ABEL-ОВА ТЕОРЕМА

ДОКАЗАНА АЛГЕБАРСКИ

ПОМОЋУ RIEMANN-ОВЕ ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА

докторска дисертација

Ђорђа М. Петковића

Примљено испитном комисијом на универзитету у Бечу
Декембра 1893. год.

БЕОГРАД
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1897.

ЕКЗАМИНАТОРИ:

Председник, Декан фил. факултета, проф. **D-r G. v. Escherich;**

Из Математике	I екзамин.	проф. **D-r G. v. Escherich;**
	II »	проф. **D-r L. Gegenbauer;**
Из Физике	екзаминатор	проф. **D-r F. Exner;**
Из Философије	I екзаминатор, дворски саветник,	проф. **D-r R. Zimmermann.**
	II екзамин.	проф. **D-r Th. Vogt.**

ПРЕДГОВОР

О значају Abel-ове теореме у Математици и њеној примени на алгебарске интеграле, из којих се инверзијом добијају елементарне и елиптичне трансцендентне, говорио сам у своме уводном предавању.[1]) Сад неколико речи о овом спису.

Као што се види из наслова, Abel-ову теорему доказао сам алгебарски и помоћу Riemann-ове теорије функција. То сам учинио с циљем да овај „monumentum aere perennius" изнесем осветљен двема важним модерним теоријама: Теоријом елиминација [Cayley, Faà de Bruno, Hermite, Gordan....] и чувеном Rie-mann-овом теоријом функција, за доба Abel-ова, прва још не толико развијена као данас, а друга сасвим непозната.

Теорија елиминација употребљена је за алгебарски доказ ове теореме [део А].

Битне особине Riemann-ове теорије:

1°. Претварање *многозначне* алгебарске функције у *једнозначну* функцију места, употребом Riemann-ове свере; и

2°. Употреба — сем нултих — још и *прекидних* тачака [тачака, у којима је функција под ин-

[1]). Abel-ова теорема и њен значај у Математици „Просветни Гласник", св. 1. и 2. 1896.

тегралним знаком бесконачно велика], за дознавање битних особина алгебарских функција, — примењене су, мислим, са довољно јасности и прецизности у другом делу овога списа [део B]. —

Докторске дисертације штампају се, обично, на оном језику на коме се полаже докторат. Ја то нисам учинио; прво, што сâм закон о полагању доктората на бечком универзитету [Verordnungen bezüglich d. Erlangung des Doctorates an den Universitäten, Wien, 1879., p. 24, D, § 2.], допушта да се полаже докторат на основу слободно изабране и израђене теме, поднесене у рукопису; и друго, што нисам имао времена за штампање на немачком језику, јер сам — због скорог краја допуштеног ми бављења на страни — морао одмах, по положеном докторату, вратити се натраг у Србију. Те две околности учиниле су, те сам се одлучио да овај спис штампам на нашем језику.

За нашу математичку литературу, мислим, да ће бити од вредности ова, јасно опцртана и у свима појединостима расветљена, монографска слика „највећег математичког открића 19-ог века“.

На Св. Саву 1897.
Београд.

Д-р Ђ. М. Петковић.

Avant tout, je pense que si l'on veut faire des progrès en Mathématiques, il faut étudier les maitres et non les élèves. **Abel**

A

Abel-ова теорема доказана алгебарски.

1. *Дефиниција алгебарске функције по Abel-у*[1]

Под алгебарском функцијом f, једне комплексне променљиве $z = x + iy$, разуме се корен једне алгебарске једначине

$$1.\quad \varphi(f, z) = Z_0 f^n + Z_1 f^{n-1} + \ldots\ldots + Z_n = 0,$$

чији су сачинитељи Z рационалне функције променљиве $z = x + iy$.

Најопштији облик тих рационалних сачинитеља биће:

$$2)\quad \begin{cases} Z_0 = \alpha_0^{(0)} z^{n_0} = \alpha_1^{(0)} z^{n_0 - 1} + \ldots\ldots + \alpha_{n_0}^{(0)} \\ Z_1 = \alpha_0^{(1)} z^{n_1} + \alpha_1^{(1)} z^{n_1 - 1} + \ldots\ldots + \alpha_{n_1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_n = \alpha_0^{(n)} z^{n_n} + \alpha_1^{(n)} z^{n_n - 1} + \ldots\ldots + \alpha_{n_n}^{(n)}, \end{cases}$$

[1]) Oeuvres complètes de N. H. Abel. nouvelle ed., t. I. p 68.

где су сва α комплексне сталне количине, а изложитељи од z значе целе бројеве.

Нека је сад

$$3.)\quad \Phi(f, z)$$

буди која рационална функција количина f и z, при чему се увек узима, да је f дефинисано алгебарском једначином 1.), онда се интеграл

$$4.)\quad \int \Phi(f, z)\, dz$$

зове *Abel-ов интеграл*, или у опште *алгебарски интеграл*.

2. ***Abel-ова теорема и њен доказ помоћу особини једног система двеју алгебарских једначина.***

Пре свега чувена Abel-ова теорема састоји се у овоме:

Збир коначног броја сличних алгебарских интеграла даје једну алгебарску и једну логаритамску функцију.

Другим речима, ако је i један цео, положан и коначан број:

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ldots\ z_i,$$

i комплексних променљивих количина: f једна алгебарска функција дефинисана једначином 1.), онда постоји увек овај однос

$$2)\ \int_{Z_1^{(0)}}^{Z_1^{(1)}} \Phi(f, z_1)\, dz_1 + \int_{Z_2^{(0)}}^{Z_2^{(1)}} \Phi(f, z_2)\, dz_2 + \ldots\ldots +$$

$$+\int_{Z_{\tilde{\iota}}}^{Z_{\tilde{\iota}}^{(1)}} \Phi(f,z_{\tilde{\iota}})\,dz_{\tilde{\iota}} = \text{Alrfunc.} + \text{Logfunc.};$$

под претпоставком да сва Φ под интегралним знаком, испуњују познате услове интеграљивости, и да интегрални путеви никад не пролазе кроз сингуларне тачке функција Φ.

Пошто сва Φ, по претпоставци, испуњују услове интеграљивости, то је на основу теорије интеграљења једног тоталног диференцијала више промељивих: сума интеграла на левој страни у 5.) једнака интегралу тоталног диференцијала

$$6.)\ \Phi(f,z_1)\,dz_1 + \Phi(f,z_2)\,dz_2 + \ldots\ldots + \Phi(f,z_{\tilde{\iota}})\,dz_{\tilde{\iota}}$$

комплексних променљивих

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ldots\ z_{\tilde{\iota}}.$$

Да бисмо изречену теорему доказали, морамо преобразити тотални диференцијал 6.). С тога, да бисмо имали нужне једначине за преображај, нека нам је дата још једна алгебарска једначина m^r степена

$$7.)\ \psi(f,z) = Z'_0 f^m + Z'_1 f^{m-1} + \ldots\ldots + Z'_m = 0.$$

Поједина Z' у овој једначини дефинисана су изразима

$$
8.)\begin{cases}
Z'_0 = \beta_0^{(0)} z^{m_0} + \beta_1^{(0)} Z^{m_0 - 1} + \ldots\ldots + \beta_{m_0}^{(0)} \\
Z'_1 = \beta_0^{(1)} z^{m_1} + \beta_1^{(1)} Z^{m_1 - 1} + \ldots\ldots + \beta_{m_1}^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Z'_m = \beta_0^{(m)} z^{m_m} + \beta_1^{(m)} Z^{m_n - 1} + \ldots\ldots + \beta_{m_m}^{(m)},
\end{cases}
$$

где су сва β комплексне сталне количине, а m цели бројеви.

Једначина 7.), у вези са једначином 1.), служиће нам да поставимо нужне једначине за преображај.

Узмимо сад да су *сачинитељи* β у систему 8.) прапромењљиве количине, и покушајмо пређашње прапромењљиве z преставити као функције нових промењљивих β.

На основу елиминационе теорије, могуће је увек сачинитеље два дата полинома, као нпр. 1.) и 7.), довести у везу на овај начин. Уредимо оба полинома по степенима једне и исте непознате нпр. f, и тражимо највећу заједничку меру оба полинома, т. ј. нађимо функцију највишег степена по f, која се алгебарски садржи у оба полинома. По познатој деобној методи, деоба, после које непосредно следује као остатак нула, даје нам највећу заједничку меру. И то последњи делитељ је та функција највишег степена по f, која при неодређеним вредностима непознате z једновремено дели оба полинома без остатка. Ако је, напротив, последњи остатак 1, или ма каква функција само сачинитеља од f у датим полиномима, то је онда сигуран знак, да оба полинома немају ниједне функције непознате f, која се у оба полинома без остатка садржи.

Ми претпостављамо ово: функције φ (f,z) $= \varphi$ и ψ (f,z) $= \psi$ такве су особине, да они за неодређене вредности непознате z, немају никакву функцију количине f за заједничку меру. Али за извесне, одређене вредности z-a нека имају заједничке мере, и то — што је за даљи рад од пресудног значаја — ми нарочито претпостављамо да φ, ψ, за једну извесну вредност променљиве z, *имају једну и само једну функцију по f првог степена за своју заједничку меру, и ни коју више.*

Сад приступимо изналажењу нужних и довољних услова, склопљених из самих сачинитеља датих полинома φ, ψ, који треба да се испуне, па да полиноми φ, ψ имају само један израз првог степена по f за заједничку меру. Јасно је на основу теорије алгебарских једначина, да су захтеви мало пре исказати, истоветни са овима: једначине

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} \varphi\ (f,z) &= 0 \\ \psi\ (f,z) &= 0, \end{aligned}$$

морају сачињавати један симултани систем, и односно непознате f морају имати један и само један заједнички корен. Напишимо систем a) у развијену облику

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} \varphi\ (f,z) &= Z_0 f^n + Z_1 f^{n-1} + \ldots\ldots + Z_n = 0 \\ \psi\ (f,z) &= Z'_0 f^m + Z'_1 f^{m-1} + \ldots\ldots + Z'_m = 0; \end{aligned}$$

помоћу речене деобне методе може се увек из система b) склопити један израз[2]) оваквог облика

$$9.)\ \varphi_{\mu}^{m-\mu}(f,z) = A\mu^{\mu-1}(z,f).\ \varphi^{n}(z,f) + Б_{\mu}^{n-m+\mu-1}(z,f).\ \psi^{m}(z,f),$$

где су A, B функције променљивих z и f, степена по f, односно m—1) и (n—m+μ—1).

Ако сад у изразу 9) казаљци μ дајемо целе и положне вредности редом:

$$m, m-1, m-2, \ldots\ldots 2, 1,$$

добићемо редом последњи, претпоследњи, претпретпоследњи, ... други, први остатак.

Једначине b) треба, по претпоставци, за одређене вредности z-а, да имају заједничку меру првог степена по f. То значи, другим речима, последњи остатак треба да је нула, т. ј. треба да постоји једначина

$$10.)\ A_{m}^{\mu-1}(z,f).\ \varphi^{n}(z,f) + B_{m}^{n-1}(z,f).\ \psi^{m}(z,f) = 0.$$

Одавде се множењем добија m + n једначина линеарних и хомогених односно неодређених сачинитеља полинома A и B. Детерминанта тога система једначина мора из познатих разлога бити идентично једнака нули. Дакле постоји

[2]) Gordan, Vrl. ü. Juvariantentheorie I. p. 134. Glg. (I).

$$
11.)\ \Delta = \begin{vmatrix}
Z_0 & Z_1 \ldots\ldots & Z_n & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\
0 & Z_0 \ldots\ldots & Z_{n-1} & Z_n & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots\ldots & 0 & Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_n & 0 \\
0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & Z_0 & \ldots & Z_{n-1} & Z_n \\
Z'_0 & Z'_1 \ldots\ldots & Z'_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & Z'_0 \ldots\ldots & Z'_{m-1} & Z'_m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots\ldots & 0 & Z'_0 & Z'_1 & \ldots & Z'_{m-1} & Z'_m
\end{vmatrix} = 0
$$

И тај однос, т. ј. Детерминанта торњег система стављена $= 0$, јесте нужан услов, па да систем b) буде симултан, т. ј. да једначине у њему имају заједничких корена.

Али, да би једначине реченог система имале само један заједнички корен, нужно је, поред 11.), да постоји још један услов; и тај ћемо изнаћи овако. Кад b) има један заједнички корен, онда постоји једна по f линеарна функција, којом је сваки од полинома у b) без остатка дељив. Другим речима претпоследњи остатак мора бити различан од нуле. Вредност тога остатка добија се из израза 9.) кад се стави $\mu = m-1$, у ком случају 9.) добија овакав облик

$$
12.)\ \varphi_{m-1}\,(z, \overset{1}{f}) = A_{m-1}\,(z, \overset{m-2}{f}).\,\varphi\,(z, \overset{n}{f}) +
$$
$$
+ B_{m-1}\,(z, \overset{n-2}{f}).\,\psi\,(z, \overset{m}{f}).
$$

Па пошто је делитељ $\overset{1}{\varphi}(z, f)$ по f првог степена, то се он очевидно може преставити у облику

$$12_0.)\quad f + R(z)$$

где је R(z) рационална функција само z—а. Израз 12.) добија сад овакав облик

$$13.)\quad f + R(z) = A_m \overset{m-2}{(z, f)}.\ \overset{n}{\varphi}(z, f) + $$
$$+ B_{m-1} \overset{n-2}{(z, f)}.\ \overset{m}{\psi}(z, f).$$

Радећи исто онако са овим изразом, као са оним под 10.), добићемо за одредбу m + n — 2 неодређена сачинитеља полинома A и B, m+n—1 једначина, од којих претпоследња, као што је лако увидети, има на левој страни 1; а последња рационалну функцију R(z).

Пошто детерминанта неодређених сачинитеља у m+n—2 првих једначина није нула то се они могу из њих израчунати, као рационалне функције количина Z и Z' у b). — Лако је увидети да последња детерминанта, именитељ у вредности неодређених сачинитеља полинома A и B, није ништа друго до *минор* — субдетерминанта — $2_г$. реда детерминанте 11). Овај минор добија се из Δ, кад се у овој изоставе: два последња стуба, последња врста по Z и последња врста по Z'. Према томе опису, наш минор, различан од нуле, добија овакав облик:

$$\begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots\ldots & Z_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Z_0 & \ldots\ldots\ldots & & Z_n & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 & Z_0 & \ldots & Z_{n-1} \\ Z'_0 & Z'_1 & \ldots\ldots\ldots & & Z'_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Z'_0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & Z'_m & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & Z'_0 & \ldots & Z'_{m-1} \end{vmatrix} = \Delta_2$$

Остаје нам још, да се израз за R(z) ближе одреди. Из 13.) излази, да је израз за R(z) састављен из два члана, првог који се добија множењем сачинитеља Z_n са последњим од f слободним чланом полинома A_{m-1}; други члан добија се множењем количине Z'_m са последњим од f слободним чланом полинома B_{m-1}, Тако, да ако A_{m-1} и B_{m-1} напишемо у развијеном облику

$$14.)\ \begin{cases} A_{m-1}(z,f) = Z_0^{(2)} f^{n-2} + Z_1^{(2)} f^{m-3} + \ldots + Z_{m-2}^{(2)} \\ B_{m-1}(z,f) = Z_0^{(3)} f^{n-2} + Z_1^{(3)} f^{n-3} + \ldots + Z_{n-2}^{(2)} \end{cases}$$

израз за још непотпуно уређену рационалну функцију R(z) овако изгледа:

$$15.)\ R(z) = Z_n Z_{m-2}^{(2)} + Z'_m Z_{n-2}^{(3)}$$

Означимо $m + n - 2$ минора последње врсте у детерминанти Δ_2 редом са

$$D'_0,\ D'_1, \ldots D'_{m-2} \ldots\ldots D'_{m+n-1},$$

па ће вредности за $Z^{(2)}_{m-2}$ и $Z^{(3)}_{n-2}$ овако изгледати

$$Z^{(2)}_{m-2} = \frac{D'_{m-2}}{\varDelta_2},\ Z^{(3)}_{n-2} = \frac{D'_{m+n-1}}{\varDelta_2}.$$

Напомена. Минори првог реда детерминанте $\varDelta_2$ долазе у бројитељима десно с тога, што је $\varDelta_2$ детерминанта система $m + n - 2$ првих једначина које, сем последње, имају на једној страни нулу; последња на тој страни има 1.

