна оскудица у цели сходнимъ те струке делама на нашемъ ѣзику: побудила су ме на израђенѣ математике за школску потребу, одъ првогъ корака у нѣој на до највыше кодъ насъ учеће се нѣне части, најсходнимъ, постепеномъ умномъ развѣнню ученика саображавајућимъ се начиномъ и обзиромъ на горе поменуту нѣну двојку цѣль.

Тимъ се я посломъ занимамъ већъ више година; но како ми зато збогъ многи други мои явны и приватны дужностей врло мало времена остае, то ће проћи безъ сумнѣ јошъ неколико година докъ съ њимъ сасвимъ и онако готовъ будемъ као што самъ радъ.

Тога ради, т. е. да бы и дотле нешто принео къ олакшици и што већемъ успеху учеће се наше младежи у тој науци, предузео самъ израђивати према потреби,

но сасвимъ у кратко све оне нѣне части, коє се кодъ насъ дояко іошъ никако нису учили и о којима іошъ манѣ на нашемъ ѳзизу каковы кнѣига има.

Томъ намеромъ дакле и тимъ начиномъ израѣене су ове, одъ высокославногъ попечительства просвѣштєня за школску кнѣигу примлѣне „**основне черте равне и сферичне тригонометрїе.**“

Све ово морао самъ напоменути, да ме небы ко окривїо збогъ тога, што се появлюемъ найпре съ онаковымъ частима мога предмета, коє друге прѣстїє предпоставляю, и при томъ зашто у таковой само краткоѣи.

У осталомъ еда ли и у колико ово моє делце одговара изявлѣной намери съ нѣимъ и потреби наши выши школа, за коє є написано, — као и є ли распореѣенѣ и излаганѣ нѣговы предмета педагогично и практично сходно: нека пресуде они, кои све то, па дакле и исту науку познаю болѣ него я. Критика у томъ обзиру и одъ такovy лица бытѣе ми тимъ милїя, што бы се нѣомъ осимъ мана, коє на свакої начинѣ исправити валя, одкрило уєдно и све оно, што є оригинално, и коє ми се дакле у праву аукторску заслугу брѣяти има.

При томъ имамъ само іошъ приметити како самъ я при израѣеню истогъ овогъ

делца осимъ веѣъ познате цели имао іошъ поглавито у виду и практичну потребу оны мои ученика, кои ѣе остати и после у техничной струци.

Та є нѣова потреба мени као инженеру и уобште технику, смемъ реѣи, врло добро позната. Поузвано надамъ се дакле, да самъ съ нѣимъ намирїо ако можѣ да не и ону другу, а оно барѣ ову єдну потребу, и да зато заслужуемъ ако иначе ничїю, а оно за цело тїй мои ученика признателность. Увиде ли они то позднїє, онда є мой трудѣ више него у пола награѣенѣ.

Напоследку у смотреню ѳзика признаемъ искрено, да самъ іошъ доста слабѣ, но и сасвимъ наравно, єрѣ є была такова прилика, да самъ и я као многи други Срби осимъ часловца и псалтира све друго морао учити на туѣемъ ѳзизу. Погрешке дакле у томъ смотреню опраштайте да бы вамъ се опростиле.

На Иванѣданѣ 1854.

Јосимовиѣъ.

САДРЖАЙ.

	Страна
Уводъ	1.

Књига прва. Гоніометрія.

А.) Просте или основне гоніометричне функціе.

I. Основна понятія	3.
II. Свойства основны функція	5.
прегледна таблица овы свойства	9.
таблица комплементарны и суплементарны функція	12.
III. Међусобно одношенъ функція	13.
прегледна таблица овы одношеня	17.

Б.) Сложене функціе.

I. Функціе сбора и разлике два угла	18.
II. Сборъ и разлика едноимены функція два угла	22.
III. Функціе двогубогъ угла и полуугла	24.

В.) Преобраћанъ функція и њово рачунанъ.

I. Преобраћанъ ф.	29.
II. Рачунанъ ф. за полупречникъ 1.	32.

Г.) Построй и употреблѣнъ тригон. таблица, и преобраћанъ лучне мере у праву и обратно.

I. Построй и употреблѣнъ тригон. таблица	44.
II. Преобраћанъ лучне мере у праву и обратно	51.

Књига друга. Равна Тригонометрія.

А.) Разрешенъ триугола.

I. Обшта свойства триугола	54.
--------------------------------------	-----

	Страна
II. Разрешеніе правоуглогъ триугла	
а.) у обычныхъ случаевима	59.
таблица образаца за разр. правоуг. тр. у свима овимъ случаевима	63.
б.) у некимъ особитымъ случаевима	64.
III. Разрешеніе косоуглогъ триугла	
а.) у наибичниимъ случаевима	69.
б.) у некимъ особитымъ случаевима	80.
Б.) Употребленіе докошнѣга на разрешеніе неко- лико геометр. задатака.	
I. Разрешеніе неколико задатака о кругу	84.
II. Определьваніе неприступны одстоянія	89.
III. " висина	93.
IV. Потенотовъ проблемъ	95.
V. Среднѣнѣ углава	99.

Книга трећа. Сферична Тригонометрія.

A.) Уводна понятія и правила; свойства сферичны триу- глова, и основна уравненія сфер. тригонометріе.	
I. Уводна понятія и правила	101.
II. Свойства сферичны триглова	108.
III. Основна уравненія за разрешеніе сф. триглова	117.

Б.) Разрешеніе сфер. триглова.

I. Разрешеніе правоуглогъ триугла	125.
II. Разрешеніе косоуглогъ триугла	134.
III. Определьваніе садржая и ексцеса сфер. триглова	147.

В.) Разрешеніе два важна геодетична задатка.

I. Пренашаніе углава на хоризонтъ	159.
II. " сфер. угла на тетивке	163.

Особитый додатокъ.

Назначеніе неколико обширніи тригоном. дела	165.
---	------

У В О Д Ъ.

§. 1.

Изъ геометріе знамо, да е свакій триугалъ са три нѣгова основка — стране и угли —, међу којима е найманѣ една страна, подпуно определѣнѣ.

Часть математике, коя учи изъ три у броевима задата основка триугла остале нѣгове основке и садржай рачуномъ определити, или краће рећи: триугалъ разрешити, зове се тригонометрія или тригломеріе.

Ова наука дели се по положенію вопроснога триугла на равну и сферичну тригонометрію. Равна тригонометрія занима се съ триглыми у равнини, а сферична съ триглыми на површию сфере.

§. 2.

Тригонометрія по горнѣму основана е на строгой међусобной зависимости углава и страна триугла. Но одношеніе исты нѣговы основака, збогъ нѣгове разнородности, не може се определити непосредствено само броемъ; зато тригонометрія, да бы свою цѣль постигла, мора узети у помоћ неке одъ углава зависне, а странама сразмерне праве, коє називамо тригонометричнымъ, или болѣ гоніометричнымъ — угломернымъ — триуглама.

Нѣнь задатакъ састои се дакле найпре у испытываню свойства гониометричны пруга и нѣювомъ разномъ опредѣливаню, а потомъ у употребленю исты пруга на разрешенѣ правостраны и сферичны триуглова. Тога ради делимо целу науку на три главне части или кнѣиге. Прва сматра гониометричне пруге, збогъ чега називамо ю гониометриомъ; оне друге две пакъ употребляю докученя прве на разрешенѣ правостраны и сферичны триуглова, и образую дакле равну и сферичну тригонометрию у тешнѣмъ или правомъ смыслу.

Гониометрично разрешенѣ полигона сачивява за себе четверту часть тригонометриѣ подѣ именемъ полигонометриѣ, коя се у новіе доба подигла до особите науке, но о коіой у овоме дѣлу, као о предмету изванѣ нѣговы граница лежеѣмъ, неможе быти никакоговогъ далѣгъ спомена.

§. 3.

Што се наипосле тиче начина у тригонометричнымъ доводима и доказима, то се ови могу извести или геометричнымъ или чисто аналитичнымъ сматранѣмъ. Последнѣй се начинѣ у наше доба, збогъ савршене обштости таковы доказа, веѣма употреблюѣ; но мы ѣмо се при свемъ томъ и онымъ првымъ служити свуда, гди се съ нѣимъ брже и лакше до цѣли долази.

КНѢИГА ПРВА. ГОНИОМЕТРИЯ.

А.) Просте или основне функціе.

1. Основна понятія.

§. 4.

Ако изъ врха C некогъ угла $ACM = \varphi$ (сли- сл. 1. ка 1.) напишемо меѣу нѣгове краке съ произвольнымъ полупречникомъ $AC = CM = r$ лукъ AM , и спустимо потомъ изъ єдногъ края M истога лука на супротный полупречникъ AC управну MD , у другомъ пакъ лука краю A подигнемо на истый полупречникъ управну — дирку — AT до пресеца- ния съ продуженымъ другимъ полупречникомъ MC у точки T : то се управна MD зове синусъ — *sinus* —; часть полупречника AC одъ края A до синуса, т. є. одстояніе AD поперечный синусъ — *sinus versus* —; часть AT геометричне дирке у A тангента — *tangens* —, а продуженый полупречникъ MC до пресеца- ния съ истомъ диркомъ, т. є. одстояніе CT секанта — *secans* — лука AM или угла φ , за полупречникъ r .

Изъ узрока што се ове четири пруге, као што ѣмо позднѣ увидити, при найманьой премени дотичного угла или нѣгова лука и саме съ места меняю тако, да нѣюва величина свагда само одъ нѣга завьси: наричу се іошъ све четири обштымъ

именомъ тригонометричне — болъ бы было го-
нометричне — функціе или дѣйства тичућегъ се
угла или лука, и означую се слѣдуюћимъ скраће-
нымъ начиномъ.

$$MD = \sin. \varphi, AD = \sin. v. \varphi, AT = \tan. \varphi, \\ CT = \sec. \varphi$$

§. 5.

сл. 1. Продужуюћи на ниже лукъ AM и нѣговъ си-
нусъ MD до међусобногъ пресецања у M_1 : бытѣ
лукъ $AM_1 = AM$ т. е. $\angle ACM = \angle ACM_1 = \varphi$, и да-
кле $\angle MCM_1 = 2\varphi$, а $MD = DM_1 = \frac{1}{2} MM_1$. По томе

Синусъ некогъ угла ніе ништа друго, но
полутетивка удвоеногъ истогъ угла.

Старіи математици употреблявали су у тригоме-
трии тетивке место синуса, и они, кои су се при
томъ служили латинскимъ езикомъ, називали су их
inscriptae, а ныне половине *semissis inscriptae*.
Скраћуюћи ово име у рачуну найпре на *s. ins.*, а поз-
дніе на *sin.*, постало е по мнѣню неки ауктора
име *sinus*. Други на противъ веле, и то е вѣро-
ватніе, да е то име само преводъ, за дотичну
функцію одъ Арапа алегорично употребляване ре-
чи цаибъ, коя као и у латинскомъ значи недра.

§. 6.

Допуна некогъ угла до правога, т. е. допуна
нѣгове мере до едне четврти круга, назива се нѣ-
говымъ комплементомъ; нѣгова пакъ допуна до
два права угла или по круга, суплементомъ. Ком-
плементъ дакле некогъ угла φ ніе ништа друго но
нѣгова разлика одъ едногъ правогъ угла, или $90^\circ - \varphi$,
а суплементъ разлика одъ два права угла, или
 $180^\circ - \varphi$. Обе те допуне бытѣ, као што е лако

увидити, одрицателне, ако е угаль φ односно већій
одъ едногъ или одъ два права угла.

§. 7.

Ако е у сл. 2. $\angle \varphi + \psi = 90^\circ$, у сл. пакъ 3. $\angle \varphi - \psi =$ сл.
 $= 90^\circ$: то е по предходећему угаль ψ у оба слу-
чая комплементъ угла φ .

Функціе комплементногъ угла ψ називаю се
кофункціама или садѣйствама угла φ . По на-
особъ е ME косинусъ — *cosinus* —, BE поперечный
косинусъ — *cosinus versus* —, BG котангента —
cotangens —, а CG косеканта — *cosecans* — угла φ
за полупречникъ $AC = r$, кое слѣдуюћимъ начи-
номъ означуемо:

$$ME = \cos. \varphi, BE = \cos. v. \varphi, BG = \cot. \varphi, CG = \\ = \operatorname{cosec}. \varphi.$$

По себи увиђа се, да е обратно $\angle \varphi$ компле-
ментъ угла ψ , и да су нѣгове функціе кофункціе
угла ψ .

Додатци. 1.) Изъ саме слике види се, да е
 $ME = DC$; зато се подъ косинусомъ некогъ угла φ
обычно разумева одстояніе DC , т. е. одстояніе сре-
дишта C одъ синуса. Мы ћемо одъ яко такођеръ
то одстояніе називати косинусомъ. — 2.) У §. 4.
описане четири функціе угла и сада споменуте нѣ-
гове кофункціе, именую се купно прости или основ-
не функціе, за разлику одъ сложены, съ коима
ћемо се упознати у позднімъ §§.

II. Свойства основны функція.

§. 8.

Нека су A_1B_1 и A_2B_2 два еданъ на другій у-
сл. правна пречника, а $A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3, \dots, A_1M_n$
у разне четврти круга допирући луци.

Построивши по §§. 4. и 6. све функцие овы лукова примећавамо, да е нѣгово положенѣ, изузимаюћи оно попречны синуса, и косинуса кои се пружаю само на одну едину страну, — двояко и едно другомъ противно, тако: да су по томе, сматраюћи функцие у првой четврти као положителне,

синуси и косеканте у 1. и 2. четврти положителне, а у 3. и 4. одрицателне;

косинуси и секанте у 1. и 4. четврти положителне, у 2. пакъ и 3. одрицателне;

тангенте и котангенте у 1. и 3. четврти положителне, а у 2. и 4. одрицателне; найпосле

попречни синуси и косинуси у свима четвртимъ положителни.

Одрицателне секанте и косеканте есу оне, при којима се дотичный полупречникъ, ради пресецања съ тангентомъ или котангентомъ, продужуе преко средишта назадъ.

Додатакъ. Функцие лукова већи одъ едногъ круга, лукова т. е. кои допиру у 5., 6., 7., и т. д. четврть, слажу се по положеню, а као што ћемо мало каснѣ видѣти, и величиномъ односно съ оными у 1., 2., 3. и 4. четврти.

§. 9.

Што се тиче величине функциа, то находимо простымъ сматранѣмъ слике обзиромъ на предходећий §.

