DOKTORSKA DISERTACIJA

MIJAJLOVIĆ D ŽARKO

PhD thesis: **A contribution to model theory and Boolean algebras**
Pages: VI + 158

Author: **Žarko Mijajlović** (1948-)

Keywords: model theory, Boolean algebras, Lindenbaum algebra, type, elimination of quantifiers, model completion, atomless, absoluteness, Levy hierarchy, Dedekind number, Kurepa number.

References: 43

Area: Logic, model theory, Boolean algebras

PhD Committee: Slaviša Prešić (supervisor), Đuro Kurepa, Branka Alimpić
Faculty: The Faculty of mathematics, University of Belgrade
Date: April 30.1977
Language: Serbian

Abstract

Part1. Basic notions of model theory are given.
Part2. Dual notions in categories of Boolean algebras and Stone spaces are studied in respect to natural contra-variant functor. The cellularity number of a Boolean algebra **B**, cel**B** is studied, certain cardinal properties are proved, e.g. it is consistent with ZFC that cel**B** is attained for every Boolean algebra **B.**
Part 3. Lindenbaum algebras of first-order theories are studied in details. It is proved that every Boolean algebra is isomorphic to the Lindenbaum algebra B_1 of Σ_1 formulas of certain first-order complete theory. Stability number $S_T(k)$ of a first-order theory T is studied, and it is shown that $S_T(k) = Ku(k)$, where Ku(k) is the Kurepa number (Kurepa introduced it in 1935) and T is the theory of dense linear ordering without end-points, while the cardinality of the Stone space of B_1(**A**), **A** is a model of T, is equal to ded(**A**)**,** the Dedekind number of the ordering **A.**
Ku(k)= sup{ded(**A**): **A** is a model of T, |A|=k}.
Part 4. Σ_n Π_n ramifications of various notions in model theory are defined and studied, e.g. elementary embeddings, completeness, chains, direct limits, diagram properties, etc. Preservation theorems for these types of formulas are proved. Examples for including ordered structures and algebraic fields are given.
Part 5. Model completions and elimination of quantifiers are studied. As an application, it is proved that by means of model theory that the classes of Boolean algebras and distributive lattices with the least and the greatest elements are Jonsson's classes. Algebraic description of saturated models of submodel-complete theories are given, unifying results of Haussdorff (dense linear ordering), Erdös, Gillman (ordered fields) and Boolean algebras (Negrepontis) for homogeneous-universal models.
Part 6. Here is studied what model-theoretic properties are absolute in ZF in the sense introduced by Levy, i.e. in which cases strong hypothesis (AC, GCH, V=L) can be eliminated from the proof of these properties. It is shown that the following properties of first-order theories are absolute: the consistency, completeness, model-completeness and elimination of quantifiers. These gives new light on model-theoretic proofs of these properties.

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mijajlović D. Žarko

PRILOG TEORIJI MODELA I BOOLEOVIH ALGEBRI

(doktorska disertacija)

BEOGRAD, 1977. godine

UVOD

Cilj ovog rada je da se razmotre izvesni principi transfera i redukcije u teoriji modela. Povezano sa tim, ispituju se metamatematički uslovi koji se tom prilikom koriste. Pritom, na više primera ukazuje se na mogućnost primene teorije modela u ispitivanju svojstava matematičkih struktura.

Princip transfera razmatra se u dva vida. Prilikom ispitivanja koncepata teorije modela, vrši se prenos odredjenih svojstava Booleovih algebri. Posebno se ukazuje na odnos izmedju Booleove algebre B i dualnog prostora B*, a potom na primene u ispitivanju i klasifikaciji skupova formula u vezi teorije T, kao u slučaju kompletnih proširenja (III.2., na pr. T.2.3) i tipova (III.3., na pr. T.3.6). Takodje se odredjuju tipovi konkretnih teorija, odnosno njihov kardinalni broj, te se na taj način vrši klasifikovanje teorija prema stabilnosti (III.4, na pr. T.4.13, T.4.14). S druge strane, razmatraju se direktne granice modela i dokazuje se (IV.2., T.2.1) da se izvesne informacije (Π_n, Σ_n svojstva I reda) prenose sa modela direktnog sistema na granice. Primena ovog stava ilustrovana je sa više primera (posledice IV.2.1-2.1.4).

Rukovodjeni da se sintaksnim svojstvima teorije T pridruže odgovarajuća semantička, odnosno skupovna svojstva za klasu $\mathfrak{M}(T)$ modela teorije T, uveli smo nove koncepte kao što su n-elementarna ekvivalencija, n-potpunost, n-modelska potpunost (IV.3, IV.5, IV.6). Pritom je dokazano više strukturnih stavova kojima se povezuju pomenuta svojstva (IV.L.3.3, L.3.4.,T.3.5, T.5.2, T.6.2). Primenom ovih razmatranja dobija se, na primer, J. Keislerov stav prezervacije za teorije sa Π_n, odnosno Σ_n aksiomama.

U slučaju teorija koje imaju modelsko kompletiranje, ukazujemo kako se odredjeni model-teoretski koncepti mogu opisati na algebarski, odnosno skupovni način. Tako, ispostavlja se da

su zasićeni modeli modelskog kompletiranja T* upravo homogeno univerzalni modeli teorije T (V T.3.8, T.3.9, T.3.10).
Za odredjivanje kardinalnog broja tipova teorija sa uredjenjem (III T.4.4, T.4.9, T.4.13) utvrdjuje se da ključnu ulogu imaju Dedekindovi preseci, odnosno brojevi ded($\mathfrak{A}$), Ku(k). Ova razmatranja su primer svodjenja model-teoretskih koncepata na skupovne, budući da su brojevi ded($\mathfrak{A}$), Ku(k) prevashodno skupovnog karaktera. Ukoliko je teorija T modelsko upotpunjenje, odnosno dopušta eliminaciju kvantifikatora, tada su tipovi teorije T na jednoznačan način odredjeni skupovima formula bez kvantifikatora (III primer 4.2, tvrdjenje 4.9).

U poslednjem (VI) delu ispituje se stepen opravdanosti korišćenja metoda teorije modela u ispitivanju sintaksnih svojstava teorija. Naime, utvrdjuje se da su sintaksna svojstva, na primer, neprotivurečnost, potpunost, modelska potpunost, odlučivost, dopustivost eliminacije kvantifikatora nezavisna od izvesnih infinitarnih aksioma teorije skupova, kao što su aksioma izbora, kontinuum hipoteza i aksioma konstruktibilnosti.

Prisutne ideje teorije modela ilustrovane su sa više primena u ispitivanju matematičkih struktura.Razvijajući ideje prof. S. Prešića, odredjuju se svojstva Booleovih preslikavanja (IV primer 4.3, T.4.8, T.4.10),takodje, daje se jedan potreban i dovoljan uslov da Booleova jednačina nad Booleovom algebrom B ima rešenje (IV T.4.9). U V delu (odeljci 2.3) na primerima algebarskih zatvorenih polja, Booleovih algebri, uredjenih Abelovih grupa prikazano je više metoda za eliminaciju kvantifikatora. Dokazuje se (V T.2.5) da modeli teorije koja ima modelsko upotpunjenje imaju svojstvo amalgamiranja, što omogućuje uniforman pristup razmatranju teorije Jonssonovih klasa modela. U takvom smislu, posledica V 2.6. služi kao jednostavan test za utvrdjivanje da li je izvesna klasa modela Jonssonova. Ovaj test primenjivan je u slučaju pomenutih klasa modela. Izmedju ostalog, navodi se uopštenje Lindströmove teoreme za modelsku n-potpunost (IV T.6.6).

Prof. Slaviša Prešić, pod čijim sam rukovodstvom uradio ovaj rad, pružio mi je punu podršku, podstrek i značajnu pomoć prilikom izrade. Više puta je ukazivao kako da se izvesne ideje jasnije sagledaju (na pr. koncept cepajućih skupova u Booleovim algebrama, Booleove jednačine itd.), a takodje na izbor odgovarajućih reči u našem jeziku. Medjutim, najviše dugujem čestim razgovorima sa prof. S. Prešićem o metamatematici, u kojima je nastalo više ideja utkanih u ovaj rad. Prof. D. Kurepa u više navrata mi je ukazao na izvesna pitanja (na primer celularnost Booleovih algebri) povezana sa radom, a takodje na poreklo činjenica u vezi sa uvedenim konceptima (Dedekindov, Kurepin broj, celularnost). Svakako značajnu ulogu u pisanju ovog rada ima moje učestvovanje u seminaru za matematičku logiku pri Matematičkom institutu, gde sam od kolega često čuo vredne komentare, sugestije i korekcije. U tehničkoj pripremi rada imao sam veliku pomoć u strpljenu M.Kostadinovića, koji je ovaj rad otkucao.

Lista nekih oznaka

Logički simboli:

Meta-simboli: $\bigwedge$ za svaki

$\bigvee$ za neki

$\longrightarrow$ meta-implikacija

i̲ meta-konjunkcija

ili̲ meta-disjunkcija

$\doteq$ meta-jednakost

$\sim$ meta-negacija

Niz $x_1,\ldots,x_n$ označavamo kraće sa $\vec{x}$, ukoliko n nije od značaja u datom razmatranju. Otuda, $(\vec{x})$ stoji za $(x_1,\ldots,x_n)$.

Partitivan skup skupa A označen je sa S(A). Skup svih konačnih podskupova skupa A označen je sa $S_\omega(A)$.

Skup svih preslikavanja iz skupa Y u skup X označen je sa ${}^YX$.

Ukoliko je $f:A \longrightarrow B$ i $X \subseteq A$, tada

1° $f\restriction X$ je restrikcija funkcije f na X,

2° $f[X] = \{ f(x) \mid x \in X \}$,

3° $f\vec{x}$ je niz $fx_1,\ldots,fx_n$.

Kardinalni broj skupa X označen je sa $|X|$.

Ukoliko se radi o dobrom uredjenju, $\mu x(\ldots x \ldots)$ znači "najmanji x takav da ... x ...", gde je ... x ... neki izraz.

Skupovi prirodnih, celih i racionalnih brojeva označeni su redom sa N, Z, Q. Takodje, $Z_p = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$.

Budući da se pretpostavlja ZFC, ne vrši se razlikovanje izmedju ω_α i $\aleph_\alpha$, odnosno $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$. Takodje, $\omega = \omega_0$.

Pretpostavlja se Von Neumanova reprezentacija ordinala, naime, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, ..., $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$ itd.

S A D R Ž A J

Strana

V DEO

MODELSKO KOMPLETIRANJE

VI DEO

APSOLUTNOST U TEORIJI MODELA

I DEO

Osnovne činjenice iz teorije modela

Osnovni predmet izučavanja teorije modela je odnos izmedju sintaksnih objekata i struktura koje ovi odredjuju, preciznije izmedju formalnih jezika i njihovih interpretacija. Otuda, ovde se jasno izdvajaju dve osnovne logičke kategorije: sintaksa i semantika. Dok se sintaksa prevashodno odnosi na formiranje formula rečenica i drugih sintaksnih objekata kao i na njihovu uzajamnu povezanost, semantika s druge strane se bavi pitanjem značenja i ekstenzije ovih pojmova. Jedan od najznačajnijih semantičkih pojmova je relacija zadovoljenja, u oznaci $\models$, o kojoj će biti reči. I pored toga što je teorija modela prepoznata kao zasebna grana matematičke logike relativno skoro radovima Tarskog, Gödela i drugih, tridesetih godina ovog veka, ona danas doživljava snažan razvoj i pruža mogućnosti mnogobrojne primene kao na primer u algebri, nestandardnoj analizi i teoriji skupova. Pokazalo se, da se sličnim metodama može razvijati teorije modela i drugih, pre svega beskonačnih logika, kao pokušaj da se rasprave neki otvoreni problemi predikatskih računa višeg reda.

U ovom radu razmatra se teorija modela ukoliko je logika predikatski račun prvog reda. Iz tog razloga navodimo terminologiju i osnovne činjenice iz teorije modela koje koristimo ubuduće, poglavito onako kako su prikazane u /7/.

1. Jezik, teorija, model

1.1. Jezik L je skup nekih konstantnih, funkcijskih i relacijskih (predikatskih) simbola (znakova). Svaki od relacijskih i funkcijskih simbola ima odredjen, konačan broj takozvanih argumentnih mesta. Konstantni simbol može se smatrati kao funkcijski simbol sa 0 argumentnih mesta.

Na primer, $L=\{+,\cdot,\leq,0,1\}$ je jezik uredjenih polja. Ako su L i L' jezici i $L\subseteq L'$, tada kažemo da je jezik L' ekspanzija (proširenje) jezika L, odnosno L je redukt (svod) jezika L'. Ako je $L'-L$ skup konstantnih simbola, kažemo da je L' prosto proširenje jezika L.

1.2. Termi i formule su konačni nizovi simbola jezika L i logičkih simbola, opisani uobičajenom induktivnom definicijom. Formulu koja nema slobodnih promenljivih nazivamo rečenicom. Primetimo, da je termin rečenica za formulu φ bez slobodnih promenljivih pogodniji od termina iskaz, budući da reč iskaz podrazumeva već odredjenu intenziju (tumačenje) za niz φ, što se u opštem slučaju ne mora pretpostaviti.

Sa $\|L\|$ označava se kardinalni broj formula jezika L. Lako se pokazuje da je $\|L\| = \max(|L|,\omega)$.

1.3. Teorija T jezika L je ma koji skup rečenica jezika L. Elemente skupa T zovemo aksiomama teorije T. Prema tome, ako je $L\subseteq L'$ i T je teorija za L, tada je T takodje teorija za jezik L'. Da je φ teorema teorije T, označavamo: $T\vdash\varphi$. Ako je $\varphi(\vec{x})$ formula u L, tada $T\vdash\varphi(\vec{x})$ je zamena za $T\vdash\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$. Teorija T je neprotivurečna akko $\sim T\vdash\perp$. Teorija T je kompletna (potpuna) akko za svaku rečenicu φ jezika L vredi: $T\vdash\varphi$ ili $T\vdash\neg\varphi$. U takvom slučaju, ako je T neprotivurečna teorija, skup svih posledica teorije T, $Cn(T)$, je maksimalno neprotivurečan skup.

1.4. Jezik teorije T, u oznaci $L(T)$, je skup svih nelogičkih simbola koji se pojavljuju u aksiomama teorije T. $L_{def}(T)$ je oznaka za definiciono produženje jezika L u teoriji T, koje se dobija dodavanjem n-arnog predikatskog simbola P_φ za svaku formulu φ jezika L sa n slobodnih promenljivih. Pritom, formira se teorija T^m dodavanjem aksioma $\forall\vec{x}(\varphi(\vec{x})\Leftrightarrow P_\varphi(\vec{x}))$ teoriji T za svaku formulu φ. Teorija T^m tako dobijena, naziva se, prema Morly-u, Morlyzacija teorije T.

1.5. Model ili struktura jezika L je uredjen par $\mathfrak{A} = \langle A, J \rangle$, gde je A neprazan skup (domen modela $\mathfrak{A}$), a J interpretacija, tj. izvesno preslikavanje $J: L \to A \cup S(\bigcup_{n\in\omega} A^n)$ i to tako da su ispunjeni uslovi:

(1) Ako je c konstantni simbol u L, tada $J(c) \in A$. Obično se $J(c)$ označava sa $c^{\mathfrak{A}}$.

(2) Ako je f n-mesni funkcijski simbol u L, tada je $f^{\mathfrak{A}} = J(f)$ n-mesna funkcija, $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.

(3) Ako je R n-mesni relacijski simbol, tada je $R^{\mathfrak{A}} = J(R)$ n-mesna relacija u A.

Primetimo, da je u nekim slučajevima moguće govoriti o parcijalnoj funkciji f na A^n, tj. $f: X \to A$, gde $X \subseteq A^n$. U takvom slučaju takodje pišemo $f: A^n \to A$, uz napomenu da je f parcijalno preslikavanje.

Ma koje preslikavanje $v: \omega \to A$ naziva se valuacija u A. Ubuduće pretpostavljamo Tarskievu definiciju istinitosti formule φ pri valuaciji v u modelu $\mathfrak{A}$, tj. definiciju relacije zadovoljenja. Stoga, ako je $t(\vec{x})$ term u jeziku L, tada je njime odredjena jedna funkcija $t^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$. Ako je $\varphi(\vec{x})$ formula jezika L, tada je odredjena logička vrednost $\varphi^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ formule φ za valuaciju $a_o, a_1, \ldots$ u A. Ukoliko je $\varphi^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \doteq T$, pišemo $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Primetimo da je uvek $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ ili $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$.

Modele obično označavamo gotskim slovima $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ a njihove domene redom sa $A, B, C, \ldots$.

1.6. Neka je $\mathfrak{A}$ model jezika L i T teorija u L. Kažemo da je $\mathfrak{A}$ model teorije T, u oznaci $\mathfrak{A} \models T$, ako je za svaku rečenicu $\varphi \in T$ ispunjeno $\mathfrak{A} \models \varphi$. Ako je φ rečenica u L, φ je semantička posledica teorije T, (ili φ je tačna u T) akko za svaki model $\mathfrak{A}$ teorije T važi $\mathfrak{A} \models \varphi$. Zapis $T \models \varphi$ zamenjuje reči: φ je semantička posledica teorije T.

Sa $\mathfrak{M}(T)$ označavamo klasu svih modela teorije T. Modeli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ su slični ukoliko su modeli istog jezika L. $L(\mathfrak{A})$ je jezik modela $\mathfrak{A}$.

1.7. Neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modeli jezika L. Tada, $\mathfrak{A}$ je podmodel modela $\mathfrak{B}$, u oznaci $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, akko je

(1) $A \subseteq B$.

(2) Ako je c konstantni simbol jezika L, tada $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

(3) Ako je f n-arni funkcijski simbol jezika L, tada je $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$.

(4) Ako je R relacijski simbol jezika L, tada za svaki $\vec{a} \in A$ važi $R^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = R^{\mathfrak{B}}(\vec{a})$.

Ako je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ takodje kažemo da je $\mathfrak{B}$ ekstenzija, ili proširenje modela $\mathfrak{A}$.

1.8. Ako je $L \subseteq L'$ i $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modeli redom jezika L, L', tada je $\mathfrak{B}$ ekspanzija modela $\mathfrak{A}$, odnosno $\mathfrak{A}$ je redukt (svod) modela $\mathfrak{B}$, u oznaci $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \upharpoonright L$, akko važi:

(1) $A = B$.

(2) Ako je $s \in L$, tada $s^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{B}}$.

Ukoliko je jezik L' prosto proširenje jezika L, kažemo da je model $\mathfrak{B}$ prosto proširenje (ekspanzija) modela $\mathfrak{A}$.

1.9. Često se izvodi sledeća model-teoretska konstrukcija. Neka je $\mathfrak{A}$ model u jeziku L, $X \subseteq A$ i $L' = L \cup \{\underline{a} \mid a \in X\}$, gde je $\underline{a}$ novi konstantni simbol, tj. $\underline{a} \notin L$, za svaki $a \in X$. Pritom, ako je $a \neq b$, tada <u>nije</u> $\underline{a} \doteq \underline{b}$. U takvom slučaju postoji prosta ekspanzija $\mathfrak{A}'$ modela $\mathfrak{A}$ jezika L', gde $\underline{a}^{\mathfrak{A}'} = a$. Model $\mathfrak{A}'$ označavamo sa $\mathfrak{A}_X$ ili $\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X}$. Simbol $\underline{a}$ nazivamo <u>imenom</u> elementa a.

1.10. Neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ slični modeli. Preslikavanje $h: A \to B$ je homomorfizam modela $\mathfrak{A}$ u model $\mathfrak{B}$, u oznaci $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ akko:

(1) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

(2) Ako je f funkcijski simol i $\vec{a} \in A$ tada $hf^{\mathfrak{A}}\vec{a} = f^{\mathfrak{B}} h\vec{a}$.

(3) Ako je R relacijski simbol i $\vec{a} \in A$, tada $R^{\mathfrak{A}} \vec{a} = R^{\mathfrak{B}} h\vec{a}$.

Ukoliko je h 1-1 homomorfizam, kažemo da je h utapanje. Napomenimo da su u teoriji modela utapanja od daleko veće važnosti nego što su to proizvoljni homomorfizmi. Nadalje, ako uz diagram $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ne stoji neko drugo objašnjenje, podrazumeva se da je h utapanje. Sa $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ označavamo činjenicu da postoji utapanje $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Ako je h utapanje i $h: A \xrightarrow{na} B$, ~~tada~~ je h izomorfizam i pišemo $h: \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$. U zavisnosti od konteksta, kažemo da je p parcijalni izomorfizam ukoliko postoji $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ tako da $p: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$. Neka je $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ utapanje, sa $h[\mathfrak{A}]$ označavamo izomorfnu sliku modela $\mathfrak{A}$ odredjenu preslikavanjem h. Jasno je da važi: $h[\mathfrak{A}] \subseteq \mathfrak{B}$.

2. Neki stavovi teorije dokaza

2.1. STAV dedukcije: Ako je φ rečenica i T teorija tako da je $T \vdash \varphi$, tada postoji konačan $S = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\} \subseteq T$ tako da $\vdash \theta_0 \wedge \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \Rightarrow \varphi$.

Posledica prethodnog stava je: Teorija T je neprotivurečna akko je svaki konačan podskup od T neprotivurečna teorija.

2.2. LEMA o novoj konstanti c. Neka je T teorija jezika L i c nova konstanta (c nema pojavljivanja u aksiomama teorije T). Ako je $\varphi(c)$ rečenica jezika $L \cup \{c\}$ i ukoliko je $T \vdash \varphi(c)$, tada je $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

2.3. STAV o preneks normalnoj formi. Formula φ je u preneks normalnoj formi ukoliko je φ oblika $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n \theta(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, gde je θ formula bez kvantifikatora, a $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ su kvantifikatori $\forall$, $\exists$. U ovakvom slučaju formula θ naziva se matrica. Važi teorema:

Za svaku formulu φ jezika L postoji formula ψ jezika L u preneks normalnoj formi tako da $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

3. Eliminacija utapanja

U mnogim slučajevima postoji mogućnost eliminacije utapanja. U osnovi takvih eliminacija su sledeća dva tvrdjenja koja se odnose na transfer modela.

3.1. I LEMA prenosa. Neka $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Tada postoji model $\mathfrak{A}'$ tako da navedeni diagram komutira.

D O K A Z. Model $\mathfrak{A}' = f[\mathfrak{A}]$ čini ovaj diagram komutativnim. ⊣

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}' \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{B} \end{tikzcd}$$

3.2. II LEMA prenosa. Neka je $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Tada postoji model $\mathfrak{B}'$ tako da prikazani diagram komutira.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B}' & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

D O K A Z. Neka je X skup tako da $A \cap X = \emptyset$ i $|X| = |B - f[A]|$. Model $\mathfrak{B}'$ odredjujemo na sledeći način. Uzmimo da je $B' = A \cup X$ i $h: B \xrightarrow[1-1]{na} B'$ tako da $h \restriction f[A] = f^{-1}$. Cilj nam je da h bude izomorfizam. Za konstantni simbol $c \in L(\mathfrak{A})$ definišimo $c^{\mathfrak{B}'} = c^{\mathfrak{A}}$. Ako je $P(\vec{x})$ predikatski simbol u $L(\mathfrak{A})$, tada za $\vec{b} \in B'$, $P^{\mathfrak{B}'}(\vec{b}) = P^{\mathfrak{B}}(h^{-1}\vec{b})$
Ako je g funkcijski simbol u $L(\mathfrak{A})$, tada $g^{\mathfrak{B}'}(\vec{b}) = hg^{\mathfrak{B}}(h^{-1}\vec{b})$.
U takvom slučaju lako je proveriti da je $\mathfrak{B}'$ model, $h: \mathfrak{B} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}'$ i da gornji diagram komutira. ⊣

U prethodnim diagramima f, može biti neka specifična vrsta prelikavanja, kao na primer elementarno, n-elementarno. Pokazuje se da je i u takvim slučajevima inkluziono preslikavanje u ovim diagramima istog tipa kao i f.

4. Kompletnost i kompaktnost

Ovi su pojmovi od ključne važnosti u teoriji modela. Stavovima potpunosti povezuju se, može se tako reći, osnovna sintaksna i semantička svojstva teorije T.

4.1. STAV potpunosti. Rečenica θ je teorema (sinatksna posledica) teorije T akko θ je tačna (semantička posledica teorije T). Kraći zapis: $T \vdash \theta$ akko $T \models \theta$.

Ovu teoremu dokazao je Gödel 193o. godine za prebrojive jezike, Maljcev 1936. godine za teorije proizvoljnih jezika. Henkinov dokaz 194o. godine imao je poseban uticaj na razvoj teorije modela, budući da se njime uvodi metoda "svedoka".

4.2. STAV potpunosti (druga varijanta). T je neprotivurečna teorija akko postoji model teorije T, odnosno T je sintaksno neprotivurečna akko T je semantički neprotivurečna teorija.

4.3. STAV kompaktnosti. Teorija T ima model akko svaki konačni podskup teorije T ima model.

5. Diagrami modela

Za svaki model $\mathfrak{A}$ mogu se uočiti posebni skupovi formula kojima se iskazuju važne značajne informacije o modelu $\mathfrak{A}$.

5.1. Diagram modela $\mathfrak{A}$. Neka je $\mathfrak{A}$ model jezika L i $L_A = L \cup \{\underline{a} \mid a \in A\}$ prosta ekspanzija jezika L. Skup $\Delta_{\mathfrak{A}} = \{\varphi \mid \varphi$ je atomična ili negacija atomične rečenice jezika L_A tako da $\mathfrak{A}_A \models \varphi\}$ naziva se diagram modela $\mathfrak{A}$. Lako se dokazuje da: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ akko neka prosta ekspanzija $\mathfrak{B}'$ modela $\mathfrak{B}$ zadovoljava $\mathfrak{B}' \models \Delta_{\mathfrak{A}}$.

Navedimo sledeću observaciju prof. S. Prešića. Ukoliko se vrednosti individualnih promenljivih ograniče na domen A, tada diagram $\Delta_{\mathfrak{A}}$ odredjuje u potpunosti model $\mathfrak{A}$. Stoga se može kazati da je $\Delta_{\mathfrak{A}}$ popis strukture $\mathfrak{A}$. U sintaksnom pristupu, model $\mathfrak{A}$ se može identifikovati sa svojim diagramom, otuda se u takvom slučaju $\Delta_{\mathfrak{A}}$ može smatrati sintaksnim modelom.

5.2. $Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi$ je rečenica jezika L tako da $\mathfrak{A} \models \varphi\}$.
Primetimo da je $Th(\mathfrak{A})$ kompletna teorija i da $\mathfrak{A} \models Th(\mathfrak{A})$.

5.3. Kompletni (elementarni) diagram modela $\mathfrak{A}$ je teorija $T(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{A}_A)$. Jasno je da važi: $\mathfrak{A}_A \models T(\mathfrak{A})$.

6. Relacije izmedju modela

U ovom delu biće reči o uzajamnim vezama izmedju modela. Pretpostavimo da su svi modeli o kojima je reč u istom jeziku L.

6.1. Modeli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ su elementarno ekvivalentni akko $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Ukoliko su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elementarno ekvivalentni modeli tada pišemo $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

6.2. Model $\mathfrak{A}$ je elementarni podmodel modela $\mathfrak{B}$, u oznaci $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ akko $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ i za svaku formulu $\varphi(\vec{x})$ jezika L i $\vec{a} \in A$ važi $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}]$. Lako se dokazuje da su sledeći iskazi ekvivalentni.

(1) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

(2) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}_A \models T(\mathfrak{A})$.

(3) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ i $T(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B}_A)$.

U vezi sa prethodnim pojmom uvodi se pojam elementarnog utapanja, u oznaci $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B}$. Utapanje $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ je elementarno utapanje akko $f[\mathfrak{A}] \prec \mathfrak{B}$. Neposredno se dokazuje da važi: $\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B}$ akko je neka prosta ekspanzija modela $\mathfrak{B}$ model kompletnog diagrama modela $\mathfrak{A}$.

6.3. Indukcijom po složenosti formula može se dokazati sledeće: $\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B}$ implicira $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

6.4. Medju mnogim algebarskim teorijama ističu se modelski potpune i podmodelski potpune teorije (ovi pojmovi potiču od A.Robinsona). Teorija T je modelski potpuna akko za svaka dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ implicira $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Teorija T je podmodelski potpuna akko za svaka dva modela $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ i model $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ važi $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_A$.

6.5. Lanac modela $\mathfrak{A}_0 < \mathfrak{A}_1 < \ldots < \mathfrak{A}_\xi < \ldots$ $\xi < \alpha$, α je ordinal, zove se elementarni lanac modela. Važi sledeća teorema o elementarnim lancima (Tarski):

$$\bigwedge_{\xi<\alpha} \mathfrak{A}_\xi < \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{A}_\xi \ .$$

6.6. Važi sledeće tvrdjenje: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ akko postoji model $\mathfrak{C}$ da $\mathfrak{A} \xrightarrow{<} \mathfrak{C} \xleftarrow{>} \mathfrak{B}$

7. Teoreme Löwenheim-Skolem-Tarskog

Ove teoreme spadaju medju prve rezultate teorije modela (prva varijanta potiče od Löwenheima, 1915 g.). Pomoću ovih teorema dokazana je, na primer, egzistencija nestandardnih modela formalne aritmetike. U vezi sa tim je i Skolemov paradoks: Ako je teorija skupova ZF neprotivurečna, tada ZF poseduje prebrojiv model.

7.1. DONJA Löwenheim-Skolem-Tarskog teorema (ubuduće DLST): Neka je $|B| \geqslant \|L\|$ i $X \subseteq B$. Tada postoji model $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ tako da $X \subseteq A$ i $|A| = \max(|X|, \|L\|)$.

7.2. GORNJA Löwenheim-Skolem-Tarskog teorema (GLST): Neka je $\mathfrak{A}$ beskonačan model. Tada za svaki $k \geqslant \max(|A|, \|L\|)$ postoji model $\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ i $|B| = k$.

7.3. LÖWENHEIM-Skolem-Tarskog teorema (LST): Ako teorija T ima beskonačan model, tada T ima model u svakom kardinalu $k \geqslant \|L\|$.

8. Skupovi formula, tipovi

8.1. Neka je $\sum(\vec{x})$ ma koji skup formula jezika L sa slobodnim promenljivima medju $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Kažemo da model $\mathfrak{A}$ realizuje (ostvaruje) $\sum(\vec{x})$ akko postoji $\vec{a} \in A$ tako da za svaku formulu $\varphi \in \sum$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$. U takvom slučaju pišemo $\mathfrak{A} \models \sum[\vec{a}]$.

Ako skup formula $\Sigma(\vec{x})$ nije ostvaren u modelu $\mathfrak{A}$, kažemo da je $\Sigma(\vec{x})$ ispušten u modelu $\mathfrak{A}$. Maksimalno neprotivurečan skup formula sa teorijom T je tip teorije T. Primetimo da je za $\vec{a} \in A$, $p(\vec{x}) = \{\varphi \mid \varphi$ je formula jezika L tako da $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$ tip teorije $Th(\mathfrak{A})$.

Neka je T teorija za L i $\Sigma(\vec{x})$ skup formula u L. Ako postoji formula $\theta(\bar{x})$ u L neprotivurečna sa T tako da $\bigwedge_{\varphi\in\Sigma} T \vdash \theta \Rightarrow \varphi$, kažemo da je $\Sigma(\vec{x})$ lokalno ostvaren u teoriji T. Tip koji je lokalno ostvaren u T, zovemo atomičnim tipom teorije T. Ako $\Sigma(\vec{x})$ nije lokalno ostvaren u T, kažemo da je $\Sigma(\vec{x})$ lokalno ispušten u teoriji T.

U opštem slučaju obično se razmatraju dve vrste pitanja u vezi realizacije (ostvarenja) skupova formula:

1° a) U kojem slučaju postoji model $\mathfrak{A} \models T$ koji ostvaruje $\Sigma(\vec{x})$?

b) Da li postoji model $\mathfrak{A} \models T$ koji ispušta $\Sigma(\vec{x})$?

2° a) U kojim slučajevima postoji model $\mathfrak{A} \models T$ koji ostvaruje što je moguće više skupova formula. Ovo pitanje vodi nas direktno ka zasićenim modelima.

b) U kojim slučajevima postoji model $\mathfrak{A} \models T$ koji realizuje što je moguće manje skupova formula. Pokazuje se da su to atomični modeli.

Na pitanje 1° a) odgovor daje stav kompaktnosti. Pitanje 1° b) rešava sledeća teorema o ispuštanju tipova (Ryll-Nardzewski, Mostovski, Grzegorczyk):

Neka je T neprotivurečna teorija u prebrojivom jeziku L i $\Sigma(\vec{x})$ skup formula u L. Ako T lokalno ispušta $\Sigma(\vec{x})$, tada T ima prebrojiv model koji ispušta $\Sigma(\vec{x})$.

U vezi ove teoreme ostalo je otvoreno pitanje u kojim slučajevima se ona može proširiti na neprebrojive jezike. jive jezike.

Odgovori na pitanja pod 2° u vezi su sa sledećim odeljkom.

9. Vrste modela

U teorijama se često mogu uočavati u izvesnom smislu istaknute vrste modela odlikovani posedovanjem nekih ekstremalnih svojstava.

9.1. Model $\mathfrak{A} \models T$ je prost model teorije T akko za svaki model $\mathfrak{B} \models T$ važi $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Model $\mathfrak{A}$ je elementarno prost model akko za svaki model $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ implicira $\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B}$.

9.2. Model $\mathfrak{A}$ je atomičan model akko $\mathfrak{A}$ ostvaruje samo atomične tipove neprotivurečne sa $Th(\mathfrak{A})$.

9.3. Model $\mathfrak{A} \models T$ je α-univerzalan (α je kardinal) model teorije T akko za svaki model $\mathfrak{B} \models T$ važi: $|B| \leq \alpha$ implicira $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$. Ako je $\mathfrak{A}$ $|A|$-univerzalan, kažemo da je $\mathfrak{A}$ univerzalan model teorije T. Model $\mathfrak{A}$ je elementarno α-univerzalan akko za svaki model $\mathfrak{B}$, $|B| \leq \alpha$ i $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ implicira $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$. Ako je $\mathfrak{A}$ elementarno $|A|$-univerzalan, kažemo da je $\mathfrak{A}$ elementarno univerzalan model.

9.4. Model $\mathfrak{A} \models T$ je α-homogen u T akko za svaki $\mathfrak{B} \models T$ tako da $|B| < \alpha$ diagram $\mathfrak{A} \xleftarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{A}$ ima dopunu do prikazanog komutativnog diagrama. Ako je model $\mathfrak{A}$ $|A|$-homogen, kažemo da je $\mathfrak{A}$ homogen model.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[rr, "\sim"] & & \mathfrak{A} \\ & \mathfrak{B} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Parcijalno preslikavanje $p : X \longrightarrow A$, $X \subseteq A$, je elementarno parcijalan automorfizam akko važi $\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, px \rangle_{x \in X}$. Model $\mathfrak{A}$ je elementarno α-homogen akko za svaki parcijalni elementarni izomorfizam p, tako da $|p| < \alpha$ i svaki $a \in A$ postoji $b \in A$ tako da $\langle \mathfrak{A}, x, a \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, px, b \rangle_{x \in X}$. Model $\mathfrak{A}$ je elementarno homogen model akko je $\mathfrak{A}$ elementarno $|A|$-homogen model. Pokazuje se da važi sledeće tvrdjenje: $\mathfrak{A}$ je elementarno homogen model akko se svaki elementarni parcijalni automorfizam kardinalnosti $< |A|$ produžuje do nekog automorfizma modela $\mathfrak{A}$.

9.5. Model $\mathfrak{A} \models T$ je homogeno univerzalan model teorije T akko je $\mathfrak{A}$ homogen i univerzalan model teorije T. Model $\mathfrak{A}$ je $\mathcal{L}$ -zasićen model akko za svaki $X \subseteq A$, tako da $|X| < \mathcal{L}$, svaki skup formula $\Sigma(\vec{x})$ u jeziku L_X konzistentan sa $Th(\mathfrak{A}_X)$, je realizovan u modelu $\mathfrak{A}_X$, pritom važi teorema: Model $\mathfrak{A}$ je zasićen model akko $\mathfrak{A}$ je elementarno homogen i elementarno univerzalan model.

10. Kategoričnost

10.1. Teorija T je k-kategorična akko su svi modeli teorije T kardinalnosti k izomorfni.

10.2. Funkcija $k_T(\mathcal{L})$ uvodi se kao kardinalni broj neizomorfnih modela teorije T kardinalnosti $\mathcal{L}$.

10.3. Vaughtov test potpunosti: Ako je T teorija bez konačnih modela, kategorična u nekom kardinalu, tada je T potpuna teorija.

10.4. Morlyev stav kategoričnosti: Neka je L prebrojiv jezik. Tada $k_T(\omega_1) = 1 \longleftrightarrow \bigwedge_{\mathcal{L} > \omega_1} k_T(\mathcal{L}) = 1.$

Postoji obimna literatura u kojoj se može naći istorijski razvoj činjenica relevantnih za teoriju modela. Neke od tih jedinica su naprimer /7/, /29/. U /24/ prikazan je razvoj simboličke logike od Leibnitza do početka ovog veka, sa vrlo obimnom bibliografijom. Napomenimo, da se Tarski smatra za utemeljivača teorije modela. On je uveo osnovne pojmove, kao što su zadovoljenje formule u modelu, elementarna ekvivalencija, elementarni podmodel modela itd. Sa druge strane, matematičari kao Cantor, Hausdorff, Maljcev razmatrali su takve strukture i uveli takve metođe koje su se pokazale vrlo plodnim u teoriji modela. Pomenimo Cantorov cik-cak agrument, koji je on koristio u dokazu ω -kategoričnosti linearno uredjenih gustih skupova bez krajeva i na η_α skupove. Otuda su, recimo, potekli pojmovi kao što su zasićeni, homogeni modeli, metod parcijalnih preslikavanja (koji je posebno razvila Carol Karp i povezala sa beskonačnim logikama). Čini se da ove ideje nisu iscrpljene, budući da se one pojavljuju u raznim varijantama u radovima koji se danas objavljuju.

II DEO

Booleove algebre

1. Nekoliko reči o Booleovim algebrama

U ovom delu izložićemo izvesne činjenice iz Booleovih algebri i to iz sledećih razloga:

1° U algebarskom pristupu izučavanja metamatematike, Booleove algebre imaju značajnu primenu. Kao što će se videti, mnoga tvrdjenja koja se odnose na teoriju modela predikatskog računa I reda ustvari su prenos činjenica iz teorije Booleovih algebri.

2° Teorija Booleovih algebri sama za sebe predstavlja jednu od najinteresantnijih teorija, što je svakako posledica pluraliteta onoga što podrazumevamo pod Booleovom algebrom, budući da se Booleova algebra **B** može da posmatrati kao matematička struktura sa više stanovišta:

$2^{\circ}.1.$ **B** je Booleova algebra u užem smislu te reči, $\mathbf{B} = \langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ gde operacije $\wedge, \vee, ', 0, 1$ zadovoljavaju jedan od uobičajenih sistema aksioma.

$2^{\circ}.2.$ $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, 0, 1\rangle$. U ovom slučaju **B** je Booleov prsten sa jedinicom, tj. pored ostalog zadovoljeni su zakoni $x+x = 0$, $x.x = x$.

$2^{\circ}.3.$ $\mathbf{B} = \langle B, \leqslant\rangle$, odnosno **B** je uredjen sistem, preciznije **B** je data kao komplementarna distributivna mreža.

$2^{\circ}.4.$ Booleova algebra može biti data kao polje skupova. Ovo tvrdjenje nije ništa drugo do Stoneov stav reprezentacije.

$2^{\circ}.5.$ Booleova algebra **B** odredjuje jedinstven Booleov (Stoneov) topološki prostor u kojem **B** služi kao baza. O tome takodje govori Stoneov stav o reprezentaciji Booleovih algebri.

2°.6. Najzad, kao što će se videti, B se može shvatiti kao algebra logike, odnosno B je skup formula neke teorije T a Booleove operacije $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1, su logičke operacije i, ili, ne, tačno, netačno. Treba primetiti da su istorijski Booleove algebre tako i nastale (George Boole, The Mathematical Analysis of Logic, Cambridge, 1847; The Calculus of Logic, Cambridge Math. Jour. 3(1848)), te sadašnje ime i nose prema svom tvorcu.

3°. U daljem, često teorija Booleovih algebri služi kao primer za neku opštu činjenicu teorije modela, koja je bila dokazana primenom Booleovih algebri, odnosno imamo primer kako primena odredjene metode daje konsekvence o teoriji same te metode. Ovakav pristup svojstven je i drugim oblastima matematičke logike, pre svega teoriji modela teorije skupova, na primer sistemu ZF. Ako se za osnovu metamatematike prihvati ZF onda se mnoge činjenice mogu izreći o (formalnoj ili objekt) teoriji ZF. To dobrim delom ustvari i predstavlja predmet današnje teorije skupova. Primetimo, da bi teorija T dopuštala ovakav pristup, potrebno je da je teorija T dovoljno moćna da se njena formalizacija T' (objekt teorija teorije T) može ispitivati sredstvima same teorije T, recimo da omogućava Gödelizaciju. To je slučaj sa Peanovom aritmetikom i raznim varijantama teorije skupova.

U daljem, pretpostavljamo elementarne teoreme Booleovih algebri, bez posebnih pozivanja na njih. Ovde ćemo izložiti činjenice koje kasnije neposredno koristimo a takodje one rezultate i dokaze koji su po našem mišljenju novi. To se posebno odnosi na dokaze, jer su ovi po pravilu algebarskog tipa.

2. Booleove algebre i Stoneovi prostori

Ukoliko se govori o Booleovim algebrama ne može se izbeći dualnost, koju je ustanovio M. Stone (The representation theorem for Boolean algebra, Trans. Am. Math. Soc. 40(1936)), izmedju Booleovih algebri i kompaktnih totalno nepovezanih prostora (Stoneovi prostori). U jeziku kategorija, ta dualnost se svakako najprirodnije izražava. Neka je $\mathcal{B}$ kategorija Booleovih algebri sa homomorfizmima kao morfizmima i $\mathcal{S}$ kategorija Stoneovih prostora sa neprekidnim funkcijama kao morfizmima. U takvom slučaju Stoneov stav reprezentacije (dualnosti)tvrdi da su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{S}^{opp}$ ekvivalentne kategorije. Preciznije, kontravarijantni funktori $*:\mathcal{B}\to\mathcal{S}$, $\circ:\mathcal{S}\to\mathcal{B}$ koji ustanovljavaju ekvivalentnost kategorija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{S}$ definisisani su na sledeći način (kako ne postoji opasnost od zabune, funktor $\circ$ označavamo takodje sa $*$).

Ako je B Booleova algebra, tada je $B^* = \{p \mid p$ je ultrafilter u $B\}$, a za bazu prostora B^* uzimamo skupove $a^* = \{p \mid a \in p$, p je ultrafilter u $B\}$, gde $a \in B$. Ako je $X \in \mathcal{S}$, tada je Booleova algebra X^* polje otvoreno-zatvorenih skupova u X sa skupovnim operacijama $\cap, \cup, C_X, \emptyset, X$. Neka je $f \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ i $h \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, gde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $X,Y \in \mathcal{S}$. Tada $f^* \in \mathrm{Hom}(B_2^*, B_1^*)$, gde $f^*(p) = f^{-1}[p]$ i $h^* \in \mathrm{Hom}(Y^*, X^*)$, gde $h^*(u) = h^{-1}[u]$.

Ekvivalentnost kategorija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{S}^{opp}$ utvrdjuje sledeća

TEOREMA 2.1. (Stone) Funktori $*\circ$, $\circ *$ su prirodno ekvivalentni identičnim funktorima, tj. sledeći diagram komutira za ma koje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "\tau_{B_1}"] \arrow[d, "f"'] & B_1^{*\circ} \arrow[d, "f^{*\circ}"] \\ B_2 \arrow[r, "\tau_{B_2}"] & B_2^{*\circ} \end{tikzcd}$$

$f \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$, gde $\tau_B(a) = a^*$, $a \in B$

τ_B je izomorfizam.

Sličan diagram važi u kategoriji $\mathcal{S}$.

Prema prethodnom, $B \cong B^{**}$ (stav o reprezentaciji Booleovih algebri kao polja skupova) i $X \cong X^{**}$, gde $X \in \mathcal{S}$. Takodje, B je izomorfna bazi prostora B^*, te $wX = |X^*|$, gde wX označava težinu prostora X. $\dashv$

Poslednje tvrdjenje, koje je fundamentalno u teoriji Booleovih algebri, omogućuje da se za razne pojmove koji se odnose na Booleove algebre, uvedu dualni pojmovi u kategoriji $\mathcal{S}$ i obrnuto. U tom smislu uvodimo duale sledećih algebarskih pojmova.

(1) Dual Booleove algebre B je B^*.

(2) Dual Booleovog homomorfizma f je f^*.

(3) Neka je $a \in B$. Tada je a^* dual elementa a.

(4) Neka je F filter u B. Tada $F^* = \{p \mid p$ je ultrafilter u B i $F \subseteq p\}$.

Otuda, $F^* = \bigcap_{a \in F} a^*$, tj. F^* je zatvoren skup u B^*.

(5) Neka je I ideal u B i $I^* = \{p \mid p$ je ultrafilter u B, $p \cap I \neq \emptyset\}$. Prema tome, $I^* = \bigcup_{a \in B} a^*$, tj. I^* je otvoren skup u B^*.

U opštem slučaju razmatraju se sledeće vrste stavova, koji se odnose na dualnost kategorija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{S}$. Prva vrsta stavova odnosi se na konstruktivna svojstva funktora $*$, odnosno oni su tipa: Ako je B Booleova algebra dobijena primenom algebarske konstrukcije K u kategoriji $\mathcal{B}$, tada je dualni prostor B^* dobijen topološkom konstrukcijom K^* u $\mathcal{S}$.

Druga vrsta tvrdjenja odnosi se na prenosna svojstva funktora $*$, i oblika su: Ako Booleova algebra B ima svojstvo P, onda dualni protor B^* ima svojstvo P', odnosno, B ima svojstvo P akko B^* ima svojstvo P'.

Može se govoriti i o trećoj vrsti stavova, ako kategorije $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ posmatramo u širem sklopu, na primer $\mathcal{B}$ u kategoriji mreža $\mathcal{M}$, a $\mathcal{S}$ u kategoriji topoloških prostora Top. Onda se postavlja pitanje, kako se odredjene konstrukcije u $\mathcal{M}$, odnosno u Top reflektuju na funktor $*$.

Radi ilustracije navodimo listu najznačajnijih tvrdjenja po gore navedenim tipovima. Neke od njih je lako dokazati, dok neke kasnije dokazujemo a neke nećemo dokazivati budući da nisu od značaja za ovaj rad.

1°. 1. $(B_1 x B_2)^* = B_1^* + B_2^*$, $(B_1 + B_2)^* = B_1^* x B_2^*$.

2. $(\prod_{i \in I} B_i)^* = \beta \sum_{i \in I} B_i^*$, gde β označava Stone-Chech kompaktifikaciju (vid. /39/). Otuda na primer, $(2^X)^*$ je kompaktifikacija diskretnog prostora na X. Ovde $2 = \langle \{0,1\}, \wedge, \vee, ', 0,1 \rangle$.

3. $\Omega_k^* = 2^k$, gde je Ω_k slobodna Booleova algebra na kardinalu k, 2^k uopšten Cantorov prostor.

4. $(B / I)^* = B^* - I^*$, I je ideal u B.

2°. 1. $f : B_1 \xrightarrow{1-1} B_2$ akko $f^* : B_2^* \xrightarrow{na} B_1^*$.

2. $f : B_1 \xrightarrow{na} B_2$ akko $f^* : B_2^* \xrightarrow{1-1} B_1^*$.

3. $B_1 \subseteq B_2$ akko $B_1^* = B_2^*/\sim$

4. p je neglavni ultrafilter u B akko p nije izolovana tačka u B^*.

5. B je konačna Booleova algebra akko B^* je konačan prostor akko B^* je diskretan prostor.

6. B je beskonačna Booleova algebra akko B^* ima neizolovanu tačku. Ovo tvrdjenje ustvari predstavlja stav da svaka beskonačna Booleova algebra ima neglavni ultrafilter.

7. B je prebrojiva Booleova algebra akko je B^* kompletno separabilan prostor akko B^* je metrički (Stoneov) prostor.

8. B je kompletna Booleova algebra akko B^* je ekstremno nepovezan prostor (X je ekstremno nepovezan ukoliko je za svaki $U \subseteq X$, $\bar{\mathring{U}} = \mathring{U}$).

9. Element a je atom u B akko a^* je jednočlan skup u B^*.

10. B je atomična Booleova algebra akko je skup izolovanih tačaka gust u B^*.

11. B je bezatomična Booleova algebra akko je B^* perfektan prostor.

3^o. Navedimo, izmedju ostalog, osnovne fakte o kompletiranju Booleovih algebri.

1. Neka je X topološki prostor i R(X) skup regularno otvorenih skupova u X, tj. $R(X) = \{ U \subseteq X \mid \mathring{\bar{U}} = U \}$.

Tada je R(X) kompletna Booleova algebra sa Booleovim operacijama definisanim na sledeći način:

$u \wedge v = u \cap v$, $u \vee v = u \cup v$, $u' = X - \bar{u}$, $0 = \emptyset$, $1 = X$. Neka je $\hat{B} = R(B^*)$, gde je B Booleova algebra.

2. Za Booleovu algebru B, $\tau_B : B \longrightarrow \hat{B}$ $(\tau_B(x) = x^*)$ je kompletno utapanje, tj. prezervira infimum i supremum. $\hat{B}$ je minimalna algebra u kategoriji kompletnih Booleovih algebri sa kompletnim homomorfizmima kao morfizmima, u koju se B može utopiti, tj. važi prikazano kompletiranje diagrama.

$$\begin{tikzcd} \hat{B} \arrow[rr, dashed, "g"] & & C \\ & B \arrow[ul, "\tau_B"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

C kompletna Booleova algebra, f proizvoljno kompletno utapanje, g kompletno utapanje.

Iz tog razloga $(\hat{B}, \tau_B)$ zove se kompletiranje Booleove algebre B. Napomenimo da kasnije uvodimo opšti pojam kompletiranja struktura (V.1.). Pored ostalog, napominjemo da ubuduće, kad je to moguće, interpretiramo rezultate dobijene za Booleove algebre na Stoneove prostore. U takvim situacijama u potpunosti dolaze do izražaja prenosna svojstva funtora *.

3. Odnos izmedju kardinalnosti Booleove algebre B i dualnog prostora B*

Ukoliko se govori o ovom odnosu, treba imati na umu da je B^* skup svih ultrafiltera u B, te u ovom razmatranju ne dolazi do većeg izražaja topološka struktura prostora B^*. Ubuduće B označava Booleovu algebru, a $(B, \leq)$ inducirano uredjenje.

DEF. 3.1. Obrnuto (dualno) binarno drvo $(T, \leq) \subseteq (B, \leq)$ je normalno u B akko za sve $x, y \in T$ ako su x, y neuporedivi u odnosu na $\leq$, onda $x \wedge y = 0$.

DEF. 3.2. Skup $C \subseteq B$ je cepajući (slobodan, prema prof. Đ. Kurepi) u B akko je ispunjeno

(1) $0 \notin C$.

(2) $a \in C \rightarrow \bigvee_{a_1, a_2 \in C} a = a_1 \vee a_2$ i $a_1 \wedge a_2 = 0$.

PRIMER 3.3. Prazan skup je cepajući u svakoj Booleovoj algebri. Naravno, od interesa su samo neprazni cepajući skupovi.

PRIMER 3.4. $C = \{x \in B \mid x$ je neatomičan element u $B\}$ je cepajući skup u B.

DOKAZ: Neka je $a \in C$. Tada postoji $a_1 \in B$ tako da $0 < a_1 < a$. Neka je $a_2 = a - a_1$. Tada $a = a_1 \vee a_2$ i $a_1 \wedge a_2 = 0$. Kako je a neatomičan to su i a_1, a_2. Ovde, x je neatomičan ukoliko ne postoji atom $b \in B$ tako da $b \leq x$ i $x \neq 0$. ⊣

LEMA 3.5. Svaki neprazni cepajući skup C u B sadrži beskonačno normalno drvo.