Место $Z^{(2)}_{m-2}$ и $Z^{(3)}_{n-3}$ у 15.) ставимо њихове истом нађене вредности; затим ставимо место $R(z)$ тако добивену вредност у 12_0.), па ћемо место израза 12_0.) добити:

$$f + Z_n \frac{D'_{m-2}}{\varDelta_2} + Z'_m \frac{D'_{m+n-1}}{\varDelta_2}$$

Умножимо са $\varDelta_2$ и ставимо

$$Z_n D'_{m-2} + Z'_m D'_{m+n-1} = - \Gamma(z),$$

па ће заједничка мера имати овакав облик

$$16.)\quad \varDelta_2 f - \Gamma(z),\ \varDelta_2 \neq 0,$$

где је $\Gamma(z)$ рационална функција само z—а. Ова функција 16.) мора, као што је познато, исчезнути за један корен z резултантне 11.). Дакле за ма кој корен једначине 11.) биће

$$16_0.)\quad \varDelta_2 f - \Gamma(z) = 0.$$

И тако смо дошли до резултата: нужан и довољан услов, који треба да је испуњен, па да систем двеју једначина

$$\text{b.)} \begin{cases} \varphi(f, z) = 0 \\ \psi(f, z) = 0 \end{cases}$$

постоји једновремено, а односно f да има само један заједнички корен, састоји се у том, да детерминанта Δ исчезне идентично, а њен минор 2^r. реда Δ_2 да је различан од нуле; у кратко: нужан и довољан услов за то састоји се у задовољењу односа

$$17.) \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_2 \neq 0. \end{cases}$$

Заједнички корен f система b), који одговара корену једначине 11.) израчунава се из једначине 16_0.), ако се у њој, место z у Δ_2 и $\Gamma(z)$, стави та одређена вредност z—ва.

Резултанта Δ и њен минор Δ_2 јесу, као функције сачинитеља од φ и ψ, функције z—а. што се може означити са $\Delta(z)$ и $\Delta_2(z)$. $\Delta(z)$ као резултанта једначина b) јесте по z степена mn: нека су

$$z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_1, \ldots\ldots\ldots z_{\tilde{\iota}-1}, z_{\tilde{\iota}}$$

тих $mn = \tilde{\iota}$ корена резултанте, коју ћемо краткоће ради означити са

$$18.) \quad \Delta(z) = 0.$$

Једном од тих корена, нпр. z_i, одговарајући јединцати заједнички корен система b), биће представљен у облику

$$19.) \quad f_i = \frac{\Gamma(z_i)}{\Delta_2(z_i)}$$

као рационална функција корена z_i. —

Ми смо још напред ставили себи у задатак, да количине $z_1, z_2, \ldots\ldots z_{\tilde{i}}$ преставимо као функције променљивих β. С тога имајмо на уму то, да су $\Delta(z)$ као резултанта датог система b), и сви њени минори прво и прво целе рационалне функције сачинитеља Z и Z' у једначинама $\varphi = 0$ и $\psi = 0$; па пошто су по 2.) и 8.) сва Z и Z' рационалне функције количина z и β, то је јасно да се z_1, $z_2, \ldots\ldots z_{\tilde{i}}$ у једначинама 18.) и 19.) могу преставити рационално количинама β, дакле зависе рационално од њих. Лева страна једначине $\Delta(z) = 0$ јесте дакле рационална функција количина $z = z_1$, $z_2, \ldots\ldots z_{\tilde{i}}$ и $\beta = \beta_{0,}^{(0)}\ \beta_{1,}^{(0)} \ldots\ldots \beta_{m0}^{(0)};\ \beta_{m0}^{(1)} \ldots\ldots \beta_{m}^{(1)};$ $\ldots\ldots;\ \beta_0^{(m)},\ \beta_1^{(m)}, \ldots\ldots, \beta_{m_m}^{(m)}$.

Диференцијалимо поменуту једначину тотално како по z, тако и по свима β, па ће бити

$$d\Delta(z) = \frac{\partial \Delta(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_0^{(0)}} d\beta_0^{(0)} + \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_1^{(0)}} + \\ + \ldots\ldots \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_{m_m}^{(m)}} d\beta_{m_m}^{m)}.$$

Пошто је $\Delta(z) = 0$, то ће и тотални диференцијал бити једнак нули за сваку вредност z—а која поништава $\Delta(z)$. С тога је

$$\frac{\partial \Delta(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_0^{(0)}} d\beta_1^{(0)} + \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_1^{(0)}} + \ldots\ldots + \\ + \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_{m_m}^{(m)}} d\beta_{m_m}^{(m)} = 0,$$

или

$$20.)\ \frac{\partial \Delta(z)}{\partial z} dz + \Sigma \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_\lambda^{(k)}} d\beta_\lambda^{(k)} = 0$$

где λ и k прелазе све казаљке нове прапромењиве количине β, као што је то у систему 8.) назначено. Ставимо краткоће ради

$$21.)\ \frac{\partial \Delta(z)}{\partial z} = \Delta'(z) \text{ и } \frac{\partial \Delta(z)}{\partial \beta_\lambda^{(k)}} = \delta_\lambda^{(k)},$$

па је

$$22.)\ \Delta'(z)\, dz + \Sigma \delta_\lambda^{(k)}\, d\beta_\lambda^{(k)} = 0.$$

Из једначине 22.) добијамо dz, независно од знака, у облику

$$23.)\ dz = \frac{1}{\Delta'(z)} \Sigma \delta_\lambda^{(k)}\, d\beta_\lambda^{(k)},$$

као рационалну функцију z — a и прапромењивих β; једначина 19.) даје вредност количине f, за буди који корен z_i једначине $\Delta(z) = 0$.

Узмимо сад ма који члан од оних у тоталном диференцијалу 6.), нпр. члан

$$\Phi\ (f, z_i)\ dz_i$$

и извршимо смену промењивих у функцији Φ (f, z_i), Ми претпостављамо да су условни односи 17.) испуњени; онда за систем 6), а за један ма који корен z_i резултанте $\Delta(z) = 0$, постоји један и само један заједнички корен f_i, који се може преставити као рационална функција количина z_i и β помоћу једначине 19.). Из 23.) добија се за један корен z_i, вредност диференцијала dz_i у облику

$$24.)\quad dz_i + \frac{1}{\varDelta'(z_i)} \Sigma \delta_\lambda^{(k)} d\beta_\lambda^{(k)}$$

по замени у $\Phi\,(f_i, z_i)\, dz_i$, добијамо

$$25.)\quad \Phi\left(\frac{\Gamma(z_i)}{\varDelta_2(z_i)}, z_i\right) \frac{1}{\varDelta'(z_i)} \Sigma \delta_\lambda^{(k)} d\beta_\lambda^{(k)}.$$

Пошто је цели производ пред знаком Σ рационална функција количина z_i и β, то ћемо моћи, краткоће ради, ставити

$$26.)\quad \Phi\left(\frac{\Gamma(z_i)}{\varDelta(z_i)}, z_i\right). \frac{1}{\varDelta'(z_i)} = \varrho(z_i);$$

и 25.) претвара се у један израз оваквог облика

$$27.)\quad \varrho(z_i).\ \Sigma\delta_\lambda^{(k)} d\beta_\lambda^{(k)}.$$

Развијмо назначено сабирање онако, као што је прописано системом 8.) па је

$$28.)\ \varrho(z_i)\left[\delta_0{}^{(0)} d\beta_0{}^{(0)} + \delta_1{}^{(0)} d\beta_1{}^{(0)} + \ldots + \delta_{(0)}^{m_0} d\beta_{(0)}^{m_0} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \delta_0{}^{(m)} d\beta_0{}^{(m)} + \ldots + \delta_{(m)}^{m_m} d\beta_{(m)}^{m_m}\right]$$

Овај израз 28.) општи је тип свију преображених израза под интегралним знаком у изразу 5.) Ставимо место z_i редом све корене једначине $\varDelta(z) = 0$, дакле $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_{\tilde{\imath}}$, па ћемо добити ових $\tilde{\imath}$ израза

$$
29). \begin{cases}
\varrho\,(z_1(\left\{\delta_0^{(0)}\,(d\beta_0^{(0)} + \delta_1^{(0)}\,(z_1)\,d\beta_1^{(0)} + \right. \\
\left. \ldots + \delta_{m_0}^{(0)}\,(z_1)\,d\beta_{m_0}^{(0)} + \ldots\ldots + \delta_{m_m}^{(m)}\,(z_1)\,d\beta_{m_m}^{(m)}\right\} \\
\varrho\,(z_2)\left\{\delta_0^{(0)}(z_2)\,d\beta_0^{(0)} + \delta_1^{(0)}\,(z_2)\,d\beta_1^{(0)} + \right. \\
\left. \ldots + \delta_{m_0}^{(0)}\,(z_2)\,d\beta_{m_0}^{(0)} + \ldots,. + \delta_{m_m}^{(m)}\,(z_2)\,d\beta_{m_m}^{(m)}\right\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varrho\,(z_{\tilde{\imath}})\left\{\delta_0^{(0)}(z_{\tilde{\imath}})\,d\beta_0^{(0)} + \delta_1^{(0)}\,(z_{\tilde{\imath}})\,d\beta_1^{(0)} + \right. \\
\left. \ldots + \delta_{m_0}^{(0)}\,(z_{\tilde{\imath}})\,d\beta_{m_0}^{(0)} + \ldots\ldots + \delta_{m_m}^{(m)}\,(z\tilde{\imath})\,d\beta_{m_m}^{(m)}\right\}
\end{cases}
$$

Ако чланове ових израза саберемо по стубовима, добићемо

$$
30) \begin{cases}
\left\{\varrho(z_1)\,\delta_0^{(0)}\,(z_1) + \varrho\,(z_2)\,\delta_0^{(0)}\,(z_2) + \ldots\ldots\ldots + \right. \\
\left. \qquad + \varrho\,(z)\,\delta_0^{(0)}\,(z\tilde{\imath})\right\}\;d\beta_0^{(0)} + \\
+ \left\{\varrho((z_1)\,\delta_0^{(0)}\,(z_1) + \varrho(z_2)\,\delta_1^{(0)}\,(z_2) + \ldots\ldots\ldots + \right. \\
\left. \qquad + \varrho\,(z_2)\,\delta_1^{(0)}\,(z\tilde{\imath})\right\}\;d\beta_1^{(0)} + \\
+ \left\{\varrho(z_1)\,\delta_{m_m}^{(m)}\,(z_1) + \varrho(z_2)\,\delta_{m_m}^{(m)}\,(z_2) + \ldots\ldots\ldots + \right. \\
\left. \qquad + \varrho\,(z_2)\,\delta_{m_m}^{(m)}\,(z_2)\right\}\;d\beta_{m_m}^{(m)}.
\end{cases}
$$

Лако је сад увидети, да је свака сума у појединим заградама, цела рацинонална и — што је врло важно — симетрична функција корена резултанте $\varDelta(z) = 0$. Па пошто се свака симетрична функција корена може лако претворити у *елементарну симетричну* функцију истих корена; пошто, даље, елементарне симетричне функције корена нису ништа друго, већ комбинације 1^e., 2^e., 3^e.,......$\tilde{\imath}^{\,o}$.

класе без понављања, састављене из основака $z_1, z_2, \ldots . z_{\tilde{\iota}}$, а суме појединих комбинација стоје у познатим односима са одговарајућим сачинитељима једначине $\Delta(z) = 0$, који су рационалне функције прапроменљивих β: то је јасно, да је свака сума у загради рационална функција само прапроменљивих $\beta_0^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \ldots . \beta_m^{(0)}, \ldots . \beta_0^{(m)}, \beta_0^{(m)}, \ldots . \beta_{m_m}^{(m)}$. Нека су те рационалне функције прапроменљивих β, редом

$$\varrho_0^{(0)}, \varrho_1^{(0)}, \ldots . \varrho_{m_0}^{(0)}, \ldots . \varrho_{m_0}^{(m)}, \varrho_1^{(m)}, \ldots . \varrho_{m_m}^{(m)},$$

онда се израз 30.) претвара у овај

$$31.)\ \varrho_0^{(0)} d\beta_0^{(0)} + \varrho_1^{(0)} d\beta_1^{(0)} + \ldots . + \varrho_{m_0}^{(0)} d\beta_1^{(0)} + \ldots . + \varrho_{m_m}^{(m)} d\beta_{m_m}^{(m)}.$$

Предузетом сменом променљивих, ми смо, дакле, претворили наш тотални диференцијал 6.) у један опет тотални диференцијал 31.) нових комплексних променљивих β. Па пошто су услови интеграљивости испуњени, по претпоставци, за тотални диференцијал 6.), то мора бити исто случај и са тоталним диференцијалом 31.).

Замислимо сад детерминанту $\Delta(z)$ развијану и уређену по ствпенима количина z. Сачинитељи појединих степена од z садрже имплицитно променљиве β, које су, као и z, комплексне количине, те се по томе могу овако преставити:

$$32.)\ \beta_0^{(0)} = \xi_0^{(0)} + i\eta_0^{(0)},\ \beta_1^{(0)} = \xi_1^{(0)} + i\eta_1^{(0)}$$

$$\ldots\ldots \beta_{m_0}^{(0)} = \xi_{m_0}^{(0)} + i\eta_{m_0}^{(0)}; \ldots\ldots, \beta_{m_m}^{(m)} = \xi_{m_m}^{(m)} + i\eta_{m_m}^{(m)}$$

Једној одређеној вредности прапромењиве β одговара услед једначине $\varDelta(z)=0$, $\tilde{\iota}$ корена z, те једначине; сваком корену z одговара услед једначине 19.) само један заједнички корен $\mathfrak{f}$ система $\mathfrak{b}$). Те две одговарајуће вредности нераздвојно уносе се у одговарућу функцију Ф тоталног диференцијала 6.).