1.) Умалѣванѣмъ лука A_1M_1 умалѣваю се такођеръ и нѣгова оба синуса, тангента и секанта

расту на противъ оба косинуса, котангента и косеканта тако, да е

$$\begin{aligned} &\text{за } A_1M_1 = \alpha = 0 : \\ \sin 0 &= \sin. v. 0 = \text{tang. } 0 = 0, \\ \cos 0 &= \cos. v. 0 = \text{sec. } 0 = r, a \\ \cot. 0 &= \text{cosec} = \infty \end{aligned}$$

2.) Увећаванѣмъ лука A_1M_1 у првой четврти увећаваю се оба нѣгова синуса, тангента и секанта, а умалѣваю се на противъ оба косинуса, котангента и косеканта, тако, да е

$$\begin{aligned} &\text{за } A_1M_1 = A_1A_2 = 90^\circ : \\ \sin 90^\circ &= \sin. v. 90^\circ = \text{cosec. } 90^\circ = r, \\ \cos 90^\circ &= \cos. v. 90^\circ = \cot. 90^\circ = 0, a \\ \text{tang } 90^\circ &= \text{sec. } 90^\circ = \infty \end{aligned}$$

3.) У 2. четврти умалѣваю се синусъ, тангента и секанта, расту на противъ попречный синусъ, оба косинуса, котангента и косеканта тако, да е

$$\begin{aligned} &\text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1 = 180^\circ = 2R : \\ \sin. 180^\circ &= \text{tang. } 180^\circ = 0, \\ \sin. v. 180^\circ &= 2r, \\ \cos. 180^\circ &= \text{sec. } 180^\circ = -r, \\ \cot 180^\circ &= -\infty, \\ \text{cosec. } 180^\circ &= \infty \end{aligned}$$

4.) У 3. четврти расту синусъ, попречный косинусъ, тангента и секанта, а умалѣваю се попречный синусъ, косинусъ, котангента и косеканта тако, да е

$$\begin{aligned} &\text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1B_2 = 270^\circ = 3R : \\ \sin. 270^\circ &= \text{cosec } 270^\circ = r, \\ \sin. v. 270^\circ &= r, \\ \cos. 270^\circ &= \cot. 270^\circ = 0, \\ \cos. v. 270^\circ &= 2r, \\ \text{tang. } 270^\circ &= \infty, \\ \text{sec. } 270^\circ &= -\infty \end{aligned}$$

5.) У 4. найпосле четврти умаляваю се оба синуса, попречный косинусъ, тангента и секанта, а расту косинусъ, котангента и косеканта, тако да е

$$\begin{aligned} \text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1B_2A_1 = 360_0 = 4R : \\ \sin. 360^\circ = \sin. u. 360_0 = \text{tang. } 360^\circ = 0, \\ \cos. 360^\circ = \cos. v. 360^\circ = \text{sec. } 360^\circ = r, \\ \cot. 360^\circ = \text{cosec. } 360^\circ = -\infty \end{aligned}$$

Додатакъ. Сматраюћий функціе лука кои се найпре одъ нулле, а потомъ одъ 90° или четврти круга едва разликуюе, увиѣамо: да се у првомъ случаю синусъ и тангента одъ самога лука, а косинусъ и секанта одъ полупречника, у другомъ пакъ случаю синусъ и косеканта одъ полупречника, а косинусъ и котангента одъ нулле приметно ничимъ неразликую. Найпосле да су у првомъ случаю котангента и косеканта, а у другомъ тангента и секанта безъ сваке сумнѣ безконечно велике.

§. 10.

Докучена предходећа два §§. могу се сложити у слѣдуюћу просту, почетнику веома полезну таблицу, у којој *рс* показуе растенъ, а *ум.* умаляванъ функція.

	\angle одъ 0_0	у I. четвр.	\angle одъ 90°	у II. четвр.	\angle одъ 180°	у III. четвр.	\angle одъ 270°	у IV. четвр.	\angle одъ 360°
синусъ	0	+, рс.	г	+, ум.	0	-, рс.	-г	-, ум.	0
косинусъ	г	+, ум.	0	-, рс.	-г	-, ум.	0	+, рс.	г
попр. синусъ	0	+, рс.	г	+, рс.	2г	+, ум.	г	+, ум.	0
попр. косин.	г	+, ум.	0	+, рс.	г	+, рс.	2г	+, ум.	г
тангента	0	+, рс.	∞	-, ум.	0	+, рс.	∞	-, ум.	0
котангента	∞	+, ум.	0	-, рс.	$-\infty$	+, ум.	0	-, рс.	$-\infty$
секанта	г	+, рс.	∞	-, ум.	-г	-, рс.	$-\infty$	+, ум.	г
косеканта	∞	+, ум.	г	+, рс.	∞	-, ум.	-г	-, рс.	$-\infty$

Изъ ове таблице изводимо іошъ нарочито слѣдуюће две важне приметбе:

1.) Синусъ, поперечный синусъ, тангента и секанта у првой четверти расту, кофункціе на противъ умаляваю се: ако углалъ расте, и обратно.

2.) Немотрећи на знакъ,

границе синуса и косинуса есу 0 — нулла — и полупречникъ,

„ поперечногъ синуса и попр. косинуса 0 и пречникъ,

„ тангенте и котангенте 0 и безконечно, найпосле границе секанте и косеканте полупречникъ и безконечно.

Попречный синусъ и косинусъ употребляю се одъ свію функція найманѣ, зато ін мы одяко више не ѣмо сматрати.

§. 11.

Найвећій е синусъ, као што смо видели, равнъ полупречнику. Овай синусъ назива се целымъ синусомъ или *sinus totus* и узима се обично, ради простіегъ рачуна, за единицу свію осталы функція.

Мы ѣмо одъ сада при свима нашимъ дальнимъ испытываняма такођеръ единицу сматрати као полупречникъ, докле годъ не условимо другій. Но да бы функціе за полупречникъ 1 разликовали одъ едноимены функція за другій некій полупречникъ: то ѣмо оне у будуће свагда малимъ, а ове великимъ писменима започиняти.

За полупречникъ 1 периферія круга равна е 2π , пола круга $= \pi$, а четверть круга $= \frac{1}{2}\pi$. Тога ради писатъ ѣмо одъ яко место четверти круга, по круга и цела круга краће $\frac{1}{2}\pi$, π и 2π .

§. 12.

Ако е у сл. 1. по величини лукъ $AM = AM_1$ т. е. $\angle ACM = \angle ACM_1 = \varphi$, и точка A нбювъ заедничкій почетаекъ: то су исти луци по положеню еданъ другомъ противни, и зато, сматраюћи горнѣ положенѣ као положително, лукъ е AM положителанъ, а лукъ AM_1 одрицателанъ, или — што е све идно —, $\angle ACM = +\varphi$, а $\angle ACM_1 = -\varphi$.

Да су едноимене функціе оба угла по величини еднаке, увиђавно е по себи, и мы дакле обзиромъ на § 8. налазимо

$$\begin{aligned} \sin. (-\varphi) &= -\sin. \varphi & \left| \quad \text{tang. } (-\varphi) &= -\text{tang. } \varphi \\ \cos. (-\varphi) &= \cos. \varphi & \left| \quad \text{cot. } (-\varphi) &= -\text{cot. } \varphi \\ \sec. (-\varphi) &= \sec. \varphi & & \\ \text{cosec. } (-\varphi) &= -\text{cosec. } \varphi & & \end{aligned}$$

кои изрази важе за сваку безъ разлике величину угла φ .

§. 13.

Ако су (сл. 5.) A_1B_1 и A_2B_2 два еданъ на другій управна пречника, а по величини $\angle A_1CM_1 = \angle A_2CM_2 = \angle B_1CM_3 = \angle B_2CM_4 = \varphi$: то е, изъ лако увиђавны — геометричны — узрока, по величини $M_2N_2 = N_1C$, $M_3N_3 = M_1N_1$, $M_4N_4 = N_1C$, $M_5N_5 = M_1N_1$; обзиромъ дакле на §. 8. и 11.

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{1}{2}\pi + \varphi \right) &= \cos \varphi & \left| \quad \sin \left(\frac{3}{2}\pi + \varphi \right) &= -\cos \varphi \\ \sin (\pi + \varphi) &= -\sin \varphi & \left| \quad \sin (2\pi + \varphi) &= \sin \varphi \end{aligned}$$

Поставляюћи у ове изразе $(-\varphi)$ место φ слѣдуе по §. 12.

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{1}{2}\pi - \varphi \right) &= \cos \varphi & \left| \quad \sin \left(\frac{3}{2}\pi - \varphi \right) &= -\cos \varphi \\ \sin (\pi - \varphi) &= \sin \varphi & \left| \quad \sin (2\pi - \varphi) &= -\sin \varphi \end{aligned}$$

Овымъ истымъ начиномъ и остале функціе сматраюћи долазимо найпосле до слѣдуюћи обшты докученя:

Функціе угла вѣн или маньн одъ 4, 5, 6, 7, 8 или више правы, стов према функціяма основногъ угла φ дотично у истомъ одношеню, као функціе у овой таблици назначены угла.

III. Међусобно одношенѣ функція.

§. 14.

Построивши функціе некогъ угла $ACM = \varphi$ (сл. 2.) находимо

сл. 2.

а.) изъ триугла MCD

$$\overline{MC}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{DC}^2, \text{ т. е.}$$

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$\text{и одтуда } \left. \begin{array}{l} \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \\ \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \end{array} \right\} \dots 1.$$

б.) изъ триугла ACF

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2, \text{ или}$$

$$\sec^2 \varphi = 1 + \tan^2 \varphi$$

$$\text{дакле } \left. \begin{array}{l} \sec \varphi = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \\ \tan \varphi = \sqrt{\sec^2 \varphi - 1} \end{array} \right\} \dots 2.$$

в.) изъ триугла BCG

$$\overline{CG}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BG}^2, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{cosec}^2 \varphi = 1 + \cot^2 \varphi, \text{ и}$$

$$\text{зато } \left. \begin{array}{l} \operatorname{cosec} \varphi = \sqrt{1 + \cot^2 \varphi} \\ \cot \varphi = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \varphi - 1} \end{array} \right\} \dots 3.$$

§. 15.

Збогъ подобія триуглова ACF и DCM (иста сл.) имамо далѣ

Синусъ	Косинусъ	Тангента	Котангента	Секанта	Косеканта
$\cos \varphi$	$\mp \sin \varphi$	$\mp \cot \varphi$	$\mp \tan \varphi$	$\mp \operatorname{cosec} \varphi$	$\sec \varphi$
одъ $(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi) =$					
$\mp \sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\mp \tan \varphi$	$\pm \cot \varphi$	$-\sec \varphi$	$\mp \operatorname{cosec} \varphi$
одъ $(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi) =$					
$-\cos \varphi$	$\mp \sin \varphi$	$\mp \cot \varphi$	$\mp \tan \varphi$	$\pm \operatorname{cosec} \varphi$	$-\sec \varphi$
одъ $(2\pi \pm \varphi) =$					
$\pm \sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\mp \tan \varphi$	$\pm \cot \varphi$	$\sec \varphi$	$\pm \operatorname{cosec} \varphi$

$AF: AC = DM: DC$ и
 $CF: AC = CM: DC$, то ќе рѣши
 $\text{tang } \varphi: 1 = \sin \varphi: \cos \varphi$, а
 $\text{sec } \varphi: 1 = 1: \cos \varphi$, и одтуда

$$\text{tang } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \dots\dots 4.$$

$$\text{sec } \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots 5.$$

обратно

$$\cos \varphi = \frac{1}{\text{sec } \varphi}$$

Подобіе пакъ тригглова BCG и ECM подае

$$BG: BC = EM: EC,$$

$$GC: BC = MC: EC, \text{ или}$$

збогъ $EM = CD$, а $EC = MD$:

$$BG: BC = CD: MD,$$

$$GC: BC = MC: MD, \text{ то ќе рѣши}$$

$$\cot \varphi: 1 = \cos \varphi: \sin \varphi, \text{ а}$$

$$\text{cosec } \varphi: 1 = 1: \sin \varphi, \text{ дакле}$$

$$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \dots\dots 6.$$

$$\text{cosec } \varphi = \frac{1}{\sin \varphi} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots 7.$$

обратно

$$\sin \varphi = \frac{1}{\text{cosec } \varphi}$$

§. 16.

Будући е $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = 1: \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, то е по горнѣму

(образацъ 4.) $\text{tang } \varphi = 1: \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, но по образцу е 6.

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot \varphi, \text{ дакле е}$$

$$\text{и обратно } \left. \begin{array}{l} \text{tang } \varphi = \frac{1}{\cot \varphi} \\ \text{cot } \varphi = \frac{1}{\text{tang } \varphi} \end{array} \right\} \dots\dots 8.$$

§. 17.

Заменујући именителъ у изразима подь 5., 7., и 8. съ нѣовымъ вредностима изъ 1., 2., и 3., добываемо редомъ

$$\text{sec } \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang}^2 \varphi)}}$$

$$\text{cosec } \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)}}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot^2 \varphi)}}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{1}{\sqrt{(\text{cosec}^2 \varphi - 1)}}$$

$$\cot \varphi = \frac{1}{\sqrt{(\text{sec}^2 \varphi - 2)}}$$

Поставляјући обратно за функціе у именителѣма овы разломака нѣове вредности изъ образаца подь 5., 7. и 8. налазимо

$$\text{sec } \varphi = \frac{\text{cosec } \varphi}{\sqrt{(\text{cosec}^2 \varphi - 1)}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\cot \varphi}{\sqrt{(1 + \cot^2 \varphi)}}$$

$$\text{cosec } \varphi = \frac{\text{sec } \varphi}{\sqrt{(\text{sec}^2 \varphi - 1)}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\text{tang } \varphi}{\sqrt{(1 + \text{tang}^2 \varphi)}}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)}}$$

$$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)}}$$

Найпосле ове разломке преокретајући имамо обзиромъ на образце 5., 7. и 8.

$$\begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 \varphi - 1)}}{\operatorname{cosec} \varphi} \\ \sec \varphi = \frac{\sqrt{(1 + \cos^2 \varphi)}}{\cot \varphi} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{(\sec^2 \varphi - 1)}}{\sec \varphi} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \operatorname{cosec} \varphi = \frac{\sqrt{(1 + \tan^2 \varphi)}}{\tan \varphi} \\ \cot \varphi = \frac{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)}}{\sin \varphi} \\ \tan \varphi = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)}}{\cos \varphi} \end{array} \right.$$

§. 18.

Ова докученя показую, да се тригонометричне функціе геометричнымъ и аналитичнымъ путемъ една чрезъ другу, и све чрезъ одну исту изразити даю, кое в, као што ћемо каснѣ увидити, одъ врло велике ползе. Сватаюћи иста докученя ради лакшегъ прегледа и веће удобности при позднѣмъ употребленю, сва у скупъ, имамо

изразъ	синусомъ	косинусомъ	тангентомъ	котангент.	секантомъ	косекант.
синуса	\sin	$\sqrt{(1 - \cos^2)}$	$\frac{\tan}{\sqrt{(1 - \tan^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1 + \cot^2)}}$	$\frac{\sqrt{(\sec^2 - 1)}}{\sec}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}}$
косинуса	$\sqrt{(1 - \sin^2)}$	\cos	$\frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2)}}$	$\frac{\cot}{\sqrt{(1 + \cot^2)}}$	$\frac{1}{\sec}$	$\frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 - 1)}}{\operatorname{cosec}}$
тангенте	$\frac{\sin}{\sqrt{(1 - \sin^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1 - \cos^2)}}{\cos}$	\tan	$\frac{1}{\cotang}$	$\sqrt{(\sec^2 - 1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 - 1)}}$
котангенте	$\frac{\sin}{\sqrt{(1 - \sin^2)}}$	$\frac{\cos}{\sqrt{(1 - \cos^2)}}$	$\frac{1}{\tan}$	\cot	$\frac{1}{\sqrt{(\sec^2 - 1)}}$	$\frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 - 1)}}{\operatorname{cosec}}$
секанте	$\frac{1}{\sqrt{(1 - \sin^2)}}$	$\frac{1}{\cos}$	$\sqrt{(1 + \tan^2)}$	$\frac{\sqrt{(1 + \cot^2)}}{\cot}$	\sec	$\frac{\operatorname{cosec}}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 - 1)}}$
косеканте	$\frac{1}{\sin}$	$\frac{1}{\sqrt{(1 - \cos^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1 + \tan^2)}}{\tan}$	$\sqrt{(1 + \cot^2)}$	$\frac{\sec}{\sqrt{(\sec^2 - 1)}}$	cosec

Б.) Сложене функције.

