У Н И В Е Р З И Т Е Т   У   Б Е О Г Р А Д У

М А Т Е М А Т И Ч К И   Ф А К У Л Т Е Т

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ И ОДГОВАРАЈУЋЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

~ специјалистички рад ~

Кандидат:

Александра Росић

Ментор:

проф. др Александар Липковски

Београд, 2009.

Садржај

1 Увод

Појам симетрије је у бити човека. Она је од памтивека била појам за лепо у природи, ликовној уметности, архитектури, поезији, геометрији, музици. Свуда око нас се налазе неки симетрични односи, они су толико чести да су заправо стандард по коме човечанство битише.

Како је математика један од главних еволутивних показатеља човековог развоја у природи, а симетрија саставни део природе, јасно је да је симетрија као таква својеврстан математички сан, који се може остварити на многим пољима и применити у многим областима, па и у основном и средњем образовању.Читаве области математике изникле су из проучавања симе-трије, а четири главне области које се проучавају у основној и средњој школи - алгебра, анализа , геометрија и тригонометрија обилују примерима које могу ученике увести у разумевање симетрије. У алгебри су то на пример симетрични полиноми, системи једначина, детерминанте, групе. Појам симетричности у алгебри многим ученицима није суштински јасан, јер они симетрију повезују са геометријом, занемарујући могућност примене симетрије на апстрактном нивоу.

Врло често ученици, када виде Vieté-ове формуле, интуитивно уоче симетрију у алгебри, док се посебна лепота симетричности огледа при проучавању симетричних полинома, функција као и једнакости и неједнакости које су у вези са њима, где нису симетрични само коефицијенти, већ и сама решења.

Проучавајући даље симетричне полиноме може се уочити да веза веза међу Newton-овим коефицијентима постоји и да је симетрична, ту је почетак посматрања калеидоскопа симетричних полинома који је неисцрпно поље за налажење нових веза међу коефицијентима, као и за проналажење нових неједнакости. У овом раду се посебна пажња поклонила питањима у вези са симетричним полиномима и њима одговарајућим неједнакостима, које се осим у математици могу применити и у физици, кристалографији, техници, али и као тема за додатну наставу у гимназијама.

Почеци проучавања симетричних полинома датирају од 1629. године и Alberta Girarda који је у свом делу Invention nouvelle an l`algebre јасно описао елементарне симетричне полиноме. Girard је такође посматрао суму степена $s_r = x_1^r + ... + x_n^r$ и дао формуле за s_1, s_2, s_3, s_4 преко σ_i .

У периоду 1665-1666. године Newton је такође радио на симетричним полиномима и проучио примере у вези са њима изражавајући их преко σ_i . У свом делу Arithmetica universalis показује како је сума степена у вези са симетричним полиномима. За $r = 1$ релација је тривијална, то јест $s_1 = \sigma_1$, док за $r > 1$ добијамо Newton-ове идентитете.

С обзиром да се у средњој школи обрађују симетрични полиноми, намеће се потреба да се ова област свестраније сагледа у оквиру додатне наставе и не задржи само на решавању једначина које ученици углавном шаблонски раде, већ би на том плану требало би да се онима који показују интересовање да додатни стимуланс у савладавању математичког успона, јер нас је пракса научила да треба избегавати равнице у настави математике.
Симетрија је геометријски појам, па када полином назовемо симетричним ученицима може звучати чудно, да би увели такву терминологију, неопходно је објаснити како симетрију дефинишемо у алгебри.
Ово подразумева умешаност алгебарских група, које је у математику увео Galoa у свом раду о алгебарским решењима полиномских једначина степена ≥ 5. Посматрајмо најпре један геометријски пример. Правилни петоугао је симетрична геометријска фигура. Ротацијом око свог центра у смеру супротном кретању казаљке на сату за 72^0 правилни петоугао се пресликава на себе, ову ротацију можемо приказати као пресликавање

$$T : R^2 \to R^2$$

при чему за свако n дефинишемо:

$$T^n = \begin{cases} \mathrm{T} \circ T \circ \ldots \circ T \qquad (\mathrm{n\ puta}), & n > 0; \\ id, & \mathrm{n}=0; \\ \mathrm{T}^{-1} \circ T^{-1} \circ \ldots \circ T^{-1} \qquad (\mathrm{-n\ puta}). & n < 0. \end{cases}$$

Приметимо да је $T^5 = id$, па добијамо скуп од пет елемената:

$$G = \{T^n | n \in Z\} = \{id, T, T^2, T^3, T^4\}$$

Лако се види да композиција пресликавања дефинише пресликавање $\circ : G \times G \to G$ и да су задовољени следећи услови:

$$(T^m \circ T^n) \circ T^r = T^m \circ (T^n \circ T^r),$$

$$T^m \circ id = id \circ T^m = T^m,$$

$$T^m \circ T^{-m} = T^{-m} \circ T^m = id.$$

На овај начин скуп G заједно бинарном алгебарском операцијом ○ чини групу. Групу називамо коначном ако она садржи коначан број елемената. Основни пример коначне групе је симетрична група S_n, од n елемената који чине групу пермутација скупа $\{1, 2, \ldots n\}$ са бинарном алгебарском композицијом пермутација. Уопште, теорија група је формални метод за анализирање апстрактних и физичких система, где је симетрија од велике важности на пример, у уметности, хемији, физици и квантној механици.

2 Симетрични полиноми и елементарне симетричне функције

Функција $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ од n промењљивих је симетрична ако је њена вредност иста за све пермутације промењљивих, дакле ако је:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, ..., x_{\sigma_n}) = f^\sigma$$

за сваку пермутацију $x_1 \to x_{\sigma_1}, ..., x_n \to x_{\sigma_n}$.
Како се свака пермутација може добити помоћу транспозиција можемо рећи и да је функција симетрична ако при транспозицији њених промењљивих она остаје иста.
На пример, ако је σ транспозиција $(1,2) \in S_2$ тада је $(x_1 + 2x_2)^\sigma = x_2 + 2x_1$.
Специјално се говори о симетричним полиномима, симетричним рационалним функцијама (изразима) итд.
Постоје полиноми који се приликом било какве пермутације промењљивих нeће променити. Такав је полином $x_1 + ... + x_n$. Овакви полиноми се називају симетричним.
Полином $f(x_1, ..., x_n) \in K[x_1, ..., x_n]$ је симетричан ако је $f^\sigma = f$ за сваку пермутацију $\sigma \in S_n$. Симетричност полинома више промењљивих је релативан појам и зависи од тога у ком прстену полинома га посматрамо: полином $x_1 + x_2$ је симетричан као полином од две промењљиве и није симетричан као полином од три промењљиве јер га пермутација (123) преводи у полином $x_2 + x_3$. У сваком прстену полинома од n промењљивих постоје стандардни симетрични изрази. То су следећи полиноми такозване елементарне симетричне функције.
(Горњи индекс n у σ_i^nуказује у ком прстену полинома посматрамо дату функцију и обично се не пише).

$$\sigma_0 = 1$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^n = -(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^n = x_1x_2 + x_1x_3 + ...x_{n-1}x_n$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = \sigma_n^n = (-1)^n x_1x_2...x_n$$

Израз $\prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$ је симетричан полином величина $x_1, .., x_n$. Напише ли се он као полином с обзиром на t :

$$\prod_{\nu=1}^{n}(t - x_\nu) = \sigma_0 t^n + \sigma_1 t^{n-1} + ... + \sigma_{n-1} t + \sigma_n$$

коефицијенти $\sigma_0, ..., \sigma_n$ зависе од $x_1, ..., x_n$ и имамо:

$$(*)......\quad \begin{array}{l} \sigma_0 = 1 \\ \sigma_1 = -(x_1 + x_2 + ... + x_n) = -\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \sum_{\nu_1<\nu_2} x_{\nu_1}x_{\nu_2} \\ \sigma_3 = -x_1x_2x_3 - ... - x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\sum x_{\nu_1}x_{\nu_2}x_{\nu_3} \\ \vdots \\ \sigma_\nu = (-1)^\nu \sum x_{\nu_1}x_{\nu_2}...x_{\nu_\nu} \qquad \sigma_n = (-1)^n x_1x_2...x_n \end{array}$$

Функције $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ дефинисане са (*) зову се основне или елементарне симетричне функције.
На пример, величинама x_1, x_2, x_3 припадају ове основне симетричне функције:

$$\sigma_1 = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$\sigma_3 = -x_1x_2x_3$$

За случај величина x_1 и x_2 основне симетричне функције су:

$$\sigma_1 = -x_1 - x_2 \qquad \sigma_2 = x_1x_2$$

Доказаћемо индуктивно да је $s_k = x_1^k + x_2^k$ за свако целобројно $k > 0$ могуће изразити помоћу σ_1и σ_2 служећи се првим трима рачунским операцијама.

Тврдња је тачна за $k = 1$, јер је $s_1 = x_1 + x_2 = -\sigma_1$. Докажимо да је тачна за $k = l + 1$ ако је тачна за $k = l$.

$$s_{l+1} = x_1^{l+1} + x_2^{l+1} = x_1^l x_1 + x_2^l x_2 = (x_1^l + x_2^l)(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^{l-1} + x_2^{l-1})$$

дакле,

$$(**)......s_{l+1} = s_l s_1 - \sigma_2 s_{l-1}$$

како је сваки члан у последњем биному полином с обзиром на σ_1, σ_2 то је и сам тај бином тј. s_{l+1} целобројни полином по σ_1, σ_2.