Нека је сад од свију промењивих 32.) само једна нпр. $\beta_0^{(0)}=\xi_0^{(0)}+\iota\eta_0^{(0)}$ промењива, а остале за моменат сталне. $\tilde{\iota}$ корена једначине $\varDelta(z)=0$, и свакоме од тих корена одговарајући јединцати заједнички корен $\mathfrak{f}$ система $\mathfrak{b}$) јесу, у одређеним границама, непрекидне функције промењиве $\beta_0^{(0)}$. Ако сад пустимо да се промењива $\beta_0^{(0)}$ у околини своје непрекидности, непрекидно мења, и то прво паралелно оси ξ, затим паралелно оси η, онда ће се једновремено, а непрекидно мењати и $\tilde{\iota}$ корена једначине $\varDelta(z)=0$, и то сваки у својој околини непрекидности. За поменути случај је дакле сума $\tilde{\iota}$ интеграла једнака интегралу једне рационалне функције прапромењиве $\beta_0^{(0)}$. Али интеграл једне рационалне функције јесте, у опште узев, једнак једној алгебарској и једној логаритамској функцији.

Ако на исти начин поступимо са сваком од прапромењивих β, добићемо увек на десној страни једну алгебарску и једну логаритамску функцију. Па пошто је сума алгебарско-рационалних функција опет једна алгебарско-рационална функција, а сума логаритама опет логаритам рационалне функције, то је јасно да је у истини збир коначног броја Abel-ових интеграла једнак једној алгебарској и једној логаритамској функцији. И то ја алгебарски доказ

Abel-ове теореме за функције двеју комплексних промењивих.

B.

Abel-ова теорема изведена Riemann-овом теоријом функција.

3. Riemann-ова свера. — Као чврсту и непромењиву подлогу, при доказивању Abel-ове теореме са гледишта Riemann-ове функционе теорије, узећемо Riemann-ову сверу од више површинских слојева. Другим речима, и геометријски говорећи, ми ћемо замислити да су вредности комплексне промењиве z, и њима одговарајуће вредности алгебарске функције под интегралним знаком, престављене тачкама на једној особеној површини, способној да за сваку могућу вредност прапромењиве z и њој одговарајуће вредности функције истави по једну тачку као геометријска преставникаречених вредности. Површина, која је у стању све то дати, јесте Riemann-ова свера, или Riemann-ова кугла, од више површинских слојева или листова. Она ће нам, тако рећи, бити стваран и непромењив субстрат промењивости и независно промењиве количине z, и функције која од ње зависи.

Та Riemann-ова свера споља посматрана изгледа као свака обична лопта; унутрашњаст њена састављена је овакe: с доње стране спољне површине наслагани су слојеви сверна облика, толико на броју колики је степен алгебарске функције под интегралним знаком. На оним тачкама где се више функцијиних вредности поклапа, срасли су ти листови уједно, тако, да један цилиндарски исечак Riemann-ове свере, који садржи такву једну тачку, изгледа као завојна површина бесконачно мале висине завојна хода; с тога се те тачке зову *завојне тачке* Оне тачке у Riemann-овој свери, које одговарају једној вредности функције под интегралним знаком у једном листу, и тој истој вредности функције у другом листу сверином, — срасле су дуж једне праве или криве линије на самој свери. Ове линије зову се *распутни пресеци*. Једна вредност функцијина којој одговара један лист свере, може само кроз ове распутне пресеке *непрекидно* да пређе у другу функцијину вредност, којој одговара други лист[3]) —

Кад имамо пред собом једну такву Riemann-ову површину, онда можемо одмах узети да је познато:

1.° број n сверних слојева или листова

2.° „ s завојних тачака.

Из n и s лако се налази број попречних пресека, који једну овако сложену површину претварају у просту једнолисну површину, одакле се добија раван.

4. *Основни број N Riemann-ове површине.*

Претпоставимо да нам је дат један систем S сложених Riemann-ових површина; свака од ових површина нека је таква да се коначним бројем попречних пресека може преобратити у просту једнолисну површину. Нека су

[3]) Ради ближег проучавања Riemann-ових површина у опште, могу послужити ова двла

1. B. Riemann's gesammelte Werke, Leipzig, Verlag v. Teubuer 1876. oder 1892.

2. C. Neumann, Vrl. über Riemann's Theorie der Abel'schen Integraie 2-te. Aufl., Leipzig, Verlag v. Teubuer 1884.

3. Felix Klein. über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig, Verlag v. Teubner 1882.

$$\nu, \nu', \nu'', \ldots\ldots\ldots$$

бројеви попречних пресека извршених у разним моментима на датом систему Riemann-ових површина. Нека на завршетку сваког таквог сечења излази као резултат један систем од најпростијих једнолисних површина, чији број нека је: за ν попречних пресека, α; за ν' попречних пресека, α'; за ν'', α''; . . . . . Лако је сад доказати[4]), да постоји однос

$$\nu-\alpha,=\nu'-\alpha'=\nu''-\alpha''= \cdot\cdot\cdot\cdot = \mathrm{const}.$$

Разлика $\nu-\alpha$, између броја попречних пресека и броја простих површина, које следују на завршетку сваког таквог сечења, јесте, за један дати систем S, сталан и непроменљив цео број. Ми ћемо разлику $\nu-\alpha$, са те особине, назвати карактеристиком датог система S. — Увећајмо ту карактеристику са 2, пе ће и та сума бити цела стална и непроменљива. Сума из карактеристике и 2, дакле

$$\nu-\alpha+2$$

зове се *основни број* система S Riemann-ових површина. И тако образац за основни број Riemann-ових површина S, биће

$$1.)\quad N_s=\nu-\alpha+2.$$

Узмимо сад да нам је дата *једна* Riemann-ова површина, која се састоји из n листова, са завојним тачкама, s на броју. Начинимо у 0 један

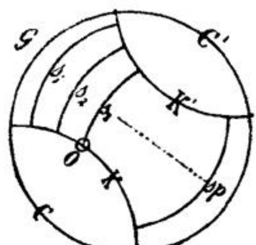
[4]) Neuman, Vrl. über Riemann's Theorie d. Abel'schen Integrale, II. Aufl. p. 154. —

мали отвор и означимо тако отворену површину са R^1. Нека су s завојних тачака реда

$$n_1—, n_2—1, n_3—1, \cdot \cdot \cdot \cdot n_s—1;$$

тј. нека је у једној завојној тачци срасло n_1 листава; у другој завојној тачци n_2 листова; у трећој n_3; . . . . . . у s^{oi}, n_s листова Riemann-ове површине R^1.

Код сваке Riemann-ове површине, могуће је положајима завојних тачака тако располагати, да никако две и две од тих тачака не стоје једна испод друге, т. ј, да не стоје на једном полупречнику Riemann-ово лопте. Замислимо да је такав распоред завојних тачака учињен; извршимо сад два кружна пресека k и k' [сл. 1.], тако. да оба просецајући свих n листова сачињавају две n лисне сверне калоте, које немају ни једне завојне тачке. На тај начин добијамо три одвојена дела дате сверне поршине: две поменуте сверне калоте [од којих свака се састоји из n најпростијих површинских комада], и једну сверну зону g. У овој сверној зони извршимо s пресека s_1, s_2, s_3 . . . . . s_s тако, да два оваква пресека, који непосредно једно за другим долазе садрже само једну завојну тачку. На тај начин s лучних пресека дају s површинских комада g_1, g_2, ... g_s, од којих сваки садржи само једну завојну тачку. Сваки од



сл. 1.

ових s пресека пресеца све једно на друго наслагане листове Riemann-ове сверне површине; другим речима, сваки од s пресека производи једну завојну површину и извесан број простих површина. Према томе опису састоји се ма кој површински део у зони g, нпр. g_i, из једне n_i лисне завојне површине и из $n-n_i$ простих повшина; тако, да ако се n_i-лисна завојна површина узме као једна, g_i се састоји из $n-n_i+1$ површинсиих комада. На пошто се, како завојна повшина, тако и $n-n_i$ површинских комада постојаним преображајем свака може преобратити у елементарну површину, то су тих $n-n_i+1$ површинских комада просте површине. Сасвим то исто важи за свих s—1 осталих комада g. Ако дакле ставимо редом

$$i=1,\ 5,\ 3,\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ s$$

и саберемо, биће број простих површинских комада, произведених помоћу s лучних пресека, ово

$$(n-n_1+1)+(n-n_2+1)+\ .\ .\ .\ .\ +(n-n_s+1)=sn-$$

$$(n_1+n_2+\ .\ .\ .\ .+n_s)+s=(n+1)s-\sum_{i=1}^{i=s} n_i$$

Ако се к томе дода још 2n сверних калота од којих се свака може постојаним преображајем претворити у 2n елементарних, равних, површина, онда ће број простих површина, који се јавља као резултат од s+2 пресека, бити

$$2n+(n+1)s-\sum_{i=1}^{i=s} n_i$$

Ми смо мало пре са α означили број елементарних површипа по извршењу свију пресека, с тога ће бити

$$2.)\quad \alpha = (s-2)n + s - \sum_{i=1}^{i=s} n_i$$

Под *попречним* пресеком у једној Riemann-овој површини, разуме се пресек, који почиње у једној тачци граничне линије, а завршује се у другој тачци њеној; *повратни* пресек зове се пресек који се враћа у сама себе. Ако се линија која граничи отвор O узме за граничну линију спољњег слоја Riemann-ове сфере, онда имамо само један попречни пресек у спољњем листу, и тај почиње у једној тачци линије, која граничи отвор O, а завршује се у другој тачци те исте линије. Сви остали кружни пресеци у C доле, и у C' горе, ваља сматрати као просте повратне пресеке. Оваквих повратних пресека има у овом случају 2n—1. Сваки од s лучних пресека у зони g, даје n попречних пресека; јер, сваки лучни пресек почиње у једној тачци кружног пресека k на једном листу, а завршује се у једној тачци 2^{r}. кружног пресека k' на истом листу. Другим речима у овом случају имамо у целоме

попречних пресека на броју sn+1.
повратних „ „ „ 2n—1.

Међутим, повратни пресеци, ма колико их било на броју, немају апсолутно никаква утицаја на стабилност основног броја Riemann-ове површине. [5]) Ми

[5]) Neumann, у поменутој књизи p. 156.

дакле имамо да рачунамо само са попречним пресецима, као агенсима који деформишу нашу површину. Према формули 1.), основни број ма које површине или система површина, дат је изразом

$$N=v-\alpha+2;$$

за Riemann-ову сверу, која је пред нама, број v попречних пресека је $v=sn+1$; број α простих површина, које се јављају као резултат v изведених пресека, јесте у овом случају

$$\alpha=(s+2)n\times s-\sum_{i=1}^{i=s} n_i$$

С тога ће, дакле, основни број Riemann-ове свере R^i са отвором o, бити

$$\dot{N}=sn+1-(s+2)n-s+\sum_{i=1}^{i=s} n_i+2, \text{ или}$$

$$\dot{N}=3-2n+\sum_{i=s}^{i=1} n_i-s.$$

Међутим $\sum_{i=1}^{i=s} n_i-s$ није ништа друго, већ сума оних брејева, који нам показују коликога је реда која завојна тачка. Ставимо с тога

$$\sum_{i=1}^{i=s} n_i-s=w$$

па је

$$3)\quad \dot{N}=3-2n+w,$$

и то је основни број Riemann-ове свере

5. *Број попречних пресека који, без деобе у комаде, преобраћају Riemann-ову сверу у једну елементарну површину са само једном граничном линијом.* —

Riemann-ова свера, која је пред нама, мора у овом случају бити подвргнута овом услову: пошто се заврши и последња од v пресека, не сме се та сложена површина распасти у комаде; она — истина претворена у просту — мора бити целокупна, нераздвојна. Постављени захтев биће на сваки начин задовољен, ако се место α у $N=v-\alpha+2$ стави 1, јер нам α значи број оних простих површина, које излазе као резултат по извршењу v попречних пресека, а тај број, према постављеном захтеву, мора бити 1. Дакле је за Riemann-ову површину, или за систем ових, на основу формуле 1.):

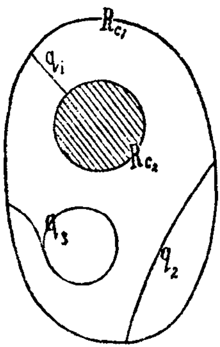
$$4.)\ N=v+1.$$

То значи, у једној Riemann-овој површини могуће је увек извести $v=N-1$ попречних пресека тако, да се површина не окрњи ни једним својим делом, али ипак да буде елементарна површина, т. ј. састављена из само једнога листа са једном затвореном граничном линијом. Ако применимо формулу 4.) на Riemann-ову сверу R^1, онда на основу 4.) добијамо

$$5.)\ \dot{N}-1=w-2\,(n-1).$$

И то је број попречних пресека, које ваља извести у једној Riemann-овој свери R^1, па да се она, без распадања, претвори у једну јединцату просту површину са само једном граничном линијом.

Означимо број граничних линија ма које од Riemann-ових површина са R_c. Сваки попречни пресек или увећава граничне линије за 1 или их смањује за 1. Тако, да ако нам сл. 2. преставља један комад Riemann-ове површине, онда је јасно да се попречним пресеком облика q_1 број граничоих линија смањује за 1, јер се обе граничне линије Rc_1 и Rc_2 спајају у једну једину; међутим, попречним пресецима облика q_2 и q_3 наступа увек увећање граничних линија за 1.



сл. 2.

Али, ма какве врсте били попречни пресеци, крајњи резултат после N—1 извршених таквих пресека, мора бити проста површина само са једном затвореном граничном линијом. Означимо, дакле, са η_i положну или одречну јединицу, за коју се при сваком попречрoм пресеку q_i број граничних линија увећава или смањује, и дајмо казаљци i редом вредности

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot N-1,$$

па ће постојати однос

$$R_c+\eta_1+\eta_2+\eta_3+ \dots\dots +\eta_{N-1}=1,$$

т.ј. крајњи број граничних линија мора бити 1. Нека је број положних јединица σ. онда ће број одречних бити $N-1-\sigma$; број граничних линија, према томе, биће

$$R_c-(N-1-\sigma)-\sigma=1 \quad \text{или}$$

$$6.)\ R_c=N-2\sigma.$$

σ је број положених јединица, дакле један од бројева

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ N-1.$$

према томе је 2σ један од бројева

$$0,\ 2,\ 4, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 2(N-1).$$

Дакле, R_c мора бити један број из реда

$$N,\ N-5,\ N-4,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (N-2N+2=2-N)$$

одакле излази обрнуто да је N један од бројева

$$R_c,\ R_{c+2},\ R_{c+1}, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Па пошто је Riemann-ова свера једна затворена површина, т. ј. површина која нема граничне линије, то је за њу основни број један од бројева

$$0,\ 2,\ 4,\ 6, \cdot\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

дакле увек *паран*. Али, ако се отвор о узме у обзир, и линија, која га граничи, као једна затворена гранична линија; ако, даље, означимо са N основни број такве површине R^1, то ће N бити један од ових бројева

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

дакле *непаран*.