I. Функције сбира и разлике два угла.

§. 19.

сл. 6.

Ако е (сл. 6.) лукъ $AM = \alpha$, лукъ пакъ $MN = \beta$: то е лукъ $AN = \alpha + \beta$ и по §. 4. $MP = \sin \alpha$, $CP = \cos \alpha$, $NQ = \sin \beta$, $CQ = \cos \beta$, $NR = \sin (\alpha + \beta)$, а $CR = \cos (\alpha + \beta)$.

Спустимо $QS \perp AC$, и $QT \perp NR$; быт'ће

1.) триугаль $CMP \sim \triangle CQS$, и зато

$$CM : MP = CQ : QS, \text{ а}$$

$$CM : CP = CQ : CS, \text{ или по горнѣму и збогъ } QS = TR :$$

$$1 : \sin \alpha = \cos \beta : TR,$$

$$1 : \cos \alpha = \cos \beta : CS ; \text{ дакле}$$

$$TR = \sin \alpha \cos \beta \dots\dots (а.)$$

$$CS = \cos \alpha \cos \beta \dots\dots (б.)$$

2.) $\triangle CMP \sim \triangle NQT$, зато

$$CM : MP = NQ : QT, \text{ а}$$

$$CM : CP = NQ : NT, \text{ или збогъ } QT = SR :$$

$$1 : \sin \alpha = \sin \beta : SR$$

$$1 : \cos \alpha = \sin \beta : NT, \text{ и одтуда}$$

$$SR = \sin \alpha \sin \beta \dots\dots (в.)$$

$$NT = \cos \alpha \sin \beta \dots\dots (г.)$$

Равности подъ (а. и (г. сабираюћи, а равность (в. одъ (б. одузимаюћи добьямо

$$TR + NT = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \text{ и}$$

$$CS - SR = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

будући е пакъ $TR + NT = NR = \sin (\alpha + \beta)$, а

$CS - SR = CR = \cos (\alpha + \beta)$: то е дакле

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots (I.)$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots (II.)$$

§. 20.

Подобнымъ начиномъ могли бы изнаћи и изразе синуса и косинуса разлике два угла. Но ове функције мы садъ добьямо много простѣе аналитичнымъ путемъ поставляюћи т. е. у пређашнѣ $(-\beta)$ место β , кое учинивши имамо

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta) \text{ и}$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta),$$

или обзиромъ на §. 12., т. е. збогъ $\cos (-\beta) = \cos \beta$, а $\sin (-\beta) = -\sin \beta$:

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots (III.)$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots (IV.)$$

§. 21.

Ова четири образца синуса и косинуса сбира и разлике два угла важе не само за два оштра угла, као што смо у употребљеной за нѣово довођенѣ слики предпоставили, но у обште за ма какова два угла α и β , о чему се лако уверавамо слѣдуюћимъ начиномъ.

Поставимо да е $\angle \alpha$ као и пре оштарь, угаль пакъ β тупь, н. п. $\beta = (90^\circ + \chi) < 180^\circ$; быт'ће по томе

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin (\alpha + 90^\circ + \chi)$$

$$= \sin \left[\frac{\pi}{2} + (\alpha + \chi) \right] \dots (\S. 11.)$$

$$= \cos (\alpha + \chi) \dots (\S. 13.),$$

и тимъ истымъ начинѣмъ

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sin(\alpha + \chi).$$

Но углы α и χ по предположенію оштри, дакле ϵ односно по образцамъ II. и I.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \chi) \\ = \cos \alpha \cos \chi - \sin \alpha \sin \chi, \quad \text{а}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sin(\alpha + \chi) \\ = -\sin \alpha \cos \chi - \cos \alpha \sin \chi$$

Будући ϵ наипосле, такожесть по предположенію, $\angle \chi = \beta - 90^\circ = \beta - \frac{\pi}{2} = -(\frac{\pi}{2} - \beta)$, и дакле по §. 13.

$$\sin \chi = \sin[-(\frac{\pi}{2} - \beta)] = -\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = -\cos \beta,$$

а $\cos \chi = \cos[-(\frac{\pi}{2} - \beta)] = \sin \beta$: то ϵ , ове вредности у предходеща уравненія поставляюћи и ова потомъ уређуюћи,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ за еданъ оштаръ и едавъ тупъ угаль, као годъ за два оштра.

Поставляюћи садъ да ϵ осимъ угла β іошъ и $\angle \alpha$ тупъ и н. п. $= (180 + y) < 270^\circ$, налазимо истымъ начинѣмъ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ + y + 90^\circ + \chi) = \\ = \sin[270^\circ + (\chi + y)] = -\cos(\chi + y) \\ = -\cos \chi \cos y + \sin \chi \sin y$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[270^\circ + (\chi + y)] = \sin(\chi + y) \\ = \sin \chi \cos y + \cos \chi \sin y, \text{ или, збогъ}$$

$\chi = \beta - 90^\circ = -(90^\circ - \beta)$, $y = \alpha - 180^\circ = -(180^\circ - \alpha)$ и дакле $\sin \chi = -\cos \beta$, $\cos \chi = \sin \beta$, $\sin y = -\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos y = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$: —

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

и за два условљено тупа угла.

До овы исты образаца долазимо, као што сада већ лако увидити можемо, даваюћи углама α и β и ма какове друге вредности тако, да по томе ньюова, па дакле и изъ нѣи изведены образаца общность, никаковой выше сумнѣи неподлежи

§. 22.

По 15. ϵ §. $\text{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$, или, место овы функція ньюове вредности изъ §§. 19. и 20. узимаюћи

$$\text{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}$$

Делећи броителя и именителя овогъ разломка еданпутъ съ $\cos \alpha \cos \beta$, другій путъ пакъ съ $\sin \alpha \sin \beta$, добыямо

$$\left. \begin{aligned} \text{tang}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\text{tang} \alpha \pm \text{tang} \beta}{1 \mp \text{tang} \alpha \text{tang} \beta} \\ \text{cot}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\text{cot} \beta \pm \text{cot} \alpha}{\text{cot} \alpha \text{cot} \beta \mp 1} \end{aligned} \right\} \dots \text{(V.)}$$

ове пакъ разломке преокретаюћи слѣдуе (по §. 16.)

$$\left. \begin{aligned} \text{cot}(\alpha \pm \beta) &= \frac{1 \mp \text{tang} \alpha \text{tang} \beta}{\text{tang} \alpha \pm \text{tang} \beta} \\ \text{tang}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\text{cot} \alpha \text{cot} \beta \mp 1}{\text{cot} \beta \pm \text{cot} \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \text{(VI.)}$$

Остале функціє сбира и разлике два угла врло се редко употреблюю, зато се съ ньюовымъ о-предельиваньмъ нежемо задржавати, но определяюћи юшь еданъ за рачунанъ функція потребанъ образаць, приступитъ жемо одма другимъ сложенымъ функціама.

Поставляюћи у прво одъ горњи уравненія подъ V. $\angle \alpha = 45^\circ$, добыямо

$$\operatorname{tang}(45^\circ \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang} 45^\circ \pm \operatorname{tang} \beta}{1 \pm \operatorname{tang} 45^\circ \operatorname{tang} \beta}, \text{ будући є пакъ}$$

— изъ лако увиђавны, геометричны узрока — $\operatorname{tang} 45^\circ = 1$, то є

$$\operatorname{tang}(45^\circ \pm \beta) = \frac{1 \pm \operatorname{tang} \beta}{1 \pm \operatorname{tang} \beta} \dots \text{ (VII)}$$

II. Сбиръ и разлика едноимены функція два угла.

§. 23.

Сабираюћи и одузимаюћи уравненія, I. и III. а II. и IV. добыямо

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta; \end{aligned} \right\} \text{ (v)}$$

поставляюћи пакъ у ове изразе $\alpha + \beta = \varphi$, а $\alpha - \beta = \psi$, дакле $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, $\beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$, слѣдує

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi + \sin \psi &= 2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \\ \sin \varphi - \sin \psi &= 2 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \\ \cos \varphi + \cos \psi &= 2 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \\ \cos \varphi - \cos \psi &= 2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \text{ (1)}$$

§. 24.

Обзиромъ на §. 15. (обр. 4. и 6.) имамо

$$\operatorname{tang} \varphi \pm \operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \pm \frac{\sin \psi}{\cos \psi}, \text{ а}$$

$$\operatorname{cot} \varphi \pm \operatorname{cot} \psi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \pm \frac{\cos \psi}{\sin \psi}, \text{ сабираюћи пакъ у другимъ частима свршуюћи}$$

$$\operatorname{tang} \varphi \pm \operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \varphi \cos \psi \pm \cos \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi} \text{ и}$$

$$\operatorname{cot} \varphi \pm \operatorname{cot} \psi = \frac{\sin \psi \cos \varphi \pm \cos \psi \sin \varphi}{\sin \varphi \sin \psi}, \text{ т. е.}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi \pm \operatorname{tang} \psi &= \frac{\sin(\varphi \pm \psi)}{\cos \varphi \cos \psi} \\ \operatorname{cot} \varphi \pm \operatorname{cot} \psi &= \frac{\sin(\psi \pm \varphi)}{\sin \varphi \sin \psi} \end{aligned} \right\} \dots \text{ (2)}$$

§. 25.

Деобомъ сваке равности подъ (1. — §. 23. — чрезъ остале три, добыямо дванаєсть врло потребны образаца, одъ кои наводимо само оне, кои постаю деобомъ прве чрезъ оне друге, оставляюћи налазенъ осталы почетнику на упражненіє.

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \operatorname{cot} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$$

или место котангенте узимаюћи по §. 16. тангенту

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} \dots \text{ (3)}$$

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\cos \varphi + \cos \psi} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \dots (4)$$

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\cos \varphi - \cos \psi} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)}$$

$$= \frac{\cos \left[-\frac{1}{2}(\psi - \varphi) \right]}{\sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)}$$

или збогъ $\cos \left[-\frac{1}{2}(\psi - \varphi) \right] = \cos \frac{1}{2}(\psi - \varphi) :$

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\cos \varphi - \cos \psi} = \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi) \dots (5)$$

У ова три §§. определѣни образци есу у практики одъ найвеће ползе по томе, што се њиовомъ помоћи логаритми и онде могу употребити, гди то иначе нѣ могуће. Мы ћемо се о томе довольно уверити при разрешеню триуглова.

III. Функціе двогубогъ угла и полуцела.

§. 26.

Поставляюћи у образце синуса, косинуса, тангента и котангента сбира два угла (§. 19. и 22.) $\angle \beta = \alpha$, слѣдуе

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \dots (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \dots (2)$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha} \dots (3)$$

$$= \frac{2 \cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}{2 \operatorname{tang} \alpha} \dots (4)$$

$$= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

У другомъ пакъ одъ овы уравненія найпре косинусъ синусомъ а потомъ обратно овай онимъ заменяюћи добыямо

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \text{и } \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

два образца, у коима е, као што видимо, косинусъ двогубогъ угла израженъ еданпутъ самымъ синусомъ, а другій путъ самымъ косинусомъ простага угла.

§. 27.

Оределяюћи изъ предходећа два уравненія $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, и нађене њиове вредности потомъ деобомъ саюжаваюћи, добыямо редомъ

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \\ \cot \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Разрешаваюћи пакъ прво уравненіе подъ (3) у смотреню $\operatorname{tang} \alpha$ налазимо іошъ

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}}{\operatorname{tang} 2\alpha} \dots (8)$$

§. 28.

Изъ уравненія подь (7. слѣдуе далѣ

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} \\ \text{и } \cos 2\alpha &= \frac{\operatorname{cot}^2 \alpha - 1}{\operatorname{cot}^2 \alpha + 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9.$$

Найпосле збогъ $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ имамо

$$\sin 2\alpha = \operatorname{tang} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

Заменяюћи у овомъ изразу $\operatorname{tang} 2\alpha$ съ нѣ-
нымъ вредностима подь (3., $\cos 2\alpha$ пакъ са пред-
ходећима подае се

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} \\ \text{и } \sin 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{cot} 2\alpha}{\operatorname{cot}^2 \alpha + 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10. \quad]$$

§. 29.

Поставляюћи сада у уравненія подь (6. и (7.

$2\alpha = \beta$, дакле $\alpha = \frac{\beta}{2}$, слѣдуе

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \beta)} \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \beta)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (11.$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} \\ \operatorname{cot} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12.$$

Истымъ начинаемъ добыямо изъ уравненія подь
(9. и (10., (3. и (4.

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta &= \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta} \\ &= \frac{\operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta - 1}{\operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta + 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13.$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta} \\ &= \frac{2 \operatorname{cot} \frac{1}{2} \beta}{1 + \operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14.$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \beta &= \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta} \\ &= \frac{2 \operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta}{\operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta - 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15.$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cot} \beta &= \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta} \\ &= \frac{\operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta - 1}{2 \operatorname{cot}^2 \frac{1}{2} \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16.$$

§. 30.

Броителя и именителя подкорены разломака у
изразима подь (12. еданцуть съ $(1 - \cos \beta)$, другій
путь пакъ съ $(1 + \cos \beta)$ мложећи, и потомъ $(1 - \cos^2 \beta)$
по §. 14. синусомъ заменяюћи добыямо юшъ

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} &= \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \\ &= \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17.)$$

$$\left. \begin{aligned} \cot \frac{\beta}{2} &= \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta} \\ &= \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18.)$$

Поставляюћи пакъ у образаць подъ (8. $2\alpha = \beta$, слѣдуе

$$\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}{\operatorname{tang} \beta} \dots (19.)$$

§. 31.

Заменяюћи у изразима подъ (11. $\cos \beta$ по §. 14. синусомъ, налазимо

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{2}} \quad \text{и}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{2}}; \quad \text{броителъ}$$

пакъ овы корена, т. е. $\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$ познатымъ начинамъ — као сурдске корене — определяюћи подае се

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \beta} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \beta} \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \beta} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \beta} \end{aligned} \right\} (20.)$$

Найпосле, првый одъ ова два израза другимъ делећи

$$\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \beta} - \sqrt{1 - \sin \beta}}{\sqrt{1 + \sin \beta} + \sqrt{1 - \sin \beta}} \dots (21.)$$

В) Преобраћанъ функция и њово броевно определяванъ — рачунањ —.

I. Преобраћанъ функция.

§. 32.

Сви до яко изнађени, међусобно одношенъ гониометричны функция показуюћи образци тичу се, као што знамо, полупречника 1. Почемъ нама пакъ исти образци у практики више пута требаю и у односу на другій некій, условљный полупречникъ; то е нужно показати, како се изъ њи добыяю истоветни образци за свакій у обште полупречникъ r .