Пример 1:
Наћи збир кубова корена квадратне једначине $x^2 - 5x + 2 = 0$ ако су корени те једначине x_0 , x_1.

$$s_3(x_0, x_1) = x_0^3 + x_1^3$$

$$\sigma_1 = -x_0 - x_1 = -(x_0 + x_1) = -5$$

$$\sigma_2 = x_0 x_1 = 2$$

$$s_3 = s_2 s_1 - \sigma_2 s_1 = (s_1 s_1 - \sigma_2 s_0) s_1 - \sigma_2 s_1 =$$

$$= s_1^3 - \sigma_2 s_0 s_1 - \sigma_2 s_1 = -\sigma_1^3 - 2\sigma_2 s_1 - \sigma_2 s_1 =$$

$$= -\sigma_1^3 + 3\sigma_2 s_1 = (-5)^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-5) = -125 + 30 = -95$$

3 Вијетове формуле за полиноме са једном промењљивом произвољног степена

Ако обичан полином $f \in C[x]$ раставимо на линеарне факторе $f(x) = a(x - x_1)...(x - x_n)$, а затим ову алгебарску једнакост посматрамо као идентитет у коме су $x_1, ..., x_n$ промењљиве, а не константе, добијамо уопштену Вијетову теорему за полиноме n-тог степена у којој се јављају елементарне симетричне функције корена полинома.

Теорема 1 *Ако је* $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = a_n(x - x_1)...(x - x_n)$ *тада је* :

$$x_1 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + ... + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1 x_2 ... x_n = (-1)^{n-1} \frac{a_0}{a_n}$$

Доказ:
Упоређивањем добијамо:

$$a_n = a_n$$

$$a_n(x_1 + x_2 + ... + x_n) = a_{n-1} \cdot (-1)$$

$$a_n(x_1 x_2 + ... + x_{n-1} x_n) = a_{n-2}$$

$$a_n(x_1 x_2 x_3 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n) = a_{n-3} \cdot (-1)$$

$$\vdots$$

$$a_n x_1 x_2 ... x_n = (-1)^{n-1} a_0$$

одакле следи теорема.

4 Newton-ова теорема о симетричним полиномима

Newton-ве формуле говоре о вези функција s_i са функцијама σ_k. Пођимо на извор основних симетричних функција $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ и посматрајмо овај полином сређен по опадајућим степенима:

$$(1) \qquad f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_n x^{n-i}$$

Приметимо да је симболика таква да је експонент промењљиве x једнак разлици степена n и индекса одговарајућег коефицијента. Из (1) за извод:

$$(2) \qquad f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)\sigma_1 x^{n-2} + ... = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\sigma_k x^{n-k-1} \Longrightarrow$$

$$(3) \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_k}$$

Директном деобом или Хорнеровом методом види се да је:

$$(4) \qquad \frac{f(x)}{x - x_\nu} = x^{n-1} + (\sigma_1 + x_\nu)x^{n-2} + (\sigma_2 + \sigma_1 x_\nu + x_\nu{}^2)x^{n-3} + ...$$

$$... + (\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}x_\nu + ... + \sigma_1 x_\nu^{n-2} + x_\nu^{n-1})$$

Ту ν пролази свим редним бројевима од $1, ..., n$. Саберемо ли све једнакости (4) добијамо због (3):

$$(5) \qquad f'(x) = nx^{n-1} + (n\sigma_1 + s_1)x^{n-2} + (n\sigma_2 + \sigma_1 s_1 + s_2)x^{n-3} +$$

$$+(n\sigma_3 + \sigma_2 s_1 + \sigma_1 s_2 + s_3)x^{n-4} ... + (n\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}s_1 + \sigma_{n-3}s_2 + ... + s_{n-1})$$

Изједначавајући десне стране у (2) и (5), односно изједначавајући по реду коефицијенте од $x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^1, x^0$ у (2) и (5) добијамо систем:

$$(6) \qquad \begin{gathered} n\sigma_1 + s_1 = (n-1)\sigma_1 \\ n\sigma_2 + \sigma_1 s_1 + s_2 = (n-2)\sigma_2 \\ \vdots \\ n\sigma_\nu + \sigma_{\nu-1}s_1 + \sigma_{\nu-2}s_2 + ... + \sigma_1 s_{\nu-1} + s_\nu = (n-\nu)\sigma_\nu \\ (\nu = 1, ..., n-1) \end{gathered}$$

Из тог система непосредно следи оно што смо тражили.

Теорема 2 *Newton-ове формуле:*

$$
(7)\qquad
\begin{gathered}
s_1 = -\sigma_1 \\
\sigma_1 s_1 + s_2 = -2\sigma_2 \\
\sigma_2 s_1 + \sigma_1 s_2 + s_3 = -3\sigma_3 \\
\vdots \\
\sigma_{k-1} s_1 + \sigma_{k-2} s_2 + \ldots + \sigma_1 s_{k-1} + s_k = -k\sigma_k \\
(k = 1, \ldots, n-1)
\end{gathered}
$$

Обрасце (7) извели смо за $\nu \leq n$. Међутим, исти обрасци важе и за $\nu \geq n$, уз договор наравно, да је $\sigma_k = 0$ за $k > n$. Доказ је врло једноставан јер очигледно да неки полином (1) задовољава:

$$x_\nu^r f(x_\nu) = 0 \qquad \forall r \geq 0 \wedge \forall \nu = 1, \ldots, n$$

или експлицитно

$$\sum_{i=0}^{n} \sigma_i x_\nu^{n+r-i} = 0$$

Сумирајући тих n једначина за $\nu = 1, 2, \ldots, n$ добијамо жељене изразе (7), али овај пут и за вредност $k = n + r$ за свако $r = 0, 1, 2, \ldots$ тј.

$$(7') \qquad \sum_{i=0}^{n} \sigma_i s_{n+r-i} = 0, \qquad\qquad \sigma_0 = 1, s_0 = n, r = 0, 1, 2, \ldots$$

Из система (7), (7') закључујемо по реду да је:

$$
(8)\qquad
\begin{gathered}
s_1 = -\sigma_1 \\
s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
s_3 = -\sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \\
s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Међутим, у (8) се не види закон како се образују десне стране. Зато је од интереса да s-ове изразимо другачије помоћу σ-ми.

Нађимо s_k из свих k једначина система (7), које су с обзиром на $s_1, s_2, \ldots, s_k$ линеарне, а коефицијенти им образују детерминанту која је једнака 1, што се непосредно види по Крамеровом правилу.

За сваки природан број k важи:

$$s_k = -\begin{vmatrix} \sigma_0 & \dots & \dots & \dots & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \dots & \dots & 2\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1\sigma_0 & \dots & \dots & 3\sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \dots & \sigma_0 \end{vmatrix}$$

Ненаписани чланови детерминанте су сви једнаки нули, на пример:

$$s_2 = -\begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 2\sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Према Waringu такође важи:

$$s_k = \sum (-1)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})!}{\lambda_1!\dots\lambda_n!} \sigma_1^{\lambda_1} \dots \sigma_n^{\lambda_n}$$

сумација се протеже на све целе бројеве $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ који су ≥ 0 и за које је $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = k$.

Теорема 3 *Ако је $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ симетрични полином од n промењљивих, тада постоји јединствен полином $g \in K[x_1, \dots, x_n]$ такав да је:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

Доказ (Waring-ова метода):
Посматрајмо симетрични полином f, њега ћемо према Waringu средити лексикографски овако: Нека су

$$A = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad B = b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$$

било која два различита члана полинома f; при томе су експоненти цели и ≥ 0; како није $\alpha_i = \beta_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$ постоји одређен број $k \leq n$ за који је $\alpha_k \neq \beta_k$, док је $\alpha_i = \beta_i$ за свако $i < k$; ставићемо члан A испред члана B онда и само онда ако је $\alpha_k > \beta_k$.
Претпоставимо да је то баш посматрано $A = R_0 f$, тада је низ експонената $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$ силазан; у обрнутом случају, било би нпр. $\alpha_i < \alpha_{i+1}$; како је полином f симетричан, он би уз члан A садржао и члан A', који се из A добије пермутовањем промењљивих x_i, x_{i+1}.
Наравно, да би A' било испред A у горњем уређивању, противно је претпоставци да је A почетни члан. Тако нпр. кад би било $A = 3x_1^2x_2^3$ било би
$A' = 3x_2^2x_1^3 = 3x_1^3x_2^2$, дакле, A' испред A.

Ако је, дакле,

$$(9) \qquad A = R_0 f = a x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$$

почетни члан у симетричном полиному f тада цели бројеви $\alpha_i - \alpha_{i+1}$, $(i = 1, 2, ..., n-1)$ нису негативни.

Надаље се види да је израз:

$$(10) \qquad a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}\alpha_{n-1} - \alpha_n \sigma_n^{\alpha_n}$$

симетричан полином с обзиром на $x_1, x_2, ..., x_n$ и да му је почетни члан једнак A или -A. Уистину, лако се види да је почетни члан производа два полинома једнак производу почетних чланова тих полинома; али, почетни чланови у факторима полинома (10) јесу по реду :

$$(11) \qquad a, (-x_1)^{\alpha_1-\alpha_2}, (x_1x_2)^{\alpha_2-\alpha_3}, (-x_1x_2x_3)^{\alpha_3-\alpha_4}, ..., ((-1)x_1...x_n)^{\alpha_n}$$

производ израза (11) је $(-1)^\alpha A$ где је:

$$(12) \qquad \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + ... + n\alpha_n$$

тако на пример експонент од x_1 у том производу је $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + ... + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n = \alpha_1$. Другим речима, полином

$$(13) \qquad f - (-1)^\alpha \cdot (10)$$

који настаје као разлика двају симетричних полинома f и $(-1)^\alpha \cdot (10)$ и сам је симетричан, а његов почетни члан $R_0(13)$ је млађи од $R_0 f$.

Узимајући сада у разматрање почетни члан полинома (13) и спроводећи аналогно разматрање, долази се до новог симетричног полинома са још млађим чланом.

Процес ће се завршити након коначно много корака тиме да се дође до "најмлађег" члана - константе, а то заправо значи да је задати полином приказан помоћу основних функција $\sigma_1, ..., \sigma_n$.

Пример 2:

Полином $p(x, y) = x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2$ прикажи помоћу $\sigma_1 = -x - y$ и $\sigma_2 = xy$.

Ту је

$R_0 p = 3x^2y \qquad n = 2; \qquad x_1 = x; \qquad x_2 = y; \qquad \alpha = (2-1) + 2 = 3$

$(-1)^\alpha = (-1)^3 = -1$

Моном (10) гласи: $-3\sigma_1\sigma_2$

па (13) даје:

$$p(x, y) + 3\sigma_1\sigma_2 = x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 3\sigma_1\sigma_2 =$$

$$= x^2 + y^2 + 3xy(x+y) + 3\sigma_1\sigma_2 =$$

$$= x^2 + y^2 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_1\sigma_2 = x^2 + y^2 =$$

$$= (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Одговор на питање гласи:

$$x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2 = \sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2$$

Симетричне полиноме можемо применити и при решавању једначина, али и система једначина.