Ми смо нашли [образац 3.)] ово за $\dot{N}$

$$\dot{N}=3+w-2n$$

одакле, у вези са оним што смо мало час доказали, излази да је w увек *паран број*. Доказато је, да је могуће извести N—1 попречних пресека, који површину R^i, без деобе у комаде, претварају у просту површину само са једном граничном линијом. Па пошто је $\dot{N}$ увек непарно, то је $\dot{N}-1$ увек *парно*; означимо га са 2q, па је

$$7.)\quad 2q=w-2(n-1).$$

И то је тај, увек парни, број попречних пресека који претварају Riemann-ову сверу, не комадајући је, у једну просту површину, само са једном граничном линијом. И ова једноставна површина може се савијањем, издуживањем, преобратити у једну ***елементарну равну површину***, а то и јесте главни циљ преображаја ма какве Riemann-ове површине

6. ***Привремено и природно стање најближе околине једне тачке. — Дефиниција алгебарске функција по Riemann-у.***

Ми смо, по Abel-у, дефинисали једну алгебарску функцију као корен једне алгебарске једачине

$$1.)\quad \varphi\,(f, z)=Z_0\,f^n+Z_1\,f^{n-1}+\;.\;.\;.\;.\;.\;+Z_n=0,$$

где су сва Z рационалне функције променљиве z=x+iy. За једну одређену вредност променљиве z, биће, дакле, f, у опште узев, *многозначна* функција те променљиве. Riemann-ове површине створену су, међутим, једино у том циљу, да многозначну алгебарску функцију f претворе у једнозначну функцију места. Услед једначине 1.) наша функција f jесте n-значна функција z-a. С тога је Riemann-ова површина, која јој одговара, једна свера са n слојева, и са коначним бројем завојних тачака, који се број дознаје из ближег познавања саме конструкције израза за f.

Замислимо да нам је дата једна одређена алгебарска функција f, и нека је за њу конструисана Riemann-ова површина. Ова површина садржи у себи тачке где је алгебарска функција нула, а исто тако и тачке у којима је функција бесконачно велика. При испитивању једне алгебарске функције у Riemann-овој површини биће како нулте тачке, тако и оне у којима је функција бесконачно велика, од меродавног значења за понашање функције у Riemann-овој површини. Или, да се прецизније изразимо, пошто су вредности функцијине у нултим тачкама нуле, а у прекидним тачкама бесконачно велике, дакле свака тачка у групи, по себи не нуди ништа што би је могло разликовати од једне тачке у истој групи, то се испитује понашање функције, не у самој нулној или бесконачној тачци, већ у *непосредној близини* и нултих и бесконачних — прекидних — тачака. Ову непосредну близину тачке зваћемо од сад *околина тачке.*

Према природи Riemann-ових вишелисних површина могу околине нултих и прекидних тачака бити различне. Т. ј. оне могу бити непосредна близина једне обичне нулте, или прекидне тачке у једном листу или у непосредној близини једне завојне нулте или прекидне тачке Riemann-ове свере. Према томе, те околине могу бити престављене или једном једнолисном сверном или обичном површином. Па да би се ове околине, као носиоци функцијиних вредрости, могле једна са другом сравнити, и јасно једна од друге разликовати, морамо учинити да буду униформне, т. ј. морамо их довести све на један облик; другим речима, ми морамо створити један *нормалан облик* за околину сваке тачке Riemann-ове више-лисне површине, и на тај нормални облик довести околину сваке тачке поменуте површине.

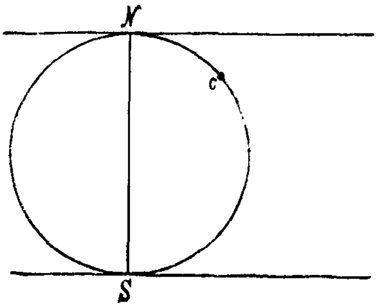
Најпростији нормални облик околине једне тачке био би, на сваки начин, један мали део *равне* једно-лисне површине, и ми ћемо, по Riemann-у [6]), овакав један површински облик узети као *нормални облик.* Овај нормални облик зваћемо од сад *природно стање* околине једне тачке: а околину исте тачке у Riemann-овој површини зваћемо *привремено стање* тачкине околине.

Ми ћемо сад гледати да поставимо однос између тачака привременог и оних природнога стања. Тога ради послужићемо се Геометријом.

Предпоставимо да нам је дата једна Riemann-ова свера, чији је пречник узет за линеарну јединицу, нека је пречник NS=1 тако окренут да је N северни, а S јужни пол. Поставимо кроз оба пола додирне равни на куглу, и пресецимо цео систем од три површине, једном равни, која пролази кроз NS, па је сл. 3. изглед тога пресека у равни ове хартије, где је, ради јаснијег прегледа, нацртан пресек само спољне површине Riemann-ове свере. Нека је сад c једна завојна тачка (m—1)г реда. Онда се околина те тачке састоји из једне m-лисне завојне површине са само једном затвореном граничном линијом. Пројицирајмо тачку c из

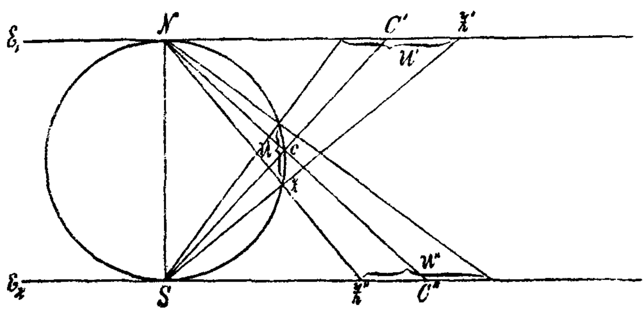
[6]) у поменутој књизи p. 103.

S у c' на хоризонатну раван E_1 [сл. 4.]. Замислимо пројицирану, тачку по тачку, целу околину U тачке



Сл 3.

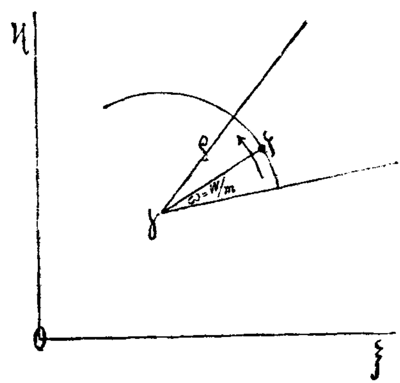
c на E_1, па ћемо добити у E_1 једну m-лисну равну *завојну површину*, која сачињава околину U' тачке



Сл. 4.

c'. Нека је z ма која тачка у околини U; z' њој одговарајућа у околини U' тачке c'. Саставимо те тачке, прву са c, другу са c', линијама r и r' и пустимо да у *положном смислу* ротирају r и r' са произвољном брзином докле, сваки у својој околини U, U', не опишу целу m-лисну завојну површину, и не врате се у свој првобитни положај. Нека је w угао брзина оба кретања; према природи завојних површина, тачке z и z' свака у својој околини описују једну кружну периферију m пута.

Узмимо сад, да тачци c или c' одговара једна тачка γ [сл. 5.] у једној *равни*, чије су тачке одређене координатама ξ и η; даље, нека тачци z или z' одговара једна тачка ζ равни $\xi\eta$. Најпосле нека линији r или r' одговара полупречник ϱ у поменутој равни. Ми смо узели да се ротације у околини U или U' врше сасвим произвољно; али одговарајућа ротација у равни $\xi\eta$ нека од оне у околини U или U' тако зависи, да док се линије r или r' покрену за угао



Сл. 5.

[6]) у поменутој књизи р. 103.

w, донде нека се ϱ покрене за $\frac{1}{m}$ тога угла w. Даље, дужина полупречника ϱ нека од оне линија r и r' тако зависи, да увек постоји однос $\varrho = \sqrt[m]{r}$. Другим речима, и ако означимо угао ретационе брзине полупречника ϱ са ω, — нека увек постоје односи

$$9.)\quad \omega = \frac{w}{m},\quad \varrho = \sqrt[m]{r}\,.$$

На тај начин постизавамо ово: док r, односно r', опише m пута једну кружну површину, ϱ ће такву једну кружну површину U_ζ описа̂ти *само један пут*. Ова кружна површина U_ζ као околина тачке ζ зове се *природно стање* тачке z или z'. — Као што се из целог овог разлагања види, нама је могуће околину U', која игра посредничку улогу сасвим испустити из вида, а узимати у рачун *привремено* U, и *природно стање* U_ζ тачке ζ. У будуће ми ћемо увек, краткоће ради, то и чинити.

Из образаца 9.) излази

$$9.)\quad w = m\omega,\quad \varrho^m = r;$$

Из друге под 9.) множењем са e^{iw}:

$$re^{iw} = \varrho^m e^{iw},$$

или, с обзиром на прву,

$$10.)\quad re^{iw} = [\varrho e^{i\omega}]^m$$

Тачке z и ζ зову се *кореспондентне тачке*, чије су поларне координате за z, (r, w); за ζ, (ϱ, ω).

Нека су сад правоугле координате тачака z и ζ редом ове: (x, y) и (ξ, η), па је

$$z=x+iy$$
$$\zeta=\xi+i\eta\,;$$

зна се да постоји

$$z-c=re^{i\varphi}$$
$$\zeta-\gamma=\varrho\varepsilon^{i\omega}$$

одакле, с обзиром на 10.)

$$11.)\quad z-c=(\zeta-\gamma)^m,\quad \text{или}$$

$$12.)\quad \sqrt[m]{z-c}=\zeta-\gamma.$$

Помоћу обрасца 12.), можемо постојаним преображајем претворити једну вишелисну околину тачке z у једну *равну* једнолисну околину, што је за даље математичне дедукције од врло велике вредности.

Као год што смо S, можемо исто тако северни пол узети за центар пројекције, па првобитну, дату околину, преобратити у околину U''. У том случају излази за ма коју тачку z Riemann-ове свере, па основу сличности

$$\Delta z'NS \backsim z''NS',\quad \text{ово}$$
$$Nz' : NS = NS : Sz'',$$

или, пошто је NS=1

$$Nz'.\,Sz''=1.$$

Нека су координате тачака z' и z'' у равнима E_1, E_2 односно N и S као почетака

$$x'+iy' \text{ и } x''+iy'',$$

онда се може ставити

$$Nz'=z'=x'+iy'$$

$$Sz''=z''=x''+iy''; \text{ из } Nz'.Sz''=1 \text{ излази}$$

$$13.)\ z'.z''=1$$

Радећи на сасвим исти начин са околином U'' тачке c'' као са U' долази се до односа

$$\sqrt[m]{z''-c'}=\zeta-\gamma$$

или, на осаову односа 13.)

$$14.)\ \sqrt[m]{\frac{1}{z'}-\frac{1}{c'}}=\zeta-\gamma$$

Однос 14.), као и онај под 12.), служи за циљу сходно претварање околине U ма које тачке c Riemann-ове свере, у природно стање $U\gamma$; и то, формула 14.) јесте особито згодна за бесконачно удаљене тачке равни E_1, јер она преноси околину U' једне бесконачно удаљене тачке у равни E_1, у стање U нулте тачке S. У овом случају испитивању чини се та олакшица, што, место да се испитује тачка у бесконачној даљини, њене се особине дознају из особина нулте тачке S у коначној даљини.

6_0. *Дефиниција алгебарске функције по Riemann-у.*

Под једном алгебарском функцијом f, једне променљиве комплексне количине $z = x + iy$, разуме се функција, која се у једној Riemann-овој свери може увек преставити као једнозначна функција места, и која у поменутој површини има коначан број нултих и коначан број прекидних тачака; т. ј. коначан број пута је нула и коначан број пута бесконачно велика. У једној прекидној тачци, једна алгебарска функција је увек бесконачно велика, па приближавала се покретна тачка у околини прекидне тачке ма с које стране. Другим речима, алгебарска функција може имати само *поларно прекидне тачке*, или, она може бити само *поларно бесконачно велика.* Овакве функције зову се по Riemann-у *регуларне* функције.

Ми ћемо узимати да је алгеберска фукција у свакој њеној нултој тачци, или управо у најближој околини њеној, *бесконачно мала.* И то, у околини једне елементарне нулте тачке узимамо да је функција бесконачно мала првог реда; У околини једне μ—струке нулте тачке, т. ј. у околини једног μ—губог корена једначине $f=0$, узимамо да је функција бесконачно мала μ реда. Доследно томе узећемо да је алгебарска функција у једном елементарном полу *бесконачно велика првог реда;* а у полу, где је функција f μ пута бесконачно велика, узећемо да је ова на том месту *бесконачно велика* μ^r *реда;* сам пол зваћемо у том случају *пол* μ^r *реда.*

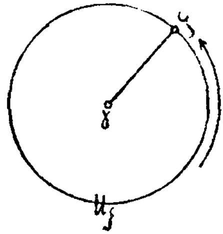
Узмимо да је c пол или нулта тачка μ^r реда регуларне функције f. Ако привремено стање и ове тачке преобратимо у природно стање помоћу једне од формула 12.) или 14.) онда је увек могуће алгебарску функцију f преставити у облику

$$15.)\quad f = (\zeta-\gamma)^{\mu}\, E(\zeta).$$

где је μ цео број из реда

$$\ldots\ldots\, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\ldots$$

положан, кад је γ нулта тачка; негативан, кад је γ *пол.* $E(\zeta)$ значи нам једну функцију променљиве ζ, која је како у околини тачке γ тако исто и у самој тачци γ коначна и од нуле различна. Замислимо тачку γ окружену једном затвореном линијом н. пр. једним кругом (сл. 6). Нама је сад могуће кружну површину начинити тако малу, да се у околини поменуте тачке γ, не налази ни једна друга тачка у којој би функција била бесконачно мала или бесконачно велика, сем тачке γ. С тога је наша алгебарска функција у околини тачке γ непрекидна. Из 15.) излази



сл. 6.

$$\log f = \mu \log(\zeta-\gamma) + \log E(\zeta);$$

диференцијалимо овај израз, па је

$$d\log f = \mu \frac{d\zeta}{\zeta-\gamma} + \frac{dE(\zeta)}{E(\zeta)}.$$

Интегралимо последњи израз дуж затворене линије U_{ζ}, па ће бити, пошто је $\frac{1}{E(\zeta)}$, по претпоставци, коначно и од нуле различно у околини тачке γ. те је по томе интеграл дуж затворене линије U_ζ једнак нули, — ово:

$$16.)\quad \int\limits_{U_\xi} d\,\log f = \mu \int\limits_{U_\xi} \frac{d\zeta}{\zeta-\gamma}.$$

Замислимо сад да се тачка ζ беспрестанка приближује тачци γ, т. ј. нека се околина тачке γ бесконачно умањава, па ћемо на основу Cauchy-ева интеграла дуж једне граничне затворене линије имати:

$$17.)\quad \mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{U_\xi} d\log f.$$

Дакле број који показује ред бесконачности једне алгебарске функције f у једној сингуларној тачци, јесте једнак $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{U_\xi} d\log f$, где се интеграљење има извршити дуж граничне линије U_ξ у положном смислу, т. ј. у смислу угла који расте.