DOKAZ: Indukcijom konstruišemo niz konačnih normalnih drveta $(T_0, \leq) \subseteq (T_1, \leq) \subseteq \ldots$ na sledeći način. Neka je $T_0 = \{a\}$, gde je a neki element skupa C. Pretpostavimo da je T_n odredjeno. Tada T_{n+1} odredjujemo na sledeći način. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k = 2^n)$ minimalni elementi u T_n. Po induktivnoj hipotezi važi $a_i \in C$, $(1 \leq i \leq k)$, te za svaki a_i postoje elementi $a_{i0}, a_{i1} \in C$ tako da je $a_{i0}, a_{i1} \neq 0$, $a_i = a_{i0} \vee a_{i1}$ i $a_{i0} \wedge a_{i1} = 0$. Tada $T_{n+1} = T_n \cup \{a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{k0}, a_{k1}\}$. Neka je $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Drvo $(T, \leq)$ ima gore opisana svojstva. ⊣

PRIMER 3.6. Binarno normalno dualno drvo u B je cepajući skup u B. Stoga B sadrži neprazan cepajući skup akko B sadrži beskonačno dualno binarno normalno drvo.

LEMA 3.7. Neka Booleova algebra B sadrži neprazni cepajući skup C. Tada $|B^*| \geq 2^{\omega}$.

DOKAZ: Prema prethodnoj lemi skup C sadrži neko beskonačno dualno binarno normalno drvo T. Svaka (maksimalna) grana g drveta T produžuje se do nekog ultrafiltera p_g algebre B. Normalnost drveta T implicira: ako je $g \neq g'$ onda $p_g \neq p_{g'}$. Budući da T ima 2^ω maksimalnih grana, to $|B^*| \geq 2^\omega$. ⊣

POSLEDICA 3.7.1. Neka je $a \in B$ neatomičan. Tada $|a^*| \geq 2^\omega$.

DOKAZ: Prema primeru 3.4., lemi 3.5. i lemi 3.7. ⊣

Pojam cepajućeg skupa može se uopštiti:

DEF. 3.8. Skup $C \subseteq B$ je λ-cepajući u B (λ je kardinal) akko

(1) $0 \notin C$

(2) $a \in C \longrightarrow \bigvee_f \; f: \lambda \xrightarrow[1-1]{} C$ i $a = \sup_{\alpha \in \lambda} f(\alpha)$ i $\bigwedge_{\alpha,\beta \in \lambda} \alpha \neq \beta \quad f(\alpha) \wedge f(\beta) = 0.$

TVRDJENJE 3.9. Skup C je 2-cepajući $\longrightarrow$ C je n-cepajući, $n \in \omega - 2$.

DOKAZ: Neka je $a \in C$. Tada postoji u C dualno normalno drvo T_a sa vrhom u a.

Dokazujemo da se element a drveta T_a cepa na n elemenata. Dokaz je induktivan. Slučaj $n = 2$ sledi po definiciji cepajućeg skupa. Pretpostavimo da tvdjenje važi za n. Neka su T_1, T_2 poddrveta drveta T_a sa vrhovima u elementima a_1, a_2 reda 1 u drvetu T_a. Po induktivnoj hipotezi mogu se izabrati elementi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in T_2$ koji rascepljuju a_2, tj. $a_2 = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n$. Tada $a = a_1 \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n$, te tvrdjenje važi za $n+1$. ⊣

Sledeće tvrdjenje je od posebne važnosti za buduća razmatranja.

TEOREMA 3.10. Neka je $|B^*| > |B|$. Tada postoji beskonačno dualno normalno drvo $T \subseteq B$ tako da za svaki $a \in T$, $|a^*| > |B|$.

DOKAZ:

LEMA 1°. $(X = \bigcup_{i \in I} X_i) \longrightarrow (|X| \leqslant |I| \cdot \sup_{i \in I} X_i)$.

DOKAZ: Ako je $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, tada $|X| \leq \sum_{i \in I} |X_i| \leq \sum_{i \in I} \sup |X_i| = |I| \sup_{i \in I} X_i$.

LEMA 2°. $|B^*| > |B| \longrightarrow \bigvee_{a \in B} |a^*| > |B|$.

DOKAZ: Neka je (1) $|B^*| > B$. Otuda sledi da je B beskonačna Booleova algebra. Kako je $B^* = \bigcup_{a \in B} a^*$, to $|B^*| \leq |B| \cdot \sup_{a \in B} |a^*|$. Ako bi bilo $\sup_{a \in B} |a^*| \leqslant |B|$, onda $|B^*| \leqslant |B| \cdot |B| = |B|$, tj. $|B^*| \leqslant |B|$, što je kontradikcija prema (1). Otuda (2) $\sup_{a \in B} |a^*| > |B|$. Ako bi bilo $\bigwedge_{a \in B} |a^*| \leqslant |B|$, onda takodje $\sup_{a \in B} |a^*| \leqslant |B|$, što je kontradikcija prema (2). Prema tome za neki $a \in B$ važi $|a^*| > |B|$.

LEMA 3°. Skup $C = \{a \in B \mid |a^*| > |B|\}$ je cepajući u B.

DOKAZ: Neka je $a \in C$ i $I = \{b \in B_a \mid |b^*| \leqslant |B|\}$, gde $B_a = \{x \in B \mid x \leq a\}$. Neka je $S = \bigcup_{b \in I} b^*$. Kako je $I \subseteq B_a \subseteq B$ i $b \in I \longrightarrow |b^*| \leqslant |B|$, to $|S| \leqslant |I| \sup_{b \in I} |b^*| \leqslant |B| \cdot |B| = |B|$. Otuda, koristeći $|a^*| > |B|$ dobijamo $|a^* - S| = |a^*|$, tj. $a^* - S$ ima beskonačno mnogo elemenata te postoje različiti (1) p_1, $p_2 \in a^* - S$. Neka je $c \in p_1$, $c \notin p_2$. Tada $c' \in p_2$. Pošto je $a \in p_1, p_2$ to za elemente $a_1 = a \wedge c$, $a_2 = a \wedge c'$ važi $a_1 \in p_1$, $a_2 \in p_2$, $a = a_1 \vee a_2$, $a_1 \wedge a_2 = 0$, a_1, $a_2 \neq 0$. Ako bi bilo na primer, $|a_1^*| \leq |B|$, to pošto je $a_1 \leqslant a$ imamo $a_1 \in I$ i $p_1 \in a_1^*$, te važi $p_1 \in S$, što je kontradikcija prema (1). Otuda $|a_1^*| > |B|$, tj. $a_1 \in C$. Slično se dokazuje da je $a_2 \in C$.

Prema lemi 3.5. i lemama 2°, 3° tvrdjenje sledi. $\dashv$

POSLEDICA 3.10.1. Neka je $|B^*|>|B|$. Tada $|B^*|\geq 2^\omega$.

DOKAZ: Prema prethodnoj teoremi, postoji beskonačno dualno normalno drvo $T\subseteq B$, te prema lemi 3.7. $|B^*|\geq 2^\omega$. ⊣

POSLEDICA 3.10.2. Neka je B Booleova algebra tako da je za svaku prebrojivu podalgebru $C\subseteq B$ ispunjeno $|C^*|\leq\omega$. Tada $|B^*|\leq|B|$.

DOKAZ: Pretpostavimo da je $|B^*|>|B|$. Tada postoji beskonačno dualno normalno drvo $T\subseteq B$. Neka je C prebrojiva podalgebra algebre B koja sadrži drvo T. Tada $|C^*|\geq 2^\omega$. ⊣

U vezi sa prethodnim tvrdjenjem postavlja se pitanje da li je za beskonačnu Booleovu algebru B moguće $|B^*|<|B|$. Prema /11/. T. §5.18 lako se izvodi: ukoliko je B podalgebra neke slobodne Booleove algebre onda, $|B|\leq|B^*|$. No u vezi sa tim, postoje Booleove algebre koje se ne mogu utopiti u slobodne Booleove algebre, jer, svaka slobodna Booleova algebra i svaka njena podalgebra ima Suslinovo svojstvo: svaki rastavljen skup (vid. /11/) u B je prebrojiv, dok postoje Booleove algebre koje nemaju Suslinovo svojstvo.

Medju interesantnim posledicama prethodne teoreme nalazi se i sledeće tvrdjenje koje se odnosi na Stoneove prostore.

POSLEDICA 3.10.3. Neka je X metrički Stoneov prostor. Tada je kardinalnost prostora X prirodan broj, ω ili 2^ω.

DOKAZ: Kako je X metrički Stoneov prostor, prema 2.2°.7., X^* je prebrojiva Booleova algebra. Neka je $|X|>\omega$. Tada $|X|>|X^*|$, te $|X^{**}|>|X^*|$, odakle sleduje $|X^{**}|\geq 2^\omega$, tj. $|X|\geq 2^\omega$. Kako je $|X|\leq 2^\omega$, jer $X\cong X^{**}\subseteq S(X^*)$, to $|X|=2^\omega$. ⊣

Neka je T beskonačno dualno normalno drvo u Booleovoj algebri B. Može se postaviti pitanje kakva je podalgebra C algebre B generisana drvetom T. Odgovor na to daje sledeća teorema.

TEOREMA 3.11. Neka je $T\subseteq B$ beskonačno dualno normalno drvo i

C podalgebra algebre B generisana drvetom T. Tada $C \cong \Omega_o$

DOKAZ: Dokazaćemo da je C bezatomična Booleova algebra. Na osnovu ω-kategoričnosti teorije bezatomičnih Booleovih algebri onda sledi da je C slobodna Booleova algebra.

Ako je $x \in C$, onda $x = \sup_{i \in m} s_i$ za neki $m \in \omega$, gde su s_i oblika $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r'$, a_i, $b_j \in T$. Prema tome, dovoljno je dokazati da s_i nije atom algebre C. Neka je $x = s_i$. Zbog normalnosti drveta T sleduje da je

$a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = a_{i_o}$ za neki $i_o \in \{1,\ldots,k\}$ ili $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0$, prema tome ako je $x \neq 0$, onda $x = a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r'$, gde $a \in T$. Dalje, za $a \wedge b_j'$ postoje sledeće mogućnosti:

1^o. $a \wedge b_j = 0$, tj. a, b_j nalaze se na različitim granama drveta T. U takvom slučaju $a \wedge b_j' = a$.

2^o. $a \leq b_j$. Onda je $a \wedge b_j' = 0$.

3^o. $b_j < a$.

Otuda može se uzeti da je $x = a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r'$ gde $a > b_1,\ldots,b_r$. Ako se b_1, b_2 nalaze na istoj grani, tada $b_1 \vee b_2 = b_1$ ili $b_1 \vee b_2 = b_2$, tj. $b_1' \wedge b_2' = b_1'$ ili $b_1' \wedge b_2' = b_2'$. Prema tome, može se pretpostaviti da se $b_1,\ldots,b_r$ nalaze na raznim granama drveta T.

Pošto je $b_1,\ldots,b_r \leq a$, to $b_1 \vee \ldots \vee b_r \leq a$. Ako bi bilo $b_1 \vee \ldots \vee b_r = a$, onda $x = a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r' = 0$, protivno pretpostavci $x \neq 0$. Otuda (1) $b_1 \vee \ldots \vee b_r < a$.

Primetimo da je $T_a = \{u \in T \mid u \leq a\}$ takodje beskonačno normalno drvo sa vrhom u a i da je $b_1,\ldots,b_r \in T_a$.

Na ovom mestu potreban nam je pojam ranga elementa $b \in T$, u oznaci rb: Ako je b_o najveći element u T, onda $rb_o = 0$. Ako je $b \neq b_o$, onda $rb = \sup\{rc+1 \mid c \in T,\ c > b\}$.

Jasno je da je za drvo T $rb \in \omega$. Indukcijom po n lako se dokazuje (2) $\sup\{b \in T_a \mid rb = n\} = a$.

Odavde se izvodi da za svaki $m \in \omega$ postoji $c \in T$ tako da $rc = m$, i za svaki $b \in T$ postoji $c \in T$ tako da $rc > rb$.

Dokažimo sledeće pomoćno tvrdjenje.

(3) Postoji grana g drveta T_a tako da $b_j \notin g$ za $j = 1,2,\ldots r$. Pretpostavimo suprotno, da za svaku granu g u T_a postoji $b_j \in g$. Neka je $k = \sup_{1\leq j\leq r} rb_j$ i $N_k = \{c \in T_a \mid rc = k\} = \{c_1,\ldots,c_n\}$. Koristeći (2) imamo $c_1 \vee \ldots \vee c_n = a$. Dalje, pretpostavimo da je $c \in N_k$ i $c \in g$, gde je g grana u T_a. Po pretpostavci postoji $b_j \in g$, te $b_j < c$ ili $b_j \geq c$. Kako je $rb_j \leq k = rc$, to $b_j \geq c$. Otuda $b_1 \vee \ldots \vee b_r = a$, što je kontradikcija prema (1).

Prema tome tvrdjenje (3) važi.

Pokažimo da važi i obrat prethodnog tvrdjenja: Ako je $b_1 \vee \ldots \vee b_r = a$, tada svaka grana drveta T_a sadrži neki od elemenata $b_1,\ldots,b_r$ (ovde $b_1,\ldots,b_r \in T$). Zaista, neka je $c \in g$, gde je g grana drveta T_a, tako da $rc \leq k$, (k je $\sup_{1\leq j\leq r} rb_j$) Tada $c = c \wedge a \doteq (c \wedge b_1) \vee \ldots \vee (c \wedge b_r)$, te postoji b_j tako da $c \wedge b_j \neq 0$. Otuda $b_j < c$ ili $b_j \geq c$. Kako je $rb_j \geq k \geq rc$, to $b_j \geq c$, te $b_j \in g$.

Na osnovu prethodnog i (3) važi:

(4) Neka su $b_1,\ldots,b_r \in T_a$. Tada $a = b_1 \vee \ldots \vee b_r$ akko svaka grana g drveta T_a sadrži neki od elemenata $b_1,\ldots,b_r$.

Ekvivalentno ovome je

(5) Ako su $b_1,\ldots,b_r$, $a \in T$ i $b_1,\ldots,b_r \leq a$, tada $a = b_1 \vee \ldots \vee b_r$ akko svaka grana drveta T koja prolazi kroz a sadrži neki od elemenata $b_1,\ldots,b_r$.

Kako je u našem slučaju $b_1 \vee \ldots \vee b_r < a$, to prema prethodnom postoji grana g drveta T_a da je

(6) $\quad g \cap \{b_1, \ldots, b_r\} = \emptyset.$

Neka je $c \in g$ tako da $rc = k+1$. Tada postoje elementi $c_1, c_2 \in T_a$ tako da $c_1 \vee c = c_2$, $c_1 \wedge c = 0$, $rc_2 = k$. Otuda postoji grana g' u T_a tako da

(7) $g' \cap \{b_1, \ldots, b_r, c\} = \emptyset$, to je bilo koja grana koja sadrži c_1.

Neka je $y = a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r' \wedge c'$. Dokažimo da je

(8) $\quad y > 0.$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $y = 0$. Otuda $a' \vee b_1 \vee \ldots \vee b_r \vee c = 1$, te $a \wedge (b_1 \vee \ldots \vee b_r \vee c) = a$, odakle sleduje $a \leqslant b_1 \vee \ldots \vee b_r \vee c$, što je u suprotnosti sa (7) i (4).

Dalje, očigledno je $y \leqslant x$. Da bi dokazali x nije atom, dovoljno je videti da je $y < x$. Pretpostavimo da je $y = x$, tj. $a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r' \wedge c' = a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r'$. Otuda $a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r' \leqslant c'$, te $c \wedge a \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r' \leqslant c \wedge c' = 0$. Kako je $c \in T_a$, to $c \wedge a = c$, pa je $c \wedge b_1' \wedge \ldots \wedge b_r' = 0$. Otuda je $c \leqslant b_1 \vee \ldots \vee b_r$ te je za neki b_j ispunjeno $c \wedge b_j \neq 0$. Zbog normalnosti drveta T_a imamo $c < b_j$ ili $b_j \leqslant c$. Kako je $rc > rb_j$, to $c < b_j$, odakle sledi da je $b_j \in g$, što je kontradikcija prema (6). Prema tome, $0 < y < x$, te x nije atom, a to znači da je C bezatomična Booleova algebra. Kako je C generisana prebrojivim skupom, to $C \cong \Omega_0$. ⊣

Medju interesantnim posledicama prethodne teoreme nalaze se i ove:

POSLEDICA 3.11.1. Ako je $|B| < |B^*|$ onda $\Omega_0 \longrightarrow B$. Ako je X Stoneov prostor i $wX < |X|$, tada je Cantorov prostor 2^ω količnički prostor prostora X.

POSLEDICA 3.11.2. Ako je X neprebrojiv metrički Stoneov prostor, tada je 2^ω količnički prostor prostora X.

POSLEDICA 3.12.3. Za prebrojivu Booleovu algebru B, B^* je prebrojiv prostor akko B je superatomična Booleova algebra (B je superatomična akko je svaka podalgebra od B atomična Booleova algebra, vid. /39/).

DOKAZ: Neka je $|B^*| = \omega$ i $C \leq B$. Pretpostavimo da C nije atomična. U tom slučaju postoji neatomičan element $a \in C$. Prema posledici 3.7.1. sledi $|C^*| = 2^{\omega}$, te $B^* = 2^{\omega}$. Obrnuto, pretpostavimo da je B superatomična i $|B^*| > \omega$. Tada $|B^*| > |B| = \omega$, te $\Omega_0 \leq B$, tj. B nije superatomična. $\dashv$

4. Jedinstvenost bezatomične prebrojive Booleove algebre

Namera nam je da izložimo jedan algebarski dokaz da su svake dve bezatomične prebrojive Booleove algebre izomorfne, što znači da je teorija ovih Booleovih algebri ω-kategorična. Gore pomenuto tvrdjenje je odavno poznato, ali su svi dokazi koje smo našli indirektni, tj. preko Stoneovog stava reprezentacije ovaj problem svode na topološki. U osnovi, ideja dokaza koji sledi leži u Cantorovom cik-cak argumentu. Prethodno navodimo jednu lemu ekstenzije na kojoj počiva ovaj dokaz, a koja takodje sama za sebe ima odredjen interes.

4.1. LEMA I o ekstenziji. Neka su A, B konačne Booleove algebre i Ω, Ω', bezatomične Booleove algebre tako da $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega'$. Dalje, neka je $h: A \xrightarrow{\simeq} B$ i $a \in \Omega$. Tada postoji $b \in \Omega'$ i $f: [A,a] \to [B,b]$ tako da $fa = b$, $f \restriction A = h$. (Ovde $[A,a]$ označava podalgebru algebre Ω generisanu skupom $A \cup \{a\}$). Prema tome, svaki konačan parcijalni izomorfizam $h: \Omega \longrightarrow \Omega'$ ima pravo produženje do nekog parcijalnog (konačnog) izomorfizma $f: \Omega \longrightarrow \Omega'$.

DOKAZ: Neka su $u_1, \ldots, u_n$ atomi algebre A i $v_1, \ldots, v_n$ atomi algebre B, gde $hu_i = v_i$. Neka je $a_i = a \wedge u_i$. Pošto je

Ω' bez atoma, postoje $b_1,\dots,b_n \in \Omega'$ tako da važi:

1^o. Ako je $u_i = a_i$ onda $b_i = v_i$.

2^o. Ako je $a_i = 0$ onda $b_i = 0$.

3^o. Ako je $0 < a_i < u_i$ onda $0 < b_i < v_i$.

Neka je $b = \sup_{1\le i\le n} b_i$. Neposredno se dokazuje da je $b \wedge v_i = b_i$.

Dokazujemo sledeći pomoćni iskaz.

TVRDJENJE:

(1) $1'$. $a' \wedge u_i = u_i \Leftrightarrow a_i = 0$ $\quad 1''$. $b' \wedge v_i = v_i \Leftrightarrow b_i = 0$.

(1) $2'$. $a' \wedge u_i = 0 \Leftrightarrow a_i = u_i$. $\quad 2''$. $b' \wedge v_i = 0 \Leftrightarrow b_i = v_i$.

$3'$. $0 < a' \wedge u_i < u_i \Leftrightarrow 0 < a_i < u_i$. $3''$. $0 < b' \wedge v_i < v_i \Leftrightarrow 0 < b_i < v_i$

DOKAZ: $1'$. Neka je $a' \wedge u_i = u_i$. Tada $a' \wedge u_i \wedge a = a \wedge u_i$, tj. $a_i = 0$.

Obrnuto, neka je $a_i = 0$. Tada $a \wedge u_i = 0$, te $a' \vee u_i' = 1$, odakle sledi $a' \wedge u_i = u_i$.

$2'$. Slično kao pod $1'$.

$3'$. Kako je $0 \le a_i \le u_i$, $0 \le a' \wedge u_i < u_i$ to tvrdjenje sledi na osnovu $1'$ i $2'$.

$1''$. Neka je na primer $b_1 = 0$. Tada $b = b_1 \vee \dots \vee b_n = b_2 \vee \dots \vee b_n$, te $b \le v_2 \vee \dots \vee v_n$. Otuda $v_1 \wedge b = 0$, te $v_1 \wedge b' = v_1$. Obrnuto, neka je na primer $b' \wedge v_1 = v_1$. Otuda $v_1 \wedge b = 0$, tj. $(v_1 \wedge b_1) \vee \dots \vee (v_1 \wedge b_n) = 0$, odakle sledi $v_1 \wedge b_1 = 0$. Kako je $b_1 \le v_1$, to $b_1 = 0$.

$2''$. Slično kao pod $1''$.

$3''$. Kako je $0 < b_i \le v_i$, $0 \le b' \wedge v_i$ to tvrdjenje sledi na osnovu $1''$, $2''$.

Dokažimo sada da je $a_i = 0$ ili a_i je atom u $[A, a]$. Neka je z element algebre $[A, a]$. Tada je za neke $x, y \in A$, $z = (x \wedge a) \vee (y \wedge a')$. Otuda $z \wedge a_i = x \wedge a_i = x \wedge a \wedge u_i = a \wedge (x \wedge u_i)$, te pošto je u_i atom u A, tj. $x \wedge u_i = 0$ ili

$x\wedge u_i = u_i$, to $z\wedge a_i = a_i$ ili $z\wedge a_i = 0$. Prema tome a_i je atom u $[A,a]$. Na sličan način se dokazuje da je $a'\wedge u_i = 0$ ili je $a'\wedge u_i$ atom algebre $[A,a]$. Na potpuno sličan način dokazuje mo da su b_i, $b'\wedge v_i$ atomi algebre $[B,b]$ ili su (neki od njih) jednaki 0. Prema izboru elemenata $b_1,\dots,b_n$ i prema 1′ - 3′ , 1"-3" sledi da $a_i \neq 0$ akko $b_i \neq 0$ i $a'\wedge u_i \neq 0$ akko $b'\wedge v_i \neq 0$, te $[A,b]$, $[B,b]$ imaju isti (konačan) broj atoma. Preciznije, taj broj atoma jednak je $p+2q+r$, gde je $p = |\{i \mid a_i = u_i\}|$, $q = |\{i \mid 0 < a_i < u_i\}|$, $r = |\{i \mid a_i = 0\}|$.

Koristićemo se sledećim tvrdjenjem

(2) Neka su A, B konačne Booleove algebre i A_{at}, B_{at} skupovi atoma ovih algebri. Ako je $f_o : A_{at} \xrightarrow[1-1]{na} B_{at}$, tada postoji jedinstven $f: A \xrightarrow{\simeq} B$ tako da $f\restriction A_{at} = f_o$.

Neka je $f_o(a_i) = b_i$, $f_o(a'\wedge u_i) = b'\wedge v_i$ i $f:[A,a] \xrightarrow{\simeq} [B,b]$ koji produžuje f_o. Tada $f(u_i) = f((a\wedge u_i)\vee (a'\wedge u_i)) = f(a\wedge u_i)\vee f(a'\wedge u_i) = f_o(a_i)\vee f_o(a'\wedge u_i) = b_i \vee (b'\wedge v_i) = (b\wedge v_i)\vee (b'\wedge v_i) = v_i$, tj. $f(u_i) = h(u_i)$ te $f\restriction A = h$. $\dashv$

Prema prethodnom, lako se dokazuje da je f odredjeno sa $f(z) = bh(x)\vee b'h(y)$, gde $x,y \in A$. Zaista,

$f(z) = f((x\wedge a)\vee (y\wedge a')) = (fa\wedge fx)\vee (fa'\wedge fy) = (b\wedge hx)\vee (b'\wedge hy)$.

TEOREMA 4.2. Svaki konačan parcijalan izomorfizam $h:\Omega \longrightarrow \Omega'$ produžuje se do nekog beskonačnog parcijalnog izomorfizma $f:\Omega \longrightarrow \Omega'$.

DOKAZ: Konstruišimo sledeći beskonačan diagram

$$\begin{tikzcd}
A = A_o \arrow[d, "h=h_o"', "\int"] & \subseteq & A_1 \arrow[d, "\int"', "h_1"] & \subseteq & A_2 \arrow[d, "\int"', "h_2"] & \subseteq \dots & A_\omega \arrow[d, "\int"', "f"] & \subseteq \Omega \\
B = B_o & \subseteq & B_1 & \subseteq & B_2 & \subseteq \dots & B_\omega & \subseteq \Omega'
\end{tikzcd}$$

$$A_\omega = \bigcup_{n\in\omega} A_n \qquad B_\omega = \bigcup_{n\in\omega} A_n$$

$h_{2i} \subseteq h_{2i+2}$, $h_{2i+1} \subseteq h_{2i+3}$, $f = \bigcup_{i\in\omega} h_{2i} \cup (\bigcup h_{2i+1})^{-1}$

$A_{i+1} = [A_i, a_i]$, $B_{i+1} = [B_i, b_i]$

Elemente a_i, b_i odredjujemo na sledeći način. b_o je proizvoljni element u $\Omega' - B_o$. Prema prethodnoj lemi postoji $a_o \in \Omega$ i $h_1 : [B_o, b_o] \to [A_o, a_o]$ tako da $h_o = h_1^{-1} \restriction B_o$. Primenom prethodne leme prebrojivo mnogo puta dobija se gornji diagram. ⊣

TEOREMA 4.3. Neka su Ω , Ω' prebrojive bezatomične Booleove algebre. tada važi sledeće kompletiranje diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\sim"] & \Omega' \\ A \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r] & B \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

A, B, su konačne Booleove algebre.

Prema tome prebrojiva bezatomična Booleova algebra je homogena.

DOKAZ: Neka su Ω, Ω' uredjene sa tipom ω . Konstruišemo diagram kao u prethodnoj teoremi, s tim ako je i neparan broj onda $a_i = \mu x(x \in \Omega - A_i)$, ako je i paran broj ≥ 2, onda $b_i = \mu x(x \in \Omega' - B_i)$, umesto što smo u prethodnoj teoremi na odgovarajućem mestu birali proizvoljne a_i, b_i.

Dokažimo da je $A_\omega = \Omega$. Pretpostavimo da je $A_\omega \neq \Omega$. Neka je $x = \mu x(x \in \Omega - A_\omega)$. Otuda svi (konačno mnogo) elementi koji prethode x nalaze se u A_ω . Prema tome, svi prethodnici elementa x nalaze se u nekom A_{2n+1} i pošto $x \notin A_\omega$, to $x \notin A_{2n+1}$ i $x = \mu x(x \in \Omega - A_{2n+1})$ te $x \in A_{2n+2}$, što je kontradiktorno $x \in A_\omega$. Prema tome $A_\omega = \Omega$. Slično, $B_\omega = \Omega'$. ⊣

TEOREMA 4.4. Ako su Ω , Ω' prebrojive bezatomične Booleove algebre tada $\Omega \cong \Omega'$.

DOKAZ: Na osnovu teoreme 4.3. važi sledeće kompletiranje diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sim} & \Omega' \\ \cup\! \mid & & \cup\! \mid \\ 2 & \xrightarrow{\sim} & 2 \end{array} \quad \text{te } \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega'. \qquad \dashv$$

Budući da je svaka slobodna Booleova bezatomična, to je onda svaka prebrojiva bezatomična Booleova algebra izomorfna prebrojivoj slobodnoj Booleovoj algebri. Primenom Stoneovog stava dualnosti i $2.1^{o}.3.$ dobijamo da je svaki perfektan metrički Stoneov prostor homeomorfan Cantorovom prostoru 2^{ω} .

TEOREMA 4.5. Booleova algebra $\Omega = \Omega_o$ je univerzalni model u kategoriji Booleovih algebri.

DOKAZ: Neka je B prebrojiva Booleova algebra. Tada je $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$, gde su B_n konačne Booleove algebre. Ako je $B = \{0,1,b_1,b_2,\ldots\}$ može se uzeti da je $B_{n+1} = [B_n, b_{n+1}]$. Ako primenimo polovinu prethodnog cik-cak argumenta dobijamo sledeći diagram

$$\begin{array}{ccccccc} B_o & \subseteq & B_1 & \subseteq & B_2 \subseteq \ldots & & B \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow \\ 2 & \subseteq & C_1 & \subseteq & C_2 \subseteq \ldots & & \Omega \end{array}$$

gde je $B_o = 2$, C_n se odredjuje prema lemi ekstenzije. $\dashv$

Prema ovom tvrdjenju sleduje da je svaki metrički Stoneov prostor homeomorfna slika nekog kvocijentnog prostora Cantorovog prostora.

Primetimo da važi sledeća

4.6. LEMA II o ekstenziji. Neka je $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$, $a \in A'$, $b \in B'$ gde su A, B, A', B' Booleove algebre, i neka je $h: A \xrightarrow{\sim} B$. Pretpostavimo da je ispunjeno $\bigwedge_{x \in A} x \leq a \rightarrow hx \leq b$, $\bigwedge_{x \in A} x \leq a' \rightarrow hx \leq b'$. Tada postoji jedinstven $f: [A,a] \rightarrow [B,b]$ tako da $fa = b$ i $f \restriction A = h$.

DOKAZ: Definišimo $f((a\wedge x)\vee(a'\wedge y)) = (b\wedge h(x))\vee(b'\wedge h(y))$, gde $x,y\in A$. $\dashv$

5. Celularnost, celB

Ovaj odeljak posvećen je cilju: da se odgovori na pitanje prof. Dj. Kurepe: "Da li je celB uvek dostignuto u B?". Pre nego što nešto kažemo o tome, navodimo definiciju i nekoliko svojstva celularnosti i to uglavnom prema /21/, /23/, /27/.

DEF. 5.1. Neka je B Booleova algebra. Za skup $S\subsetneq B$ kažemo da je rastavljen u B akko je 1° $S\neq\emptyset$, 2° $0\notin S$, 3° $\bigwedge_{x,y\in S} x\neq y\rightarrow y\wedge x = 0$.

DEF. 5.2. 1° $\mathrm{cel}B = \sup\{|S| \mid S\subsetneq B,$ S je rastavljen skup u $B\}$,
2° Ako je $a\in B$, $\mathrm{cel}a = \mathrm{cel}B_a$, gde je B_a Booleova algebra inducirana elementom a, tj. $B_a = \langle B_a,\wedge,\vee,{}^{\prime},0,a\rangle$, $B_a=\{x\in B \mid x\leqslant a\}$, $x' = a\wedge x'$. Kažemo da je $a\in B$ konačan ako je $\mathrm{cel}a\in\omega$. Primetimo da je a konačan akko je a konačna suma atoma algebre B.

PRIMEDBA: Za svaki $a\in B-\{0\}$ moguće je uvesti da a ima odredjeno Booleovo svojstvo i to uzimajući da element a ima svojstvo P akko Booleova algebra B_a ima svojstvo P. Primetimo, ukoliko je svojstvo P prvog reda, tj. opisuje se nekom formulom φ jezika Booleovih algebri, tada postoji uniforman prelaz na formulu φ_a tako da $B_a\models\varphi$ akko $B\models\varphi_a$. Preciznije, važi sledeće tvrdjenje: Neka je $\varphi(\vec{x})$ formula u jeziku Booleovih algebri. Tada postoji formula $\psi(y,\vec{x})$ tako da za svaki $a\in B$, $\vec{b}\in B$ takvi da $\vec{b}\leqslant a$, važi $B_a\models\varphi[\vec{b}]$ akko $B\models\psi[a,\vec{b}]$. Formula $\psi(y,\vec{x})$ dobija se relativizacijom formule φ po y, i to na sledeći način. Rekurzijom po složenosti terma definiše se $t^{(y)}$:

$0^{(y)} \doteq 0$

$1^{(y)} \doteq y$

$x^{(y)} \doteq x$, x je promenljiva različita od y.

$(t_1 \wedge t_2)^{(y)} \doteq t_1^{(y)} \wedge t_2^{(y)}$

$(t_1 \vee t_2)^{(y)} \doteq t_1^{(y)} \vee t_2^{(y)}$

$(t')^{(y)} \doteq (t^{(y)})' \wedge y$

Rekurzijom po složenosti formula definiše se $\varphi^{(y)}$:

$(t_1 = t_2)^{(y)} \doteq (t_1^{(y)} = t_2^{(y)})$

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^{(y)} \doteq \varphi_1^{(y)} \wedge \varphi_2^{(y)}$

$(\varphi_1 \vee \varphi_2)^{(y)} \doteq \varphi_1^{(y)} \vee \varphi_2^{(y)}$

$(\neg \varphi)^{(y)} \doteq \neg \varphi^{(y)}$

$(\exists x \varphi)^{(y)} \doteq (\exists x \leq y)\, \varphi^{(y)}$

$(\forall x \varphi)^{(y)} \doteq (\forall x \leq y)\, \varphi^{(y)}$

Tada, $\psi(y,\vec{x}) \doteq \varphi^{(y)}(\vec{x})$, gde je y promenljiva koja nema pojavljivanja u formuli φ . U tom smislu moguće je govoriti na primer o takvim svojstvima kao što su x je atomičan, x je konačan itd. Ako za neko svojstvo P važi: Ukoliko B zadovoljava P, onda $a \in B - \{0\}$ takodje zadovoljava (u smislu prethodne definicije) P, kažemo da je P nasledno svojstvo. Naprimer, gore pomenuta dva svojstva su nasledna.

DEF. 5.3. Booleova algebra $\mathcal{B}$ je celularno homogena akko $\bigwedge_{x \in B} x \neq 0 \longrightarrow \mathrm{cel}x = \mathrm{cel}\mathcal{B}$. Element $a \in B$ je celularno homogen akko je $\mathcal{B}_a$ celularno homogena Booleova algebra.

PRIMEDBA: Medju prvima koji je definisao i proučavao pojam celularnosti u strukturama je prof. Dj. Kurepa, vid. /20/.

Sledeće činjenice dokazane su na primer u /27/.

LEMA 5.4. 1^o Svaki rastavljen skup $S \subseteq B$ sadržan je u nekom maksimalno rastavljenom skupu $S' \subseteq B$.

2^o Rastavljen skup $S \subseteq B$ je maksimalno rastavljen akko $\sup S = 1$.

3^o Ako je B atomična Booleova algebra, tada $\mathrm{cel}B = |\{x \in B \mid x \text{ je atom u } B\}|$.

4^o $|B| \geqslant \aleph_0 \longrightarrow \mathrm{cel}B\ \aleph_0$.

5^o Neka je X regularan topološki prostor i $B = R(X)$. Tada $\mathrm{cel}X = \mathrm{cel}B$, gde $\mathrm{cel}X$ označava toplošku celularnost prostora X. ⊣

LEMA 5.5. $\mathrm{cel}B = \mathrm{cel}B^*$.

DOKAZ: Neka je S rastavljen skup u B i $\mathcal{C} = \{a^* \mid a \in S\}$. Pošto je za $a \in S$ $a \neq 0$, to $a^* \neq \emptyset$. Takodje za $a, b \in S$, $a \neq b$ implicira $a^* \cap b^* = (a \wedge b)^* = 0^* = \emptyset$, te $\mathrm{cel}B \leq \mathrm{cel}B^*$.

Neka je $\mathcal{C}$ rastavljena familija otvorenih nepraznih skupova u B^* i $\mathcal{C}'$ familija otvoreno zatvorenih skupova takvih da svaki $u \in \mathcal{C}$ sadrži tačno jedan $x \in \mathcal{C}'$. Tada za svaki $u \in \mathcal{C}'$ postoji $a \in B$ tako da $u = a^*$ (pošto je $\bigcap_{p \in u} p$ glavni filter u B). Prema tome, $S = \{a \in B \mid a^* \in \mathcal{C}\}$ je rastavljen i $|S| = |\mathcal{C}|$. Otuda $\mathrm{cel}B^* \leq \mathrm{cel}B$. ⊣

POSLEDICA 5.5.1.

1^o Ako je X Stoneov prostor, tada $\mathrm{cel}X = \mathrm{cel}X^*$.

2^o $\mathrm{cel}B = \mathrm{cel}\hat{B}$. ⊣

Kažemo da je $\mathrm{cel}B$ dostignuta u B ako postoji rastavljen $S \subseteq B$ tako da $\mathrm{cel}B = |S|$. Naprimer, za svaki beskonačni kardinal k, $\mathrm{cel}\,\Omega_k = \omega$ te je u ovom slučaju $\mathrm{cel}\,\Omega_k$ dostignuta u Ω_k. Takodje, Ω_k je celularno homogena Booleova algebra i svaki $a \in \Omega_k - \{0\}$ je celularno homogen.

LEMA 5.6. Neka $\mathrm{cel}B$ nije dostignuta u B. Tada postoji $a \in B$ da $\mathrm{cel}a = \mathrm{cel}B$ i a je celularno homogen.

DOKAZ: (1) Neka $\mathrm{cel}B$ nije dostignuta u B. Tada je $\mathrm{cel}B$ granični kardinal. Jer, ako bi bilo $\mathrm{cel}B = k^+$ za neki beskonačni kardinal k, tada za svaki rastavljen $S \subseteq B$, $|S| \leq k$ te $\mathrm{cel}B \leq k$.

Pretpostavimo da tvrdjenje ne važi, tj. neka $\mathrm{cel}B$ nije dostignut u B i za svaki $a \in B$ takav da je $\mathrm{cel}a = \mathrm{cel}B$, a nije celularno homogen.

Neka je $S_0 \subseteq B$ rastavljen u B. Tada za $a \in S_0$, pošto a nije celularno homogen, postoji $b \leq a$ tako da $\mathrm{cel}b < \mathrm{cel}B$. Otuda postoji $S_0' \subseteq B$ tako da za svaki $a \in S_0$ postoji $b \in S_0'$ da je $b \leq a$ $\bigwedge_{x \in S_0'} \mathrm{cel}x < \mathrm{cel}B$ i pritom je S_0' rastavljen skup u B. Primenom Zornove leme postoji maksimalno rastavljen skup $S \supseteq S_0'$ tako da za svaki $x \in S$ $\mathrm{cel}x < \mathrm{cel}B$. Neka je $\mathcal{L} = \sup_{x \in S} \mathrm{cel}x$. Pretpostavimo da je $\mathcal{L} = \mathrm{cel}B$. Prema (1) $\mathcal{L}$ je granični kardinal te postoji niz $\mathcal{L}_\xi$ ($\xi < \mathrm{cf}\mathcal{L}$) rastućih kardinala da $\mathcal{L} = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}\mathcal{L}} \mathcal{L}_\xi$. Neka je $a_\xi \in S$ ($\xi < \mathrm{cf}\mathcal{L}$) niz tako da je $\mathrm{cel}a_\xi > \mathcal{L}_\xi^+$ i S_ξ rastavljeni skupovi u B_{a_ξ} takvi da $|S_\xi| = \mathcal{L}_\xi$. Tada je skup $S = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}\mathcal{L}} S_\xi$ rastavljen u B i $|S| = \mathcal{L}$, tj. $|S| = \mathrm{cel}B$, protivno pretpostavci da $\mathrm{cel}B$ nije dostignuta u B. Otuda

(2) $\mathcal{L} < \mathrm{cel}B$.

Neka je $\beta = (|S| . \mathcal{L})^+$. Pošto je $\mathrm{cel}B$ granični kardinal i $|S| < \mathrm{cel}B$, $\mathcal{L} < \mathrm{cel}B$, to $\beta < \mathrm{cel}B$. Otuda postoji rastavljen $\{d_\xi \mid \xi < \beta\} \subseteq B$.

Neka je $H_c = \{\xi < \beta \mid c \wedge d_\xi \neq 0\}$. Očigledno $\bigcup_{c \in S} H_c \subseteq \beta$. Obrnuto, neka je $\xi \in \beta$. S je maksimalan, to $\sup_{c \in S} c = 1$ i $\sup(c \wedge d_\xi) = d_\xi$, te je za neki $c \in S$ $c \wedge d_\xi \neq 0$, tj. $\xi \in H_c$. Otuda $\beta = \bigcup_{c \in S} H_c$.

Kako je $\{c \wedge d_\xi \mid \xi \in H_c\}$ rastavljen u B_c, to $|H_c| \leq \mathrm{cel}c \leq \mathcal{L}$ (ovde $c \in S$) te $\beta = |\bigcup_{c \in S} H_c| \leq |S| \sup_{c \in S} |H_c| \leq |S| \mathcal{L}$, što je kontradikcija za $\beta = (|S| . \mathcal{L})^+$. ⊣

Prema prethodnom, u svakoj rastavljenoj familiji $S \subseteq B$ postoji $a \in S$, a je c celularno homogen. Specijalno, uzimajući $S = \{a, a'\}$, gde $a \notin \{0, 1\}$, dobijamo da je a ili a' celularno homogen.

TEOREMA 5.7. Neka je B Booleova algebra i $\mathrm{cel}B$ nije dostignuta u B. Tada je $\mathrm{cel}B$ slabo nedostižan kardinal.

DOKAZ: Neka je $\alpha =$ celB. Prema prethodnoj lemi, za neki $a \in B$ cela = celB i a je celularno homogen, tj. za sve $b \in B$ takve da je $0 < b < a$, celb = cela = celB. Primetimo da je α granični kardinal.

Pretpostavimo da je α singularan, tj. $cf\alpha < \alpha$. Neka je $S = \{a_\xi \mid \xi < cf\alpha\}$ rastavljen skup u B_a i α_ξ ($\xi < cf\alpha$) rastući niz kardinala tako da $\alpha = \bigcup_{\xi < cf\alpha} \alpha_\xi$. Pošto je a celularno homogen, to $cela_\xi = \alpha$ te postoji rastavljen S_ξ u a_ξ tako da $|S_\xi| = \alpha_\xi$. Tada je skup $D = \bigcup_{\xi < cf\alpha} S_\xi$ celularno rastavljen i $|D| = cf\alpha \sup_{\xi < cf\alpha} |S_\xi| = \alpha =$ celB, što je kontradikcija (jer celB nije dostignuta u B). Otuda $cf\alpha = \alpha$, tj. α je regularan kardinal. $\dashv$

POSLEDICA 5.7.1. Ako je ZFC konzistentna teorija, tada je i ZFC + Za svaku Booleovu algebru B celB je dostignuta.

DOKAZ: Neka je In: Postoji slabo nedostižan kardinal. Poznato je da $\sim$ ZFC $\vdash$ In, te je ZFC + $\neg$In konzistentna teorija. Prema prethodnoj teoremi tvrdjenje sledi. $\dashv$

U vezi sa prethodnom teoremom može se postaviti pitanje: Ako je k nedostižan kardinal, da li postoji Booleova algebra celularnosti k u kojoj celularnost nije dostignuta?

III DEO

Primena Booleovih algebri u teorijama prvog reda

1. Lindenbaumov niz teorije T

Za teoriju T jezika L pridružuje se odredjena Booleova algebra B_T, takozvana Lindenbaumova algebra teroije T, koja odslikava neka svojstva teorije T. Ovde ćemo uvesti niz Booleovih algebri $B_o(T) \subseteq B_1(T) \subseteq \ldots$, ubuduće Lindenbaumov niz teorije T, po Lindenbaumu koji je ovu konstrukciju uveo.

Kao što ćemo se uveriti, ovaj niz daje više informacija o teoriji T nego algebra B_T. Inače, konstrukcija ovog niza paralelna je konstrukciji algebre B_T i ustvari predstavlja raslojavanje ove algebre.

Neka je $\Sigma_n = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ skup svih formula jezika L čije su sve promenljive neke od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. U skupu Σ_n uvodi se sledeća relacija ekvivalencije $\sim$.

Za $\varphi, \psi \in \Sigma_n$, $\varphi \sim \psi$ akko $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$. Neka je $B_n(T)$ skup svih klasa ekvivalencije formula iz skupa Σ_n, tj. $B_n(T) = \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma_n\}$ gde je sa $\bar{\varphi}$ označena klasa ekvivalencije formule φ .

LEMA 1.1. Neka su $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in \Sigma_n$. Tada:

Ako je $\varphi \sim \psi$, onda $\neg\varphi \sim \neg\psi$

Ako je $\varphi \sim \varphi'$ i $\psi \sim \psi'$ tada $\varphi \wedge \psi \sim \varphi' \wedge \psi'$, $\varphi \vee \psi \sim \varphi' \vee \psi'$

Ako su φ, ψ teoreme teorije T. onda $\varphi \sim \psi$. $\dashv$

Dokaz ove leme ide direktno na osnovu svojstava logičkih operacija i definicije relacije .

Posledica prethodne leme je sledeća teorema.

TEOREMA 1.2. Sledeće operacije u $B_n(T)$ su dobro definisane

$$\bar{\varphi} \wedge \bar{\psi} = \overline{\varphi \wedge \psi} \quad , \quad \bar{\varphi} \vee \bar{\psi} = \overline{\varphi \vee \psi} \quad , \quad \bar{\varphi}' = \overline{\neg\varphi} \quad , \quad 0 = \overline{\neg\theta} ,$$

$1 = \bar{\theta}$, gde je θ teorema teorije T i $\varphi, \psi \in \Sigma_n$.

Model $B_n(T) = \langle B_n(T), \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ je Booleova algebra i važi $B_o(T) \subseteq B_1(T) \subseteq \dots$. ⊣

Navodimo sledeći stav reprezentacije Booleovih algebri, koji ide u prilog primedbe II. $1.2^o.5$.

TEOREMA 1.3. Za svaku Booleovu algebru B postoji kompletna teorija T tako da je $B \cong B_1(T)$.

U dokazu ovog tvrdjenja koristićemo sledeće dve leme:

LEMA 1.4. (Stone) Svaka Booleova algebra izomorfna je polju skupova.

DOKAZ: Prema Stoneovom stavu reprezentacije Booleovih algebri imamo $B \cong B^{**}$, B^{**} je polje skupova. ⊣

LEMA 1.5. Neka se u jeziku L nalaze samo unarni predikati P_o $P_1, \dots$. Tada za svaku formulu $\varphi(\vec{x})$ jezika L postoji iskazna formula $\lambda_\varphi(p_o, \dots, p_m, q_o, \dots, q_n)$, formule bez kvantifikatora $\theta_o(x), \dots, \theta_m(x)$ jezika L i rečenice $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ u L, tako da je $\vdash \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \lambda_\varphi(\theta_o(x), \dots, \theta_m(x), \sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

DOKAZ: Ovde dokazujemo nešto strože tvrdjenje: postoje P_{i_o}, $\dots, P_{i_m} \in L$ i rečenice $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tako da

$\vdash \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \lambda_\varphi(P_{i_o}(x_o), \dots, P_{i_o}(x_k)), P_{i_1}(x_o), \dots, P_{i_1}(x_k), \dots, P_{i_m}(x_k), \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ gde je $\vec{x}$ niz $x_o, \dots, x_k$. Dokaz ovog tvrdjenja sprovodimo indukcijom po složenosti formule φ .

(1) $\varphi(x) \doteq P_i(x)$. Tada λ_φ možemo uzeti iskazno slovo p.

(2) $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \doteq \psi(\vec{x}) \wedge \psi'(\vec{y})$. Po induktivnoj hipotezi postoje λ_ψ, $\lambda_{\psi'}$ o kojima govori lema, te $\lambda_\varphi \doteq \lambda_\psi \wedge \lambda_{\psi'}$.

(3) Ako je $\varphi \doteq \neg\psi$, onda $\lambda_\varphi \doteq \neg\lambda_\psi$.

(4) $\varphi(\vec{y}) = \exists x\, \psi(x,\vec{y})$, x nije u nizu $\vec{y}$. Prema induktivnoj hipotezi postoje formule $\lambda_\psi, P_0, \dots, P_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ tako da

$\vdash \psi(x,\vec{y}) \Leftrightarrow \lambda_\psi(P_0(x), P_0(y_1), \dots, P_0(y_k), \dots, P_m(y_k), \sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Koristeći disjunktivnu normalnu formu imamo

$\vdash \psi(x,\vec{y}) \Leftrightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_t$ gde je ψ_i konjukcija formula oblika $P_i(x)$, $\neg P_i(x)$, $P_i(y_j)$, $\neg P_i(y_j)$, σ_i, $\neg\sigma_i$, recimo

$\vdash \psi \Leftrightarrow \hat{P}_0(x) \wedge \dots \wedge \hat{P}_s(x) \wedge \hat{P}_{s+1}(y_1) \wedge \dots \wedge \hat{P}_{s+t}(y_k) \wedge \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$

gde $\hat{\theta}$ označava jednu od formula θ, $\neg\theta$.

Prema tome,

$\vdash \exists x\, \psi(x,\vec{y}) \Leftrightarrow \exists x\, \psi_1 \vee \dots \vee \exists x\, \psi_t$,

$\vdash \exists x\, \psi_i \Leftrightarrow \exists x(\hat{P}_0(x) \wedge \dots \wedge \hat{P}_s(x)) \wedge \hat{P}_{s+1}(y_1) \wedge \dots \wedge \hat{P}_{s+t}(y_k)$

$\wedge\, \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$.

Prema (1), (2), (3), (4) tvrdjenje sledi. $\dashv$

DOKAZ TEOREME 1.3. Neka je X polje skupova i $L = \{P_x \mid x \in X\}$, gde je P_x unarni predikat. Uzmimo $A = \bigcup X$ i $\mathfrak{A} = \langle A, x \rangle_{x \in X}$ gde $P_x^{\mathfrak{A}} = x$ za sve $x \in X$. Neka je za svaku formulu $\varphi(u)$ jezika L sa najviše jednom slobodnom promenljivom, $x_\varphi = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$ i $T = Th(\mathfrak{A})$.

(1) Jasno je da ako je φ rečenica, tada $x_\varphi = A$ i to u slučaju $\mathfrak{A} \models \varphi$, inače $x_\varphi = \emptyset$, u svakom slučaju $x_\varphi \in X$.

(2) Ako je formula φ bez kvantifikatora, tada $x_\varphi \in X$.

Ovo pomoćno tvrdjenje može se dokazati indukcijom po složenosti formule φ .

Ako je $x_p = P_x^{\mathfrak{A}}$, onda $x_p = x$ te $x_p \in X$. Dalje,
$x_{\varphi\wedge\psi} = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[a]\} = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\} \cap \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \psi[a]\}$ te ako $x_\varphi, x_\psi \in X$ onda $x_{\varphi\wedge\psi} \in X$. Slično,

$x_{\neg\varphi} = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \neg\varphi[a]\} = A - \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$, te ako je $x_\varphi \in X$, onda $x_{\neg\varphi} \in X$.

(3) Ako je $\lambda(p_1,\dots,p_n)$ formula iskaznog računa i $x_{\varphi_i} \in X$, tada za $\varphi \doteq \lambda(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ važi $x_\varphi \in X$. Ovde se dokaz takodje može sprovesti indukcijom po složenosti formule λ, slično kao u (2).

(4) Za $\varphi(u)$ je $x_\varphi \in X$. Dokaz sledi na osnovu (1),(3) i leme 1.5.

(5) Za svaku formulu φ postoji $x \in X$ tako da $T \vdash P_x \Leftrightarrow \varphi$.

Zaista, neka je $x = x_\varphi$. Prema (4) važi $x \in X$. Dalje, $\mathfrak{A} \models P_x[a]$ akko $a \in P_x^{\mathfrak{A}}$ akko $a \in x$ akko $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, te $\mathfrak{A} \models \forall u(P_x(u) \Leftrightarrow \varphi(u))$. Kako je T kompletna teorija i $\mathfrak{A} \models T$, to $T \vdash P_x \Leftrightarrow \varphi$.

Prema prethodnom sledi

(6) $B_1(T) = \{\bar{P}_x \mid x \in X\}$.

Neka je $f: X \longrightarrow B_1(T)$ definisano sa $fx = \bar{P}_x$. Dokazujemo da je f izomorfizam. Primetimo da je na osnovu (6) f preslikavanje <u>na</u>. Neka je $x \neq y$ i pretpostavimo da je $a \in x - y$. Tada $\mathfrak{A} \models P_x[a]$, $\mathfrak{A} \models \neg P_y[a]$ te

$\mathfrak{A} \models \exists u \neg(P_x(u) \Leftrightarrow P_y(u))$ tj. $\mathfrak{A} \models \neg\forall u(P_x(u) \Leftrightarrow P_y(u))$.

