

UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet

Biljana Samardžija

**SATELITSKE ORBITE
I
DINAMIKA ŽIROSKOPSKIH SISTEMA**

Diplomski master ispit iz astronomije

**BEOGRAD
2009**

UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet




Biljana Samardžija

SATELITSKE ORBITE I DINAMIKA ŽIROSKOPSKIH SISTEMA

Diplomski master ispit iz astronomije

BEOGRAD
2009

SADRŽAJ:

 Uvod (Predgovor)	5
GLAVA PRVA	
 Uvod	
1. Uvod.....	7
2. Matematički aparat: Skalarni i vektorske veličine.....	14
2.1. Osobine vektora.....	15
2.2. Skalarni i vektorski proizvod dva vektora.....	17
2.3. Mešoviti proizvodi vektora.....	20
2.4. Diferencijalni operatori – gradijent, divergencija, rotor, laplasijan	21
3. Analitički aparat: Generalisane koordinate.....	22
4. Veze; materijalna tačka.....	26
4.1. Veze i njihova klasifikacija.....	26
4.2. Materijalni sistem; veze.....	29
5. Nebeska tela kao materijalne tačke i materijalni sistemi.....	30
6. Teoreme o impulsima i momentima.....	30
7. Teorema o kretanju težišta.....	32
8. Zavisnost i nezavisnost rotacije od translacije.....	32
9. Pokretni koordinatni sistemi.....	34
10. Ojlerove jednačine.....	36
11. Ojlerovi uglovi.....	37
12. Polhodija i herpolhodija.....	38
13. Privlačne sile tela konačnih dimenzija.....	39
14. Još ponešto o astrodinamici.....	42
15. Kretanje tela promenljive mase: Zakoni reaktivnog pogona.....	43
16. Kosmička navigacija.....	50
17. Žiroskopi kao elementi navigacionih i stabilizacionih kompleksa.....	52
GLAVA DRUGA	
 Dinamika tačke i satelitske orbite	
1. Zakon o količini kretanja (impuls).....	53
2. Sila i količina kretanja.....	53
3. Impuls sile i količina kretanja.....	54
4. Rad i energija.....	55
5. Moment količine kretanja.....	57

1. Kretanje pod dejstvom centralne sile.....	58
2. Problem dva tela.....	60
3. Orbite planeta i satelita.....	62
4. Geometrija konusnih preseka.....	64
5. Određivanje putanje iz početnih uslova.....	66
6. Lansiranje satelita kad je $\beta_0 = 0$	68
7. Kotangencijalni transfer između koplanarnih kružnih orbita.....	71
8. Transfer između koplanarnih eliptičnih orbita sa zajedničkom osom.....	74
9. Promena orbite usled trenutnog impulsa (potiska).....	75
10. Poremećaj parametara orbite.....	84
11. Stabilnost malih oscilacija za kružne orbite.....	85
12. Presretanje i sastajanje.....	87
13. Balistička trajektorija dugog dometa.....	92
14. Uticaj Zemljine spljoštenosti.....	95

GLAVA TREĆA

Žirodinamika

1. Kretanje krutog tela.....	101
2. Moment količine kretanja krutog tela.....	102
3. Kinetička energija krutog tela.....	105
4. Moment inercije u odnosu na osu koja ima rotaciju.....	105
5. Glavne ose inercije.....	107
6. Ojlerova momentna jednačina.....	108
7. Ojlerove jednačine za glavne ose.....	109
8. Telo sa momentom inercije $A=B$ i nultim spoljnim momentom.....	109
9. Obrtanje tela sa nultim spoljnim momentom u odnosu Ojlerove uglove.....	112
10. Nesimetrična tela sa nultim spoljnim momentom (Poansoovo geometrijsko rešenje).....	114
11. Nejednaki momenti inercije sa nultim spoljnim momentom (analitičko rešenje).....	119
12. Stabilnost rotacije u odnosu na glavne ose inercije.....	122
13. Opšte kretanje simetričnog žiroskopa ili čigre.....	123
14. Stabilna precesija simetričnog žiroskopa ili čigre.....	130
15. Precesija i nutacija Zemljine polarne ose.....	133

16. Opšte kretanje krutih tela.....	135
16.1. Kotrljanje tankog kružnog diska po neravnoj horizontalnoj površini.....	136
16.2. Kotrljanje diska čija je površina približno vertikalna.....	137
16.3. Vertikalno obrtanje diska.....	138
16.4. Disk koji se obrće približno horizontalno.....	139

GLAVA ČETVRTA

 Dinamika žiroskopskih instrumenata	
1. Male oscilacije žiroskopa.....	141
2. Oscilacije u odnosu na ose okvira.....	143
3. Okviri konačne mase (Tehnika poremećaja).....	147
4. Žirokompas.....	153
5. Oscilacije žirokompasa.....	154
5.1. Visokofrekventne oscilacije.....	155
5.2. Amortizovane oscilacije.....	157
5.3. Greška kompasa pri određivanju pravca (čeono odstupanje) usled kretanja pokretnog sistema.....	157
6. Brzinski žiroskop.....	158
7. Integracioni žiroskopi.....	160
8. Stabilne platforme.....	160
9. Platforme sa tri ose (razlaganje kretanja).....	163
10. Inercijalna navigacija.....	165
11. Oscilacije navigacionih odstupanja.....	167
12. Performanse i klasifikacija inercijalnih sistema.....	170
13. Kosmičke letilice i inercijalni kompleksi.....	171
 Zaključak	173
 Literatura	175

УВОД



Uvod

§ **1. Uvod.** U pravljenju modela putanjskih elemenata satelita i poremećaja tih elemenata: **ili** ćemo pokušati da izračunamo uticaj i uzajamno dejstvo svemirske letilice i gravitacionih i negravitacionih dejstava i da napravimo **vrlo komplikovan program** koji bi se koristio za račun orbita, pri čemu smo stalno izloženi opasnosti da ova čisto numerička procedura stvori iluzornu tačnost, čak i kada su pravilno uzete u obzir neodređenosti karakteristika oblika i dimenzija satelita i njegove orijentacije u prostoru, **ili** ćemo koristiti klasične alate nebeske mehanike da bi se pronašlo koja je komponenta promene ubrzanja, usled dejstva spoljnih i unutrašnjih sila, stvarno važna, posebno ako se njeni efekti vremenom akumuliraju. U prvom slučaju, i pored svih napora, imamo da stvarna tačnost modela ne prelazi nekoliko procenata.