У име тога напишимо изъ врха угла α (сл. 7.) међу њгове краке два лука AB и ab съ разнымъ полупречницима $AC = r$ и $aC = \rho$, и построимо потомъ истога угла функцие за оба ова полупречника. То учинивши подае се

- 1.) Збогъ подобія триуглова BCD и bdC ,
 $BD : bd = DC : dC = BC : bC$;
- 2.) изъ подобія пакъ триуглова GAC и gaC ,
 $AG : ag = GC : gC = AC : aC$; найпосле
- 3.) изъ подобія триуглова ENC и ehC ,
 $EN : eh = NC : hC = EC : eC$.

То ће рећи

$$\sin \alpha_r : \sin \alpha_\rho = \cos \alpha_r : \cos \alpha_\rho = r : \rho,$$

$$\operatorname{tang} \alpha_r : \operatorname{tang} \alpha_\rho = \operatorname{sec} \alpha_r : \operatorname{sec} \alpha_\rho = r : \rho,$$

$$\operatorname{cot} \alpha_r : \operatorname{cot} \alpha_\rho = \operatorname{cosec} \alpha_r : \operatorname{cosec} \alpha_\rho = r : \rho : \text{при}$$

чему функцијама придата писма r и ρ показују комъ полупречнику исте функције принадлеже.

Изъ овы сразмерности видимо, да е одношенѣ едноимены функција едногъ истогъ угла за разне полупречнике равно одношеню исты полупречника тако, да ако е полупречникъ r н. п. два пута већий одъ полупречника ρ , свака функција угла α за полупречникъ r такођеръ двапутъ већа естъ одъ едноимене функције за полупречникъ ρ .

§. 33.

Поставляюћи садъ у горнѣ сразмерности полупречникъ $\rho = 1$, и разликуюћи едноимене функције међу собомъ условлѣнымъ у §. 11. начиномъ, налазимо, едне чрезъ друге определяюћи,

$$\sin \alpha = r. \sin \alpha, \cos \alpha = r. \cos \alpha, \operatorname{Tang} \alpha = r. \operatorname{tang} \alpha,$$

$$\operatorname{Sec} \alpha = r. \operatorname{sec} \alpha, \operatorname{Cot} \alpha = r. \operatorname{cot} \alpha, \operatorname{Cosec} \alpha = r. \operatorname{cosec} \alpha; \text{ на противъ пакъ}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{r}, \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{r}, \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{Tang} \alpha}{r},$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\operatorname{Sec} \alpha}{r}, \operatorname{cot} \alpha = \frac{\operatorname{Cot} \alpha}{r}, \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\operatorname{Cosec} \alpha}{r}$$

У обште, означуюћи съ $f(\alpha)$ сваку функцију угла α за полупречникъ 1, съ $F(\alpha)$ пакъ едноимене-

ну нѣгову функцију за полупречникъ r , имамо

$$F(\alpha) = r. f(\alpha), \text{ а } f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r}; \text{ то ће рећи:}$$

Функције некогъ угла α за полупречникъ 1 преобраћаю се у едноимене функције за другий некій полупречникъ r , ако се съ овымъ полупречникомъ помложе; функције напротивъ за полупречникъ r преводе се у едноимене функције за полупречникъ 1, ако се съ истымъ полупречникомъ r разделе.

§. 34.

Да бы ово правило примерима већма обяснили, то преобратимо изнађене за полупречникъ 1 образце 1.) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, 2.) $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cot} \alpha}$ и 3.) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, у едноимене образце угла α за полупречникъ r .

По горнѣму е

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{r}, \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{r}, \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{Tang} \alpha}{r}, \operatorname{cot} \alpha = \frac{\operatorname{Cot} \alpha}{r}, \cos(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{r}, \cos \beta = \frac{\cos \beta}{r}$$

$\sin \beta = \frac{\sin \beta}{r}$; поставляюћи дакле у горнѣ изразе ове вредности место функција за полупречникъ 1, слѣдуе

$$1.) \frac{\sin \alpha}{r} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{r^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - \cos^2 \alpha}}{r}$$

и одтуда

$$\sin \alpha = \sqrt{r^2 - \cos^2 \alpha},$$

$$2.) \frac{\text{Tang } \alpha}{r} = 1: \frac{\text{Cot } \alpha}{r} = \frac{r}{\text{Cot } \alpha}, \text{ дакле}$$

$$\text{Tang } \alpha = \frac{r}{\text{Cot } \alpha}; \text{ наипосле}$$

$$3.) \frac{\text{Cos } (\alpha + \beta)}{r} = \frac{\text{Cos } \alpha}{r} \cdot \frac{\text{Cos } \beta}{r} + \frac{\text{Sin } \alpha}{r} \cdot \frac{\text{Sin } \beta}{r} =$$

$$= \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } \beta + \text{Sin } \alpha \text{ Sin } \beta}{r^2}, \text{ одатле пакъ}$$

$$\text{Cos } (\alpha + \beta) = \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } \beta + \text{Sin } \alpha \text{ Sin } \beta}{r}$$

II. Рачунаѣ функција за полупречникъ 1.

§. 35.

Велика полза, кою иначе подаю гониометричне функције у практики, сасвимъ бы се изгубила, да ии мы при свакомъ употреблѣню найпре морамо израчунати. Зато су исте функције одавна већъ израчунане и за употреблѣнѣ у удобне таблице, сложене тако, да нама садъ само јошъ остае показати, коимъ се начиномъ могу определити и како се употребљаваю.

Прво урадитъ ћемо сада, и у томъ обзиру имамо приметити, да се гониометричне функције најболѣ налазе посредствомъ безконачны редова. Почемъ пакъ мы рачуна съ таковымъ редовима — као предметъ више аналитике, која ће текъ слѣдовати — јошъ незнамо, то смо принуђени служити се за исту цѣль другимъ, такођеръ обичнымъ, но нешто теготниимъ начиномъ, при комъ употребљавамо само нека доякошња наша геометрична и гониометрична докученя. У осталомъ рачунали мы

поменуте функције коимъ годъ начиномъ, по смислу §. 13. ние потребно определити выше, него само функције прве четврти. Будући е пакъ по §. 7. свакимъ синусомъ определѣнъ свагда и еданъ косинусъ; и будући се по §. 18. све остале функције синусомъ и косинусомъ лако могу изразити: то е наипосле доволно, ако изнађемо само синусе поменуте четврти. До овы, служећи се; као што горе рекосмо, само доякошњимъ нашимъ докученяма, долазимо наипростѣ слѣдуюћимъ путемъ.

§. 36.

По §. е 5. $\sin \varphi = \frac{1}{2} \text{ chord. } 2\varphi$; изъ геометріе пакъ знамо, да е за полупречникъ 1

а.) страна правилногъ триугла или $\text{chord. } 60^\circ = 1$, (полупречнику);

б.) страна правилногъ триугла т. е. $\text{chord. } 120^\circ = \sqrt{3}$;

в.) страна квадрата, то ће рећи $\text{chord. } 90^\circ = \sqrt{2}$; наипосле

г.) страна правилногъ 10° угла или $\text{chord. } 36^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; дакле е на основу горнѣгъ образца

$$\sin. 30^\circ = \cos. 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ chord. } 60^\circ = \frac{1}{2} = 5'$$

$$\sin. 60^\circ = \cos. 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ chord. } 120^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} = '8660254$$

$$\sin. 45^\circ = \cos. 45^\circ = \frac{1}{2} \text{ chord. } 90^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} = '7071068$$

$$\sin. 18^\circ = \cos. 72^\circ = \frac{1}{2} \text{ chord. } 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = '3090170$$

§. 37.

Поставляюћи садъ у образаць I. §-а 19. и у образаць III. §. 20., $\alpha = 60^\circ$, а $\beta = 45^\circ$ добыямо по првомъ

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ, \text{ или збогъ } \sin(\pi - \varphi) &= \sin \varphi \text{ (§. 13),} \\ \sin 75^\circ &= \cos 15^\circ = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) = '9659257, \end{aligned}$$

а по другомъ.

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) = '2588189$$

Заменяюћи пакъ у истымъ образцыма α съ 18° , а β съ 15° , слѣдуе

$$\begin{aligned} \text{збогъ } \cos 18^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \\ \sqrt{\left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right]^2 \right\}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \end{aligned}$$

изъ првога

$$\begin{aligned} \sin 33^\circ = \cos 57^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{16} (-1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{3}) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{8} (-1 + \sqrt{3}) \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} &= '5446390 \end{aligned}$$

а изъ другога

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ = \cos 87^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{16} (-1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{3}) \\ - \frac{\sqrt{2}}{8} (-1 + \sqrt{3}) \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} &= '0523360 \end{aligned}$$

§. 38.

Найпосле, заменяюћи юшгъ у првомъ образцу §а 31. подъ 20, т. е. у

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \beta} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \beta}, \\ \text{редомъ } \beta \text{ съ } 3^\circ, \frac{3^\circ}{2}, \frac{3^\circ}{4} &= 45', \frac{3^\circ}{8} = \frac{45'}{2}, \frac{3^\circ}{16} = \\ = \frac{45'}{4} \text{ и т. д. до } \frac{45'}{64} &: \text{ добыямо после две послед-} \\ \text{нѣ замене} & \end{aligned}$$

$$\sin \frac{45'}{32} = '0002090, \text{ и}$$

$$\sin \frac{45'}{64} = '0002045$$

Сравниюћи ова два синуса међу собомъ видимо, да е последний половина предходещаго, и одтуда основано заключаемо, да е отношенѣ овако малы синуса равно отношению иъовы лукова. Пользуюћи се овымъ докученѣмъ налазимо

$$\sin \frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45'}{64} : 1, \text{ и одатле, место}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{45'}{64} \text{ горню вредность поставляюћи,} \\ \sin 1' = '0002908 \end{aligned}$$

§. 39.

Дошавши овымъ начиномъ еданцуть до синуса едногъ минута, опредѣляемо затымъ посредствомъ истога найпре све мањъ синусе, а после помоћу юшгъ неки одъ овы и све остале веће.

Прве добыямо врло просто поставляюћи ий по горнѣмъ докученю, према синусу еднога минута у онако исто отношенѣ, као дотичный лукъ према едномъ минуту или $60''$. Тако н. п. имамо по томе за синусъ одъ $24''$ сразмерность

$\sin 24'' : \sin 60'' = 24 : 60$, или, место $\sin 60'' =$
 $= \sin 1'$ нађену његову вредность узимајући,

$\sin 24'' : '0002908 = 24 : 60$; изъ чега слѣдуетъ

$$\sin 24'' = \frac{24}{60} \times '0002908 = '0001163$$

О овомъ рачунаню маньи синуса ноле размишляваюћи увиђамо, да е довольно определити показавымъ начиномъ само синусе одъ 31'', 37'', 41'', 47'', 53'', 59'', и ма кои јошъ еданъ маньй, еръ се остали, на основу оногъ истогъ докученя, лакше добыямо мложенѣмъ и деобомъ последнѣга, а после опетъ мложенѣмъ и деобомъ тымъ начвномъ изнађены, съ некымъ, лако докучльвымъ броевима. Тако н. ъ. определяюћи осимъ поменуты шесть синуса само јошъ синусъ одъ 6'' — кон врло лако налазимо деобомъ синуса одъ 1' броемъ 10 —, добыямо изъ истога деобомъ съ 2 и 3 синусе одъ 3'' и 2''; мложенѣмъ пакъ съ 2 и 3 синусе одъ 12'' и 18''. Мложенѣмъ затымъ синуса одъ 2'' съ 2, 5, 7 и другимъ броевима, слѣдую синуси одъ 4'', 10'', 14'' и друга; мложенѣмъ пакъ синуса одъ 3'' съ 3, или деобомъ синуса одъ 18'' съ 2, подае се синусъ одъ 9'', и подобнымъ безъ сумнѣ лакимъ начиномъ и сви остали.

§. 40.

Веће синусе налазимо посредствомъ синуса 1' и неки маньи можда найудобнѣ слѣдуюћимъ начиномъ.

Изъ првогъ образца подъ (v. у §. 23. слѣдуетъ

$$\sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta - \sin (\alpha - \beta)$$

а по замени $\cos \beta$ његовомъ подаюћомъ се вредно-

сти изъ првогъ образца подъ (II. у §. 29. $\cos \beta =$
 $= 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$,

$\sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\beta}{2} -$
 $-\sin (\alpha - \beta)$, или, увиђавномъ пременомъ десне части,

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha + [\sin \alpha - \sin (\alpha - \beta)] -$$

$$- 4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Заменяюћи садъ у овомъ, тако названомъ Делаамбровомъ — *Delambre* — образцу, β съ 1'', α пакъ редомъ съ 1', 1' 1'', 1' 2'', 1' 3'' и т. д. добыямо све веће синусе и косинусе одъ секунде до секунде, као што изъ слѣдуюћи неколико примера видити можемо.

$$\sin 1' 1'' = \cos 89^\circ 58' 59'' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 59'') -$$

$$- 4 \sin 1' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1' 2'' = \cos 89^\circ 58' 58'' = \sin 1' 1'' + (\sin 1' 1'' -$$

$$- \sin 1') - 4 \sin 1' 1'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1' 3'' = \cos 89^\circ 58' 57'' = \sin 1' 2'' +$$

$$+ (\sin 1' 2'' - \sin 1' 1'') - 4 \sin 1' 2'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

.....

$$\sin 1' 59'' = \cos 89^\circ 58' 1'' = \sin 1' 58'' +$$

$$+ (\sin 1' 58'' - \sin 1' 57'') - 4 \sin 1' 58'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 2' = \cos 89^\circ 58' = \sin 1' 59'' + (\sin 1' 59'' -$$

$$- \sin 1' 58'') - 4 \sin 1' 59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1' 2'' = \cos 89^\circ 57' 59'' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1' 59'') - 4 \sin 2' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 59' 59'' = \cos 89^\circ 0' 1'' = \sin 59' 58'' + (\sin 59' 58'' - \sin 59' 57'') - 4 \sin 59' 58'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1^\circ = \cos 89^\circ = \sin 59' 59'' + (\sin 58' 59'' - \sin 59' 58'') - 4 \sin 59' 59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \sin 14^\circ 59' 59'' + (\sin 14^\circ 59' 59'' - \sin 14^\circ 59' 58'') - 4 \sin 14^\circ 59' 59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

§. 41.

Обичне таблици гониометричны функція садрже ове само за лукове одъ 10 до 10', минута до минута, или найвише одъ 10 до 10''; остале пакъ опредѣлюю се при таковымъ таблицама по потреби особитымъ начиномъ, съ коимъ ћемо се мы упознати на надлежномъ месту позднѣе.