Пример 3:
Реши систем једначина:
$x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23$
$x^2 + y^2 + xy = 19$

Како је

$$x + y = \sigma_1$$

$$xy = \sigma_2$$

$$x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Систем у том случају добија облик:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_1 = 23$$
$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_2 = 19$$

тј.

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_1 = 23$$
$$\sigma_1^2 - \sigma_2 = 19$$

односно,

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_1 = 23$$
$$\sigma_2 = \sigma_1^2 - 19$$

замењујући вредност за σ_2 у прву једначину система и после краћег рачунања, добијамо

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_1 - 15 = 0$$

Решења ове квадратне једначине су: $(\sigma_1)_1 = 5$ и $(\sigma_1)_2 = -3$. Тиме добијамо и решења за $(\sigma_2)_1 = 6$ и $(\sigma_2)_2 = -10$. Уређени пар (x, y) који је решење полазног система добијамо решавајући системе:
$x + y = 5 \qquad x + y = -3$
$xy = 6 \qquad xy = -10$
Применом Vieté-ових формула и решавањем две квадратне једначине добијамо решења: $(3,2); (2,3); (-5,2); (2,-5)$.

5 Newton-ове неједнакости

Поменули смо да су елементарне симетричне функције дефинисане са:

$$\sigma_0(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$$

$$\sigma_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 x_2 ... x_n$$

Елементарне симетричне функције повезане су нелинеарним неједнакостима. Да би их утврдили, посматраћемо:

$$E_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\sigma_k(x_1, x_2, ..., x_n)}{\binom{n}{k}}$$

најчешће пишемо E_k уместо $E_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ како би избегли писање дугих формула.

Teorema 4 *Нека је F n-торка ненегативних бројева, тада важи:*

$$(14) \qquad E_k^2 > E_{k-1}(F) \cdot E_{k+1}(F), \qquad 1 \leq k \leq n-1$$

$$(15) \qquad E_1(F) > E_2^{1/2}(F) > \ldots > E_n^{1/n}(F)$$

Newton-ове неједнакости (14) важе за све n-торке реалних, не обавезно позитивних бројева. Неједнакости (15) добијају се из (14) јер је:

$$(E_0E_2)(E_1E_3)^2(E_2E_4)^3 \ldots (E_{k-1}E_{k+1})^k < E_1^2 E_2^4 E_3^6 \ldots E_k^{2k}$$

одакле следи $E_{k+1}^k < E_k^{k+1}$ или што је еквивалентно,

$$E_k^{1/k} > E_{k+1}^{1/(k+1)}$$

Осим ових неједнакости, такође су значајне и неједнакости које повезују аритметичку и геометријску средину:

$$(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n})^n \geq x_1 x_2 \ldots x_n$$

за свако $x_1, x_2, \dots x_n \geq 0$. Приметимо да су неједнакости које повезују аритметичку и геометријску средину биле познате и Еуклиду за случај $n = 2$. Newton-овим неједнакостима омогућено је решавање проблема израчунавања броја имагинарних корена алгебарских једначина. У свом делу *Arithmetica Universalis* Newton је без доказа дао следеће тврђење: *За дату једначину са реланим коефицијентима*:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

број њених имагинарних корена не може бити мањи од броја промена знака који се појављују у низу:

$$a_0^2, \left(\frac{a_1}{\binom{n}{1}}\right)^2 - \frac{a_2}{\binom{n}{2}} \cdot \frac{a_0}{\binom{n}{0}}, \ldots, \left(\frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}\right)^2 - \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \cdot \frac{a_{n-2}}{\binom{n}{n-2}}, a_n^2.$$

Према томе, ако су сви корени реални, тада су сви чланови низа ненегативни. Трудећи се да разуме Њутнонове аргументе, Маклорин је дао директан доказ неједнакости (14) и (15), али Њутнов проблем је остављен отворен до 1865. године када је Силвестер успео да га докаже у општем случају.

Теорема 5 *За сваки природан број* $n \geq 2$ *постоји скуп од највише* $n - 1$ *полинома са коефицијентима,*

$$(16) \qquad R_{n,1}(x_1, \ldots x_n), \ldots, R_{n,k(n)}(x_1, \ldots x_n)$$

таквих да реални полиноми степена n,

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

који имају само реалне корене су тачно они за које је:

$$R_{n,1}(a_1, \ldots a_n) \geq 0, \ldots R_{n,k(n)}(a_1, \ldots a_n) \geq 0$$

Горње тврђење је заправо генерализација добро познате чињенице да су корени квадратног полинома $x^2 + a_1 x + a_2$ реални ако и само ако је дискриминанта:

$$D_2(1, a_1, a_2) = a_1^2 - 4a_2$$

ненегативна. Фамилију $(R_{n,k})_k^{k(n)}$ зваћемо фамилијом дискриминанти степена n.

Sylvester-ов алгоритам одређивања фамилије дискриминанти

Скуп свих тачака $(a_1, \ldots, a_n)$ из $\mathbb{R}^n$ где полином

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

има тачно n реалних корена можемо описати као скуп решења одговарајућег скупа полиномијалних неједначина са коефицијентима:

$$R_{n,1}(a_1, \ldots a_n) \geq 0, \ldots R_{n,k(n)}(a_1, \ldots a_n) \geq 0.$$

Ово је последица Силвестерове теорије субрезултанти коју можемо исказати на следећи начин:
Силвестрова матрица која је у вези са P и P' је матрица M_0 димензије $(2n-1) \times (2n-1)$, дефинисана са:

$$M_0 = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & 1 \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & \ldots & (n-1)a_1 & n & 0 & & \\ 0 & a_{n-1} & 2a_{n-2} & \ldots & (n-2)a_2 & (n-1)a_1 & n & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & 2a_{n-2} & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Њену детерминанту,

$$r_0 = det M_0$$

називамо резултантом од P и P'. Зато што је водећи коефицијент од P јединица, такође имамо

$$r_0 = D_n(1, a_1, \ldots a_n).$$

За свако $j \in 1, \ldots, n-1$ посматрамо матрицу M_j димензија $(2n-1-2j) \times (2n-1-2j)$, добијену из M_0 избацивањем

- последњих j колона
- врста са ознакама од $(n-1) - j + 1$ до $n-1$
- последњих j врста

Тада је субрезултанта реда j детерминанта r_j субматрице M_j добијене из M_j укључујући све њене врсте, последњих $2n-1-2j-1$ колона и колона са индексом $j+1$. Јасно је да су све субрезултанте полиноми са коефицијентима $a_1, \ldots, a_n$. На овај начин, они граде фамилију дискриминанти реда n.

Пример 4: Нека је $P(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.тада је:

$$r_0 = det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & 2a_1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 2a_1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 2a_1 & 3 \end{pmatrix}$$

$r_0 = 27a_3^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_3a_1^3 + 4a_2^3 - a_2^2a_1^2$

$$r_1 = det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ 2a_1 & 3 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & 3 \end{pmatrix} = 6a_2 - 2a_1^2$$

$r_2 = det(3) = 3$
Број реалних корена полинома $P(x)$ дат је низом:
$x^3, \qquad 3x^2, \qquad -(6a_2 - 2a_1^2)x, \qquad -(27a_3^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_3a_1^3 + 4a_2^3 - a_2^2a_1^2)$

Према томе, да би се уверили да $P(x)$ има три реална корена, морамо ставити да је: $V(-\infty) - V(\infty) = 3$ где $V(-\infty)$ и $V(\infty)$ означавају број промене знака у $-\infty$ и ∞.
Одатле следи да је

$$a_1^2 - 3a_2 \geq 0$$

и

$$18a_1a_2a_3 + a_2^2a_1^2 - 27a_3^2 - 4a_2^3 - 4a_3a_1^3 \geq 0.$$

Силвестровим приступом, $R_{n,1}(a_1, \ldots, a_n)$ једнака је дискриминанти D_n полинома $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, на пример

$$D_n = D_n(1, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

где су $x_1, \ldots, x_n$ корени полинома $P(x)$.

Нажалост, до сада није откривена упоштена формула за D_n, наиме, број ненула коефицијента у изразу дискриминанте рапидно расте са порастом степена, тако на пример D_9 има 26095 чланова. За $n \in \{2, 3\}$ закључујемо да се фамилија дискриминанти састоји само од једног полинома који одговара дискриминанти. Истраживања аргумената које је дао Л. Ојлер решавајући радикалима једначину четвртог степена, даје нам могућност да напишемо фамилију дискриминанти за $n = 4$.
На основу чувеног резултата немогућности решавања радикалима алгебарских једначина степена ≥ 5, неможемо се бавити идејом коришћења резолвенти у општем случају.

Ако имамо фамилију дискриминанти за $n = N$, можемо лако добити такву фамилију за свако $k \in \{1, \dots, N\}$. Поента је да се полином $P(x)$ степена k замени са $x^{N-k}P(x)$ који је степена мањег од N.

Такође, ако имамо фамилију дискриминанти $(R_{n,k})_{k=1}{}^{k(n)}$ за неко $n \geq 2$, можемо одредити који од полинома $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ има само ненегативне корене. То су тачно они полиноми за које је:

$$-a_1 \geq 0, \dots, (-1)^n a_n \geq 0$$

и

$$R_{n,1}(a_1, \dots a_n) \geq 0, \dots R_{n,k(n)}(a_1, \dots a_n) \geq 0.$$

Newton-ове неједнакости (14) доказане су уз помоћ следеће леме која је последица Ролове теореме, а дао ју је J. Sylvester.