Otuda $\bar{P}_x \neq \bar{P}_y$, tj. f je 1 - 1. Dalje, $\mathfrak{A} \models P_{x\cap y}[a]$ akko $a \in P^{\mathfrak{A}}_{x\cap y}$ akko $a \in x \cap y$ akko $\mathfrak{A} \models P_x(\underline{a}) \wedge P_y(\underline{a})$, te $\mathfrak{A} \models P_{x\cap y} \Leftrightarrow (P_x \wedge P_y)$, odakle $\bar{P}_{x\cap y} = \bar{P}_x \wedge \bar{P}_y$. Slično, $\overline{\neg P}_x = \bar{P}_x'$, odakle sleduje da je f izomorfizam. ⊣

U vezi sa prethodnom teoremom mogu se postaviti sledeća pitanja.

1° U kojim slučajevima za prebrojivu Booleovu algebru B postoji kompletna konačno aksiomatska teorija T tako da je $B = B_1(T)$?

2° U kojim slučajevima lanac $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots$ Booleovih algebri je Lindenbaumov niz neke teorije?

2. Kompletna proširenja teorije T

Medju neposrednim posledicama prethodnog razmatranja o Booleovim algebrama spadaju sledeća tvrdjenja.

LEMA 2.1. 1° T je neprotivurečna teorija akko $|B_o(T)| \geqslant 2$.

2° T je neprotivurečna kompletna teorija akko $B_o(T) \cong 2$.

3° $|B_n(T)| \leq \|L(T)\|$, $|B_T| \leq \|L(T)\|$.

DOKAZ: Za 1° i 3° dokazi su jednostavni.

2° Primetimo da je T kompletna teorija akko za svaku rečenicu φ, važi $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg\varphi$. $\dashv$

Označimo sa $\mathcal{T}$ skup svih neprotivurečnih proširenja teorije T u istom jeziku L, tj. $\mathcal{T} = \{S \mid T \subseteq S,\ L(T) = L(S)\}$. (Ovde $T \subseteq S$ označava $S \models T$, odnosno da je svaka aksioma teorije T teorema teorije S). Sa $\mathcal{T}_c$ označavaćemo skup svih kompletnih proširenja teorije T. Neka je F preslikavanje skupa $\mathcal{T}$ definisano sa $F_S = \{\bar{\varphi} \mid S \vdash \varphi\}$, $S \in \mathcal{T}$.

LEMA 2.2. 1° F je 1-1 preslikavanje skupa $\mathcal{T}$ na skup svih filtera u $B_o(T)$.

2° $S \in \mathcal{T}$ je kompletna teorija akko F_S je ultrafilter u $B_o(T)$, tj. $F': \mathcal{T}_c \xrightarrow[1-1]{na} B_o^*(T)$, gde $F' = F \upharpoonright \mathcal{T}_c$.

3° $B_n(S) \cong B_n(T)/I_S$ gde je I_S dualni ideal filtera F_S, $I_S = \{\bar{\varphi} \mid \bar{\varphi}' \in F_S\}$, $S \in \mathcal{T}$.

DOKAZ: Tvrdjenja 1°, 2° su poznate činjenice, inače neposredno slede na osnovu definicije preslikavanja F.

3° Definišimo preslikavanje $k: B_n(T) \longrightarrow B_n(S)$, gde za $\bar{\varphi} \in B_n(T)$, $k(\bar{\varphi})$ je klasa ekvivalencije formule φ u odnosu na teoriju S, tj. $k(\bar{\varphi}) = \{\psi \mid S \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi\}$. Lako se proverava da je k homomorfizam algebre $B_n(T)$ na algebru $B_n(S)$ i da je jezgro homomorfizma k jednak idealu I_S.

Prethodna lema nam dopušta da umesto "S je kompletno proširenje teorije T..." kažemo "S je ultrafilter...".

TEOREMA 2.3. Neka je T teorija prebrojivog jezika. Ako T ima neprebrojivo mnogo kompletnih proširenja, tada T ima 2^{ω} kompletnih proširenja u istom jeziku.

DOKAZ: Prema lemama 2.1., 2.2. važi $|B_o^*(T)| > \omega = |B_o(T)|$, pa prema posledici II. 3.10.1. važi $|B_o^*(T)| \geq 2^{\omega}$. Sa druge strane jasno je da je $|B_o^*(T)| \leq 2^{\omega}$, otuda $|B_o^*(T)| = 2^{\omega}$ Stoga, koristeći prethodne leme, tvrdjenje sledi. $\dashv$

Razmotrimo slučaj $T \subseteq S$ i S je konačno proširenje teorije T, što znači da postoji rečenica θ tako da $S = T \cup \{\theta\}$. U takvom slučaju $CnS = \{\varphi \mid T, \theta \vdash \varphi\} = \{\varphi \mid T \vdash \theta \Rightarrow \varphi\}$ te $F_S = F_\theta = \{\bar{\varphi} \in B_o(T) \mid \bar{\theta} \leq \bar{\varphi}\}$ tj. F_S je glavni filter u $B_o(T)$ generisan formulom θ. Ako je F_S glavni filter u $B_o(T)$, onda je S konačno proširenje teorije T. Otuda imamo sledeću

LEMA 2.4. 1^o S je kompletno nekonačno proširenje teorije T akko S je neglavni ultrafilter u $B_o(T)$.

2^o Teorija T ima beskonačno mnogo kompletnih proširenja akko T ima kompletno ne konačno proširenje.

Ovde se izraz "ne konačno proširenje" koristi u smislu da ne postoji konačan skup rečenica Σ tako da $T \cup \Sigma = S$ (tj. $T \cup \Sigma \vdash \dashv S$). Ako je S beskonačno proširenje teorije T, tj. skup Σ je beskonačan, to još uvek ne znači da je S ne konačno proširenje teorije T.

DOKAZ: 1^o Tvrdjenje sledi prema diskusiji koja prethodi lemi 2.4.

2^o Prema lemi 2.2. ovo tvrdjenje je ekvivalentno sa tim, da je $|B_o^*(T)| \geq \omega$ akko $B_o(T)$ ima neglavni ultrafilter, a ovo poslednje je tačno za Booleove algebre.

PRIMER 2.5. Neka je P Peanova aritmetika. Ni jedno konačno proširenje teorije P nije kompletno, šta više ni jedno rekurzivno proširenje teorije P nije kompletno (Gödel, Rosser).

Otuda, svako kompletno proširenje S teorije P je ne konačno, tj. S je neglavni ultrafilter u P. Prema tome, $B_o(P)$ je prebrojiva bezatomična Booleova algebra, te $B_o(P) \cong \Omega$. Odavde, na primer, sledi $|B_o^*(P)| = 2^\omega$. Slično, za svako rekurzivno proširenje T teorije P, istim argumentom pokazuje se $B_o(T) \cong \Omega$. Medju ovim proširenjima nalaze se razne varijante teorije skupova, pošto je ZF-∞ (ZF bez aksiome beskonačnosti) ekvivalentna sa teorijom P.

Da je zaista $B_o(P) \cong \Omega$, možemo se ovako uveriti. Neka je T konačno konzistentno proširenje teorije P, tj. $T = P \cup \{\mathscr{C}\}$ za neku rečenicu $\mathscr{C}$. Tada "$P \cup \{\mathscr{C}\}$ je konzistentno" tj. Con$(P \cup \{\mathscr{C}\})$ je predstavljivo rečenicom θ teorije P i $\sim P, \mathscr{C} \vdash \theta$, $\sim P, \mathscr{C} \vdash \neg\theta$ (Gödel). Otuda, $P \cup \{\mathscr{C}, \neg\theta\}$ je neprotivurečna teorija. Očigledno $P \vdash \mathscr{C} \wedge \neg\theta \Rightarrow \mathscr{C}$. Ako bi bilo $P \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{C} \wedge \neg\theta$, tada $P \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \neg\theta$, te $P, \mathscr{C} \vdash \neg\theta$, što je kontradikcija. Prema tome $0 < \overline{\mathscr{C} \wedge \neg\theta} < \overline{\mathscr{C}}$, te $B_o(P)$ nema atoma.

PRIMER 2.6. Neka je T teorija polja karakteristike 0. Tada $|B_o^*(T)| = 2^\omega$.

DOKAZ: Neka je $f_p(x) = 1+x+\ldots x^{p-1}$ polinom, gde je p prost broj $\geqslant 3$, i $S = \{f_p(x) \mid p \text{ je prost broj} \geqslant 3\}$. Za svaki $s \subseteq S$ neka je $T_s = T \cup \{\exists x\, f(x) = 0 \mid f \in s\} \cup \{\forall x\, f(x) \neq 0 \mid f \in S-s\}$. Dokažimo da je T_s neprotivurečna teorija. Neka je F podpolje polja kompleksnih brojeva C, generisano rešenjima u C jednačina $f(x) = 0$ za $f \in s$. Otuda

(1) Za $f \in s$, $F \models \exists x\, f(x) = 0$.

(2) Dokažimo da je za $g \in S-s$ $F \models \forall x\, g(x) \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $F \models \exists x\, g(x) = 0$. Neka je $g(x) = 1 + x + \ldots + x^{q-1}$ i $\varepsilon \in F$ tako da $g(\varepsilon) = 0$. Kako rešenja jednačine $x^q - 1 = 0$ obrazuje cilkičnu grupu prostog reda, to je ε generator ove grupe. Prema tome, sva rešenja jednačine $g(x) = 0$ nalaze se u F. Neka je $s = \{h_1, h_2, \ldots\}$. Tada $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, gde je F_n podpolje polja C generisano rešenjima u C jednačina $h(x) = 0$, $h \in \{h_1, \ldots, h_n\}$.

Prema tome za neki $n \in N$

(i) $\quad \varepsilon \in F_n$.

Neka je $h \in \{h_1,\dots,h_n\}$ i p stepen polinoma h. Neka je K podpolje polja kompleksnih brojeva, generisano u C jednačine $h(x) = 0$. Polja F_n, K su konačna algebarska proširenja polja Q i polinom h je ireducibilan nad poljem racionalnih brojeva Q, te $[F_n:Q] = [F_n:K]\cdot[K:Q] = mp$ za neki $m \in N$.

Prema tome, p deli $[F_n:Q]$. Pošto su stepeni polinoma h_i uzajamno prosti to p_i deli $[F_n:Q]$, gde je p_i stepen polinoma h_i. Otuda $[F_n:Q] \geqslant p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Sa druge strane jasno je da je $[F_n:Q] \leqslant p_1\, p_2 \cdots p_n$, te

(ii) $\quad [F_n:Q] = p_1\, p_2 \cdots p_n$.

Kako je $\varepsilon \in F_n$ to prema prethodnom q takodje deli $[F_n:Q]$ tj. q deli $p_1\, p_2 \cdots p_n$, što je kontradikcija jer $q \notin \{p_1,\dots,p_n\}$.

Prema tome, tvrdjenje (2) važi. Otuda $F_s \models T_s$, te je F_s neprotivurečno proširenje teorije T. Sa druge strane, ako je $s \neq s'$ tada postoji na primer, $g \in s - s'$ te $T_s \vdash \exists x\, g(x) = 0$, $T_{s'} \vdash \neg\exists x\, g(x) = 0$. Otuda $T_s \neq T_{s'}$, prema tome, teorija T ima 2^ω kompletnih proširenja. $\dashv$

Iz prethodnog neposredno se dobija sledeće tvrdjenje: Za svaki beskonačan kardinal α, $k_T(\alpha) \geqslant 2^\omega$. Zaista, primetimo da T ima 2^ω prebrojivih modela koji nisu elementarno ekvivalentni. (Prema tome ovi modeli nisu izomorfni). Otuda, prema GLST teorija T ima u svakom kardinalu α 2^ω modela koji nisu elementarno ekvivalentni, pa prema tome i neizomorfnih.

TVRDJENJE 2.7. Neka je $\mathscr{C}$ rečenica koja nije teorema nijednog konačnog kompletnog proširenja teorije T. Tada T ima 2^ω kompletnih proširenja.

DOKAZ: U takvom slučaju φ je neatomičan element u $B_o(T)$, te $B_o(T)$ sadrži beskonačno dualno normalno drvo, pa tvrdjenje sledi prema lemi II.3.7. $\dashv$

TVRDJENJE 2.8. Ako je $B_o^*(T)$ prebrojiv i $T \subseteq S$ ($L(T)$ je prebrojiv), tada je svaka rečenica φ, konzistentna sa teorijom S, teorema nekog konačnog kompletnog proširenja teorije S.

DOKAZ: Kako je $|B_o^*(T)| \leq \omega$, to je $B_o(T)$ superatomična Booleova algebra. Pošto je po lemi 2.2. $B_o(S)$ homomorfna slika algebre $B_o(T)$, to je i $B_o(S)$ atomična Booleova algebra. Otuda, ako je $S \cup \{\varphi\}$ neprotivurečna teorija to je $\bar{\varphi} \neq 0$, te postoji atom $\bar{\theta} \in B_o(S)$ da $\bar{\theta} \leq \bar{\varphi}$. Otuda $S, \theta \vdash \varphi$. $\dashv$

TVRDJENJE 2.9. Ako je $B_o(T)$ beskonačan skup, tada postoji skup rečenica Σ tako da je za svaki $\varphi \in \Sigma$, $T \cup \{\varphi\}$ neprotivurečna teorija, ali za $\psi \in \Sigma$, $\sim\psi \doteq \varphi \longrightarrow T \cup \{\varphi, \psi\}$ je protivurečna teorija. Dualno, postoji Σ' tako da za svaki $\varphi \in \Sigma$ $T \cup \{\varphi\}$ je nekompletna teorija, a za $\psi \in \Sigma'$, $\sim\psi \doteq \varphi$, teorija $T \cup \{\varphi, \psi\}$ je kompletna.

DOKAZ: Kako je $|B_o(T)| \geq \omega$, prema lemi II.5.4.4^o, cel$B_o(T)$ $\geq \omega$, te postoji beskonačan rastavljen $S \subseteq B_o(T)$. Neka je f funkcija izbora za S i $\Sigma = f[S]$. $\dashv$

3. Tip teorije i Lindenbaumov niz

U ovom delu pokazuje se kako se neka svojstva teorije T reflektuju na Lindenbaumov niz teorije T. Šta više, u nekim slučajevima struktura Lindenbaumovog niza u poptpunosti odredjuje ta svojstva. Ubuduće, u ovom delu predpostavljamo da je jezik teorije o kojoj je reč, najviše prebrojiv.

Neka je $\Sigma_n = \Sigma(\vec{x})$ skup formula jezika L. Tada Σ_n odredjuje najmanji filter u $B_n(T)$ koji sadrži $\bar{\Sigma}_n$, to je filter generisan skupom $\bar{\Sigma}_n$. Lako je videti da je za dual tog

filtra, u oznaci Σ_n^*, ispunjeno
$\Sigma_n^* = \bigcap_{\sigma\in\Sigma_n} \bar{\sigma}^* = \{p \in B_n^*(T) \mid \Sigma_n \subseteq p\}$. Ovde je
$\bar{\Sigma}_n = \{\bar{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma_n\}$

Sada navodimo neke algebarske i topološke ekvivalente pojmovima "ispušten", "lokalno ispušten" (vid. I.8). Pre svega primetimo da svaki tip p(x) odredjuje jedinstven ultrafilter $\bar{p} = \{\bar{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C} \in p\}$ u $B_n(T)$. Prema tome može se govoriti o glavnom odnosno neglavnom tipu p, u zavisnosti da li je $\bar{p}$ glavni ili neglavni ultrafilter u $B_n(T)$.

TEOREMA 3.1. 1° Σ_n je lokalno realizovan u T akko je Σ_n sadržan u nekom glavnom filtru u $B_n(T)$

2° Σ_n je lokalno ispušten (u teoriji T) akko je Σ_n^* nigde gust u $B_n^*(T)$.

3° Ako su $\Sigma_{n_1}, \Sigma_{n_2}, \ldots$ skupovi formula lokalno ispušteni u teoriji T, tada je $\bigcup_{i\in\omega} \Sigma_{n_i}^*$ skup prve kategorije u B_T^*.

DOKAZ: 1° Prema definiciji lokalne relaizacije, Σ_n je lokalno realizovan akko postoji $\bar{\mathcal{C}} \neq 0$ da za svaki $\sigma \in \Sigma_n$, $\bar{\mathcal{C}} \leq \bar{\sigma}$, tj. za neki $\bar{\mathcal{C}} \neq 0$, $\bar{\Sigma}_n \subseteq F_{\bar{\mathcal{C}}}$.

2° Prema prethodnom, Σ_n je lokalno realizovan akko postoji $\bar{\mathcal{C}} \neq 0$ da $\bar{\mathcal{C}}^* \subseteq \Sigma_n^*$, tj. Σ_n je lokalno realizovan akko postoji bazni skup (to je upravo $\bar{\mathcal{C}}^*$) sadržan u Σ_n^*. Otuda, Σ_n je lokalno realizovan akko $\widehat{\Sigma_n^*} \neq \emptyset$. Prema tome, Σ_n je lokalno ispušten akko $\widehat{\Sigma_n^*} = \emptyset$. Kako je Σ_n^* zatvoren skup, kao presek zatvorenih skupova, $\Sigma_n^* = \bigcap_{\sigma\in\Sigma_n} \sigma^*$, to tvrdjenje sledi.

3° Ovo tvrdjenje je neposredna posledica tvrdjenja 2°. $\dashv$

Prema prethodnom, stav o ispuštanju tipova (vid. I.8) ima sledeću preformulaciju:

TEOREMA 3.2. Ako je Σ_n^* nigde gust u $B_n^*(T)$, tada je Σ_n ispušten u T. ⊣

Specijalno, ako je T kompletna teorija, prema prethodnom imamo da je za tip p:

POSLEDICA 3.2.1. 1° Tip p je ispušten u T akko je $\bar{p}$ neglavni ultrafilter u $B_n^*(T)$. ⊣

2° Tip p je realizovan u T akko je p izolovana tačaka u $B_n^*(T)$. ⊣

Sada navodimo modelske opise istaknutih vrsta modela teorije T.

LEMA 3.3. Neka je $\mathfrak{A}$ beskonačan model. Tada: $\mathfrak{A}$ je elementarno prost model akko je $\mathfrak{A}$ prebrojivo atomičan model.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka $\mathfrak{A}$ nije atomičan model. Tada $\mathfrak{A}$ realizuje neki neglavni tip p. Neka je $\mathfrak{B}$ model koji ispušta p i $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Pošto je $\mathfrak{A}$ elementarno prost, to $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{B}$ te model $\mathfrak{B}$ realizuje tip p, što je kontradikcija. Pošto je jezik L prebrojiv, prema DLST $\mathfrak{A}$ je prebrojiv.
($\Leftarrow$) Neka je model $\mathfrak{A}$ atomičan.

1° Ako je $\vec{a} \in A$, tada je $\langle \mathfrak{A}, \vec{a} \rangle$ atomičan model. Zaista, ako je $p(\vec{x},\vec{a})$ tip u $L \cup \{a\}$ i $\mathfrak{A} \models p[\vec{b},\vec{a}]$ za neki $\vec{b} \in A$, onda, pošto je $\mathfrak{A}$ atomičan, $p(\vec{x},\vec{y})$ je glavni tip, tj. postoji $\theta(\vec{x},\vec{y})$ da $\mathfrak{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y} (\theta(\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow \mathcal{C}(\vec{x},\vec{y}))$ za sve $\mathcal{C} \in p$, te $\mathfrak{A} \models \forall \vec{x} (\theta(\vec{x},\vec{a}) \Rightarrow \mathcal{C}(\vec{x},\vec{a}))$, tj. $p(\vec{x},\vec{a})$ je glavni tip.

2° Neka je $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Tada za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ da $\langle \mathfrak{A}, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b \rangle$. Zaista, neka je $p(x)$ tip elementa a u $\mathfrak{A}$, tj. $\mathfrak{A} \models p[a]$. Tada je p glavni tip, te pošto je $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, to je p realizovan u $\mathfrak{B}$, tj. za neki $b \in B$, $\mathfrak{B} \models p[b]$. Otuda $\langle \mathfrak{A}, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b \rangle$.

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Primenom 1° i 2° dobija se $\langle \mathfrak{A}, a_1, a_2, \ldots \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b_1, b_2, \ldots \rangle$ te $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{B}$, gde $fa_i = b_i$. ⊣

Prema prethodnom dokazu imamo sledeću posledicu.

POSLEDICA 3.3.1. Neka je $\mathfrak{A}$ atomičan model (ne obavezno prebrojiv) i $S \subseteq A$ najviše prebrojiv skup. Ako je $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, tada postoji parcijalni izomorfizam $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\leq} \mathfrak{B}$, $S \subseteq \mathrm{dom} f$. Otuda $\mathfrak{A}_S \equiv \mathfrak{B}_{f[S]}$. Specijalno, ako su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ prebrojivi elementarno ekvivalentni atomični model, onda $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. $\dashv$

TEOREMA 3.4. Neka je T kompletna teorija. Tada postoji atomičan model $\mathfrak{A} \models T$ akko $\bigwedge_{n\in\omega} B_n(T)$ je atomična Booleova algebra.

DOKAZ: ($\Longrightarrow$) Neka je T kompletna teorija, i $0 < \bar{\theta} \in B_n(T)$. Tada postoji $\mathfrak{B} \models T$ koji realizuje formulu θ. Pošto je model $\mathfrak{A}$ prost, to $\mathfrak{A} \xrightarrow{\leq} \mathfrak{B}$, te za neki $\vec{a} \in A$, $\mathfrak{A} \models \theta[\vec{a}]$. Neka je p tip tako da $\mathfrak{A} \models p[a]$. Otuda $\theta \in p$. Pošto je $\mathfrak{A}$ atomičan model, to je p glavni tip. Prema tome postoji atom algebre $B_n(T)$ koji je $\leq \bar{\theta}$, tj. $B_n(T)$ je atomična Booleova algebra.

($\Longleftarrow$) Neka je $\bar{\Sigma}_n = \{ \bar{\theta}' \mid \bar{\theta}$ je atom u $B_n(T)\}$. Tada Σ_n nije sadržan ni u jednom glavnom filtru, te je Σ_n lokalno ispušten skup formula u T, pa su svi Σ_n ispušteni u nekom modelu $\mathfrak{A} \models T$. Neka je $\bar{p} \in B_n^*(T)$ i $\mathfrak{A} \models p[\vec{a}]$. Ako je p neglavni ultrafilter tada $\Sigma_n \subseteq p$, te $\mathfrak{A} \models \Sigma_n[\vec{a}]$, što je nemoguće. Prema tome, $\mathfrak{A}$ je atomičan model. $\dashv$

TEOREMA 3.5. (Ryll-Nardzewski) Neka teorija T nema konačnih modela. Tada: T je ω-kategorična akko T je kompletna teorija i $\bigwedge_{n\in\omega} B_n(T)$ je konačan skup.

DOKAZ: ($\Longrightarrow$) 1° Teorija T je kompletna prema Vaughtovom testu.

2° Neka je $\mathfrak{A} \models T$, $|A| = \omega$. Kako se svi tipovi realizuju u $\mathfrak{A}$ to je $\bigwedge_{n\in\omega} |B_n^*(T)| \leq \omega$. Otuda, sve Booleove algebre $B_n(T)$ su atomične, pa T ima prebrojiv atomičan model. Zbog ω-kategoričnosti teorije T, $\mathfrak{A}$ je atomičan model. Pretpostavimo da je za neki $n \in \omega$, $|B_n(T)| \geq \omega$. Tada postoji neglavni tip (ultrafilter) $\bar{p} \in B_n^*(T)$, te je p realizovan u nekom prebrojivom $\mathcal{B} \models T$. Zbog ω-kategoričnosti teorije T, $\mathcal{B} \cong \mathfrak{A}$, te je p realizovan u $\mathfrak{A}$, što je nemoguće jer je $\mathfrak{A}$ atomičan model.

($\Leftarrow$) Pošto su sve algebre $B_n(T)$ konačne, to su svi ultrafiltri (tipovi) u $B_n(T)$ glavni. Otuda, svaki model teorije T je atomičan, te su prema posledici 3.3.1. svi prebrojivi modeli teorije T izomorfni. $\dashv$

TEOREMA 3.6. Neka je T kompletna teorija. Tada, T ima prebrojiv zasićen model akko $\bigwedge_{n\in\omega} |B_n^*(T)| \leq \omega$. Otuda, prema posledici II. 3.12.3, teorija T ima prebrojiv zasićen model akko je Lindenbaumov niz teorije T superatomičan.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka je $\mathfrak{A}$ zasićen prebrojiv model teorije T. Tada su svi tipovi teorije T realizovani u modelu $\mathfrak{A}$. Pošto je model $\mathfrak{A}$ prebrojiv, onda $\mathfrak{A}$ realizuje najviše prebrojivo mnogo tipova, pa teorija T ima najviše prebrojivo mnogo tipova.

($\Leftarrow$) Ovaj deo dokaza podelićemo u nekoliko delova.

TVRDJENJE 1^o. Neka je $\bar{p} \in B_n^*(T)$ i $\mathfrak{A} \models T$. Tada postoji $\mathcal{B} \models T$ tako da $\mathcal{B}$ realizuje tip p, $\mathfrak{A} \prec \mathcal{B}$, $|A| = |B|$.

DOKAZ: Neka je $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A}$ model koji realizuje p. Tada postoji $\mathcal{B}'$ da $\mathfrak{A} \prec \mathcal{B}'$ i $\mathfrak{C} \xrightarrow{\leq} \mathcal{B}'$. Jasno je, da je onda za neki $\vec{b} \in B'$, $\mathcal{B}' \models p[\vec{b}]$. Prema DLST postoji $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$ tako da $A \cup \{\vec{b}\} \subseteq B$, $|B| = |A|$. Otuda $\mathcal{B} \models p[\vec{b}]$.

TVRDJENJE 2^o. Postoji prebrojiv slabo zasićen model $\mathcal{B} \models T$ tako da $\mathfrak{A} \prec \mathcal{B}$. (Model $\mathcal{B}$ je slabo zasićen model teorije T, ako $\mathcal{B}$ realizuje sve tipove teorije T).

DOKAZ: Neka su $\vec{c}_p$ nove konstante ($\vec{c}_p = c_1^1, \ldots, c_p^n$) za svaki $\bar{p} \in B_n^*(T)$ i $\Sigma = T \cup (\bigcup\{p(\vec{c}_p) \mid$ p je tip teorije $T\})$. Neka je $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ konačan podskup i $p_1, \ldots, p_k$ tipovi da je $\Sigma_o \subseteq p_1 \cup \ldots \cup p_k$. Prema tvrdjenju 1^o zbog potpunosti teorije T postoji model $\mathfrak{A}' \models T$ koji realizuje tipove $p_1, \ldots, p_k$ pa prema tome i Σ_o. Primenom stava kompaktnosti, skup formula Σ ima model, recimo $\mathcal{L}'$. Kako je teorija T kompletna, to je $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{L}'$, te postoji $\mathcal{L}''$ da $\mathfrak{A} < \mathcal{L}''$ i $\mathcal{L}' \xrightarrow{\prec} \mathcal{L}''$. Primenom DLST sleduje egzistencija modela $\mathcal{L}$ tako da $\mathfrak{A} < \mathcal{L}$, $|B| = \max(|A|, \sup_{n\in\omega}|B_n^*(T)|)$ i model $\mathcal{L}$ realizuje sve tipove teorije T, tj. $\mathcal{L}$ je slabo zasićen model teorije T (primetimo da su $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ takodje slabo zasićeni modeli teorije T). Otuda, ako su ispunjeni uslovi teoreme, model $\mathcal{L}$ je prebrojiv.

TVRDJENJE 3^o. Neka je $\vec{a} \in A$. Tada takodje $\bigwedge_{n\in\omega} |B_n^*(T')| \leq \omega$, gde $T' = Th(\langle \mathfrak{A}, \vec{a}\rangle)$.

DOKAZ: Ako je $\bar{p}(\vec{x},\vec{a}) \in B_n^*(T')$, tada je korespodencija $p(x,a_1,\ldots,a_n) \longrightarrow p(x,y_1,\ldots,y_n)$ 1-1 preslikavanje.

TVRDJENJE 4^o. Postoji model $\mathcal{L}$ tako da $\mathfrak{A} < \mathcal{L}$ i $\mathcal{L}$ realizuje sve tipove nad svakim konačnim nizom u $\mathfrak{A}$. Pritom, $\mathcal{L}$ je prebrojiv model, preciznije $|B| \leq \max(|A|, \sup_{n\in\omega}|B_n^*(T)|)$.

DOKAZ: Neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$ svi konačvi nizovi u A. Prema tvrdjenjima $3^o, 4^o$ postoji sledeći niz prebrojivih modela $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_o < \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_2 \ldots$ tako da $\mathfrak{A}_1$ realizuje sve tipove u $T = Th(\mathfrak{A}_o)$, $\mathfrak{A}_2$ realizuje sve tipove u $Th(\langle \mathfrak{A}_1, \vec{a}_1\rangle)$, $\mathfrak{A}_3$ realizuje sve tipove u $Th(\langle \mathfrak{A}_2, \vec{a}_2\rangle)$, pa prema tome i sve tipove u $Th(\langle \mathfrak{A}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle)$. U opštem slučaju model $\mathfrak{A}_{n+1}$ realizuje sve tipove u $Th(\langle \mathfrak{A}_n, \vec{a}_n\rangle)$ pa prema tome i sve tipove u $Th(\langle \mathfrak{A}_n, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\rangle)$. Tada je $\mathcal{L} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n$.

Sada možemo dokazati samu teoremu. Prema tvrdjenju 4^o postoji elementaran lanac prebrojivih modela $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_o < \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_2 \ldots$ tako da model $\mathfrak{A}_1$ realizuje sve tipove nad konačnim nizovima u $\mathfrak{A}_o$, $\mathfrak{A}_2$ realizuje sve tipove u $\mathfrak{A}_1$ itd. Neka je $\mathcal{L} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n$. Ako je $\vec{b} \in B$ konačan niz, tada za neki $n \in \omega$, $\vec{b} \in A_n$, te je svaki tip nad $\vec{b}$ realizovan u $\mathfrak{A}_{n+1}$, pa prema tome i u $\mathcal{L}$, jer $\mathfrak{A}_{n+1} < \mathcal{L}$.

POSLEDICA 3.6.1. 1^o Ako teorija T ima prebrojiv slabo zasićen model, tada T ima zasićen model.

2^o Ako teorija T ima prebrojiv elementarno univerzalan model, tada T ima zasićen model.

3^o Ako je $k_T(\omega) \leq \omega$, tada T ima prebrojiv zasićen model.

4^o Ako teorija T nema prebrojiv zasićen model, tada $k_T(\omega)=2^{\omega}$.

5^o Ako teorija T ima prebrojiv zasićen model, tada T ima atomičan model.

6^o Svaki model $\mathfrak{A} \models T$ je elementarno upisan u slabo zasićen model koji realizuje sve tipove nad svakim konačnim nizom u $\mathfrak{A}$. Pritom, ako T ima prebrojiv zasićen model i $\mathfrak{A}$ je prebrojiv, onda je $\mathfrak{A}$ elementarno upisan u prebrojiv zasićen model.

U svim ovim slučajevima pretpostavljamo da je teorija T kompletna i da nema konačnih modela.

DOKAZ: Svaki od uslova $1^o, 2^o, 3^o$ implicira $\bigwedge_{n\in\omega} |B_n^*(T)| \leq \omega$, pa prema prethodnoj teoremi, teorija T ima zasićen model.

4^o Ako teorija T nema zasićen model, tada za neki $n \in \omega$, $|B_n^*(T)| > \omega$. Otuda, prema posledici II.3.10.1., $|B_n^*(T)| = 2^{\omega}$. Kako je svaki tip realizovan u nekom prebrojivom modelu teorije T i svaki prebrojiv model realizuje najviše prebrojivo tipova, to $k_T(\omega) \geqslant 2^{\omega}$, te je $k_T(\omega) = 2^{\omega}$.

5^o Ako teorija T ima zasićen model. tada $\bigwedge_{n\in\omega} |B_n^*(T)| \leq \omega$, te su sve Booleove algebre $B_n(T)$ atomične, šta više, prema posledici II.3.12.3. one su superatomične. Prema teoremi 3.4., onda teorija T ima atomičan model.

6^o Ovo tvrdjenje je posledica konstrukcije dokaza prethodne teoreme.

4. Neki primeri

U ovom delu odredićemo nekoliko članova Lindenbaumovog niza nekih konkretnih teorija. U tom cilju dokažimo sledeću

LEMA 4.1. Skup formula $\Sigma(\vec{x})$ konzistentan sa teorijom T odredjuje jedinstven tip akko je teorija $T \cup \Sigma(\vec{c})$ kompletna. Ovde su $\vec{c}$ nove konstante jezika $L(T)$.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka $T \cup \Sigma(\vec{c})$ nije kompletna teorija. Tada postoji formula $\varphi(\vec{c})$, gde je $\varphi(\vec{x})$ formula jezika L, tako da su teorije $T \cup \Sigma(\vec{c}) \cup \{\varphi(\vec{c})\}$, $T \cup \Sigma(\vec{c}) \cup \{\neg\varphi(\vec{c})\}$ neprotivurečne. Prema tome $\Sigma(\vec{x}) \cup \{\varphi(\vec{x})\}$, $\Sigma(\vec{x}) \cup \{\neg\varphi(\vec{x})\}$ su neprotivurečni skupovi formula sa teorijom T, te postoje tipovi $p(\vec{x})$, $p'(\vec{x})$ teorije T koji ih produžuju. Odavde sledi $\varphi \in p$, $\neg\varphi \in p'$, te $p(\vec{x}) \neq p'(\vec{x})$.

($\Leftarrow$) Neka je $T \cup \Sigma(c)$ kompletna teorija. Tada za svaku rečenicu $\varphi(\vec{c})$ jezika $L \cup \{c_1 .,,,. c_n\}$ važi $T \cup \Sigma(\vec{c}) \vdash \varphi(\vec{c})$ ili $T \cup \Sigma(\vec{c}) \vdash \neg\varphi(\vec{c})$. Neka su $p(x)$, $p'(x)$ tipovi teorije T koji produžuju $\Sigma(\vec{x})$. Pretpostavimo da je $p(x) \neq p'(x)$. Otuda postoji formula $\varphi(\vec{x})$ jezika L da je $\varphi \in p(\vec{x})$ i $\neg\varphi \in p'(\vec{x})$. Prema tome, $\Sigma(\vec{c}) \cup \{\varphi(\vec{c})\}$, $\Sigma(\vec{c}) \cup \{\neg\varphi(\vec{c})\}$ su konzistentni skupovi formula sa teorijom T. Pošto je $T \cup \Sigma(\vec{c})$ kompletna teorija, te je $T \cup \Sigma(\vec{c}) \vdash \varphi(\vec{c})$, slično $T \cup \Sigma(\vec{c}) \vdash \neg\varphi(\vec{c})$, što je kontradiktorno neprotivurečnosti $\Sigma(\vec{x})$ sa teorijom T. $\dashv$

Prema prethodnom, skup formula $\Sigma(\vec{x})$ generiše ultrafilter u $B_n(T)$, akko je $T \cup \Sigma(\vec{c})$ kompletna teorija. Jasno je da je taj ultrafilter oblika

$$\bar{p}(\vec{x}) = \{\bar{\theta}(\vec{x}) \mid \bigvee_{k \in \omega} \bigvee_{\varphi_1,\dots,\varphi_k \in \Sigma(\vec{x})} \bar{\theta} \geqslant \varphi_1 \wedge \dots \varphi_k\}$$

POSLEDICA 4.1.1. Neka je $p(\vec{x})$ tip teorije T i $\vec{c}$ nove konstante jezika $L(T)$. Tada je $T \cup p(\vec{c})$ kompletna teorija. $\dashv$

POSLEDICA 4.1.2. Neka je $T \subseteq \Sigma(\vec{x})$. Tada, $\Sigma(\vec{x})$ odredjuje jedinstven tip teorije T akko je $\Sigma(\vec{c})$ kompletna teorija. $\dashv$

PRIMER 4.2. U ovom primeru odredićemo članove $B_0(T)$, $B_1(T)$ teorije T algebarski zatvorenih polja karakteristike 0.

1° Prema poznatom Steinitzovom stavu, T je k-kategorična teorija za neprebrojive kardinale k, pa prema Vaughtovom testu kompletnosti, T je kompletna teorija. Otuda $B_0(T) \cong 2$.

2° Neka je $P(x)$ nesvodljiv polinom nad poljem racionalnih brojeva Q, i $\Sigma_p(c) = T \cup \{P(c) = 0\}$, gde je c nova konstanta jezika $L(T)$. Neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$. Prema tome, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ su algebarski zatvorena polja te realizuju $\Sigma p(x)$, recimo neka je $\mathfrak{A} \models \Sigma_p[a]$, $\mathfrak{B} \models \Sigma_p[b]$, $a \in A$, $b \in B$. Kako je T kompletna teorija to je $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, te postoji algebarski zatvoreno polje $\mathbb{C}$ (karakteristike 0) i elementarna utapanja $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathbb{C}$, $g: \mathfrak{B} \xrightarrow{\preceq} \mathbb{C}$. Neka je $a' = fa$, $b' = gb$. Tada je $P(a') = 0$, $P(b') = 0$. Kako je $P(x)$ nesvodljiv polinom nad Q, prema teoremi o permutaciji korena ireducibilnog polinoma, postoji $h \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ tako da $ha' = b'$. Otuda $\langle \mathbb{C}, a' \rangle \equiv \langle \mathbb{C}, b' \rangle$. Budući da je $\langle \mathfrak{A}, a \rangle \equiv \langle \mathbb{C}, a' \rangle$, $\langle \mathfrak{B}, b \rangle \equiv \langle \mathbb{C}, b' \rangle$ to $\langle \mathfrak{A}, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b \rangle$. Prema tome, svi modeli teorije $\Sigma_p(c)$ su elementarno ekvivalentni, te je $\Sigma_p(c)$ kompletna teorija. Prema lemi 4.1. $\{P(x) = 0\}$ odredjuje jedinstven tip teorije T. Ovaj tip je generisan jednočlanim skupom, te je $\overline{P(x) = 0}$ atom algebre $B_1(T)$. Na sličan način može se dokazati da $\Sigma_\infty(x) = \{P(x) \neq 0 \mid P(x)$ je ireducibilan polinom nad $Q\}$ odredjuje jedinstven tip u teoriji T. Ovaj (neglavni) tip odgovara transcedentnom elementu nad Q.

Sa druge strane očigledno je da svaki tip teorije T sadrži jedan od skupova $\Sigma_p(x)$ ili $\Sigma_\infty(x)$, te $B_1(T) = \{F(\Sigma_p(x)) \mid P(x)$ je ireducibilan polinom nad $Q\} \cup \{F(\Sigma_\infty(x))\}$.

Ovde je $F(S)$ filter generisan skupom S.

Otuda, Booleova algebra $B_1(T)$ ima samo jedan neglavni ultrafilter, te $B_1(T) \cong A$, gde je A Booleova algebra konačnih, komplementarno konačnih skupova nad nekim skupom kardinalnosti ω.

Slično se dokazuje, da su u teoriji T_p (p je prost broj) algebraski zatvorenih polja karakteristike p, svi tipovi odredjeni sa $\{P(x) = 0\}$, $P(x)$ je ireducibilan polinom nad Galoisovim poljem Z_p i $\Sigma_\omega(x) = \{P(x) \neq 0 \mid P(x)$ je ireducibilan polinom nad $Z_p\}$.

LEMA 4.3. Neka je T kompletna teorija i neka se konstanta c može definisati u okviru teorije T, tj. postoji formula $\theta(x)$ jezika $L(T)$ tako da $T \vdash \exists_1 x\, \theta(x)$ i $\theta(c)$ je nova aksioma teorije T. Tada $x = c$ odredjuje jedinstven tip teorije T.

DOKAZ: Neka je $\mathcal{A} \models T$ i $\langle \mathcal{A}, a\rangle \models \theta(\underline{a})$, $\langle \mathcal{B}, b\rangle \models \theta(\underline{b})$, tj. $c^{\mathcal{A}} = a$, $c^{\mathcal{B}} = b$. Zbog kompletnosti teorije T, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ te postoji model $\mathcal{C}$ i $a', b' \in C$ tako da $\langle \mathcal{A}, a\rangle \xrightarrow{\prec} \langle \mathcal{C}, a'\rangle$, $\langle \mathcal{B}, b\rangle \xrightarrow{\prec} \langle \mathcal{C}, b'\rangle$. Kako je $\mathcal{C} \models \theta(a')$, $\theta(b')$, prema svojstvu formule θ važi $a' = b'$ te $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$. Otuda je $T \cup \{\theta(c)\}$ kompletna teorija, jer su svi modeli ove teorije elementarno ekvivalentni, pa prema lemi 4.1. tvrdjenje važi. $\dashv$

Razmotrimo sada teorije koje za modele imaju uredjene strukture, U tom smislu podsećamo na sledeće definicije, od kojih se neke mogu naći na primer u /19/.

Neka je $\langle D, \leq\rangle$ uredjenje i $X \subseteq D$. Tada je $X^+ = \{d \in D \mid \bigwedge_{x \in X} x \leq d\}$, $X^- = \{d \in D \mid \bigwedge_{x \in X} d \leq x\}$. Par (X, Y), gde $X, Y \subseteq D$, je Dedekindov presek ukoliko je $X^+ = Y, Y^- = X$. Presek (X, Y) je netrivijalan ako je $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$. $X \subseteq D$ je segment ukoliko važi $x \leq y \in X \to x \in X$. Sa $\mathrm{ded}(D, \leq)$ označavamo kardinalni broj Dedekindovih preseka u $(D, \leq)$.

TEOREMA 4.4. Neka je $\leq$ simbol jezika $L(T)$ i $T' \subseteq T$ teorija uredjenja mreža, plus moguće neke druge aksiome za $\leq$ i neka je $(D, \leq) \models T'$ tako da je svaki $d \in D$ interpretacija konstante koja se definiše u okviru teorije T. Tada $|B_1^*(T)| \geq \mathrm{ded}(D, \leq)$

DOKAZ: Za svaki Dedekindov presek (U,V) u uredjenju $\langle D,\leq\rangle$, neka je $\Sigma_{UV}(x) = \{\underline{u}\leq x \mid u\in U\}\cup\{x\leq\underline{v}\mid v\in V\}$.

1° Skup formula $\Sigma_{UV}(x)$ je konzistentan sa teorijom T. Zaista, neka je Γ_o konačan podskup od $\Sigma_{UV}(x)$ i $u_o,\dots,u_m\in U$ elementi čija se imena pojavljuju u Γ_o. Kako je $U^+ = V$, to $u_i\leq v_j$, te $a = \sup_{0\leq i\leq m} u_i$ (ili $b = \inf_{0\leq i\leq n} v_i$) realizuje $\Gamma_o(x)$ u svakom modelu teorije T. Prema stavu kompaktnosti $\Sigma_{UV}(x)$ je konzistentan skup formula sa teorijom T.

2° Neka su (U_1,V_1), (U_2,V_2) medjusobno različiti preseci. Tada je, recimo, $U_1\neq U_2$. Kako je $U_1 = V_1^-$, $U_2 = V_2^-$ to je takodje $V_1\neq V_2$. Neka je na primer $d\in U_2 - U_1$. Kako $d\notin U_1$, to za neki $c\in V_1$, (1) $d\nleq c$, odakle sleduje $c\notin V_2$. Pretpostavimo da su $\Sigma_{U_1V_1}(x)$, $\Sigma_{U_2V_2}(x)$ zadržani u istom tipu $p(x)$. Neka je $\mathfrak{A}$ model koji realizuje $p(x)$, recimo, $\mathfrak{A}\models p[a]$. Tada:

$$\bigwedge_{u\in U_1}(u\leq a),\quad \bigwedge_{v\in V_1}(a\leq v),\quad \bigwedge_{u\in U_2}(u\leq a),\quad \bigwedge_{v\in V_2}(a\leq v).$$

Otuda, pošto je $d\in U_2$, $c\in V_1$, važi $d\leq a\leq c$, tj. $d\leq c$, što je kontradiktorno sa (1). Prema tome, ako su $p(x)$, $q(x)$ tipovi koji respektivno sadrže $\Sigma_{U_1V_1}(x)$, $\Sigma_{U_2V_2}(x)$, onda $p\neq q$. Prema prethodnom, tvrdjenje sledi. $\dashv$

POSLEDICA 4.4.1. Ako je u prethodnoj teoremi $\langle D,\leq\rangle$ linearno, onda $|B_1^*(T)|\geq |\{I\subseteq D\mid I \text{ je segment u } \langle D,\leq\rangle\}|$.

DOKAZ: Svaki segment I odredjuje jedan presek (I,I^+), gde se I^+ svodi na $D - I$ (ako ne postoji $\sup_D I$), odnosno $(D - I)\cup\{\sup_D I\}$. Takodje, lako je proveriti da je svaki presek (U,V) u ovom slučaju oblika (I,I^+), gde je I odgovarajući segment u $\langle D,\leq\rangle$. $\dashv$

PRIMER 4.5. Neka je T teorija uredjenih polja. Tada se racionalni brojevi mogu definisati u okviru teorije T; ako je $q \in Q$, tada $q = \frac{1+\ldots+1}{\underbrace{1+\ldots+1}_{n}}$. Otuda, prema prethodnoj teoremi $|B_1^*(T)| \geq \mathrm{ded}(Q, \leq) = 2^\omega$, te ova teorija ima 2^ω prebrojivih modela. Neka je S teorija realnih zatvorenih uredjenih polja. Ova teorija je kompletna (A. Tarski, A. Robinson). Prethodni argument može se primeniti i u ovom slučaju, te je $|B_1^*(S)| = 2^\omega$. Prema tome, S nema prebrojiv zasićen model. Slična je situacija za ma koje kompletno proširenje $T' \supseteq T$, prema tome, $|B_1^*(T')| = 2^\omega$. Otuda ne postoji prebrojivo uređeno zasićeno polje. Takodje, $k_{T'}(\omega) = 2^\omega$.

PRIMER 4.6. Neka je T teorija linearno uredjenih, komutativnih, deljivih grupa: $L(T) = \{+, 0, \leq\}$

T = Teorija komutativnih grupa + aksiome linearnih uredjenja + $(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z) + \bigwedge_{m \in \omega - \{0\}} \forall y \, \exists x \; \underline{m}x = y$, gde $\underline{m}x = x + \ldots + x$ (m puta).

Primetimo da je $\underline{m}$ ustvari jedna unarna operacija definisana u okviru teorija T. Za svaki $q \in Q$, $q = \frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$, takodje definišemo unarnu operaciju dodajući aksiomu $qx = y \Leftrightarrow \underline{m}x = \underline{n}y$.

Neka je I netrivijalni segment u Q, gde $1 \in I$ i neka je $\Sigma_I(x,y) = \{0 < x, x < y\} \cup \{\underline{q}x < y \mid q \in I\} \cup \{\underline{q}x \geq y \mid q \in Q - I\}$.

Ako je $I \neq I'$, tada je, recimo, $I \subseteq I'$ (u linearnom uredjenju segmenti su linearno uredjeni u odnosu na $\subseteq$). Otuda je za neki $q_0 \in I' - I$ i $\varphi(x,y) \doteq \underline{q}_0 x < y$ ispunjeno $\varphi \in \Sigma_{I'}$ i $\neg\varphi \in \Sigma_I$, te su tipovi p', p koji redom sadrže $\Sigma_{I'}$, Σ_I medjusobno različiti. Otuda, $|B_2^*(T)| \geq \mathrm{ded}(Q, \leq) = 2^\omega$. Teorija T je kompletna (u to ćemo se kasnije uveriti) te prema teoremi 3.6. T nema prebrojiv zasićen model i $k_T(\omega) = 2^\omega$.

Primetimo da je za svaki netrivijalni segment I, $\Sigma_I(x,y)$ konzistentan skup formula sa teorijom T. Zaista,

$\Sigma_I(x,y)$ je realizovan u uredjenoj grupi realnih brojeva.

Do sada smo imali prilike da vidimo uzajamne odnose svojstava teorije i njenog Lindenbaumovog niza. Prirodno je da se za dati model $\mathfrak{A}$ posmatra Lindenbaumov niz teorije $Th(\mathfrak{A})$. Medjutim, Lindenbaumov niz ove teorije ne daje specifične informacije o samom modelu $\mathfrak{A}$. Iz tog razloga, pogodno je da se u razmatranje uključe i elementi modela $\mathfrak{A}$, tj. proučavamo Lindenbaumov niz kompletnog diagrama modela $\mathfrak{A}$, $T(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{A}_A)$. U tom smislu uvodimo sledeću

DEFINICIJA 4.7. $B_n(\mathfrak{A}) = B_n(T)$, gde $T = T(\mathfrak{A})$. Sa $B(\mathfrak{A})$ označićemo Booleovu algebru $B_1(\mathfrak{A})$.

Ilustrujmo ove pojmove na sledećem primeru

PRIMER 4.8. Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \leq, \ldots \rangle$ linearno uredjena struktura i $T = T(\mathfrak{A})$. Jasno je, da su svi elementi skupa A interpretacije konstanti teorije T, $a \in A$ je interpretacija svog imena $\underline{a}$. Prema tome, možemo primeniti teoremu 4.4. odnosno posledicu 4.4.1., te $|B^*(\mathfrak{A})| \geq ded(A, \leq)$. Neka je na primer, $\mathfrak{A} = \langle Q, \leq \rangle$ uredjenje racionalnih brojeva, Kako je u ovom slučaju $ded(\mathfrak{A}) = 2^{\omega}$ to $B^*(\mathfrak{A}) = 2^{\omega}$, jer je $B(\mathfrak{A})$ prebrojiva Booleova algebra, pa prema tome $|B^*(\mathfrak{A})| \leq 2^{\omega}$.

Interesantno je da u ovom slučaju možemo u potpunosti da odredimo $B(\mathfrak{A})$, preciznije važi

TVRDJENJE 4.9. Neka je I segment u $\mathfrak{A} = \langle Q, \leq \rangle$. Tada

$$\Sigma_I(x) = \{\underline{q} < x \mid q \in I\} \cup \{x < \underline{q} \mid q \in Q - I\}$$ odredjuje jedinstven tip teorije $T(\mathfrak{A})$. Svi tipovi ove teorije odredjeni su skupovima formula oblika $\Sigma_q(x) = \{x = \underline{q}\}$, $q \in Q$, ili $\Sigma_I(x)$ za neki segment I u Q.

DOKAZ: 1° Da $\Sigma_q(x)$ i $\Sigma_I(x)$ odredjuju jedinstvene tipove u $T(\mathfrak{A})$, možemo se uveriti na sledeći način. Pre svega, primetimo da je $T(\mathfrak{A})$ kompletna teorija

(1) Formula $x = \underline{q}$ odredjuje jedinstven tip prema lemi 4.3.

(2) Neka je $\varphi(x) \in p(x)$, i neka su $p(x)$, $p'(x)$ tipovi koji sadrže $\Sigma_I(x)$.

Teorija linearnog gustog uredjenja bez krajeva dopušta eliminaciju kvantifikatora i $\mathfrak{A}$ je model ove teorije. Otuda, može se videti da je $\mathfrak{A}_Q \models \mathcal{C}(x) \Longleftrightarrow \theta(x)$, gde $\theta(x) = \theta_o \vee \ldots \vee \theta_n$, $n \in \omega$, θ_i su konjunkcije nekih formula iz $\Sigma_I(x)$. Prema tome, $\theta(x)$ je element fitra F u $B(\mathfrak{A})$ generisanog skupom $\bar{\Sigma}_I(x)$. Kako je $\bar{p}'(x)$ filter i $\bar{\Sigma}_I(x) \subseteq \bar{p}'(x)$, to onda $F \subseteq \bar{p}'(x)$ te $\bar{\mathcal{C}}(x) \in \bar{p}'(x)$. Prema tome, $\mathcal{C}(x) \in p'(x)$. Otuda $p(x) \subseteq p'(x)$, te pošto je reč o tipovima, $p(x) = p'(x)$.

2^{o} Dokažimo da je svaki tip $p(x)$ odredjen nekim $\Sigma_q(x)$ ili $\Sigma_I(x)$. Ako je $(x = \underline{q}) \in p(x)$ za neki $q \in Q$, prema lemi 4.3. $p(x)$ je odredjen formulom $x = q$. Zato pretpostavimo da je $(x \neq \underline{q}) \in p(x)$ za sve $q \in Q$. Neka je $I = \{q \in Q \mid (\underline{q} < x) \in p(x)\}$ Neposredno se dokazuje da je I segment. Prema izboru skupa I, $\Sigma_I(x) \subseteq p(x)$. Prema 1^{o} $p(x)$ je jedinstven tip koji sadrži $\Sigma_I(x)$. $\dashv$

Primetimo da smo u poslednjem dokazu koristili samo činjenicu da je $\mathfrak{A}$ model teorije linearnog gustog uredjenja bez krajeva, pa prema tome, važi slično tvrdjenje za ma koji model ove teorije. Otuda

POSLEDICA 4.9.1. Neka je $\mathfrak{A} = (A, \leqslant)$ model linearnog gustog uredjenja bez krajeva. Tada $|B^*(\mathfrak{A})| = \mathrm{ded}(\mathfrak{A})$.