Рачунаюћи синусе за такове таблици 1.) само за лукове одъ минута до минута, валя у истомъ деламбровомъ образцу заменити β съ 1', α пакъ редомъ съ 1', 2', 3', и т. д. чимъ добыямо

$$\sin 2' = \cos 89^\circ 58' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 0') - 4 \sin 1' \sin^2 30'$$

$$\sin 3' = \cos 89^\circ 57' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1') - 4 \sin 2' \sin^2 30'$$

$$\sin 4' = \cos 89^\circ 56' = \sin 3' + (\sin 3' - \sin 2') - 4 \sin 3' \sin^2 30'$$

Рачунаюћи ий пакъ 2.) само одъ 10 до 10', треба найпре овимъ начиномъ опредѣлити синусъ одъ 10', а потомъ у истомъ образцу β заменити съ 10', а α редомъ съ 10', 20', 30', и т. д. При томъ рачуну имамо

$$\sin 20' = \cos 89^\circ 40' = \sin 10' + (\sin 10' - \sin 0') - 4 \sin 10' \sin^2 5'$$

$$\sin 30' = \cos 89^\circ 30' = \sin 20' + (\sin 20' - \sin 10') - 4 \sin 20' \sin^2 5'$$

Найпосле 3.) опредѣлююћи синусе одъ 10 до 10'', морамо β заменити съ 10'', α пакъ редомъ съ 10'', 20'', 30'', и т. д., чимъ находимо

$$\sin 20'' = \cos 89^\circ 59' 40'' = \sin 10'' + (\sin 20'' - \sin 0'') - 4 \sin 10'' \sin^2 5''$$

$$\sin 30'' = \cos 89^\circ 59' 30'' = \sin 20'' + (\sin 20'' - \sin 10'') - 4 \sin 20'' \sin^2 5''$$

$$\sin 1' 10'' = \cos 89^\circ 58' 50'' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 50'') - 4 \sin 1' \sin^2 5''$$

$$\sin 2^\circ 3' 40'' = \cos 87^\circ 56' 20'' = \sin 2^\circ 3' 30'' +$$

$$+ (\sin 2^\circ 3' 30'' - \sin 2^\circ 3' 20'') - 4 \sin 2^\circ 3' 30'' \sin^2 5''$$

§. 42.

Синусе лукова већи одъ 60° и косинусе одъ тога мањи лукова определяемо лакше посредствомъ образца

$$\sin (60^\circ + \beta) = \sin (60^\circ - \beta) + \sin \beta$$

заменяюћи у истомъ β съ другимъ мањимъ угломъ, $\sin \beta$ дакле већъ израчунанимъ синусима исты угла. Тако н. п. налазимо поставляюћи β редомъ = $1', 2', \dots, 1^\circ 10', 1^\circ 20', \dots, 15^\circ 3' 10'', 15^\circ 3' 20'', \dots$

$$\sin 60^\circ 1' = \cos 29^\circ 59' = \sin 60^\circ + \sin 1'$$

$$\sin 60^\circ 2' = \cos 29^\circ 58' = \sin 60^\circ + \sin 2'$$

$$\sin 61^\circ 10' = \cos 28^\circ 50' = \sin 58^\circ 50' + \sin 1^\circ 10'$$

$$\sin 61^\circ 20' = \cos 28^\circ 40' = \sin 58^\circ 40' + \sin 1^\circ 20'$$

$$\sin 75^\circ 3' 10'' = \cos 14^\circ 56' 50'' = \sin 44^\circ 56' 50'' + \sin 15^\circ 3' 10''$$

$$\sin 75^\circ 3' 20'' = \cos 14^\circ 56' 40'' = \sin 44^\circ 56' 40'' + \sin 15^\circ 3' 20''$$

Употреблѣнный при овоме образцѣ добыямо изъ другою образца подъ (v у §. 23. поставляюћи у истомъ $\alpha = 60^\circ$; чимъ слѣдуетъ

$$\sin (60^\circ + \beta) = \sin (60^\circ - \beta) = 2 \cos 60^\circ \sin \beta, \text{ или збогъ } \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ (§. 36. г.)}$$

$$\sin (60^\circ + \beta) - \sin (60^\circ - \beta) = \sin \beta; \text{ и отсюда}$$

$$\sin (60^\circ + \beta) = \sin (60^\circ - \beta) + \sin \beta$$

§. 43.

Израчунавши овимъ безъ сумнѣ vrlo лакимъ начиномъ, све синусе и косинусе прве четверти, определяемо затымъ посредствомъ ныи тангенте, служећи се при томъ наиболѣ познатымъ већъ образцемъ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, кои се логаритмички рачунати може.

Съ тангентама, као што е лако увидити, добыямо уедно и котангенте, ерѣ е по §. 13. $\tan \alpha = \cot (\frac{\pi}{2} - \alpha)$, т. е. свака тангента равна одной котангенти. Остале пакъ функціе, изъ узрока, што се обычно неупотреблюю, нерачунаю се.

§. 44.

Тангенте лукова већи одъ 45° , израчунавши найпре све мањъ, добыямо лакше посредствомъ овы мањи замѣняюћи у образцу

$$\tan (45^\circ + \beta) = \tan (45^\circ - \beta) - 2 \tan 2 \beta$$

лукъ β съ мањимъ луцима одъ 45° .

Образецъ овай налазимо слѣдуюћимъ начиномъ.

По §. е 23. обр. подъ VII.

$$\tan (45^\circ + \beta) = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta}, \text{ а}$$

$$\operatorname{tang} (45^\circ - \beta) = \frac{1 - \operatorname{tang} \beta}{1 + \operatorname{tang} \beta}; \text{ дакле}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} (45^\circ + \beta) - \operatorname{tang} (45^\circ - \beta) &= \frac{4 \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang}^2 \beta} = \\ &= 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang}^2 \beta}, \text{ или, збогъ } \frac{2 \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang}^2 \beta} = \operatorname{tang} 2\beta \\ (\S. 29.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} (45^\circ + \beta) - \operatorname{tang} (45^\circ - \beta) &= 2 \operatorname{tang} 2\beta \\ \text{и одгуда, увиђавномъ пременомъ, горный образаць} \\ \operatorname{tang} (45^\circ + \beta) &= \operatorname{tang} (45^\circ - \beta) + 2 \operatorname{tang} 2\beta \end{aligned}$$

§. 45.

При овомъ рачунаню функція употреблюе се као што смо видели, свакий синусъ за определяванъ слѣдуюћегъ већегъ, и сви они потомъ за налазенъ осталь потребны функція. Лако е дакле увидати, да погрешка, коя бы се случайно учинила при едномъ одъ нѣи, прелази не само на све веће синусе, него и на све посредствомъ овы и нѣга изнаѣне друге функціе; те да е тога ради необходимо нужно, да се при истомъ рачунаню синуса чешће о нѣовой точности уверавамо. У име тога имамо одъ Айлера — Euler — слѣдуюћий врло удобанъ образаць

$$\sin \beta = \sin (36^\circ + \beta) - \sin (36^\circ - \beta) + \sin (72^\circ - \beta) - \sin (72^\circ + \beta)$$

Употреблѣнъ овога образца увиђавно е по себи, и састои се у простой замены угла β съ оныма углами, кои синусе у горнѣмъ смислу испытати желимо; добыамо га пакъ слѣдуюћимъ начиномъ.

По другомъ образцу §. 23. подъ (*v.*, заменяюћи у истомъ угаль a еданпутъ съ 36° , другий путь пакъ 72° , добыамо збогъ $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, а $\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ (*)

$$\sin (36^\circ + \beta) - \sin (36^\circ - \beta) = \sin \beta \frac{1 + \sqrt{5}}{1}, \text{ а}$$

$$\sin (72^\circ + \beta) - \sin (72^\circ - \beta) = \sin \beta \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

ова пакъ уравненія еданпутъ сабираюћи, а другий путь друго одъ првога одузимаюћи слѣдуе

$$\begin{aligned} \sin (36^\circ + \beta) - \sin (36^\circ - \beta) + \sin (72^\circ - \beta) - \\ - \sin (72^\circ + \beta) = \sin \beta, \end{aligned}$$

поменутый образаць.

(*) Да е $\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ знамо изъ §. 36.; да е пакъ $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ дознаемо айдобнѣи образцемъ $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$ (§. 27. подъ 6.), поставляюћи у истомъ $a = 36^\circ$, по чему слѣдуе $\cos 36^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 72^\circ}{2}}$ или, $\cos 72^\circ$ горнѣмъ вредности заменяюћи, $\cos 36^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right)}$ и наипосле іошь $\sqrt{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$ као сурдскій — $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$ — разрешуюћи, $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Г.) Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблицы; и преобразанѣ лучне мере у праву и обратно.

I. Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица.

§. 46.

Сматранѣмъ веће части гониометричны образаца морамо увидити, да се рачунѣ при нѣиовомѣ употреблѣню, употреблѣнѣмъ логаритама дотичны функція место нѣиовы броевны вредностѣй, веома олакшава. Тога ради употребляю се обично не саме функціе, него нѣиовы логаритми, кои су на тай конаць већѣ и одавна израчунѣни и у удобне таблице сложени. Но будући су, као што знамо, синуси прве четврти за полупречникъ 1, чисти разломци; значице дакле нѣиовы логаритама одрицателне и одтудѣ рачунѣ съ таковымъ логаритмима неудобанѣ: то су такове таблице обично израчунѣне за полупречникъ 10^{10} , чимъ значице логаритама поменуты, у 10 деловны места определѣны функція постаю положителне.

Найпосле јошѣ валя приметити, да се гониометричне функціе за разлику одѣ нѣиовы логаритама називаю природнымъ, ови пакѣ умѣтнымъ или артистичнымъ функціама. Тако е н. п. по §. 36. $\frac{1}{2} = 0.5$ наравный, по овоме пакѣ $\log 0.5$ умѣтнѣй синусѣ лука одѣ 36° .

§. 47.

Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица учи се најболѣ изѣ овы самы, зато ћемо

овде само да наведемо оне гониометричне истине, на коима су такове таблице основане. Те есу

1.) Функціе прве четврти расту, кофункціе на противѣ умаляваю се увећаванѣмъ лука.

2.) Синуси и тангенте врло малы лукова стое съ овима у геометричной, нѣиови дакле логаритми съ логаритмима лукова у аритметичной сразмерности, тако да, ако су φ и ψ два врло мала лука, имамо

$$\sin \varphi : \sin \psi = \tan \varphi : \tan \psi = \text{arc } \varphi : \text{arc } \psi, \text{ а}$$

$$\log \sin \varphi \div \log \sin \psi = \log \tan \varphi \div \log \tan \psi = \\ = \log \text{arc } \varphi \div \log \text{arc } \psi$$

3.) Разлике већи, међу собомъ найдалѣ еднимъ минутомъ разликуюћи се лукова, имаю се као разлике едноимены функціа, и дакле и као разлике истымъ функціама принадлежећи логаритама. Найпосле

4.) Логаритми тангенте и котангенте исты лукова имаю еднаке, но разнѣ означене разлике.

Првый одѣ овы основа тригонометричны таблица познать е јошѣ изѣ §. 10.; другѣй слѣдуе непосредствено изѣ §. 38. и додатка §у. 9., о третьемъ пакѣ и четвртомъ можемо се лако уверити, но најпре морамо јошѣ приметити, да другѣй збогъ $\cos \varphi = \sin (90^\circ - \varphi)$ и $\cot \varphi = \tan (90^\circ - \varphi)$, постои, и за косинусе и котангенте онаковы углава, кои се одѣ правога разликую само некимъ броемъ секунда.

§. 48.

Увереніє о трећемъ. За полупречникъ 1 подае се познатимъ изъ геометріе начиномъ, у 10 деловны места

$$\text{arc } 1' = \frac{\pi}{10800} = 0'0002908882, \text{ а по § 39.}$$

у исто толико теста

$$\sin 30' = 0'0001454441; \text{ дакле}$$

$$2 \sin 30' = 0'0002908882 = \text{arc } 1',$$

или збогъ $2 \sin 30' = \text{chord. } 1'$, у 10 деловны места
 $\text{chord. } 1' = \text{arc. } 1'$,

то ће рећи, луци до еднога минута могу се заменити тетивкама, или такви се луци могу сматрати као праве пруге.

сл. 8. Ово предпоставши условимо у сл. 8, да є $\text{arc } AM =$ некомъ брою степена и минута α , $\text{arc. } MP =$ $= 1' = 60''$, најпосле $\text{arc. } MN = v'' < 60''$, и спусти-мо MQ , PS и $NR \perp$ на AC ; быт'ће $MQ = \sin \alpha$, $PS = \sin (\alpha + 60'')$ а $NR = \sin (\alpha + v'')$. Ако пакъ іошъ повучемо $Mp \parallel Nn \perp PS$, онда є, сматрајући по горњему MP и MN као праве, $\triangle MPp \sim \triangle MNn$, и одтуда

$$MP : MN = Pp : Nm, \text{ или}$$

$$(AP - AM) : (AN - AM) = (PS - MQ) : (NR - MQ)$$

т. є.

$$\begin{aligned} [\text{arc } (\alpha + 60'') - \text{arc } \alpha] : [\text{arc } (\alpha + v'') - \text{arc } \alpha] = \\ = [\sin (\alpha + 60'') - \sin \alpha] : [\sin (\alpha + v'') - \sin \alpha] \end{aligned}$$

Луци $(\alpha + 60'')$ и α разликую се међу собомъ само єднимъ минутомъ, луци пакъ $(\alpha + v'')$ и α съ

іошъ манѣ; а мы знамо изъ алгебре, да су разлике броева, међу собомъ само єдномъ єдиницомъ разликујући се, у 7 деловны места сразмерне разликама истымъ броевима принадлежећи логаритама; дакле є

$$\begin{aligned} 1.) [\text{arc } (\alpha + 60'') - \text{arc } \alpha] : [\text{arc } (\alpha + v'') - \text{arc } \alpha] = \\ = [\sin (\alpha + 60'') - \sin \alpha] : [\sin (\alpha + v'') - \sin \alpha] = \\ = [\log \sin (\alpha + 60'') - \log \sin \alpha] : \\ : [\log \sin (\alpha + v'') - \log \sin \alpha] \end{aligned}$$

Подобнымъ начиномъ налазимо и

$$\begin{aligned} 2.) [\text{arc } (\alpha + 60'') - \text{arc } \alpha] : [\text{arc } (\alpha + v'') - \text{arc } \alpha] = \\ = [\text{tang } (\alpha + 60'') - \text{tang } \alpha] : \\ : [\text{tang } (\alpha + v'') - \text{tang } \alpha] = \\ = [\log \text{tang } (\alpha + 60'') - \log \text{tang } \alpha] : \\ : [\log \text{tang } (\alpha + v'') - \log \text{tang } \alpha] \end{aligned}$$

Овымъ є сразмерностима вопросно треће изреченіє, као што є лако увидити, у смотреню синуса и тангенте доказано; почемъ пакъ косинуси и котангенте нису ништа друго, него синуси и тангенте комплементарны, међу собомъ истымъ начиномъ разликујући се углава: то постои исто изреченіє и за косинусе и котангенте, и тако дакле доиста за све обично упокребляюће се функціє.

§. 49.

Увереніє о четвртомъ. По §. є 16. или 18.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \text{ а } \operatorname{tang} (\alpha + d\alpha) = \frac{1}{\cot (\alpha + d\alpha)}$$

т. е. $\operatorname{tang} \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, и $\operatorname{tang} (\alpha + d\alpha) \cdot \cot (\alpha + d\alpha) = 1$,
при чему $d\alpha$ означує некій параштай угла α .