Лема 6 *Ако је*

$$F(x, y) = c_0x^m + c_1x^{m-1}y + \ldots + c_my^m$$

хомогена функција n-тог степена по x и y чији су сви корени x/y реални, тада исто важи и за све неидентички једнаке нули једначине $\frac{\partial^{i+j}F}{\partial x^i \partial y^j} = 0$, *које се добијају из дате једначине парцијалним диференцијацијама по x и y. Даље, ако је E једна од тих једначина, и ако она има вишеструки корен α, тада је α такође вишеструки корен (за степен виши) једначине из које смо добили E диференцијацијом.*

Сваки полином n-тог степена, са реалним коренима може бити представљен као

$$E_0x^n - \binom{n}{1}E_1x^{n-1} + \binom{n}{2}E_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n E_n$$

и можемо применити Лему 6 на хомогени полином

$$F(x, y) = E_0x^n - \binom{n}{1}E_1x^{n-1}y + \binom{n}{2}E_2x^{n-2}y^2 - \ldots + (-1)^n E_ny^n$$

Посматрајући случај диференцијала $\frac{\partial^{n-2}F}{\partial x^k \partial y^{n-2-k}} = 0$ за $k = 0, \dots, n-2$ долазимо до закључка да сви квадратни полиноми

$$E_{k-1}x^2 - 2E_kxy + E_{k+1}y^2$$

за $k = 0, \dots, n-2$ такође имају реалне корене. Према томе, Newton-ове неједнакости прецизно приказују ову чињеницу на језику дискриминанти.

Из тог разлога неједнакости (14) називамо ***квадратним Newton-овим неједнакостима.*** Ако кренемо корак напред, добићемо неједнакости које је S. Rosset назвао ***кубним Newton-овим неједнакостима:***

$$(17) \qquad 6E_kE_{k+1}E_{k+2}E_{k+3} + 3E_{k+1}^2E_{k+2}^2 \geq 4E_kE_{k+2}^3 + E_k^2E_{k+3}^2 + 4E_{k+1}^3E_{k+3}$$

за $k = 0, \ldots, n-3$. До закључка се може доћи уз помоћ добро познате чињенице да кубни полином са реалним коефицијентима

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

има све корене реалне ако и само ако је његова дискриминанта

$$D_3 = D_3(1, a_1, a_2, a_3) = 18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 27a_3^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3$$

ненегативна.
Отуда једначина

$$E_kx^3 - 3E_{k+1}x^2y + 3E_{k+2}xy^2 - E_{k+3}y^3 = 0$$

има све корене x/y реалне ако и само ако важи (17).
Неједнакости (17) можемо написати и као

$$4(E_{k+1}E_{k+3} - E_{k+2}^2)(E_kE_{k+2} - E_{k+1}^2) \geq (E_{k+1}E_{k+2} - E_kE_{k+3})^2$$

одакле се добија (14). Да из (14) не мора да следи (17) видимо из следећег примера кубне једначине:

$$x^3 - 8,9x^2 + 26x - 24 = 0$$

чији су корени

$$x_1 = 1,8587, \qquad x_2 = 3,5207 - 0,71933i, \qquad x_3 = 3,5207 + 0,71933i$$

Што се тиче Newton-ових неједнакости (N_n) степена $n \geq 2$ оне се састоје од највише $n-1$ скупа релација међу којима је прва

$$D_n\left(1, (-1)^1\binom{n}{1}\frac{E_{k+1}}{E_k}, (-1)^2\binom{n}{2}\frac{E_{k+2}}{E_k}, \ldots, (-1)^n\binom{n}{n}\frac{E_{k+n}}{E_k}\right) \geq 0$$

за $k \in \{0, \ldots, m-n\}$.

6 Индуктивни приступ квадратним Newton-овим неједнакостима

Теорема 7 *Претпоставимо да су* $\alpha, \beta \in R^+$ *и* $j, k \in N$ такви да је

$$\alpha + \beta = 1 \qquad j\alpha + k\beta \in \{0, ..., n\}$$

Тада је

$$E_{j\alpha+k\beta}(F) \geq E_j^\alpha(F) \cdot E_k^\beta(F)$$

за сваку n*-торку F ненегативних реалних бројева.*

Према Rolle-овој теореми, ако су сви корени полинома $P \in R[X]$ реални, тада исто важи и за његов извод P'. За дату n-торку $F = (x_1, ..., x_n)$ имамо полином:

$$P_F(x) = (x - x_1)...(x - x_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E_k(x_1, ..., x_n) x^{n-k}$$

(n-1)-торку $F' = \{y_1, ..., y_{n-1}\}$ која се састоји од свих корена извода од $P_F(x)$ називамо изводом од F. То је због тога што је:

$$(x - y_1)...(x - y_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} E_k(y_1, ..., y_{n-1}) x^{n-k}$$

и

$$\begin{aligned}(x - y_1)...(x - y_{n-1}) &= \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{dP_F}{dx}(x) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n-k}{n} \binom{n}{k} E_k(x_1, ..., x_n) x^{n-k-1} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} E_k(x_1, ..., x_n) x^{n-1-k}.\end{aligned}$$

Дошли смо до резултата, који нам дозвољава да редукујемо број промењљивих када радимо са симетричним функцијама.

Лема 8 $E_j(F) = E_j(F')$ *за свако* $j \in \{0, ..., |F| - 1\}$.

Лема 9 *Претпоставимо да је F n-торка реалних бројева таквих да 0 не припада F, ставимо* $F' = \{1/a | a \in F\}$*. Тада је*

$$E_j(F^{-1}) = E_{n-j}(F)/E_n(F)$$

за свако $j \in \{0, ..., n\}$.

Доказ Теореме 7:
За $|F| = 2$ доказујемо само једну неједнакост, наиме

$$x_1x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

која очито важи за свако $x_1, x_2 \in R$. Једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2$. Претпоставимо сада да тврђење теореме важи за све k-торке при чему је $k \leq n-1$. Нека је F n-торка ненегативних бројева $(n \geq 3)$ и нека су $j, k \in N, \alpha, \beta \in R_+ \backslash \{0\}$ бројеви такви да је

$$\alpha + \beta = 1 \qquad j\alpha + k\beta \in \{0, ..., n\}$$

Према Леми 8. (и према нашој индуктивној хипотези), имамо

$$E_{j\alpha+k\beta}(F) \geq E_j^\alpha(F) \cdot E_k^\beta(F),$$

осим у случају када је $j < k = n$ или $k < j = n$. Претпоставимо, на пример, да је $j < k = n$; тада је $j\alpha + n\beta < n$. Сада остаје да докажемо да је

$$E_{j\alpha+n\beta}(F) \geq E_j^\alpha(F) \cdot E_n^\beta(F).$$

Ако је $0 \in F$, тада је $E_n(F) = 0$, и неједнакост очито важи. Једнакост важи ако и само ако је $E_{j\alpha+n\beta}(F') = E_{j\alpha+n\beta}(F) = 0$.
Ако 0 не припада F, тада по Леми 9 требамо доказати да је

$$E_{n-j\alpha-n\beta}(F^{-1}) \geq E_{n-j}^\alpha(F^{-1})$$

или што је еквивалентно по Леми 8

$$E_{n-j\alpha-n\beta}((F^{-1})') \geq E_{n-j}^\alpha((F^{-1})')$$

Ово последње је тачно по индуктивној хипотези.

7 Newton-ове неједнакости четвртог степена

Док се кубне Newton-ове неједнакости могу добити директно из Кардановиx формула, случај неједнакости четвртог степена је мало компликованији, али и даље у оквирима метода решавања алгебарских једначина.

Лема 10 *Корени полинома*

$$y^4 + py^2 + qy + r$$

су реални ако и само ако су корени полинома трећег степена

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64}$$

ненегативни.

Доказ:

Ако ставимо $y = u + v + t$ закључујемо да је

$$u^2 + v^2 + t^2 = -p/2$$

$$u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2 = (p^2 - 4r)/16$$

$$u^2v^2t^2 = q^2/64$$

тј. u^2, v^2, t^2 су корени полинома трећег степена $z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2-4r}{16}z - \frac{q^2}{64}$. На овај начин закључујемо да је наше тврђење сада очигледно.

Лема 11 *Корени полинома трећег степена*

$$Q(z) = z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64}$$

су ненегативни ако и само ако је

$$p \leq 0, \qquad p^2 - 4r \geq 0 \qquad\qquad D_3(1, p/2, (p^2 - 4r)/16, -q^2/64) \geq 0$$

Доказ:

Већ смо приметили да су корени полинома $Q(z)$ реални ако и само ако је његова дискриминанта ненегативна. Тада је потребан услов $p \leq 0$ и $p^2 - 4r \geq 0$ заправо последица Вијетових формула. Довољност услова је једноставно запажање да је $P(z) < 0$ за $z < 0$.

Да би написали фамилију дискриминанти степена $n = 4$ приметимо да супституција

$$x = y - a_1/4$$

мења општу једначину четвртог степена

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

у

$$y^4 + \left(a_2 - \frac{3a_1^3}{8}\right)y^2 + \left(\frac{a_1^3}{8} - \frac{a_1a_2}{2} + a_3\right)y - \frac{3a_1^4}{256} + \frac{a_1^2a_2}{16} - \frac{a_1a_3}{4} + a_4 = 0.$$

Према Леми 10 и Леми 11 фамилија дискриминанти полинома четвртог степена дата је са:

$R_{4,1}(a_1, a_2, a_3, a_4) =$

$= D_3\left(1, \left(a_2 - \frac{3a_1^2}{8}\right)/2, \left(\frac{3a_1^4}{16} - a_1^2a_2 + a_1a_3 + a_2^2 - 4a_4\right)/16, -\left(\frac{a_1^3}{8} - \frac{a_1a_2}{2} + a_3\right)^2/64\right) =$

$= -\frac{27}{4096}a_1^4a_4^2 - \frac{1}{1024}a_1^3a_3^3 + \frac{9}{2048}a_1^3a_2a_4a_3 - \frac{1}{1024}a_1^4a_2^3a_4 +$

$+\frac{9}{256}a_1^2a - 2a_4^2 - \frac{3}{2048}a_1^2a_3^2a_4 + \frac{1}{4096}a_1^2a_2^2a_3^2 + \frac{9}{2048}a_1a_2a_3^3 -$

$-\frac{5}{256}a_1a_2^2a_4a_3 - \frac{3}{64}a_1a - 3a_4^2 - \frac{1}{1024}a_2^3a_3^2 - \frac{1}{32}a - 2^2a_4^2 +$

$+\frac{9}{256}a_2a_3^2a_4 - \frac{27}{4096}a_3^4 + \frac{1}{256}a_2^2a_4 + \frac{1}{16}a_4^3 =$

$= D_4(1, a_1, a_2, a_3, a_4)/4096$

$$R_{4,2}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{3a_1^4}{16} - a_1^2a_2 + a_1a_3 + a_2^2 - 4a - 4$$

$$R_{4,3}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{3a_1^2}{8} - a - 2.$$

Горње три релације су написане у овом поретку да би их искористили у прављењу опште шеме фамилија дискриминанти у функцији субрезолвенти.
Newton-ове неједначине четвртог степена представљају потребан и довољан услов под којим сви полиноми

$$E_kx^4 - 4E_{k+1}x^3 + 6E_{k+2}x^2 - 4E_{k+3}x + E_{k+4} \qquad (k \in \{0, ..., n-4\})$$

имају само реалне корене.