DEFINICIJA 4.10. Neka je T kompletna teorija u prebrojivom jeziku. Za beskonačan kardinalno broj k uvodi se funkcija stabilnosti teorije T, $S_T(k) = \sup\{|B^*(\mathfrak{A})| \mid \mathfrak{A} \models T, |A| = k\}$. Teorija T je k-stabilna ukoliko je $S_T(k) = k$. Teorija T je nestabilna ukoliko je za sve beskonačne kardinale $S_T(k) > k$.

Primetimo da je na osnovu prethodne definicije za sve kardinale k, $k \leqslant S_T(k) \leqslant 2^k$.

PRIMER 4.11. Neka je T teorija gustog uredjenja bez krajeva.

Funkcija stabilnosti $S_T(k)$ ove teorije stoji u interesantnoj i prirodnoj vezi sa Kurepinim brojem $K_u(k)$ (Prof. Dj. Kurepa je uveo ovaj broj i razmatrao neka njegova svojstva 1935.g. u /20/, (v. str. 3o-33). Izmedju ostalih, E.M. Krasner je takodje razmatrao svojstva funkcije $K_u(k)$). Broj $K_u(k)$ definiše se na sledeći način: $K_u(k) = \sup\{\mathrm{ded}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \models T, |A| = k\}$. Ovaj broj može se takodje uvesti na sledeće načine:

1° $K_u(k) = \sup\{|B| \mid \mathfrak{B}$ je model gustog uredjenja bez krajeva koji sadrži u sebi gust skup kardinalnosti $k\}$.

2° Neka je $\mathfrak{A}$ gusto uredjenje bez krajeva. Tada:

$K_u(\mathfrak{A}) = \sup\{|B| \mid \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, A je gust u $\mathfrak{B}\}$

$K_u(k) = \sup\{K_u(\mathfrak{A}) \mid |A| = k$, $\mathfrak{A}$ je gusto uredenje bez krajeva$\}$.

Prema posledici 4.9.1. neposredno sleduje $S_T(k) = K_u(k)$

Dokažimo da je T nestabilna teorija. Za to je dovoljno dokazati da je $K_u(k) > k$, odnosno da postoji $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$, model teorije T, tako da je $|A| = k$ i $K_u(\mathfrak{A}) > k$. Neka je δ najmanji kardinalni broj tako da je $2^\delta > k$ i $\leq$ leksikografsko uredjenje skupa ${}^\delta 2$. Dalje, neka je A skup svih nizova iz ${}^\delta 2$ koji se od nekog mesta završavaju sa 000..., odnosno $A = \{f \in {}^\delta 2 \mid \bigvee_{\alpha<\delta} \bigwedge_{\beta>\alpha} f\beta = 0\}$. Tada se lako proverava da važi :

(1) $\mathfrak{A}$ je model teorije T.

(2) $|A| \leq \sum_{\xi<\delta} 2^\xi \leq \sum_{\xi<\delta} k \leq k$, odnosno $|A| \leq k$.

(3) A je gust u skupu B = ${}^\delta 2$ - {nizovi iz skupa ${}^\delta 2$ koji se od nekog mesta završavaju sa 111... }.

Sam skup B je gusto uredjen (i bez krajeva) leksikografskim uredjenjem, tj. važi $\langle B, \leq \rangle \models T$. Prema (3) sleduje $\mathrm{ded}(\mathfrak{A}) = \mathrm{ded}(\mathfrak{B})$. Kako je $|B| = 2^\delta$, to $\mathrm{ded}(\mathfrak{B}) \geq 2^\delta$, odnosno $K_u(\mathfrak{A}) \geq 2^\delta > k$. $\dashv$

U vezi sa stabilnošću teorija važi sledeća teorema:

TEOREMA 4.12. (S. Shelah) Ukoliko je teorija T kompletna nestabilna i $|L(T)| \leq \omega$, onda je za sve kardinale $\lambda > \omega$, $k_T(\lambda) = 2^{\lambda}$.

Otuda, na primer teorija $T = Th(\langle Q, \leq \rangle)$ ima 2^k neizomorfnih modela u svakom neprebrojivom kardinalu k.

Sledeće tvrdjenje ukazuje na čitavu klasu nestabilnih teorija.

TEOREMA 4.13. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \leq, \ldots \rangle$ beskonačan model prebrojivog jezika, gde je $\langle A, \leq \rangle$ najmanje mreža. Tada je teorija $T = Th(\mathcal{A})$ nestabilna.

DOKAZ: Neka je $\langle X, \leq \rangle$ gusto uredjenje tako da $|X| = k$ i $ded(X, \leq) > k$, (na primer, za $\langle X, \leq \rangle$ možemo uzeti model $\mathcal{A}$ iz primera 4.11). Svaki konačno generisani podmodel modela $\langle X, \leq \rangle$ je konačan i utapa se u $\mathcal{A}$. Prema stavu kompaktnosti postoji model $\mathcal{B}' \equiv \mathcal{A}$, tako da $\langle X, \leq \rangle \subseteq \mathcal{B}'$, (u vezi sa ovim videti posledicu IV.4.1.1.). Prema DLST postoji model $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$, $\mathcal{B} \models T$, tako da $X \subseteq B$ i $|B| = k$. Tada za svaki segment $I \subseteq X$ postoji tip p(x) koji sadrži

$$\Sigma_I(x) = \{\underline{a} < x \mid a \in I\} \cup \{x < \underline{a} \mid a \in X - I\},$$

stoga prema teoremi 4.4. važi $|B^*(\mathcal{B})| \geqslant ded(\langle X, \leq \rangle) > k$. ⊣

Medju važnije teorije na koje se može primeniti prethodna teorema su sledeće:

1° Teorija komutativnih, potpuno uredjenih, deljivih grupa.

2° Teorija uredjenih, realnih, algebarski zatvorenih polja.

3° Ma koje kompletno proširenje teorije beskonačnih Booleovih algebri, kao na primer, teorija bezatomičnih Booleovih algebri, ili, teorija beskonačnih atomičnih Booleovih algebri.

Izmedju ostalog, navodimo jednostavan dokaz tvrdjenja koji ima važnu ulogu u dokazu Morlyeovog stava kategoričnosti (I.10.4.).

TEOREMA 4.14. (Morly) Neka je T kompletna teorija prebrojivog jezika. Ako je teorija T ω-stabilna, tada je T k-stabilna za sve beskonačne kardinale k, drugim rečima važi:

$$S_T(\omega) = \omega \longrightarrow \bigwedge_{k \geq \omega} S_T(k) = k.$$

DOKAZ: Pretpostavimo da za neki kardinal $k > \omega$ teorija T nije k-stabilna. U takvom slučaju postoji model $\mathfrak{A} \models T$ tako da $|A| = k$ i $|B^*(\mathfrak{A})| > k$. Budući da je $|B(\mathfrak{A})| = k$, to je $|B^*(\mathfrak{A})| > |B(\mathfrak{A})|$ pa prema posledici II.3.10.2. postoji $B \subseteq B(\mathfrak{A})$ tako da $|B| = \omega$ i $|B^*| = 2^{\omega}$. Neka je $X = \{a \in A \mid \underline{a}$ ima pojavljivanja u skupu $B\}$. Dalje, neka je $\mathfrak{A}'$ prebrojiv model tako da je $X \subseteq A' \subseteq A$ i $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}$ (model $\mathfrak{A}'$ postoji prema DLST). Tada $B \subseteq B_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}'_X)) = B_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_X))$. Zaista, ako je $\overline{\varphi} \in B$, tada $\overline{\varphi} \in B(\mathfrak{A})$. Neka važi $\mathfrak{A}_A \models \Psi(\underline{\vec{c}}) \Leftrightarrow \varphi(\underline{\vec{c}})$, gde je $\vec{c} \in X$. Budući da je $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}$ i $\vec{c} \in A'$, to $\mathfrak{A}'_X \models \Psi(\underline{\vec{c}}) \Leftrightarrow \varphi(\underline{\vec{c}})$, odnosno $\overline{\Psi}(\underline{\vec{c}}) = \overline{\varphi}(\underline{\vec{c}})$ u algebri $B_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}'_X))$. Stoga $\overline{\varphi} \in B_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}'_X))$, odnosno $B \subseteq B_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}'_X))$. Otuda $|B_1^*(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}'_X))| \geq |B^*| = 2^{\omega}$, te $|B^*(\mathfrak{A}')| > \omega$, $|A'| = \omega$, $\mathfrak{A}' \models T$, pa teorija T nije ω-stabilna, suprotno pretpostavci. $\dashv$

IV DEO

Raslojavanje Lindenbaumovog niza teorije

1. n-elementarni podmodeli

U prethodnom delu prikazano je kako se Lindenbaumova algebra odredjene teorije razlaže na odgovarajući Lindenbaumov niz Booleovih algebri. Prirodno je postaviti pitanje da li se Booleove algebre $B_n(T)$ mogu dalje raslojiti. U cilju da odgovorimo na ovo pitanje, podsetimo se na Π°_n, Σ°_n hijerarhiju formula predikatskog računa prvog reda.

Neka je L neki odredjen jezik. Navodimo induktivnu definiciju Π°_n, Σ°_n formula:

$$\Pi^\circ_o = \Sigma^\circ_o = \{\varphi \mid \varphi \text{ je formula bez kvantifikatora jezika } L\}$$

$$\Pi^\circ_{n+1} = \{\forall x_1 \dots x_m \varphi \mid \varphi \in \Sigma^\circ_n,\ m \in \omega\}$$

$$\Sigma^\circ_{n+1} = \{\exists x_1 \dots x_m \varphi \mid \varphi \in \Pi^\circ_n,\ m \in \omega\}$$

Stav I.2.3. je jedan od osnovnih koji se odnosi na ovu hijerarhiju formula. Stoga, prema ovom stavu, svaka formula φ jezika L ekvivalentna je nekoj formuli koja pripada jednom od skupova Σ°_n, Π°_n. U takvom slučaju kažemo da je φ Σ°_n odnosno Π°_n formula. Ubuduće, umesto Π°_n, Σ°_n formula pisaćemo Π_n, Σ_n formula. Neka je T teorija jezika L. Formula φ jezika L je $\Pi_m(T)$ formula ($\Sigma_m(T)$ formula) ukoliko postoji $\psi \in \Pi_m$ (resp. $\psi \in \Sigma_m$) tako da je $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$

DEFINICIJA 1.1. $\Pi_{n,m}(T) = B_n(T) \cap \bar{\Pi}_m = B_n(T) \cap \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \Pi_m\}$,

$\Sigma_{n,m}(T) = B_n(T) \cap \bar{\Sigma}_m$.

LEMA 1.2. 1° $B_n(T) = \bigcup_{m\in\omega} \Pi_{n,m}(T) = \bigcup_{m\in\omega} \Sigma_{n,m}(T)$.

2° $\Pi_{n,m}(T)$, $\Sigma_{n,m}(T)$ su podmreže Booleove algebre $B_n(T)$.

3° $\mathcal{C}$ je Π_n formula akko je $\neg\mathcal{C}$ Σ_n formula.

4° $\Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1}$, $\Sigma_n \subseteq \Pi_{n+1}$, $n\in\omega$.

DOKAZ: 1° Ovo tvrdjenje je posledica stava I.2.3.

2° Budući da je konačna konjunkcija Π_n (resp. Σ_n) formula takodje Π_n(resp. Σ_n) formula ,tvrdjenje sledi.

3° Primetimo da negacija menja kvantifikator $\forall$ u $\exists$ i obrnuto.

4° Ako na Π_n formulu $\mathcal{C}$ dodamo blok egzistencijalnih kvantifikatora koji prazno deluju, dobićemo Σ_{n+1} formulu ekvivalentnu formuli $\mathcal{C}$.

DEFINICIJA 1.3. Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ modeli jezika L.

1° Model $\mathcal{A}$ je Π_n (resp. Σ_n) podmodel modela $\mathcal{B}$ akko je $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ i za svaku Π_n (resp. Σ_n) formulu $\mathcal{C}$ i $\vec{a}\in A$ važi: $\mathcal{A}\models\mathcal{C}[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{B}\models\mathcal{C}[a]$. U takvom slučaju pišemo $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(\Pi_n)$, (resp. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(\Sigma_n)$).

2° Model $\mathcal{A}$ je Π_n (resp. Σ_n) elementarni podmodel modela $\mathcal{B}$ akko $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ i za svaku Π_n(resp. Σ_n) formulu $\mathcal{C}$ i $\vec{a}\in A$ važi: $\mathcal{A}\models\mathcal{C}[\vec{a}]$ akko $\mathcal{B}\models\mathcal{C}[\vec{a}]$. U takvom slučaju $\mathcal{A}\prec\mathcal{B}(\Pi_n)$, odnosno $\mathcal{A}\prec\mathcal{B}(\Sigma_n)$.

U gore opisanim slučajevima takodje kažemo: $\mathcal{B}$ je Π_n (resp. Σ_n) ekstenzija (proširenje) modela $\mathcal{A}$.

LEMA 1.4. 1° Ako je $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(\Pi_n)$, tada za svaku Σ_n formulu i $\vec{a}\in A$ važi: $\mathcal{B}\models\mathcal{C}[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{A}\models\mathcal{C}[\vec{a}]$.

2° Ukoliko je $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(\Sigma_n)$, onda za svaku Π_n formulu $\mathcal{C}$ i $\vec{a}\in A$ važi: $\mathcal{B}\models\mathcal{C}[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{A}\models\mathcal{C}[\vec{a}]$.

3° Ako je $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(\Pi_n)$ i $\mathcal{C}$ je Π_{n+1} rečenica i $\mathcal{B}\models\mathcal{C}$, onda $\mathcal{A}\models\mathcal{C}$.

4° $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$ akko $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Sigma_n)$.

DOKAZ: 1° Neka je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$ i $\varphi(\vec{x})$ Σ_n formula, $\vec{a} \in A$.

Pretpostavimo da je $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}]$ i nije $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Otuda $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$. Kako je $\neg\varphi$ Π_n formula, to je onda $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[\vec{a}]$, što je kontradikcija.

2° Slično kao pod 1°.

3° Neka je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$ i φ Π_{n+1} rečenica. Pretpostavimo da je $\mathfrak{B} \models \varphi$. Budući da je $\varphi \doteq \forall\vec{x}\,\psi$ za neku Σ_n fomrulu ψ, to je za proizvoljni niz $\vec{a} \in A$ $\mathfrak{B} \models \psi[\vec{a}]$. Pretpostavimo da nije $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$. Stoga je $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{a}]$. Pošto je $\neg\psi$ Π_n formula, to je $\mathfrak{B} \models \neg\psi[\vec{a}]$, što je kontradikacija, te važi $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$. Otuda $\mathfrak{A} \models \forall x\,\psi$, odnosno $\mathfrak{A} \models \varphi$.

4° Dokažimo da $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Sigma_n)$ implicira $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$. Neka je $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Sigma_n)$ i φ Π_n formula. Tada je $\neg\varphi$ Σ_n formula te važi:

Za sve $\vec{a} \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \neg\varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi[\vec{a}]$,

za sve $\vec{a} \in A$ $\quad \sim \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \sim \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}]$,

za sve $\vec{a} \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models [\vec{a}]$,

Prema tome $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$

Na sličan način dokazujemo implikaciju u drugu stranu. $\dashv$

Poslednje tvrdjenje nam dopušta da uvedemo označavanje $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$ umesto $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$, odnosno $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}\,(\Sigma_n)$. Ukoliko je $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$ kažemo da je model $\mathfrak{A}$ n-elementarni podmodel modela $\mathfrak{B}$.

LEMA 1.5. 1° $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$ akko $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,(\Pi_n)$ i $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,(\Sigma_n)$.

2° $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,(\Pi_{n+1}) \longrightarrow \mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$.

3° $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,(\Sigma_{n+1}) \longleftrightarrow \mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$.

4° Ako je $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$, tada za svaku Π_{n+1} formulu φ i sve $\vec{a} \in A$ važi: $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}] \longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$.

DOKAZ: 1° ($\Rightarrow$) Tvrdjenje sledi po definiciji $\prec_n$.

($\Leftarrow$) Neka je φ Σ_n formula i $\vec{a} \in A$ tako da $\mathcal{B} \models \varphi[\vec{a}]$. Pretpostavimo da nije $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Stoga je $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$. Budući da je $\neg\varphi$ Π_n formula i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Pi_n)$, to je onda $\mathcal{B} \models \neg\varphi[\vec{a}]$, što je kontradikcija prema $\mathcal{B} \models \varphi[\vec{a}]$. Otuda, $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}]$ odnosno za svaku Σ_n formulu φ i $\vec{a} \in A$ važi: $\mathcal{B} \models \varphi[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Po pretpostavci je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Sigma_n)$ te $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$.

2° Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Pi_{n+1})$. Budući da je svaka Π_n, odnosno Σ_n, formula takodje Π_{n+1} formula, to je onda $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Pi_n)$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Sigma_n)$, te prema 1° sledi $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$.

3° ($\Rightarrow$) Slično kao u 2°.

($\Leftarrow$) Neka je $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$ i $\varphi(\vec{x})$ Σ_{n+1} formula. Onda je za neku Π_n formulu $\psi(\vec{x},\vec{y})$, $\varphi(\vec{x}) = \exists\vec{y}\,\psi(\vec{x},\vec{y})$. Neka je za $\vec{a} \in A$ ispunjeno $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}]$, odnosno postoje $\vec{b} \in A$ tako da $\mathcal{A} \models \psi[\vec{a},\vec{b}]$. Budući da je $\psi(\vec{x},\vec{y})$ Π_n formula i $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$ povlači $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Pi_n)$, to onda važi $\mathcal{B} \models \psi[\vec{a},\vec{b}]$, $\mathcal{B} \models \varphi[\vec{a}]$. Otuda $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$.

4° Dokaz je sličan dokazu u 3°. $\dashv$

DEFINICIJA 1.6. Utapanje $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je Σ_n utapanje ukoliko za svaku Σ_n formulu φ i $\vec{a} \in A$ važi: $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{B} \models [h\vec{a}]$. U takvom slučaju koristimo oznaku $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\Sigma_n)$.

Odgovarajuće definicije uvode se za Π_n utapanja, odnosno n-elementarna utapanja. U takvim slučajevima, važe odgovarajuće preformulacije lema 1.4., 1.5. Ubuduće, oznaka $\mathcal{A} \xrightarrow[n]{\prec} \mathcal{B}$ stoji umesto činjenice da postoji n-elementarno utapanje $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Slične oznake stoje i za ostale pomenute vrste utapanja.

2. Direktne granice modela

Čest je slučaj da se iz datog skupa modela $\mathcal{C}$ odredjuje izvestan model $\mathfrak{A}$ konstrukcijom K. Postavlja se pitanje kakav odnos model $\mathfrak{A}$ ima prema elementima skupa $\mathcal{C}$, odnosno, koje informacije prenosi konstrukcija K. Jedan tipičan odgovor za takvu vrstu pitanja je Tarski-Vaughtova teorema o elemenrarnim lancima modela. Ovde navodimo jedno uopštenje pomenute teoreme na direktne sisteme modela. U tom smislu prikazujemo definiciju direktnog (usmerenog) sistema modela, na primer kao što je data u /38/.

Uredjenje $\langle D, \leq \rangle$ je usmereno ukoliko važi:

$$\bigwedge_{i,j \in D} \bigvee_{k \in D} i,j \leq k.$$

Direktni sistem $\mathcal{C} = \langle \mathfrak{A}_i, h_{ij} \mid i,j \in D \rangle$ modela i utapanja sastoji se iz usmerenog uredjenja $\langle D, \leq \rangle$ i skupa $\{ h_{ij} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_j \mid i \leq j \in D \}$ utapanja tako da važi:

1° $h_{ii} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_i$ je identičko utapanje.

2° $i \leq j \leq k \longrightarrow h_{ik} = h_{jk} h_{ij}$.

Neka je $A = \bigcup \{ A \times \{i\} \mid i \in D \}$. Na skupu A definiše se relacija ekvivalencije na sledeći način: za (a,i), $(b,j) \in A$

$$(a, i) \sim (b, j) \longleftrightarrow \bigvee_{k \in D} h_{ik} a = h_{jk} b.$$

Model $\mathfrak{A}_\infty = \underrightarrow{\lim}\, \mathfrak{A}_i = \underrightarrow{\lim}\, \mathcal{C}$ (direktna granica (limit) usmerenog sistema modela $\mathcal{C}$) odredjuje se na sledeći način:

1° Domen modela $\mathfrak{A}_\infty$ je $A_\infty = A/\sim$.

2° Neka su sa h_i označena kanonska preslikavanja iz skupa A_i u skup $A/\sim$, odnosno, ako je $a \in A_i$ onda je $h_i a$ klasa ekvivalencije elementa (a,i).

(1) Ako je $R \in L$ predikat (L je jezik modela sistema $\mathcal{C}$) tada $R^{\mathcal{O}_\infty}[h_{i_1}a_1,\dots,h_{i_n}a_n]$ važi akko postoji $k \in D$ tako da je $k \geq i_1,\dots,i_n$ i $R^{\mathcal{O}_k}[h_{i_1k}a_1,\dots,h_{i_nk}a_n]$ važi.

(2) Ukoliko je f n-mesni funkcijski simbol jezika L i $a_1 \in A_{i_1},\dots,a_n \in A_{i_n}$ tada postoji $k \geq i_1,\dots,i_n$. U takvom slučaju

$$f^{\mathcal{O}_\infty}(h_{i_1}a_1,\dots,h_{i_n}a_n) = h_k f^{\mathcal{O}_k}(h_{i_1k}a_1,\dots,h_{i_nk}a_n).$$

Prethodna definicija je korektna jer lako se proverava da je za $k,m \geq i_1,\dots,i_n$ ispunjeno

$$(f^{\mathcal{O}_k}(h_{i_1k}a_1,\dots,h_{i_nk}a_n),k) \sim (f^{\mathcal{O}_m}(h_{i_1m}a_1,\dots,h_{i_nm}a_n),m).$$

(3) Ako je c konstanta jezika L, tada $c^{\mathcal{O}_\infty} = h_i c^{\mathcal{O}_i}$ za bilo koji $i \in D$. Ova definicija je korektna, jer, za bilo koje $i,j \in D$ postoji $k \in D$ tako da $i,j \leq k$, te $h_{ik}c^{\mathcal{O}_i} = h_{jk}c^{\mathcal{O}_j}$, odnosno $(c^{\mathcal{O}_i},i) \sim (c^{\mathcal{O}_j},j)$.

Prema gornjim definicijama, lako se vidi da je $h_i : \mathcal{O}_i \to \mathcal{O}_\infty$ utapanje i da takodje važi: $i \leq j \longrightarrow h_i = h_j h_{ij}$.

TEOREMA 2.1. Neka je $\mathcal{C} = \langle \mathcal{O}_i, h_{ij} \mid i,j \in D\rangle$ Σ_n (resp. Π_n, n-elementarno) direktan sistem, odnosno svako preslikavanje h_{ij} je Σ_n utapanje (resp. Π_n, n-elementarno utapanje). Tada je svaki h_i takodje Σ_n (resp. Π_n, n-elementarno) utapanje.

DOKAZ: Indukcijom po n, dokazujemo da pri uslovima teoreme važe sledeća tvrdjenja:

1° $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{O}_\infty (\Sigma_n)$

2° Svaka Π_{n+1} rečenica tačna u svim modelima $\mathcal{O}_i$, tačna je u $\mathcal{O}_\infty$.

Slučaj $n = 0$. Budući da je h_i utapanje, tvrdjenje 1^o neposredno sleduje. Istinitost tvrdjenja 2^o sledi na osnovu dokaza u induktivnom prelazu sa n na $n+1$.

Neka je $n \geqslant 1$ i pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n-1$. Dokazujemo prvo tvrdjenje 1^o. Neka je $\varphi = \exists x_1 \dots x_m \ \psi(x_1, \dots x_m, y_1, \dots, y_s)$, gde je ψ Π_{n-1} formula i $a_1, \dots, a_s \in A_i$ tako da je $\mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_s]$. Otuda, za neke $b_1, \dots, b_m \in A_i$ važi $\mathfrak{A}_i \models \psi[\vec{b}, \vec{a}]$. Neka je za svaki $j \geqslant i$ $\mathfrak{A}_{X_j}$ prosta ekspanzija modela $\mathfrak{A}_j$ skupom $X_j = \{h_{ij}a_1, \dots, h_{ij}a_s, h_{ij}b_1, \dots, h_{ij}b_m\}$ Stoga, $\mathfrak{A}_{X_j}$ je model jezika $L \cup \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_s, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$. Pri takvom izboru modela, lako je proveriti da je sistem $\mathcal{C}' = \langle \mathfrak{A}_{X_j}, h_{jk} \mid i \leqslant j \leqslant k \in D \}$ takodje direktan i da je

$\mathfrak{A}'_\infty = \langle \mathfrak{A}_\infty, h_i a_1, \dots, h_i a_s, h_i b_1, \dots, h_i b_m \rangle$. Primetimo da ukoliko je $i \leqslant j \leqslant k$, onda $h_{ik}a_1 = h_{jk}h_{ij}a_1$, odnosno $\underline{a}_1^{\mathfrak{A}_{X_j}} = h_{jk}a_1$ (slična relacija važi i za ostale elemente a_i). Otuda za $i \leqslant j \leqslant k$ $h_{jk}: \mathfrak{A}_{X_j} \longrightarrow \mathfrak{A}_{X_k}$ je utapanje. Dalje, s obzirom da je $h_{jk}: \mathfrak{A}_j \longrightarrow \mathfrak{A}_k(\Sigma_n)$ to takodje $h_{jk}: \mathfrak{A}_{X_j} \longrightarrow \mathfrak{A}_{X_k}(\Sigma_n)$, te prema lemi 1.5.3^o važi $h_{jk}: \mathfrak{A}_{X_j} \xrightarrow{\prec}_{n-1} \mathfrak{A}_{X_k}$. Otuda, rečenica $\psi(b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_s)$ važi u svim modelima sistema $\mathcal{C}'$. Budući da je rečenica ψ Π_{n-1} formula, prema induktivnoj hipotezi važi: $\mathfrak{A}'_\infty \models \psi(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_s)$. Pošto je za $r \leqslant s$ $\underline{a}_r^{\mathfrak{A}'_\infty} = h_i a_r$, to $\mathfrak{A}_\infty \models \varphi(h_i a_1, \dots, h_i a_s]$.

Dokažimo tvrdjenje 2^o. Neka je φ Π_{n+1} rečenica, $\varphi \doteq \forall x_1 \dots x_m \ \psi(\vec{x})$, gde je ψ Σ_n formula. Pretpostavimo da φ važi na svim modelima $\mathfrak{A}_i$. Neka su $h_{i_1}a_1, \dots, h_{i_m}a_m$

proizvoljni elementi skupa A_∞ . Tada postoji $k \geq i_1, \dots, i_m$ i za to k važi $h_{i_1} a_1 = h_k h_{i_1 k} a_1, \dots, h_{i_m} a_m = h_k h_{i_m k} a_m$. Budući da je $\mathfrak{A}_k \models \mathcal{C}$, to $\mathfrak{A}_k \models \Psi[h_{i_1 k} a_1, \dots, h_{i_m} a_m]$, te prema 1° sledi $\mathfrak{A}_\infty \models \Psi[h_k h_{i_1 k} a_1, \dots, h_k h_{i_m k} a_m]$, odnosno $\mathfrak{A}_\infty \models \Psi[h_{i_1} a_1, \dots, h_{i_m} a_m]$. Otuda $\mathfrak{A}_\infty \models \mathcal{C}$. Ovim su dokazana tvrdjenja 1° i 2°.

Dokažimo sada deo teoreme koji se odnosi na Π_n utapanja. Neka je sistem $\mathcal{C}$ direktan Π_n sistem, $\mathcal{C}$ Π_n formula i $\vec{a} \in A_i$ tako da $\mathfrak{A}_i \models \mathcal{C}[\vec{a}]$. Tada, za neku Σ_{n-1} formulu $\Psi(\vec{x}, \vec{y})$ je $\mathcal{C}(\vec{x}) \doteq \forall \vec{y}\ \Psi(\vec{x}, \vec{y})$. Neka su $h_{i_1} b_1, \dots h_{i_s} b_s$ proizvoljni elementi skupa A_∞ . Otuda za neko $j \geq i_1, \dots, i_s$, i važi $h_{i_1} b_1 = h_j h_{i_1 j} b_1, \dots, h_{i_s} b_s = h_j h_{i_s j} b_s$. Budući da je

$h_{ij}: \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_j(\Pi_n)$, to $\mathfrak{A}_j \models \mathcal{C}\,[h_{ij} a_1, \dots, h_{ij} a_s]$, odnosno $\mathfrak{A}_j \models \forall x_1 \dots x_m\ \Psi(x_1, \dots, x_m, \underline{h}_{ij} \underline{a}_1, \dots, \underline{h}_{ij} \underline{a}_s)$. Otuda $\mathfrak{A}_j \models \Psi[h_{i_1 j} b_1, \dots, h_{i_m j} b_m, h_{ij} a_1, \dots, h_{ij} a_s]$. Budući da je svaka Σ_{n-1} formula takodje i Π_n formula, to je $\mathcal{C}$ takodje Σ_{n-1} sistem.

Stoga, prema prethodnom delu tvrdjenja važi:

$\mathfrak{A}_\infty \models \Psi[h_j h_{i_1 j} b_1, \dots, h_j h_{i_m j} b_m, h_j h_{ij} a_1, \dots, h_j h_{ij} a_s]$ te

$\mathfrak{A}_\infty \models \forall x_1 \dots x_m\ \Psi(x_1, \dots, x_m, \underline{h}_i \underline{a}_1, \dots, \underline{h}_i \underline{a}_s)$, odnosno $\mathfrak{A}_\infty \models \mathcal{C}[h_i \vec{a}]$.

Najzad, prema lemi 1.4., $\mathcal{C}$ je n-elementaran sistem akko je $\mathcal{C}$ Σ_{n+1} sistem. Otuda, prema 1° teorema važi i za n-elementarne sisteme. $\dashv$

POSLEDICA 2.1.1. Svaki lanac modela (1) $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_\alpha \subseteq \ldots$ $(\alpha < k)$ može se smatrati direktnim sistemom modela i u takvom slučaju $\mathfrak{A}_\infty = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{A}_\alpha$. Za morfizme $h_{\alpha\beta} : \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_\beta$ uzimamo inkluziona preslikavanja. Otuda važi: Ako je lanac modela (1) Σ_n (resp. Π_n, n-elementaran), tada je za svaki $\alpha < k$ $\mathfrak{A}_\alpha \leq \mathfrak{A}_\infty(\Sigma_n)$ (ovo tvrdjenje za Σ_n lance dokazano je na primer u /7/). $\dashv$

Neka je $\mathfrak{A}$ model jezika L i za svaki $i \in S_\omega(A)$ $\mathfrak{A}_i$ je podmodel modela $\mathfrak{A}$ generisan skupom i. Tada je $\mathcal{C} = \langle \mathfrak{A}_i, \varepsilon_{ij} \mid i \leq j \in S_\omega(A)\rangle$ direktan sistem modela, gde je $\varepsilon_{ij}: \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_j$ $(i \leq j)$ inkluziono preslikavanje i $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in S_\omega(A)} \mathfrak{A}_i$. Primetimo da je ovaj sistem Σ_1, odnosno 0-elementaran.

Stoga važe sledeća tvrdjenja:

1° Svaki model je direktna granica konačno generisanih modela.

2° Neka je L prebrojiv jezik. Tada je svaki model jezika L direktna granica najviše prebrojivih modela. U opštem slučaju, model $\mathfrak{A}$ je direktna granica modela kardinalnosti $\leq \|L\|$. Stoga, ako je T teorija i φ Π_2 rečenica (jezika L), tada, ukoliko je φ istinita na svim konačno generisanim podmodelima teorije T, onda $T \vdash \varphi$.

3° Neka je $\mathfrak{A}_\infty$ direktna granica modela $\mathfrak{A}_j$ i $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}_\infty$ konačno generisan, recimo elementima $b_1, \ldots, b_m \in A$, tada je za neki $j \in D$ $\mathfrak{B} \leq h_j[\mathfrak{A}_j]$.

DOKAZ: Za neke $i_1, \ldots, i_m \in D$ je $b_t = h_{i_t} a_t$, gde $a_t \in A_{i_t}$.

Neka je $j \geq i_1, \ldots, i_m$, $j \in D$ i $c_t = h_{i_t j} a_t$. Budući da je $h_{i_t} = h_j h_{i_t j}$, to je $b_t = h_{i_t} a_t = h_j h_{i_t j} a_t = h_j c_t$, odnosno $b_t = h_j c_t$. Neka je $b \in B$. Budući da je model $\mathfrak{B}$ generisan elementima $b_1, \ldots, b_m$, to postoji term t jezika L tako da

$b = t^{\mathcal{L}}(b_1,\ldots,b_m)$. Otuda $b = t^{\mathcal{L}}(h_j c_1,\ldots,h_j c_m)$. Preslikavanje h_j je utapanje te $b = h_j t^{\mathfrak{A}_j}(c_1,\ldots,c_m)$. Otuda $b \in h_j[A_j]$, odnosno $\mathcal{L} \subseteq h_j[\mathfrak{A}_j]$. $\dashv$

Jedna od posledica poslednjeg tvrdjenja je: Ukoliko je model $\mathfrak{A}$ direktna granica konačnih struktura, tada je svaki konačno generisan podmodel modela $\mathfrak{A}$ konačan.

POSLEDICA 2.1.2. (Tarski-Vaught) Neka je direktni sistem $\mathcal{C}$ elementaran, tj. za sve $i \leq j \in D$ $h_{ij}: \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\prec} \mathfrak{A}_j$. Tada za svaki $i \in D$ $h_i: \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\prec} \mathfrak{A}_\infty$.

DOKAZ: Budući da je za svaki $n \in \omega$ $h_{ij}: \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\prec} \mathfrak{A}_j(\Sigma_n)$, to je za svaki $n \in \omega$ $h_i: \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\prec} \mathfrak{A}_\infty(\Sigma_n)$. S druge strane, svaka formula $\mathcal{C}$ je Σ_n formula za neki $n \in \omega$, te $h_i: \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\prec} \mathfrak{A}_\infty$. $\dashv$

POSLEDICA 2.1.3. Neka teorija T ima Π_n(resp. Σ_n) aksiomatizaciju. Tada je T zatvorena u odnosu na direktne Π_n (resp. Σ_n) limite. Svaki direktni sistem je najmanje Σ_1 sistem, te ako teorija T ima Π_2 aksiomatizaciju, onda je T zatvorena u odnosu na proizvoljne direktne granice, pa prema tome i na unije lanaca modela. $\dashv$

POSLEDICA 2.1.4. 1° Teorija Booleovih algebri ima univerzalnu aksiomatizaciju, stoga je zatvorena u odnosu na direktne granice. S druge strane, funktor $*$ koji Booleovoj algebri pridružuje dualan prostor, preslikava svaki direktni sistem Booleovih algebri u inverzni sistem Stoneovih prostora sa neprekidnim preslikavanjima na, i u takvom slučaju $\varprojlim B_i^* \cong (\varinjlim B_i)^*$. Slično, ako je $\varprojlim X_i$ inverzna granica Stoneovih prostora tada $\varprojlim X_i \cong \varprojlim X_i^{**} \cong (\varinjlim X_i^*)^*$. Stoga je kategorija Stoneovih prostora zatvorena u odnosu na inverzne granice (nastalih iz inverznih sistema sa epimorfizmima).

2^{o} Ukoliko je $\langle X_i, h_{ij} \mid i,j \in D\rangle$ inverzni sistem savršenih Stoneovih prostora, gde su h_{ij} neprekidna preslikavanja na, onda je $\langle X_i^*, h_{ji}^* \mid i,j \in D\rangle$ direktan sistem bezatomičnih Booleovih algebri, te je ovaj sistem elementaran (budući da je teorija bezatomičnih Booleovih algebri modelski potpuna). Stoga je $\varinjlim X_i^*$ bezatomična Booleova algebra, stoga $(\varinjlim X_i^*)^* \cong \varprojlim X_i$ je savršen Stoneov prostor. Drugim rečima, kategorija Stoneovih savršenih prostora je zatvorena u odnosu na inverzne granice. $\dashv$

Skup $D' \subseteq D$ je kofinalan u D ukoliko za svaki $i \in D$ postoji $j \in D'$ tako da $i \leq j$. Primetimo da ukoliko je $\langle D, \leq\rangle$ usmereno uredjenje, tada je $\langle D', \leq\rangle$ takodje usmereno uredjenje, te usmereni sistem $\mathcal{C}' = \langle \mathfrak{A}_i, h_{ij} \mid i \leq j \in D'\rangle$ odredjuje direktni limit $\mathfrak{A}' = \varinjlim \mathcal{C}'$.

TEOREMA 2.2. Neka je $D' \subseteq D$ kofinalan. Tada $\mathfrak{A}'_\infty \cong \mathfrak{A}_\infty$.

DOKAZ: Za svaki $i \in D$, $j \in D'$ tako da $j \geq i$ definišemo $f_i = h'_j h_{ij}$, gde je $h'_j\colon \mathfrak{A}_j \longrightarrow \mathfrak{A}'_\infty$ odgovarajuće kanonsko utapanje. Dokažimo da preslikavanje f_i ne zavisi od indeksa j. Neka je za neki $k \in D'$, $i \leq k$, $f'_i = h'_k h_{ik}$. Tada postoji $m \in D'$ tako da $m \geq j,k$. Neka je $f''_i = h'_m h_{im}$. Stoga imamo $f''_i = h'_m h_{im} = h'_m h_{jm} h_{ij} = h'_j h_{ij} = f_i$. Slično $f''_i = f'_i$, te $f_i = f'_i = f''_i$.

Neka je $f\colon \mathfrak{A}_\infty \longrightarrow \mathfrak{A}'_\infty$ definisano sa $fh_i a = f_i a$, gde $a \in A_i$. Dokažimo da $f\colon \mathfrak{A}_\infty \longrightarrow \mathfrak{A}'_\infty$.

(1) f je 1-1 preslikavanje. Neka je $fh_i a = fh_j b$. Otuda $f_i a = f_j b$, te, budući da je D' kofinalan u D, postoji $k \in D'$ tako da $k \geq i,j$ i $h'_k h_{ik} a = h'_k h_{jk} b$. Otuda, budući da je h'_k utapanje, $h_{ik} a = h_{jk} b$. Stoga $h_k h_{ik} a = h_k h_{jk} b$, odnosno $h_i a = h_j b$.

(2) f je preslikavanje na. Neka je $h_j'a \in A'$. Tada $h_j'a = fh_j a$, odnosno f je preslikavanje na. ⊣

POSLEDICA 2.2.1. Neka je $\mathcal{A}_\infty = \varinjlim \mathcal{A}_i$ i $\{f_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{B} \mid i \in D\}$ skup utapanja tako da $f_j h_{ij} = h_i$, za $i \leq j$. Tada postoji jedinstven $f: \mathcal{A}_\infty \longrightarrow \mathcal{B}$ tako da za svaki $i \in D$ $fh_i = f_i$, (vid. /38/). ⊣

POSLEDICA 2.2.2. Neka je $\mathcal{C}$ Σ_n direktan sistem i θ Π_{n+1} tačna na svim članovima nekog kofinalnog direktnog podsistema $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$. Tada $\mathcal{A}_\infty \models \theta$.

DOKAZ: Prema prethodnim dvema teoremama.

3. n-elementarna ekvivalencija. Π_n, Σ_n segmenti teorija.

Moguć je slučaj da dva modela nisu elementarno ekvivalentna, medjutim ipak zadovoljavaju iste rečenice neke odredjene vrste. U tom smislu može se govoriti o parcijalnoj elementarnoj ekvivalenciji.

DEFINICIJA 3.1. Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ modeli jezika L i $n \in \omega$.

1° Modeli $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ su n-elementarno ekvivalentni, u oznaci $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$ akko za svaku Π_n rečenicu φ važi: $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$

2° Π_n diagram modela $\mathcal{A}$ je skup formula $\Pi_n(\mathcal{A}) = \{\varphi(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m) \mid \varphi$ je Π_n formula jezika L, $\vec{a} \in A$, $m \in \omega$, $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$. Na sličan način definiše se Σ_n diagram modela $\mathcal{A}$, u oznaci $\Sigma_n(\mathcal{A})$.

3° Neka je T teorija jezika L. Π_n segment teorije T je skup rečenica $T_{\Pi_n} = \{\varphi \mid \varphi$ je Π_n rečenica jezika L i $T \vdash \varphi\}$. Na sličan način definiše se Σ_n segment teorije T, u oznaci T_{Σ_n}.

LEMA 3.2. Neka je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna.

1° $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$

2° $\mathfrak{B}_A \models \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$.

3° $\mathfrak{B}_A \models \Pi_n(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{A})$.

DOKAZ: Tvrdjenje $1^\circ \longleftrightarrow 2^\circ$ je posledica leme $1.5.3^\circ$, dok $1^\circ \longleftrightarrow 3^\circ$ sledi na osnovu leme $1.5.1^\circ$. $\dashv$

LEMA 3.3. Neka su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modeli jezika L i $n \geq 1$. Tada važe sledeća tvrdjenja.

1° $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ akko postoje modeli $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_{n-1} \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B} \xrightarrow{\preceq}_{n-1} \mathfrak{A}_1$.

2° $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ akko postoje modeli $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_{n-1} \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B} \xrightarrow{\preceq}_{n-1} \mathfrak{A}_1$.

3° $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ akko postoje modeli $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{A} <_{n-1} \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B} <_{n-1} \mathfrak{A}_1$.

DOKAZ: Tvrdjenja 2° i 3° su neposredne posledice tvrdjenja 1° i lema prenosa I.3. Otuda dokazujemo samo tvrdjenje 1°.

($\Rightarrow$) Neka je $\Gamma = T(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{B})$. Dokažimo da je Γ neprotivurečna teorija. Pretposatvimo suprotno, tj. da je Γ protivurečna teorija. U takvom slučaju postoji konačan protivurečan podksup $\Gamma_o = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q\}$ skupa Γ, gde su $\varphi_i \in T(\mathfrak{A})$, $\theta_i \in \Sigma_n(\mathfrak{B})$. Neka je $\varphi \doteq \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ i $\theta \doteq \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_q$. Stoga je za neke $\vec{a} \in A$, $\vec{b} \in B$, $\varphi \doteq \varphi(\vec{\underline{a}})$ i $\theta \doteq \theta(\vec{\underline{b}})$. Prema izboru skupa Γ_o imamo $\varphi(\vec{\underline{a}}) \vdash \neg\theta(\vec{\underline{b}})$, te je stoga prema lemi I.2.2 $\varphi(\vec{\underline{a}}) \vdash \forall\vec{x}\, \neg\theta(\vec{x})$. Otuda $\varphi(\vec{\underline{a}}) \vdash \neg\exists\vec{x}\,\theta(\vec{x})$. Budući da je $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$, to je takodje $\mathfrak{A} \models \neg\exists\vec{x}\,\theta(\vec{x})$.

S druge strane, $\theta(\vec{x})$ je Σ_n formula, te je $\exists\vec{x}\theta(\vec{x})$ Σ_n rečenica, te pošto je $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A} \models \neg\exists\vec{x}\theta(\vec{x})$ to

$\mathfrak{B} \models \neg\exists \vec{x}\theta(\vec{x})$, što je protivno $\mathfrak{B} \models \theta[\vec{b}]$. Otuda, Γ je neprotivurečna teorija, te postoji model $\langle \mathfrak{A}_1, c_a, c_b\rangle_{a \in A, b \in B} \models \Gamma$. Stoga je za preslikavanja $f: a \longrightarrow c_a$, $g: b \longrightarrow c_b$ ispunjeno $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{A}_1$, $g: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}_1(\Sigma_n)$, te prema lemi 1.5. $g: \mathfrak{B} \xrightarrow{\preceq}_{n-1} \mathfrak{A}_1$.

Simetrično, koristeći teoriju $\Gamma' = T(\mathfrak{B}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{A})$ dokazujemo da postoji model $\mathfrak{B}_1$ o kojem govori tvrdjenje 1°.

($\Leftarrow$) Neka je φ Σ_n rečenica. Otuda, ukoliko je $\mathfrak{A} \models \varphi$, onda, pošto je $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_1(\Sigma_n)$, imamo $\mathfrak{B}_1 \models \varphi$. Stoga je $\mathfrak{B} \models \varphi$. Slično, ako je $\mathfrak{B} \models \varphi$ onda $\mathfrak{A} \models \varphi$, odnosno $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$. $\dashv$

LEMA 3.4. Neka je $n \geq 1$ i $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ model jezika L. Tada važe sledeća tvrdjenja.

1° Neka je $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_n \mathfrak{B}$. Tada postoji model $\mathfrak{C}$, elementarno utapanje g i n-1 elementarno utapanje h tako da prikazani diagram komutira. Pritom, može se izabrati da je g, odnosno h, inkluziono preslikavanje.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

2° Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$. Tada postoji model $\mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_{n-1} \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

DOKAZ: Prema lemama prenosa I.3., tvdjenje 1° i 2° su ekvivalentna, Stoga dokažimo na primer tvrdjenje 2°.

Neka je $\Gamma = T(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{B})$. Dokažimo da je Γ neprotivurečna teorija. Pretpostavimo suprotno, tj. da je Γ protivurečna teorija. U takvom slučaju postoji konačan protivurečan podskup $\Gamma_0 = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_p, \theta_0, \ldots, \theta_q\}$ skupa Γ, gde su $\varphi_i \in T(\mathfrak{A})$, $\theta_i \in \Sigma_n(\mathfrak{B})$. Neka je $\varphi \doteq \varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_p$, $\theta \doteq \theta_0 \wedge \ldots \wedge \theta_q$. Stoga je za neke $\vec{a} \in A$ i $\vec{b} \in B - A$ ispunjeno $\varphi \doteq \varphi(\vec{a})$ $\theta \doteq \theta(\vec{a}, \vec{b})$. Slično, kao u prethodnoj lemi važi: $\varphi(\vec{a}) \vdash \neg\exists\vec{y}\theta(\vec{a}, \vec{y})$ Budući da je $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})$, to $\mathfrak{A} \models \neg\exists\vec{y}\theta(\vec{a}, \vec{y})$. Dalje $\neg\exists\vec{y}\theta(\vec{a}, \vec{y})$

je Π_n formula, te pošto je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B} \models \neg \exists \vec{y}\theta(\vec{a},y)$, protivno $\mathfrak{B} \models \theta(\vec{a},\vec{b})$. Stoga je Γ neprotivurečna teorija, te postoji model $\langle \mathfrak{C}', c_b \rangle_{b \in B} \models \Gamma$. Prema lemi prenosa onda postoji gore opisani model $\mathfrak{C}$. $\dashv$

TEOREMA 3.5. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.

1° $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$.

2° Postoji model $\mathfrak{B} \models T$, tako da $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})_{\Sigma_{n+1}}$, odnosno $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{B})_{\Pi_{n+1}}$.

3° Postoji model $\mathfrak{B} \models T$ tako da $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$.

Ako je $n \geq 1$, tada takodje važi:

4° Postoje $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{B} \models T$, $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_{n-1} \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$

5° Postoje modeli $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{B} \models T$ i sledeći diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, "\prec_n"'] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\prec_{n-1}"'] \end{tikzcd}$$

6° Model $\mathfrak{A}$ je elementarni podmodel modela $\mathfrak{B}$, gde je $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathfrak{B}_n$

i $\mathfrak{B}_0 \prec_{n-1} \mathfrak{B}_1 \prec_{n-1} \dots$, $\mathfrak{B}_n \models T$.

7° Model $\mathfrak{A}$ je elementarni podmodel direktnog limita n-1 elementarnog sistema modela teorije T.

8° Postoji konačan sendvič

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \prec_n \mathfrak{B}_0 \prec_{n-1} \mathfrak{A}_1 \prec_{n-2} \mathfrak{B}_1 \prec_{n-3} \dots, \text{ gde}$$

$$\mathfrak{B}_j \models T \quad \text{i} \quad \mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \dots, \quad \mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \dots .$$

PRIMEDBA. Tvrdjena 6° i 8° odgovaraju teoremi 5.2.8. u /7/.

Tamo su ta tvrdjenja dokazana drugim sredstvima, preciznije metodom zasićenih modela, koja se pokazala kao uniformna metoda u pristupu izučavanja problema prezervacije. U /7/ takodje je uveden pojam sendviča.

DOKAZ teoreme 3.5. ($1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$) Neka je $\mathcal{O}\!\iota \models T_{\Pi_{n+1}}$ i $\Gamma = T \cup Th(\mathcal{O}\!\iota)_{\Sigma_{n+1}}$. Dokažimo da je Γ neprotivurečna teorija. Pretpostavimo suprotno, tj. da je Γ protivurečna teorija. Tada za neke $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_m \in Th(\mathcal{O}\!\iota)$ važi $T, \mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_m \vdash \perp$. Neka je $\mathcal{C} \doteq \mathcal{C}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_m$. Budući da je konačna konjunkcija Σ_{n+1} formula takodje Σ_{n+1} formula, to je $\mathcal{C}$ Σ_{n+1} formula i $T \vdash \neg\mathcal{C}$. Dalje, za neku Π_n formulu Ψ, $\mathcal{C} \doteq \exists\vec{x}\,\Psi$, te $T \vdash \forall\vec{x}\,\neg\Psi$. Formula $\neg\Psi$ je Σ_n formula, stoga, $\forall\vec{x}\,\neg\Psi$ je Π_{n+1} formula, te $\neg\mathcal{C} \in T_{\Pi_{n+1}}$. Otuda sledi $\mathcal{O}\!\iota \models \neg\mathcal{C}$, što protivureči $\mathcal{O}\!\iota \models T_{\Pi_{n+1}}$. Stoga je Γ neprotivurečna teorija, te postoji model $\mathcal{L} \models \Gamma$. Otuda $\mathcal{L} \models T$ i $\mathcal{L} \models Th(\mathcal{O}\!\iota)_{\Sigma_{n+1}}$.

Dalje, ako je $\mathcal{C}$ Π_{n+1} formula i $\mathcal{L} \models \mathcal{C}$, tada nije $\mathcal{L} \models \neg\mathcal{C}$. Otuda nije $\mathcal{O}\!\iota \models \neg\mathcal{C}$, odnosno važi: $\mathcal{O}\!\iota \models \mathcal{C}$. Stoga $\mathcal{O}\!\iota \models Th(\mathcal{L})_{\Pi_{n+1}}$. Na kraju, primetimo da je $\mathcal{O}\!\iota \models Th(\mathcal{L})_{\Pi_{n+1}}$ $\longleftrightarrow$ $\mathcal{L} \models Th(\mathcal{O}\!\iota)_{\Sigma_{n+1}}$.

($2^\circ \Rightarrow 3^\circ$). Neka je $\mathcal{L}' \models T$ tako da $\mathcal{L}' \models Th(\mathcal{O}\!\iota)_{\Sigma_{n+1}}$ i $\Gamma' = Th(\mathcal{L}') \cup \Sigma_{n+1}(\mathcal{O}\!\iota)$. Dokažimo da je Γ' neprotivurečna teorija. Pretpostavimo suprotno, tj. da je Γ' protivurečna teorija. Budući da je skup formula $\Sigma_{n+1}(\mathcal{O}\!\iota)$ zatvoren u odnosu na konačnu konjunkciju, to postoji $\mathcal{C}(\underline{\vec{a}}) \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{O}\!\iota)$ tako da $Th(\mathcal{L}') \models \neg\mathcal{C}(\underline{\vec{a}})$. Budući da se konstante $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_m$ ne pojavljuju u $Th(\mathcal{L}')$, prema lemi I.2.2. važi: $Th(\mathcal{L}') \models \forall\vec{x}\,\neg\mathcal{C}(\vec{x})$, odnosno $\mathcal{L}' \models \forall\vec{x}\,\neg\mathcal{C}(\vec{x})$. Primetimo da je $\mathcal{O}\!\iota \models Th(\mathcal{L}')_{\Pi_{n+1}}$ te $\mathcal{O}\!\iota \models \forall\vec{x}\,\neg\mathcal{C}(\vec{x})$, što se protivi uslovu $\mathcal{C}(\underline{\vec{a}}) \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{O}\!\iota)$. Stoga postoji model $\langle \mathcal{L}'', b_a \rangle_{a \in A}$ tako da

$\mathfrak{B}' \models Th(\mathfrak{B}')$ i $\langle \mathfrak{B}'', b_a \rangle_{a \in A} \models \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$. Budući da je preslikavanje $h: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}''$, definisano sa $ha = b_a$, Σ_{n+1} utapanje, to $\mathfrak{B}'' \models T$ (jer $\mathfrak{B}'' \equiv \mathfrak{B}'$) i $\mathfrak{A} \xrightarrow[n]{\preceq} \mathfrak{B}''$

Prema lemi prenosa postoji model $=$, tako da $_n$. Budući da je $=$ $=$ T, to važi T.