U drugom pristupu tipičan rezultat pokazuje da poznavanje malog odstupanja položaja komunikacione ili neke druge antene satelita može biti relevantna informacija za efikasno pravljenje modela dugoročnih poremećaja. Slične teškoće u stvaranju takvog modela pravi oblik i sjaj Zemlje, jer elementi Zemljine površine odbijaju Sunčevu svetlost nejednako, u zavisnosti od vremena i geografskih oblika. Ovaj problem je, takođe, suviše komplikovan da bi se rešavao čisto numerički, pre nego se pojednostavi preko neke analitičke teorije koja pokazuje koje su osobine stvarno relevantne.

Na sve ovo, nadovezala se **suštinska** promena u nameni veštačkih objekata: umesto **jednonamenskih**, sve češće, a danas skoro i po pravilu, sateliti i kosmičke letilice su **višenamenski**, nezavisno od izbora orbite. Time se **izgradnja** dobrih modela za račun orbita, kako za potrebe astronomije i satelitske geodezije, tako i za potrebe astrodinamike, pretvorila u **nužnost**, te se veštački nebeski objekti više ne lansiraju zbog potreba nebeskih mehaničara i njihove želje da računaju orbite! Ukoliko postoje izuzeci od ovog pravila, onda razlozi za to moraju biti veoma važni.

Danas skoro svi sateliti (govorimo: sateliti, a imamo u vidu skoro sve vrste veštačkih nebeskih tela, ali ne i njihove ostatke!) imaju sistem napajanja, koji transformiše apsorbovanu Sunčevu svetlost i koristi energiju, sakupljenu na ukupnoj površini tela satelita. Tu "istu" energiju satelit po potrebi zrači u vidu toplot-

nih zraka ili u vidu radiotalasa, koji su, po pravilu, usmereni prema Zemlji. Time se problem konačnog momenta usled pritiska zračenja značajno komplikuje.

Istovremeno, da bi se povećali energetske resursi, a time i ukupne mogućnosti modernih letilica, sistem napajanja je **proširen** dodavanjem (pokretnih) krilnih površina pokrivenih foto ćelijama, a prave se i pokretne antene sa kompleksnim mogućnostima orijentacije i oblikovanja da bi se povećale mogućnosti komunikacije. Jasno je da je **sve ovo**, kada postoji potreba da se obavi veoma tačan račun putanjskih elemenata satelita, prava noćna mora za stručnjake i naučnike. U tom cilju, u ovom radu daćemo poseban osvrt na sisteme stabilizacije i orijentacije satelita, kao i na značaj žiroskopskih efekata i instrumentskih sistema u navigaciji

✿ veštačkih nebeskih tela. Odmah treba naglasiti da je pojam *navigacije* doživeo značajnu transformaciju sa početkom i razvojem kosmičkih letova, tj. sa razvojem astrodinamike. O kakvoj transformaciji se radi, videćemo u poglavlju posvećenom žiroskopskim (inercijalnim) silama i efektima.

Dalje, za eventualnu visokopotencijalnu eksploataciju kosmičkog prostora i njegovih sadržaja, sve više se pribegava planiranju, projektovanju i realizaciji **specijalizovanih i dinamički fleksibilnih formacija** veštačkih nebeskih objekata, bilo da se radi o postavljanju i održavanju moćne svemirske stanice, bilo da se radi o višestrukim i ponovljivim susretima ili komezurabilnim formacijama. Za ove ciljeve značaj sistema za stabilizaciju i orijentaciju u prostoru, kao i razrada modifikovanih praktičnih rešenja na osnovi znanja i iskustva sa žiroskopskim efektima je nemejljiv.

Istovremeno, skoro sve svemirske letilice imaju kontrolne sisteme, pri čemu su najvažniji sistem za određivanje položaja u prostoru i promenu parametara orbite; time su stvoreni dodatni uslovi za poremećaje orbite, koji su nekad svrsishodni, tj. namerni orbitalni manevri, a nekada su nusprodukt manevra položaja i orijentacije, gubitka mase (isticanje goriva, "odbacivanje" nekorisnog tereta i sl.).

Mogli bismo da ograničimo našu analizu na jednostavnije slučajeve pasivnih satelita ili satelita jednostavnih po funkciji i obliku. Ipak, iskustvo nas je naučilo da je bolje **prognozirati** potrebu za nekim informacijama, nego čekati da se ona nametne iz eksploatacije takvih, jednostavnih slučajeva. Ozbiljna prepreka izgradnji i lansiranju komplikovanih i zahtevnijih veštačkih objekata jeste eksponencijalni rast cene sa rastom zahteva i složenosti. U najboljem slučaju će svaka svemirska misija biti projektovana kao kompromis između različitih namena, gde će astronomske i geodetske primene biti samo jedna od mogućnosti.

Cilj nije da damo iscrpne analize svakog pojedinačnog problema, već da koristimo tipične primere da bi čitalac dobio osećaj za važnost raznih problema koje treba rešiti da bi se postigao zadati nivo tačnosti kontrole i određivanja orbite.

Г Л А В А П Р В А



Uvod

§ 1. Uvod. Izuzimajući posebne deduktivne naučne discipline, *deduktivne* po sebi, možemo reći da je **astrodinamika**, kao i većina naučnih disciplina proistekla iz prirodnih nauka i primenjenih matematičkih nauka, obojena definicionom neodređenošću. Ono što se u najkraćim crtama može lako izdvojiti kao deo definicionog okruženja astrodinamike jeste da je ona nastala iz zahteva da se odrede uslovi mehanike kosmičkog leta, kako na osnovi zatečenih znanja u astronomiji uopšte, u nebeskoj mehanici posebno, tako i na osnovi teorije i prakse *aerodinamike* i *balistike* kao i u neposrednoj vezi sa zahtevima *kosmičke navigacije*, * koja se, dalje, bavi teorijom i praksom kontrole i upravljanja uticajem nekonzervativnih sila i njihovom registracijom, pa sve do primene i razvoja savremenih posmatračkih sistema i sistema povratne veze.

Nebeska mehanika se tradicionalno odnosi na *gravitacioni problem N* tela ili na njegove *varijante*, tj. odnosi se na probleme koji se mogu proučavati u okviru formalizma Hamiltonove mehanike. Istorijski, razvoj nauke u celini, primenjene matematike i mehanike posebno, doveo je do toga da je danas **predmet i cilj** nebeske mehanike da *objasni i predvidi* položaj i kretanje svakog stvarnog (nebeskog) objekta u Svemiru, bez obzira na uzroke promena stanja njegovog položaja i kretanja. Pojam **nebeski objekat** ovde usvajamo više na osnovi iskustvene intuicije nego iz eksplicitne odredbe: radi se o objektima čije su dimenzije i/ili daljine od posmatrača značajno veće od mere čoveka.