То су:

$$R_{4,1}\left(\frac{-4E_{k+1}}{E_k}, \frac{6E_{k+2}}{E_k}, \frac{-4E_{k+3}}{E_k}, \frac{E_{k+4}}{E_k}\right) \geq 0.$$

$$R_{4,2}\left(\frac{-4E_{k+1}}{E_k}, \frac{6E_{k+2}}{E_k}, \frac{-4E_{k+3}}{E_k}, \frac{E_{k+4}}{E_k}\right) \geq 0.$$

$$R_{4,3}\left(\frac{-4E_{k+1}}{E_k}, \frac{6E_{k+2}}{E_k}, \frac{-4E_{k+3}}{E_k}, \frac{E_{k+4}}{E_k}\right) \geq 0$$

или ако их развијемо и елиминишемо имениоце,

$$-27E_k^2E_{k+3}^4 + E_k^3E_{k+4}^3 - 54E_kE_{k+2}^3E_{k+3}^2 - 64E_{k+1}^3E_{k+3}^3 - 18E_k^2E_{k+2}^2E_{k+4}^2 +$$

$$+81E_kE_{k+2}^4E_{k+4} - 27E_{k+1}^4E_{k+4}^2 + 36E_{k+1}^2E_{k+2}^2E_{k+3}^2 +$$

$$+108E_kE_{k+1}E_{k+2}E_{k+3}^3 + 108E_{k+1}^3E_{k+2}E_{k+4}E_{k+3} - 54E_{k+1}^2E_{k+2}^3R_{k+4} -$$

$$-180E_kE_{k+1}E_{k+2}^2E_{k+3}E_{k+4} + 54E_k^2E_{k+2}E_{k+3}^2E_{k+4} - 6E_kE_{k+1}^2E_{k+3}^2E_{k+4} +$$

$$+54E_kE_{k+1}^2E_{k+2}E_{k+4}^2 - 12E_k^2E_{k+1}E_{k+3}E_{k+4}^2 \geq 0$$

$$9E_k^2E_{k+2}^2 + 4E_k^2E_{k+1}E_{k+3} - 24E_kE_{k+1}^2E_{k+2} + 12E_{k+1}^4 - E_k^3E_{k+4} \geq 0$$

$$E_{k+1}^2 - E_kE_{k+2} \geq 0.$$

8 Blundon-ове неједнакости- примена на троугао

Обично се Newton-ове неједнакости користе за извођење нових неједнакости или за утврђивање да ли одређени полиноми имају комплексне корене. Следећа анализа једначине трећег степена довешће нас до једног геометријског резултата.

Лема 12 *Посматрајмо једначину трећег степена са реалним коефицијентима*

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Њени корени x_1, x_2, x_3 *су дужине страница троугла ако и само ако су задовољени следећи услови:*

1. $18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 27a_3^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 > 0.$
2. $-a_1 > 0, a_2 > 0, -a_3 > 0,$
3. $a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 > 0.$

Доказ:
Према напомени датој пре Леме 6 коњукција 1. и 2. је еквивалентна до позитивности корена дате једначине. Тада су x_1, x_2, x_3 дужине страница троугла ако и само ако је

$$x_1 + x_2 - x_3 > 0, \qquad x_2 + x_3 - x_1 > 0, \qquad x_3 + x_1 - x_2 > 0$$

то јест ако и само ако је

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) > 0$$

Или, једноставим рачуном долазимо до тога да је горњи производ једнак $a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3$.

Последица 13 *(W.J.Blundon)*
Три позитивна броја p, R и r су респективно полуобим, полупречник описане кружнице и полупречник уписане кружнице троугла ако и само ако важе следеће неједнакости:

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r} \leq p^2 \leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r}.$$

Доказ:
Услов је потребан.
Као што је познато, дужине страна су корени кубне једначине

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0$$

У овом случају услов 1. и Лема 12 доводе нас до

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + 64rR^3 + 48r^2R^2 + 12r^3R + r^4 \leq 0$$

то јест,

$$(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 \leq 4R(R - 2r)^3$$

што имплицира обе Ојлерове неједнакости $R \geq 2r$ и Blundon-ове неједнакости.
Услов је довољан.
Требамо доказати да једначина $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0$ испуњава претпоставку Леме12. Услови 1. и 2. су јасни, што се тиче услова 3. имамо:

$$a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 = -8p^3 + 8p(p^2 + r^2 + 4Rr) - 32pRr = 8pr^2 > 0$$

Проблем једнакости у Blundon-овим неједнакостима утврдио је A. Lupaş: једнакост се појављује на левој страни неједнакости ако и само ако је троугао или једнакостраничан или једнакокраки коме је основа дужа од крака. На десној страни неједнакости једнакост се појављује ако и само ако је троугао једнакостраничан или једнакокраки са основом краћом од крака.

9 Нове неједнакости

У циљу комплетирања посматрања симетричних полинома и неједнакости које су у вези са њима претпоставимо да су сви x_j при чему је $j = 1, ..., n$ позитивни. Позната је следећа теорема :

Теорема 14 *За све позитивне бројеве* $x_1, ..., x_n$ *и позитивне* $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ *неједнакост*

$$E_1^{\alpha_1} \cdots E_n^{\alpha_n} \le E_1^{\beta_1} \cdots E_n^{\beta_n}$$

важи ако и само ако је

$$\alpha_m + 2\alpha_{m+1} + \cdots + (n-m+1)\alpha_n \ge \beta_m + 2\beta_{m+1} + \cdots + (n-m+1)\beta_n$$

за свако $1 \le m \le n$.

Следећа лема је последица горње теореме. Претпоставимо да су $x_1, ..., x_n$ ненегативни.

Лема 15 *Нека су* $x_1, ..., x_n$ *ненегативни реални бројеви,* $n \ge 2$. Тада за $1 \le p \le n-1$ *имамо*

$$(18) \qquad \sigma_1 \sigma_p \ge \frac{n(p+1)}{n-p} \sigma_{p+1}$$

Доказ:
Означимо са $\sigma_{l,n} = \Sigma_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l}$, где је $1 \le l \le n$. Приметимо да је (18) еквивалентно са

$$(19) \qquad \sigma_{1,n} \sigma_{p,n} \ge \frac{n(p+1)}{n-p} \sigma_{p+1,n}.$$

Прво ћемо доказати (19) за $p = 1$ и за $p = n-1$.

(i) За $p = 1$ неједнакост (19) постаје

$$(\Sigma_{i=1}^n x_i)^2 \ge \frac{2n}{n-1} \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j,$$

што је еквивалентно са

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \ge \frac{2n}{n-1} \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j,$$

дакле, $\sum_{1 \le i < j} (x_i - x_j)^2 \ge 0$.

(ii) За $p = n-1$ неједнакост (19) је еквивалентна са $\sigma_{1,n} \sigma_{n-1,n} \ge n^2 \sigma_{n,n}$. Ако је $\sigma_{n,n} = 0$ тада је неједнакост (19) очигледна.

Нека је $\sigma_{n,n} \neq 0$.тада је (19) еквивалентна са $n^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i})$. што следи из неједанкости између аритметичке и геометријске средине.
Доказаћемо неједнакост (19) рекурентно за $n \geq 2$.

(iii) Већ смо доказали да је (19) тачно за $n = 2$.

(iv) Нека је (19) тачно за $n \geq 2$ и свако p, $1 \leq p \leq n-1$. Фиксирајмо p, тако да је $2 \leq p \leq n-1$. Доказаћемо да је

$$(20) \qquad \sigma_{1,n+1}\sigma_{p}, n+1 \geq \frac{(n+1)(p+1)}{n+1-p}\sigma_{p+1,n+1}$$

Како је (20) хомогена, осим у случају $x_1 = \ldots = x_n = x_{n+1} = 0$, можемо сматрати да је $\sigma_{1,n+1} = 1$.
Нека је $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1}$. Могући су следећи случајеви:

1.Нека је $x_{n+1} = 1$, тада ако је $x_1 = \cdots = x_n = 0$, (20) постаје једнакост.

2. Нека је $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, тада ако је $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1}$ добијамо

$$\sigma_{p,n-1} - \frac{(n+1)(p+1)}{n+1-p}\sigma_{p+1,n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{p}\frac{1}{(n+1)^p} - \frac{p+1}{n+1-p}\binom{n+1}{p+1}\frac{1}{(n+1)^p} = 0$$

дакле (20) поново постаје једнакост.