($3^\circ \Rightarrow 1^\circ$). Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models T$ i $\varphi \in T_{\Pi_{n+1}}$. Stoga $\mathfrak{B} \models \varphi$, te prema lemi $1.5.4^\circ$ važi: $\mathfrak{A} \models \varphi$. Otuda $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$.

Neka je n prirodan broj $\geqslant 1$.

($3^\circ \Rightarrow 4^\circ$) Sledi na osnovu leme $3.4.2^\circ$.

($4^\circ \Rightarrow 5^\circ$) Ukoliko je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_{n-1} \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ tada za inkluziona preslikavanja $i_1: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, $i_2: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$, $i_3: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ prikazani diagram komutira. Pritom, i_1 je n-elementarno, i_2 elementarno, i_3 n-1 elementarna preslikavanje.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "i_2"] \arrow[rr, "i_1"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "i_3"'] \end{tikzcd}$$

($5^\circ \Rightarrow 1^\circ$) Neka je ispunjeno tvrdjenje 5°. Otuda $\mathfrak{A} \xrightarrow[n]{\preceq} \mathfrak{B}$, stoga $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$.

($4^\circ \Rightarrow 6^\circ$). Neka važi tvrdjenje 4° i $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_o$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_o$. Prema 4° postoji $_1$ tako da sledeći diagram komutira:

Budući da je $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_o$, to je takodje $\mathfrak{A}_1 \models T_{\Pi_{n+1}}$. Stoga postoji model $\mathfrak{B}_1 \models T$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \arrow[r, phantom, "\prec"] \arrow[d, phantom, "\succ_n"] & \mathfrak{A}_1 \arrow[dl, phantom, "\succ_{n-1}"] \\ \mathfrak{B}_0 & \end{tikzcd}$$

tako da $\mathfrak{A}_1 \prec_n \mathfrak{B}_1$. Otuda važi $\mathfrak{B}_o \prec_{n-1} \mathfrak{B}_1$. Prema tome sledeći diagram je komutativan:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \arrow[r, phantom, "\prec"] \arrow[d, phantom, "\succ_n"] & \mathfrak{A}_1 \arrow[dl, phantom, "\succ_{n-1}"] \\ \mathfrak{B}_0 \arrow[r, phantom, "\prec_{n-1}"] & \mathfrak{B}_1 \end{tikzcd}$$

Iterirajući ovu konstrukciju prebrojivo mnogo puta dobija se sledeći komutativan diagram:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \arrow[r, phantom, "\prec"] \arrow[dr, "\prec"] & \mathfrak{A}_1 \arrow[r, phantom, "\prec"] \arrow[dr, "\prec"] & \mathfrak{A}_2 \arrow[r, phantom, "\prec"] \arrow[dr, "\prec"] & \ldots \\
& \mathcal{L}_0 \arrow[u, "\prec_{n-1}"] \arrow[r, phantom, "\prec_{n-1}"] & \mathcal{L}_1 \arrow[u, "\prec_{n-1}"] \arrow[r, phantom, "\prec_{n-1}"] & \mathcal{L}_2 \prec_{n-1} \ldots .
\end{tikzcd}$$

Neka je $\mathfrak{A}_\infty = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n$ i $\mathcal{L}_\infty = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{L}_n$. Budući da je $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$ elementaran lanac, to $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_\infty$. S druge strane $A_0 \subseteq B_0 \subseteq A_1 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$, stoga $A_\infty = B_\infty$, te $\mathfrak{A}_\infty = \mathcal{L}_\infty$.

($6^\circ \Rightarrow 7^\circ$). Primetimo, ukoliko važi tvrdjenje 6° tada je $\mathcal{C} = \langle \mathcal{L}_i, \varepsilon_{ij} \mid i,j\in\omega\rangle$ n-1 elenentaran direktan sistem, gde su $\varepsilon_{ij}: \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}_j$ $(i \leq j)$ inkluziona preslikavanja.

($7^\circ \Rightarrow 1^\circ$) Neka je $\mathfrak{A} \prec \mathcal{L}_\infty$, gde $\mathcal{L}_\infty = \varinjlim \mathcal{L}_i, \mathcal{L}_i \models T$ i pritom je direktni sistem $\mathcal{C} = \langle \mathcal{L}_i, h_{ij} \mid i \leq j \in D\rangle$ n-1 elementaran. Pretpostavimo da je $\varphi \in T_{\Pi_{n+1}}$. Otuda za svaki $i \in D$ važi: $\mathcal{L}_i \models \varphi$. Budući da je φ Π_{n+1} rečenica i $\mathcal{C}$ je Σ_n sistem, to φ važi na $\mathcal{L}_\infty$, pa prema tome i na $\mathfrak{A}$.

($3^\circ \Rightarrow 8^\circ$). Opisani sendvič dobija se iteracijom tvrdjenja 4°.

($8^\circ \Rightarrow 3^\circ$). Trivijalno. $\dashv$

Primetimo da ukoliko je $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$, tada postoji $\mathcal{L} \models T$ tako da $\mathfrak{A} \equiv_n \mathcal{L}$. Zaista, ako je $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$, tada prema prethodnoj teoremi postoji model $\mathcal{L}$ tako da $\mathfrak{A} \models Th(\mathcal{L})_{\Pi_{n+1}}$ Lako se proverava da je u takvom slučaju $\mathfrak{A} \equiv_n \mathcal{L}$. Medjutim, obrat ovog tvrdjenja ne važi, kao što pokazuju sledeći primeri.

PRIMER 3.6. ($n = 0$). Neka je T teorija linearnog uredjenja sa aksiomom: $\forall x(c \leq x)$, gde je c nova konstanta, i $\mathfrak{A} = \langle \omega, \leq, 1\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \omega, \leq, 0\rangle$. Tada je $\mathfrak{B}$ model teorije T, dok $\mathfrak{A}$ nije model teorije T_{Π_1}, budući da je aksioma $\forall x(c \leq x)$ Π_1 formula. S druge strane lako je proveriti da je $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$. $\dashv$

PRIMER 3.7. Neka je T teorija gustog linearnog uredjenja bez krajeva, $\mathfrak{B}$ model za T i $\mathfrak{A} = \langle \omega, \leq\rangle$. Budući da T ima Π_2 aksiomatizaciju, to je $T \models\dashv T_{\Pi_2}$, pa prema tome $\sim \mathfrak{A} \models T_{\Pi_2}$. S druge strane prema primeru 5.1. važi: $\mathfrak{A} \equiv_1 \mathfrak{B}$. $\dashv$

Bilo bi od interesa da se za svaki $n \in \omega$ odredi teorija T i modeli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ koji opovrgavaju: $(\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B} \models T) \longrightarrow \mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$.

S druge strane, ako je $\mathfrak{A} \equiv_{n+1} \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B} \models T$, tada $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$. Zaista, ako je $\mathfrak{A} \equiv_{n+1} \mathfrak{B}$, tada $\mathfrak{A} \models Th(\mathfrak{B})_{\Pi_{n+1}}$ te prema prethodnoj teoremi važi $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$. Medjutim, i u ovom slučaju obrat ne važi, kao što pokazuje sledeći primer.

Neka je T teorija gustog linearnog uredjenja bez krajeva i $\mathfrak{A}$ prebrojiv model za T. Kao što je poznato (Cantor), $\mathfrak{A}$ je prebrojivo univerzalan model za teoriju T' linearnog uredjenja. Budući da je T' univerzalna teorija i $T' \subseteq T$, to $T' \subseteq T_{\Pi_1}$. Neka je $\varphi \in T_{\Pi_1}$ i $\mathfrak{B}$ proizvoljan model teorije T'. Ako je $\mathfrak{B}$ konačan, tada $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, te $\mathfrak{B} \models \varphi$. Ukoliko je $\mathfrak{B}$ beskonačan model, prema DLST postoji prebrojiv $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{B}$. Tada $\mathfrak{B}' \to \mathfrak{A}$, te $\mathfrak{B}' \models \varphi$. Otuda $\mathfrak{B} \models \varphi$. Stoga, rečenica φ važi na svim modelima teorije T', pa prema stavu potpunosti $T' \models \varphi$. Otuda $T' \supseteq T_{\Pi_1}$, odnosno $T' \models\dashv T_{\Pi_1}$. Neka je $\mathfrak{A}' = \langle \omega, \leq\rangle$ (ili ma koje uredjenje neizomorfno uredjenju racionalnih brojeva). Tada $\mathfrak{A}' \models T'$, stoga $\mathfrak{A}' \models T_{\Pi_1}$. S druge strane, jasno je da nije $\mathfrak{A}' \equiv_2 \mathfrak{A}$, jer bi inače bilo $\mathfrak{A}' \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})_{\Pi_2}$, odnosno $\mathfrak{A}' \models T$, što je kontradikcija. Teorija T je $\aleph_0$ kategorična, te nema modela teorije T tako da važi $\mathfrak{A}' \equiv_2 \mathfrak{B}$.

POSLEDICA 3.5.1. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.

1° $T \models\ \dashv T_{\Pi_{n+1}}$

2° Teorija T je zatvorena u odnosu na n-elementarne podmodele.

3° T je zatvorena u odnosu na n-1 elementarne lance ($n \geqslant 1$).

4° T je zatvorena u odnosu na n-1 elementarne direktne limite ($n \geqslant 1$).

PRIMEDBA: Tvrdjenje 3° dokazali su Suzko-Tarski u slučaju $n=1$, J. Keisler za proizvoljno n (Keislerova sendvič teorema, vid. /7/).

Navodimo dokaz za $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$. Dokazi u ostalim slučajevima su slični.

($1^\circ \Rightarrow 2^\circ$). Neka je $T \models\ \dashv T_{\Pi_{n+1}}$, $\mathfrak{B} \models T$ i $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$. Otuda $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$, stoga $\mathfrak{A} \models T$.

($2^\circ \Rightarrow 1^\circ$). Pretpostavimo tvrdjenje 2° i neka je $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_{n+1}}$.

Prema teoremi 3.5. postoji $\mathfrak{B} \models T$ tako da $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$. Otuda, prema 2°, važi $\mathfrak{A} \models T$. Stoga $T_{\Pi_{n+1}} \models T$. S druge strane očigledno $T \models T_{\Pi_{n+1}}$, te $T \models\ \dashv T_{\Pi_{n+1}}$. $\dashv$

POSLEDICA 3.5.2. $\mathfrak{A} \models T_{\Sigma_{n+1}} \longleftrightarrow$ Postoje modeli $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tako da važi sledeći diagram udruživanja: $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{B} \xleftarrow[n]{\succ} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \models T$.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka je $\mathfrak{A} \models T_{\Sigma_{n+1}}$. Dokažimo da je $T \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A})_{\Pi_{n+1}}$ neprotivurečna teorija. Pretpostavimo da to nije. Tada postoji Π_{n+1} rečenica φ tako da (1) $T \cup \{\varphi\}$ je protivurečna teorija i (2) $\mathfrak{A} \models \varphi$. Prema (1) je $T \models \neg\varphi$. Budući da je $\neg\varphi$ Σ_{n+1} rečenica, to $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, što je kontradikcija prema (2). Stoga, $T \cup Th(\mathfrak{A})_{\Sigma_{n+1}}$ je neprotivurečna teorija. Neka je $\mathfrak{C} \models T \cup Th(\mathfrak{A})_{\Pi_{n+1}}$. Prema teoremi 3.5. postoji model $\mathfrak{A}'$ tako da $\mathfrak{C} <_n \mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{A}' \models Th(\mathfrak{A})$. Otuda $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$, te postoji model $\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B} \xleftarrow{\succ} \mathfrak{A}'$. Otuda $\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B} \xleftarrow[n]{\succ} \mathfrak{C}$

($\Leftarrow$) Neka postoje modeli $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow[\prec]{g} \mathfrak{B} \xleftarrow[n\ \succ]{f} \mathfrak{C}$. Otuda $f: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}\ (\Sigma_{n+1})$. Neka je φ Σ_{n+1} rečenica tako da $T \models \varphi$. Tada $\mathfrak{C} \models \varphi$, te $\mathfrak{B} \models \varphi$. Otuda $\mathfrak{A} \models \varphi$, stoga $\mathfrak{A} \models T_{\Sigma_{n+1}}$. ⊣

4. Neki primeri i primene

TEOREMA 4.1. Neka je $\mathcal{C} = \langle \mathfrak{A}_i, h_{ij} \mid i \leq j \in I \rangle$ direktan, n-elementaran sistem jezika L i T teorija u eventualno širem jeziku. Ako je svaki $\mathfrak{A}_i$ n-elementaran podmodel teorije T, onda je $\mathfrak{A}_\infty = \underrightarrow{\lim}\ \mathcal{C}$ takodje n-elementaran podmodel teorije T.

DOKAZ: Neka je $\Gamma = T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$. Tada je Γ neprotivurečna teorija. Pretpostavimo da to nije. Tada postoji rečenica $\varphi(\vec{\underline{a}}) \in \Sigma_{n+1}^{(\mathfrak{A})}$ tako da je $T \vdash \neg\varphi(\vec{\underline{a}})$. Otuda prema lemi I.2.2. važi $T \vdash \forall\vec{x}\, \neg\varphi(\vec{x})$. Primetimo da je formula $\forall\vec{x}\, \neg\varphi(\vec{x})$ Π_{n+1} rečenica.

S druge strane, budući da je $\mathcal{C}$ direktan sistem, postoji $j \in I$ tako da $\vec{a} = h_j\vec{b}$ za neki niz $\vec{b} \in A_j$. Prema teoremi 2.1. $h_j: \mathfrak{A}_j \xrightarrow{\prec}_n \mathfrak{A}_\infty$ i $\mathfrak{A}_\infty \models \varphi(\vec{\underline{a}})$, stoga $\mathfrak{A}_j \models \varphi[\vec{b}]$. Po pretpostavci model $\mathfrak{A}_j$ je n-elementaran podmodel nekog modela $\mathfrak{B} \models T$. Budući da je $\mathfrak{B} \models \forall\vec{x}\, \neg\varphi(\vec{x})$ i rečenica $\forall\vec{x}\, \neg\varphi(\vec{x})$ je Π_{n+1} formula, prema lemi 1.5. $\mathfrak{A}_j \models \forall\vec{x}\, \neg\varphi(\vec{x})$. Otuda

$\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi[\bar{b}]$, što je kontradikcija. Stoga postoji model $\mathfrak{C} \models \Gamma$. Prema izboru teorije Γ važi: $\mathfrak{C} \models T$, $\mathfrak{A} \preceq_n \mathfrak{C}$. ⊣

POSLEDICA 4.1.1. (Tarski) Ako je svaki konačno generisani podmodel modela $\mathfrak{A}$ takodje podmodel teorije T, tada je $\mathfrak{A}$ podmodel teorije T.

DOKAZ: Primetimo da je model $\mathfrak{A}$ direktan limit svojih konačno generisanih podmodela. ⊣

POSLEDICA 4.1.2. Ukoliko je model $\mathfrak{A}$ unija podmodela teorije T, tada je $\mathfrak{A}$ podmodel teorije T. ⊣

Sledećei primer pokazuje kako prenos odredjenih informacija sa podmodela daje izvesne značajne informacije o samom modelu.

Neka je $\mathfrak{A}$ model prebrojivog (ili bar sa najviše prebrojivo mnogo funkcijskih i konstantnih simbola) jezika L. Preslikavanje $f: A^n \longrightarrow A^n$, takvo da postoje termi $t_1,\dots,t_n$ jezika L_A tako da za sve $\vec{a} \in A$ važi $f(\vec{a}) = (t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}),\dots,t_n^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))$, nazivamo L-preslikavanjem nad $\mathfrak{A}$. Na primer, svaki polinom nad odredjenim prstenom je $\{+,\cdot\}$ -preslikavanje.

TEOREMA 4.2. Neka je model $\mathfrak{A}$ direktan limit konačnih modela. Tada za svako L-preslikavanje f nad $\mathfrak{A}$ važi: Ako je f 1-1 onda je f <u>na</u> .

DOKAZ: Uvodimo sledeće oznake koje imaju ova značenja:

p: Svi funkcijski i konstantni simboli jezika L koji imaju pojavljivanja u termima $t_1,\dots,t_n$ su izmedju prvih p funkcijskih i konstantnih simbola jezika L, $(p \in \omega)$.

q: Najviše q elemenata skupa A ima pojavljivanja u termima $t_1,\dots,t_n$. Preciznije, ako su $t_1(\underline{\vec{a}}^1,x),\dots,t_n(\underline{\vec{a}}^n,x)$ gore navedeni termi, tada $q \geqslant$ dužina $(\vec{a}^1)+\dots+$dužina $(\vec{a}^n)$, $(q \in \omega)$.

r: Najveća dužina terma t_i za $i \in \{1,\dots,n\}$ je r. Ovde pod dužinom terma podrazumevamo dužinu terma u sintaksnom smislu. Na primer, dužuna terma $(x + y)\cdot \underline{2}$ je 7.

n: f preslikava A^n u A^n.

Neka su $y_1, y_2, \dots, x_1, x_2, \dots$ dva fiksirana niza promenljivih i $\Phi = \{t \mid t$ je term jezika L, t je oblika $t(y_1, \dots, y_{q'}, x_1, \dots, x_{n'})$ gde $q' \leq q$, $n' \leq n$, svi funkcijski i konstantni simboli koji se pojavljuju u t su medju prvih p funkcijskih i konstantnih simbola jezika L, dužina(t) $\leq r\}$.

Primetimo da je skup Φ konačan.

Neka je $\mathcal{C}(p,q,r,n)$ sledeća rečenica

$$\bigwedge_{t\in\Phi} \forall y_1 \dots y_q (\forall x_1 \dots x_n \forall z_1 \dots z_n (\bigwedge_{i=1}^{n} t_i(\vec{y},\vec{x}) = t_i(\vec{y},\vec{z}) \Rightarrow x_1 = z_1 \wedge \dots \wedge x_n = z_n) \Rightarrow \forall u_1 \dots u_n \exists v_1 \dots v_n \bigwedge_{i=1}^{n} u_i = t_i(\vec{y},\vec{v})).$$

Primetimo sledeće činjenice:

1° Rečenica $\mathcal{C}(p,q,r,n)$ iskazuje da za sva L-preslikavanja odredjene složenosti važi: Ako je f 1-1, tada je f na.

2° Rečenica $\mathcal{C}(p,q,r,n)$ je Π_2 formula, budući da je

$$\mathcal{C} \Leftrightarrow \bigwedge_{t\in\Phi} \forall\vec{y}\, \forall\vec{u}\, \exists\vec{v}\, \exists\vec{x}\, \exists\vec{z} ((\bigwedge_{i=1}^{n} t_i(\vec{y},\vec{x}) = t_i(\vec{y},\vec{z}) \Rightarrow x_1 = z_1 \wedge \dots \wedge x_n = z_n) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} u_i = t_i(\vec{y},\vec{v})).$$

3° Rečenica $\mathcal{C}$ važi na svakom konačnom modelu, budući da važi: Ako je X konačan skup i $g: X \xrightarrow[1-1]{} X$, tada je g preslikavanje na.

4° Ako je $\mathfrak{A}$ model jezika L, tada

$$\bigwedge_{n,p,q,r\in\omega} \mathfrak{A} \models \mathcal{C}(p,q,r,n) \longleftrightarrow \bigwedge_{f} (f \text{ je 1-1 L-preslikavanje} \longrightarrow f \text{ je na}).$$

Neka je $\mathfrak{A} = \varinjlim \mathcal{C}$, gde je $\mathcal{C} = \langle \mathfrak{A}_i, h_{ij} \mid i \leq j \in I\rangle$ direktan sistem konačnih modela. Tada je $\mathcal{C}$ Σ_1 sistem, stoga, prema teoremi 2.1., svaka Π_2 rečenica koja važi na svim modelima $\mathfrak{A}_i$, takodje važi na $\mathfrak{A}$. Otuda $\bigwedge_{n,p,q,r\in\omega} \mathfrak{A} \models \mathcal{C}(p,q,r,n)$, te prema 4° tvrdjenje je dokazano. ⊣

PRIMER 4.3. Neka je B Booleova algebra i $f\colon B^n \longrightarrow B^n$ Booleovo preslikavanje nad B. Poznata je činjenica da je svaka konačno generisana podalgebra od B konačna. Stoga, B je direktni limit konačnih modela, pa prema tome važi: Ako je f 1-1 onda je f na.

PRIMER 4.4. Neka je $\langle G,+,0\rangle$ Abelova p-grupa (tj. svi elementi grupe G su reda p), p je prost broj. Lako je videti da je svako konačno generisana podgrupa od G konačna, stoga za svako preslikavanje oblika

$$f\colon (x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (\underline{m}_1^1 x_1+\dots+\underline{m}_n^1 x_n+a_1,\dots,\underline{m}_1^n x_1+\dots+\underline{m}_n^n x_n+a_n),$$

$\vec{a}\in G$, $m_i^j \in Z$, važi: Ako je f 1-1, tada je f na.

PRIMER 4.5. Ako je $\langle G,+,0\rangle$ Abelova grupa u kojoj svi elementi konačnog reda, lako je videti da je svaka konačna generisana podgrupa ove grupe konačna. Stoga i u ovom slučaju važi slično tvrdjenje kao u prethodnom primeru.

PRIMER 4.6. Neka je $\mathfrak{A}_p$ algebarsko zatvorenje konačnog polja Z_p, p prost broj, i $\vec{a}\in A_p$. Neka je $F = Z_p(a_1,\dots,a_n)$ podpolje polja $\mathfrak{A}_p$ generisano elementima $a_1,\dots,a_n$. Budući da su elementi $a_1,\dots,a_n$ algebarski nad Z_p, to je F konačno polje. Stoga, $\mathfrak{A}_p$ je direktni limit konačnih modela. Otuda važi:

(1) Ako je f polinomno preslikavanje nad $\mathfrak{A}_p$, tada, ako je f 1-1 onda je f na.

Dalje, neka je $\mathfrak{A}$ ma koje algebarski zatvoreno polje karakteristike p. Polje $\mathfrak{A}_p$ je algebarski prost model ta teoriju algebarski zatvorenih polja karakteristike p, stoga $\mathfrak{A}_p \longrightarrow \mathfrak{A}$. S druge strane teorija algebarski zatvorenih polja je modelski potpuna, stoga $\mathfrak{A}_p \xrightarrow{\preceq} \mathfrak{A}$. S obzirom na teoremu 4.2.4°, tvrdjenje (1) može se primeniti na polje $\mathfrak{A}$. Otuda tvrdjenje (1) važi za sva polja proste karakteristike.

Poznato je (A.Robinson) da ako rečenica θ važi na svim (algebarski zatvorenim) poljima karakteristike p, p je prost broj, tada θ važi na svakom algebraski zatvorenom polju karakteristike 0 (jedan jednostavan dokaz ovog tvdjenja: Neka su $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ algebarski zatvorena polja, θ važi na poljima $\mathfrak{A}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_n}, \ldots$ redom karakteristike $p_1, p_2, \ldots$. Neka je $\mathfrak{A} = \prod_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n/U$ ultraproizvod po neglavnom ultrafiltru U nad ω koji sadrži $\{p_1, p_2, \ldots\}$. Budući da θ važi na svim $\mathfrak{A}_{p_i}$, to θ važi na $\mathfrak{A}$. Lako je videti da je $\mathfrak{A}$ algebarski zatvoreno polje karakteristike 0, te zbog potpunosti teorije algebarski zatvorenih polja karakteristike 0, θ važi na svim modelima ove teorije). Otuda, ako je $\mathfrak{A}$ algebarski zatvoreno polje karakteristike 0, onda važi: $\bigwedge_{n,p,q,r\in\omega} \mathfrak{A} \models \mathcal{C}(n,p,q,r)$.

Stoga tvrdjenje (1) važi i za polje $\mathfrak{A}$.

PRIMEDBA: Tvrdjenje (1) dokazano je u /6/ za polje kompleksnih brojeva. Medjutim ono se pojavljuje već kod J. Ax-a ("The elementary theory of finite fields", Ann. Math, 88(1968))

Do kraja ovog paragrafa uglavnom primenjujemo prethodna razmatranja na teoriju Booleovih algebri. Iz tog razloga potreban nam je pojam Hornove formule. Definiciju izostavljamo, može se naći na primer, u /7/ ili /8/.

TEOREMA 4.7. (Horn, Chang, vid. /7/. Hornove rečenice se održavaju u odnosu na proizvode modela. ⊣

PRIMEDBA: Veći deo tvrdjenja koja slede može se dokazati korišćenjem stava (Vaught): Ako je $\mathcal{C}$ Hornova Booleova rečenica i $2 \models \mathcal{C}$, tada $T \vdash \mathcal{C}$, gde je T teorija Booleovih algebri. Medjutim, pokazuje se da je za većinu slučajeva dovoljna teorema 4.7.. Napominjemo da je prof. S. Prešić došao nezavisno do stava sličnog pomenutoj Vaughtovoj teoremi kroz primenu rezultata teorije modela na Booleove jednačine. Možemo reći da je metodika dokaza, što slede, inspirisana upravo ovim idejama prof. S. Prešića.

Simbol $\alpha \in 2^n$ označava da je $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in 2$

Ako je t Booleov term tada $t(\alpha, \vec{x})$ stoji umesto $t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vec{x})$

Neka je $\varphi_t \doteq \forall \vec{x} \forall \vec{y} (\bigwedge_{\alpha \in 2^n} t(\alpha, \vec{y}) = 0 \Rightarrow t = 0)$, gde je $t = t(\vec{x}, \vec{y})$ Booleov term. Tada očigledno važe sledeće činjenice:

1° $2 \models \varphi_t$.

2° Rečenica φ_t je Hornovska formula, te prema 1° i teoremi 4.7. φ_t važi na svakoj konačnoj Booleovoj algebri, budući da je svaka konačna Booleova algebra oblika 2^n.

3° Svaka Booleova algebra je direktni limit konačnih Booleovih algebri.

4° Rečenica φ_t je Π_1 formula.

Otuda, prema prethodnom i teoremi 2.1. sledi da za svaku Booleovu algebru B važi: $B \models \varphi_t$. Stoga važi sledeća

TEOREMA 4.8. Neka je $t(\vec{x}, \vec{a})$ Booleov term nad Booleovom algebrom B, $(\vec{a} \in B)$. Tada:

$$B \models \bigwedge_{\alpha \in 2^n} t(\alpha, \vec{a}) = 0 \longrightarrow B \models \forall \vec{x} t(\vec{x}, \vec{a}) = 0. \quad \dashv$$

POSLEDICA 4.8.1. Neka su $t_1(\vec{x}, \vec{a})$, $t_2(\vec{x}, \vec{a})$ Booleovi termi nad B. Ako je $B \models \bigwedge_{\alpha \in 2^n} t_1(\alpha, \vec{a}) = t_2(\alpha, \vec{a})$, tada

$$B \models \forall \vec{x} t_1(\vec{x}, \vec{a}) = t_2(\vec{x}, \vec{a}).$$

DOKAZ: Primenimo prethodnu teoremu na $t = t_1 \Delta t_2$, gde je Δ simetrična razlika. $\dashv$

POSLEDICA 4.8.2. (Rudeanu) Neka je $t(\vec{x}, \vec{a})$ Booleov term nad B i $t_0(\vec{x}, \vec{a}) = \bigvee_{\alpha \in 2^n} t(\alpha, \vec{a}) \vec{x}^{\alpha}$, gde $\vec{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$, $x^0 = x'$, $x^1 = x$. Tada $B \models \forall \vec{x}\, t(\vec{x}, \vec{a}) = t_0(\vec{x}, \vec{a})$.

DOKAZ: Neka je $\beta \in 2^n$. Tada $t_0(\beta, \vec{a}) = \bigvee_{\alpha \in 2^n} t(\alpha, \vec{a}) \vec{\beta}^{\alpha} = t(\beta, \vec{a})$

Otuda $B \models \bigwedge_{\beta \in 2^n} t(\beta, \vec{a}) = t_0(\beta, \vec{a})$. Stoga prema posledici 4.8.1. važi $B \models \forall \vec{x}\ t(\vec{x},\vec{\underline{a}}) = t_o(\vec{x},\vec{\underline{a}})$. $\dashv$

POSLEDICA 4.8.3. Neka je $t(\vec{x})$ Booleov term nad B. Tada postoji Booleov term h nad B tako da

$$B \models \forall \vec{x}\ h(\vec{x}) \wedge t(\vec{x}) = \bigwedge_{\alpha \in 2^n} t(\alpha).$$

DOKAZ: Neka je $h(\vec{x})$ definisan sa: za $\beta \in 2^n$ $h(\beta) = \bigwedge_{\alpha \in 2^n - \{\beta\}} t(\alpha)$. Otuda za svaki $\beta \in 2^n$

$B \models h(\beta) \wedge t(\beta) = \bigwedge_{\alpha \in 2^n} t(\alpha)$. Stoga prema prethodnim posledicama $B \models \forall \vec{x}\ h(\vec{x}) \wedge t(\vec{x}) = \bigwedge_{\alpha \in 2^n} t(\alpha)$. $\dashv$

TEOREMA 4.9. (Uopštenje T.III.7.3. /27/). Neka je

(1) $t(\vec{x},\vec{a}) = 0$ Booleova jednačina nad Booleovom algebrom B. Tada jednačina (1) ima rešenje u B akko $\inf_{\alpha \in 2^n} t(\alpha,a)=0$.

Drugim rečima

$$B \models \exists \vec{x}\ t(\vec{x},\vec{\underline{a}}) = 0 \longleftrightarrow \inf_{\alpha \in 2^n} t(\alpha,\vec{\underline{a}}) = 0.$$

DOKAZ: 1^o Dokažimo $B \models \exists x\ t(x,a) = 0 \Longrightarrow \inf_{\alpha \in 2^n} t(\alpha,a)=0$.

Medjutim, ovo tvrdjenje neposredno sledi na osnovu posledice 4.8.3.

2^o Dokažimo da važi: $B \models \inf_{\alpha \in 2^n} t(\alpha,\vec{\underline{a}}) = 0 \Rightarrow \exists \vec{x}\ t(\vec{x},\vec{\underline{a}})=0$.

Uočimo sledeću Hornovu Π_2 rečenicu:

$$\Psi = \forall u_1 u_2 \ldots u_{2^n} \exists x_1 x_2 \ldots x_n \ (\sup_{\alpha \in 2^n} u_\alpha = 1 \Rightarrow \bigwedge_{\alpha \in 2^n} (\vec{x}^\alpha \leq u_\alpha)).$$

Primetimo da su promenljive u_i jednoznačno indeksirane elementima $\alpha \in 2^n$. Budući da je za $\vec{\beta} \in 2$, $\alpha \in 2^n$, $\vec{\beta}^\alpha = 1$ u slučaju $\alpha = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\vec{\beta}^\alpha = 0$ inače, to važi $2 \models \Psi$.

Pošto je Ψ Hornova formula to Ψ važi na svim stepenima Booleove algebre 2, stoga Ψ važi na svim konačnim Booleovim algebrama. Budući da je svaka Booleova algebra direktna granica konačnih Booleovih algebri, prema teoremi 2.1. Ψ važi na svim Booleovim algebrama.

Neka je B Booleova algebra i $B \models \inf_{\alpha \in 2^n} t(\alpha,\vec{a})=0$. Otuda $B \models \sup_{\alpha \in 2^n} t'(\alpha,\vec{a}) = 1$. Pošto je $B \models \Psi$, to postoji $\vec{c} \in B$ tako da $\vec{c}^{\alpha} \leq t'(\alpha,\vec{a})$ za sve $\alpha \in 2^n$. Otuda za svaki $\alpha \in 2^n$ $t(\alpha,\vec{a}) \wedge \vec{c}^{\alpha} = 0$.

Stoga $\sup_{\alpha \in 2^n} t(\alpha,\vec{a}) \wedge \vec{c}^{\alpha} = 0$. Prema posledici 4.8.2., $t(\vec{c},\vec{a}) = 0$. $\dashv$

Primetimo da prema poslednjem, jednačina $t(\vec{x},\vec{a}) = 0$ nema rešenja u B akko postoji $c \in B-\{0\}$ i term h nad B tako da $h \wedge t = c$.

U nekim slučajevima može se govoriti o obratu teoreme 4.2, kao u slučaju Booleovih algebri ili komutativnih p-grupa. Neka je

$$\Psi(p,q,r,n) = \bigwedge_{t \in \Phi} \forall \vec{y} (\forall \vec{u}\, \exists \vec{v} \bigwedge_{i=1}^{n} u_i = t_i(\vec{y},v) \Rightarrow \forall \vec{x}\, \forall \vec{z} (\bigwedge_{i=1}^{n} t_i(\vec{y},\vec{x}) = t_i(\vec{y},\vec{z}) \Rightarrow x_1=z_1 \wedge \ldots \wedge x_n = z_n))$$

gde su oznake kao u teoremi 4.2. Nije teško videti da je Ψ Hornova formula, stoga je održana u odnosu na proizvode modela. Rečenica Ψ iskazuje da za sva L-preslikavanja odredjene složenosti važi: Ako je f na onda je f 1-1.

Neka je B konačna Booleova algebra. Tada Ψ važi na B, Prema pomenutoj Vaughtovoj teoremi Ψ onda važi na svim Booleovim algebrama. Otuda:

TEOREMA 4.10. Neka je $f: B^n \longrightarrow B^n$ Booleovo preslikavanje. Tada: Ako je f na, onda je f 1-1. $\dashv$

POSLEDICA 4.10.1. Booleovo preslikavanje $f: B^n \longrightarrow B^n$ je na akko je f 1-1 preslikavanje. $\dashv$

Neka je G konačna Abelova p-grupa. Jasno je da Ψ važi na G. Otuda važi na nekoj beskonačnoj Abelovoj p-grupi (ovo tvrdjenje može se dokazati na primer, primenom stava kompaktnosti).

S druge strane, teorija ovih grupa je k-kategorična za svaki beskonačnan kardinal k, stoga je ova teorija kompletna (za fiksno p). Otuda Ψ važi na svim Abelovim p-grupama, stoga važi: Ako je f: $G^n \longrightarrow G^n$ L-preslikavanje tada, ukoliko je f <u>na</u> onda je f 1-1. Kombinujući ovaj rezultat sa ranijim, dobijamo: f je <u>na</u> akko f je 1-1.

Jednom prilikom prof. Dj. Kurepa je postavio sledeće pitanje: "Da li postoji prebrojivo univerzalan model za parcijalno uredjene skupove?". Navodimo jedno model-teoretsko razrešenje ovog problema.

TEOREMA 4.11. Neka je Ω prebrojiva bezatomična Booleova algebra i $\leq$ inducirano uredjenje na Ω. Tada se svako prebrojivo parcijalno uredjenje utapa u $\langle \Omega, \leq \rangle$

DOKAZ: Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ prebrojivo parcijalno uredjenje.

Primetimo da $L(\mathfrak{A})$ ne sadrži funkcijske simbole. Stoga je svaki konačno generisani podmodel modela $\mathfrak{A}$ konačan. Otuda $\mathfrak{A}$ je direktna granica svojih konačnih podmodela.

Dokažimo da važi

(1) Svaki konačni podmodel $\langle X, \leq \rangle$ modela $\mathfrak{A}$ utapa se u $\langle \Omega, \leq \rangle$.

Neka je f: $\langle X, \leq \rangle \longrightarrow \langle S(X), \subseteq \rangle$ definisano sa $f(x) = \{ y \in X \mid y \leq x \}$. Lako je videti da je f utapanje. Booleova algebra $\langle S(X), \cap, \cup, C_X, \emptyset, X \rangle$ je konačna te se utapa u Ω. Stoga $\langle S(X), \subseteq \rangle \longrightarrow \langle \Omega, \leq \rangle$

Prema teoremi 4.1. $\mathfrak{A}$ je podmodel teorije $Th(\Omega)$, odnosno postoji $\langle B, \leq \rangle \models Th(\Omega)$ i utapanje $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \langle B, \leq \rangle$. Budući da se aksiome bezatomičnih Booleovih algebri mogu izraziti u jeziku $\{ \leq \}$, to je inducirana Booleova algebra $B = \langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ takodje bezatomična. Primenom DLST postoji prebrojiva bezatomična Booleova algebra $B' \prec B$ tako da $f[A] \subseteq B'$. Otuda $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \langle B', \leq \rangle$. S druge strane, teorija bezatomičnih Booleovih algebri je ω-kategorična, stoga $B' \cong \Omega$. Otuda $\mathfrak{A} \longrightarrow \Omega$. $\dashv$

U vezi sa prethodnom teoremom može se postaviti pitanje da li postoji takvo utapanje f: $\mathfrak{A} \longrightarrow \langle \Omega, \leq \rangle$ koje održava supremum i infimum konačnih skupova. Delimičan odgovor je da je Ω prebrojivo univerzalan model u kateogiriji distriburivnih mreža, što se može pokazati na sličan način kao u prethodnom dokazu.

5. n-kompletne teorije

Neke teorije I reda su kompletne do odredjene složenosti u hijerarhiji Π_n, Σ_n formula.

DEFINICIJA 5.1. Neka je n prirodan broj ≥ 1. Teorija T je n-kompletna akko za svaka dva modela $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ važi: $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$.

TEOREMA 5.2. Neka je T neprotivurečna teorija. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

1° T je n-kompletna teorija.

2° Ako je φ Π_n rečenica, tada $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg\varphi$

3° Ukoliko je φ Σ_n rečenica, tada $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg\varphi$

4° Za svaka dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ postoji model $\mathfrak{C}$ tako da

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{C} \underset{n-1}{\overset{\succ}{\longleftarrow}} \mathfrak{B}$$

DOKAZ: ($1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$). Neka je T n-kompletna teorija. Pretpostavimo $\sim T \vdash \neg\varphi$, gde je φ Π_n formula. Tada je $T \cup \{\varphi\}$ neprotivurečna teorija, te postoji model $\mathfrak{B} \models T, \varphi$. Neka je $\mathfrak{A}$ ma koji model teorije T. Budući da je φ Π_n formula i $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \models \varphi$, odnosno φ važi na svim modelima teorije T. Otuda, prema stavu potpunosti, $T \vdash \varphi$.

($2^\circ \Longrightarrow 3^\circ$). Neka je φ Σ_n formula. Tada je $\neg\varphi$ Π_n formula, stoga $T \vdash \neg\varphi$ ili $T \vdash \neg\neg\varphi$, odnosno $T \vdash \neg\varphi$ ili $T \vdash \varphi$.

($3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$). Neka su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modeli teorije T i φ Σ_n formula. Dalje, neka je $\mathfrak{A} \models \varphi$ i pretpostavimo da je $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$. Stoga su teorije $T \cup \{\varphi\}$, $T \cup \{\neg\varphi\}$ neprotivurečne, suprotno pretpostavci da je $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg\varphi$. Stoga $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Na sličan način dokazujemo da ako je $\mathcal{B}\models\varphi$ onda $\mathcal{A}\models\varphi$. Otuda $\mathcal{A}\equiv_n\mathcal{B}$.

($1^\circ \Rightarrow 4^\circ$). Neka su $\mathcal{A},\mathcal{B}\models T$. Budući da je $\mathcal{A}\equiv_n\mathcal{B}$, prema lemi 3.3. postoji model $\mathcal{C}$ tako da $\mathcal{A}\xrightarrow{\preceq}\mathcal{C}$ i $\mathcal{B}\xrightarrow{\preceq}{}_{n-1}\mathcal{C}$.

($4^\circ \Rightarrow 1^\circ$). Neka su $\mathcal{A},\mathcal{B}$ modeli teorije T, i φ Π_n formula. Po pretpostavci postoji model $\mathcal{C}$ tako da $\mathcal{A}\xrightarrow{\preceq}\mathcal{C}$ i $\mathcal{B}\longrightarrow{}_{n-1}\mathcal{C}$. Neka je $\mathcal{A}\models\varphi$. Budući da je $\mathcal{A}\xrightarrow{\preceq}\mathcal{C}$, to $\mathcal{C}\models\varphi$. Stoga prema lemi 1.5. važi: $\mathcal{B}\models\varphi$. Dalje, neka je $\mathcal{B}\models\varphi$. Po pretpostavci postoji model $\mathcal{C}'$ tako da $\mathcal{A}\xrightarrow{\preceq}{}_{n-1}\mathcal{C}'$ i $\mathcal{B}\xrightarrow{\preceq}\mathcal{C}'$. Slično kao gore dokazujemo da važi $\mathcal{A}\models\varphi$. Stoga $\mathcal{A}\equiv_n\mathcal{B}$. $\dashv$

POSLEDICA 5.2.1. Teorija T je 1-kompletna akko za svaka dva modela $\mathcal{A},\mathcal{B}\models T$ postoji model $\mathcal{C}$ tako da $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}$ i $\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$. $\dashv$

Očigledno je da je svaka kompletna teorija n-kompletna za svaki $n\geq 1$. Navodimo neke primere 1-kompletnih teorija koje nisu kompletne.

PRIMER 5.3. Teorija beskonačnih linearnih uredjenja je 1-kompletna.

DOKAZ: Neka su $\mathcal{A}=\langle A,\leq\rangle$, $\mathcal{B}=\langle B,\leq\rangle$ beskonačna linearna uredjenja. Ako je $X\subseteq B$ konačan, lako se vidi da se $\langle X,\leq\rangle$ utapa u $\mathcal{A}$. Stoga, svaki konačan podmodel modela $\mathcal{B}$ utapa se u $\mathcal{A}$. Medjutim, konačno generisani podmodel modela $\mathcal{B}$ je konačan, stoga prema teoremi 4.1. $\mathcal{B}$ je podmodel teorije Th($\mathcal{A}$), odnosno postoji model $\mathcal{D}$ tako da $\mathcal{D}\equiv\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{D}$. Budući da je $\mathcal{D}\equiv\mathcal{A}$, postoji model $\mathcal{C}$ tako da $\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}$ i $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}$. Otuda $\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}\succ\mathcal{A}$. Prema posledici 5.2.1. tvrdjenje sledi. $\dashv$

U prethodnom primeru nemamo informacija o strukturi modela $\mathcal{C}$. Ukoliko su modeli $\mathcal{A},\mathcal{B}$ prebrojivi, može se reći nešto više o modelu $\mathcal{C}$. Stoga uvodimo sledeću

DEFINICIJA 5.4. Neka je $\mathcal{A}=\langle A,\leq\rangle$ linearno uredjenje i

$]a, b[_{\mathfrak{A}} = \{x \in A \mid a < x < b\}$. Ako je jasno o kojoj strukturi je reč, umesto $]a, b[_{\mathfrak{A}}$ pisaćemo $]a, b[$. Neka je k kardinal. Uredjenje $\mathfrak{A}$ je k-gusto akko

$$(1) \quad \bigwedge_{a,b \in A} |]a,b[| \geq k \longrightarrow \bigvee_{c \in A} |]a,c[| \geq k \text{ i } |]c,b[| \geq k$$

$$(2) \quad \bigvee_{a,b \in A} |]a,b[| \geq k.$$

Ukoliko je $\mathfrak{A}$ ω-gust, kažemo da je $\mathfrak{A}$ prebrojivo gust.

TEOREMA 5.5. Neka je $\mathfrak{A}$ beskonačno linearno uredjenje. Tada postoji prebrojivo gust $\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ i $|B| = |A|$.

DOKAZ: Ako je $\mathfrak{A}$ beskonačno linearno uredjenje, tada jedno od sledećih tvrdjenja važi:

1° Postoje $a,b \in A$ tako da $|]a,b[| \geq \omega$.

2° $\mathfrak{A}$ nema najveći element.

3° $\mathfrak{A}$ nema najmanji element.

Dokažimo da važi:

(1) Postoji $\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $|A| = |B|$ i 1° važi za $\mathfrak{B}$.

Iz tog razloga pretpostavimo da 1° ne važi za uredjenje $\mathfrak{A}$, i recimo neka 2° važi za $\mathfrak{A}$. Neka je c nova konstanta i $\Gamma = T(\mathfrak{A}) \cup \{\underline{a} < c \mid a \in A\}$. Svaki konačan podskup od Γ je ostvaren u $\mathfrak{A}$, te postoji $\langle \mathfrak{B}, b \rangle \models \Gamma$, $(c^{\mathfrak{B}} = b)$. Prema lemi prenosa može se uzeti da je $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, a prema DLST da je $|B| = |A|$. Ukoliko je $a \in A$, lako se vidi da je $|]a, b[| \geq \omega$. Stoga (1) važi.

Prema prethodnom može se pretpostaviti da 1° važi za uredjenje $\mathfrak{A}$.

Za svaki par (a,b), takav da je $a,b \in A$, $a < b$, $|]a,b[| \geq \omega$ neka je

$\Sigma_{ab} = \{\underline{a} < u_0\} \cup \{v_0 < \underline{b}\} \cup \{u_i < u_{i+1} \mid i \in \omega\} \cup \{v_{i+1} < v_i \mid i \in \omega\}$

$\cup \{u_i < c < v_i \mid i \in \omega\}$, gde su c, u_0, $u_1, \ldots, v_0$, $v_1, \ldots$ nove konstante i to tako izabrane da ako c', u_0', $u_1', \ldots, v_0'$, $v_1', \ldots$

odgovaraju drugom paru (a', b'), tada
$\{c, u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots\} \cap \{c', u_0', u_1', \ldots, v_0', v_1', \ldots\} = \emptyset$.

Neka je $\Gamma = T(\mathfrak{A}) \cup \bigcup_{(a,b)\in I} \Sigma_{ab}$, gde je I skup gore opisanih parova. Svaki konačan podkup od Γ realizovan je u $\mathfrak{A}$, stoga Γ ima model $\mathfrak{B}$. Budući da je $\mathfrak{B} \models T(\mathfrak{A})$, može se uzeti da je $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. S druge strane, uvedeno je najviše $|A|$ novih konstanti, te prema DLST postoji $\mathfrak{A}_1$ tako da $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$ sadrži sve $c^{\mathfrak{B}}$, $u_i^{\mathfrak{B}}$, $v_i^{\mathfrak{B}}$ i $|A| = |A_1|$. Stoga $\mathfrak{A}_1$ zadovoljava $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_1$ i sledeći uslov: ako su $a, b \in A$ i $|]a, b[_{\mathfrak{A}}| \geq \omega$, tada postoji $c \in A_1$ tako da $|]a, c[_{\mathfrak{A}_1}| \geq \omega$ i $|]c, b[_{\mathfrak{A}_1}| \geq \omega$.

Iteracijom prethodne konstrukcije dobija se elementaran lanac $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \ldots$ koji zadovoljava sledeće uslove:

(2) $|A_i| = |A|$.

(3) Ako su $a, b \in A_n$ i $|]a, b[_{\mathfrak{A}_n}| \geq \omega$, tada postoji $c \in A_{n+1}$ tako da $|]a, c[_{\mathfrak{A}_{n+1}}| \geq \omega$ i $|]c, b[_{\mathfrak{A}_{n+1}}| \geq \omega$.

Neka je $\mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n$. Tada važi:

(4) $|B| = |A|$, budući da $|B| = \omega \sup_{n\in\omega} A_n = \omega |A| = |A|$.

(5) $\mathfrak{B}$ je prebrojivo gust. Zaista, neka su $a, b \in B$ i $|]a, b[_{\mathfrak{B}}| \geq \omega$. Tada za neki $n \in \omega$, $a, b \in A_n$. Pretpostavimo da je $]a, b[_{\mathfrak{A}_n}$ konačan, recimo postoji tačno m elemenata u A_n izmedju a,b. Tada se ta činjenica opisuje nekom formulom $\varphi_m(\underline{a}, \underline{b})$. Stoga $\mathfrak{A}_n \models \varphi_m(\underline{a}, \underline{b})$. S druge strane $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{B}$, te $\mathfrak{B} \models \varphi_m(\underline{a}, \underline{b})$, odnosno postoji konačno mnogo (m) elemenata u B izmedju a,b, što protivureči $|]a, b[_{\mathfrak{B}}| \geq \omega$. Stoga $|]a, b[_{\mathfrak{A}_n}| \geq \omega$. Otuda, prema (3), postoji $c \in A_{n+1}$ tako da $|]a, c[_{\mathfrak{A}_{n+1}}| \geq \omega$ i $|]c, b[_{\mathfrak{A}_{n+1}}| \geq \omega$, stoga $|]a, c[_{\mathfrak{B}}| \geq \omega$. $|]c, b[_{\mathfrak{B}}| \geq \omega$. $\dashv$

Na sličan način se dokazuje

TEOREMA 5.6. Za svaki beskonačno linearno uredjen model $\mathfrak{A}$ postoji k-gusto ($k \geq \omega$) uredjen model $\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ i $|B| = \max(|A|, k)$. $\dashv$

Neka $\alpha, \beta, \ldots$ označavaju tipove uredjenja, na primer kao što su uvedeni u /19/. η označava tip uredjenja racionalnih brojeva, α^* je tip dualnog uredjenja od α.

Navedimo neke primere prebrojivo gustih uredjenja:

(1) η, $\omega\eta$, $\omega^*\eta$ itd.

(2) Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, \leq, 0 \rangle$ ne standardan prebrojiv model prirodnih brojeva. Dokazujemo da je $\langle A, \leq \rangle$ prebrojivo gusto uredjenje. Zaista, neka su $a, b \in A$ i $|]a, b[| \geq \omega$. Pretpostavimo da su a,b oba parna ili oba neparna (ako je na primer a neparan i b paran, tada vršimo slično razmatranje sa elementima a+1, b). Budući da je $\mathfrak{A}$ model aritmetike, postoji $c \in A$ tako da $2c = a+b$. Tada je $|]a, c[|, |]c, b[| \geq \omega$. S druge strane ako je $a \in A$ nestandardan broj, tada $\bigwedge_{n \in \omega} a > n$, te $|]0, a[| \geq \omega$. Stoga je $\langle A, \leq \rangle$ prebrojivo gusto uredjenje. Dalje, ako je $a \in A$ nestandardan broj, tada postoji niz $\ldots a-2, a-1, a, a, a+1, a+2, \ldots$ u A. Takodje postoji $b \in A$ tako da $|]0, b[| \geq \omega$ i $|]b, a[| \geq \omega$. Otuda $|]a, a+b[| \geq \omega$. Prema prethodnom $\langle A, \leq \rangle$ ima tip uredjenja $\omega + (\omega^* + \omega)\eta$.

(3) Kao u prethodnom primeru, dokazuje se da ukoliko je $\mathfrak{A}$ nestandardni model uredjenog prstena celih brojeva, tada je tip uredjenja od $\langle A, \leq \rangle$ jednak $(\omega^* + \omega)\eta$.

Prema prethodnim primerima i teoremi 5.6 važi:
$\omega < \omega + (\omega^* + \omega)\eta$, $\omega^* + \omega < (\omega^* + \omega)\eta$.

Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ linearno uredjenje i $\sim$ relacija ekvivalencije na A definisana sa $a \sim b$ akko $|]a, b[\cup]b, a[| < \omega$. Tada je na količničkom skupu $A/\sim$ na prirodan način indukovano uredjenje $</_\sim$: $a/\sim \; </_\sim \; b/\sim$ akko $|]a, b[| \geq \omega$.

DEFINICIJA 5.7. Izvod linearnog uredjenja $\mathfrak{A}$ je

$$D\mathfrak{A} = \langle A/\sim, </\rangle .$$

PRIMER 5.8. $D\omega = 1$, $D\eta = \eta$, $D(\omega + \omega^*) = 2$, $D(\omega^* + \omega) = 1$, $D(\omega\eta) = \eta$.

LEMA 5.9. $\mathfrak{A}$ je prebrojivo gust akko je $D\mathfrak{A}$ gusto uredjenje.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka je $\mathfrak{A}$ prebrojivo gusto linearno uredjenje i $a/\sim \;</\sim\; b/\sim$, gde $a,b \in A$. Tada $|]a,b[_{\mathfrak{A}}| \geq \omega$, te postoji $c \in A$ tako da $|]a,c[| \geq \omega$, $|]c,b[| \geq \omega$. Stoga $a/\sim \;</\sim\; c/\sim \;</\sim\; b/\sim$.

($\Leftarrow$) Neka je $D\mathfrak{A}$ gusto uredjen i $|]a,b[| \geq \omega$. Tada $a/\sim$ $</\sim$ $b/\sim$, te postoji $c \in A$ tako da $a/\sim \;</\sim\; c/\sim \;</\sim\; b/\sim$. Otuda $|]a,c[| \geq \omega$, $|]c,b[| \geq \omega$. $\dashv$

POSLEDICA 5.10. Za svaki prebrojiv, linearno uredjen model $\mathfrak{A} = \langle A, \leq, \ldots \rangle$ postoji prebrojiv model $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}}, \ldots \rangle$ tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ i $D(\langle B, \leq \rangle) \in \{\eta, \eta+1, 1+\eta, 1+\eta+1\}$.