Sve dok su jedina vasiona tela, tela sa promenama u stanju i kretanju, bila prirodna nebeska tela – kao što su planete, komete, asteroidi,... – navedena neodređenost nije bila od većeg značaja: njihova kretanja su opisana sa izuzetnom tačnošću, pomoću zakona čiste, odnosno *konzervativne* nebeske mehanike. *

Povećanje obima istraživanja i interesa za nebesku mehaniku, dovelo je do toga da su neki izuzeci bili poznati već u devetnaestom veku. Negravitacione premećaje u kretanju **komete** otkrio je još Enke za kometu, koja je po njemu i dobila ime (Whipple i Sekannia, 1979.). Postojanje usporavanja kretanja Meseca po orbiti, koje se ne može objasniti uticajem gravitacije Sunca i planeta, dokazao je Adams (Smart 1947); Džordž Darwin je kasnije objasnio da je ovaj efekat rezultat disipacije energije plima *** – koje izaziva sam Mesec (Darwin, 1948). Međutim, ovakvih

izuzetaka je malo, a negravitacioni efekti se mogu svesti na **male popravke** čiste gravitacione teorije, teorije koja je u celini bila veoma uspešna u opisivanju kretanja planeta i prirodnih satelita.

Situacija se promenila 4. oktobra 1957. od kada se u **nebeske objekte** ubrajaju i veštačka tela. Ovakva tela trpe tolike negravitacione poremećaje putanje da su odmah bili potrebni svi trikovi i granične mogućnosti nebeske mehanike. Jasno je da se radi, mahom, o istim fizičkim fenomenima kao i kod prirodnih nebeskih tela! Suština se najjednostavnije može iskazati sledećim stavom: parametar koji definiše **odnos** negravitacionih i gravitacionih sila *predstavlja odnos površine prema masi*, a ta veličina je, po pravilu, značajno veća za veštačka nebeska tela (tzv. nebeske letilice). Izuzimajući neke specijalne situacije sukcesivne nadgradnje veštačkog nebeskog tela, tj. uspostavljanja uslova dugoročne stabilizacije **pasivnog kretanja**, vrednost tog parametra je između 0,1 i 0,01 cm² g⁻¹), što je nekoliko redova veličine veće od vrednosti čak i za slučaj malih asteroida.

Tako su negravitacioni poremećaji postali izazov nebeskoj mehanici i specijalistima tog vremena (King-Hele, 1983.).

U literaturi se, uglavnom, navode 2 uzroka negravitacionih poremećaja, koji se, * opet, mogu svesti na jedan: **svemir nije prazan**. Pri tome se misli da *međusistemna sredina* nije jasno razgraničena i odvojena od nebeskih sistema i nebeskih tela, pa se javljaju njeni uticaji na kretanje kosmičkih letilica i u oblastima koje prvobitno nisu uzimane u razmatranje. Time se zatečena znanja iz *aerodinamike*, tj. nauke o uticaju atmosfere na kretanje letilica, polako prenose i na oblast uticaja šire (kosmičke) sredine.

Pre svega, Zemljina atmosfera se **efektivno** prostire do mnogo viših nivoa nego što se pretpostavljalo pre kosmičke ere, a zbog velike relativne brzine svemirskih letilica u odnosu na čestice gasa javlja se značajan aerodinamički otpor sredine, čak i pri veoma malim gustinama. Ovo je bila prva vrsta negravitacionih poremećaja * koju su ispitivali analitičari, prateći podatke Sputnika 1, a prvi izveštaj o tome je štampan pet nedelja posle lansiranja ("Nature", 9. novembar 1957.). Otpor sredine je najvažniji negravitacioni poremećaj za niske orbite i veličina otpora zavisi od gustine sredine u oblasti kretanja veštačkog nebeskog tela.

Sa "stanovišta" satelitske astrogeodezije, kada počne proučavanje Zemljine atmosfere, tu se, manje više, završava satelitska geodezija i njena veza sa astronomijom. Atmosferski otpor kretanju satelita veoma je teško modelovati tako da se značajno ne izgubi na tačnosti određivanja potrebnih parametara. Izuzimajući uslove u kojima se koriste pojave rezonance, traženi geodetski parametri (na primer, anomalije gravitacije, koordinate stanica, orijentacioni parametri (uglovi) Zemlje, plimski koeficijenti) ne bi mogli da se dobiju sa željenom tačnošću. Prema tome, sve dok se ne pronađu mogućnosti kretanja "slobodnog od otpora" orbite geodetskih satelita biće **visoke**.

Međutim, pokušaji da se dizanjem satelita na velike visine (LAGEOS, 1976.) izbegne uticaj otpora sredine, tj. da taj otpor bude zanemarljiv, kako zbog visoke orbite (6000 km), tako i zbog male vrednosti odnosa površina-masa, nije dao očekivane rezultate. Dakle, zahvaljujući veoma tačnom laserskom praćenju i posle uzimanja u obzir svih poznatih poremećaja, otkriveno je da je LAGEOS pretrpeo usporenje slično dejstvu otpora kretanju od oko 3×10^{-10} cm s⁻². Da bi se uskladilo

ovo neočekivano otkriće sa tekućim atmosferskim modelima uložen je veliki trud da se razumeju detalji interakcije svemirske letilice sa vrlo retkom atmosferom, kao i sa naelektrisanim česticama plazmasfere. Posle svega bilo je jasno da se sila otpora kretanju **menja sa vremenom na nepredvidljiv način**, i time su se specijalisti iz oblasti astrodinamike i astrogeodezije našli pred novim velikim izazovom.

Druga komponenta nepraznog Svemira je elektromagnetno zračenje. Sa stano- višta kretanja veštačkih nebeskih tela, posebno Zemljinih veštačkih satelita (još su to granice Sunčevog sistema?!), glavni izvor elektromagnetnog zračenja je Sunce, dok Zemlja predstavlja značajan faktor u stvaranju uticaja reflektovanjem tog zra- čenja u celini, svetlosti posebno. Fotoni elektromagnetnog zračenja izmenjuju mo- ment sa svemirskom letilicom i pri apsorpciji i pri refleksiji; same letilice zrače u infracrvenoj oblasti, čime se gubi deo momenta. Rezultujuća ubrzanja su mala – obično reda $10^{-6} \text{ cm s}^{-2}$ – ali nisu zanemarljiva, jer se danas orbite i njihovi parametri računaju sa tačnošću od nekoliko santimetara. Za satelite koji imaju vi- soku orbitu ovo je glavni i najneugodniji poremećaj.