Изъ овы уравненія слѣдує просте

$$\operatorname{tang} \alpha \cdot \cot \alpha = \operatorname{tang} (\alpha + d\alpha) \cdot \cot (\alpha + d\alpha)$$

дакле е

$$\log \operatorname{tang} \alpha + \log \cot \alpha = \log \operatorname{tang} (\alpha + d\alpha) + \log \cot (\alpha + d\alpha) \text{ или, увиђавномъ пременомъ,}$$

$$\begin{aligned} [\log \operatorname{tang} (\alpha + d\alpha) - \log \operatorname{tang} \alpha] &= - \\ &- [\log \cot (\alpha + d\alpha) - \log \cot \alpha] \end{aligned}$$

т. е. логаритмичне разлике тангента' и котангента' исты углава, као што е речено, равне, и само разно означене.

§. 50.

На основу прве и друге одъ овы истина (§. 47.) налазимо при рачунаню тригонометричны таблица' логаритме синуса и тангента' лукова до едногъ минута, и логаритме косинуса и котангента' лукова одъ $89^\circ 59'$ до 90° , — врло удобно простымъ сабиранѣмъ и одузимањемъ на слѣдуюћий начинъ:

Посредствомъ точно израчунѣны логаритама просты броева определяемо логаритамъ некогъ синуса, н. п. логаритамъ синуса одъ $30''$, и томе додаемо потомъ логаритмичну разлику броева 30 и 31 , чимъ добыямо логаритамъ синуса и тангенте одъ $31''$, а косинуса и котангенте одъ $89^\circ 59' 29''$. Додаюћи потомъ овоме логаритму разлику броева 31 и 32 , налазимо логар. синуса и тангенте одъ $32''$ а косинуса и котангенте одъ $89^\circ 59' 28''$; и тымъ

истымъ начиномъ и далѣ поступаюћи, подаю се логаритми синуса и тангенте осталы већи лукова до едногъ минута, а логаритми косинуса и котангенте манѣи, до $89^\circ 59'$. — Одузимаюћи на противъ одъ логаритма синуса одъ $30''$ логаритмичну разлику броева 29 и 30 , добыямо логар. синуса и тангенте одъ $29''$, а косинуса и котангенте одъ $89^\circ 59' 31''$; одъ овога опеть одузимаюћи логаритмичну разлику броева 28 и 29 , налазимо логаритамъ синуса и тангенте одъ $28''$, а косинуса и котангенте одъ $89^\circ 59' 32''$, и т. д. све друге.

§. 51.

Изъ доказаны сразмерностей §а 48 слѣдує

$$\begin{aligned} 60'' : v'' &= [\log \sin (\alpha + 60'') - \log \sin \alpha] : \\ &: [\log \sin (\alpha + v'') - \log \sin \alpha] \\ &= [\log \operatorname{tang} (\alpha + 60'') - \log \operatorname{tang} \alpha] : \\ &: [\log \operatorname{tang} (\alpha + v'') - \log \operatorname{tang} \alpha] \end{aligned}$$

или, краћине ради прве разлике съ $D \log \sin \alpha$ и $D \log \operatorname{tang} \alpha$, друге пакъ съ $d \log \sin \alpha$ и $d \log \operatorname{tang} \alpha$ означуюћи,

$$\begin{aligned} 60'' : v'' &= D \log \sin \alpha : d \log \sin \alpha \\ &= D \log \operatorname{tang} \alpha : d \log \operatorname{tang} \alpha, \text{ и одтуда} \end{aligned}$$

$$d \log \sin \alpha = v'' \cdot \frac{D \log \sin \alpha}{60''},$$

$$d \log \operatorname{tang} \alpha = v'' \cdot \frac{D \log \operatorname{tang} \alpha}{60''}$$

При овоме е, као што лако увиђамо, $\frac{D \log \sin \alpha}{60}$
разлика, којомъ логаритамъ синуса одъ α нарашћує

при свакомъ вышкѣ одъ єдне секунде до логаритма синуса одъ $(\alpha + 60'')$, т. є. до логаритма синуса єднымъ минутомъ веѣга лука; а $\frac{D \log \tan \alpha}{60''}$ иста логаритмична разлика тангенте, и мы по томе налазимо разлику коіомъ логаритамъ синуса или тангенте одъ α нарашћує до логаритма синуса или тангенте съ v'' веѣга лука: ако преѣашню логаритмичну разлику за $1''$ помложимо съ v .

На основу дакле треће, у §. 48. доказане истине доволно є, да тригонометричне таблице садрже логаритме функція лукова веѣи одъ $1'$, само одъ минута до минута; єрь се изъ нѣи они други, т. є. логаритми функція, осимъ степена и минута іощъ и некій брой секунда садржаваюѣи лукова, лако могу определити — увиѣавнымъ изъ горнѣга начиномъ — посредствомъ израчунѣне разлике за $1''$. При томе само іощъ валя приметити, да се съ обзиромъ на прву истину логаритмична поправка збогъ секунда при косинусима и котангентама предходеѣемъ логаритму нема додати, но одъ нѣга одузети.

§. 52.

Найпосле, на основу четврте, у §. 49. доказане истине, могу бити логаритмичне разлике тангенте и котангенте у таблицама, као заєдничке, само єданпутъ уписане, и таблице дакле тимъ нешто простіє.

§. 53.

При концу овога предмета морамо іощъ показати, коимъ се начиномъ логаритми функція за

полупречникъ 1 преводе у табличне, т. є. у логаритме за полупречникъ 10^{10} , и обратно.

По §. є. 33. $F(\alpha) = r \cdot f(\alpha)$, обратно $f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r}$; зато

$$\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + \log r, \text{ на противъ}$$

$$\log f(\alpha) = \log F(\alpha) - \log r; \text{ или збогъ } r = 10^{10}$$

$$\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + 10, \text{ а}$$

$$\log f(\alpha) = \log F(\alpha) - 10; \text{ то ѣе реѣи:}$$

Логаритамъ неке функціє налазимо за табличный полупречникъ 10^{10} , ако нѣномъ логаритму за полупречникъ 1, десетъ єдиница додамо; на противъ пакъ логаритамъ неке функціє за полупречникъ 1 добыя се изъ логаритма таблице, ако се одъ овога 10 єдиница одузму.

II. Преобраћанѣ лучне мере у праву и обратно.

§. 54.

У практики нужно є много пута, да се некій лукъ изрази у частима полупречника, т. є. да се лучна мера преведе у праву; као и обратно некій у частима полупречника, то ѣе реѣи, правомъ меромъ определѣный лукъ, да се изрази нѣговомъ природномъ, т. є. лучномъ меромъ. Извидимо дакле коимъ то начиномъ постизавамо.

У име тога нека намъ представля φ'' некій у секундама изражений лукъ, $\text{arc } \varphi''$ пакъ истога лука дужину у частима пулупречника. За полупречникъ 1 имамо познатымъ изъ геометріє начиномъ

$\varphi'' : 180.60.60 = \text{arc } \varphi'' : \pi$, и одтуда

$$\varphi'' = \frac{180.60.60.}{\pi} \cdot \text{arc } \varphi'' \dots \dots \dots (1.)$$

Означуюћи подобно съ ϱ'' лукъ у правой мѣри равнъ полупречнику, бытѣе за полупречникъ 1, $\text{arc } \varrho'' = 1$, дакле

$\varrho'' : 180.60.60 = 1 : \pi$, и одатле

$$\varrho'' = \frac{180.60.60.}{\pi} \dots \dots \dots (2.)$$

Почемъ е пакъ найпосле $\text{arc } \varrho'' = 1 = \varrho'' \cdot \text{arc } 1''$, то е

$$\varrho'' = \frac{1}{\text{arc } 1''} \dots \dots \dots (3.)$$

а збогъ $\text{arc } 1'' = \sin 1''$, юшъ

$$\varrho'' = \frac{1}{\sin 1''} \dots \dots \dots (4.)$$

Поставляюћи садъ све ове вредности у равность подъ 1, имамо

За преобращанѣ лучне мере у праву

$$\varphi'' = \varrho'' \cdot \text{arc } \varphi'' = \frac{\text{arc } \varphi''}{\text{arc } 1''} = \frac{\text{arc } \varphi''}{\sin 1''} \text{ и одту-}$$

да обратно

За преобращанѣ праве мере у лучну

$$\text{arc } \varphi'' = \frac{\varphi''}{\varrho''} = \varphi'' \cdot \text{arc } 1'' = \varphi'' \sin 1'' ;$$

при чему е, по равности подъ 2, у секундама изражений полупречникъ

$$\varrho'' = 206265''$$

Додатакъ. Сасвимъ истымъ начиномъ налазимо $\varrho' = \frac{1}{\text{arc } 1'} = \frac{1}{\sin 1'}$, $\varrho^0 = \frac{1}{\text{arc } 1^0}$; и дакле

$$\varphi' = \varrho' \text{ arc } \varphi' = \frac{\text{arc } \varphi'}{\text{arc } 1'} = \frac{\text{arc } \varphi'}{\sin 1'}, \text{ а}$$

$$\varphi^0 = \varrho^0 \cdot \text{arc } \varphi^0 = \frac{\text{arc } \varphi^0}{\text{arc } 1^0}$$

при чему е

$$\varrho' = \frac{180.60}{\pi} \doteq 3447'8, \text{ а}$$

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi} \doteq 57'3$$

§. 55.

Ако φ'' нѣ веће одъ $2400'' = 40'$, онда $\text{arc } \varphi''$ у првомъ одъ горњи израза можемо заменити синусомъ, т. е. можемо рећи, да е

$$\varphi'' = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''}, \text{ и одтуда обратно}$$

$$\sin \varphi = \varphi'' \cdot \sin 1''$$

Узимаюћи у првомъ одъ ова два израза $\varphi = 40'$, грешимо само съ $0''05$; при φ пакъ $= 1^0$, грешимо съ $0''18$.

Ова два израза служе, као што се лако увиђа, првый за налазенѣ малогъ некогъ лука изъ познатогъ нѣговогъ синуса и синуса $1''$, другій пакъ обратно за налазенѣ синуса некогъ малогъ лука изъ овога и синуса $1''$.

КНЪИГА ДРУГА.

РАВНА ТРИГОНОМЕТРИЯ.

Б.) Разрешеніе триуглова.

I. Обшта свойства триуглова.

§. 56.

Означимо угле произвольного триугла ABC (сл. 9.) са A , B и C , а супротне нѣма стране дотично съ a , b и c ; и спустимо потомъ съ ма когга угла, н. п. съ B , управну BD на супротну страну b . Сматраюћи потомъ страну c као полупречникъ мере угла A , а страну a као полупречникъ угла C : управна въ BD синусъ $\angle A$ и C , т. е. $BD = \text{Sin } A = \text{Sin } C$.

По §у е пакъ 33. за полупречникъ 1

$\text{Sin } A = c \cdot \sin A$, а $\text{Sin } C = a \cdot \sin C$; дакле е

$c \cdot \sin A = a \cdot \sin C$, н одтуда

$$a : c = \sin A : \sin C$$

Истимъ начиномъ добьямо

$$a : b = \sin A : \sin B$$

$$b : c = \sin B : \sin C$$

..... (1.)

одкуда види се, да су стране свакогъ триугла сразмерне синусима супротны угла.

§. 57.

Изъ предходећи сразмерностей слѣдуе:

$$(a + c) : (a - c) = (\sin A + \sin C) : (\sin A - \sin C)$$

$$(a + b) : (a - b) = (\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B)$$

$$(b + c) : (b - c) = (\sin B + \sin C) : (\sin B - \sin C)$$

т. е.

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C}, \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B},$$

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C};$$

будући е пакъ по §. 25. $\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} =$

$$= \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (\varphi + \psi)}{\text{tang } \frac{1}{2} (\varphi - \psi)} : \text{то е}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a + c}{a - c} &= \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (A + C)}{\text{tang } \frac{1}{2} (A - C)} \\ \frac{a + b}{a - b} &= \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{tang } \frac{1}{2} (A - B)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b + c}{b - c} &= \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (B + C)}{\text{tang } \frac{1}{2} (B - C)} \end{aligned} \right\} \text{и дакле уобште:}$$

Количникъ одъ сбира две стране и нѣове разлике, раванъ е количнику тангенте полусбира, поделѣне тангентомъ полуразлике истымъ странама супротны угла.

§. 58.

сл. 9. Изъ слике 9. подае се далъ за полупречникъ
1, $AD = c. \cos A$, $DC = a. \cos C$, дакле

$$b = AD + DC = c. \cos A + a. \cos C.$$

Подобнымъ сматранѣмъ налазимо и

$$a = b. \cos C + c. \cos B$$

$$c = b. \cos A + a. \cos B$$

Можетъ прву равенность съ b , другу съ a
а трећу съ c добыемо

$$b^2 = bc. \cos A + ab. \cos C$$

$$a^2 = ab. \cos C + ac. \cos B \quad \text{и}$$

$$c^2 = bc. \cos A + ac. \cos B;$$

одузимаюћи пакъ одъ собира сваке две одъ овы
равностей дотичну трећу, слѣдуе

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab. \cos C,$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac. \cos B$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc. \cos A; \text{ и одтуда}$$

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab. \cos C \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac. \cos B \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc. \cos A \end{aligned} \right\} \dots (3.)$$

то ће рећи:

Квадратъ сваке стране равна е суму ква-
драта друге две стране, умалѣномъ удвоеннымъ
производомъ исты страна и косинуса вопросной
страни супротнога угла.

§. 59.

Изъ горњи равностей слѣдую за косинусе
углова слѣдуюће три

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Да бы ове ирзазе, ради каснѣ потребе, успо-
сobili за логаритмичанъ рачунъ, то поставимо у
образцу $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ (§. 26. подъ 5) ре-
домъ $2a = C$, B и A , дакле односно $a = \frac{C}{2}$, $\frac{B}{2}$ и $\frac{A}{2}$.
Имаг' ћемо

$$\cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$\cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

Заменяюћи садъ косинусе у горњимъ равно-
стима съ овима вредностима слѣдуе

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{C}{2} &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{B}{2} &= \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2ac} = \\ &= \frac{(a + b + c)(a + c - b)}{2ac} \end{aligned}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}; \text{ или кра-}$$

ћине ради $a + b + c = 2S$, дакле $a + b - c = 2(S - c)$, $a + c - b = 2(S - b)$, а $b + c - a = 2(S - a)$ постављајући,

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{S(S-c)}{ab}$$

$$\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{S(S-b)}{ac}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{S(S-a)}{bc}, \text{ и одтуда}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}} \dots \dots (4.)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$$

§. 60.

Овакимъ истимъ начиномъ добыемо изъ образца $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ (§. 26).

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}} \dots \dots (5.)$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}$$

Ове пакъ изразе съ предходећима дотично делећи налазимо

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}} \end{aligned} \right\} \dots (6.)$$

Заменяјући наипосле у обраацу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (§. 26. подъ 1.) 2α редомъ съ A , B и C , а потомъ синусе и косинусе полууглова съ њиовимъ горњимъ вредностима, находимо

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \dots (7.)$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

II. Разрешенъ правоуглогъ триугла

а.) у ОБИЧНЫМЪ СЛУЧАЕВИМА.

§. 61.

Правоуглыи триугалъ определенъ е, као што знамо, ако су осимъ правога угла јошъ два њгова основка позната, кои само несмеду быти оба угли.