3.Нека је $x_{n+1} \in (\frac{1}{n+1}, 1)$.
Ако уврстимо $x_1 + \ldots + x_n = 1 - x_{n+1} = \sigma_{1,n} = s \in (0, \frac{n}{n+1})$. тада је $\sigma_{p,n+1} = \sigma_{p,n} + (1-s)\sigma_{p-1,n}$и $\sigma_{p+1,n+1} = \sigma_{p+1,n} + (1-s)\sigma_{p,n}$. Дакле, (20) је еквивалентно са

$$\sigma_{p,n} + (1-s)\sigma_{p-1,n} \geq \frac{(n+1)(p+1)}{n+1-p}[\sigma_{p+1,n} + (1-s)\sigma_{p,n}]$$

а што је даље еквивалентно са

$$(21) \qquad \left[\frac{n+1-p}{(n+1)(p+1)} - (1-s)\right]\sigma_{p,n} + \frac{(1-s)(n+1-p)}{(n+1)(p+1)}\sigma_{p-1,n} \geq \sigma_{p+1,n}.$$

Из (iv) добијамо $\sigma_{p+1,n} \leq \frac{n-p}{n(p+1)}s\sigma_{p,n}$. Тада (21) следи из наредне неједнакости (ако важ

$$(22)\qquad \frac{n-p}{n(p+1)}s\sigma_{p,n} \le \left[\frac{n+1-p}{(n+1)(p+1)} - (1-s)\right]\sigma_{p,n} + \frac{(1-s)(n+1-p)}{(n+1)(p+1)}\sigma_{p-1,n}$$

што је еквивалентно са

$$(23)\qquad \sigma_{p-1,n} \ge \frac{p[n(n+2)-(n+1)^2 s]}{n(n+1-p)(1-s)}\sigma_{p,n}$$

То из (iv) следи да је $\sigma_{p-1,n} \ge \frac{np}{(n+1-p)s}\sigma_{p,n}$.

Дакле, (23), а тиме и (22) и (21) следе из

$$\frac{np}{(n+1-p)s}\sigma_{p,n} - \frac{p[n(n+2)-(n+1)^2 s]}{n(n+1-p)(1-s)}\sigma_{p,n} = \frac{p[(n+1)s-n]^2}{ns(n+1-p)(1-s)}\sigma_{p,n} \ge 0.$$

Одавде следи да је (19) тачно за $p=1$ и $p=n$ према (i) и (ii), и тада (19) важи за свако n, $n \ge 2$.Тиме је лема доказана.

Напомена 1:

Из доказа следи да се једнакост достиже у следећа два случаја:

1) $x_1 = x_2 = ... = x_n = a \ge 0$.

2) $n-p+1$ за $x_1, ..., x_n$ једнаке нули, док су остали ненегативни реални бројеви.

Напомена 2:

Неједнакост (18) може се доказати следећом лемом, али се на тај начин тешко доказује када (18) прелази у једнакост.

Нека је n фиксирани позитиван број, сматраћемо да је бар један од $x_1, ..., x_n$ различит од 0.

Лема 16 *Претпоставимо да су $x_1, ..., x_n$ ненегативни реални бројеви $(n \ge 2)$ и $x_1 + ... + x + n = \sigma_1 = 1$.Тада функција $f(x_1, .., x_n) = a_1 + a_2\sigma_2 + ... + a_n\sigma_n$ (при чему су $a_1, ..., a_n$ реални бројеви), достиже максимум и минимум у најмање једној од тачака $P_{k,n}\left(\frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k}, 0, ..., 0\right)$,$1 \le k \le n$ (првих k координата једнако је $\frac{1}{k}$, а остале су једнаке нули).*

Доказ:

Скуп $A_n = \{(x_1, ..., x_n)/x_i \ge 0, x_1 + ... + x_n = 1\}$ је компактан и f је непрекидна на њему, дакле, f достиже своје максималне и минималне вредности. Написаћемо f на следећи начин:

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1x_2g(x_3, ..., x_n) + x_1h_1(x_3, ..., x_n) + x_2h_2(x_3, ..., x_n) + t(x_3, ..., x_n) + a_1.$$

Како је f симетрична, тада је $h_1 \equiv h_2$ и добијамо:

(24) $\qquad f(x_1,...,x_n) = x_1x_2g(x_3,...,x_n) + (x_1+x_2)h_1(x_3,...,x_n) + t(x_3,...,x_n) + a_1.$

Нека је $P(x_1^0,...,x_n^0)$ тачка у којој f достиже минималну вредност. Посматраћемо функцију $F(x) = f(x, s-x, x_3^0, ..., x_n^0), s = x_1^0 + x_2^0$, за $x \in [0, s]$ при чему претпостављамо да је $s > 0$. Очигледно је да су минималне вредности од F и f једнаке и да F достиже минималну вредност за $x = x_1^0$. Из (24) добијамо да је $F(x) = \alpha x(s-x) + s\beta + \gamma = \alpha x(s-x) + \delta$, где α и δ зависе од $x_1^0, x-2^0, x_3^0, ..., x_n^0, a_1, ..., a_n$.

Могућа су следећа три случаја:

(i)$\alpha = 0$. Тада је $F(x) = const.$ и можемо сматрати да је $minF = F(0)$ или $minF = F\left(\frac{s}{2}\right)$.

(ii) $\alpha > 0$. Тада је $minF = F(0)$.

(iii) $\alpha < 0$. Тада је $minF = F\left(\frac{s}{2}\right)$.

Дакле, како су x_1^0 и x_2^0 произвољно изабрани, тада за $\forall i \neq j$ можемо сматрати да је $x_i^0 = x_j^0$ или да је бар један од њих једнак нули.

Изаберимо тачку $P(x_1^0,...,x_n^0)$, за коју је број координата p које су једнаке нули највећи могући и $x_1^0 \geq x_2^0 \geq ... \geq x_n^0$. Ако је $p = n-1$ тада је лема доказана.

Нека је $0 \leq p \leq n-2$, нпр. $P(x_1^0, ..., x_{n-p}^0, 0, ..., .), x_1^0...x_{n-p}^0 \neq 0$. Тада за парове $(x_i^0, x_j^0), 1 \leq i < j \leq n-p$ важи једино случај (iii) из кога следи лема. Лема такође важи и за максималну вредност f, јер је $maxf = min(-f)$.

Теорема 17 *Нека су n,k цели бројеви*$1 \leq k \leq n-1$. *Тада за произвољне ненегативне бројеве* $x_1, ..., x_n$ *важи следећа неједнакост:*

$$\sigma_1^k \sigma_{n-k} \geq \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{n-k-1+i}{i} (n-k+i)^2 (n-k)^{i-2} \sigma_1^{k-i} \sigma_{n-k+i}. \tag{25}$$

Доказ:

Како је (25) хомогена можемо претпоставити да је $x_1 + ... + x_n = \sigma_1 = 1$. Тада, по Леми 16 довољно је да докажемо да је $f(P_{m,n}) \geq 0$ за $1 \leq m \leq n$ где је

$$f(x_1,...,x_n) = \sigma_{n-k} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n-k-1+i}{i} (n-k+i)^2 (k-n)^{i-2} \sigma_{n-k+i}.$$

У тачки $P_{m,n}$ имамо да је $\sigma_{n-k+1} = \binom{m}{n-k+1} \frac{1}{m^{n-k+i}}$, дакле

$$\sigma_{n-k+i} \neq 0 \Leftrightarrow i \leq m-n+k. \tag{26}$$

Посматраћемо следећа три случаја за m:

(i) $m \leq n-k-1, k \leq n-2$.Тада је очигледно $\sigma_{n-k} = \sigma_{n-k+1} = ... = \sigma_n = 0$, дакле $f(P_{m,n}) = 0$.

(ii) $m = n - k, k \leq n - 1$. Из (26) добијамо $\sigma_{n-k} = \frac{1}{(n-k)^{n-k}}$ и $\sigma_{n-k+1} = ... = \sigma_n = 0$, дакле, $f(P_{m,n}) = \frac{1}{(n-k)^{n-k}} > 0$.
(iii) $m = n - k + p, 1 \leq p \leq k, k \leq n - 1$. Из (26) и $m = n - k + p$ добијамо:

$$f(P_{m,n}) = \binom{n-k+p}{n-k} \frac{1}{(n-k+p)^{n-k}} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n-k-1+i}{i} \cdot$$

$$\cdot (n-k+i)^2 (k-n)^{i-2} \binom{n-k+p}{n-k+i} \frac{1}{(n-k+p)^{n-k+i}} =$$

$$= \binom{m}{p} \frac{1}{m^{m-p}} + \sum_{i=1}^{p} \binom{m-p-1+i}{i} (m-p+i)^2 (p-m)^{i-2} \binom{m}{m-p+i} \frac{1}{m^{m-p+i}}$$

Сада из једнакости

$$\binom{m-p-1+i}{i} \binom{m}{m-p+i} (m-p+i) = \binom{m-1}{p} \binom{p}{i} m$$

добијамо

$$f(P_{m,n}) = \binom{m}{p} \frac{1}{m^{m-p}} + \sum_{i=1}^{p} \binom{m-1}{p} \binom{p}{i} (m-p+i)^2 (p-m)^{i-2} \frac{1}{m^{m-p-1+i}}$$

Што имплицира

$$\frac{m^{m-p+1}}{\binom{m-1}{p}} f(P_{m,n}) = \frac{m^2}{m-p} + p(m-p+1)\frac{m}{p-m} + \sum_{i=2}^{p} \binom{p}{i} (m-p+i) \left(\frac{p-m}{m}\right)^{i+2} =$$

$$= m(1-p) + \sum_{i=2}^{p} \binom{p}{i} (m-p) \left(\frac{p-m}{m}\right)^{i-2} + \sum_{i=2}^{p} \binom{p}{i} i \left(\frac{p-m}{m}\right)^{i-2} =$$

$$= m(1-p) + \frac{m^2}{m-p} \left[\left(1 + \frac{p-m}{m}\right)^p - \frac{p(p-m)}{m} - 1 \right] + \frac{mp}{p-m} \sum_{i=2}^{p} \binom{p-1}{i-1} \left(\frac{p-m}{m}\right)^{i-1}.$$

Замењујући $i = j + 1$ добијамо:

$$\frac{m^{m-p+1}}{\binom{m-1}{p}} f(P_{m,n}) = m(1-p) + \frac{m^2}{m-p} \left[\left(\frac{p}{m}\right)^p + \frac{p(m-p)}{m} - 1 \right] + \frac{mp}{p-m} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p-1}{j} \left(\frac{p-m}{m}\right)^j =$$

$$= m(1-p) + \frac{m^2}{m-p} \left(\frac{p}{m}\right)^p + mp - \frac{m^2}{m-p} + \frac{mp}{p-m} \left[\left(1 + \frac{p-m}{m}\right)^{p-1} - 1 \right] =$$

$$= m + \frac{m^2}{m-p} \left(\frac{p}{m}\right)^p - \frac{m^2}{m-p} + \frac{mp}{p-m} \left(\frac{p}{m}\right)^{p-1} - \frac{mp}{p-m} = 0.$$

Из (i)-(iii) следи да је Теорема 17 тачна.