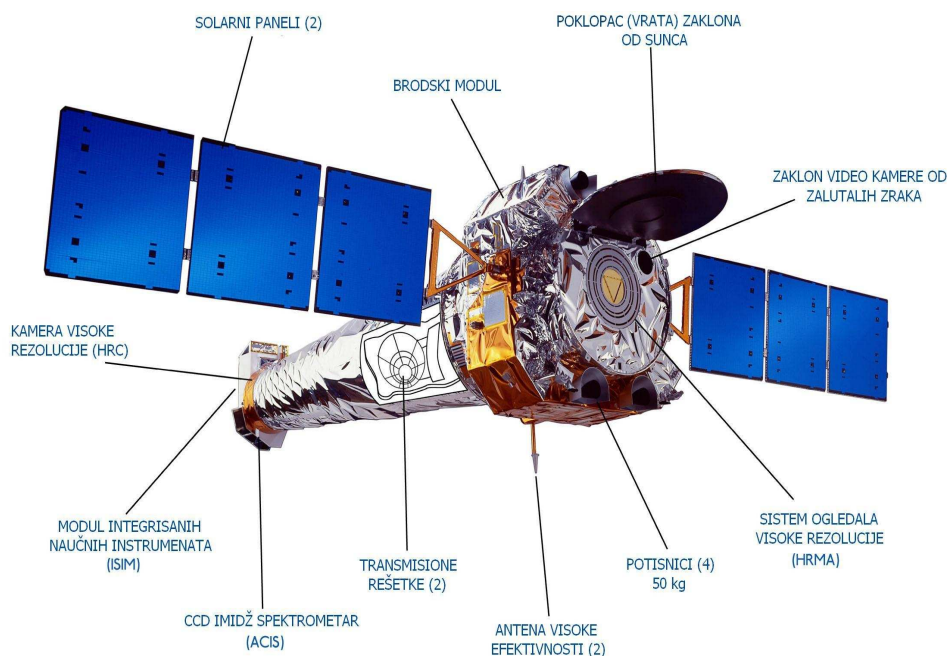
U pravljenju modela poremećaja putanjskih elemenata satelita usled pritiska zračenja moguća su dva pristupa. **Ili** ćemo pokušati da izračunamo uticaj i uza- jamno dejstvo svakog dela površine svemirske letilice i Sunčeve svetlosti i da naprav- imo **vrlo komplikovan program** koji bi se koristio za račun orbita, pri čemu smo stalno izloženi opasnosti da ova čisto numerička procedura stvori iluzornu tačnost, čak i kada su pravilno uzete u obzir neodređenosti karakteristika površine satelita i njegove orijentacije u prostoru. **Ili** ćemo koristiti klasične alate nebeske mehanike da bi se pronašlo koja je komponenta promene ubrzanja, usled dejstva pritiska zračenja, stvarno važna, posebno ako se njeni efekti vremenom akumuliraju. U prvom slučaju, i pored svih napora, imamo da stvarna tačnost modela ne prelazi nekoliko procenata.

U drugom pristupu tipičan rezultat pokazuje da poznavanje malog odstupanja položaja komunikacione ili neke druge antene satelita može biti relevantna informa- cija za efikasno pravljenje modela dugoročnih poremećaja usled pritiska Sunčevog zračenja. Veće teškoće u stvaranju takvog modela pravi sjaj Zemlje, jer elementi Zemljine površine odbijaju Sunčevu svetlost nejednako, u zavisnosti od vremena i geografskih oblika. I ovaj problem je suviše komplikovan da bi se rešavao čisto nu- merički, pre nego se pojednostavi preko neke analitičke teorije koja pokazuje koje su osobine stvarno relevantne.

Na sve ovo, nadovezala se **suštinska** promena u nameni veštačkih objekata: umesto **jednonamenskih**, sve češće, a danas skoro i po pravilu, sateliti i kosmičke letilice su **višenamenski**, nezavisno od izbora orbite (Šegan, 2006). Time se **iz- gradnja** dobrih modela negravitacionih poremećaja, kako za potrebe astronomije i satelitske geodezije, tako i za potrebe astrodinamike, pretvorila u **nužnost**, a veštački nebeski objekti više ne lansiraju zbog potreba nebeskih mehaničara i nji- hove želje da računaju orbite! Ukoliko postoje izuzeci od ovog pravila, onda razlozi za to moraju biti veoma važni.

Danas skoro svi sateliti (govorimo: sateliti, a imamo u vidu skoro sve vrste veštačkih nebeskih tela, ali ne i njihove ostatke!) imaju sistem napajanja, koji transformiše apsorbovanu Sunčevu svetlost i koristi energiju, sakupljenu na ukup- noj površini tela satelita. Tu "istu" energiju satelit po potrebi zrači u vidu toplot-

nih zraka ili u vidu radiotalasa, koji su, po pravilu, usmereni prema Zemlji. Time se problem konačnog momenta usled pritiska zračenja značajno komplikuje.

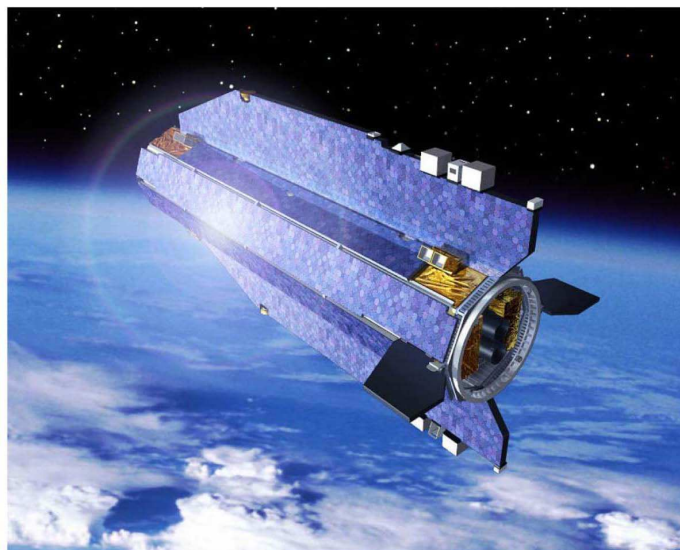


Slika 1.1.1.