Нека је дата једна алгебарска функција, престављена геометријски у једном делу T Riemann-ове свере, и нека та функција на том месту има λ полова и нултих тачака:

$c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots\ldots c\lambda$; нека су

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots\ldots \mu\lambda$ бројеви који показују кога је реда алгебарска функција у појединим тачкама. Нека су, даље, граничне линије тих тачака редом

$$U', U'', U''', \ldots\ldots\ldots, U^{(\lambda)}.$$

Замислимо да је комад T, Riemann-ове свере, постојаним преображајем претворен у део T', једне равне површине, онда се претвара гранична линија L комада T, у граничну линију L_ξ комада T'; тада се и све околинске линије U, претварају у линије U_ζ, дакле у своје одговарајуће природне околине, а тачке c у тачке γ. Па пошто L окружује све околинске линије U, то је јасно да ће интеграл дуж граничне линије L_ζ, бити једнак суми интеграла дуж околинских линија U_ξ. Дакле на основу формуле 16.) постоји овај однос

$$18.)\quad \int\limits_{L_\xi} d\log f = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \mu_k \int\limits_{U_\zeta{}^k} \frac{d\zeta}{\zeta - \gamma} = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=\lambda} \mu_k.$$

Узмимо да у целој Riemann-овој сфери, алгебарска функција има полова и нултих тачака π на броју; нека је L_π затворена линија која окружује свих π тачака; па ће вредити овај однос

$$19.)\quad \int\limits_{L_n} d\log f = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k.$$

Нека се сад линија L_n у осталом делу Rieman-ове свере тако мења, да, час развлачећи се час скупљајући се, најпосле се прикупи у једну јединцату тачку, — онда ће исчезнути интеграл лево у 19.), и ми добијамо израз

$$20.)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k = \mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_n = 0.$$

Дакле сума бројева, који нам показују ред бесконачности (кога је реда функција бесконачно мала или бесконачно велика), у нултим тачкама и половима регуларне функције f у једној Riemann-овој сфери, једнака је нули. Па пошто, се према пређашњем, може узети, да је једна нулта тачка $\mu^{\text{тог}}$ реда, или један μ-туби корен једначине $f = 0$, суперпозиција μ нултих тачака првог реда; а, с друге стране, да је један пол n реда суперпозиција n полова првог реда; пошто је, даље, број, који показује ред бесконачности функцијине у нултој тачци положан, а тај исти број је за полну тачку одречан: то је јасно да је *за једну функцију, која се у Riemann-овој сфери понаша регуларно, број елементарних нултих тачака исто толико велики, као и број елементарних полова.* — Један резултат од врло велике вредности.

7. *Abel-ов интеграл.* — Нека је

$$\Phi\ (f,\ z)$$

алгебарско-рационална функција између f и z; па пошто је према дефиницији f-а, ово алгебарска функција променљиве z, то је, у основи, $\Phi\,(f, z)$ алгебарско-рационална функција само променљиве z. Као таква, понаша се ова функција сасвим регуларно у једној Riemann-овој сфери. Ставимо, краткоће ради,

$$\Phi\,(f,\ z) = \varphi(z)$$

па ће интеграл

$$1.\quad \int \varphi(z)\,dz,$$

саобразно пређашњој дефиницији, престављати општи Aqel-ов интеграл. — Пошто се функција под интегралним знаком понаша регуларно у Riemann-овој свери за њу конструисаној, то ће за ма коју тачку с површине, важитити израз [образац 15.) Бр. 6_0.]

$$2.)\quad \varphi(z) = (\zeta-\gamma)^{\mu}\cdot E(\zeta);$$

то исто важи очевидно и о првом изводу z-а по промењивој ζ, дакле је

$$3.)\quad \frac{dz}{d\zeta} = (\zeta-\gamma)^{\mu_1}\cdot E_1(\zeta) \text{ одакле}$$

$$3_0.)\quad dz = (\zeta-\gamma)^{\mu_1} E_1(\zeta)\, dz.$$

По смени диференцијала dz у 1.) добијамо

$$4.)\quad \int \varphi(z)\frac{dz}{d\zeta}\,dz = \int \varphi(z)dz =$$

$$\int (\zeta-\gamma)^{\mu+\mu_1} E(\zeta), E_1(\zeta) = \int (\zeta-\gamma)^{\nu}\cdot E(\zeta)$$

где је $E(\zeta) = E(\zeta)\, E_1(\zeta)$ једнозначна, непрекидна и од нуле различна функција промењиве ζ, а $r = \mu + \mu_1$ значи цео број, положан или одречан.

Пошто је $E(\zeta)$ једнозначна, непрекидна и од нуле различна функција промењиве ζ, то се она може у непосредној близини тачке γ, а у границама њене непрекидвости, развити у један Taylor-ов ред, дакле $E(\zeta)$ може се преставити у облику

$$E(\zeta) = C_0 + C_1(\zeta-\gamma) + C_2(\zeta-\gamma)^2 + C_3(\zeta-\gamma)^3 + \dots$$

где су C сталне количине. Заменом тога у 4.) добијамо

$$5.)\ \int \varphi(z)dz = \int \left\{ C_0 (\zeta-\gamma)^\nu + C_1 (\zeta-\gamma)^{\nu+1} + C_2 (\zeta-\gamma)^{\nu+2} + \ldots\ldots \right\} d\zeta$$

где је ν један број из реда

$$\ldots\ldots -3,\ -2.\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3, \ldots.$$

Дакле Abel-ов интеграл $\int \varphi(z)\, dz$ може се представити ублику

$$6.)\ \int \varphi(z)\, dz = C \log.(\zeta-\gamma) + \frac{C_1^{(1)}}{\zeta-\gamma} + \frac{C_2^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^2} + \ldots\ldots + C_0^{(2)} + C_1^{(2)} (\zeta-\gamma) + C_2^{(2)} (\zeta-\gamma)^2 + \ldots$$

где је $C_0^{(2)}$интегрална стална. Или, пошто је

$$C_0^{(2)} + C_1^{(2)} (\zeta-\gamma) + C_2^{(2)} (\zeta-\gamma)^2 + \ldots\ldots$$

један Taylor-ов ред, то ћемо тај део чланова десно моћи ставити једнако једној једнозначној непрекидној и од нуле различној функцији E' (ζ). — Према томе је

$$7.)\ \int \varphi_{(2)}\, dz = E'(\zeta) + C \log.(\zeta-\gamma) + \frac{C_1^{(1)}}{\zeta-\gamma} + \frac{C_2^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^2} + \ldots\ldots\ldots - \frac{C_1^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^s}$$

Ако је с или γ, једна тачка у којој је функција коначна, то ће интеграл

$$\int \varphi(z)\, dz,$$

пошто је ν положан цео број, бити у околини те тачке престављен у облику

$$J = \int \varphi(z)\,dz = E'_1(\zeta) = [C^0 + C_1(\zeta-\gamma)$$

$$+ C_2(\zeta-\gamma)^2 + \ldots\ldots]$$

где је $E'_1(\zeta)$ једнозначна, непрекидна и од нуле различна функција ζ-а. Интеграл дуж затворене околинске линије U_ζ биће тада

$$8.) \int_{U_\zeta} dJ = 0.$$

Ако ли је, напротив, с или γ тачка у којој је функција под интегралним знаком бесконачно велика, дакле једна прекидна тачка, онда ће интегрална функција бити аналитички престављена општом формулом 7.). Ако се изврши интеграђење дуж затворене околинске линије U_ζ излази из 7.).

$$9.) \int_{U_\zeta} dJ = 2\pi i C$$

Претпоставимо да су како $\varphi(z)$, тако исто z и $\frac{dz}{d\zeta}$ у околини тачке с непрекидни, онда из формула 4.) и 5.) излази да је и сам интеглал на томе месту непрекидан. Т. ј. тачке у којима је Abel-ов интеграл бесконачно велики, могу бити само оне у којима је и функција под интегралним знаком бесконачно велика, прекидна; и то, Abel-ов интеграл може бити прекидан или у свима тачкама у којима је прекидна функција под интегралним знаком, или у једном делу тих тачака, других прекидних тачака Abel-ов интеграл нема. Према томе и интегралпа функција може *бити само коначан број пута бесконачно велика.* —

За ближе испитивање интегралне функције, од меродавног су значења сачинитељи

$$C,\ C_1^{(1)},\ C_2^{(1)}, \ldots\ldots C_s^{(1)}.$$

Ако су сви ови сачинитељи нула, онда је J једнозначна и непрекидна функција променљиве ζ. Ако се нарочито претпостави да је

$$C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = \ldots\ldots = C^{s-1}_{(s)} = 0,\ \text{а}$$
$$C \neq 0,$$

онда се интегрална функција може преставити у облику

$$10.)\quad J = C \log. (\zeta - \gamma) + E(\zeta),$$

где E има познато значење једнозначне и непрекидне функције. *У том случају наступа за интегралну* функцију једна чисто *логаритамски прекидна тачка,* или логаритамски сингуларна тачка c, односно γ [где се под γ има увек разумети тачци c кореснодентна тачка у природном — равном — стању]. Ако је, даље,

$$C = C_2^{(1)} = C_3^{(1)} = \ldots\ldots = C^{(s)}_{s-1} = 0,\ \text{а}$$
$$C_1^{(1)} \neq 0$$

онда је

$$11.)\quad J = \frac{C_1^{(1)}}{\zeta-\gamma} + E(\zeta).$$

c, односно γ, јесте у том случају *пол првог реда.* У случају кад је

$$C = C^{i+1}_{(1)} = C^{i+1}_{(1)} = \ldots\ldots = C_s^{(1)} = 0$$

а сва остала C различни од нуле, биће

$$12.)\quad J = \frac{C_1^{(1)}}{\zeta-\gamma} + \frac{C_2^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^2} + \ldots + \frac{C_i^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^i} + E(\zeta);$$

у том случају наступа у c, односно у γ, *пол* i-тог реда. Ако је, уз то, и $C \neq 0$, биће

$$13.)\quad J = C \log.(\zeta-\gamma) + \frac{C_1^{(1)}}{\zeta-\gamma} + \frac{C_2^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^2} + \ldots\ldots + \frac{C_i^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^i} + E(\zeta),$$

У том је случају c, односно γ, сингулирна тачка *логаритамски поларна.* —

Претпоставимо да Abel-ов интеграл

$$J = \int \varphi(z)\, dz$$

има у Riemann-овој сфери свега λ сингуларних тачака. Ове тачке морају, према ономе што смо казали, лежати у сингуларним тачкама регуларне функције $\varphi(z)$. Осим λ сингуларних тачака, нека функција φ

има још ε сингуларних тачака, тако да је целокупан број сингуларних тачака функције $\varphi(z)$ у Riemann-овој свери $\sigma = \lambda + \varepsilon$. Нека су те сингуларне тачке

$$c_1, c_2, c_3, \ldots \ldots c_\sigma \text{ ; са околинским}$$

линијама $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}, \ldots \ldots U^{(\sigma)}$.

Замислимо да су сва c са својим околинским линијама окружени једном затвореном линијом L, онда се у другом делу Riemann-ове свере не налази ни једна сингул. тачка више. *Искључимо* сад све сингуларне тачке са њиховим околинским линијами, па ћемо добити један део T_1

$$14.)\ T_1 = T - \sum_{k=1}^{k=\sigma} Uc_k,$$

У коме су како Abel-ов интеграл J, тако исто и φ једнозначне и без изузетка непрекидне. Ако је дакле $\tilde{l}$ гранична линија површинског дела T_1, то ће важити израз

$$15.)\ \int_{\tilde{l}} dJ = 0$$

где се интеграљење има извршити у положеном смислу дуж целе граничне линије $\tilde{l}$. У том случају мора се интеграљење дуж затворене линије L извршити у смислу угла који расте, а дуж појединих околинских линија U, у супротну, дакле у негативну смислу. Из једначине 15.) следује дакле

$$16.)\quad \int_{L} dJ = \sum_{k=1}^{k=\sigma} \int_{U^{(k)}} dJ = 0.$$

Па пошто је J у $\sigma - \lambda = \varepsilon$ тачака с, по претпоставци, једнозначна и непрекидна, то су, ε на број, интеграла $\int_{U^{(k)}} dJ$ једнаки нули. И, место једначина 16.), добијамо

$$17.)\quad \int_{L} dJ - \sum_{k=1}^{k=\lambda} \int_{U^{(k)}} dJ = 0.$$

Замислимо да се затворена линија L тако мења, да се она у делу Riemann-ове свере, који је слободан од сингуларних тачака, час увећавајући се, час смањујући се, најпосле претвори у једну тачку, — онда ће интеграл $\int_{L} dJ$ бити једнак нули. На тај начин добијамо

$$18.)\quad \sum_{k=1}^{k=\lambda} \int_{U^{(k)}} dJ = 0.$$

Из последње једначине, а с обзиром на то, што интеграл J добија у λ тачака: или *чисто логаритамску*, или *логаритамски поларну*, или најпосле *поларну* бесконачно велику вредност, — излази важан однос

$$19.)\quad \begin{aligned} &2\pi i \left\{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_\lambda\right\} = 0, \text{ или} \\ &C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_\lambda = 0; \end{aligned}$$

где су поједина C логаритамски сачинитељи, под претпоставком да су свих λ сингуларних тачака *логаритамски — сингуларне*. Али, ако је, као што се у опште може десити, један део сингуларних тачака чисто *поларно сингуларан*, онда је јасно, да су они интеграли $\int dJ$ дуж околинских линија таквих поларно-сингуларних тачака, једнаки нули. Па ако је број таквих полова $\delta < \lambda$, то ћемо имати образац

$$20.)\quad C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_\eta = 0,$$

где је $\eta = \lambda - \delta$, а сва C логаритамски сачинитељи појединих чланова у реду 7.), који интегралну функцију J у околини сваке од η тачака преставља̂ју аналитички. Из једначине 20.) следује, да је број чисто логаритамски или логаритамско - поларних сингуларних тачака за један Abel-ов интеграл J, или нула, или већи од 1; али никад не може бити једнак 1. —

8. *Три рода Abel-ових интеграла.* — Образац 7.) може се згодно употребити као основа за деобу Abel-ових интеграла у три рода. Ако је регуларна функција $\varphi(z)$ под интегралним знаком у једном Abel-овом интегралу такве особине, да су како логаритамски сачинитељ C, тако и сви сачинитељи $C_i^{(1)}$, нула, т. ј. ако Abel-ов интеграл нема *ни једне сингуларне тачке*, — онда се такав интеграл зове Abel-ов интеграл *првог рода.* Ми ћемо један такав интеграл означавати од сад са $J1_p$. — Ако је, на против, регуларна функција $\varphi(z)$ таква, да Abel-ов интеграл има *само полова*, онда се он зове Abel-ов интегрел *другог рода.* Слично означавању Abel-ова

интеграла првог рода, означићемо онај $2^{г}$. рода са $J2_{p}$. Најпростији Abel-ов интеграл $2^{г}$. рода јесте очевидно онај, који у целој Riemann-овој свери има само један једини пол. Такав интеграл може се увек преставити у овом облику

$$21.)\quad J'2_{p} = \frac{1}{\zeta - \gamma} + E\,\zeta$$

Интеграл $J'2_{p}$ зове се још елементарни Abel-ов интеграл $2^{г}$. рода.