TVRDJENJE 5.11. Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ linearno uredjenje. Tada

1° $D\mathfrak{A}$ je homorfna slika uredjenja $\mathfrak{A}$,

2° $D\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$.

3° Ako je $\mathfrak{A}$ prebrojiv i prebrojivo gust, tada je $\mathfrak{A}$ univerzalan model u teoriji linearnih uredjenja.

DOKAZ: 1° Nije teško proveriti da je kanonsko preslikavanje $h\colon A \longrightarrow A/\sim$ homomorfizam.

2° Neka je f funkcija izbora za $\{a/\sim \mid a \in A\}$. Tada je Preslikavanje $h\colon DA \longrightarrow A$ definisano sa $h(a/\sim) = f(a/\sim)$ utapanje.

3° Neka je $\mathfrak{A}$ prebrojivo gusto uredjenje. Otuda, $D\mathfrak{A}$ je gusto uredjen, stoga se svako prebrojivo linearno uredjenje $\mathfrak{B}$ utapa u $D\mathfrak{A}$. Prema 2°, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. $\dashv$

POSLEDICA 5.11.1. Neka su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ prebrojiva linearna uredjenja. Tada postoji linearno uredjenje $\mathfrak{C}$ tako da važi: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C} \longleftarrow \mathfrak{B}$. Stoga, teorija beskonačnog linearnog uredjenja je 1-kompletna.

DOKAZ: Neka je $\mathfrak{C}$ prebrojivo gust tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ je ω-univerzalan, te $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Ako su $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ ma koja linearna beskonačna uredjenja, prema DLST postoje prebrojiva uredjenja $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A}<\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}<\mathfrak{B}_1$. Prema prethodnom $\mathfrak{A}\equiv_1\mathfrak{B}$, stoga $\mathfrak{A}_1\equiv_1\mathfrak{B}_1$. $\dashv$

Sledeće tvrdjenje omogućuje da se za razne tipove uredjenja odredi izvod.

TVRDJENJE 5.12. Neka $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ označavaju redom uredjenu sumu i uredjeni proizvod uredjajnih tipova α,β (Podsetimo se da se $\alpha\beta$ dobija tako što se svaki element od β zameni kopijom uredjenja α i na tako dobijenom skupu na prirodan način uvede se uredjenje.). Tada važi:

1° Ako α nema najveći ili β najmanji element tada $D(\alpha+\beta)=D\alpha+D\beta$.

2° Ako α nema najveći ili β najmanji element tada $D(\alpha\beta)=(D\alpha)\beta$.

DOKAZ: 1° Neka recimo α nema najveći element. Dalje, neka su $\mathfrak{A}=\langle A,\leq\rangle$ i $\mathfrak{B}=\langle B,\leq\rangle$ uredjenja redom tipa α, β tako da $A\cap B=\emptyset$ i $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, gde $C=A\cup B$. Označimo sa $\sim$ gore opisanu relaciju ekvivalencije na $\mathfrak{C}$ i sa $\sim_A$, $\sim_B$ odgovarajuće relacije ekvivalencije na $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$. Neka su $a\in A$, $b\in B$. Tada $|]a,b[_{\mathfrak{C}}|\geq\omega$ te $a\nsim b$. Stoga važi: Ako je $a\in A$, tada $a/\sim\ =a/\sim_A$. Slično, ako je $b\in B$, onda $b/\sim\ =b/\sim_B$. Stoga preslikavanje $f\colon D(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\longrightarrow D\mathfrak{A}+D\mathfrak{B}$ definisano sa $f(x/\sim)=x/\sim_A$ ukoliko je $x\in A$, $f(x/\sim)=x/\sim_B$ ako je $x\in B$, je izomorfizam. Ukoliko β nema najmanji element dokaz tvrdjenja 1° je sličan.

2° Neka je $\mathfrak{B}=\langle B,\leq\rangle$ uredjenje tipa β i za svaki $b\in B$, $\mathfrak{A}_b=\langle A_b,\leq\rangle$ uredjenje tipa α, gde za $b\neq b'$ $A_b\cap A_{b'}=\emptyset$. Neka je $\mathfrak{C}=\langle C,\leq\rangle$ uredjenje tipa $\alpha\beta$, $C=\bigcup_{b\in B}A_b$, inducirano uredjenjima sa modela $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A}_b$, $b\in B$. Pretpostavimo da recimo $\mathfrak{A}_b$ nema najveći element. Tada je za elemente $a\in A_b$, $a'\in A_{b'}$, gde $b<b'$, $|]a,a'[_{\mathfrak{C}}|\geq\omega$. Stoga važi: ako je $a\in A_b$ tada $a/\sim\ =a/\sim_{\mathfrak{A}_b}$. Otuda je preslikavanje

$f: D\mathcal{C} \longrightarrow (D\mathfrak{A})\mathcal{B}$ definisano sa $fx/\sim \; = x/\sim_{\mathfrak{A}_b}$, $x \in A_b$, izomorfizam. ⊣

PRIMER 5.13. 1^o Ako su α, β granični ordinali, tada
$D(\alpha+\beta) = D\alpha + D\beta$.

2^o Ako je α granični ordinal, tada $D(\alpha\beta) = (D\alpha)\beta$, na primer, $D(\omega\beta) = (D\omega)\beta = 1.\beta = \beta$. Prema prethodnom takodje važi:

$D\omega^{n+1} = D(\omega\omega^n) = (D\omega)\omega^n = \omega^n$, $D(\omega^\omega) = D(\omega\omega^\omega) = \omega^\omega$, gde je ω^α ordinalno stepenovanje. Slično, $D(\omega+(\omega^*+\omega)\eta) = D\omega + D(\omega^*+\omega)\eta = 1+1.\eta = 1+\eta$, $D(\eta\alpha) = (D\eta)\alpha = \eta\alpha$ itd.

Navedimo neke druge primere 1-kompletnih teorija.

PRIMER 5.14. Neka je T teorija beskonačnih Booleovih algebri. T je 1-kompletna teorija.

DOKAZ: Neka su $\mathfrak{A}, \mathcal{B}$ beskonačne Booleove algebre. Svaka konačno generisana podalgebra algebre $\mathcal{B}$ je konačna, stoga se utapa u $\mathfrak{A}$. Prema posledici 4.1.1 $\mathcal{B}$ je podmodel teorije $T(\mathfrak{A})$, stoga postoji model $\mathcal{C}$ tako da $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \succ \mathfrak{A}$. ⊣

PRIMER 5.15. Neka je T teorija polja karakteristike 0, zajedno sa aksiomama koje iskazuju da svaki polinom sa racionalnim koeficijentima ima koren. Primetimo da su aksiome teorije T izrazive u jeziku $\{+,\cdot,0,1\}$. Teorija T je 1-kompletna.

DOKAZ: Primetimo, pre svega, da je polje $\mathfrak{A}$ model teorije T akko $\mathfrak{A}$ sadrži polje algebarskih brojeva.

Neka su F_1, F_2 polja koja sadrže algebraske brojeve. Prema GLST postoje polja F_1', F_2' kardinalnosti $\max(|F_1|,|F_2|)^+ = k$, tako da $F_1 \prec F_1'$, $F_2 \prec F_2'$. Neka su $\bar{F}_1'$, $\bar{F}_2'$ algebarska zatvorenja redom polja F_1', F_2'. $\bar{F}_1'$, $\bar{F}_2'$ su algebarski zatvorena polja neprebrojive kardinalnosti, te prema Steinitzovoj teoremi $\bar{F}_1' \cong \bar{F}_2'$. Označimo sa $\bar{Q}$ polje algebarskih brojeva. Otuda je prikazani diagram komutativan. Budući da je

$$\begin{tikzcd} \bar{F}_1' \arrow[rr, "\sim"] & & \bar{F}_2' \\ F_1 \arrow[u] & & F_2 \arrow[u] \\ & Q \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

teorija algebarski zatvorenih polja modelski potpuna, to $\bar{Q} \xrightarrow{\prec} \bar{F}_1', \bar{F}_2'$. Neka je φ Σ_1 rečenica i $F_1 \models \varphi$. Budući da je $F_1 \xrightarrow{\cdot} \bar{F}_1'$, to $\bar{F}_1' \models \varphi$. S druge strane $\bar{Q} \xrightarrow{\prec} \bar{F}_1'$, te $\bar{Q} \models \varphi$. Medjutim, $\bar{Q} \longrightarrow F_2$, te $F_2 \models \varphi$. Neka je φ Π_1 rečenica i $F_1 \models \varphi$. Otuda $\bar{Q} \models \varphi$, te zbog $\bar{Q} \xrightarrow{\prec} \bar{F}_2'$ sledi $\bar{F}_2' \models \varphi$. Stoga $F_2 \models \varphi$. Prema prethodnom $F_1 \equiv_1 F_2$. $\dashv$

Primetimo da su u prethodnim primerima teorije T takve da se dodavanjem univerzalne (odnosno egzistencijalne aksiome) one ne menjeju, odnosno postaju protivrečne.

6. Modelski n-potpune teorije

Neka je T teorija jezika L. Prirodno je postaviti pitanje, pod kojim uslovima svaka formula φ jezika L je ekvivalentna nekoj Π_n odnosno Σ_n formuli u okviru jezika L, drugim rečima, u kojim slučajevima je $\Pi_{n,m}(T) = \Sigma_{n,m}(T)$. U ovom delu upravo ispitujemo model-teoretska svojstva ovih teorija.

DEFINICIJA 6.1. Teorija T je modelski n-potpuna akko za svaka dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ važi $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Primetimo, da je prema ovoj definiciji teorija T modelski potpuna akko je T modelski 0-potpuna.

TEOREMA 6.2. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

1° T je modelski n-potpuna.

2° Ako je $\mathfrak{A} \models T$, tada je $T \cup \Sigma_n(\mathfrak{A}) \cup \Pi_n(\mathfrak{A})$ kompletna teorija.

3° Ukoliko je $\mathfrak{A} \models T$, tada je $T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$ kompletna teorija.

4° Ako su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modeli teorije T, tada:

$(\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}) \longrightarrow (\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B})$.

5° Za svaku formulu φ jezika L postoji Π_{n+1} formula θ tako da $T \vdash \theta \Leftrightarrow \varphi$.

6° Za svaku formulu φ jezika L postoji Σ_{n+1} formula θ tako da $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \theta$.

7° Za svaka dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$, ako je $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_n \mathfrak{B}$, tada postoji model $\mathfrak{C}$ tako da prikazani diagram komutira.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, "f", "\prec"', "n"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\prec"'] \end{tikzcd}$$

8° Za svaka dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$, ukoliko je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$, tada postoji model $\mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

9° Diagram $\mathfrak{C} \xleftarrow{\succeq} \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_n \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$, $\mathfrak{C}$ je $|B|^{+}$ - zasićen ima kompletiranje do komutativnog diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, "\prec", "n"'] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\prec"'] \end{tikzcd}$$

DOKAZ:

$(1^{\circ} \Rightarrow 2^{\circ})$ Neka su $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T \cup \Pi_n(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{A})$. Tada su $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ modeli teorije T i $\mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_n \mathfrak{B}_A$, $\mathfrak{A} \to_n \mathfrak{C}_A$. Otuda $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_A$, odnosno $T \cup \Pi_n(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{A})$ je kompletna teorija.

$(2^{\circ} \Rightarrow 3^{\circ})$ Očigledno je $T \cup \Pi_n(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{A}) \subseteq T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$. Budući da je $T \cup \Pi_n(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_n(\mathfrak{A})$ kompletna teorija, to je onda i $T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$ kompletna teorija.

$(3^{\circ} \Rightarrow 1^{\circ})$, Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$, Tada $\mathfrak{A}_A \models T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$ i $\mathfrak{B}_A \models T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$. Teorija $T \cup \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$ je kompletna, te $\mathfrak{A}_A \equiv \mathfrak{B}_A$. Stoga $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

$(1^{\circ} \Rightarrow 8^{\circ})$ Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$. Budući da je T modelski n-potpuna, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, stoga se za $\mathfrak{C}$ može uzeti $\mathfrak{B}$.

$(8^{\circ} \Rightarrow 7^{\circ})$ Neka $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\preceq}_n \mathfrak{B}$. Prema lemi prenosa postoji model $\mathfrak{A}'$, tako da diagram (1) komutira. Po pretpostavci važi 8°, stoga postoji model $\mathfrak{C}$ tako da diagram (2) komutira. Prema prethodnom, diagram (3) komutira.

(1)
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}' & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, "f", "\prec_n"'] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\succ"'] \end{tikzcd}$$
(2)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}' \arrow[r, phantom, "\prec"] & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \arrow[u, "\prec"] \arrow[r, "f", "\prec_n"'] & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\succ"] \arrow[u, "\prec"'] \end{tikzcd}$$
(3)
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, "f", "\prec_n"'] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\succ"'] \end{tikzcd}$$

($7^o \Rightarrow 8^o$) Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$. Po pretpostavci postoji model $\mathfrak{C}'$ tako da

(1)
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C}' & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, phantom, "\prec_n"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\succ"'] \end{tikzcd}$$
(2)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}' \arrow[r] & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \arrow[u, "\prec"] \arrow[r, phantom, "\prec_n"] & \mathfrak{B} \arrow[u, "\prec"'] \end{tikzcd}$$

diagram (1) komutira. Prema lemi prenosa postoji model $\mathfrak{C}$ tako da diagram (2) komutira. Otuda $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$

($8^o \Rightarrow 4^o$). Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$. Otuda $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\Sigma_{n+1})$. Neka je $\mathcal{C}$ Π_{n+1} formula i $\mathfrak{A} \models \mathcal{C}[\bar{a}]$. Budući da važi 8^o, postoji model $\mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. Otuda $\mathfrak{C} \models \mathcal{C}[a]$. Budući da je $\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{C}$ i $\mathcal{C}$ je Π_{n+1} formula prema lemi 1.5. 4^o, važi $\mathfrak{B} \models \mathcal{C}[\bar{a}]$. Stoga je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\Pi_{n+1})$. Budući da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\Sigma_{n+1})$, to je onda $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$.

($4^o \Rightarrow 1^o$). Pretpostavimo da važi 4^o i neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ tako da $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$. Tada $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$. Prema lemi 3.4.2^o postoji $\mathfrak{A}_1$ tako da $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_1$. $\mathfrak{A}$ je model za T, te je $\mathfrak{A}_1 \models T$. Iteracijom prethodne konstrukcije dobija se niz modela:

$\mathfrak{A}_0 \prec_n \mathfrak{B}_0 \prec_n \mathfrak{A}_1 \prec_n \mathfrak{B}_1 \prec_n \ldots$, gde $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \ldots$ i $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2 \prec \ldots$. Neka je $\mathfrak{C} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{B}_n$. Tada $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$, te budući da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, važi: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$

($5^o \Leftrightarrow 6^o$). Dokažimo na primer $5^o \Rightarrow 6^o$. Neka je T modelski n-potpuna teorija i $\mathcal{C}$ formula jezika L(T). Tada postoji Π_{n+1} formula θ tako da $T \vdash \neg\mathcal{C} \Leftrightarrow \theta$. Otuda $T \vdash \mathcal{C} \Leftrightarrow \neg\theta$, i pri tome $\neg\theta$ je Σ_{n+1} formula. Slično se dokazuje $6^o \Rightarrow 5^o$.

($1^o \Rightarrow 5^o$). Neka je T modelski n-potpuna teorija i $\mathcal{C}$ formula za L(T). Pretpostavimo da su $x_1,\ldots,x_m$ slobodne promenljive formule $\mathcal{C}$. Dodajmo m novih konstanti $c_1,\ldots,c_m$ jeziku L(T) i neka je $T' = T \cup \{\varphi(c_1,\dots,c_m)\}$. Dokažimo da je $T \cup T'_{\Pi_{n+1}} \cup \{\neg\varphi\}$ protivurečna teorija. Pretpostavimo da to nije. Tada postoji model $\mathfrak{A} \models T \cup T'_{\Pi_{n+1}} \cup \{\neg\varphi\}$. Otuda važi: (1) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, (2) $\mathfrak{A} \models T$, (3) $\mathfrak{A} \models T'_{\Pi_{n+1}}$. Stoga, prema teoremi 3.5.3° postoji $\mathfrak{B} \models T'$ tako da $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$. Budući da je T modelski n-potpuna, važi: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Kako je $\mathfrak{B} \models T'$, to $\mathfrak{B} \models \varphi$, te $\mathfrak{A} \models \varphi$, što je kontradikcija prema (1). Otuda $T \cup T'_{\Pi_{n+1}} \cup \{\neg\varphi\}$ je protivurečna teorija, te postoje $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k \in T'_{\Pi_{n+1}}$ tako da $T, \neg\varphi, \theta_0, \dots, \theta_k \vdash \perp$, odnosno $T \vdash \theta \Rightarrow \varphi$, gde $\theta = \theta_0 \wedge \dots \wedge \theta_k$. S druge strane, $T, \varphi \models \theta_0, \dots, \theta_k$ te $T \vdash \varphi \Rightarrow \theta$. Otuda $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \theta$. Formule $\theta_0, \dots, \theta_k$ su Π_{n+1} formule, te je θ takodje Π_{n+1} formula, čime je tvrdjenje dokazano.

($5^\circ \Rightarrow 1^\circ$) Neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$, $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$. Otuda $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ (Σ_{n+1}) i $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Tada postoji Σ_{n+1} formula θ tako da $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \theta$, te $\mathfrak{A} \models \theta[\bar{a}]$. Budući da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} (\Sigma_{n+1})$, to je onda $\mathfrak{B} \models \theta[\bar{a}]$. $\mathfrak{B}$ je model teorije T, te $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{a}]$. Ovim je dokazano $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

($1^\circ \Rightarrow 9^\circ$). Neka je $\mathfrak{C} \xleftarrow[\succ]{g} \mathfrak{A} \xrightarrow[\prec_n]{f} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ $\mathfrak{C}$ je $|B|^+$-zasićen model. Budući da je T n-modelski potpuna, to $\mathfrak{C} \xleftarrow[\succ]{g} \mathfrak{A} \xrightarrow[\prec]{f} \mathfrak{B}$. Prema teoremi 16.6. /38/ postoji h da diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

komutira.

($9^\circ \Rightarrow 8^\circ$) Pretpostavimo da T ima gornje diagram svojstvo. Neka je $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$, gde $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$. Neka je $\mathfrak{C}$ $|B|^+$ zasićen model tako da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. Tada po pretpostavci postoji kompletiranje

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, phantom, "\prec"] \arrow[rr, phantom, "\prec_n"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "f"', "\succ"] \end{tikzcd}$$

Prema lemi prenosa može se uzeti da je f utapanje, stoga $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. $\dashv$

POSLEDICA 6.2.1. Teorija T je modelski n-potpuna akko

$$\bigwedge_{m\in\omega} \Pi_{n+1,m}(T) = \Sigma_{n+1,m}(T) = B_m(T).$$

DOKAZ: Prema tvrdjenjima 5° i 6° prethodne teoreme. $\dashv$

POSLEDICA 6.2.2. (A. Robinson). Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

1° T je modelski potpuna.

2° Za svaki model $\mathfrak{A} \models T$, $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ je kompletna teorija.

3° Za svaka dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ važi: $(\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}) \longrightarrow (\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B})$.

4° Svaka formula φ jezika L(T) ekvivalentna je u T sa nekom Π_1 (resp. Σ_1) formulom.

5° (Sacks, Kochen). Ukoliko je $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, tada postoji model $\mathfrak{C}$, tako da prikazani diagram komutira.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec_1"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$$

6° Važi prikazano kompletiranje diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T \\ \mathfrak{C} \text{ je } |\mathfrak{B}|^+ \\ \text{zasićen} \end{array}$$

POSLEDICA 6.2.3. Ukoliko je teorija T modela n-potpuna, onda T ima Π_{n+2} aksiomatizaciju. $\dashv$

DOKAZ: Svaki n-elementaran lanac modela teorije T je elementaran. Stoga, T je zatvorena u odnosu na n-elementarne lance. Otuda, prema posledici 3.5.1. teorija T ima Π_{n+2} aksiomatizaciju,

Može se postaviti pitanje da li postoji drugi opis modelske n-potpunosti, na primer, da li se ovaj pojam može redukovati na modelsku potpunost, recimo proširenjem jezika. Kao što će se videti, odgovor na ovo pitanje je pozitivan. U ovom pristupu potrebno je izvršiti profinjenije Moryizacije teorije T(vid. I.1.4.).

Neka je T teorija jezika L. Za svaku Σ_n formulu φ jezika L uvodi se novi predikatski simbol P_φ. Uvodimo sledeće oznake:

1° $L^{(n)} = L \cup \{P_\varphi \mid \varphi$ je Σ_n formula jezika $L\}$.

2° $T^{(n)} = T \cup \{\forall \vec{x}(\varphi \Leftrightarrow P_\varphi) \mid \varphi$ je Σ_n formula jezika $L\}$.

3° Ako je $\mathfrak{A}$ model jezika L, tada je $\mathfrak{A}^{(n)} = \langle \mathfrak{A}, X_\varphi \rangle_{\varphi \in \Sigma_n \cap L}$, gde je $X_\varphi = \{(a_1,\ldots,a_m) \in A^m \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\ldots, a_m]\}$. Oznaka $\Sigma_n \cap L$ znači da je φ Σ_n formula jezika L. Prema prethodnom, jasno je da X_φ predstavlja interpretaciju predikata P_φ.

4° Teorija $T^{(\omega)} = \bigcup_{n\in\omega} T_n$ je Morlyzacija teorije T. Model $\mathfrak{A}^{(\omega)}$ je jedinstvena ekspanzija modela $\mathfrak{A}$, slično kao u 3°.

LEMA 6.3. Neka je $n \in \omega+1$. Tada

1° Svaki model $\mathfrak{A}$ teorije T ima jedinstvenu ekspanziju do nekog modela teorije $T^{(n)}$.

2° Svaki model $\mathfrak{B}$ teorije $T^{(n)}$ je ekspanzija nekog modela teorije T.

3° $T^{(n)}$ je konzervativno proširenje teorije T.

DOKAZ: 1° Primetimo da je $\mathfrak{A}^{(n)}$ ekspanzija modela $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}^{(n)} \models T^{(n)}$.

S druge strane, predikat P_φ, je definisan u okviru teorije T, odnosno P_φ je eksplicitno definisan. Stoga, prema metodi Padoa, model $\mathfrak{A}$ ima jedinstvenu ekspanziju nekog modela $\mathfrak{B}$ (to je ustvari $\mathfrak{A}^{(n)}$) teorije $T^{(n)}$.

2° Ukoliko je $\mathfrak{B} \models T^{(n)}$, tada za $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \restriction L$ važi: $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(n)}$.

3° Neka je φ rečenica jezika L. Ako je $T \vdash \varphi$, jasno je da je $T^{(n)} \vdash \varphi$. pretpostavimo da je $T^{(n)} \vdash \varphi$. Tada φ važi na svim modelima teorije $T^{(n)}$. Prema 2°, onda važi na svim modelima teorije T. Prema stavu potpunosti je $T \vdash \varphi$. ⊣

TEOREMA 6.4. Neka je $n \in \omega$. Tada

1° $(\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}) \leftrightarrow (\mathfrak{A}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{B}^{(n+1)})$.

2° $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ akko $\mathfrak{A}^{(\omega)} \subseteq \mathfrak{B}^{(\omega)}$ akko $\mathfrak{A}^{(\omega)} < \mathfrak{B}^{(\omega)}$.

3° Teorija T je modelski n-potpuna akko je $T^{(n+1)}$ modelski potpuna.

DOKAZ: 1° ($\Rightarrow$) Neka je $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$, i $\mathfrak{A}^{(n+1)} = \langle \mathfrak{A}, X_\varphi \rangle_{\varphi \in \Sigma_{n+1}}$

$$\mathfrak{B}^{(n+1)} = \langle \mathfrak{B}, Y_\varphi \rangle_{\varphi \in L \cap \Sigma_{n+1}}.$$

Primetimo da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\ (\Sigma_{n+1})$. Budući da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dovoljno je dokazati da je $X_\varphi \subseteq Y_\varphi$ za svaku Σ_{n+1} formulu φ jezika L. Neka je $(\vec{a}) \in X_\varphi$. Tada $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$, te budući da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\Sigma_{n+1})$, $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}]$. Otuda $(\vec{a}) \in Y_\varphi$.

($\Leftarrow$) Neka je $\mathfrak{A}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{B}^{(n+1)}$. Stoga $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Neka je φ Σ_{n+1} formula jezika L i $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Tada $(\vec{a}) \in X_\varphi$, stoga $(\vec{a}) \in Y_\varphi$. Otuda $\mathfrak{B}^{(n+1)} \models \varphi[\vec{a}]$, stoga $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}]$. Otuda $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\Sigma_{n+1})$, odnosno $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$.

2° Slično kao u 1°.

3° ($\Rightarrow$) Neka je T modelski n-potpuna teorija i $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1 \models T^{(n+1)}$, tako da $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1$. Za neke modele $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ je $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^{(n+1)}$ i $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}^{(n+1)}$. Stoga $\mathfrak{A}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{B}^{(n+1)}$, te zbog 1°, $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$. T je modelski n-potpuna, otuda $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ Prema 2° je $\mathfrak{A}^{(\omega)} < \mathfrak{B}^{(\omega)}$. Budući da su $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ redukti redom modela $\mathfrak{A}^{(\omega)}$, $\mathfrak{B}^{(\omega)}$ to $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{B}_1$.

($\Leftarrow$) Neka je $T^{(n+1)}$ modelski potpuna teorija i $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ tako da $\mathfrak{A} <_n \mathfrak{B}$. Tada $\mathfrak{A}^{(n+1)} < \mathfrak{B}^{(n+1)}$, te zbog modelske potpunosti teorije $T^{(n+1)}$, važi $\mathfrak{A}^{(n+1)} < \mathfrak{B}^{(n+1)}$. Budući da su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ redukti modela $\mathfrak{A}^{(n+1)}$, $\mathfrak{B}^{(n+1)}$, to $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$. ⊣

PRIMER 6.5. 1° (A. Robinson, vid. /38/). Teorija linearnog gustog uredjenja bez krajeva je modelski potpuna teorija.

2^o Teorija linearnog gustog uredjenja sa krajevima je modelski 1-potpuna ali nije modelski potpuna.

3^o Teorija gustog linearnog uredjenja je modelski 2-potpuna ali nije modelski 1-potpuna.

4^o Na osnovu jednog rezultata J. Keislera (vid. zad. 5. 4.7. /7/), teorija atomičnih Booleovih algebri je modelski 1-potpuna. Stoga je svaka formula jezika Booleovih algebri ekvivalentna Π_2 formuli u okviru teorije atomičnih Booleovih algebri.

5^o Teorija linearnog diskretnog uredjenja je modelski 1-potpuna.

Sledeće tvrdjenje daje dovoljne uslove za modelsku n-potpunost. Ono je uopštenje Lindströmovog teorema (T.3.1. 12. /7/).

TEOREMA 6.6. Neka teorija T zadovoljava sledeće uslove:

1^o T nema konačnih modela.

2^o T je kategorična u nekom kardinalu $\mathcal{L}$.

3^o T ima Π_{n+1} aksiomatizaciju.

Tada je T modelski n-potpuna.

DOKAZ: Prema prikazanim svojstvima teorije $T^{(n+1)}$, neposredno zaključujemo:

1^o $T^{(n+1)}$ nema konačnih modela.

2^o $T^{(n+1)}$ je $\mathcal{L}$-kategorična.

Dokažimo da je takodje

3^o $T^{(n+1)}$ je zatvorena u odnosu na unije lanaca. Prema teoremi 3.5.6^o i posledici 3.5.1, dovoljno je dokazati da je zatvorena u odnosu na prebrojive lance. Neka je $\mathfrak{A}_o \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots$ lanac modela teorije $T^{(n+1)}$. Tada za neke modele $\mathfrak{B}_o$, $\mathfrak{B}_1, \ldots$ teorije T važi $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{B}_j^{(n+1)}$, $j \in \omega$. Otuda prema teoremi 6.4. važi $\mathfrak{B}_o \prec_n \mathfrak{B}_1 \prec_n \mathfrak{B}_2 \prec_n \ldots$. Neka je

$\mathfrak{B} = \bigcup_{j\in\omega} \mathfrak{B}_j$. Prema posledici 3.5.1. $\mathfrak{B}$ je model teorije T, stoga $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{(n+1)}$ je model teorije $T^{(n+1)}$. S druge strane $\mathfrak{A} = \bigcup_{j\in\omega} \mathfrak{A}_j$, te je $T^{(n+1)}$ zatvorena u odnosu na unije lanaca modela, odnosno 3° važi.

Prema prethodnom, ispunjeni su uslovi Lindströmove teoreme, stoga je $T^{(n+1)}$ modelski potpuna. Prema $6.4.3^\circ$, T je modelski n-poptpuna. $\dashv$

Prethodnim tvrdjenjima opisane su teorije koje dopuštaju redukciju formula na Π_n formule za $n \geqslant 1$. Stoga je ostao otvoren slučaj, kada teorija T dopušta svodjenje formule na Π_0 formule. Kao što je A. Robinson pokazao, to su upravo podmodelski potpune teorije.

TEOREMA 6.7. Sledeća tvrdjenje su ekvivalentna:

1° T je podmodelski potpuna.

2° T dopušta eliminaciju kvantifikatora.

3° Svaki diagram $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ ima popunu do amalgama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "\prec"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad , \ \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T.$$

4° Za svaka dva modela $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$, kadgod $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, tada $\mathfrak{B}_A \equiv_1 \mathfrak{C}_A$.

5° Svaki diagram $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ ima dopunu do amalgama:
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "\prec_2"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

6° Svaki diagram $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ ima dopunu do amalgama
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "\prec_1"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

PRIMEDBA: Tvrdjenja $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ dokazan su u /38/. Medjutim trena primetiti da prikazani dokaz u smeru $3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$ (str.66) nije u potpunosti korektan, Sacks konstruiše jedan beskonačan diagram i preslikavanje j_∞ za koje tvrdi da je izomorfizam. Medjutim, prema toj konstrukciji, najviše što se može reći je da je j_∞ utapanje. To sledi iz činjenice da beskonačan diagram (str.66) ne mora da bude u potpunosti komutativan. Iz toga razloga, ovde dopunjujemo ovaj dokaz.

DOKAZ: $(3^{\circ} \Longrightarrow 4^{\circ})$. Neka su $\mathfrak{B}_A$, $\mathfrak{C}_A$ modeli teorije $T \cup \Delta_A$. Otuda, može se uzeti da je $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$. Prema pretpostavci postoje amalgami:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "\prec"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D}' & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, "\prec"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

te prema teoremi 5.2. T je 1-kompletna teorija.

$(4^{\circ} \Longrightarrow 5^{\circ})$ Neka je (1) $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$. Prema pretpostavci, $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ je 1-kompletna teorija, stoga prema teoremi 5.2., (1) se dopunjuje do diagrama (2) odnosno amalgama (3). Otuda, jasno je da je h 1-elementarno utapanje.

$$(2) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D}_A & \\ \mathfrak{B}_A \arrow[ur, "\prec_1"] & & \mathfrak{C}_A \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad (3) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "h"] \arrow[ur, "\prec_1"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$(5^{\circ} \Longrightarrow 1^{\circ})$. Pretpostavimo da T ima svojstvo amalgama opisano u 5°.

(1) T je modelski potpuna.

Zaista, neka je $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$. Tada se diagram $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ dopunjuje

$$(2) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "\prec_1"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\supseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] & \end{tikzcd} \qquad (3) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "h"] \arrow[ur, "\prec_1"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, "f"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

do amalgama (2). Otuda $\mathfrak{B} \prec_1 \mathfrak{C}$. Stoga, prema posledici 6.2.2. T je modelski potpuna, odnosno tvrdjenje (1) važi.

Dokažimo da je $T \cup \Delta_A$ kompletna teorija za ma koji podmodel $\mathfrak{A}$ teorije T. Neka su $\mathfrak{B}_A$, $\mathfrak{C}_A$ modeli teorije $T \cup \Delta_A$. Otuda $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$. Prema pretpostavci, ovaj diagram se dopunjuje do amalgama (3). Dokažimo da je $\mathfrak{D}$ takodje model teorije T. Budući da je T modelski potpuna, prema posledici 6.2.3, T ima Π_2 aksiome. Dalje, $\mathfrak{B}$ je model za T i h: $\mathfrak{B} \xrightarrow{\prec_2} \mathfrak{D}$, stoga je $\mathfrak{D}$ model teorije T.

T je modelski potpuna, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$ su modeli teorije T, stoga su preslikavanja h,f elementarna. Otuda $\mathcal{B}_A \equiv \mathcal{C}_A$. Stoga je teorija T kompletna, odnosno T je podmodelski potpuna.

($3^o \Longrightarrow 6^o$) trivijalno.

($6^o \Longrightarrow 4^o$) Neka $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models T$ i $\mathfrak{A} \leq \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Tada po pretpostavci postoje amalgami

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{D} & & & & \mathcal{D}' & \\
\mathcal{B} \arrow[ur, "\forall_1"] & & \mathcal{C} \arrow[ul] & & \mathcal{B} \arrow[ur] & & \mathcal{C} \arrow[ul, "\forall_1"'] \\
 & \mathfrak{A} \arrow[ul, phantom, "\supseteq"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & & & & \mathfrak{A} \arrow[ul, phantom, "\supseteq"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

Neka je $\mathscr{C}$ univerzalna formula i $\vec{a} \in A$. Pretpostavimo da je $\mathcal{B} \models \mathscr{C}[\vec{a}]$. Tada $\mathcal{D} \models \mathscr{C}[\vec{a}]$, te $\mathcal{C} \models \mathscr{C}[\vec{a}]$.

Slično ako je $\mathscr{C}$ egzistencijalna formula, $\mathcal{B} \models \mathscr{C}[\vec{a}]$, tada $\mathcal{C} \models \mathscr{C}[\vec{a}]$. Otuda $\mathcal{B}_A \equiv_1 \mathcal{C}_A$.

Tvdjenja ($1^o \Longrightarrow 2^o$), ($2^o \Longrightarrow 3^o$) dokazana su u /38/ .

PRIMEDBA: U tvrdjenjima $3^o, 5^o$ mogu se oslabiti baze amalgama, odnosno dovoljno je da se diagrami tipa $\mathcal{B} \geq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models T$ dopunjuju do odgovarajućih amalgama. To sledi iz činjenice da se svaki diagram $\mathcal{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{A} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$, prema lemi prenosa, dopunjuje do komutativnog diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{B}' & \mathcal{C}' & \mathcal{C} \arrow[l, "\sim"'] \\
 & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

V DEO

Modelsko kompletiranje

1. Modelsko kompletiranje modela

Jedan od problema teorije modela je da se za datu klasu modela K odredi klasa K′ tako da se svaki model K kompletira na odredjen način nekim modelom klase K′. Navodimo neke primere koji ilustruju ovaj pojam.

1^{o} K je klasa uredjenja, K′ je klasa kompletnih uredjenja.

2^{o} K je klasa polja, K′ je klasa algebarski zatvorenih polja.

DEFINICIJA 1.1. Neka su K, K′ dve klase modela u istom jeziku (ili je bar jezik klase K sadržan u jeziku klase K′), gde je K′ zatvorena u odnosu na izomorfne slike. Neka je $\mathfrak{A} \in$ K. Par $\langle \mathfrak{B}, p \rangle$ je modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$ (u klasi K′) ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi:

1^{o} $\mathfrak{B} \in K'$, 2^{o} $p\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, 3^{o} Za svaki model $\mathfrak{C} \in K'$ ako je $\mathfrak{B} \xleftarrow{p} \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{C}$ tada postoji utapanje g tako da prikazani diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[rr, "g"] & & \mathfrak{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

LEMA 1.2. Ako je $\langle \mathfrak{B}, p \rangle$ modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \in K'$ i $p\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}'$, tada je $\langle \mathfrak{B}', p \rangle$ modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$.

DOKAZ: Ako je $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$, gde $\mathfrak{C} \in K'$, tada postoji utapanje h tako da

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[rr, "h"] & & \mathfrak{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}' \arrow[rr, "h'"] & & \mathfrak{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

diagram (1) komutira. Stoga i diagram (2) komutira, gde $h' = h \restriction \mathfrak{B}'$. $\dashv$

LEMA 1.3. Neka su $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$ i $\langle \mathfrak{C}, q\rangle$ dva modelska kompletiranja modela $\mathfrak{A}$ i neka su f, g utapanja tako da prikazani diagrami komutiraju i bar jedno od preslikavanja f,g nije <u>na</u>. Tada postoji $\mathfrak{B}' \subsetneq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \in K'$ tako da je $\langle \mathfrak{B}', p\rangle$ modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{B} & & \mathfrak{C} \arrow[ll, "g"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

DOKAZ: Neka je $\mathfrak{B}' = gf[\mathfrak{B}]$. Otuda $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$. Budući da jedno od preslikavanja f,g nije <u>na</u>, to $\mathfrak{B}' \subsetneq \mathfrak{B}$. Neka je $a \in A$. Važe relacije $fp = q$, $gq = p$, stoga $gfp = p$. Otuda $pa = (gf)pa$, te $pa \in B'$. Budući da $gf: \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}'$, to $\mathfrak{B}' \in K'$, te prema prethodnoj lemi $\langle \mathfrak{B}', p\rangle$ je modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$. $\dashv$

LEMA 1.4. Neka je λ granični ordinal ($\lambda > 0$) i $\langle \mathfrak{B}_\xi, p\rangle_{\xi<\lambda}$ niz modelskih kompletiranja modela $\mathfrak{A}$. Ako je $\mathfrak{B} = \bigcap_{\xi<\lambda} \mathfrak{B}_\xi$ i $\mathfrak{B} \in K'$, tada je $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$ modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$.

DOKAZ: Neka je $a \in A$. Tada $pa \in B_\xi$ za sve $\xi < \lambda$. Otuda $pa \in B$, stoga $p: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Prema lemi 1.2. $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$ je modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$. $\dashv$

TEOREMA 1.5. Neka je klasa K' zatvorena u odnosu na izomorfne slike i neprazne opadajuće lance. Tada za svaka dva modelska kompletiranja $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$, $\langle \mathfrak{C}, q\rangle$ modela $\mathfrak{A}$ i utapanja f,g takva da prikazani diagrami komutiraju

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{B} & & \mathfrak{C} \arrow[ll, "g"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

sledi da su f,g izomorfizmi.

DOKAZ: Pretpostavimo da postoje modelska kompletiranja $\langle \mathfrak{B}, p\rangle$, $\langle \mathfrak{C}, q\rangle$ modela $\mathfrak{A}$ i utapanja f,g tako da važe relacije $fp = q$, $gq = p$ i jedno od preslikavanja f,g nije <u>na</u>. Odredjujemo opadajući lanac modela $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \supsetneq \mathfrak{B}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{B}_\xi \supsetneq \ldots$ gde $\xi < |B|^+ = k$. Prema lemi 1.3. postoji $\mathfrak{B}_1 \subsetneq \mathfrak{B}_0$ tako da je $\langle \mathcal{L}_1, p\rangle$ modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{L}_\xi$ odredjen ($\xi < \lambda$). Tada je $\mathcal{L}_\xi \subsetneq \mathcal{L}$ i $\langle \mathcal{L}_\xi, p\rangle$ je modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$. Ukoliko je $\lambda = \xi + 1$, $\mathcal{L}_\lambda$ konstruišemo kao što je uradjeno u slučaju $\lambda = 1$. Ako je $\lambda < k$ granični ordinal, tada $\mathcal{L}_\lambda = \bigcap_{\xi<\lambda} \mathcal{L}_\xi$. Budući da je za sve $\xi<\lambda$ $p: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{L}_\xi$, to je $\mathcal{L}_\lambda$ neprazan, stoga $\mathcal{L}_\lambda \in K'$ i prema lemi 1.2. $\langle \mathcal{L}_\lambda, p\rangle$ je modelsko kompletiranje modela $\mathfrak{A}$. Otuda je i model $\mathcal{D} = \bigcap_{\xi<k} \mathcal{L}_\xi$ neprazan i $\langle \mathcal{D}, p\rangle$ je modelsko kompletiranje za $\mathfrak{A}$. S druge strane $B_\xi - B_{\xi+1} \neq \emptyset$, te $|\bigcup_{\xi\in k}(B_\xi - B_{\xi+1})| \geq k$, što je u suprotnosti sa $\bigcup(B_\xi - B_{\xi+1}) \subseteq B_0$ i $|B_0| < k$. $\dashv$

POSLEDICA 1.5.1. Ako klasa K' zadovoljava uslove kao u prethodnoj teoremi, tada su sva (ako ih ima) modelska kompletiranja (u K') modela $\mathfrak{A}$ izomorfna.

POSLEDICA 1.5.2. Neka model $\mathfrak{A} \in K$ ima modelsko kompletiranje $\langle \mathcal{L}, p\rangle$ u klasi K'. Tada postoji modelsko kompletiranje $\langle \mathcal{L}, i_A\rangle$ modela $\mathfrak{A}$, gde je i_A inkluziono preslikavanje.

DOKAZ: Prema lemi prenosa postoji model $\mathcal{C}$ tako da prikazani diagram komutira. Stoga je $\langle \mathcal{C}, i_A\rangle$ modelsko kompletiranje za $\mathfrak{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} & & \mathcal{L} \arrow[ll, "\sim"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "i_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$\dashv$

POSLEDICA 1.5.3. Ukoliko je $p: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ i $\mathfrak{A}$ ima modelsko kompletiranje u K', tada postoji modelsko kompletiranje $\langle \mathcal{L}, p\rangle$ za $\mathfrak{A}$, tako da $\mathcal{L} \leq \mathcal{C}$.

DOKAZ: Ako $\mathfrak{A}$ ima modelsko kompletiranje, tada postoji modelsko kompletiranje $\langle \mathcal{L}', i_A\rangle$ modela $\mathfrak{A}$. Neka je f takvo da $fi_A = p$ i $\mathcal{L} = f[\mathcal{L}']$. Tada $\langle \mathcal{L}, p\rangle$ zadovoljava tvrdjenje. $\dashv$

POSLEDICA 1.6.4. Neka su $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in K$ i $\langle \mathfrak{B}_1, p \rangle$, $\langle \mathfrak{B}_2, q \rangle$ modelska komplatiranja redom za modele $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Tada

1° Ako $f: \mathfrak{A}_1 \longrightarrow \mathfrak{A}_2$, tada se f produžuje do $\bar{f}: \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathfrak{B}_2$

2° Ako je klasa K′ kao u teoremi 1.6, tada se $f: \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_2$ produžuje do $\bar{f}: \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}_2$.

DOKAZ: 1° U prikazanom diagramu prvo odredjujemo h, a potom $\bar{f}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}_1 \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & \mathfrak{B}_2 \\
\mathfrak{A}_1 \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & \mathfrak{A}_2 \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}$$

2° Ako $f: \mathfrak{A}_1 \longrightarrow \mathfrak{A}_2$, tada su $\langle \mathfrak{B}_1, p \rangle$ i $\langle \mathfrak{B}_2, qf \rangle$ modelska kompletiranja za $\mathfrak{A}$, te prema teoremi 1.6. tvrdjenje sledi.

2. Modelsko kompletiranje teorije

A. Robinson je uveo pojam modelskog upotpunjenja (kompletiranja) teorije što se pokazalo naročito korisnim u izučavanju algebarskih teorija. To uostalom ilustruje sledeće (delimično pristrasno) mišljenje J. Hirschfelda i W. Wheelera /13/ : "Sa gledišta algebre, koncept modelskog kompletiranja je najvažniji matematički koncept uveden od strane logičara".

DEFINICIJA 2.1. Neka su T i T* teorije u istom jeziku. T* je modelsko kompletiranje teorije T akko važi:

1° $T \subseteq T^*$, 2° $(T^*)_{\Pi_1} \subseteq T$, 3° Za svaki model $\mathfrak{A}$ teorije T, $T^* \cup \Delta_A$ je kompletna teorija.

Prethodna definicija je sintaksnog karaktera. Navodimo više algebarski opis modelskog kompletiranja teorije.

LEMA 2.2. T^* je modelsko kompletiranje teorije T akko važi:

1° Svaki model teorije T^* je model teorije T.

2° Svaki model teorije T je podmodel teorije T^*.

3° Za svaki model $\mathfrak{A}$ teorije T i svaka dva modela $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T^*$ diagram $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ dopunjuje se do prikazanog amalgama.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

DOKAZ: (1) Prema stavu potpunosti, $T \subseteq T^*$ je ekvivalentno sa tim da je svaki model teorije T^* model teorije T.

(2) Dokažimo da je $(T^*)_{\Pi_1} \subseteq T \longleftrightarrow \bigwedge_{\mathfrak{A} \models T} \bigvee_{\mathfrak{B} \models T^*} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

($\Longrightarrow$) Neka je $\mathfrak{A} \models T$. Budući da je $(T^*)_{\Pi_1} \subseteq T$, to $\mathfrak{A} \models T^*_{\Pi_1}$. Otuda, prema teoremi IV. $3.5.3^\circ$, postoji model $\mathfrak{B} \models T$ tako da $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

($\Longleftarrow$) Neka je φ univerzalna rečenica i $T^* \vdash \varphi$. Otuda φ važi na svim modelima teorije T^*. Budući da je svaki model teorije T podmodel teorije T^*, to φ važi na svim modelima teorije T. Stoga, prema stavu potpunosti, $T \vdash \varphi$, Otuda $(T^*)_{\Pi_1} \subseteq T$.

(3) Primetimo da je uslov: $T \cup \Delta_A$ je kompletna teorija, ekvivalentan sa svojstvom 3° amalgamiranja.

Prema prethodnom, uslovi leme su ekvivalentni sa odgovarajućim uslovima definicije 2.1. $\dashv$

Ukoliko teorija T ima modelsko kompletiranje, tada je ono jedinstveno, kao što je to pokazao A. Robinson. Dokaz ove činjenice može se naći na primer u /13/.

U sledećim tvrdjenjima opisan je odnos modelskog kompletiranja teorije prema modelskoj i podmodelskoj potpunosti.

TEOREMA 2.3. Teorija T je podmodelski potpuna akko je T modelsko upotpunjenje teorije T_{Π_1}.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka je T podmodelski potpuna teorija, Jasno je da su uslovi $1^{\circ}, 2^{\circ}$ definicije 2.1. ispunjeni. Dalje, neka je $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_1}$. Otuda, prema teoremi IV.3.5.3° $\mathfrak{A}$ je podmodel teorije T, te budući da je T podmodelski potpuna, $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ je kompletna teorija. Prema tome, ispunjen je i uslov 3° definicije 2.1.

($\Leftarrow$) Neka je T modelsko kompletiranje za T_{Π_1}, i $\mathfrak{A}$ podmodel teorije T. Tada je $\mathfrak{A} \models T_{\Pi_1}$, stoga je $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ kompletna teorija. Otuda je T podmodelski potpuna teorija. $\dashv$

POSLEDICA 2.3.1. (A. Robinson) Ukoliko je T modelsko kompletiranje univerzalne teorije, tada T dopušta eliminaciju kvantifikatora. $\dashv$

TEOREMA 2.4. Ukoliko je T* modelsko upotpunjenje neke teorije T, tada je T* modelski potpuna teorija.

DOKAZ: Neka je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, gde $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T^*$. Budući da je $T \subseteq T^*$, to $\mathfrak{A} \models T$. Otuda diagram $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ima dopunu do amalagama

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\prec"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "\succ"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "\supseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] & \end{tikzcd}$$

Otuda $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Označimo sa $\mathfrak{M}(T)$ klasu modela teorije T. Pokazuje se da je u izvesnim slučajevima $\mathfrak{M}(T)$ takozvana Jonssonova klasa modela. Inače, klasa modela K je Jonssonova ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi (vid. /4/ ili /29/):

1° K je zatvorena u odnosu na izomorfne slike.

2° K sadrži modele proizvoljne beskonačne kardinalnosti.

3° Ako su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$, tada postoji $\mathfrak{C} \in K$ tako da $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \leftarrow \mathfrak{B}$

4° K ima svojstvo amalgamiranja: Svaki diagram $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in K$ ima popunu do prikazanog amalgama.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

5° K je zatvorena u odnosu na unije lanaca modela iz K.

6° Neka je α kardinal $\geq \omega$. Ako je $\mathfrak{A} \in K$, $X \subseteq A$ i $|X| < \alpha$, tada postoji $\mathcal{B} \in K$ tako da $X \subseteq B$, $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ i $|B| \leq \alpha$.

Ukoliko je T bilo koja teorija jezika kardinalnosti α, tada za klasu $\mathfrak{M}(T)$ uslov 1° je očigledno zadovoljen. Prema GLST i DLST uslovi 2°, 6° su takodje zadovoljeni. Prema posledici IV.3.5.1. $\mathfrak{M}(T)$ zadovoljava uslov 5° ukoliko T ima Π_2 aksiomatizaciju. Primetimo da ako T ima prost model, tada je 3° posledica uslova 4°.

Kažemo da je T Jonssonova teorija ukoliko je $\mathfrak{M}(T)$ Jonssonova klasa. Sledeće tvrdjenje ima primene u ispitivanju koje su teorije Jonssonove.

TEOREMA 2.5. Neka je T* modelsko kompletiranje teorije T. Tada $\mathfrak{M}(T)$ i $\mathfrak{M}(T^*)$ imaju svojstvo amalgama.

DOKAZ: Dokažimo da T ima svojstvo amalgama. Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, modeli teorije T i $\mathcal{B} \xleftarrow{f} \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$. Tada postoje modeli $\mathcal{B}', \mathcal{C}' \models T$ tako da $\mathcal{B} \xrightarrow{f'} \mathcal{B}'$, $\mathcal{C} \xrightarrow{h'} \mathcal{C}'$. Budući da je T* modelsko upotpunjenje teorije T, to se diagram $\mathcal{B}' \xleftarrow{f'f} \mathcal{A} \xrightarrow{gg'} \mathcal{C}$ dopunjuje do amalgama (1)

$$(1)\quad \begin{tikzcd} & \mathcal{D} & \\ \mathcal{B}' \arrow[ur, "p"] & & \mathcal{C}' \arrow[ul, "q"'] \\ & \mathcal{A} \arrow[ul, "f'f"] \arrow[ur, "g'g"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)\quad \begin{tikzcd} & \mathcal{D} & \\ \mathcal{B} \arrow[ur, "pf'"] & & \mathcal{C} \arrow[ul, "qg'"'] \\ & \mathcal{A} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Stoga je i diagram (2) komutativan. Budući da je $\mathcal{D} \equiv \mathcal{B}'$ to $\mathcal{D} \models T^*$, pa je onda i $\mathcal{D} \models T$.

Da teorija T* takodje ima svojstvo amalgama (i to u strožijoj formi, budući da je zbog modelske potpunosti teorije T, svako utapanje u amalagamu elementarno) sledi iz činjenice da je svaki model teorije T* takodje model teorije T i da je gore dobijeni model $\mathcal{D}$ model teorije T*. $\dashv$

POSLEDICA 2.6. Ako teorije T ima Π_2 aksiomatizaciju, algebarski prost model i modelsko upotpunjenje, tada je $\mathfrak{M}(T)$ Jonssonova klasa za $\alpha \geqslant \|L(T)\|$.

Pokazalo se da izvesne teorije(kao na primer teorija formalnih realnih polja) nemaju modelsko upotpunjenje, već oslabljenu verziju ovog pojma. U tom smislu Eli Bers (1969) uvela je pojam modelskog pridruženja teorije T, DEFINICIJA 2.7. T^* je modelsko pridruženje teorije T akko važi:

1° $T_{\Pi_1} = (T^*)_{\Pi_1}$, odnosno svaki model za T je podmodel teorije T^* i obratno.

2° T^* je modelski potpuna teorija.

Primetimo, ukoliko je T modelski potpuna teorija, tada je uslov 1° ispunjen za teoriju T_{Π_1}. Stoga, svaka modelski potpuna teorija je modelsko pridruženje neke (univerzalne) teorije. Dalje, modelsko pridruženje i modelsko upotpunjenje imaju mnoga zajednička svojstva i imaju dalju generalizaciju na takozvani apstraktni (Robinsonov) forsing. Iscrpan prikaz teorija apstraktnog forsinga i veze sa pomenutim pojmovima može se naći na primer u /13/.

Radi islustracije navodimo sledeću vezu izmedju modelskog upotpunjenja i modelskog pridruženja.