Moderna letilica CHANDRA – raspon 19,5 m × 11,5 m, 5 T korisnog tereta

Na sve to, da bi se povećali energetske resursi, a time i ukupne mogućnosti modernih letilica, sistem napajanja je **proširen** dodavanjem (pokretnih) krilnih površina pokrivenih foto ćelijama, a prave se i pokretne antene sa kompleksnim mogućnostima orijentacije i oblikovanja da bi se povećale mogućnosti komunikacije. Jasno je da je **sve ovo**, kada postoji potreba da se obavi veoma tačan račun putanjskih elemenata satelita, prava noćna mora za stručnjake i naučnike. U tom cilju, u ovom radu daćemo poseban osvrt na sisteme stabilizacije i orijentacije satelita, kao i na značaj žiroskopskih efekata i instrumentskih sistema u navigaciji **veštačkih nebeskih tela**. Odmah treba naglasiti da je pojam *navigacije* doživio značajnu transformaciju sa početkom i razvojem kosmičkih letova, tj. sa razvojem astrodinamike. O kakvoj transformaciji se radi, videćemo u poglavlju posvećenom žiroskopskim (inercijalnim) silama i efektima.

Dalje, za eventualnu visokopotencijalnu eksploataciju kosmičkog prostora i njegovih sadržaja, sve više se pribegava planiranju, projektovanju i realizaciji **specijalizovanih i dinamički fleksibilnih formacija** veštačkih nebeskih objekata, bilo da se radi o postavljanju i održavanju moćne svemirske stanice, bilo da se radi o višestrukim i ponovljivim susretima ili komezurabilnim formacijama. Za ove ciljeve značaj sistema za stabilizaciju i orijentaciju u prostoru, kao i razrada modifikovanih praktičnih rešenja na osnovi znanja i iskustva sa žiroskopskim efektima je nemerljiv.

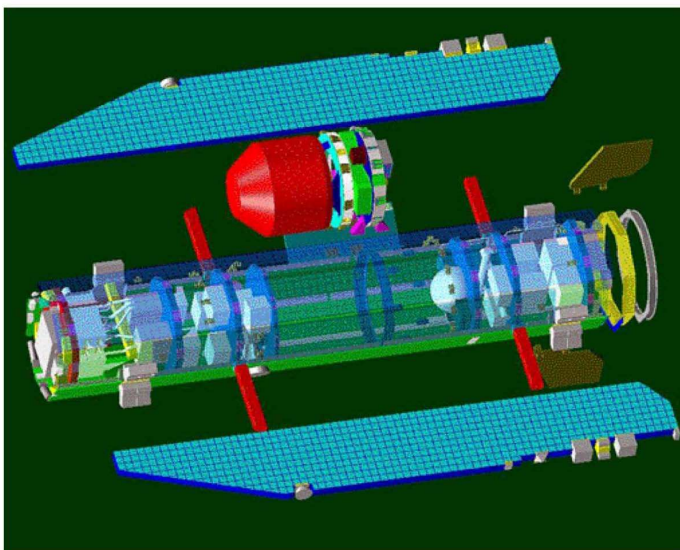


Slika 1.1.2.

Svemirski brod GOCE:

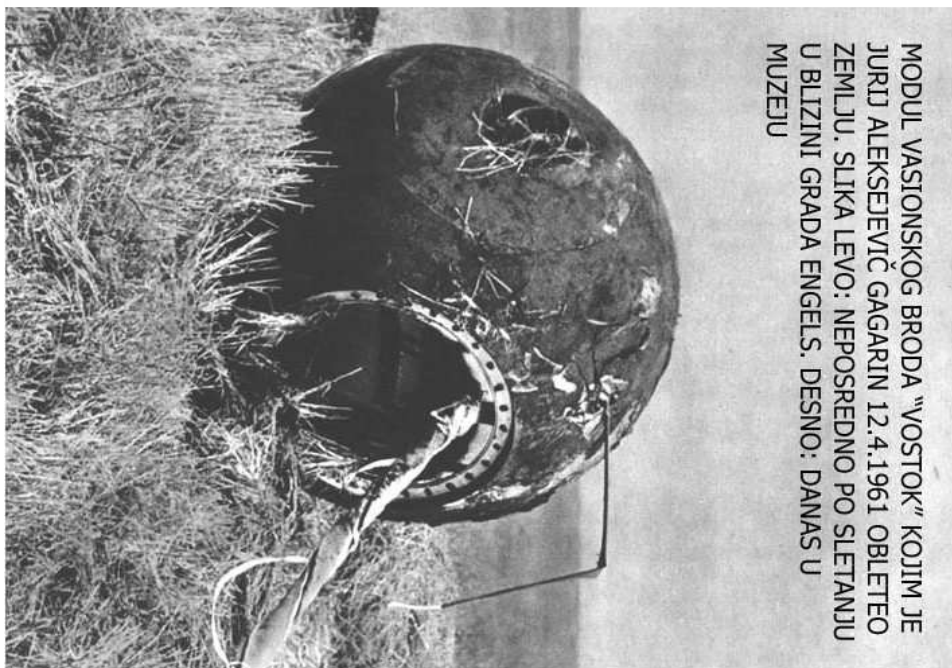
gornja slika ilustruje izgled svetlopropusne strane, iluminacionog omotača;

donja slika prikazuje unutrašnjost svemirskog broda GOCE sa odvojenim solar-nim panelima, uređajem za gradiometriju te usmernim krilcima, sistemom za stabilizaciju i kontrolu orijentacije i položaja i sl.



Istovremeno, skoro sve svemirske letilice imaju kontrolne sisteme, pri čemu su najvažniji sistem za određivanje položaja u prostoru i promenu parametara orbite; time su stvoreni dodatni uslovi za poremećaje orbite, koji su nekad svrsishodni, tj, namerni orbitalni manevri, a nekada su nusprodukt manevra položaja i orijentacije, gubitka mase (isticanje goriva, "odbacivanje" nekorisnog tereta i sl.).

Sve to nas podseća na davnu 1961. godinu, kada se čovek prvi put otisnuo u kosmos. Evo nekoliko interesantnih slika iz "istorije" prvog čovekovog leta u kosmos.





Slika 1.1.3.

Jurij Aleksejevič Gagarin (27 godina) neposredno pre ukrcavanja na "Vostok"

Mogli bismo da ograničimo našu analizu na jednostavnije slučajeve pasivnih satelita ili satelita jednostavnih po funkciji i obliku. Ipak, iskustvo nas je naučilo da je bolje **prognozirati** potrebu za nekim informacijama, nego čekati da se ona nametne iz eksploatacije takvih, jednostavnih slučajeva. Ozbiljna prepreka izgradnji i lansiranju koplikovanih i zahtevnijih veštačkih objekata jeste eksponencijalni rast cene sa rastom zahteva i složenosti. U najboljem slučaju će svaka svemirska misija biti projektovana kao kompromis između različitih namena, gde će astronomske i geodetske primene biti samo jedna od mogućnosti.