Познати дакле основци могу само быти :

1.) пречница и една управница; 2.) пречница и еданъ угаль; 3.) обе управнице; 4.) една управница и на нъой лежећий угаль; 5.) една управница и супротный угаль, и мы по томе при разрешено правоуглогъ триугла можемо имати свега само петь разны случаева.

Неупуштаюћи се у особито сматранѣ свакогъ поединогъ случая, испытатѣмо само отношенѣ страна и углова правоуглогъ триугла уобште, изъ чега подат' ће се потомъ и исто нѣгово разрешенѣ.

§. 62.

По §. 56. има се у сл. 10.

$$1.) c : a = \sin 90^\circ : \sin A = 1 : \sin A$$

$$2.) c : b = \sin 90^\circ : \sin B = 1 : \sin B$$

$$3.) a : b = \sin A : \sin B;$$

Будући е пакъ $\sin A = \sin (90 - B) = \cos B$, и обратно $\sin B = \sin (90 - A) = \cos A$, то имамо јошъ

$$4.) c : a = 1 : \cos B$$

$$5.) c : b = 1 : \cos A$$

$$6.) a : b = \sin A : \cos A = \cos B : \sin B$$

Изъ прве и четврте сразмерности слѣдуе

$$I. \quad a = c. \sin A = c. \cos B.$$

Изъ 2 пакъ и 5.

$$II. \quad b = c. \sin B = c. \cos A.$$

наипосле изъ 6.

$$III. \quad a = b. \tan A = b. \cot B, \text{ обратно}$$

$$IV. \quad b = a. \tan B = a. \cot A$$

По првой е дакле и другой равности свака управница равна производу пречнице са синусомъ управници супротногъ, или косинусомъ на истой лежећегъ угла, по трећой пакъ и четвртој равности свака управница равна производу оне друге управнице са тангентомъ првой супротногъ, или котангентомъ на истой лежећегъ угла.

§. 63.

Помоћу ова два правила и већъ познатогъ трећегъ $c^2 = a^2 + b^2$ у станю смо разрешити правоуглый триугаль у свакомъ одъ поменуты случаева. Но будући ово последнѣ уравненіе за упо-треблѣнѣ логаритама ніе способно, то ћемо сада јошъ показати, како се и оно врло лако зато удесити може.

Изъ истогъ уравненія слѣдуе

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Будући пакъ тангента, као што смо видели, (§. 10.), може имати сваку вредность одъ 0 до ∞ ; то можемо у овомъ изразу поставити $\frac{b}{a} = \tan \varphi$; быт' ће потомъ

$$c = a \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = a. \sec \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}$$

и одтудъ јошъ

$$a = c. \cos \varphi.$$

У случаю дакле, гди бы вопросно уравненіе потребно было, изнаћи ће се найпре изъ израза

$\text{tang } \varphi = \frac{b}{a}$, дакле $\log \text{tang } \varphi = \log b - \log a$,
 помоћный $\angle \varphi$, а съ овывъ потомъ изъ $c = \frac{a}{\cos \varphi}$
 пречница c , или изъ $a = c \cdot \cos \varphi$ управница a .

§. 64.

За површный садржай T правоуглогъ триугла ABC , добыямо изъ уравненія §. 62. подъ I, II, III редомъ

$$T = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} bc \cos B = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} ac \cdot \cos A \dots \dots \dots (1)$$

$$= \frac{1}{2} b^2 \cdot \text{tang } A = \frac{1}{2} b^2 \cdot \cot B = \frac{1}{2} a^2 \cdot \text{tang } B = \frac{1}{2} a^2 \cdot \cot A \dots \dots \dots (2)$$

по уравненію пакъ $c^2 = a^2 + b^2$ збогъ $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ и $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$ слѣдуе

$$T = \frac{a}{2} \sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{b}{2} \sqrt{(c+b)(c-b)} \dots (3)$$

Ови су изрази, као што се види, сви удесни за рачунъ съ логаритмима, и по нѣма е површный садржай правоуглогъ триугла раванъ половини производа изъ пречнице и едне управнице са синусомъ на управници лежећегъ, или косинусомъ истой супротногъ угла (1); или раванъ половини производа изъ квадрата едне управнице и тангенте на нѣой лежећегъ, или котангенте супротногъ іой угла (2); или най-после раванъ половини производа едне управнице са квадратнымъ коренемъ изъ производа сбира и разлике пречнице и исте управнице (3).

§. 65.

Сватаюћи сва ова докучея, удобности ради при употреблѣню, у едну таблицу, имамо

Познати основци	Непознати основци триугла и нѣговъ површный садржай
1.) пречница c и управница a	$\left\{ \begin{array}{l} b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}; \\ \sin A = \frac{a}{c}; T = \frac{a}{2} \sqrt{(c+a)(c-a)} \end{array} \right.$
2.) пречница c и еданъ угаль A	$\left\{ \begin{array}{l} a = c \cdot \sin A; b = c \cdot \cos A; \\ T = \frac{c^2}{2} \sin A \cos A \text{ (найудобнѣ)} \end{array} \right.$
3.) обе управнице a и b	$\left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{c^2 + b^2}; \text{tang } A = \frac{a}{b}; \\ T = \frac{1}{2} ab \end{array} \right.$
4.) една управница b и на нѣой лежећій угаль A	$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{b}{\cos A}; a = b \cdot \text{tang } A; \\ T = \frac{b^2}{2} \text{tang } A \end{array} \right.$
5.) една управница a и супротный A	$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{a}{\sin A}; b = a \cdot \cot A; \\ T = \frac{a^2}{2} \cot A \end{array} \right.$
Приметба. У свима е случаевима $\gamma B = 90^\circ - A$	

б.) у некимъ особитымъ случаєвима.

§. 66.

При разрешеніи правоугольнѣ триугла догаѣ се, да є место єдногѣ одѣ нужна два основка познать сбирѣ или разлика друга два, или место оба она да су задата два сбира или две разлике, или єданѣ сбирѣ и єдна разлика основака. Разрешенѣ у таковымъ случаєвима показат' ѣмо у слѣдующимъ §§а, ограничаваюѣи се при томѣ само на найтеже.

§. 68.

1.) Познать є сбирѣ пречнице c и веѣе управнице a , $c + a = S$, или ньина разлика $c - a = D$ и она друга управница b .

У првомѣ случаю разрешавамо правоуглыи триугалѣ слѣдующимъ образцима

$$\cot B = \frac{(S + b)(S - b)}{2 Sb} \dots \dots (1)$$

$$a = \frac{(S + b)(S - b)}{2 S} \dots \dots (2)$$

$$c = \frac{b}{\sin B} \dots \dots (3)$$

$$T = \frac{b (S + b)(S - b)}{4 S} \dots \dots (4)$$

Првый, и у овомѣ случаю, основной образацѣ находимо слѣдующимъ начиномѣ:

$$c = \frac{b}{\sin B} = b \operatorname{cosec} B = b \sqrt{1 + \cot^2 B}$$

$a = b \cot B$; дакле

$$c + a = S = b [\sqrt{1 + \cot^2 B} + \cot B],$$

или, ово уравненіе у смотренію $\cot B$ разрешаваюѣи, вопросный изразѣ подѣ 1.

Другій подає се изѣ $a = b \cot B$, поставляюѣи место $\cot B$ наѣну ньну вредность; а 4. изѣ $T = \frac{1}{2} ab$ узимаюѣи наѣну у 2. вредность одѣ a .

За другій случаю налазимо сасвимѣ истымѣ начиномѣ

$$1.) \cot B = \frac{(b + D)(b - D)}{2Db}$$

$$2.) a = \frac{(b + D)(b - D)}{2D}$$

$$3.) c = \frac{b}{\sin B}$$

$$4.) T = \frac{b (b + D)(b - D)}{4D}$$

§. 68.

2.) Задатѣ є сбирѣ $a + b = s$, или разлика $a - b = d$ оба две управнице и пречница c .

У првомѣ случаю имамо

$$\cos \frac{A - B}{2} = \frac{s}{c \sqrt{2}} \text{ или}$$

$$\cos (A - B) = \frac{(s + c)(s - c)}{c^2}$$

чимѣ налазимо разлику углава A и B , а помоѣу нь и сбира $A + B = 90^\circ$, свакий поединный угаль. Оста-

ли непознати основци и садржай триугла определюю се потомъ помоћу нађены угла.

До наведена два образа долазимо слѣдующимъ путемъ.

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \sin B;$$

дакле $a + b = s = c(\sin A + \sin B)$ одкуда слѣдуе

$$\sin A + \sin B = \frac{s}{c}.$$

Но по §. е 23.

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \\ &= 2 \cdot \sin 45^\circ \cos \frac{A-B}{2} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}, \end{aligned}$$

(ерь е по §. 36. $\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$) слѣдовательно

$$\sqrt{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = \frac{s}{c}, \quad \text{а}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{s}{c \sqrt{2}}.$$

Онай другій изразъ добыямо изъ овога по образцу $\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \beta)}$, (у §. 29. подъ 11.) поставляюћи у истомъ $\beta = A - B$, чимъ слѣдуе

$$\cos \frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \cos(A-B)]} \quad \text{а по пред-}$$

ходеһой равности

$$\sqrt{\frac{1}{2}[1 + \cos(A-B)]} = \frac{s}{c \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2}[1 + \cos(A-B)] = \frac{s^2}{2c^2}, \quad \text{и одтуда}$$

$$\cos(A-B) = \frac{s^2 - c^2}{c^2} = \frac{(s+c)(s-c)}{c^2}$$

У другомъ случаю овога задатка имамо

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{d}{c \sqrt{2}} \quad \text{или}$$

$$\cos(A-B) = \frac{(c+d)(c-d)}{c^2}, \quad \text{кое изразе добыя-$$

мо такођеръ вишеназначенымъ путемъ.

§. 69.

3.) Задать е сбиръ или разлика пречнице и едне управнице $c + a = S$, или $c - a = D$, и еданъ угаль н. пр. A .

За првый случай имамо найпре пречницу

$$c = \frac{S}{2 \cdot \sin^2(45^\circ + \frac{A}{2})} = \frac{S}{2 \cos^2(45^\circ - \frac{A}{2})},$$

коіомъ после помоћу познатога угла определяемо остале основке и садржай.

За другій случай имамо

$$c = \frac{D}{2 \sin^2(45^\circ - \frac{A}{2})} = \frac{D}{2 \cos^2(45^\circ + \frac{A}{2})}$$

Ови образци добыяю се слѣдующимъ начинемъ:

$$a = c \cdot \sin A, \quad \text{дакле}$$

$$c + a = S = c(1 + \sin A)$$

$$c - a = D = c(1 - \sin A),$$

а одтуда

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{S}{1 + \sin A} \\ c &= \frac{D}{1 - \sin A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\alpha)$$

Поставляюћи у образцу §. 23.

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad \text{и}$$

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2},$$

угаль $\varphi = 90^\circ$, а $\psi = A$, слѣдуе

$$\sin 90^\circ + \sin A, \quad \text{т. е.}$$

$$1 + \sin A = 2 \sin \left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$1 - \sin A = 2 \cos \left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right);$$

будући е пакъ $\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$ комплементъ одъ $\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)$

и обратно, т. е. будући е $\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) + \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = 90^\circ$:

то е $\cos \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin \left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)$, и обратно

$$\cos \left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right), \quad \text{— и збогъ тога}$$

$$1 + \sin A = 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$1 - \sin A = 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

ков вредности, у уравненія подъ α поставлѣне, даю наведена два изрза пречнице c .

§. 70.

4. Познать е обадве управнице сбиръ $a + b = s$, или њина разлика $a - b = d$, и еданъ угаль, н.п. A .

За првый случай имамо

$$c = \frac{s}{\cos \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{2}}, \quad \text{а за другій}$$

$$c = \frac{d}{\sin \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{2}};$$

съ пречницомъ пакъ c и познатимъ угломъ A определяемо све остале основке.

Ове образце налазимо слѣдуюћимъ начиномъ. По §у е 62.

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \sin B, \quad \text{дакле}$$

$$s = a + b = c \cdot (\sin A + \sin B), \quad \text{а}$$

$$d = a - b = c \cdot (\sin A - \sin B), \quad \text{и одатле}$$

$$c = \frac{s}{\sin A + \sin B} = \frac{d}{\sin A - \sin B},$$

или обзиромъ на §. 68.

$$c = \frac{s}{\cos \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{d}{\sin \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{2}}$$

III. Разрешенъ косоуглогъ триугла.

а.) у најобичнимъ случаевима.

§. 71.

Косоуглыи триугаль подпуно определянь е, као што знамо,

- 1.) Чрезъ све три њгове стране,
- 2.) две стране и заключеный угаль,
- 3.) две стране и вехой супротный угаль, и
- 4.) едномъ страномъ и оба на ньой лежећа угла.

Извидимо дакле, како се таковый триугаль разрешава у свакомъ одъ овы случаєва по на особъ, означуюћи при томъ еданпутъ за свагда стране триугла, као у §у 56. съ a , b и c , угле съ A , B и C , а сажрай съ T .

- 1.) Познате су све три стране a , b и c ; траже се дакле угли A , B и C и површный сажрай T .

§. 72.

Непознате угле налазимо у овомъ случаю найудобнѣ посредствомъ образаца §. 60. подъ 5,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}},$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}};$$

при чему морамо приметити, да бы довольно было изнаћи овымъ начиномъ само два угла, н. п. A и B , ерь є съ нима, збогъ $A + B + C = 180^\circ$, дакле $C = 180^\circ - (A + B)$, познать и трећий; но болъ є определить и овай поменутымъ, одъ она два угла сасвимъ независнымъ начиномъ. У обште валя одъ яко не само при разрешеню триуглова, него и при другимъ задатцима наблюдавати то начело: да

непознате основке, гди годъ се може, неопредѣлюемо еданъ посредствомъ већъ изнаћеногъ другогъ, но свагда само помоћу задаты, да не бы се погрешка при едномъ одъ ньи учинѣна, пренела и на оне друге.

О точности овако определѣны углава уверавамо се ньювымъ сабиранѣмъ, по чему, ако су добро изнаћени, ньювъ сбиръ мора быти раванъ 180° .

Површный сажрай найпосле добыямо познатымъ изъ геометріе образцемъ

$$T = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)},$$

при комъ є S као и у горњимъ образцима = $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

§. 73.

Примера ради нека є у вопросномъ случаю

$$\left. \begin{array}{l} a = 42 \\ b = 38 \\ c = 24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{дакле } S = \frac{1}{2}(42 + 38 + 24) = \frac{1}{2}104 = 52 \\ S-a = 52 - 42 = 10, \quad S-b = 52 - 38 = 14, \quad a \\ S-c = 52 - 24 = 28. \end{array}$$

По горњему є

$$1.) \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{14 \times 28}{38 \times 24}} = \frac{7}{\sqrt{114}}$$

$$\log \sin \frac{A}{2} = 0.845098 \dots \dots \dots \log 7$$

$$- 1.028453 \dots \dots \dots \frac{1}{2} \log 114$$

$$0.816645 - 1, \text{ или за полупречникъ}$$

таблица (по §. 53.)

$$\begin{array}{r}
 \log T = 1'322219 \dots \log \frac{1}{2} a \\
 1'579784 \dots \log b \\
 0'752643 - 1 \dots \log \sin C \\
 \hline
 2'654646 \\
 -562 \\
 \hline
 840 : 96 = 8
 \end{array}$$

и отгудъ

$$T = 451'48$$

3.) Познате су две стране a и b , и већой супротный $\angle A$; траже се дакле трећа страна c , угли B и C и садржай T .