Напомена:
Лако се доказује да је (25) еквивалентно са

$$E_1^k E_{n-k} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (n-k+i) \left(\frac{k-n}{n}\right)^{i-1} E_1^{k-i} E_{n-k+i}.$$

Дефинишимо низ реалних бројева $\{\alpha_{m,l}\}, m, l \in N$ на следећи начин:

$$(27) \qquad \alpha_{1,l} = \frac{1}{l^l} \qquad \forall l \in N.$$

$$(28) \qquad \alpha_{m,l} = 0 \qquad m \geq l \geq 2 \vee m > 1, l = 1.$$

$$(29) \qquad \binom{l}{m} l^m = l^l \alpha_{1,l-m} + \sum_{j=1}^{m} \binom{l}{m-j} l^{m-j} \alpha_{1+j,l-m+j}, \qquad 1 \leq m \leq l-1.$$

Прецизније, бројеви $\alpha_{m,l}$ могу се рекурентно доказати (осим у случајевима када је $m > 1, l = 1$ или $m \geq l \geq 2$) на следећи начин:

1.Добијамо $\alpha_{1,l}$ из (27)

2.Затим одредимо $\alpha_{2,l}$ за $l \geq 3$ из $\binom{l}{1} l = l^l \alpha_{1,l-1} + \alpha_{2,l}$.

3.Затим одредимо $\alpha_{3,l}$ за $l \geq 4$ из $\binom{l}{2} l^2 = l^l \alpha_{1,l-2} + \binom{l}{1} l \alpha_{2,l-1} + \alpha_{3,l}$.

4.Затим одредимо $\alpha_{4,l}$ за $l \geq 5$ из
$\binom{l}{3} l^3 = l^l \alpha_{1,l-3} + \binom{l}{2} l^2 \alpha_{2,l-2} + \binom{l}{1} l \alpha_{3,l-1} + \alpha_{4,l}$ итд.

На пример, вредности $\alpha_{m,l}$ за $m \leq 5, l \leq 6$ дате су у следећој табели

Табела 1.

l	$\alpha_{1,l}$	$\alpha_{2,l}$	$\alpha_{3,l}$	$\alpha_{4,l}$	$\alpha_{5,l}$
1	1	0	0	0	0
2	1/4	0	0	0	0
3	1/27	9/4	0	0	0
4	1/256	176/27	-4	0	0
5	1/3125	3275/256	-775/27	25/4	0
6	1/46656	65844/3125	-6579/64	316/3	-9

Лема 18 *За сваки цео број* $n, n \geq 2$ *имамо*:

$$(30) \qquad \alpha_{n,n+1} = (-1)^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Доказ:
Доказаћемо индукцијом.
(i) Показали смо да је $\alpha_{2,3} = (-1)^2(\frac{2+1}{2})^2$ (Табела 1.)
(ii) Нека (30) важи за $\alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$.
(iii) Користећи (29) за $l = n+1$ и $m = n-1$, а (27) за $l = 2$ и (ii) добијамо:

$$\binom{n+1}{2}(n+1)^{n-1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{4} + \sum_{j=1}^{n-2} \binom{n+1}{j+2} (-1)^{j+1} \left(\frac{j+2}{2}\right)^2 (n+1)^{n-1-j} + \alpha_{n,n+1}.$$

Замењујући $j = i-1$ даље добијамо:

$$\alpha_{n,n+1} = \binom{n+1}{2}(n+1)^{n-1} - \frac{(n+1^{n+1}}{4} - \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{n-1} \binom{n+1}{i+1}(-1)^i (i+1)^2 (n+1)^{n-i}.$$

Из једнакости $\binom{n+1}{i+1}(i+1) = \binom{n}{i}(n+1)$ и $\binom{n}{i} i = \binom{n-1}{i-1} n$ добијамо:

$$\alpha_{n,n+1} = \binom{n+1}{2}(n+1)^{n-1} - \frac{(n+1)^{n-1}}{4} - \frac{n+1}{4}\sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i}(-1)^i (i+1)(n+1)^{n-1} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{4}\left[\frac{2n}{n+1} - 1 - \sum_{i=2}^{n-1}\binom{n}{i}(i+1)\left(\frac{-1}{n+1}\right)^i\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{4}\left[\frac{n-1}{n+1} - \sum_{i=2}^{n-1}\binom{n}{i}\left(\frac{-1}{n+1}\right)^i - n\sum_{i=2}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{-1}{n+1}\right)^i\right].$$

Када уврстимо $i = k+1$ добијамо:

$$\alpha_{n,n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{4}\left[\frac{n-1}{n+1} - \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n + 1 + +n\left(\frac{-1}{n+1}\right) + \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n - n\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-1}{k}\left(\frac{-1}{n+1}\right)^{k+1}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{4}\left\{\frac{n}{n+1} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n + +\frac{n}{n+1}\left[(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n-1} - 1 - \left(\frac{-1}{n+1}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{4}\left[\frac{n}{n+1} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n + +\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} - \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{-1}{n+1}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{4}(-1)^n\left[\frac{1}{(n+1)^n} + \frac{n}{(n+1)^n}\right] = (-1)^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Теорема 19 *Нека су n и k фиксирани цели бројеви за које важи* $1 \le k \le n-2$. *Тада је за произвољне ненегативне бројеве* $x_1, \ldots, x_n$ *испуњена следећа неједнакост:*

$$(31) \qquad \sigma_1^k \sigma_{n-k} \le \alpha_{1,n-k}\sigma_1^n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{1+i,n-k+i}\sigma_1^{k-i}\sigma_{n-k+i}$$

где су $\alpha_{m,l}$ *дефинисани у (27)-(29).*

Доказ:
Неједнакост (31) је хомогена, па можемо претпоставити да је $x_1 + \ldots + x_n = \sigma_1 = 1$. Тада је према Леми 16 довољно показати да је

$$f(P_{m,n}) \ge 0. \qquad \forall m, 1 \le m \le n$$

где је

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_{1,n-k} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{1+i,n-k+i}\sigma_{n-k+i} - \sigma_{n-k}.$$

Очигледно у тачки $P_{m,n}$ имамо $\sigma_q = \binom{m}{q}\frac{1}{m^q}$ $1 \le q \le n$, дакле,

$$(32) \qquad \sigma_q \ne 0 \Leftrightarrow q \le m.$$

Посматраћемо три могућа случаја за m:

(i) $m \le n-k-1$.
Тада из (32) и (27) добијамо $f(P_{m,n}) = \alpha_{1,n-k} = \frac{1}{(n-k)^{n-k}} > 0$.
(ii)$m = n-k$.
Тада из (32) и (27) добијамо $f(P_{n-k,n}) = \alpha_{1,n-k} - \frac{1}{(n-k)^{n-k}} = 0$.
(iii)$m = n-k+p$, где је $1 \le p \le k$, па из (32) следи

$$f(P_{m,n}) = \alpha_{1,n-k} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{1+i,n-k+i}\binom{n-k+p}{n-k+i}\frac{1}{(n-k+p)^{n-k+i}} -$$

$$-\tbinom{n-k+p}{n-k}\tfrac{1}{(n-k+p)^{n-k}} = \tfrac{1}{(n-k+p)^{n-k+p}}\left[(n-k+p)^{n-k+p}\alpha_{1,n-k} + \right.$$

$$\left. + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \tbinom{n-k+p}{n-k+i}(n-k+p)^{p-i}\alpha_{1+i,n-k+i} - \tbinom{n-k+p}{n-k}(n-k+p)^{p}\right].$$

Међутим, како је $\binom{n-k+p}{n-k+i} \neq 0$ за $i \leq p$ и $\frac{1}{(n-k+p)^{n-k+p}} = \alpha_{1,n-k+p}$ према (27) добијамо

$$(33) \qquad f(P_{m,n}) = \alpha_{1,n-k+p}[(n-k+p)^{n-k+p}\alpha_{1,n-k}+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\binom{n-k+p}{p-i}(n-k+p)^{p-i}\alpha_{1+i,n-k+i} - \binom{n-k+p}{p}(n-k+p)^{p}].$$

Очигледно је $\alpha_{1,n-k} = \alpha_{1,(n-k+p)-p}$ и $\alpha_{1+i,n-k+i} = \alpha_{1+i,(n-k+p)-p+i}$. Тада је десна страна неједнакости (33) једнака нули према (29) за $l = n-k+p$ и $m = p$. Дакле, у овом случају је $f(P_{m,n}) = 0$.
Из (i),(ii) и (iii) следи да је (31) тачно , а тиме и теорема.

Напомена:
Теорема 19 је тачна и за $k = n-1$ јер су у овом случају обе стране (31) једнаке што следи из (28).

Напомена:
За $k = 0$ Теорема 19 је аналогна неједнакости између аритметичке и геометријске средине.

Последица 20 *Нека су A_n, G_n, H_n аритметичка, геометријска и хармонијска средина позитивних реалних бројева $x_1, ..., x_n$ ($n \geq 2$). Тада важи неједнакост:*

$$(34) \qquad \left[\frac{nA_n}{(n-1)G_n}\right]^{n-1}\frac{1}{G_n} + \left[n - \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]\frac{1}{A_n} \geq \frac{n}{H_n}.$$

Доказ:
Неједнакост (34) следи из:

$$\sigma_1 = nA_n, \sigma_{n-1} = \frac{nG_n^n}{H_n}, \sigma_n = G_n^n, \alpha_{1,n-1} = \frac{1}{(n-1)^{n-1}}, \alpha_{2,n} = n^2 - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$$

и Теореме 19 за $k = 1$.