U pokušaju da ponudimo osnovne ideje o najznačajnijim negravitacionim poremećajima i matematičkim metodama za račun njihovih uticaja na orbite, cilj nije da damo iscrpne analize svakog pojedinačnog problema, već da koristimo tipične primere da bi čitalac dobio osećaj za važnost raznih problema, koje treba rešiti da bi se postigao zadati nivo tačnosti određivanja orbite i povratno dobijanje značajnih astronomskih i geofizičkih parametara.

§ 2. Matematički aparat: Skalarnе i vektorske veličine. Ne ulazeći u detalje prvenstva u nastanku, kada su u pitanju matematičke i prirodne nauke, ovde ćemo se držati koncepta po kojem je matematika baza i fizike i srodnih prirodnih i primenjenih nauka. Objekti matematike su *matematičke veličine*, kao poseban supstrat veličina uopšte, fizičkih veličina posebno. U tom smislu matematičke veličine koje se koriste za opis kretanja nekog objekta, manje ili više konkretnog, dele se u dve kategorije: *skalare i vektore*.

Skalarnе veličine su one koje se mogu izraziti potpuno samo **intenzitetom**, odnosno jednim brojem i odgovarajućom jedinicom. Takve veličine su na primer: masa, zapremina, rad sile itd.

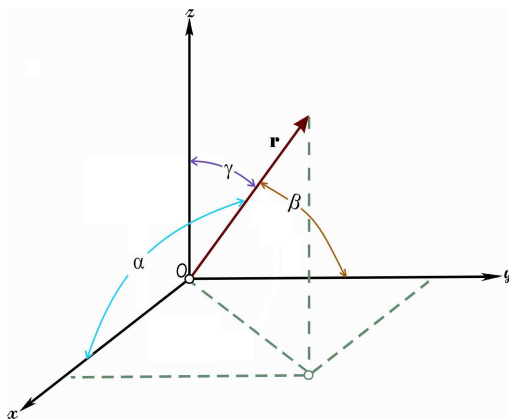
Vektorske veličine su **orijentisane veličine**. Za potpuno predstavljanje vektorskih veličina potrebno je, osim poznavanja brojne vrednosti (intenziteta), znati još i **pravac i smer**. Takve veličine su na primer: brzina, ubrzanje, sila, moment sile i dr. U daljem tekstu vektorske veličine ćemo obeležavati strelicom iznad odgovarajućih slova.

Početak vektora posmatran kao "napadna" tačka vektora može biti proizvoljno uzet, a može biti određen u izvesnom domenu ili potpuno u čitavom prostoru pa prema tome vektore delimo na:

- **Slobodne vektore**, čija se napadna tačka može proizvoljno izabrati u prostoru pri čemu intenzitet, pravac i smer vektora ostaju nepromenjeni. Slobodni vektor se može paralelno pomerati, a da ne dođe do promene. Kao primer slobodnog vektora uzimamo brzinu translatorsnog kretanja tela. Svaka tačka tela ima istu brzinu pri translatorsnom kretanju pa zato možemo odabrati bilo koju za napadnu tačku slobodnog vektora.
- **Linijske vektore** čija se napadna tačka može pomerati po liniji koja se poklapa sa pravcem vektora. Primer linijskog vektora je vektor sile koja deluje na čvrsto telo. Pomeranje napadne tačke sile duž prave koja se poklapa sa pravcem sile ne remeti prvobitno kretanje.

- **Vezane vektore** čija je napadna tačka određena pa se on ne može pomerati, jer će u različitim tačkama biti drugačiji. Primer vezanog vektora je vektor polja gde u svakoj tački polja imamo različit vektor i svaki taj vektor predstavlja fizičku veličinu datog polja.

Grafički, vektore predstavljamo uvek u odnosu na neki koordinatni sistem. Kada se koriste pravouglo ose x , y , z usvaja se desno-orijentisani koordinatni sistem (slika 2.1).



Slika 1.2.1. - Desno-orijentisani koordinatni sistem

2.1. Osobine vektora.

Proizvod vektora i skalara

Množenjem vektora \vec{a} i skalara k dobija se novi vektor \vec{b} istog pravca i uvećane brojne vrednosti za brojnu vrednost skalara. Što se tiče smera, vektor \vec{b} ima isti smer kao i vektor \vec{a} ako je $k > 0$, a suprotan smer ako je $k < 0$. Važe sledeća pravila:

$$\begin{aligned} k \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot k \\ k(m \cdot \vec{a}) &= (k \cdot m)\vec{a} = m(k \cdot \vec{a}) \\ (k + m)\vec{a} &= k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

gde su k i m skalarne veličine.

Jedinični vektor ili ort vektora

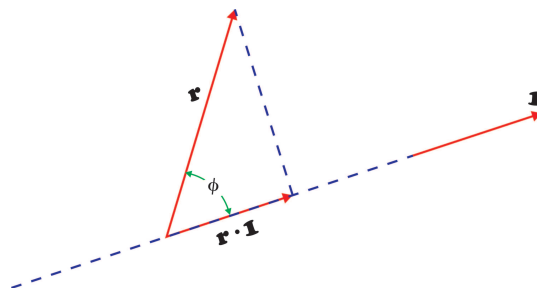
Vektor čiji je intenzitet (apsolutna vrednost) jednak jedinici naziva se *jedinični vektor*. Svaki vektor se može prikazati kao proizvod svog inteziteta i jediničnog vektora, pri čemu jedinični vektor ima isti pravac i smer kao dati vektor. Jedinični vektor ili *ort* se obično označava isto kao i njegov vektor ali sa indeksom nula. ❀

Ort nekog vektora jednak je količniku vektora i njegove apsolutne vrednosti, tj. njegovog intenziteta.

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.2.2)$$

pri čemu je $|\vec{r}_0| = 1$ i

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$$



Slika 1.2.2. Komponenta \vec{r} duž \vec{r}_0 – skalarni proizvod

Sabiranje i oduzimanje vektora

Imamo vektor \vec{a} i vektor \vec{b} . Sabiranje se vrši tako što se na kraj (ili vrh) vektora \vec{a} paralelnim prenošenjem "doveđe" početak vektora \vec{b} . Zbir je takođe vektor koji počinje u početku vektora \vec{a} i završava se na završetku prenetog vektora \vec{b} . Ako je dat ugao γ koji zaklapaju pravci vektora \vec{a} i \vec{b} , onda se brojna vrednost vektora \vec{c} dobija iz kosinusne teoreme:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \quad (1.2.3)$$

Međutim, često je podesnije da se konstruiše paralelogram na vektorima kao stranama. Tada dijagonala paralelograma daje rezultatni vektor \vec{c} . Na osnovu ovog pravila za sabiranje vektora vrši se slaganje vektora.