§. 78.

У овоме случаю имамо прво по §у 56.

$$a : b = \sin A : \sin B, \text{ дакле}$$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}, \text{ чимъ добыямо } \angle B$$

а съ овимъ и трећий $\angle C$, еръ в $C = 180 - (A + B)$.

Трећу страну c находимо по томъ изъ сраз-
мерности

$$a : c = \sin A : \sin C, \text{ изъ кое слѣдуе}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Найпосле садржай триугла налази се у овомъ
случаю као годъ у пређашнѣмъ.

§. 79.

Задржаваюћи узетый већъ примеръ имамо у
настоѣемъ случаю по горяѣму

$$\begin{array}{r}
 1.) \sin B = \frac{38 \cdot \sin 81^\circ 55' 54''}{42} \\
 = \frac{19 \cdot \sin 81^\circ 55' 54''}{21}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \log \sin B = 1'278754 \dots \log 19 \\
 9'995679 \dots \log \sin A \\
 11'274433 \\
 -1'322219 \dots \log 21 \\
 \hline
 9'952214 \\
 -168 \\
 \hline
 46 : 1'05 = 44'' \text{ дакле}
 \end{array}$$

$$\angle B = 63^\circ 36' 44''$$

$$\angle C = 180 - (A + B) = 34^\circ 27' 22''$$

$$2.) c = \frac{42 \cdot \sin 34^\circ 27' 22''}{\sin 81^\circ 55' 54''}$$

$$\begin{array}{r}
 \log c = 1'623249 \dots \log a \\
 9'752576 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \dots \log \sin C \\
 67 \\
 \hline
 11'375892 \\
 -9'995679 \dots \log \sin A \\
 \hline
 1'380213 \\
 -1 \\
 \hline
 2 \\
 c = 24.00
 \end{array}$$

4.) Позната е една страна a съ оба на нъой
лежећа угла B и C ; траже се дакле друге две
стране b и c , трећий угаль A и садржай T .

§. 80.

У овомъ е, одъ свію найпростиѣмъ случаю, съ
углима B и C познать и трећий A , и раванъ е

$180^\circ - (B + C)$; стране пакъ и садржай триугла на-
лазимо као и у пређашњимъ случаю

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Примеръ е овде излишанъ.

б.) у НЕКИМЪ ОСОБИТЫМЪ СЛУЧАЄВИМА.

§. 81.

Осимъ ова четири проста случая, да разре-
шимо јоштъ неколико одъ оны, у којима е место
едногъ или другогъ нуждногъ основка познать сбиръ
или разлика друга два. Овы случаєва има при ко-
соугломъ триуглу наравно много више него при
правоугломъ; но мы се овде морамо ограничити на
разрешенъ само оны, кои се логаритмично рачуна-
ти могу. Таковы има четири и есу

1.) Задате су две стране a и b и разлика
истима супротны углова $(A - B)$;

2.) Позната су два угла A и B — дакле и
трећий C —, и сбиръ или разлика две стране, н.
п. $(a + b)$ или $(a - b)$;

3.) Познать е еданъ угаль C , супротна
страна c и сбиръ или разлика две друге стра-
не, т. е. $(a + b)$ или $(a - b)$;

4.) Задата е една страна c , еданъ на нъой
лежећий угаль н. п. B , и сбиръ или разлика о-
стале две стране $(a + b)$ или $(a - b)$

§. 82.

У првомъ случаю определяемо найпре $\angle C$
помоћу образца

$$\operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} (A-B);$$

у другомъ разлику страна $(a - b)$ изъ позна-
тогъ сбира образцемъ

$$a - b = (a + b) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B) \cdot \operatorname{tang} \frac{C}{2},$$

обратно сбиръ изъ познате разлике образцемъ

$$a + b = (a - b) \cot \frac{1}{2} (A - B) \cot \frac{C}{2}.$$

У трећемъ случаю тражимо найпре разлику
углова $(A - B)$, и то: при познатомъ сбиру страна
 $(a + b)$ образцемъ

$\cos \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a + b}{c} \sin \frac{C}{2}$, а при познатой
разлики исты страна образцемъ

$$\sin \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{c} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

У четвртогъ најпосле случаю определяемо
угаль A образцима

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{(a + b) + c}{(a + b) - c} \cdot \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \frac{c + (a - b)}{c - (a - b)} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} B,$$

првимъ, ако е познать сбиръ, а другимъ ако е по-
зната разлика страна a и b .

Помоћу овы изнађены количина добьямо по томъ и све остале непознате основке триугла познатымъ већ начинама одъ пређашњи прости случаева.

§. 83.

1.) Образаць за првый случай слѣдуетъ изъ познате равенности (§. 57. подъ 2.)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}, \text{ у зимаюћи место}$$

$\frac{1}{2}(A+B)$ равну вредность $\frac{1}{2}(180-C) = 90^\circ - \frac{C}{2}$; по

чему, збогъ $\operatorname{tang}(90 - \frac{C}{2}) = \operatorname{cot} \frac{C}{2}$, слѣдуетъ

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{cot} \frac{1}{2} C}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{cot} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C}$$

и одтуда увиђавнымъ начинаемъ првый образаць, као што е наведенъ

$$\operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cot} \frac{1}{2}(A-B).$$

2.) Изъ овога подаю се даль

$$a-b = \frac{(a+b) \operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{\operatorname{cot} \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= (a+b) \operatorname{tang} \frac{C}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) \text{ и}$$

$$a+b = \frac{(a-b) \operatorname{cot} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C}$$

$$= (a-b) \operatorname{cot} \frac{1}{2}(A-B) \operatorname{cot} \frac{C}{2}$$

образци другога случая.

§. 84.

1.) Збогъ $\operatorname{cot} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ имамо изъ последнѣ равенности предходећегъ §.

$$a+b = (a-b) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2} C}.$$

Будући е пакъ $a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$, $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$; то е

$$a+b = \frac{c(\sin A + \sin B)}{\sin C} = \frac{c \cdot \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin C}$$

или збогъ $\sin \frac{1}{2}(A+B) = \sin \frac{1}{2}(180-C) = \sin(90^\circ - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2}$, и $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$,

$$a+b = \frac{c \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C},$$

кою вредность у горнѣ уравненіе поставляюћи и уедно скраћуюћи, слѣдуетъ

$$c = (a-b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}, \text{ и одтуда}$$

$$\sin \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{c} \cdot \cos \frac{C}{2},$$

кое е другій образаць трећегъ случая. Подобнымъ начинаемъ налазимо и првый.

2.) По §у е 60.

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}}$$

Ова уравненія еднупуть мложећи, а другій путь прво чрезъ друго делећи, добьямо

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{\operatorname{cot} \frac{1}{2} A} = \frac{S-c}{S} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{(a+b)-c}{(a+b)+c} \text{ и}$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} B} = \frac{S-b}{S-a} = \frac{a+c-b}{c+b-a} = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}, \text{ и од-}$$

туда односно

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{(a+b)+c}{(a+b)-c} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \text{ и}$$

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)} \operatorname{tang} \frac{B}{2},$$

образце четвертогъ случая.

Б.) Употреблѣнъ дюкошнѣга на разрешенѣ неколико геометричны задатака.

1. Разрешенѣ неколико задатака о кругу и правилномъ полигону.

§. 85.

Нека е у слики 1. лукъ $MM_1 = \psi$, нѣгова тетивка $MDM_1 = s$, управна на тетивку $CD = h$, най-после полупречникъ $MC = AC = M_1C = r$.

За овай полупречникъ бытъ не тадъ половина тетивке MD синусъ полуугла ψ , т. е. $\frac{s}{2} = \operatorname{Sin}_r \frac{\psi}{2}$ и-

ли за полупречникъ 1, $\frac{s}{2} = r \cdot \sin \frac{\psi}{2}$, и одтуда

$$s = 2r \cdot \sin \frac{\psi}{2} \dots \dots \dots (1.)$$

Изъ кое равности слѣдую друге две

$$r = \frac{s}{2 \sin \frac{\psi}{2}} \dots \dots \dots (2. \text{ и}$$

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{s}{2r} \dots \dots \dots (3.)$$

Помоћу овы равности у станю смо разрешити слѣдуюћа, геометриомъ неразрешена три задатка:

1.) Изъ познатогъ полупречника r и познатогъ лука ψ , изнаћи овоме луку принадлежећу тетивку s .

2.) Изъ познатогъ лука ψ и нѣгове тетивке s определити полупречникъ r ; и

3.) Изъ познатогъ полупречника r и тетивке s изнаћи овомъ тетивкомъ затегнутый лукъ ψ .

§. 86.

Первый и другій одъ горњи образаца добыяю особиту важность при правилномъ полигону, ерь се съ нѣима изъ познатогъ полупречника r може изнаћи страна свакогъ таковогъ полигона и обратно изъ ове полупречникъ, око истогъ полигона написанога круга. При тьма е задатцима ψ као средиштинный угаль свагда познать, и раванъ $\frac{360^\circ}{n}$, означуюћи съ n брой страна. Половина е дакле тога угла $\frac{\psi}{2} = \frac{180^\circ}{n}$, и по томе имамо за разрешенѣ исты задатака

$$s = 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, \text{ а}$$

$$r = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

§. 87.

Садржай правилнога полигона може се тригонометрично такође рь изнаћи, и, као што ћемо одма видети, много лакше него познатимъ изъ геометрије начиномъ. По овоме е садржай полигона

$$P = nt = n \cdot \frac{sh}{2},$$

при чему s страну MM_1 , а h висину CD триугла MCM_1 , дакле $t = \frac{sh}{2}$ садржай овога триугла представляю, каковы триуглова у правилномъ N -няку има као што знамо, n .

Сматрајући слику налазимо, да е $h = Cr \cos \frac{\psi}{2}$
 $= r \cos \frac{\psi}{2}$, s е пакъ, по првомъ образцу §а 85, =
 $= 2r \sin \frac{\psi}{2}$; дакле садржай полигона $P = n \cdot \frac{s}{2} \cdot h$
 $= n \cdot r^2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}$, или, збогъ $2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}$
 $= \sin \psi$ (§. 26. обр. 1.), и дакле $\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} =$
 $= \frac{1}{2} \sin \psi$, $P = \frac{n}{2} r^2 \sin \psi$; најпосле место ψ нѣгову вредность узимајући,

$$P = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{180^\circ}{n}. \text{ То ће рећи:}$$

Садржай правилнога полигона раванъ е полуброю страна, помноженомъ съ производомъ квадрата полупречника и синуса половине средниногъ угла.

§. 88.

Задатакъ. Изъ познатогъ лука ψ и полупречника r , изнаћи садржай окружногъ окрайка MAM_1DM_1 (слика 1.)

сл. 1.

Разрешенѣ. Познато е изъ геометрије, да се садржай окрайка добья, ако се одъ садржая клина $SMAM_1$ одузме садржай триугла MCM_1 .

Садржай е клина $K = \frac{\psi}{360^\circ} \cdot r^2 \pi$, а садржай триугла по §. 87.

$$t = r^2 \frac{\sin \psi}{2}; \text{ дакле.}$$

$$\begin{aligned} \text{садржай окрайка } O &= K - t = \frac{\psi}{360} r^2 \pi - r^2 \frac{\sin \psi}{2} \\ &= \frac{22 \cdot r^2 \psi}{7 \cdot 360} - r^2 \frac{\sin \psi}{2} \\ &= \frac{11 r^2 \psi}{1260} - r^2 \frac{\sin \psi}{2} \end{aligned}$$

Да бы овай изразъ удесили за удобно употреблѣнѣ логаритама, извучимо најпре $\frac{11}{1260} r^2 \psi$ као чинителя оба члана и заменимо потомъ другій чланъ съ косинусомъ помоћногъ некогъ угла ω ; быт' ће

$$O = \frac{11}{1260} r^2 \psi \left(1 - \frac{630 \cdot \sin \psi}{11 \cdot \psi} \right).$$

Поставляјући пакъ као што рекосмо

$$\frac{630 \sin \psi}{11 \cdot \psi} = \cos \omega \dots \dots (\alpha, \text{ имамо}$$

$$O = \frac{11}{1260} r^2 \psi (1 - \cos \omega), \text{ или збогъ}$$

$$1 - \cos \omega = 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \text{ (§. 27. обр. првый подь 6.)}$$

$$O = \frac{11}{630} r^2 \psi \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

Садржай окрайка дакле изнаћи ћемо, ако найпре определимо изъ уравненія подь α помоћный угаль ω и овога вредность поставимо потомъ у последнѣ уравненіе.

§. 89.

Да е овай рачунъ много краћій него дояко познатый, увиђа се на првый погледъ. Но онъ е уедно и много лакшій, ерь не само, да при истомъ тетивку никако неупотребляемо, него се јошъ и оба израза, коє логаритмички израчунати имамо, у већой части изъ еднаки броева састое, и дакле единакимъ и логаритмима рачунаю. Еданъ ће насъ примеръ о свему овоме најболъ уверити. Нека е дакле $\psi = 38^\circ$, $r = 8$. У овомъ е случаю

$$\cos \omega = \frac{630 \sin 30^\circ}{11.38}$$

$$\begin{array}{r} \log \cos \omega = 2.799341 \dots \dots \log 630 \\ + 9.789342 \dots \dots \log \sin 38^\circ \\ \hline 12.588683 \\ - 1.041393 \dots \dots \log 11 \\ 1.579784 \dots \dots \log 38 \\ \hline 9.967506 \\ - 471 \\ \hline 35 : 0.85 = 41 \end{array}$$

$$21^\circ 54'$$

$$- 41''$$

$$\omega = 21^\circ 53' 19'', \frac{\omega}{2} = 10^\circ 56' 39''$$

$$O = \frac{11}{630} \cdot 64 \cdot 38 \cdot \sin^2 10^\circ 56' 39''$$

$$\begin{array}{r} \log O = 1.041393 \dots \dots \log 11 \text{ (само преписанъ)} \\ + 1.806180 \dots \dots \log (8^2 = 64) \\ + 1.579784 \dots \dots \log 38 \text{ (преписанъ)} \\ \hline 0.277991 - 1 \\ + 0.555982 - 2 \dots \log \sin \frac{\omega}{2} \text{ за пол. 1} \\ \hline 2.983339 \\ - 2.799341 \dots \dots \log 630 \text{ (преписанъ)} \\ \hline 0.183998 \\ - 839 \\ \hline 1590 : 285 = 5 \end{array}$$

$$O = 1.5275 = 1.53$$

II. Определьванъ неприступны одстоянія.

§. 90.

1.) Задатакъ. Определити на едномъ краю В неприступно одстояніе АВ. (сл. 11.)

сл. 11.

Разрешенъ. Изъ приступне точке А треба подь произвольнымъ угломъ означити и измерити праву АС, и потомъ угломеромъ узети угле А и С; тымъ ћемо одъ триугла АВС знати едну страну АС и оба на нъой лежећа угла А и С, непознато дакле одстояніе АВ, као страна истога триугла, быт' ће