Ако Abel-ов интеграл има логаритамске и поларно сингуларне тачке, онда се он зове Abel-ов интеграл *трећег рода*, који ћемо означити са $J3_{p}$. Најпростији Abel-ов интеграл $3^{г}$ рода — назван елементарни интеграл $3^{г}$ рода — јесте онај, који у целој Riemann-овој површини има само две чисто логаритамски сингугарне тачке. На сваки начин, Abel-ов интеграл, који би имао само једну логаритамски сингуларну тачку, био би најпростији. Abel-ов интеграл $3^{г}$ рода. Али такав интеграл, на основу обрасца 20.), не може постојати, јер су сљества тога обрасца такве, да Abel-ов интеграл $3^{г}$ рода има логаритамски сингуларних тачака: или нула на број, или више од једне, а никако само једну. — Нека су дакле c_1 и c_2 те две чисто логаритамски сингуларне тачке, онда ћемо моћи сваки елементаран интетеграл $3^{г}$, рода $J3_{p}$. у околини тих тачака, односно у околини тачака γ_1, γ_2, — преставити у облику

$$22.)\quad \begin{cases} J'3_{p} = +\,C\log.(\zeta-\gamma_1) + E(\zeta) \\ J'3_{p} = -\,C\log.(\zeta-\gamma_2) + E(\zeta), \end{cases}$$

где се знак минус тиче логаритамског сачинитеља C, пошто, на основу једначине 20.), сума таква два сачинитеља мора бити нула. Вредно је још напоменути, да је општи Abel-ов интеграл редовно интеграл 3-ег рода.

9. *Abel-ов интеграл дуж једне отворене линије*

Вредност Abel-ова интеграла у околини једне тачке Riemann-ове свере, па била та тачка обична или сингуларна [пол, логаритамски-поларна, или чисто логаритамски сингуларна] — престављена је аналитички редом 7.). Сад нам је потребно наћи вредност Abel-ова интеграла дуж једне непрекидне линије, али која се не враћа у саму себе. Означимо Abel-ов интеграл дуж једне отворене линије $\widehat{z_0 z}$ у Riemann-овој свери са

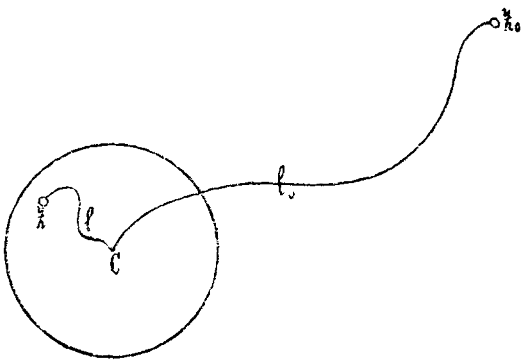
$$J(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz = \int_{l} \varphi(z)\, dz.$$

Јасно је, да вредност једног таквог интеграла, у једном делу Riemann-ове свере, где се не налази ни једна сингуларна тачка, — јесте једнозначна функција своје горње границе. Према томе, Abel-ов интеграл у поменутом делу површинском, а у најближој околини тачке z, може се, као непрекидна и једнозначна функција места, развити у ред по растућим степенима разлике $(z-c)$, односно $(\zeta-\gamma)$. Али такав један Abel-ов интеграл понаша се са свим друкчије кад његов интегрални пут зађе у најближу околину какве сингуларне тачке у Riemann-овој свери.

Замислимо да интегрални пут одводи горњу границу Abel-ова интеграла

$$\int_{z_0}^{z} \varphi z \, dz$$

у околину сингуларне тачке c, и то, нека променљива тачка z иде од z_0 дуж линије l_0 прво у c_0,



сл. 7.

затим нека из c_0, која се налази у околини тачке c, дође у z дуж линије l_0, [сл. 7.].

Вредност горњег интеграла у тачци z биће онда

$$23.) \quad \int_{z_0}^{z} \varphi(z) \, dz = \int_{l_0} \varphi(z) \, dz + \int_{l} \varphi(z) \, dz.$$

Па пошто је c_0 стална тачка, то ће први интеграл десно, у опште узев, имати сталну вредност за једну и исту линију l_0; означимо ту вредност са C_0. Вредност другог интеграла зависи од променљиве тачке z као од горње границе; означимо интеграл

$$\int_{c_0}^{z} \varphi(z)\,dz = \int_{l_0} \varphi(z)\,dz = J(z) - J(c_0)$$

са

$$[J]_{c_0}^{z}$$

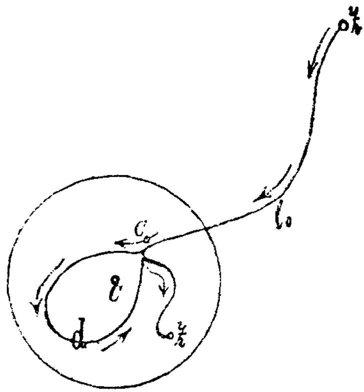
па је вредност интеграла 23.) престављена у облику

$$24)\quad \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\ dz = C_0 + [J]_{c_0}^{z}$$

Вредност интеграла $[J]_{c_0}^{z}$ може се преставити обрасцем 7.); али вредност произвољне сталне количине C_0 стоји у апсолутној зависности од пута l_0. *С тога је општи Abel-ов интеграл, према природи самог интегралног пута l_0, бесконачно многозначна функција горње границе z.* —

Ради ближег оријентисања односно вредности произвољне сталне количине, важи ово што настаје: ако пут l_0 окружује с гуланиу тачку (сл. 8.) пре него што дође у тачку z, онда је вредност интеграла 23.) *многозначна* фуккција променљиве z ако ли је не окружује, онда је вредност интеграла *једнозначна* функција горње границе. Из формуле 8.) јасно је, међутим, да, ако је c *пол* интеграла о коме је реч, да је онда вредоост његова дуж затворене линије c_0dc_0 — *нула*. Дакле је одређени Abel-ов интеграл

23.) ипак једнозначна функција своје горње границе, па узео пут l_0 ма какав обрт у близини сингуларне тачке c, само ако је ова чисто поларно сингуларна.



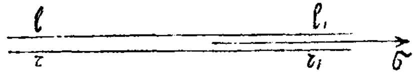
сл. 8.

Остаје нам да испитамо понашање одређеног Abel-овог интеграла 23.) у околини логаритамско-поларне, или чисто логаритамски сингуларне тачке. Из основне формуле 7.) излази да је вредност Abel-ова интеграла дуж линије, која окружује логаритамско-поларну сингуларну тачку, у опште једнака $2\pi iC$, где C има нама познато значење логаритамска сачинитеља. Вредност одређена интеграла јесте дакле у том случају многозначна функција горње границе z. С тога морамо логаритамско-поларне или чисто логаритамски сингуларне тачке згодним *исечцима* (изрезима) да избацимо из Riemann-ове свере, како бисмо могли вредност Abel-ова одређена интеграла у околини једне сингуларне тачке преобратити у једнозначну функцију његове горње границе z. Па пошто ови *исечци* свакојако сачињавају један део оних пресека који Riemann-ову сверу деформишу, то ћемо, да бисмо ово питање сасвим у опште расправили, понашање Abel-ова одређена интеграла, посматрати прво дуж 2q попречних пресека, а затим дуж оних исечака, који логаритамско-поларне или чисто логаритамски сингуларне тачке, искључује из Rieman-ове свере. Линије које састављају логаритамско - поларне или чисто логаритамски сингуларне тачке, које се могу општим именом назвати и *битно сингуларне тачке*, означаваћемо од сад са λ. —

10. *Одређени Abel-ов интеграл дуж 2q попречних пресека Riemann-ове свере; исти дуж линија* λ.

Означимо 2q попречних пресека са σ_i и ϱ_i, где је $i = 1, 2, 3, \ldots \ldots q$. Како се у даном случају 2q попречних пресека имају извести, ствар је сасвим произвољна односно конфигурације истих; они морају само један са другим тако бити повезани, да, пошто је и последњи од 2q попречних пресека изведен, резултат тога буде једна проста површина са једном само граничном линијом, која се враћа у саму себе. Односно правца тих попречних пресека важи ово: почетни правац једног попречног пресека, нпр σ_i, треба да стоји према почетном правцу другог попречног пресека ϱ_i као положна пола x—не осовине према положној поли Y—ске осовине у једном Декартовом координатном систему.

У току сама извођења папречних пресека, наступа на самом месту сечења раздвајање површине, тако да се одмах могу разликовати две стране или две обале површинске. По утврђењу положна правца, куда смо лицем окренути, обала с леве руке зове се *лева*; она с десне руке *десна*. Неке је у сл. 9.



сл. 9.

престављен један део пресека σ_i у Riemann-овој сфери и то са левом и десном обалом. Означимо вредност неодређена Abel-ова интеграла J у ма којој тачци леве обале са J(l); вредност истог интеграла у ма којој тачци десне обале нека је J(r). Вредност одређена Abel-ова интеграла

$$\int_{l}^{l_1} \varphi(z)\, dz$$

дуж ма које линије, која не окружује ни једну битно сингуларну тачку, и не сече ни један попречни пресек, биће престављен обрасцем

$$1.)\quad \int_{l}^{l_1} \varphi(z)\, dz = J(l_1) - J(l).$$

Исто тако, и под истим условима, вредност одређена Abel-ова интеграла дуж једне линије rr_1 на десној страни од пресека, биће престављена у облику

$$2.)\int_{r}^{r_1}\varphi(z)\,dz = J(r_1) - J(r).$$

Пустимо сад да се линија ll_1 поклопи са левом, а rr_1 са десном обалом пресека σ_i, па ћемо имати, ако се још узме на ум да попречни пресек не пролази ни кроз једну од сингуларних тачака, ово.

$$3.)\quad \begin{array}{l} J(l_1) - J(l_1) = J(r_1) - J(r) \text{ или} \\ J(l_1) - J(r_1) = J(l_1) - J(r) = \varDelta\sigma_i \end{array}$$

Пошто су тачке l, l_1, r, r_1 узете сасвим произвољно, то смо дошли до важног резултата:

Разлика $\varDelta\sigma_i$ двеју вредности Abel-ова интеграла у ма којим двема тачкама, које леже једна према другој, и то једна на левој, а друга према њој на десној обали једног и истог попречног пресеко, јесте увек стална и непроменљива количина.

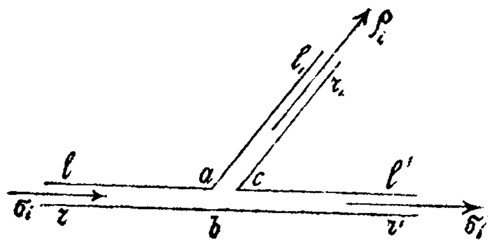
На сасвим исти начин доказује се да је разлика $\varDelta\varrho_i$ у попречном пресеку ϱ_i стална. Дакле важи

$$3_0.)\ J(l_1) - J(r_1) = J(l) - J(r) = \varDelta\varrho_i$$

где су l, r; l_1, r_1 наспрамне тачке лево и десно у ϱ_i

У будуће ми ћемо, краткоће ради, звати те разлике *наспрамним разликама.*

Замислимо да на буди коме месту леве обале попречног пресека σ_1, почиње попречни пресек ϱ_i. Назовимо ту почетну тачку *чвор*. Слика 10. показује нам разграну попречних пресека σ_i и ϱ_i у близини једнога чвора. На основу горњих односа 3.) и 3_0) вреди ово што иде:



сл. 10.

$$\varDelta\sigma_i = J(l) - J(r) = J(a) - J(b)$$

$$\varDelta\varrho_i = J(l_1) - J(r_1) = J(a) - J(c)$$

$$\varDelta\sigma_i' = J(l_1) - J(r_1) = J(c) - J(b)$$

Одакло по сабирању

$$4.)\quad \begin{aligned} &\varDelta\varrho_i + \varDelta'\sigma_i = J(a) - J(b), \text{ или} \\ &\varDelta\varrho_i + \varDelta\sigma_i' = \varDelta\sigma_i \end{aligned}$$

Дакле, наспрамна разлика једног попречног пресека, који утиче у чвор, једнака је суми наспрамних разлика она два попречна пресека који истичу из чвора. —

Лако је доказати да то вреди у опште, с тога имамо правило.

Збир наспрамних разлика у попречним пресецима, који утичу у чвор, једнак је суми наспрамних разлика у оних попречних пресека, који истичу из чвора.

На описати начин понаша се, дакле, општи Abel-ов интеграл дуж попречних пресека σ, ϱ једне Riemann-ове свере. Остаје нам да проучимо понашање његово дуж линија λ, па дакле и дуж оних исечака, који ослобођавају Riemann-ову сверу од битно сингуларних тачака.