Kad se radi o sabiranju ili slaganju većeg broja vektora postupa se na isti način, pri čemu se uvek na kraj prethodnog vektora nadovezuje početak sledećeg. Poslednja strana koja zatvara poligon je vektorski zbir svih vektora tj. **rezultantni vektor**. Za zbir vektora važi:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} && \text{komutativnost} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) && \text{asocijativnost} \\ k(\vec{a} + \vec{b}) &= k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} && \text{distributivnost} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

gde je k skalarna konstanta.

Oduzimanje vektora vrši se na taj način što se razlika dva vektora dobija kao zbir prvog vektora i vektora koji je suprotan drugom vektoru, odnosno

$$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (1.2.5)$$

Razlaganje vektora

Svaki vektor se može razložiti na dve ili više komponentata (vektora na koji se dati vektor razlaže) u bilo kojim pravcima. Na osnovu pravila o sabiranju vektora proizilazi da je tako razloženi vektor u stvari vektorski zbir svojih komponentata. Pravci komponentata uglavnom zavise od prirode i zahteva problema koji se posmatra. Naročiti značaj ima razlaganje vektora na dve ili tri komponente u pravcima osa koordinatnog sistema (vektor sile, vektor brzine, vektor položaja...).

Na primer:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \quad (1.2.6)$$

gde su: $a_x \cdot \vec{i}$ komponenta vektora \vec{a} u pravcu x-ose, $a_y \cdot \vec{j}$ komponenta vektora \vec{a} u pravcu y-ose i $a_z \cdot \vec{k}$ komponenta vektora \vec{a} u pravcu z-ose Dekartovog koordinatnog sistema; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} su jedinični vektori u pravcima x-ose, y-ose i z-ose respektivno.

Komponente vektora su vektorske veličine za razliku od projekcija vektora na ose koordinatnog sistema (a_x, a_y, a_z) koje su skalarne veličine i dobijaju se iz izraza:

$$\begin{aligned} a_x &= a \cdot \cos \alpha \\ a_y &= a \cdot \cos \beta \\ a_z &= a \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

gde su $|\vec{a}| = a$ i α , β , γ uglovi koje vektor \vec{a} zaklapa sa osama x , y , z redom. Brojna vrednost ili intenzitet vektora \vec{a} se dobija iz

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2.8)$$

2.2. Skalarni i vektorski proizvod dva vektora.

Skalarni proizvod, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Definicija 1. Skalarni ili unutrašnji proizvod dva vektora je proizvod apsolutne vrednosti (intenziteta) jednog vektora i projekcije drugog vektora

ili

Definicija 2. Skalarni proizvod dva vektora je proizvod njihovih apsolutnih vrednosti (intenziteta) i kosinusa ugla između tih vektora.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.2.9)$$

Iz ovoga se može videti da je skalarni proizvod dva međusobno upravna vektora jednak nuli (jer je $\cos 90^\circ = 0$). Dakle, dva vektora su ortogonalna ako i samo ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli pri čemu dati vektori nisu nula vektori (vektori čija je dužina jednaka nuli). Ovo je vrlo jednostavan način da se proverii ortogonalnost vektora.

Rezultat skalarnog proizvoda je skalarna veličina pa se zato i naziva *skalarnim*. U daljem tekstu skalarni proizvod ćemo obeležavati sa **vektor-tačka-vektor**. Ako su nam vektori \vec{a} i \vec{b} poznati možemo odrediti ugao između njih: ❀

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) \quad (1.2.10)$$

(Na primer: Skalarni proizvod sile i vektora položaja određuje skalarnu veličinu koja se zove mehanički rad).

Za skalarni proizvod vektora važe sledeća pravila:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} && \text{komutativnost} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} && \text{distributivnost} \\ (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = k \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} &= (k \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} && \text{asocijativnost} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

Možemo dodati još i da je $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$.

Analitički oblik skalarnog proizvoda dva vektora

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

dat je sa:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

jer zbog ortogonalnosti jediničnih vektora nenulti su samo proizvodi

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Odavde je jasno da je za svaki vektor \vec{a}

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2.13)$$

Vektorski proizvod, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$

U trodimenzionalnom Euklidskom prostoru* sa desno orijentisanim koordinatnim sistemom, $\vec{a} \times \vec{b}$ se definiše kao vektor \vec{c} koji je **upravan** na oba vektora (\vec{a} i \vec{b}), ima smer koji je određen pravilom desne ruke i čiji je intenzitet (brojna vrednost) jednak površini paralelograma koga obrazuju vektori \vec{a} i \vec{b} .

* metrički prostor u kome su uspostavljene relacije između rastojanja i uglova

Definiciona formula za vektorski proizvod je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \cdot \vec{n} \quad (1.2.14)$$

gde je θ ugao između \vec{a} i \vec{b}

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ,$$

$|\vec{a}| = a$ i $|\vec{b}| = b$ su intenziteti vektora \vec{a} i \vec{b} i \vec{n} je **jedinični** vektor upravan na ravan u kojoj se nalaze \vec{a} i \vec{b} . Ako je vektorski proizvod $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ znači da je ugao θ koji zaklapaju vektori ili 0° ili 180° te su, dakle, ne-nulti vektori \vec{a} i \vec{b} kolinearni (na istoj pravoj ili paralelni).

Za vektorski proizvod kažemo da je *antikomutativan* jer je

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.2.15)$$

Za rotaciju kažemo da je pozitivna kad se ide od vektora \vec{a} ka vektoru \vec{b} u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu gledano sa vrha vektora \vec{n} . Za kretanje u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu kaže se još da je *direktno*, a u smeru kretanja kazaljke, da je *retrogradno*. ❀

Važi još i:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) && \text{distributivnost} \\ (r\vec{a}) \times \vec{b} &= \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Intenzitet vektorskog proizvoda je ❀

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta \quad (1.2.17)$$

Neka su dati vektori \vec{a} i \vec{b}

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

i pošto jedinični vektori \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} zadovoljavaju sledeće jednačine:

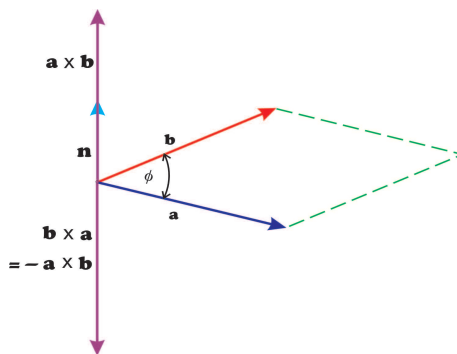
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (1.2.18)$$

onda je *analitički oblik* vektorskog proizvoda

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k} \quad (1.2.19)$$

Na osnovu ovih pravila, koordinate vektorskog proizvoda dva vektora lako računamo, bez potrebe da odredimo bilo koji ugao.