TEOREMA 2.8. (Eklof, Sabbagh) Neka je T^* modelsko pridruženje teorije T. T^* je modelsko upotpunjenje teorije T akko

1° $T \subseteq T^*$, 2° T ima svojstvo amalagamiranja: Svaki diagram. $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \models T$ ima dopunu do amalgama:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} & \\ \mathcal{B} \arrow[ur] & & \mathcal{C} \arrow[ul] \\ & \mathcal{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \mathcal{D} \models T$$

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka je T^* modelsko pridruženje teorije T. Pretpostavimo da je $T \subseteq T^*$ i da T ima svojstva amalgama. Tada su uslovi 1° i 2° definicije 2.1. ispunjeni. Neka je $\mathcal{A}$ model teorije T i (1) $\mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$, gde $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models T^*$. Budući da je $T \subseteq T^*$, to su $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ modeli teorije T, stoga postoji amalgam (2) koji kompletira diagram (1). Svaki model teorije T utapa se u neki model teorije T^*, stoga postoji $\mathcal{D}' \models T$ tako da $\mathcal{D} \xrightarrow{h} \mathcal{D}'$. Prema modelskoj potpunosti teorije T i na osnovu amalgama (2), amalgam (3) je komutativan i utapanja hf, hg su elementarna. Stoga je i uslov 3° definicije 2.1. ispunjen.

(2)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} & \\ \mathcal{L} \arrow[ur, "f"] & & \mathcal{C} \arrow[ul, "g"'] \\ & \mathcal{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}' & \\ \mathcal{L} \arrow[ur, "hf"] & & \mathcal{C} \arrow[ul, "hg"'] \\ & \mathcal{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Ovo tvrdjenje je posledica teoreme 2.5. $\dashv$

Medju važnijim algebarskim teorijama sledeće imaju modelska upotpunjenje.

1° T je teorija linearnog uredjenja, T* je teorija linearnog gustog uredjenja bez krajeva.

2° T je teorija polja, T* je teorija algebarski zatvorenih polja.

3° T je teorija uredjenih polja, T* je teorija uredjenih, realnih, zatvorenih polja.

Dokažimo na primer, da je teorija T* algebarski zatvorenih polja modelsko kompletiranje teorije polja T. Napomenimo da je A. Robinson u /32/ na četiri načina dokazao da je T* modelski potpuna. Dokaz koji prikazujemo je jedna varijanta, koja se razlikuje od ovih dokaza. U dokazu koristimo algebarske leme, čiji se dokazi (ili osnove za dokaz) mogu naći na primer u /2/.

LEMA 2.9. Svako polje F je sadržano u najmanjem algebarski zatvorenom polju. Drugim rečima, svako polje ima modelsko kompletiranje u smislu definicije 1.1. relativno prema klasi algebarski zatvorenih polja.

DOKAZ: Neka je $\bar{F}$ algebarsko zatvorenje polja F. Tada je $\bar{F}$ iste transcedentalne dimenzije kao F. Stoga, za svako algebarski zatvoreno polje K, diagram $\bar{F} \xleftarrow{i_F} F \xrightarrow{f} K$ ima dopunu do prikazanog diagrama. $\dashv$

$$\begin{tikzcd} \bar{F} \arrow[rr, "h"] & & K \\ & F \arrow[ul, "i_F"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

U prethodnoj lemi koristili smo činjenicu da svako polje F ima algebarsko **zatvorenje**. Navodimo jedan model teoretski dokaz ove činjenice. Pritom koristimo sledeće algebarsko tvrdjenje.

LEMA 2.10. Ako je F polje i p polinom nad F, tada postoji polje K tako da $F \subseteq K$ i p ima koren u K. $\dashv$

TEOREMA 2.11. Svako polje je sadržano u nekom algebarski zatvorenom polju.

DOKAZ: Neka je F polje i $\Gamma = T \cup \Delta_F \cup \{p(c_p) = 0 \mid p$ je polinom stepena ≥ 1 nad $F\}$, gde je c_p nova konstanta za svaki polinom p. Dokažimo da je Γ neprotivurečna teorija. Neka je Γ_0 konačan podskup od Γ i $p_1(c_p^1),\dots,p_n(c_p^n)$ polinomi koji se pojavljuju u Γ_0. Prema prethodnoj lemi, postoji niz polja $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n$, tako da polinom p_i ima koren u F_i. Stoga $F_n \models \Gamma_0$. Prema stavu kompaktnosti Γ_0 je neprotivurečna teorija, stoga postoji polje K takvo da svaki polinom stepena ≥ 1 nad F ima koren u K. Otuda postoji niz polja $F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \dots$ tako da svaki polinom stepena ≥ 1 nad K_n ima koren u K_{n+1}. Teorija polja T ima Π_2 aksiome stoga je zatvoren u odnosu na unije lanaca, otuda je $K = \bigcup_{n\in\omega} K_n$ takodje polje. Budući da svaki polinom nad K sadrži konačno mnogo konstanata i da su sve one sadržane u nekom polju K_n, lako je videti da K algebarski zatvoreno polje. $\dashv$

Ukoliko je teorija T zatvorena u odnosu na unije lanaca, na vrlo sličan način dokazujemo da se svaki model $\mathfrak{A}$ teorije T proširuje do nekog **egzistencijalno** kompletnog modela $\mathfrak{B} \models T$ ($\mathfrak{B}$ ima svojstvo: $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \models T \longrightarrow \mathfrak{B} \prec_1 \mathfrak{C}$). Za to je dovoljno uočiti teiriju $\Gamma = T \cup \Delta_{\mathfrak{A}} \cup \{ \varphi(c_\varphi) \mid \varphi$ je Σ_1 formula u jeziku L_A konzistentna sa $T\}$. Inače, ovo tvrdjenje je ključni deo u dokazu Lindströmove teoreme (vid. /7/).

LEMA 2.12. Teorija algebarski zatvorenih polja je zatvorena u odnosu na opadajuće lance.

DOKAZ: Neka je $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq K_\xi \supseteq \dots \xi<\alpha$, niz algebarski zatvorenih polja i $K = \bigcup_{\xi<\alpha} K_\xi$. Lako je videti da je K polje. Ako je p polinom nad K stepena ≥ 1, tada p ima faktorizaciju na linearne polinome u svakom polju K_ξ, stoga p ima faktorizaciju na linearne faktore i u polju K. $\dashv$

LEMA 2.13. Teorija algebarski zatvorenih polja odredjene karakteristike je k-kategorična, stoga je prema Lindströmovoj teoremi modelski potpuna.

TEOREMA 2.13. Teorija T* algebarski zatvorenih polja je modelsko kompletiranje teorije polja T.

DOKAZ: Lako je videti da su uslovi 1^o i 2^o definicije 2.1. ispunjeni. Dalje, neka je F polje i K, K' algebarski zatvorena polja tako da $K \xleftarrow{f} F \xrightarrow{g} K'$. Algebarsko zatvorenje $\bar{F}$ polja F je modelsko kompletiranje polja F, otuda prema posledici 1.6.3. F ima modelska kompletiranja H,H' tako da važi diagram (1)

$$(1)\quad K \supseteq H \xleftarrow{f} F \xrightarrow{g} H' \subseteq K' \qquad (2)\quad \begin{tikzcd} K \succ H \arrow[rr, "\sim"] & & H' \prec K' \\ & F \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Budući da je T* modelski potpuna i zatvorena u odnosu na opadajuće lance, to se prema teoremi 1.6. diagram (1) dopunjuje do komutativnog diagrama (2). Otuda, $T \cup \Delta_A$ je kompletna teorija, te su ispunjeni uslovi definicije 2.1. $\dashv$

POSLEDICA 2.13.1. Neka je T_p teorija polja karakteristike p. T_p ima atomičan model Z_p (ili Q u slučaju p=0), stoga prema posledici 2.6. $\mathfrak{M}(T_p)$ je Jonssonova klasa modela. $\dashv$

POSLEDICA 2.13.2. Ukoliko operaciju $x \longrightarrow x^{-1}$ definišemo i za x = 0, na primer, uzimajući $0^{-1} = 0$, tada postoji univerzalna aksiomatika teorije polja, preciznije, aksioma $\forall x(x \neq 0 \Rightarrow \exists y\, xy = 1)$, može se zameniti univerzalnom aksiomom $x \neq 0 \Rightarrow x.x^{-1} = 1$. U takvom slučaju T je modelsko kompletiranje univerzalne teorije, te prema posledici 2.3.1, T je podmodelski potpuna i dopušta eliminaciju kvantifikatora. $\dashv$

Prema teoremi 2.3. svaka podmodelski potpuna teorija je modelsko kompletiranje neke (univerzalne) teorije. Sledeća lema može biti od kotisti u ispitivanju podmodelske potpunosti.

LEMA 2.14. Teorija T je podmodelski potpuna akko je za svaki konačno generisani podmodel $\mathfrak{A}$ teorije T, $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ kompletna teorija.

DOKAZ: ($\Rightarrow$) Neka je T podmodelski potpuna teorija i $\mathfrak{A}$ konačno generisan podmodel teorije T. Tada je $\mathfrak{A}$ podmodel teorije T, stoga $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ je kompletna teorija.
($\Leftarrow$) Neka je za svaki konačno generisan podmodel $\mathfrak{A}$ teorije T, $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ kompletna teorija i neka je $\mathfrak{A}$ proizvoljan podmodel za T. Dokažimo da je $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ takodje kompletna teorija. Neka su $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T \cup \Delta_A$. Otuda, može se uzeti da je $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$. Pretpostavimo da nije $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_A$. Stoga postoji rečenica $\varphi(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ jezika L_A, tako da $\mathfrak{B} \models \varphi(\underline{a})$ i $\mathfrak{C} \models \neg\varphi(\underline{a})$. Neka je $\mathfrak{A}'$ podmodel modela $\mathfrak{A}$ generisan elementima $a_1,\ldots,a_n$. Prema prethodnom, $\mathfrak{B}_{A'} \not\equiv \mathfrak{C}_{A'}$, što je kontradokacija. $\dashv$

Kao drugi primer, navodimo jedna dokaz da teorija Booleovih algebri ima modelsko kompletiranje. Jedna posledica toga biće da pored ostalog teorija distributivnih mreža i teorija Booleovih prstena imaju modelska kompletiranja.

TEOREMA 2.15. Teorija T* bezatomičnih Booleovih algebri je modelsko kompletiranje teorije T Booleovih algebri.

DOKAZ: Prema primeru 5.14. teorija beskonačnih Booleovih algebri je 1-kompletna. Otuda, prema posledici IV.5.2.1, svaka beskonačna Booleova algebra je podmodel neke bezatomične Booleove algebre. S druge strane, svaka konačna Booleova algebra utapa se u svaku beskonačnu Booleovu algebru. Otuda, svaka Booleova algebra je podmodel neke bezatomične Booleove algebre, stoga su ispunjeni uslovi 1^o i 2^o leme 2.2. Otuda, budući da T ima univerzalne aksiome i $(T^*)_{\Pi_1} = T$, prema teoremi 2.3, dovoljno je dokazati da je T^* podmodelski potpuna teorija.

Neka je B konačno generisana Booleova algebra. Otuda je B konačna algebra. Dokazujemo da je $T^* \cup \Delta_B$ kompletna teorija. Neka su B_1, B_2 bezatomične Booleove algebre takve da $B_1, B_2 \models T^* \cup \Delta_B$. Prema lemi prenosa može se uzeti da je $B \subseteq B_1, B_2$. Prema DLST postoje prebrojive Booleove algebre B_1', B_2' tako da važi diagram (1). Identičko preslikavanje

$$(1)\quad B_1 \succ B_1' \supseteq B \subseteq B_2' \prec B_2 \qquad (2)\quad \begin{array}{ccc} B_1' & \xrightarrow[\cong]{f} & B_2' \\ & \supseteq\ B\ \subseteq & \end{array}$$

$i_B \colon B \longrightarrow B$ je parcijalni izomorfizam, stoga prema teoremi II.4.3. postoji izomorfizam $f \supseteq i_B$, odnosno, diagram (2) komutira. Otuda $B_{1B}' = B_{2B}'$. Budući da je $B_1' \prec B_1$ i $B_2' \prec B_2$, to $B_{1B} \equiv B_{2B}$, što znači da je $T^* \cup \Delta_B$ kompletna teorija. $\dashv$

POSLEDICA 2.15.1. Teorija T^* dopušta eliminaciju kvantifikatora i prema tome je odlučiva (za efektivnu proceduru odlučivost nekih Booleovih formula vid. na primer /28/). Prema Vaughtovom testu, T^* je takodje kompletna teorija.

POSLEDICA 2.15.2. Klasa $\mathfrak{M}(T)$ Booleovih algebri je Jonssonova (uporediti na primer sa /29/), budući da T ima prost model, Booleovu algebru 2.

Označimo sa T teoriju distributivnih mreža sa najvećim i najmanjim elementom. Ovde je $L(T) = \{\leq, \wedge, \vee, 0, 1\}$ dok se T sastoji iz uobičajenih aksioma teorije distributivnih mreža i aksioma $\forall x(0 \leq x)$, $\forall x(x \leq 1)$. Teorija T^* gustih kompletiranih mreža je

$T^* = T \cup \{\forall x \exists y(x \wedge y = 0 \wedge x \vee y = 1), \forall x \exists y(x \neq 0 \Rightarrow 0 < y < x)\}$.

Kao što je poznato, svaka komplementarna distributivna mreža ima jedinstvenu ekspanziju do Booleove algebre.

TEOREMA 2.16. T^* je modelsko upotpunjenje teorije T.

DOKAZ: (1) Dokažimo da je $(T^*)_{\Pi_1} = T$. Jasno je da je $T \subseteq T^*$.

Otuda $T_{\Pi_1} \subseteq (T^*)_{\Pi_1}$. Budući da je $T_{\Pi_1} = T$, to $T \subseteq (T^*)_{\Pi_1}$. S druge strane, svaka distributivna mreža utapa se u neku Booleovu algebru, s tim da se konačni supremum i infimum održava (ova činjenica sleduje na primer iz stava reprezentacije za distributivne mreže: Svaka distributivna mreža izomorfna je mreži skupova). Stoga je (prema prvom delu dokaza 2.15.) svaka distributivna mreža podmodel neke bezatomične Booloeove algebre. Otuda, $(T^*)_{\Pi_1} \subseteq T$, odnosno $T = (T^*)_{\Pi_1}$.

Otuda, prema pretodnom i teoremi 2.3, dovoljno je dokazati da je T^* podmodelski potpuna teorija. Neka je $\mathfrak{A}$ konačno generisana distributivna mreža. Dokažimo da je $T^* \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ kompletna teorija. Ukoliko su $a_1, \ldots, a_n$ generatori mreže $\mathfrak{A}$, lako je videti da je ma koji $b \in A$ oblika $b = b_1 \vee \ldots \vee b_m$, gde je $b_i = a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}$. Stoga je $\mathfrak{A}$ konačna struktura. Dalje, neka su $\mathcal{L}, \mathcal{C}$ modeli za $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$. Tada su $\mathcal{L}, \mathcal{C}$ guste komplementarne mreže i prema lemi prenosa može se uzeti da je $\mathcal{L} \supseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}$. Prema DLST postoje $\mathcal{L}_o$, $\mathcal{C}_o$ tako da važi dijagram (1). Budući da su $\mathcal{L}_o$, $\mathcal{C}_o$, takodje komplementarne

$$(1) \quad \mathcal{L} \succ \mathcal{L}_o \supseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}_o \prec \mathcal{C} \qquad (2) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{A}_1 & \subseteq & \mathcal{L}_o' \\ & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \wr\big\downarrow h & & \wr\big\downarrow f \\ \mathfrak{A} & & & & \\ & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & \mathfrak{A}_2 & \subseteq & \mathcal{C}_o' \end{array}$$

(guste) distributivne mreže, postoje jedinstvene ekspanzije $\mathcal{L}_o' = \langle \mathcal{L}_o, ' \rangle$, $\mathcal{C}_o' = \langle \mathcal{C}_o, ^- \rangle$ koje su bezatomične Booleove algebre. Neka je $\mathfrak{A}_1$ Booleova podalgebra od $\mathcal{L}_o'$ generisana sa $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}_2$ Booleova podalgebra od $\mathcal{C}_o'$ takodje generisana sa $\mathcal{A}$. Ako je $v \in A_1$ tada je $v = v_1 \vee \dots \vee v_m$, gde je $v_i = a_1 \wedge \dots \wedge a_k \wedge b_1' \wedge \dots \wedge b_s'$ za neke $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_s \in A$. Otuda je $u_i = a \wedge b'$ za neko $a, b \in A$. Stoga je proizvoljni $v \in A_1$ oblika $(a_1 \wedge b_1') \vee \dots \vee (a_k \wedge b_k')$, $\vec{a}, \vec{b} \in A$. Slično, svaki $v \in A_2$ je oblika $(a_1 \wedge \bar{b}_1) \vee \dots \vee (a_k \wedge \bar{b}_k)$, $\vec{a}, \vec{b} \in A$.

Dokažimo da je $h: \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ definisano sa $h(a_1 b_1' \vee \dots \vee a_k b_k') = a_1 \bar{b}_1 \vee \dots \vee a_k b_k$ izomorfizam. Neka su $u, v \in A_1$. Tada

(1) $h \restriction \mathcal{A} = i_A$

(2) Lako je proveriti da je $h(u \vee v) = h(u) \vee h(v)$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

(3) Neka je $u = u_1 \vee \dots \vee u_k = a_1 b_1' \vee \dots \vee a_k b_k'$, $v = v_1 \vee \dots \vee v_s = c_1 d_1' \vee \dots \vee c_s d_s'$.

Otuda $u \wedge v = \bigvee_{i,j} (u_i \wedge v_j) = \bigvee_{i,j} (a_i \wedge c_j \wedge b_i' \wedge d_j') = \bigvee_{i,j} (a_i \wedge c_j \wedge (b_i \vee d_j)')$.

Budući da su $a_i \wedge c_j$, $b_i \vee d_j \in A$, to prema definiciji preslikavanja h važi $h(u \wedge v) = \bigvee_{i,j} (a_i \wedge c_j \wedge (\overline{b_i \vee d_j}))$, odnosno $h(u \wedge v) = \bigvee_{i,j} (a_i \wedge c_j \wedge \bar{b}_i \wedge \bar{d}_j) = (a_1 \bar{b}_1 \vee \dots \vee a_k \bar{b}_k) \wedge (c_1 \bar{d}_1 \vee \dots \vee c_s \bar{d}_s) = hu \wedge hv$.

(4) Budući da je $u \wedge u' = 0$, $u \vee u' = 1$, prema (2) i (3) važi $h(u \wedge u') = h(u) \wedge h(u') = 0$, $h(u \vee u') = h(u) \vee h(u') = 1$. Otuda, zbog jedinstvenosti komplementa, $h(u') = \bar{h}(u)$.

Prema prethodnom, $h: \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ je homorfizam. Dokažimo da je h 1-1 preslikavanje. Budući da je $u = v \longleftrightarrow u \Delta v = 0$, dovoljno je dokazati da važi: $hu = 0 \longrightarrow u = 0$. Neka je $hu = 0$. Tada
$a_1 \bar{b}_1 \vee \dots \vee a_k \bar{b}_k = 0$. Otuda $a_1 \wedge \bar{b}_1 = 0, \dots, a_k \wedge \bar{b}_k = 0$, stoga $a_1 \le b_1, \dots, a_k \le b_k$. Prema tome, $a_1 \wedge b_1' = 0, \dots, a_k \wedge b_k' = 0$

odnosno u = 0.

Očigledno, h je preslikavanje na , stoga je h izomorfizam. S druge strane, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ su konačno generisane Booleove algebre, te su i same konačne. Stoga, prema II.4.3. h se produžuje do izmorfizma f: $\mathcal{L}'_0 \longrightarrow \mathcal{C}'_0$, odnosno diagram (2). je komutativan. Otuda je komutativan i diagram (3).

$$
(3) \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_0 \arrow[r, phantom, "\prec"] & \mathcal{C} \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & \\
 & \mathcal{L}_0 \arrow[uu, "f", "\cong"'] \arrow[r, phantom, "\prec"] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}
$$

Odavde neposredno sledi $\mathcal{L}_{0A} \equiv \mathcal{C}_{0A}$, te $\mathcal{L}_A \equiv \mathcal{C}_A$. Stoga je $T^* \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ kompletna teorija, odnosno T* je podmodelski potpuna teorija. $\dashv$

POSLEDICA 2.16.1. Teorija gustih komplementarnih distributivnih mreža dopušta eliminaciju kvantifikatora, ω-kategorična je, kompletna, podmodelski potpuna i odlučiva. $\dashv$

POSLEDICA 2.16.2. Klasa $\mathfrak{M}(T)$ distributivnih mreža sa najmanjim i najvećim elementom je Jonssonova klasa, budući da T ima prost model 2. $\dashv$

Neka je T teorija Booleovih prstena sa jedinicom u jeziku $L=\{.,+,0,1\}$ **i T* teorija gustih Booleovih prstena sa jedinicom,** odnosno $T^*=T\cup\{\forall x \exists y(x\neq 0 \Rightarrow (x.y=y) \wedge (y\neq x) \wedge (y\neq 0))$.

Kategorija gustih Booleovih prstena sa jedinicom izomorfna je sa kategorijom bezatomičnih Booleovih algebri. Koristeći ovu činjenicu i teoremu 2.15, dokazujemo da je T* modelsko upotpunjenje teorije T. Stoga i u ovom slučaju važe slične posledice 2.15.1, 2.15.2.

U sledećem primeru dokazujemo da je teorija T* linearno uredjenih deljivih Abelovih grupa modelsko kompletiranje teorije T linearno uredjenih Abelovih grupa. Kao jedna posledica dobija se $\langle Q,+,\leq,0\rangle \prec \langle R,+,\leq,0\rangle$.

LEMA 2.17. Svaka linearno uredjena Abelova grupa $\mathfrak{A}=\langle A,+,\leq,0\rangle$ utapa se u deljivu linearno uredjenu Abelovu grupu.

DOKAZ: Neka je $X = \{(m,n,x) \mid m \in Z,\ n \in N,\ x \in G$, m i n su uzajamno prosti brojevi$\}$. Dalje, definišimo operaciju $+_0$ i relaciju R na X: $(m,n,x) +_0 (m',n',y) = (1, nn', \underline{mn'}x + \underline{m'ny})$, $(m,n,x)\ R\ (m',n',y) \leftrightarrow \underline{mn'}x \leq \underline{m'}ny$.

Neka je relacija $\sim$ na X definisana sa $(m,n,x) \sim (m',n',y) \leftrightarrow mn'x = m'ny$. Nije teško dokazati da je $\sim$ kongruencija na $\langle X, +_0, R, (0,1,0)\rangle = \mathcal{B}$ i da za količničku strukturu $\mathcal{O}\!\mathcal{L}^* = \mathcal{B}/\!\sim$ važi

1^o $\mathcal{O}\!\mathcal{L}^*$ je Abelova linearno uredjena deljiva grupa.

2^o Grupa $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ utapa se u $\mathcal{O}\!\mathcal{L}^*$, utapanje $p: \mathcal{O}\!\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}\!\mathcal{L}^*$ dato je sa $px = (1,1,x)/\!\sim$.

3^o $(\mathcal{O}\!\mathcal{L}^*, p)$ je modelsko kompletiranje modela $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ u klasi Abelovih linearno uredjenih deljivih grupa. ⊣

POSLEDICA 2.17.1. $(T^*)_{\Pi_1} = T$. ⊣

LEMA 18. Teorija T dopušta eliminaciju kvantifikatora.

DOKAZ: Ovaj dokaz je adaptacija Fourier-Motzkinove eliminacione metode u linearnom programiranju. Dokaz ćemo podeliti na nekoliko koraka.

TVRDJENJE 1^o Svaka formula φ bez kvantifikatora jezika L, ekvivalentna je u okviru teorije T^* formuli oblika

(1) $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$, gde je svaki β_i oblika $u_1(\vec{x}) = 0 \wedge \ldots \wedge u_m(\vec{x}) = 0 \wedge v_1(\vec{x}) > 0 \wedge \ldots \wedge v_n(\vec{x}) > 0$.

DOKAZ: Neposredno se dokazuje da važe sledeća tvrdjenja u teoriji T^*.

(1) $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 - t_2 = 0$, (2) $\neg t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 > t_2 \vee t_2 > t_1$

(3) $\neg t_1 > t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2 \vee t_2 > t_1$, (4) $t > 0 \Leftrightarrow -t < 0$,

(5) $t_1 > t_2 \Leftrightarrow t_1 - t_2 > 0$.

Koristeći ove činjenice sledi da je φ Booleova kombinacija atomičnih formula oblika $u = 0$, $u > 0$, stoga, φ je ekvivalentna formuli u disjunktnoj normalnoj formi oblika (1).

TVRDJENJE 2° Neka je $L_Q = L \cup \{\underline{q} \mid q \in Q\}$ (Q je skup racionalnih brojeva) definiciono proširenje jezika L i Γ teorija sa odgovarajućim definicionim aksiomama kao u primeru III.4.6. Tada je Γ konzervativno proširenje teorije T^*.

DOKAZ: Pretpostavimo da je $\Gamma \vdash \varphi$, gde je φ rečenica jezika L i neka je $\mathcal{O} \models T^*$. Budući da $\mathcal{O}$ ima jedinstvenu ekspanziju do modela $\mathcal{O}' \models \Gamma$, to $\mathcal{O}' \models \varphi$. φ je formula jezika L, stoga $\mathcal{O} \models \varphi$. Otuda, prema stavu potpunosti $T \vdash \varphi$.

TVRDJENJE 3° Neka je $\beta_i(x,\vec{y})$ kao u tvrdjenju 1°. Tada postoji formula $\beta_i^*(x,\vec{y})$ oblika $x = u_1(\vec{y}) \wedge \ldots \wedge x = u_k(\vec{y}) \wedge x < \alpha_1(\vec{y}) \wedge \ldots \wedge x < \alpha_p(\vec{y}) \wedge x > \delta_1(\vec{y}) \wedge \ldots \wedge x > \delta_q(y)$ tako da je $\Gamma \vdash \beta_i(x,\vec{y}) \Leftrightarrow \beta^*_i(x,\vec{y})$.

DOKAZ: Nije teško videti da važe sledeća tvrdjenja:

(1) Za svaki term $t(x)$ jezika L_Q postoje $a_1,\ldots,a_n \in Q$ tako da $t(x) = \underline{a}_1 x + \ldots + \underline{a}_n x_n$.

(2) $q \in Q - \{0\} \longrightarrow \Gamma \vdash \underline{q}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(3) $q > 0$ i $q \in Q \longrightarrow \Gamma \vdash x > 0 \Leftrightarrow \underline{q}x > 0$.

(4) $q < 0$ i $q \in Q \longrightarrow \Gamma \vdash x < 0 \Leftrightarrow \underline{q}x > 0$.

Otuda, prema (1), za neke $a_i, a_{ij}, b_i, b_{ij} \in Q$

$$\begin{aligned}\beta_i(x,\vec{y}) \Leftrightarrow\ & \underline{a}_1 x + \underline{a}_{11} y_1 + \ldots + \underline{a}_{1n} y_n = 0 \wedge \\ & \vdots \\ & \underline{a}_k x + \underline{a}_{k1} y_1 + \ldots + \underline{a}_{kn} y_n = 0 \wedge \\ & \underline{b}_1 x + \underline{b}_{11} y_1 + \ldots + \underline{b}_{1n} y_n < 0 \wedge \\ & \vdots \\ & \underline{b}_m x + \underline{b}_{11} y_1 + \ldots + \underline{b}_{mn} y_n < 0\end{aligned}$$

Primenom pravila (2), (3), (4) na poslednju formulu, dobija se $\beta^*_i(x,\vec{y})$.

Sada dokazujemo da je svaka formula jezika L_Q ekvivalentna formuli bez kvantifikatora. Dokaz se sprovodi indukcijom po složenosti formula. Jedini netrivijalan slučaj je

$\varphi = \exists x\ \psi(x,\vec{y})$. Po induktivnoj hipotezi ψ dopušta eliminaciju kvantifikatora, odnosno postoji formula θ bez kvantifikatora tako da $T^* \vdash \psi(x,\vec{y}) \Leftrightarrow \theta(x,\vec{y})$. Prema prethodnim tvrdjenjima, može se uzeti da je $\theta \doteq \theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$, gde je θ_i oblika

$$x = u_1(\vec{y}) \wedge \ldots \wedge x = u_k(\vec{y}) \wedge x < \alpha_1(\vec{y}) \wedge \ldots \wedge x < \alpha_p(\vec{y}) \wedge x > \delta_1(\vec{y}) \wedge \ldots \wedge x > \delta_q(\vec{y}).$$

Budući da je $\exists x(\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n) \Leftrightarrow \exists x\theta_1 \vee \ldots \vee \exists x\theta_n$, dovoljno je eliminisati kvantifikator $\exists$ u formuli $\exists x\ \theta_i$. Ova eliminacija se sprovodi preko formule:

$$\exists x\ \theta_i(x,\vec{y}) \Leftrightarrow \bigwedge_{1 \le i,j \le k} u_i(\vec{y}) = u_j(\vec{y}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le p}} \delta_i(\vec{y}) < \alpha_j(\vec{y}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le k}} \delta_i(\vec{y}) \le u_j(\vec{y}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} u_i(y) \le \alpha_j(y) .$$

Stoga je formula φ ekvivalentna formuli bez kvantifikatora. Racionalni brojevi u formuli φ mogu se eliminisati s obzirom da su oni uvedeni u definicionom proširenju teorije T^*. $\dashv$

TEOREMA 2.19. Teorija Abelovih linearno uredjenih deljivih grupa je modelsko upotpunjenje teorije Abelovih linearno uredjenih grupa.

DOKAZ: Ovo tvrdjenje je neposredna posledica prethodnih dveju lema. $\dashv$

POSLEDICA 2.19.1. Budući da T^* ima prost model $\langle Q,+,\le,0\rangle$ to je ona kompletna. Takodje, klasa Abelovih linearnih grupa je Jonssonova klasa. Kako je T modelski potpuna i $\langle Q,+,\le,0\rangle$, $\langle R,+,\le,0\rangle \models T^*$, to je

$$\langle Q,+,\le,0\rangle \prec \langle R,+,\le,0\rangle .$$

3. Zasićeni modeli i modelsko kompletiranje teorija

U prethodnom paragrafu prikazano je više metoda u odredjivanju modelskog upotpunjenja neke teorije. Medjutim, zasićeni modeli mogu se takodje koristiti u ovom odredjivanju. Ovakvi dokazi su manje konstruktivni od prethodnih, ali ipak daju uvid u strukturu modela o kojima je reč. Jedna od prednosti ove metode je njena uniformnost. Problem koji se javlja je da su zasićene strukture retke, u opštem slučaju njihova egzistencija je obezbedjena jedino u slučaju da se pretpostave neke od ekstremnih aksioma teorije skupova, kao na primer generalisana kontinuum hipoteza ili postojenje nedostižnih kardinala. Ipak, ovaj problem se može rešiti na više načina:

1. Koriste se neke aproksimacije zasićenih modela, kao na primer takozvani specijalni modeli, ili α-zasićeni modeli (α je kardinal).

2. Mnoga svojstva teorije, kao što su neprotivurečnost, potpunost, ω-kategoričnost itd. su apsolutna, drugim rečima, ako se dokazuju uz pomoć jakih aksioma teorije skupova, kao što su generalisana kontinuum hipoteza ili $V = L$, onda postoji dokaz i bez njih.

DEFINICIJA 3.1. Neka je $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ je prosto proširenje modela $\mathfrak{A}$ ukoliko postoji $c \in B$ tako da je podmodel modela $\mathfrak{B}$ generisan skupom $A \cup \{c\}$ jednak modelu $\mathfrak{B}$. Da je $\mathfrak{B}$ prosto proširenje modela $\mathfrak{A}$, označavamo sa $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(c)$.

Sledeće tvrdjenje pokazalo se efikasnim u dokazivanju modelske potpunosti teorija.

TEOREMA 3.2. (L. Blum) Neka su T i T^* teorije u istom jeziku tako da $T \subseteq T^*$, T je univerzalna teorija, svaki model teorije T je podmodel teorije T^*. U takvom slučaju, T^* je modelsko kompletiranje teorije T ukoliko svaki diagram $\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{A} \xrightarrow{g} \mathfrak{A}(c)$, gde $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(c) \models T$, $\mathfrak{B} \models T^*$, $\mathfrak{B}$ je $|A|^+$ zasićen model, ima prikazano kompletiranje. $\dashv$

Dokaz ove teoreme može se naći na primer u /38/. Primetimo da se prema lemi prenosa može uzeti da su preslikavanja f,g inkluziona.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"] & & \mathfrak{A}(c) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Primenu prethodne teoreme ilustrovaćemo na primeru linearno uredjenih komutativnih grupa.

TEOREMA 3.4. Neka su:

T = Teorija linearno uredjenih Abelovih grupa.

T* = Teorija linearno uredjenih deljivih Abelovih grupa

T*je modelsko kompletiranje teorije T.

DOKAZ: (1) Jasno je da je T univerzalna teorija.

(2) Prema lemi 2.17. svaki model teorije T je podmodel teorije T*.

(3) Neka je $\mathfrak{A}$ linearno uredjena Abelova grupa, $\mathfrak{A}(c)$ prosto proširenje modela $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $|A|^+$-zasićen model za T i neka je (4) $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}(c)$.

Za element c postoje sledeće mogućnosti:

1° Postoji $n \in N$, postoji $a \in A$ tako da $\underline{n}c = a$.

2° Za svaki $n \in N$, za svaki $a \in A$ $\underline{n}c \neq a$.

Neka je ispunjeno na primer 1°, odnosno za neki $n \in N$ i $a \in A$, $\underline{n}c = a$. Neka je n najmanji takav prirdan broj. Budući da je $\mathfrak{B}$ deljiva grupa i $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, to postoji $c' \in B$ tako da $\underline{n}c' = a$.

TVRDJENJE 1°.1.. Za svaki element $b \in A(c)$ postoje $m \in n$, $d \in A$, tako da $b = \underline{m}c + d$. Pritom, m i d su jedinstveno odredjeni.

DOKAZ: Budući da je $\mathfrak{A}(c)$ komutativna grupa, postoje $k \in N$, $d' \in A$ tako da $b = \underline{k}c + d'$. Neka su $j, m \in N$ takvi da $k = nj + m$, $m \in n$. Otuda, $b = \underline{jn}c + \underline{m}c + d' = \underline{m}c + \underline{j}a + d'$. Budući da je $\underline{j}a + d' \in A$, to je za $d = \underline{j}a + d'$, $b = \underline{m}c + d$.

Neka je $b = \underline{m}c + d = \underline{m}'c + d'$, $m \geq m'$, $m, m' \in n$, $d, d' \in A$. Tada, $(\underline{m - m'})c = d - d'$, odnosno $(m - m')c \in A$. Budući da je $m - m' \in n$, prema izboru broja n, sledi $m - m' = 0$, odnosno $m = m'$. Otuda $d = d'$. ⊣

TVRDJENJE $1^{\circ}.2$. Ako su u, v elementi uredjene grupe, tada: $\underline{n}u \geq \underline{n}v \Rightarrow u \geq v$, $(n \in N)$.

DOKAZ: Neka je $\underline{n}u \geq \underline{n}v$ i $u < v$. Tada $v - u > 0$. Sabiranjem ove ove nejednakosti n puta, dobija se $\underline{n}(v - u) \geq 0$. Uredjena grupa je bez torzije, stoga $\underline{n}(v - u) > 0$, odnosno $\underline{n}v > \underline{n}u$, što je kontradikcija. ⊣

TVRDJENJE $1^{\circ}.3$. n je najmanji prirodan broj za koji postoji $a' \in A - \{0\}$ tako da $\underline{n}c' = a'$.

DOKAZ: Neka je $0 \leq k < n$ tako da $kc' = a'$. Tada $\underline{k}\underline{n}c' = \underline{n}a'$. Otuda, $\underline{k}a = \underline{n}a'$, te $\underline{k}\underline{n}c = na'$, odnosno $\underline{n}(\underline{k}c - a') = 0$. Budući da je reč o grupama bez torzije, to $\underline{k}c - a' = 0$. Prema izboru broja n, sledi $a' = 0$.

Neka je $h: A(c) \longrightarrow B$ preslikavanje definisano sa $h(\underline{m}c + d) = \underline{m}c' + d$. Dokazujemo da je h utapanje.

Lako je proveriti da h prolazi kroz operaciju $+$.

<u>h je 1-1</u>. Neka je $h(\underline{m}c + d) = h(\underline{m}'c + d')$. Otuda $\underline{m}c' + d = \underline{m}'c' + d'$. Prema prethodnim tvrdjenjima važi $m = m'$ i $d = d'$.

<u>h je monotono preslikavanje</u>. Neka je $\underline{i}c + d \leq \underline{j}c + d'$, gde $i, j \in n$, d, $d' \in A$. Tada $(\underline{i} - \underline{j})\underline{n}c \leq \underline{n}(d - d')$, odnosno $(\underline{i} - \underline{j})a \leq \underline{n}(d' - d)$. Otuda $(i - j)\underline{n}c' \leq \underline{n}(d' - d)$, stoga prema tvrdjenju $1^{\circ}.2$, $(\underline{i} - \underline{j})c' \leq d' - d$, odnosno $\underline{i}c' + d \leq \underline{j}c' + d'$.

Prema prethodnom, h je utapanje koje kompletira diagram (4).

Pretpostavimo slučaj 2°, odnosno da za svaki $n \in N$, $a \in A$, $\underline{n}c \neq a$.

<u>$2^{\circ}.1$</u>. Neka je $\langle U, V\rangle$ Dedekindov presek u $\mathcal{O}\!\iota$ odredjen elementom c, odnosno $U = \{b \in A \mid b \leq c\}$, $V = \{b \in A \mid b \geq c\}$ i neka je $\varphi_{n,a}(x)$ formula jezika L_A definisana sa $\varphi_{n,a}(x) \doteq \underline{n}x < \underline{a}$ ako je $\underline{n}c < a$, $\varphi_{n,a}(x) \doteq \underline{n}x > a$ ukoliko je $\underline{n}c > a$.

Dokažimo da je skup formula

$\Sigma(x) = \{\underline{u}<x \mid u\in U\} \cup \{x<\underline{v} \mid v\in V\} \cup \{\varphi_{n,a}(x) \mid n\in N,\ a\in A\}$

neprotivurečan sa $Th(\mathcal{L}_A)$. Neka je $\Sigma_o \subseteq \Sigma(x)$ konačan skup i $u_1,\dots,u_n$, $v_1,\dots,v_m$, $a_1,\dots,a_p$, $a_1',\dots,a_q'$ elementi koji se pojavljuju u Σ_o i to tako da je $\underline{n}_i c<a_i$, $\underline{n}_j' c>a_j'$ za $i\in\{1,2,\dots,p\}$, $j\in\{1,2,\dots,q\}$.

Može se pretpostaviti da je $u_n<u_{n-1}<\dots<u_1$ i $v_1<\dots<v_{n-1}<v_n$. Budući da je $\mathfrak{A}(c)\models u_i<c<v_j$ to $\mathfrak{A}\models u_1<v_1$, stoga

(1) $\quad \mathcal{L}\models u_1<v_1.$

Dalje, svaka jednačina $jx = b$, $j\neq 0$, $b\in B$ ima rešenja u $\mathcal{L}$. Neka su a_i/n_i, a_i'/n_i' respektivno rešenja u $\mathcal{L}$ jednačina $n_i x = a_i$, $n_i' x = a_i'$. Ne gubeći opštost, može se pretpostaviti da je $a_q'/n_q'<\dots<a_1'/n_1'$ i $a_1/n_1<\dots<a_p/n_p$.

Po pretpostavci je $\mathfrak{A}(c)\models a_1'<\underline{n}_1'c$, $\underline{n}_1c<a_1$, stoga $\mathfrak{A}(c)\models \underline{n}_1a_1'<\underline{n}_1\underline{n}_1'c<\underline{n}_1'a_1$. Otuda $\mathfrak{A}\models\underline{n}_1a_1'<\underline{n}_1'a_1$, odnosno $\mathcal{L}\models\underline{n}_1a_1'<\underline{n}_1'a_1$. Stoga u modelu važi:

$\underline{n}_1'\underline{n}_1(a_1/n_1) = \underline{n}_1'a_1>\underline{n}_1a_1' = \underline{n}_1\underline{n}_1'(a_1'/n_1')$, odnosno $\underline{n}_1'\underline{n}_1(a_1/n_1)>$ $\underline{n}_1n_1'(a_1'/\underline{n}_1')$. Otuda

(2) $\quad \mathcal{L}\models a_1'/n_1'<a_1/n_1.$

Budući da je $\mathfrak{A}(c)\models u_1<c<v_1$, to $\underline{n}_1\underline{n}_1'u_1<\underline{n}_1\underline{n}_1'c$ $<\underline{n}_1\underline{n}_1'v_1$. Otuda $\underline{n}_1a_1'<\underline{n}_1\underline{n}_1'c<\underline{n}_1\underline{n}_1'v_1$, odnosno $\underline{n}_1a_1'<\underline{n}_1\underline{n}_1'v_1$, tj $a_1'<\underline{n}_1'v_1$. Stoga $a_1'/n_1'<v_1$. Kako je $v_1>u_1$, to $v_1>\max(u_1,a_1'/n_1')$. Slično se dokazuje da $a_1/n_1>\max(u_1,a_1'/n_1')$, stoga

(3) $\quad \mathcal{L}\models \max(u_1,a_1'/n_1')<\min(v_1,a_1/n_1).$

Model $\mathfrak{B}$ je gusto uredjen, te postoji $c_0 \in B$ tako da $\max(u_1, a_1'/n_1') < c_0 < \min(v_1, a_1/n_1)$. Stoga c_0 ostvaruje $\Sigma_0(x)$ u $\mathfrak{B}$, odnosno $\Sigma_0(x)$ je neprotivurečan skup formula sa $Th(\mathfrak{B}_A)$ Prema stavu kompaktnosti, $\Sigma(x)$ je takodje neprotivurečan skup formula sa $Th(\mathfrak{B}_A)$. Budući da je $\mathfrak{B}$ $|A|^+$-zasićen model, to $\mathfrak{B}$ realizuje $\Sigma(x)$, odnosno postoji $c' \in B$ tako da

(4) $\quad \mathfrak{B} \models \Sigma(c')$.

<u>$2^o.2.$</u> Za svaki $b \in A(c)$ postoje $m \in Z$, $d \in A$ tako da $b = \underline{m}c + d$. Pritom, m i d su jedinstveno odredjeni.

DOKAZ: Budući da je $\mathfrak{A}(c)$ komutativna grupa, postoje $m \in Z$, $d \in A$ tako da $b = \underline{m}c + d$. Neka je $b = \underline{m}c + d = \underline{m}'c + d'$. Otuda $(\underline{m} - \underline{m}')c \in A$, stoga $m - m' = 0$, odnosno $m = m'$. Otuda sledi $d = d'$.

Primetimo takodje da važi: $\underline{m}c' + d = \underline{m}'c' + d' \longrightarrow m = m'$ $\underline{i}$ $d = d'$, gde $m, m' \in Z$, $d, d' \in A$.

Neka je $h\colon A(c) \longrightarrow B$ definisano sa $h(\underline{m}c + d) = \underline{m}c' + d$. Na osnovu $2^o.2.$ sledi da je h 1-1 preslikavanje i takodje za sve $u, v \in A(c)$ $h(u + v) = hu + hv$. Dokažimo da je h monotono preslikavanje. Neka je $\underline{n}_1 c + a_1 < \underline{n}_2 c + a_2$, $a_1, a_2 \in A$. Ne gubeći opštost može se pretpostaviti da je $n_1 > n_2$. Otuda, $(n_1 - n_2)c < a_2 - a_1$. Neka je $n = n_1 - n_2$ i $a = a_2 - a_1$. Tada je $\underline{n}c < A$. Budući da je $\mathfrak{B} \models \zeta_{n,a}(c')$ to $\underline{n}c' < a$, stoga $\underline{n}_1 c' + a_1 < \underline{n}_2 c' + a_2$. Otuda, h je monotono preslikavanje.

Prema prethodnom, $h\colon \mathfrak{A}(c) \longrightarrow \mathfrak{B}$ je utapanje i prikazani dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B} & \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, phantom, "\subseteq"] & & \mathfrak{A}(c) \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

Prema teoremi 3.2., T^* je modelsko upotpunjenje teorije T. $\dashv$

U sledećim tvrdjenjima videće se da zasićeni modeli modelskog komplatiranja T^* teorije T imaju algebarski opis preko modela teorije T.

Modeli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ su uporedivi u T akko postoji $\mathfrak{C} \models T$ tako da $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C} \longleftarrow \mathfrak{B}$. Uporedivost modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ označavamo sa $\mathfrak{A} \simeq_T \mathfrak{B}$. U najvećem broju slučajeva koristimo oznaku $\simeq$, budući da je jasno o kojoj je teoriji T reč.

Model $\mathfrak{A} \models T$ je poluuniverzalan model teorije T ukoliko za svaki model $\mathfrak{B} \models T$ važi: Ako je $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ i $|B| \leq |A|$, tada $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$. Drugim rečima, $\mathfrak{A}$ je univerzalan model u klasi modela teorije T, uporedivih sa $\mathfrak{A}$.

Model $\mathfrak{A} \models T$ je poluprost model teorije T akko za svaki model $\mathfrak{B} \models T$ važi: Ako je $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$, tada $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Otuda, $\mathfrak{A}$ je poluprost model akko je $\mathfrak{A}$ prost model u klasi svih modela teorije T, uporedivih sa $\mathfrak{A}$.

Model $\mathfrak{A} \models T$ je pun model akko je $\mathfrak{A}$ homogen, poluuniverzalan model teorije T.

PRIMER 3.6. 1° Neka je T teorija polja. Tada je za svaki prost broj p, polje Z_p poluprost model teorije T. Ako je F_p algebarski zatvoreno prebrojivo polje karakteristike p sa beskonačno (prebrojivo) mnogo transcedentalnih elemenata nad Z_p, tada je F_p pun model teorije T. Opštije, ma koji univerzalan domen (u smislu teorije polja) je pun model teorije T.

2° Neka je $\mathfrak{A} \models T$ i $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Tada $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Zaista, ako je $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ tada postoji $\mathfrak{C}$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{C}$. Jasno, da je u takvom slučaju $\mathfrak{C} \models T$.

3° Ako je $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, tada $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Lako je proveriti da je relacija $\simeq$ refleksivna i simetrična u klasi $\mathfrak{M}(T)$.

U nekim tvrdjenjima koja slede, dosta je da se pretpostavi da teorija T ima svojstvo amalgamiranja. Medjutim, ovde se ograničavamo na teorije koje imaju modelsko kompletiranje. Stoga, odavde pa do kraja ovog paragrafa, pretposta vljamo da T ima modelsko kompletiranje T*. Takodje, pretpostavljamo da je $\|L(T)\| \leq \omega$.

LEMA 3.7. 1° Relacija $\simeq$ je relacija ekvivalencije u klasi $\mathfrak{M}(T)$.

2° Neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$. Tada : Ako je $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$, tada $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$.

3° Ako su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T^*$, tada: $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B})$.

4° Neka T ima prost model. Tada je svaki poluprost model teorije T prost. Svaki poluuniverzalan model teorije T je univerzalan. Stoga, u takvom slučaju, $\mathfrak{A}$ je pun model za T akko $\mathfrak{A}$ je homogeno-univerzalan model za T.

DOKAZ: 1° Budući da je $\simeq$ refleksivna i simetrična relacija, dovoljno je dokazati da je $\simeq$ tranzitivna relacija. Neka je $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$. Otuda postoje $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \models T$ tako da važi dijagram (1).

(1)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D}_1 & & \mathfrak{D}_2 & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "p"'] \arrow[ur, "q"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{D}_1 \arrow[ur] & & \mathfrak{D}_2 \arrow[ul] \\ & \mathfrak{B} \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Budući da T ima svojstvo amalgamiranja, postoji model $\mathfrak{D}$ tako da važi dijagram (2). Otuda $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{D} \longleftarrow \mathfrak{B}$

2° Prema prethodnom primeru, $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \longrightarrow (\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B})$. Otuda, prema 1° tvrdjenje važi.

3° Neka $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T^*$. Prema prethodnom, $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \longrightarrow (\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B})$.

4° Neka je $\mathfrak{A}$ prost model teorije T. Pretpostavimo da je $\mathfrak{B}$ poluprost model za T, $\mathfrak{D}$ poluuniverzalan model za T i $\mathfrak{C}$ proizvoljan model teorije T. Tada, $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$. Stoga, $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$, te $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$. Otuda $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{D}$. Dalje, takodje $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{D}$, stoga $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{D}$. Otuda $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{D}$. Stoga, ako je $|C| \leq |D|$, onda $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$. $\dashv$

TEOREMA 3.8. Neka je $\mathfrak{C}$ zasićen model teorije T*. Tada je $\mathfrak{C}$ pun model teorije T.

DOKAZ: 1° $\mathfrak{C}$ je poluuniverzalan model za T.

Neka je $|C| = \alpha$ i $\mathfrak{A} \models T$ kardinalnosti $\leq \alpha$, $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$. Tada postoji $\mathfrak{D}' \models T$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow{p} \mathfrak{D}' \xleftarrow{q} \mathfrak{C}$. Dalje, postoji $\mathfrak{D} \models T^*$ tako da $\mathfrak{D}' \longrightarrow \mathfrak{D}$, stoga se može uzeti da je $\mathfrak{A} \xrightarrow{p} \mathfrak{D} \xleftarrow{q} \mathfrak{C}$. Prema DLST postoji $\mathfrak{B}$ tako da $\mathfrak{A} \xrightarrow{p} \mathfrak{B} \prec \mathfrak{D}$ i $|B| = \alpha$. T^* je modelski potpuna, te je q elementarno utapanje, stoga $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ je elementarno univerzalan model, stoga $\mathfrak{B} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{C}$. Otuda $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$.

2° $\mathfrak{C}$ je homogen model za T.

Neka je $\mathfrak{A}$ model za T kardinalnosti $< \alpha$ i neka je $\mathfrak{C} \xleftarrow{f} \mathfrak{A} \xrightarrow{g} \mathfrak{C}$. Definišimo parcijalni izomorfizam $p: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ sa $pfa = ga$, $a \in A$. Budući da je T^* modelsko kompletiranje teorije T, to je

$\langle \mathfrak{C}, fa \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{C}, ga \rangle_{a \in A}$, odnosno $\langle \mathfrak{C}, fa \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{C}, pfa \rangle_{a \in A}$.

$\mathfrak{C}$ je zasićen model, stoga je $\mathfrak{C}$ elementarno homogen model. Otuda postoji automorfizam $h: \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ tako da $p \subseteq h$. Prema tome, prikazani diagram komutira.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[rr, "h", "\sim"'] & & \mathfrak{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$\dashv$

TEOREMA 3.9. Neka je $|C| = \alpha > \omega$. Ako je $\mathfrak{C}$ pun model teorije T, tada je $\mathfrak{C}$ elementarno univerzalan model teorije T^*. Dokaz je podeljen na dva dela.

TVRDJENJE 1. $\mathfrak{C}$ je model teorije T^*.

DOKAZ: Neka je $\beta = \mathrm{cf}\alpha$. Tada postoji niz skupova X_ξ, $\xi < \beta$, tako da

(1) $\xi < \zeta \longrightarrow X_\xi \subseteq X_\zeta$, (2) $|X_\xi| < \alpha$, (3) $C = \bigcup_{\xi \in \beta} X_\xi$

1° Prema DLST postoji model $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{C}$ tako da $X_0 \subseteq A_0$ i $|A_0| = \omega$. Otuda, $\mathfrak{A}_0$ je model teorije T, te postoji $\mathfrak{B}_0 \models T^*$ tako da $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B}_0$. Prema DLST može se uzeti da je tadkoje $|B_0| = \omega$.

T^* ima svojstvo amalgamiziranja, stoga se diagram $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B}_0$ dopunjuje do amalgama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D} & \\
\mathfrak{C} \arrow[ur] & & \mathfrak{B}_0 \arrow[ul] \\
 & \mathfrak{A}_0 \arrow[ul, phantom, "\supseteq"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

Otuda $\mathfrak{B}_0 \simeq \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{C}$ je poluuniverzalan model teorije T, stoga postoji $f\colon \mathfrak{B}_0 \longrightarrow \mathfrak{C}$. Otuda imamo diagram (4). Budući da je $\mathfrak{C}$ $\mathcal{L}$-homogen

(4)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{C} & & \\
\mathfrak{A}_0 \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & \subseteq & \mathfrak{B} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

(5)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{C} & & \\
\mathfrak{A}_0 \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & & \\
 & \mathfrak{B}_0 \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{C} \arrow[uull, "h"']
\end{tikzcd}$$

model i $\mathcal{L} > \omega$, to se ovaj diagram dopunjuje do komutativnog diagrama (5).