На основу обрасца 20.) [№. 7.] број битно сингуларних тачака јесте или нула или већи од 1, а никако = 1. Да бисмо имали један одређен пример пред очима, узмимо да је алгебарска функција под интегралним знаком такве особине, да њој одговарајући Abel-ов интеграл у Riemann-овој свери има сем полова, још свега четири битно сингуларне тачке

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\,;$$

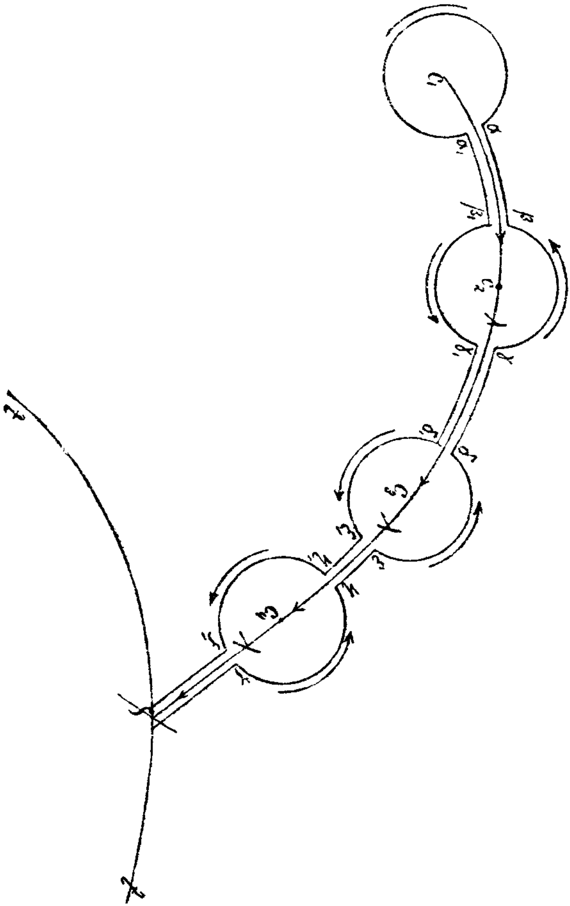
Замислимо да је 2q попречних пресека σ, ϱ извршено, и нека као резултат тога излази једна површина $R_{\sigma,\varrho}$ са само једном граничном линијом. Нека је распоред битно сингуларних тачака c_1, c_2, c_3, c_4 утврђен као што сл. 11. показује. Нека је t најближи део граничне линије површине $R_{\sigma,\varrho}$. Означимо са λ линију која спаја све 4 битно сингуларне тачке и пролази кроз тачку t на t; извршимо пресек дуж те линије у правцу на самој линији λ стрелицом означеном. Дуж λ исецимо из површине једну узану пругу, која код сваке сингуларне тачке има по једно кружно проширење. Означимо део површине, који остаје, са $R_{\sigma,\varrho,\lambda}$. Јасно је сад, да је површина $R_{\sigma,\varrho,\lambda}$ једна површина са једном само граничном линијом, која је потпуно слободна од битно сингуларних тачака Abel-овог интеграла. Означимо поједине делове линије λ са

$$\lambda_{12} = c_1 c_2, \ \lambda_{23} = c_2 c_3, \ \lambda_{34} = c_3 c_4, \ \lambda_4 f = c_4 f.$$

После ове операције на површини $R_{\sigma,\rho}$, биће Abel-ов одређени интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz$ у површини, која резултира, свуда једнозначна функција његове горње границе; према томе, биће тај интеграл представљен у облику

$$5.) \quad \int\limits_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz = J(z) - J(z_0).$$

Сматрајмо сад кружна проширења тачака c_1 c_2, c_3, c_4, као околине тих сингуларних тачака, и означимо околинске линије редом са U_1, U_2, U_3, U_4. Пошто се сва U и делови граничне линије са изузетком кружних проширења око сингуларних тачака, налазе потпуно у површини $R_{\sigma,\rho,\lambda}$, која је слободна од битно сингуларних тачака; пошто у једној таквој површини, линија дуж које се врши интеграљење, може узети са свим произвољан правац: то ћемо узети, да се интеграљење дуж околинских линија U врши у смислу угла који расте На тај начин добија се



сл. 11.

$$
6.)\left\{
\begin{aligned}
&\int\limits_{U_1} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(z)\,dz = J(\alpha_1) - J(\alpha)\\[2ex]
&\int\limits_{U_2} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{\gamma}^{\beta} \varphi(z)\,dz + \int\limits_{\beta_1}^{\gamma} \varphi(z)\,dz =\\
&\qquad J(\beta) - J(\gamma) + J(\gamma_1) - J(\beta_1) =\\
&\qquad J(\beta) - J(\beta_1) - [J(\gamma) - J(\gamma_1)]\\[2ex]
&\int\limits_{U_3} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{\delta} \varphi(z)\,dz + \int\limits_{\delta_1}^{\varepsilon_1} \varphi(z)\,dz =\\
&\qquad J(\delta) - J(\varepsilon) + J(\varepsilon_1) - J(\delta_1) =\\
&\qquad J(\delta) - J(\delta_1) - [J(\varepsilon) - J(\varepsilon_1))\\[2ex]
&\int\limits_{U_4} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{\zeta}^{\eta} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{\eta_1}^{\zeta_1} \varphi(z)\,dz =\\
&\qquad J(\eta) - J(\zeta) + J(\zeta_1) - J(\eta_1) =\\
&\qquad J(\eta) - J(\eta_1) - [J(\zeta) - J(\zeta_1)].
\end{aligned}
\right.
$$

Вредност сваког Abel-овог интеграла у околини ма које тачке, може се преставити формулом 7.) [№. 7.]. Замислимо да се околинске линије U_1, U_2, U_3, U_4 бесконачно сужавају, онда ће кружне околине тачака c_1, c_2, c_3, c_4 бесконачно се умањавати. На основу поменуте формуле 7.), и пошто су c_1 c_2, c_3, c_4 битно сингуларне тачке, важе ови односи

$$
7.)\quad \begin{cases}
\int\limits_{U_1} \varphi(z)\, dz = 2\pi i C_1 \\[2ex]
\int\limits_{U_2} \varphi(z)\, dz = 2\pi i C_2 \\[2ex]
\int\limits_{U_3} \varphi(z)\, dz = 2\pi i C_3 \\[2ex]
\int\limits_{U_4} \varphi(z)\, dz = 2\pi i C_4
\end{cases}
$$

где су поједина C логаритамски сачинитељи, између којих, на основу формуле 20.), [№. 7.], постоји однос

$$20_0.)\quad C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

Разлика на десној страни у формулама 6.) нису ништа друго до *наспрамне разлике* дуж појединих делова линије λ. Те ако се те наспрамне разлике означе, као пре, са $\varDelta$ постојаће ови односи

дуж λ_{12} . . . . . . $\varDelta\lambda_{12} = J(\alpha) - J(\alpha_1) = J(\beta) - J(\beta_1)$
„ λ_{23} . . . . . . $\varDelta\lambda_{23} = J(\gamma) - J(\gamma_1) = J(\delta) - J(\delta_1)$
„ λ_{34} . . . . . . $\varDelta\lambda_{34} = J(\varepsilon) - J(\varepsilon_1) = J(\eta) - J(\eta_1)$
„ λ_{41} . . . . . . $\varDelta\lambda_{41} = J(\zeta) - J(\zeta_1)$

И, узев у обзир формуле 6.), 7.) и 20_0.), добијамо

$$
9.)\quad \begin{cases}
\varDelta\lambda_{12} = -2\pi i\, C_1 \\[1ex]
\varDelta\lambda_{23} = -2\pi i\, [C_1 + C_2] \\[1ex]
\varDelta\lambda_{34} = -2\pi i\, [C_1 + C_2 + C_3] \\[1ex]
\varDelta\lambda_{41} = 0.
\end{cases}
$$

Помоћу више математичне индукције, т. ј. ако се закључује од n на n+1, добијамо, у опште за m битно сингуларних тачака у Riemann-овој сфери, ове односе

$$10.)\begin{cases} \Delta\lambda_{12} = -2\pi i\, C_1 \\ \Delta\lambda_{23} = -2\pi i\, [C_1+C_2] \\ \Delta\lambda_{34} = -2\pi i\, [C_1+C_2+C_3] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta\lambda_{m-1,m} = -2\pi i\, [C_1+C_2+\dots+C_{m-1}] \\ \Delta_{mf} = 0. - \end{cases}$$

Abel-ова теорема

11). На основу познатих Riemann-ових теорема о екзистенцији интегралних функција[7]), чија је природа још у напред одређена, постоји увек једна функција, *која је у целој Riemann-овој сфери непрекидна и једнозначна функција места*, изузимајући попречне пресеке 2q и линије λ' које спајају битно сингуларне тачке. У овим изузетним местима, и то у попречним пресецима σ, ϱ и у појединим комадима линија λ' та функција има сталне насрамне разлике: $\Delta\sigma$, Δ_ϱ, $\Delta'\lambda k,\mu$ [3.), 3_0), 10.)] Другим речима, за поменуту Riemann-ову сферу постоји увек један општи алгебарски, или Abel-ов интеграл.

Нека нам је, дакле, дат један општи Abel-ов интеграл J, чије су битно сингуларне тачке, m на броју, утврђене у Riemann-овој сфери и чији су логаритамски сачинитељи редом

[7]) Neumann, das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen, Verlag. v. Teubner 1865.

$$C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots\ldots\ldots C_m,$$

између којих на основу формуле 20.) [№. 7] постоји овај однос

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_m = 0.$$

Нека је f=f(z) корен једне алгебарске једначине, или, по Riemann-у, једна функција, која се у Riemann-овој свери понаша регуларно, и чије су сингуларне тачке, p на броју, ове:

$$\left.\begin{array}{l} C_1', C_2', C_3', \ldots\ldots\ldots C'_p, \\ \text{са редом њихове бесконачности} \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots\ldots \mu_p, \\ \text{и околиским линијама} \\ U_1', U_2', U_3', \ldots\ldots\ldots U'_p. \end{array}\right\} A_1)$$

Замислимо да су m битно сингуларних тачака Abel-ова интеграла J везане линијом λ', и једном узаном затвореном линијом r_χ, одвојене од осталог дела Riemann-ове свере. Исто тако, узмимо да је p сингуларних тачака c' фиксирато у Riemann-овој свери, и једном затвореном линијом $r_{\chi''}$ искључено од осталог дела те површине.

Према природи попречних пресека σ, ϱ Riemann-ове свере, т. ј. на основу томе, што се ови односно облика сасвим произвољно, а према постављеноу циљу могу да повлаче, — нама је слободно поменуте попречне пресеке σ, ϱ тако извести, да се ни један од два система сингуларних тачака c и c' са својим околиским линијама U и U', не налазе врло близу граничне линије Riemann-ове површине, већ удаљени од ње. Нека је такав положај граничне линије већ постигнут. Замислимо сад да су делови $T\lambda'$ и $T\lambda''$, које на Riemann-овој свери оцртавају линије $r_{\lambda'}$ и $r_{\lambda''}$ [сл. 12.] од целе површине $R\sigma,\varrho$ одузети, онда после тога одузимања излази један површински део T

$$T = R\sigma,\varrho - T\lambda' - T\lambda'',$$

у коме су непрекидне и једнозначне ове функције

$$2.)\ J,\ f,\ \frac{1}{f}\ \text{и}\ \frac{J}{f}.$$

Пошто је $\frac{1}{f}$, на основу мало час реченога, регуларна функција у делу T Riemann-ове свере, то ће одређени интеграл између граница z_0 и z

$$3.)\ J'(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{df}{f} = \int_{z_0}^{z} d\log f = J'(z) - J'(z_0)$$

имати сасвим одређени карактер једне интегралне функције; т. ј. интеграл 3.) јесте Abel-ов интеграл 3. рода, који, као што показује конструкција функције под интегралним знаком, у површини $R\sigma,\varrho$ има искључиво логаритамски сингуларне тачке

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ldots\ldots\ c_p;$$

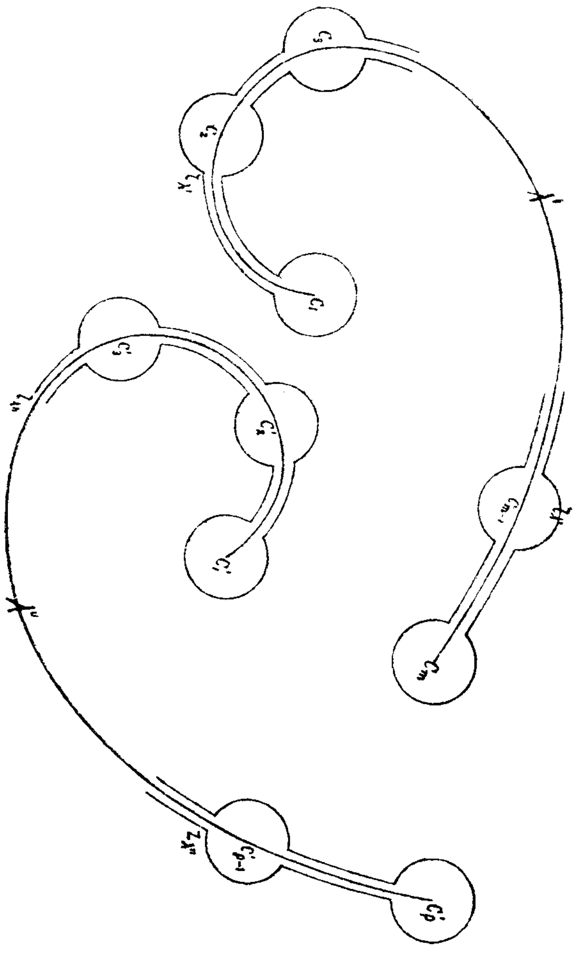
а у деловима

$$4.)\ \lambda''_{12},\ \lambda''_{23},\ \ldots\ldots\ldots\ c''_{p-1,\,p}$$

линије λ'', која саставља те сингуларне тачке, има сталне насправе разлике

$$5.)\ \Delta\lambda''_{12},\ \Delta''\lambda_{23},\ \ldots\ldots\ldots\ \Delta\lambda''_{p-1,\,p}$$

Вредност ових разлика 5.), изражене целим бројевима, који нам показују степен сингуларности



сл. 12.

функцијине у дотичним сингуларним тачкама, биће према пређашњем [обр. 10). № 10.]:

$$\Delta\lambda''_{12} = -2\pi i\mu_1$$

$$\Delta\lambda''_{23} = -2\pi i\ [\mu_1+\mu_2]$$

$$6.)\quad \Delta\lambda''_{34} = -2\pi i\ [\mu_1+\mu_2+_3]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta\lambda''_{p-1,p} = -2\pi i\,[\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{p-1}].$$

Најпосле постоји између логаритамских сачинитеља μ овај важни вднос [20.) № 7].

$$7.)\quad \mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_p = 0. -$$

Ми смо казали, да су f и $\frac{J}{f}$ у препарисаном делу Riemann-ова свере, у T, свуда непрекидне и једнозначне функције места. Према томе биће дуж целе граничне линије τ тога површинског дела:

$$8.)\quad \int_\tau \frac{J}{f}\,df = 0$$

или, ако ставимо

$$\frac{df}{f} = d\log f = dJ',$$

$$9.)\quad \int_\tau J dJ' = 0,$$

где се интеграљење има извршити у положном смислу дуж целе граничне линије површинског дела T. То значи, да интеграљење дуж граничне линије r површине $R_{\sigma,\varrho}$ има да се изврши у једном, положном, смислу, а дуж затворених линија $r_{\lambda'}$ и $r_{\lambda''}$ у смислу који је горњем противан, дакле у негативном: С тога постоји овај однос

$$10.)\ \int_{\tau} JdJ' - \int_{\tau\lambda'} JdJ - \int_{\tau\lambda''} JdJ' = 0;$$

међутим постоји још и ово:

$$11.)\ JdJ' = d[J.J'] - J'dJ.$$

У околини ма које тачке c, односно γ, области $T_{\lambda'}$, може се интеграла функција J, на основу обрасца 7.) [№ 7], преставити у облику

$$12.)\ J = C\log(\zeta-\gamma) + \frac{C_1^{(1)}}{\zeta-\gamma} + \frac{C_2^{(2)}}{(\zeta-\gamma)^2} + \\ + \ldots\ldots + \frac{C_s^{(1)}}{(\zeta-\gamma)^s} + E(\zeta).$$

У свима осталим тачкама Riemann-ове свере на и у самом делу $T_{\lambda''}$ интеграл J јесте непрекидна и једнозначна функција места.

Сасвим тако понаша се и интеграл J' у области $T_{\lambda''}$; Тако нпр., у околини ма које тачке c' може се тај интеграл преставити у облику реда под 12.)..