10 Примена симетричних неједнакости у додатној настави

Симетричне полиноме можемо примењивати при доказивању многих неједнакости, следећа теорема и примери могу послужити као једна од тема за додатни рад са ученицима гимназија. Од користи могу бити следеће две таблице, мада се потребне вредности за ниже степене лако могу израчунати.

Табела 2. Случај две промењљиве

s_1	σ_1	s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$
		$\dots$	$\dots$

Табела 3.Случај три промењљиве

s_0	3	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 -$ $-32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2$
s_1	σ_1		
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4 +$ $+9\sigma_1^6\sigma_3 - 45\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + 54\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 + 18\sigma_1^3\sigma_3^2 -$ $-9\sigma_2^3\sigma_3 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_3^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$		
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$		
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 -$ $-2\sigma_2^5 + 10\sigma_1^7\sigma_3 - 60\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 + 100\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 +$ $+25\sigma_1^4\sigma_3^2 - 40\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 - 60\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 +$ $+10\sigma_1\sigma_3^3 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2$
s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 +$ $+6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$		
s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 +$ $+7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3$	$\dots$	$\dots$

Теорема 21 *Нека су* σ_1 *и* σ_2 *реални бројеви. Да би бројеви x и y дефинисани из система једначина*

$$x + y = \sigma_1$$
$$xy = \sigma_2$$

били реални потребно је и довољно да σ_1 *и* σ_2 *задовољавају неједнакост* $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$*, при чему се једнакост достиже за x=y.*

Због тога да би оба броја x и y била реална и ненегативна потребно је и довољно да бројеви σ_1 *и* σ_2 *задовољавају неједнакости:*

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0 \qquad \sigma_1 \geq 0 \qquad \sigma_2 \geq 0$$

Доказ:
Бројеви x и y су корени квадратне једначине:

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

то јест подударају се са бројевима:

$$z_{1,2} = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2}$$

Из услова да су бројеви x и y реални потребно је и довољно да поткорени израз буде ненегативан тј. да буде задовољена неједнакост $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$. Једнакост $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 0$ значи да се оба корена једначине поклапају тј. да је x=y. Ако су x и y ненегативни поред неједнакости $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$ задовољене су још и неједнакости $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$.
Обрнуто, нека важе неједнакости $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$, $\sigma_1 \geq 0$ и $\sigma_2 \geq 0$. Као што смо показали следи да су бројеви x и y реални, зато што је $\sigma_2 \geq 0$ закључујемо да су оба истог знака и на крају из неједнакости $\sigma_1 \geq 0$ следи да су оба ненегативна.

Могуће је понудити и други доказ. Бројеви x и y су корени квадратне једначине $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$ са реалним коефицијентима, па су тако или оба реална и тада је њихова разлика такође реалан број, или су коњуговано-комплексни и тада је њихова разлика чисто имагинаран број.
У првом случају је $(x-y)^2 \geq 0$, а у другом је $(x-y)^2 < 0$. Из тога следи да ако су σ_1 и σ_2 реални, онда је потребан и довољан услов да су бројеви x и y реални ако важи неједнакост $(x-y)^2 \geq 0$. Остаје нам да приметимо да је $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$, тако да неједнакост $(x-y)^2 \geq 0$ можемо записати и као $\sigma_1^2 - 4\sigma_2$. Даљи ток доказа је као у горњем случају.

Горња теорема може се користити при доказивању неједнакости на следећи начин. Претпоставимо да је дат симетрични полином $f(x,y)$ и да требамо доказати, да за реалне x и y који могу поред ненегативности задовољавати и неке друге услове нпр. $x + y \geq a$ задати полином задовољава неједнакост $f(x,y) \geq 0$. При доказу најпре симетрични полином $f(x,y)$ представимо преко σ_1 и σ_2, затим у добијеном полиному изразимо σ_2 преко σ_1 и ненегативне величине $z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$ тј. представимо σ_2 у облику $\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z)$, у резултату онда посматрамо полином по σ_1 и z и његову ненегативност. Може се десити да је накад погодније изразити σ_1^2 преко σ_2 и z, тј. $\sigma_1^2 = z + 4\sigma_2$.

Пример 5:
Доказати да за произвољне реалне бројеве *a* и *b*, за које важи $a + b \geq c$, важе следеће неједнакости:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2} \qquad a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8} \qquad a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}$$

Решење:
$a + b = \sigma_1$
$ab = \sigma_2$
$z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$
$4\sigma_2 = \sigma_1^2 - z$
$\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z)$
$a^2 + b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}z.$
Како је $z \geq 0$, а по услову задатка $\sigma_1 \geq c$ следи да је:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2$$

Аналогним расуђивањем добијамо:

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 = \frac{1}{8}c^4$$

И слично,

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}c^8$$

Применом математичке ундукције, можемо закључити да за $a + b \geq c$и приозвољан природан број *n* важи:

$$a^{2^n} + b^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^n} - 1} \cdot c^{2^n}$$

Пример 6:

Доказати да за реалне бројеве *a* и *b* важе неједнакости:
а) $5a^2 - 6ab + 5b^2 \geq 0$
б) $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$
в) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a + b)^2$

Решење:
а) $5(a^2+b^2)-6ab \geq 0$

$$\begin{aligned}5(\sigma_1^2-2\sigma_2)-6\sigma_2 &= 5\sigma_1^2-10\sigma_2-6\sigma_2\\ &= 5\sigma_1^2-16\sigma_2\\ &= 5\sigma_1^2-16\cdot\tfrac{1}{4}(\sigma_1^2-z)\\ &= 5\sigma_1^2-4(\sigma_1^2-z)\\ &= 5\sigma_1^2-4\sigma_1^2+4z=\sigma_1^2+4z\geq 0.\end{aligned}$$

б) $8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$

$a^4+b^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2$
$\sigma_2=\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)$

$$\begin{aligned}8(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2)-\sigma_1^4 &= 8\sigma_1^4-32\sigma_1^2\sigma_2+16\sigma_2-\sigma_1^4\\ &= 7\sigma_1^4-32\sigma_1^2\cdot\tfrac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+16\cdot\tfrac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2\\ &= 7\sigma_1^4-8\sigma_1^2\cdot\tfrac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+\sigma_1^4-2z\sigma_1^2+z^2\\ &= 7\sigma_1^4-8\sigma_1^4+8z\sigma_1^2+\sigma_1^4-2z\sigma_1^2+z^2\\ &= 6z\sigma_1^2+z^2\geq 0\end{aligned}$$

в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geq 64ab(a+b)^2$

Уводимо смену
$\sqrt{a}=u \qquad a=u^2$
$\sqrt{b}=v \qquad b=v^2$

$(u+v)^8\geq 64u^2v^2(u^2+v^2)^2/\sqrt{\ }$
$(u+v)^4\geq 8uv(u^2+v^2) \qquad u+v=\sigma_1, uv=\sigma_2$

$$\begin{aligned}\sigma_1^4-8\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2) &= \sigma_1^4-8\sigma_1^2\sigma_2+16\sigma_2^2\\ &= \sigma_1^4-8\sigma_1^2\cdot\tfrac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+16\cdot\tfrac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2\\ &= \sigma_1^4-2\sigma_1^2\cdot(\sigma_1^2-z)+\sigma_1^4-2z\sigma_1^2+z^2\\ &= \sigma_1^4-2\sigma_1^4+2z\sigma_1^2+\sigma_1^4-2z\sigma_1^2+z^2=z^2\geq 0\end{aligned}$$

Неједнакости са три промењљиве
Јасно је да за реалне бројеве *x,y,z* важи неједнакост

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

при чему се једнакост достиже у случају када је *x=y=z*. Лева страна горње неједнакости је симетрични полином по *x,y,z*. Развијајући по формули за квадрат бинома, горња неједнакост се може написати у облику $2s_2-2\sigma_2 \geq 0$ то јест,

$$\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$$

Из горе добијене неједнакости можемо добити читав низ нових неједнакости.

Пример 7:
Доказати да за реалне бројеве *a,b,c* важи неједнакост $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$.

Решење:
Неједнакост је облика:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz)$$

Увођењем смене *x=ab,y=ac* и *z=bc* добијамо:

$$(ab+ac+bc)^2 \geq 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$

или

$$(ab+ac+bc)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

што се лако може доказати.

11 Закључак

Имајући у виду да симетрични полиноми заузимају много већи простор разматрања, у овом раду дат је скроман допринос проучавању њима одговарајућих неједнакости које су запостављене у односу на решавање симетричних једначина, система једначина, растављања на чиниоце итд.

Посебна пажња посвећена је Newton-овим неједнакостима (квадратним, кубним и неједнакостима четвртог степена), примени Blundon-ових неједнакости на троугао, нових неједнакости које су резултат истраживања C. Niculesku-a и T.Mitev-a, као и проучавању симетричних полинома и њима одговарајућих неједнакости у оквиру додатне наставе у гимназијама и средњим школама с обзиром на чињеницу да се задаци овог типа често срећу на такмичењима и Интернационалној математичкој олимпијади.

Проучавањем симетричних полинома и њима одговарајућих неједнакости, постепено улазећи у суштину различитих доказа, као и решавањем проблема сваки ученик може поред стеченог знања, понети и искуство које је својствено алгебри – сазнање да је ова област предивна композиција коју хармонично изводи читав оркестар алгебарских законитости.

*   * * * *

Литература

[1] Ђуро Курепа, *Виша алгебра*, Грађевинска књига, Београд,1979.

[2] Constantin P. Niculescu, *A new look at Newton's inequalities*, Jurnal of inequalities in pure and applied mathematics, Volume 1, Issue 2, 2000.

[3] Todor P. Mitev, *New inequalities between elementary symmetric polynomials*, Jurnal of inequalities in pure and applied mathematics, Volume 4, Issue 2, 2003.\\

[4] В.Г.Ботянский, Н.Я.Виленкин, *Симметрия в алгебре*,Издательство Московского центра непрерыбного математического образования, Москва 2002.

[5] W.J.Blundon, *Inequalities associated with the triangle*, Canad. Math. Bull. 1965.

[6] G.Hardy, J.E.Littlewood, *Inequalities,* Cambridge Mathematical library, 2nd. ed. 1952.

[7] I.G.Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials* ,Oxford University Press, 1979.