Neka je $\mathfrak{B}_1 = hf[\mathfrak{B}_0]$. Otuda $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_0$, te $\mathfrak{B}_1 \models T^*$. Stoga postoji model $\mathfrak{B}_1 \models T^*$. tako da $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{C}$ i $|B_1| < \mathcal{L}$.

<u>2</u>$^{\circ}$ Induktivno se definišu nizovi modela $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi$, $\xi < \beta$, tako da važi:

(6) Za $\zeta < \xi$, $\mathfrak{A}_\zeta \subseteq \mathfrak{B}_\xi$, (7) $\mathfrak{B}_\xi \subseteq \mathfrak{A}_\xi \subseteq \mathfrak{C}$, (8) $X_\xi \subseteq A_\xi$, (9) $|A_\xi|$, $|B_\xi| < \mathcal{L}$, (10) $\mathfrak{B}_\xi \models T^*$.

Neka su $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_1$ modeli odredjeni u 1°. Pretpostavimo da je $\xi \geq 1$ i da je model $\mathfrak{B}_\xi$ odredjen.

Model $\mathfrak{A}_\xi$ se odredjuje na sledeći način. Prema induktivnoj hipotezi, $|B_\xi| < \mathcal{L}$. Otuda, budući da je $|X_\xi| < \mathcal{L}$, $|B_\xi \cup X_\xi| \leq |B_\xi| + |X_\xi| < \mathcal{L}$. Prema DLST postoji $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{C}$, tako da $B_\xi \cup X_\xi \subseteq A_\xi$ i $|A_\xi| = |B_\xi \cup X_\xi|$. Stoga, $|A_\xi| < \mathcal{L}$ i $\mathfrak{B}_\xi \subseteq \mathfrak{A}_\xi$.

Model $\mathfrak{B}_\xi$ odredjuje se na sledeći način.

(11) Ako je $\xi < \mathcal{L}$ granični kardinal, tada $\mathfrak{B}_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} \mathfrak{B}_\zeta$. Budući da je T^* modelski potpuna teorija, to je ona prema posledici IV.6.2.8. zatvorena u odnosu na unije lanaca, pa prema tome $\mathfrak{B}_\xi \models T^*$.

(12) Neka je $\xi = \zeta + 1$. Prema induktivnoj hipotezi važi $\mathfrak{A}_\zeta \subseteq \mathfrak{C}$, $|A_\zeta| < \kappa$. Dalje, postoji $\mathfrak{B} \models T^*$ tako da $\mathfrak{A}_\zeta \subseteq \mathfrak{B}$. Prema DLST može se uzeti da je $|B| = |A_\zeta|$, odnosno $|B| < \kappa$. T^* ima svojstvo amalgamiranja, stoga se diagram $\mathfrak{C} \geq \mathfrak{A}_\xi \subseteq \mathfrak{B}$ dopunjuje do amalgama

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{C} \arrow[ur] & & \mathfrak{B} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A}_\xi \arrow[ul, phantom, "\geq"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

Otuda $\mathfrak{B} \Rrightarrow \mathfrak{C}$. Budući da je $\mathfrak{C}$ poluuniverzalan model, to postoji $f: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ je κ-homogen model, stoga postoji automorfizam h modela $\mathfrak{C}$ tako da prikazani diagram komutira.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} & \mathfrak{C} \arrow[l, "h"', "\sim"] \\ \mathfrak{A} \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathfrak{B} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Neka je $\mathfrak{B}_\xi = hf[\mathfrak{B}]$. Otuda $\mathfrak{B}_\xi \models T^*$, $\mathfrak{A}_\xi \leq \mathfrak{B}_\xi$ i $|B_\xi| < \kappa$.

β je granični ordinal (jer je β kardinal), stoga za svaki $\xi < \beta$ model $\mathfrak{B}_{\xi+1}$ je definisan, te $\mathfrak{A}_\xi \subseteq \mathfrak{B}_{\xi+1}$. Otuda $X_\xi \subseteq B_{\xi+1}$, te $C = \bigcup_{\xi<\beta} B_\xi$, Otuda $\mathfrak{C} = \bigcup_{\xi<\beta} \mathfrak{B}_\xi$. Teorija T^* je zatvorena u odnosu na unije lanaca, te $\mathfrak{C} \models T^*$. $\dashv$

TVRDJENJE 2. $\mathfrak{C}$ je elementarno univerzalan model teorije T^*.

DOKAZ: Neka je $\mathfrak{B} \models T^*$ i $|B| \leq \kappa$. $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$. Otuda $\mathfrak{B} \Rrightarrow \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ je poluuniverzalan model teorije T i $T^* \models T$, te $\mathfrak{B} \models T$. Otuda postoji $f: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$. Teorija T^* je modelski potpuna, stoga je f elementarno utapanje. $\dashv$

POSLEDICA 3.9.1. Neka T ima prost model. Tada, ako je $\mathfrak{C}$ homogeno univerzalan model teorije T kardinalnosti $\geq \omega_1$, onda je $\mathfrak{C}$ elementarno univerzalan model teorije T^*. $\dashv$

TEOREMA 3.10. Neka je T^* modelsko kompletiranje univerzalne teorije T. Ako je pun model teorije T, tada je zasićen model za T^*.

DOKAZ: Prema prethodnoj teoremi i teoremi I.9.5, dovoljno je dokazati da je $\mathfrak{C}$ elementarno homogen model.

Neka je $p: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ parcijalni elementarni izomorfizam, takav da $|p| < \kappa$. Otuda, za $X = \mathrm{dom}p$ važi $\langle \mathfrak{C}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{C}, px \rangle_{x \in X}$.

Neka je $\mathcal{L}_o \leq \mathfrak{C}$ podmodel generisan skupom X i $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathfrak{C}$ generisan skupom $p[X]$. Otuda $\mathcal{L}_o, \mathcal{L}_1 \models (T^*)\Pi_1$. Budući da $(T^*)\Pi_1 = T$, to

(1) $\mathcal{L}_o, \mathcal{L}_1 \models T$. Takodje važi:

(2) Za svaku formulu φ jezika L i $\vec{a} \in X$, $\mathfrak{C} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[p\vec{a}]$

(3) Budući da je $|L| \leq \omega$, $|X|$, $|p[X]| < \alpha$, i $\alpha > \omega_1$, to $|B_o|$, $|B_1| < \alpha$.

(4) $a \in B_o$ akko postoji term t jezika L i $\vec{b} \in X$ tako da $a = t^{\mathfrak{C}}[\vec{b}]$. Slično, ako je $\vec{a} \in B_1$, tada postoji $\vec{b} \in X$ tako da $a = t^{\mathfrak{C}}[p\vec{b}]$.

(5) Neka je $\tilde{p}$: $B_o \longrightarrow B_1$ preslikavanje definisano sa $\tilde{p}a = t^{\mathfrak{C}}(pb_1, \ldots, pb_n)$, gde $a = t^{\mathfrak{C}}(\vec{b})$, $\vec{b} \in X$. Dokazujemo da je $\tilde{p}$ izomorfizam.

Prema (4) $\tilde{p}$ je preslikavanje <u>na</u>.

Neka je $\tilde{p}a = \tilde{p}a'$. Tada za neke terme t, t' jezika L i $\vec{b}, \vec{b}' \in X$, $a = t^{\mathfrak{C}}(\vec{b})$, $a' = t'^{\mathfrak{C}}(\vec{b}')$, te $\mathfrak{C} \models t(p\vec{b}) = t'(p\vec{b}')$. Prema (2) važi $\mathfrak{C} \models t(\vec{b}) = t'(\vec{b}')$, stoga $a = a'$. Prema prethodnom, $\tilde{p}$ je 1-1 preslikavanje.

Neka je R predikat jezika L, $\vec{a} \in B_o$ i $\mathcal{L}_o \models R[\vec{a}]$. Tada postoje termi $t_1, \ldots, t_n$ i nizovi $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in X$ tako da $a_i = t_i^{\mathfrak{C}}(\vec{b}_i)$. Otuda $\mathcal{L}_o \models R[t_1\vec{b}_1, \ldots, t_n\vec{b}_n]$ te budući da je $\mathcal{L}_o \leq \mathfrak{C}$ to $\mathfrak{C} \models R[t_1\vec{b}_1, \ldots, t_n\vec{b}_n]$. Prema (2) važi $\mathfrak{C} \models R[t_1p\vec{b}_1, \ldots, t_np\vec{b}_n]$, odnosno $\mathcal{L}_1 \models R[t_1p\vec{b}_1, \ldots, t_np\vec{b}_n]$, budući da $\mathcal{L}_1 \leq \mathfrak{C}$.

Prema prethodnom važi: $\bigwedge_{a \in B_o} \mathcal{L}_o \models R[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{L}_1 \models R[\tilde{p}\vec{a}]$.

Slično, $\bigwedge_{a \in B_o} \mathcal{L}_1 \models R[\tilde{p}\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{L}_o \models R[\vec{a}]$, te

$$\bigwedge_{a \in B_o} \mathcal{L}_o \models R[\vec{a}] \longrightarrow \mathcal{L}_1 \models R[\tilde{p}\vec{a}].$$

Na sličan način se dokazuje da $\tilde{p}$ prolazi kroz operacije, stoga je prema prethodnom $\tilde{p}$ izomorfizam.

Model $\mathfrak{C}$ je λ-homogen, prema (3) $|B_0|$, $|B_1| < \lambda$ i takodje $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1 \models T$ stoga postoji izomorfizam h tako da prikazani diagram komutira.

$$\begin{array}{ccc}
\langle \mathfrak{B}_0, x\rangle_{x\in X} & \xrightarrow{\ p\ } & \langle \mathfrak{B}_1, px\rangle_{x\in X} \\
\cap\! | & & \cap\! | \\
\langle \mathfrak{C}, x\rangle_{x\in X} & \xrightarrow{\ h\ } & \langle \mathfrak{C}, px\rangle_{x\in X}.
\end{array} \qquad \dashv$$

POSLEDICA 3.10.1. Neka je L(T) prebrojiv, $\mathfrak{A} \models T$ i $|A| > \omega$. Pretpostavimo da je T* modelsko kompletiranje univerzalne teorije T. Model $\mathfrak{A}$ je pun model teorije T akko $\mathfrak{A}$ je zasićen model teorije T*. $\dashv$

Neka je T kao u prethodnoj posledici i neka T ima prost model. Tada za model $\mathfrak{A} \models T$ važi: $\mathfrak{A}$ je zasićen model teorije T* akko je $\mathfrak{A}$ homogeno univerzalni model teorije T.

POSLEDICA 3.10.2. Ako su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ elementarno ekvivalentni puni modeli teorije T iste kardinalnosti $\omega_{\lambda+1}$, tada $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

DOKAZ: Budući da su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ puni modeli teorije T, oni su zasićeni modeli teorije T*. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ su iste kardinalnosti i elementarno ekvivalentni, stoga $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. $\dashv$

Neka teorija T ima prost model. Ako su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ puni modeli iste kardinalnosti i $\mathfrak{A} \doteq \mathfrak{B}$ tada $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

DOKAZ: Budući da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T^*$ to onda $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Prema prethodnom $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Neka teorija T ima prost model. Ako su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ homogeno univerzalni modeli iste kardinalnosti $\geq \omega_1$, tada $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

DOKAZ: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ su puni modeli i $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Prema prethodnoj posledici $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. $\dashv$

Ako je teorija T* kompletna (za to je dosta da T ima prost model), tada su ispunjeni uslovi prethodnog tvrdjenja za ma koje homogeno univerzalne modele   , iste prebrojive kardinanosti, te prema prethodnom

Neka su α, β, ν kardinali. Tada se definiše $\alpha^{\beta} = \sum_{\nu<\beta} \alpha^{\nu}$. U daljem, pretpostavljamo da T ima prost model.

Pretpostavimo da T sadrži u sebi uredjenje $\leq$ koje je bar mreža, i neka su svi modeli za T* gusto uredejeni, tj. važi: $\bigwedge_{x,y\in A} x<y \longrightarrow \bigvee_{z\in A} x<z<y$.

Pretpostavimo da je $\mathfrak{A} = \langle A, \leq, \ldots \rangle$ homogeno univerzalan model teorije T, odnosno prema prethodnim teoremama $\mathfrak{A}$ je zasićen model teorije T*. Neka je g maksimalan lanac bez krajeva u A i X, Y $\subseteq$ g tako da $X<Y$, tj. $\bigwedge_{u\in X} \bigwedge_{v\in Y} u<v$, $|X\cup Y| < \alpha$, gde $|A| = \alpha$. Tada je skup formula $\Sigma(x) = \{\underline{u} < x \mid u\in X\} \cup \{x<\underline{v} \mid v\in Y\}$ konačno neprotivurečan sa $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_{X\cup Y})$. Budući da je $\mathfrak{A}$ zasićen model, postoji $a\in A$ koji realizuje $\Sigma(x)$, tj. $\mathfrak{A} \models \Sigma(\underline{a})$. Otuda $X<a<Y$. Pretpostavimo da $a\notin g$. Neka je $b\in g$. Tada postoje sledeće mogućnosti za element b:

1° Za neki $u\in X$ $b\leq u$, stoga $b\leq a$.

2° Za neki $v\in Y$ $v\leq b$, stoga $a\leq b$.

3° $X<b<Y$.

Otuda, ako 3° ne važi ni za jedno $b\in g$, onda je $g\cup\{a\}$ linearno uredjen skup, te zbog maksimalnosti lanac g, $g\cup\{a\} = g$, odnosno $a\in g$, što je kontradikcija. Stoga $a\in g$ ili postoji $b\in g$ tako da $X<b<Y$, u svakom slučaju postoji $c\in g$ tako da $X<c<Y$. Otuda, g je η_{α} skup, te $|g|\geq\alpha$. S druge strane, $g\subseteq A$, $|A| = \alpha$, te $|g| = \alpha$. Otuda g je η_{α} skup kardinalnosti α, te prema poznatom rezultatu (Gillman, vid. /29/) $\alpha = \alpha^{\alpha}$.

S druge strane, prema teoriji Jonssonovih klasa, ako je $\alpha = \alpha^{\alpha}$ i $\alpha>\omega$ tada postoji homogeno univerzalan model teorije T (vid. /4/ ili /29/). Otuda, za teoriju T sa gore opisanim uredjenjem važi:

TEOREMA 3.11. Teorija T ima homogeno univerzalan model, odnosno T* ima zasićen model kardinalnosti α akko $\alpha = \alpha^{\alpha}$.

Prethodna tvrdjenja mogu se primeniti na primer na sledeće teorije:

(1) T = Teorija linearnog uredjenja, T* = Teorija linearnog gustog uredjenja bez krajeva (Hausdorf).

(2) T = Teorija linearno uredjenih Abelovih grupa
T*= Teorija linearno uredjenih deljivih Abelovih grupa.

(3) T = Teorija Booleovih algebri.
T*= Teorija bezatomičnih Booleovih algebri (Negrepontis)

(4) T = Teorija distributivnih mreža sa krajevima
T*= Teorija distributivnih, komplementarnih, gustih mreža.

(5) T = Teorija uredjenih polja (Erdös, Gillman, Robinson)
T*= Teorija uredjenih realnih zatvorenih polja.

U nekim slučajevima tip uredjenja modela $\mathfrak{A}$ uzrokuje da je $\mathfrak{A}$ homogenouniverzalan model. Uslov H_α (H po Hausdorfu) koji treba da bude zadovoljen je:

Ako su X, $Y \subseteq A$ takvi da

1^o $X<Y$, 2^o $|X \cup Y| < \alpha$, gde $|A| = \alpha$, 3^o Ako su 0,1 krajnje tačke u $\mathfrak{A}$ (ako ih ima), tada $0 \notin X$, $1 \notin Y$. 4^o X je usmeren skup na dole, Y je usmeren skup na gore,

tada postoji $c \in A$ tako da $X < c < Y$.

Ovaj uslov navode Negrepontis-Comfort (/29/) za Booleove algebre. Ukoliko je uredjenje $\leq$ linearno, tada se uslov H_α svodi na to da je uredjenje $\langle A, \leq \rangle$ tipa η_α. Važi sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 3.12. Ukoliko je uslov H_α ispunjen za model $\mathfrak{A}$, $|A| > \omega$, bilo koje od teorija (1)-(5), tada je $\mathfrak{A}$ homogeno univerzalan model teorije T a time i zasićen model teorije T*. $\dashv$

Ovo tvrdjenje su dokazali: za teoriju linearnog uredjenja Hausdorf, za uredjena polja Erdös, Gillman i Henrickson, za Booleove algebre Negrepontis.

U slučaju uredjenih Abelovih grupa, dokaz prethodnog tvrdjenja može se izvesti adaptacijom odgovrajućeg dokaza (/7/) za uredjena polja.

VI DEO

Apsolutnost u teoriji modela

U razmatranju različitih koncepata teorije modela, slobodno smo koristili izvesne konstrukcije u kojima se implicitno podrazumeva važenje izvesnih principa, kao na primer aksioma izbora, a po negde (prilikom iteracija nekih konstrukcija) i univerzalna aksioma izbora. S druge strane, ako je reč o sintaksnim svojstvima teorija (spomenimo neprotivurečnost, potpunost, odlučivost, eliminaciju kvantifikatora),može se postaviti pitanje da li je zaista nužno uvek podrazumevati ove principe. Na primer, primenom Loš-Vaughtovog testa (kao što smo to više puta činili) na izvesnu teoriju T sa rekurzivnim skupom aksioma, dokazuje se da je T kompletna teorija, a otuda da je i odlučiva. U dokazu Loš-Vaughtovog testa koriste se pored ostalog DLST, odnosno GLST koje su ekvivalentne aksiomi izbora (AC), dok odlučivost teorije po svojoj suštini ne bi trebalo da upliće takav transfinitan argument kao što je AC, pa ni bilo kakvu aritmetiku bezkonačnih kardinala. Otuda, ukoliko je dokazano primenom Loš-Vaughtovog testa da je izvesna teorija T odlučiva, postavlja se pitanje da li je T zaista odlučiva Drugim rečima, da li bilo šta gubimo (odnosno dobijamo) u odnosu na sintaksna svojstva teorija, primenom metoda teorije modela i teorije skupova. Upravo se takvim pitanjima bavimo u ovom delu. Pokazuje se da pri odredjenim uslovima sintaksna svojstva teorija apsolutna u sledećem smislu: Ako je $ZF + \varphi \vdash$ (T ima svojstvo P) onda $ZF \vdash$ (T ima svojstvo P), φ je neka aksioma teorije skupova.

Prilikom razmatranja ovih pitanja koristićemo Gödelovu teoriju konstruktibilnih skupova i u vezi sa tim Levyevu hijerarhiju formula. Iz tog razloga navodimo nekoliko osnovnih činjenica ove teorije, uglavnom prema /16/.

1. Levyeva hijerarhija formula

DEFINICIJA 1.1. Formula φ jezika $\{\in\}$ je Δ_0 formula ukoliko je izgradjena iz atomičnih formula, iskaznih operacija $\wedge, \vee, \neg$ i uslovnih (ograničenih) kvantifikatora $(\exists x\in y)$, $(\forall x\in y)$.

Formula φ je Σ_n formula ako je φ obilka $\exists x_1 \forall x_2 \ldots Q_n x_n \psi$, gde je Q_n jedan od kvantifikatora $\forall$, $\exists$ i ψ je Δ_0 formula.

Dualno se definišu Π_n formule, one počinju kvantifikatorom $\forall$.

U daljem koristimo sledeće oznake:

ZF - ∞ je teorija ZF bez aksiome beskonačnosti.

ZF - P je teorija ZF bez aksiome partitivnog skupa.

ZFC je ZF + AC.

ZF + GCH je ZF + generalisana kontinuum hipoteza.

ZFL je ZF + V = L, gde je V = L oznaka za aksiomu konstruktibilnosti.

$x\in L$ stoji umesto formule "x je konstruktibilan". Primetimo da je ova formula izraziva u jeziku $\{\in\}$.

Prema /16/ uvodimo Σ_n^{ZF-P}, Π_n^{ZF-P} formule.

DEFINICIJA 1.2. φ je Σ_n^{ZF-P} formula akko postoji Σ_n formula ψ tako da $ZF - P \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$. φ je Π_n^{ZF-P} formula akko postoji Π_n formula ψ tako da $ZF - P \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

φ je Δ_n^{ZF-P} formula ako je Σ_n^{ZF-P} i Π_n^{ZF-P} formula.

Umesto Σ_n^{ZF-P}, Π_n^{ZF-P} moguće je definisati Σ_n^{ZF}, Π_n^{ZF} formule (vid. na pr. /14/). Pritom se pokazuje da obe vrste formula imaju slična svojstva, odnosno da ZF-formule zadovoljavaju odgovarajuća tvrdjenja, koje ovde iskazujemo za ZF - P formule.

TEOREMA 1.3. (Osnovna svojstva Levyeve hijerarhije).

(1) Važi:

$$\Delta_0 \subseteq \Delta_1^{ZF-P} \begin{matrix} \subseteq \Sigma_1^{ZF-P} \subseteq \\ \subseteq \Pi_1^{ZF-P} \subseteq \end{matrix} \Delta_2^{ZF-P} \begin{matrix} \subseteq \Sigma_2^{ZF-P} \\ \subseteq \Pi_2^{ZF-P} \end{matrix} \cdots$$

(2) Skup Σ_n^{ZF-P} formula je zatvoren u odnosu na $\wedge$, $\vee$, $(\forall x \in y)$, $(\exists x \in y)$ i $\exists x$.

(3) Skup Π_n^{ZF-P} formula je zatvoren u odnosu na $\wedge$, $\vee$, $(\exists x \in y)$, $(\forall x \in y)$ i $\forall x$.

(4) Skup Δ_n^{ZF-P} formula je zatvoren u odnosu na $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $(\forall x \in y)$, $(\exists x \in y)$.

(5) Ako je φ Σ_n^{ZF-P} formula, tada je $\neg\varphi$ Π_n^{ZF-P} formula. Ukoliko je φ Π_n^{ZF-P} formula, tada je φ Σ_n^{ZF-P} formula.

PRIMER 1.4. Sledeće formule su Δ_0-formule:

$x = \emptyset$, $x \in \{y_1, \ldots, y_n\}$, $x = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $x \subseteq y$
$x = \langle y, z \rangle$, $x \in \bigcup y$, $x \in \bigcap y$, $x = \bigcup y$, $x = \bigcap y$

x je skup uredjenih parova, x je funkcija, x je 1-1 funkcija, $x \in \mathrm{dom}(y)$, $y = \mathrm{dom}(x)$, $y \in \mathrm{range}(x)$, $y = \mathrm{range}(x)$, x je ordinal, x je granični ordinal, $x \in \omega$ (tj. x je konačan ordinal), $x = \omega$.

Ako je $x \in t(\bar{y})$ Δ_0, to je i $x \subseteq t(\bar{y})$.
Ako je $x = t(y)$ Δ_0, to je i $t(\bar{y}) \in x$.

DEFINICIJA 1.5. Preslikavanje u ZF-P je formula $\varphi(u,y)$ takva da ZF-P $\vdash \forall u\, \exists! y\, \varphi(u,y)$. U takvom slučaju koristimo oznaku $y = F(u)$.

Niz u ZF-P je formula $\varphi(u,y)$ tako da

ZF-P $\vdash \forall u(u$ je ordinal $\Rightarrow \exists! y\, \varphi(u,y))$

ZF-P $\vdash \forall u(u$ nije ordinal $\Rightarrow \neg\exists y\, \varphi(u,y))$

Simbol $y = F(\alpha)$ koristimo za nizove u ZF-P.

Na sličan način se definišu preslikavanja, odnosno nizovi od više promenljivih, kao na primer $y = F(u,\alpha)$.

TEOREMA 1.6. (Teorema transfinitne rekurzije). Neka je $y = H(u,\alpha)$ preslikavanje u ZF-P. Tada postoji jedinstven niz $y = F(\alpha)$ u ZF-P tako da ZF-P $\vdash \forall\alpha(F(\alpha)=H(F\restriction\alpha,\alpha))$.

U sledećim tvrdjenjima se pokazuje da su Δ_n^{ZF-P} formule zatvorene u odnosu na neke operacije.

1.7. Zatvorenost Δ_n^{ZF-P} formula u odnosu na rekurziju

Neka je $y = H(u,\alpha)$ Δ_n^{ZF-P} preslikavanje i $y = F(\alpha)$ definisano iz H rekurzijom. Tada je $y = F(\alpha)$ Δ_n^{ZF-P} preslikavanje.

1.8. Svako Σ_n^{ZF-P} preslikavanje ili niz u ZF-P je Δ_n^{ZF-P} preslikavanje.

1.9. Pravilo podskupova

Ako je φ Δ_n^{ZF-P} formula tada je $y = \{x \in u \mid \varphi(x)\}$ Δ_n^{ZF-P} formula.

1.10. Pravilo zamene

(1) Ako je $y = F(u)$ Δ_n^{ZF-P} preslikavanje, tada je $y = \{F(u) \mid u \in x\}$ Δ_n^{ZF-P} formula.

(2) Ako je $\varphi(x)$ Δ_n^{ZF-P} formula i $y = F(u)$ je Δ_n^{ZF-P} preslikavanje, tada je $\varphi(F(u))$ takodje Δ_n^{ZF-P}.

Prema prethodnom tvrdjenju, ako su $y = F(u)$, $y = H(u)$ Δ_n^{ZF-P} to su i $x \in F(u)$, $y = H(F(u))$, $(\forall x \in F(u))\varphi$.

Skup $R(\alpha)$ se definiše transfinitnom rekurzijom:

1° $R(0) = \emptyset$, 2° $R(\alpha + 1) = S(R(\alpha))$,

3° Ako je α granični ordinal,,tada $R(\alpha) = \bigcup_{\beta\in\alpha} R(\beta)$.

Lako je videti da $R(\omega)$ sadrži prirodne brojeve. S druge strane, $R(\omega)$ se može predstaviti u strukturi prirodnih brojeva. $R(\omega)$ je tranzitivan skup nasledno konačnih skupova i zatvoren je za skupovne operacije, pored ostalog i na formiranje konačnih skupova, te otuda i na formiranje uredjenih n-torki. Stoga je jasan pozitivan stav autora (G.Kreisel i ostali) u /17/, str. 40, prema ulozi $R(\omega)$ u metamatematici. U tom članku oni ukazuju na izvesnu nepogodnost korišćenja prirodnih brojeva u nekim konstrukcijama (na pr. u Gödelizaciji).

Neka je - jedna Gödelizacija definicionog proširenja jezika teorije skupova u $R(\omega)$. Izmedju ostalog, u domenu preslikavanja - nalaze se prirodni brojevi, elementi skupa $R(\omega)$, termi i formule jezika teorije skupova. Otuda, ako je φ formula teorije ZF, onda $\underline{\varphi} \in R(\omega)$.

DEFINICIJA 1.11. $X \subseteq R(\omega)$ je reprezentabilan u ZF-P akko postoji φ tako da

$a \in X \longrightarrow ZF - \infty \vdash \varphi(\underline{a})$

$a \notin X \longrightarrow ZF - \infty \vdash \neg\varphi(\underline{a})$ $\quad (a \in R(\omega))$.

TEOREMA 1.12. $X \subseteq R(\omega)$ je predstavljen u $ZF - \infty$ akko je X rekurzivan. $\dashv$

DEFINICIJA 1.12. $X \subseteq R(\omega)$ je definisan u modelu $\mathfrak{M}$ za $ZF - \infty$ akko postoji formula φ tako da za sve $a \in R(\omega)$ važi:

$a \in X \longrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a})$

$a \notin X \longrightarrow \mathfrak{M} \models \neg\varphi(\underline{a})$.

Primetimo da je $\langle R(\omega), \in\rangle$ prost model za $ZF - \infty$. Takodje, ako je $X \subseteq R(\omega)$ rekurzivan (prema T.1.12 predstavljen u $ZF - \infty$) onda je X definisan u svakom $\mathfrak{M} \models ZF - \infty$, otuda i u $\langle R(\omega), \in\rangle$.

PRIMER 1.14. Sledeće formule teorije ZF su Δ_1^{ZF-P}:

x je konačan, $y \in tc(x)$, $y = tc(x)$ (ovde je tc(x) tranzitivno zatvorenje skupa x), $x \in R(\omega)$, $x = R(\omega)$. Takodje, svaka relacija na $R(\omega)$ koja je definisana u $\langle R(\omega), \in \rangle$ je takodje Δ_1^{ZF-P} formula.

Sledeće tvrdjenje je ključno za dalja razmatranja.

TEOREMA 1.15. (Levy-Shoenfildova teorema apsolutnosti). Ako je φ Π_1^{ZF-P} rečenica, tada $ZF\text{-}P \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi^L$.

Otuda, ako je φ Π_1^{ZF-P} rečenica i $ZFL \vdash \varphi$, tada $ZF \vdash \varphi$. ⊣

Ovde je φ^L relativizacija formule φ po L.

Otuda, prema prethodnoj teoremi, važe sledeća tvrdjenja.

POSLEDICA 1.15.1. Ako je φ Δ_1^{ZF-P} formula, tada $ZF\text{-}P \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi^L$

Otuda za Δ_1^{ZF-P} formulu φ važi: $ZFL \vdash \varphi \longrightarrow ZF \vdash \varphi$.

Ovo tvrdjenje neposredno sledi iz činjenice da je svaka Δ_1^{ZF-P} formula takodje Π_1^{ZF-P}.

POSLEDICA 1.15.2. Ako je φ Δ_1^{ZF-P} (ili Π_1^{ZF-P}) formula,

tada važi:

$ZF + \theta \vdash \varphi \longrightarrow ZF \vdash \varphi$, gde je θ bilo koja od sledećih aksioma

(1) AC , (2) Univerzalna aksioma izbora (UAC), (3) GCH.

Dokaz ovog tvrdjenja zasniva se na činjenici da je $ZFL \vdash \theta$ (Gödel).

2. Apsolutnost sintaksnih svojstava teorija

U daljem pretpostavljamo da je $\mathcal{L}$ prebrojiv rekurzivan jezik prvog reda i T teorija za $\mathcal{L}$ sa rekurzivnim skupom aksioma. Gödelizacijom može se uzeti da je $\mathcal{L} \subseteq R(\omega)$. Kako su aksime iz T konačni nizovi elemenata iz $\mathcal{L}$ i logičkih simbola, to se takodje može uzeti da je $T \subseteq R(\omega)$. Skupovi $\mathcal{L}$, T su rekurzivni podskupovi od $R(\omega)$, stoga su prema teoremi 1.12. $\mathcal{L}$ i $\underline{T}$ predstavljeni nekim formulama $\theta_{\mathcal{L}}$, θ_T u ZF $-\infty$. Otuda su skupovi $\mathcal{L}$ i T definisani u $\langle R(\omega), \in \rangle$, te prema primeru 1.14. formule $x = \mathcal{L}$, $x = T$ su Δ_1^{ZF-P} formule. Prema pravilu subsitucije, formule $x \in \mathcal{L}$, $x \in T$, $(\forall x \in \mathcal{L})\varphi$, $(\exists x \in \mathcal{L})\varphi$, $(\forall x \in T)\varphi$, $(\exists x \in T)\varphi$ su takodje $_1^{ZF-P}$ formule, ukoliko je φ Δ_1^{ZF-P} formula.

LEMA 2.1. Sledeći (meta)pojmovi imaju svoju formalizaciju u jeziku teorije skupova i one su Δ_1^{ZF-P} formule.

1° x je term jezika $\mathcal{L}$, $Term_{\mathcal{L}}(x)$.

2° x je formula jezika $\mathcal{L}$, $For_{\mathcal{L}}(x)$.

3° x je rečenica jezika $\mathcal{L}$, $Sent_{\mathcal{L}}(x)$.

4° x je Π_n rečenica (Σ_n rečenica, Π_n formula, Σ_n formula u smislu IV.1.), $Sent_{\Pi_n, \mathcal{L}}(x)$, $Sent_{\Sigma_n, \mathcal{L}}(x)$, $For_{\Pi_n, \mathcal{L}}(x)$, $For_{\Sigma_n, \mathcal{L}}(x)$.

5° x je dokaz (izvodjenje) za y u teoriji T, $ded_T(x,y)$.

Primetimo da je $ded_T(x,y)$ formula sa tačno dve slobodne promenljive, budući da je T predstavljena formulom θ_T.

6° $x = R^n(\omega)$, gde $R^n(\omega) = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \vec{x} \in R(\omega)\}$.

Primetimo da je $R^n(\omega) \subseteq R(\omega)$.

7° Relativizacija formule φ po $R(\omega)$, $\varphi^{R(\omega)}(\vec{x})$, gde je φ ma koja formula teorije skupova.

DOKAZ: Dokazi ovih tvrdjenja svode se na formalizaciju odgovarajućih pojmova. Ovde izvodimo potpun dokaz za 1°. Terme je moguće definisati rekurzivno na sledeći način.

$Term_{\mathcal{L},0} = V \cup C$, gde $V = \{\underline{v}_i \mid v_i$ je promenljiva, $i \in \omega\}$

$C = \{\underline{c} \mid c$ je konstanta jezika $\mathcal{L}\}$

$Term_{\mathcal{L},n+1} = Term_{\mathcal{L},n} \cup \{\underline{f(t_1,\dots,t_n)} \mid f \in Fun_{\mathcal{L}}$, $t_1,\dots,t_n \in Term_{\mathcal{L},n}\}$.

$\mathrm{Term}_{\mathcal{L}} = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Term}_{\mathcal{L},n}$. Ovde je $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ skup funkcijskih simbola jezika $\mathcal{L}$. Otuda, $\mathrm{Term}_{\mathcal{L}}$ je jedinstvena funkcija definisana rekurzijom iz H(u):

$$H(u) = V \cup C \cup u \cup \{\langle x, \underline{(}, y_1, \underline{,}, y_2, \dots, y_{ar(x)}, \underline{)}, \rangle \; x \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}},$$

$y_1, \dots, y_{ar(x)} \in u\}$, gde je $ar : \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$, $ar(f)$ = arnost funkcija f. Preciznije,

$$H(u) = V \cup C \cup u \cup \{ v \mid (\exists x \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}})(\exists y \in R^{ar(x)}(\omega))(\forall i \in \omega)$$
$$(i \leq ar(x) \Rightarrow \pi_i^{ar(x)}(y) \in u \wedge \pi_0^{2ar(x)+2}(v) = x \wedge \pi_1^{2ar(x)+2}(v) =$$
$$\underline{(} \wedge \pi_{2i}^{2ar(x)+2}(v) = \pi_i^{ar(x)}(y) \wedge (1 \leq i < ar(x) \Rightarrow \pi_{2i+1}^{2ar(x)+2}(v) =$$
$$\underline{,} \wedge \pi_{2ar(x)+2}^{2ar(x)+2} = \underline{)} \}.$$

Ovde je $\pi_i^n(x)$ projektujuća funkcija,

$\pi_i^n(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = x_i$, $1 \leq i \leq n$. Funkcija $\pi_i^n(x)$ je rekurzivna, stoga je Δ_1^{ZF-P}.

Korak po korak, nije teško dokazati da je H(u) Δ_1^{ZF-P} preslikavanje. Prema teoremi rekurzije, postoji jedinstven niz Term tako da $\mathrm{Term}(\alpha) = H(\mathrm{Term} \restriction \alpha)$. Prema pravilu rekurzije, $x = \mathrm{Term}(\alpha)$ je Δ_1^{ZF-P} preslikavanje. Otuda, prema pravilu substitucije, $x = \mathrm{Term}(\omega)$ je Δ_1^{ZF-P} formula. S druge strane, jasno je da $\mathrm{Term}_{\mathcal{L}} = \mathrm{Term}(\omega)$.

Moguć je i drugi prilaz dokazu ovih tvrdjenja. Svaka od relacija, odnosno skupova (ako je u pitanju unarna relacija) u 1^o-6^o je odlučiva. Otuda, prema Churchovoj tezi i teoremi 1.12., ove relacije i skupovi predstavljeni su u ZF $-\infty$ Stoga su navedene formule Δ_1^{ZF-P}. $\dashv$

Neka $T \vdash x$ označava $(\exists y \in R(\omega))\, \mathrm{ded}_T(y,x)$. Otuda $T \vdash x$ označava da x ima izvodjenje (dokaz) u T, odnosno x je teorema teorije T.

LEMA 2.2. $T \vdash x$ je Δ_1^{ZF-P} formula.

DOKAZ: Formula $ded_T(y,x)$ je Δ_1^{ZF-P} formula. Δ_1^{ZF-P} formule su zatvorene u odnosu na ograničene kvantifikatore, stoga je $(\exists y \in x)\, ded_T(y,x)$ Δ_1^{ZF-P}. Prema pravilu substitucije, $(\exists y \in R(\omega))\, ded_T(y,x)$ je takodje Δ_1^{ZF-P}, budući da je $x = R(\omega)$ Δ_1^{ZF-P}. $\dashv$

Primetimo da je $T \vdash x$ formula jezika teorije skupova sa tačno jednom slobodnom promenljivom x.

<u>T je neportivurečna teorija</u> je formula $Con_T \doteq \neg(T \vdash \perp)$, gde $\perp \doteq \exists x(x \neq x)$. Otuda $\neg(T \vdash \perp)$ je formula $\neg(\exists y \in R(\omega))\, ded_T(y, \perp)$.

TEOREMA 2.3. Neka je T teorija sa rekurzivnim skupom aksioma (odnosno skup $\{\underline{x} \mid x \in T\}$ je rekurzivan podskup $R(\omega)$). Tada:

$$ZF + \varphi \vdash Con_T \longrightarrow ZF \vdash Con_T,$$

gde je φ bilo koja od aksioma AC, UAC, GCH, V = L.

DOKAZ: Budući da su $x = R(\omega)$, $ded_T(y, \perp)$ Δ_1^{ZF-P}, prema pravilima o zatvorenosti Δ_1^{ZF-P} formula, formula Con_T (primetimo da je $Con_T \Longleftrightarrow \neg(\exists y \in R(\omega))\, ded_T(y, \perp))$ takodje Δ_1^{ZF-P}. Prema Levy-Shoenfildovoj teoremi apsolutnosti, tvrdjenje sledi. $\dashv$

Značaj prethodne teoreme može se sagledati u sledećem. Dokaz da je neka teorija T neprotivurečna, najčešće se svodi na konstrukciju modela $\mathfrak{A}$ za T. Tom prilikom moguće je da se koristi aksioma φ od nabrojanih. Teorema 2.3. iskazuje da se φ može eliminisati.

Neposredna posledica prethodne teoreme je

$$\sim ZFL \vdash Con_{ZF}$$

Zaista, ako bi bilo $ZFL \vdash Con_{ZF}$, prema teoremi 2.3.

(1) $ZF \vdash Con_{ZF}$. S druge strane, prema Gödelovom stavu

nepotpunosti, za ma koje konačno (rekurzivno) proširenje T teorije ZF $-\infty$ važi $\sim T \vdash Con_T$. Jasno je da je ZF konačno proširenje teorije ZF $-\infty$, stoga $\sim ZF \vdash Con_{ZF}$, što je u kontradikciji sa (1).

U vezi sa prethodnim interesantan je drugi Gödelov rezultat:

$ZF \vdash Con_{ZF} \Longrightarrow Con_{ZFL}$.

Dalje, važi $ZFC \vdash$ "stav potpunosti", odnosno

$ZFC \vdash (Con_T \Leftrightarrow$ Postoji model za T).

Otuda,

$ZFL \vdash$ (Postoji model za T) $\rightarrow$ $ZFC \vdash$ (Postoji model za T)

Za formulu θ kažemo da je apsolutna ako važi:

$ZF + \mathcal{C} \vdash \theta \rightarrow ZF \vdash \theta$, gde je $\mathcal{C}$ jedna od nabrojanih aksioma u teoremi 2.3. Prema Levy-Shoenfildovoj teoremi, dosta je da je θ Π_1^{ZF-P} formula pa da θ bude apsolutna.

Pojam T je kompletna teorija ima sledeću formalizaciju:

$Compl(T) = \forall x \in Sent_{\mathcal{L}} (T \vdash x \vee T \vdash \neg x)$.

TEOREMA 2.4. Compl(T) je Δ_1^{ZF-P} formula, stoga je i apsolutna.

DOKAZ: $T \vdash x$, $x = Sent_{\mathcal{L}}$, $x = \neg y$ su Δ_1^{ZF-P} formule. Skup

Δ_1^{ZF-P} formula je zatvoren u odnosu na disjunkciju, ograničene kvantifikatore, stoga je prema pravilu substitucije Compl(T) Δ_1^{ZF-P} formula.

Čest je slučaj da se dokazu da je izvesna teorija T kompletna, koristi jedna od aksioma $\mathcal{C}$. Izmedju ostalog, takav slučaj se javlja u sledećim argumentima.

1° Svaka dva modela teorije T su elementarno ekvivalentna.
2° Primena Loš-Vaughtovog testa.
3° Svaka dva zasićena modela kardinalnosti ω_1 (ili $k \geq \omega_1$) su izmorfna.

U prvom slučaju koristi se stav potpunosti, stoga i AC (ili bar da se u svakoj Booleovoj algebri svaki filter produžuje do ultrafiltra), u drugom slučaju primenjuje se DLST i

GLST, te otuda i AC. U trećem slučaju koristi se CH (GCH). Prethodna teorema iskazuje da se u svim slučajevima može eliminisati aksioma φ .

Dalje, budući da je T teorija sa rekurzivnim skupom aksioma, relacije $ded_T(y,x)$, $ded_T(y, \neg x)$ su rekurzivne. Ako je T kompletna (neprotivurečna) teorija tada za skup $Cn(T) = \{\varphi \mid T \vdash \varphi$ važi $\}$

$$a \in Cn(T) \longrightarrow (\exists y \in R(\omega))\ ded_T(y,\underline{a})$$

$$a \notin Cn(T) \longrightarrow (\exists y\ R(\omega))\ ded_T(y,\underline{\neg a}).$$ Stoga,

$$a \in Cn(T) \longleftrightarrow R(\omega) \models \exists y\ ded_T(y,\underline{a})$$

$$a \notin Cn(T) \longleftrightarrow R(\omega) \models \exists y\ ded_T(y,\underline{\neg a}).$$

Otuda su skupovi $X = \{\underline{a} \mid a \in Cn(T)\}$, $R(\omega) - X$, prema teoremi projektovanja (vid. /35/, str.66 T.X,XI) rekurzivno prebrojivi. Stoga je T odlučiva teorija.

Pojam <u>T je n-kompletna teorija</u> ima sledeću formalizaciju:

$$Compl_n(T) \doteq \forall x \in Sent_{\mathcal{L},\Pi_n}\ (T \vdash x \vee T \vdash \neg x).$$

TEOREMA 2.5. $Compl_n(T)$ je Δ_1^{ZF-P}, te je stoga apsolutna.

DOKAZ: Slično kao u 2.4. $\dashv$

Sintaksno svojstvo teorije T koje odgovara modelskoj n potpunosti ima sledeći oblik:

$$Mod_n(T) \doteq (\forall x \in Sent_{\mathcal{L}})(\exists y \in Sent_{\mathcal{L},\Pi_{n+1}})(T \vdash x \Leftrightarrow y).$$

TEOREMA 2.6. $Mod_n(T)$ je Δ_1^{ZF-P}, stoga je i apsolutna.

DOKAZ: Formule $x = Sent_{\mathcal{L}}$, $x = Sent_{\mathcal{L},\Pi_{n+1}}$, $z = (x \Leftrightarrow y)$ i $T \vdash x$ su Δ_1^{ZF-P}. Prema pravilu substitucije, $Mod_n(T)$ je takodje Δ_1^{ZF-P}. $\dashv$

Prema teoremi IV.6.7., teorija T je podmodelski potpuna akko T dopušta eliminaciju kvantifikatora. Pojam <u>eliminacije kvantifikatora</u> ima sledeći zapis:

$Pmod(T) \doteq (\forall \varphi \in Sent_{\mathcal{L}})(\exists \psi \in Sent_{\mathcal{L},\Pi_0})(T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi)$.

TEOREMA 2.7. Pmod(T) je Δ_1^{ZF-P}, otuda je i apsolutna.

DOKAZ: Slično dokazu u T.2.6. $\dashv$

Prema prethodnom, moguće je drugačije pristupiti ispitivanju da li je neka teorija n-modelski potpuna (podmodelski potpuna). Na primer, u teoremi V.3.2. umesto $|A|^+$ zasićenog modela može se uzeti zasićen model kardinalnosti $|A|^+$, budući da prethodna tvrdjenja obezbedjuju eliminaciju GCH, uz koju se inače dokazuje da za proizvoljnu teoriju T u prebrojivom jeziku u svakom kardinalu postoji zasićen model.

TEOREMA 2.8. Neka je T kompletna teorija. Tada:

ZFL $\vdash$ (T je ω-kategorična) $\longrightarrow$ ZFC $\vdash$(T je ω-kategorična).

DOKAZ: Prema T. II.3.5. važi (u ZFC):

1° Compl(T) $\Rightarrow$ (T je ω-kategorična $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \omega)\ |B_n(T)| \in \omega$).

Dokazujemo da je $(\forall n \in \omega)\ |B_n(T)| \in \omega$ Δ_1^{ZF-P}.

2° $|x| \in \omega$ (tj. x je konačan skup) je Δ_1^{ZF-P}. Zaista

$|x| \in \omega \Leftrightarrow \exists m \in \omega \forall f((Fun(f) \wedge Dom(f) = x \wedge Range(f) = m) \Rightarrow$ f je 1-1).

Stoga je formula $|x| \in \omega$ ekvivalentna Π_1^{ZF-P} formuli.

Dalje,

$|x| \in \omega \Longleftrightarrow \exists m \in \omega\ \exists f(Fun(f) \wedge Dom(f) = x \wedge range(f) = m$ $\wedge$ f je 1-1), te je formula $|x| \in \omega$ Σ_1^{ZF-P} formula.

Prema prethodnom, $|x| \in \omega$ je Δ_1^{ZF-P} formula.

3° $x = B_n(T)$ je Δ_1^{ZF-P} formula.

Zaista, primetimo da je

$x = B_n(T) \Leftrightarrow x = \{\bar{\varphi} \mid Slvar(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}\}$, gde

$\bar{\varphi} = \{\psi \in For_{\mathcal{L}} \mid T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi,\ Slvar(\varphi) = Slvar(\psi)\}$.

Simbolom Slvar(x) označen je skup slobodnih promenljivih u x.

Formule $x \in For_{\mathcal{L}}$, $T \vdash x \iff y$ su Δ_1^{ZF-P} formule. Slvar(x) definiše se rekurzijom preko Δ_1^{ZF-P} formula, stoga je i $y = Slvar(x)$ takodje Δ_1^{ZF-P}. Dalje,

$Slvar(x) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\} \iff \forall y \in Slvar(x)\,(y=x_1 \vee \ldots \vee y=x_n)$,

te je prema pravilu substitucije ova formula Δ_1^{ZF-P}. Primenom pravila substitucije $x = \overline{\varphi}$, je Δ_1^{ZF-P}, stoga je i $x = B_n(T)$ Δ_1^{ZF-P}. Prema 2°, onda je $|B_n(T)| \in \omega$ takodje Δ_1^{ZF-P}, te je $(\forall n \in \omega)(|B_n(T)| \in \omega)$ apsolutna.

Otuda, ako je $ZFL \vdash$ (T je ω-kategorična), tada prema 1° je $ZFL \vdash (\forall n \in \omega)(|B_n(T)| \in \omega)$. Zbog apsolutnosti, $ZFC \vdash (\forall n \in \omega)(|B_n(T)| \in \omega)$. Prema 1° važi

$ZFC \vdash$ (T je ω-kategorična).

B I B L I O G R A F I J A

/1/ П.С. Александров, П.С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, "Наука" (Москва),1971.144

/2/ E. Artin, Galois theory, Notre Dame Math. lectures N^{o} 2. (London),1971. 82

/3/ K.J. Barwise, Axioms for abstract model theory, Ann. Math. Logic 7, 1974. 221-265

/4/ J.L. Bell, A. B. Slomson, Models and ultraproducts, North-Holland, (Amsterdam), 1971.

/5/ G. Cherlin, Model theoretic algebra, J. Symb. Logic, Vol. 41, No 2, 1976. 537-545

/6/ G. Cherlin, Model theoretic algebra, Lecture Notes in Math.,Springer-Verlag, 1976.

/7/ C.C. Chang, H.J. Keisler, Model theoy, North. Holland, (Amsterdam), 1973. XII+550

/8/ P.M. Cohn, Universal algebra, Harper & Row, (London), 1965. XV+333

/9/ H. Curry, Foundations of Mathematical logic, Mc Graw-Hill (New York), 1963. 567

/10/ K. Devlin, Aspects of constructability, Lecture Notes in Math. 354, Springer-Verlag, 1973. XII+24o

/11/ Б.А.Бфимов, Диадические бикомпакты, Труды Московского Мат. общества, Том. 14, 1965. 211-247

/12/ P. Halmos, Lectures on Boolean algebras, Springer-Verlag, (New York), 1974. 144

/13/ J. Hirschfeld, W. Wheeler, Forcing, Arithmetic, Division Rings, Lecture Notes in Math.454, Springer-Verlag, 1975

/14/ T. Jech, Lectures in set theory, Lecture Notes in Math. 217, Springer-Verlag, 1971. 137

/15/ J. Keisler, Six classes of theories, J. Austral. Math. Soc. 21(Series A), 1976. 252-266

/16/ J. Keisler,Lekcije iz matematičke logike održane na "University of Wisconsin", ne publikovano, (Madison), 1973-74

/17/ G. Kreisel, G.E. Mints, S.G. Simpson, The use of abstract language in elementary metamathematics: Some pedagogic examples, Logic colloquium, Lecture Notes in Math. 453, Springer-Verlag, 1975. 38-131

/18/ D. Kueker, Back-and-forth arguments and infinitary logic s, Infinitary logic: In memoriam Carol Karp, Lecture Notes in Math. 492, Springer-Verlag,1975. 17-76

/19/ К. Куратовский, А. Мостовски, Теория множеств, "Мир" Москва, 1970. 416

/20/ Đ. Kurepa, Ensembles ordonnes et ramifies, These, Paris, 1935.,Publ. Math. 4, 1935. 1-138

/21/ Đ. Kurepa, The Cartesion multiplication and the cellularity numer, Publ. Math.,T 2(16) 1962. 21-169

/22/ Đ. Kurepa, Dendrity of spaces and of ordered sets, Glasnik Math., T 2(22), N° 2, 1967. 145-162

/23/ Дж. Курепа, Некторые функции на топологических структурах, графх, Труды международного симп. по топологии и ее применениях, Херцег-Нови,1968.243-248

/24/ C. I. Lewis, A survay of symbolic logic, Dover, New York, 1960. X+327

/25/ А.И. Малцев, Алгебраические системы, Москва, 1970. 392

/26/ E. Mendelson, Introduction to Mathematical logic, D. Nostrand Company, Princeton, 1963. 32o

/27/ Ž.Mijajlović, Booleove algebre u logici (magistarski rad), Beograd, 1973. III+61

/28/ Ž. Mijajlović, On decidability of one class of Boolean formulas, Mat. Vesnik 11(26) 1974. 48-54

/29/ W.W. Comfort, S. Negrepontis, The theory of ultrafiltres, Springer-Verlag, Berlin, 1974. X+482

/30/ S. Prešić, Elementi matematičke logike, Matematička Biblioteka 42, Beograd, 1968. 143

/31/ Е.Расеева - Р. Сикорски,Математика метаматематики, "Наука", Москва, 1972. 591

/32/ A. Robinson, Complete theories, North-Holland, Amsterdam, 1956. 129

/33/ A. Robinson, Ordered structures and related concepts, Mathematical Interpretation of formal Systems, North- Holland, Amsterdam, 1971. 51-56

/34/ A. Robinson, Model theory and nonstandard arithmetic, Infinitistic Methods, Pergamon, London, 1961.265-3o2

/35/ H. Rogers, Theory of recursive functions and effective computability, Mc Graw-Hill (New York) 1967. XIX+482

/36/ P. Rosenbloom, The elements of mathematical logic, Dover, New York, 1950. IV+214

/37/ S. Rudeanu, Boolean functions and equations, North Holland, Amsterdam, 1974.

/38/ G. E. Sacks, Saturated model theory, W. A. Benjamin, Inc. Reading, Mass. 1972. 335

/39/ R. Sikorski, Boolean algebras, Springer-Verlag, Berlin, 1969, 237

/40/ J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1967. VII+344

/41/ A. Tarski, Undecidable theories, North-Holland, Amsterdam, 1971, XI+98

/42/ A. Tarski, Logic,semantics, metamathematics (papers from 1923-1938) Oxford, 1969. XIX+471

/43/ R. Vaught, Denumerable models of complete theories, Infinitistic methods (Pergamon, London) 1961. 303-321