Из 11.), ако извршимо интеграљење дуж $r_{\lambda'}$ излази

$$11_0.)\ \int_{r_{\lambda''}} J\,dJ' = \int_{r_{\lambda'}} d\,[J.J'] - \int_{r_{\lambda'}} J'\,dz =$$

$$[J.J']_{r\lambda'} - \int_{r_{\lambda'}} J' \, dJ.$$

Интеграл дуж затворене линије $r\lambda'$ своди се, на основу пређашњега, на суму интеграла дуж околинских линија тачака $c_1, c_2, \ldots\ldots c_m$, које околинске линије означићемо са $u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_m$. Тако добијамо за суманд $[J.J']_{r\lambda'}$ десно у формули 11_0.) ово:

$$[J.J']_{r_{\lambda'}} = [J_{u_2} + J_{u_1} + \ldots\ldots + J_{u_m}] \int_{r_{\lambda'}} \frac{df}{f} =$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i \log. (\zeta - \lambda_i) \int_{r_{\lambda'}} d \log. f.$$

$\frac{1}{f}$ је у површинском делу $T\lambda'$ непрекидна и једнозначна функција места, с тога ће интеграл $\int_{r_{\lambda'}} \frac{df}{f} = \int_{r_{\lambda'}} d \log. f$ бити једнак нули, а с њим и цели производ на десној страни последњег израза. Према томе, 11_0) добија овакав облик

$$11.) \int_{r_{\lambda'}} J.dJ' = -\int_{r_{\lambda'}} J'dJ,$$

одакле по замени у 10.)

$$\int_{r} J. \, dJ' - \int_{r_{\lambda''}} J. \, dJ' + \int_{r_{\lambda'}} J' \, dJ$$

или

$$13.)\quad \int\limits_{r} J.\,dJ' = \int\limits_{r_{\lambda''}} J.\,dJ' - \int\limits_{r_{\lambda'}} J'.\,dJ$$

Замислимо да се област $T\lambda'$ произвољно умањава, онда је то умањавање могуће извести до таквог степена, да се ова област сведе на најближе околине појединих тачака c' и на линије λ'_{ik}, које састављају сингуларне тачке. Ако то све замислимо тако изведено, као што рекосмо, онда је јасно, да се интеграли дуж појединих линија λ_{ik} лево и десно своде на нулу. С тога се претвара други интеграл, на десној страни у 13.), у суму интеграла дуж затворених околинских линија u_1, u_2. u_3, ... u_m. Дакле је

$$14.)\quad \int\limits_{r_{\lambda'}} J'.\,dJ = \int\limits_{u_1} J'\,dJ + \int\limits_{u_2} J'\,dJ + \ldots + \int\limits_{u_m} J'\,dJ = \sum_{i=1}^{i=m} \int\limits_{u_i} J'\,dJ.$$

На сасвим исти начин, и сасвим истим умовањем, добијамо овај израз

$$15.)\quad \int\limits_{r_{\lambda''}} J.\,dJ' = \sum_{k=1}^{k=p} \int\limits_{u'_k} J.\,dJ'$$

Заменом вредности из 14.) и 15.) у 13.) добија се

$$16.)\quad \int J\,dJ' = \sum_{k=1}^{k=p} \int\limits_{u'_k} J\,dJ' - \sum_{k=1}^{k=m} \int\limits_{u_k} J'\,dJ.$$

Нека нам је сад c' ма која тачка из реда A_1) [№ 11.], па ће бити ово што иде: f, као функција која се понаша регуларно у целој Riemann-овој свери, биће у тачци c'_k престављена у облику

$$f = (\zeta - \gamma'_k)\,\mu'_k \quad (\zeta),$$

где је μ'_k број, који показује степен бесконачности функције f у c'_k. Узмимо лево и десно логаритме и деференцијалимо, па је

$$d\,\log.\,f = dJ' = \mu'_k\,\frac{\zeta - \gamma'_k}{d\zeta} + \frac{d\,E(\zeta)}{E(\zeta)}\,;$$

умножимо лево и десно са J, и интегралимо дуж затворене линије U'_k, па ће бити

$$\int\limits_{u'_k} J.\,dJ' - \int\limits_{u'_k} J.\,d\,\log.\,f = \mu'_k \int\limits_{u'_k} \frac{J\,d\zeta}{\zeta - \gamma'_k} + \int\limits_{u'_k} \frac{J.\,d\,E(\zeta)}{E(\zeta)}$$

Пустимо сад да се околина тачке c'_k односно λ'_k беспрестанка умањава, т. ј. пустимо да се тачка z односно ζ, бесконачно приближава тачци c'_k односно тачци λ'_k онда ће последњи интеграл нечезнути. Јер је $\dfrac{J}{E(\zeta)}$ у околини тачке c'_k односно λ'_k непрекидна и једнозначна функција места. Међутим, први интеграл десно овако ће гласити при бесконачном умањавању околинске линије u'_k:

$$\mu'_k\,J(\gamma'_k\,\lim. \int\limits_{u'_k} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda'_k}\,;$$

одавде, на основу Cauchy-ева интеграла дуж граничне линије, излази

$$\mu'_k \, J(\gamma'_k) \; 2\pi i.$$

Ставимо сад место k. редом

$$k = 1, 2, 3, \ldots \ldots p$$

и саберимо, па ћемо добити, место првог члана на десној страни у 16.), ово:

$$17.) \quad \sum_{k=1}^{k=p} \int_{u'_k} J. \, dJ' = 2\pi i \, [\mu'. \, J(\gamma'_1) + \mu'_2 \, J(\gamma'_2) +$$

$$\ldots \ldots + \mu'_p \, J(\gamma'_p)] = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=p} \mu'_k \, J(\gamma'_k).$$

Нека је

$$\int_{u_k} J' \, dJ$$

буди који интеграл из друге суме десно у обрасцу 16.). На основу једначине

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \ldots + C_m = 0$$

јасно је, да неки од сачинитеља C морају бити снабдевени са знаком минус; јер, сума положних количина не може никад бити једнака нули, а да сви сабирци у један пут не буду нула. Друга је могућност, кад се узме у обзир природа Abel-ова интеграла, одсудно искључена. Према томе, вредност општег алгебарског интеграла, у околини ма које од m битно сингуларних тачака

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \ldots \ldots c_m,$$

нпр. у околини тачке c_i, биће престављене у облику

$$18.)\quad J = + C_i \log.(\zeta - \gamma_i) + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{C_k^{(i)}}{(\zeta - \gamma_i)^k} + E(\zeta).$$

Диференцијалимо лево и десно, па је

$$19.)\quad dJ = + C_i \frac{d\zeta}{\zeta - \gamma_i} + d\left(\sum_{k=1}^{k=s} \frac{C_k^{(i)}}{(\zeta - \gamma_i)^k}\right) + dE(\zeta)$$

умножимо с обе стране са J' и интегралимо дуж затворене околинске линије u_k, па ће два последња интеграла на десној страни из познатих разлога исчезнути; оно што није нула по интеграњењу у 19.), изгледаће овако:

$$20.)\quad \int\limits_{u_k} J'\,dJ = \pm C_k \int\limits_{u_k} \frac{J' d\zeta}{\zeta - \gamma_k}$$

Пустимо тачку ζ да се ма с које стране беспрестанка приближава тачци γ_k, т. ј. пустимо да се околина тачке γ_k беспрестанка умањава, па ће интеграл на десној страни добити овакав облик

$$J'(\gamma_k)\ 2\pi i\ ;$$

дајмо казаљци k редом вредности

$$k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, \ldots m\ ;$$

означимо број положних C са j, а број одречних са q=m—j, и саберимо: па ће друга сума у 16.) овако изгледати ставова о екзистенцији интегралне функције, сталне разлике $\Delta\sigma$, $\Delta\varrho$ [3.), 3°.) № 5.). Нека нам слика 12 преставља један део Riemann-ове свере $R\sigma$, ϱ. Општи Abel-ов одређени интеграл, између граница l и l_1 дуж леве стране попречна пресека ϱ, биће

$$\int_{\varrho} dJ = J(l_1) - J(l);$$

исти интеграл дуж десне стране истог попречног пресека биће

$$\int_{\varrho} dJ = J(r_1) - J(r).$$

Разлика $J(l_1) - J(l)$ није ништа друго, до стална наспрамна разлика општег алгебарског интеграла J' у попречном пресеку σ, дакле

$$23.)\quad \begin{aligned} &\int_{\varrho} dJ = J(l_1) - J(l) = \Delta\sigma, \text{ исто тако} \\ &\int_{\varrho} dJ = J(r_1) - J(r) = \Delta\sigma. \end{aligned}$$

Али исти интеграл дуж леве стране попречног пресека σ биће

$$\int_{\sigma} dJ = J(r_1) - J(l_1),$$

а дуж десне: $\displaystyle\int_{\sigma} dJ = J(r) - J(l);$

или, пошто оба интеграла морају бити једнака:

$$J(r_1) - J(l_1) = J(r) - J(l).$$

Но пошто је $J(l_1) - J(r_1) = \Delta\varrho$, и $J(l) - J(r) = \Delta\varrho$ то ће бити

$$24.)\quad \int_{\sigma} dJ = -\Delta\varrho.$$

Мало специјалнији, али ипак Abel-ов интеграл 3ᵉ рода J', има на основу поменутих теорема о екзистенцији интегралне функције, у попречним пресецима σ, ϱ напред прописане стварне наспрамне разлике. $\Delta'\sigma$ и $\Delta'\varrho$. С тога имамо ово што иде. У ма којој тачци l дуж леве стране попречног пресека σ биће вредност интеграла $\int JdJ$

$$\int_{\sigma} J(l).dJ'(l),$$

а дуж десне стране: $\int_{\sigma} J(r).dJ'(r)$,

где се, наравно, интеграљење има извршити у положном смислу (тако да нам дотични површински део остане увек у лево]. Али, нама је могуће извести оба интеграљења у смислу означеном стрелицом лево од попречног пресека ϱ, ако доњем интегралу дамо знак минус. Према томе ће интеграл дуж обе стране попречна пресека σ, бити

$$\nu.)\quad \int_{\sigma} [J(l)dJ'(l) - J(r)\,dJ'(r)]$$

Интеграл J' има, по претпоставци, дуж σ сталну разлику $\Delta'\sigma$ тако да постоји

$$J'(l) - J'(r) = \Delta'\sigma.$$

Диференцијалимо последњи израз, па је

$$dJ'(l) - dJ'(r) = 0, \text{ или}$$
$$dJ'(l) = dJ'(r) = dJ'.$$

Заменом тога у израз ν.) излази

$$25.) \quad \int\limits_{\sigma_i} [J(l) - J(r)] dJ'$$

Радећи на исти начин са интегралом

$$\int\limits_{\varrho} J.dJ'$$

добићемо

$$26.) \quad \int\limits_{\varrho_i} [J(l) - J(r)]\, dJ'.$$

Кад се сви изрази за

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots q$$

саберу, добијамо

$$27.) \quad \int\limits_{r} JdJ' = \sum_{i=1}^{i=q} \left\{ \int\limits_{\sigma_i} [J(l) - J(r)]\, dJ + \int\limits_{\varrho_i} [J(l) - J(r)] dJ' \right\}$$

Даље је, по претпоставци,

$$\text{дуж } \sigma_i \ldots\ldots \Delta\sigma_i = J(l) - J(r)$$
$$\text{дуж } \varrho_i \ldots\ldots \Delta\varrho_i = J(l) - J(r), \text{ и}$$
$$dJ' = d\log f$$

Кад се све ово унесе у формулу 27.) добијамо

$$28.)\quad \int_r J dJ' = \sum_{i=1}^{i=q} \left\{ \Delta\sigma_i \int_{\sigma_i} d\log f + \Delta\varrho_i \int_{\varrho_i} d\log f \right\}$$

Интеграл

$$J' = \int \frac{df}{f} = \int d\log f = \log f$$

има, као што смо напоменули, у попречним пресецима σ_i, ϱ_i сталне наспрамне разлике $\Delta'\sigma_i$, $\Delta'\varrho_i$. Али, с друге стране, има тај интеграл, као логаритамска функција, у двема наспрамним тачкама ма којега од попречних пресека лево и десно, вредности, које се разликују за неколико пута целих сталне количине $2\pi i$. Ако су дакле S_i и R_i два цела броја, то ће сталне разлике $\Delta'\sigma_i$ и $\Delta'\varrho_i$ бити ближе одређене овим изразима

$$\nu_o.)\quad \Delta'\sigma_i = S_i\, 2\pi i,\ \Delta'\varrho_i = R_i 2\pi i.$$

Напомена. i у изразу $2\pi i$ има познато значење уображење јединице $\sqrt{-1}$; у S_i и R_i i je употребљено у својству променљиве казаљке. —

Истим умовањем, којим се добијају формуле 23.) и 24.), лако се налази, да исто тако и за Abel-ов интеграл J', важе ови односи

$$23_0.)\ \int\limits_{\varrho} dJ' = \int\limits_{\varrho} d\log f = \varDelta\sigma \text{ и } 24_0.)\int\limits_{\sigma} dJ' =$$

$$= \int\limits_{\sigma} d\log f = -\varDelta'\varrho.$$

Из ових последњих израза и оних под $\nu_0.$):

$$\int\limits_{\varrho_i} d\log f = S_i\, 2\pi i, \quad \int\limits_{\sigma_i} d\log f = -R_i 2\pi i.$$

Ставимо последње резултате у 28.) па ћемо добити

$$29.)\quad \int\limits_{r} J dJ' = 2\pi i \sum_{i=1}^{i=q} \left\{ \varDelta\varrho_i\, S_i - \varDelta\sigma_i\, R_i \right\};$$

ако овај резултат ставимо у 22.) биће

$$30.)\quad \sum_{k=1}^{k=p} \mu' k J(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{i=q} \left\{ \varDelta\varrho_i\, S_i - \varDelta\sigma'\, R_i \right\} +$$

$$+ \log \frac{\overline{f(\gamma_{i+1})}^{C_{i+1}} \cdots\cdots \overline{f(\gamma_m)}^{C_m}}{\overline{f(\gamma_1)}^{C_i} \cdots\cdots \overline{f(\gamma_i)}^{C_i}}.$$

У обрасцу 30.) исказата је Abel-ова теорема за збир алгебарских интеграла 3ʳ. рода, изведена Riemann-овом теоријом функција. Први члан на десној страни одговара алгебарској функцији у изразу 5.) [№ 2] доказаном помоћу особина једног система од две алгебарске једначине. Овај израз

$$\sum_{i=1}^{i=q} \left\{ \varDelta\varrho_i\, S_i - \varDelta\sigma_i\, R_i \right\}$$

конструисан алгебарски рационално из целих бројева S_i и R_i и сталних разлика Abel-ова интеграла

J дуж попречних пресека σ и ϱ одговарајуће Riemann-ове свере — јесте, као што се види, стална количина. То је с тога, што смо интеграљење вршили дуж затворених линија; да је то учињено дуж отворених линија у Riemann-овој свери, добили бисмо, пошто је сваки интеграл функција своје горње границе, место сталне количине, једну алгебарску функцију комплексне промењљиве $z=x+iy$, у ком би се случају манифестовала потпуна подударност у резултатима добивеним алгебарским путем и путем Riemann-ове теорије функција.

ИСПРАВКЕ

На стр. 24 оздо у реду 11 место 5, 3, треба 3, 5,
„ „ 29 озго у „ 9 „ N—5 „ N—2,
„ „ 53 у сл. 7., треба место C да стоји c_0; тачка c треба да је усамљена у кругу.

На страни 55 у сл. 8., тачка c_0, место на стрелици, треба да стоји на споју линијних грана.