Vektorski proizvod se može prikazati i *determinantom*



Slika 1.2.3.

Vektorski proizvod dva vektora je vektor normalan na ravan koju obrazuju ta dva vektora

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.2.19a)$$

2.3. Mešoviti proizvodi vektora.

Najčešće se sreću i koriste sledeći slučajevi mešovitih proizvoda vektora:

Prvi slučaj

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.2.20)$$

Kako vektorski proizvod skalara i vektora nije definisan (?), zagrade se mogu izostaviti jer se skalarni proizvod ne može izvršiti prvi. Geometrijski, ovaj *skalarni* mešoviti proizvod predstavlja zapreminu paralelopipeda čije su stranice dati vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} . *Ciklična permutacija* tri vektora ne menja njihov mešoviti proizvod (gore definisan) ali je zato

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}. \quad (1.2.21)$$

Ukoliko se ne menja redosled vektora, mešoviti proizvod se ne menja ako znaci vektorskog i skalarnog množenja zamene mesta

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (1.2.22)$$

Ako je skalarni mešoviti proizvod vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} jednak nuli, tada su ti vektori *koplanarni*, tj. paralelni istoj ravni ili se nalaze u istoj ravni.

Za vektore

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \\ \vec{c} &= c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \end{aligned}$$

analitički oblik mešovitog proizvoda dat je sa

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \left[(b_y c_z - b_z c_y) \vec{i} - (b_x c_z - b_z c_x) \vec{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \vec{k} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.2.23)$$

Drugi slučaj

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.2.24)$$

Geometrijski, rezultat ovog mešovitog proizvoda je vektor koji je normalan i na vektor proizvoda $\vec{b} \times \vec{c}$ i na vektor \vec{a} , što znači da se nalazi u ravni vektora \vec{b} i \vec{c} . Treba istaći i da je

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

tj.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (1.2.25)$$

Ove formule su veoma korisne i kada se radi sa *diferencijalnim operatorima* ❀

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{f} = \text{grad}(\text{div} \vec{f}) - \Delta \vec{f} \quad (1.2.26)$$

gde je $\Delta = \nabla^2$ Laplasov operator, *laplasijan*. ❀

2.4 Diferencijalni operatori – gradijent, divergencija, rotor i laplasijan

Gradijent

Gradijent neke skalarne funkcije f je vektor čije su koordinate *parcijalni izvodi* ❀ funkcije f . Pošto forma gradijenta zavisi od izabranog koordinatnog sistema, predstavimo ga u odnosu na pravougle Dekartove koordinate, polarno-cilindarske i sferne koordinate.

U odnosu na Dekartove koordinate gradijent skalarne funkcije $f(x, y, z)$ je:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (1.2.27)$$

pri čemu je operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.2.28)$$

U odnosu na polarno-cilindarske koordinate

$$\nabla f(\rho, \phi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.2.29)$$

gde je ϕ azimutni ugao, a e_ρ , e_ϕ i e_z su jedinični vektori.

U odnosu na sferne koordinate

$$\nabla f(r, \phi, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (1.2.30)$$

gde je ϕ azimutni ugao – *azimut*, a θ zenitni ugao – *zenitna daljina*. ❀

Divergencija

Skalarnu veličinu koja se dobija skalarnim množenjem gradijenta i vektora zovemo *divergencija* ❀

$$\nabla \cdot \vec{\vartheta} = \text{div} \vec{\vartheta}. \quad (1.2.31)$$

U odnosu na Dekartove koordinate vektor $\vec{\vartheta}$ je

$$\vec{\vartheta} = \vartheta_x \vec{i} + \vartheta_y \vec{j} + \vartheta_z \vec{k}.$$

Tada imamo:

$$\nabla \cdot \vec{\vartheta} = \text{div } \vec{\vartheta}$$

tj.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\vartheta} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (\vartheta_x \vec{i} + \vartheta_y \vec{j} + \vartheta_z \vec{k}) \\ \nabla \cdot \vec{\vartheta} &= \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Rotor

✿ Rotor se izračunava iz vektorskog proizvoda gradijenta i nekog vektora, recimo \vec{F}

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} \quad (1.2.33)$$

tj.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vartheta_x & \vartheta_y & \vartheta_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial \vartheta_z}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial z} - \frac{\partial \vartheta_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right) \quad (1.2.34)$$

Na primer, ako je *rot* neke sile \vec{F} jednak nuli znači da rad te sile ne zavisi od oblika putanje i da je ta sila potencijalna, tj. ako je

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \text{grad } U \quad (1.2.35)$$

✿ gde je U funkcija sile.

Laplasov operator – laplasijan

Neka je T neka veličina; divergencijom gradijenta,

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$

tj.

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \Delta T \quad (1.2.36)$$

✿ dobija se tzv. *Laplasov operator* ili *laplasijan* od T . Laplasijan je skalarni diferencijalni operator.

✿ **§ 3. Analitički aparat: generalisane koordinate.** Položaj neke tačke u prostoru se određuje u odnosu na jednu unapred izabranu tačku O (pol, početak) pomoću *vektora položaja*, \vec{r} . Vektor položaja je vektor čiji se početak nalazi u polu, a kraj u posmatranoj tački.

U odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata ortogonalne projekcije vektora položaja na ose ovog koordinatnog sistema poklapaju se sa koordinatama tačke (x, y, z) , te je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.3.1)$$

gde su $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ i $z\vec{k}$ komponente vektora položaja. ❀

Međutim, u prostoru u kome posmatramo kretanje materijalnih objekata mogu se definisati neka tri međusobno nezavisna parametra (q^1, q^2, q^3) koje ćemo označiti sa q^i , $(i = 1, 2, 3)$. Kada se parametrima q^i daju sve moguće vrednosti i kad svakoj tački odgovara jedan i samo jedan uređeni skup od tri broja (q^1, q^2, q^3) i obrnuto, svakom skupu od tri broja (q^1, q^2, q^3) odgovara jedna i samo jedna tačka u prostoru, parametri q^i se nazivaju *opšte ili generalisane koordinate* tačke. ❀

Sada je vektor položaja vektorska funkcija generalisanih koordinata tačke

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3) . \quad (1.3.2)$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine, koje dobijamo projektovanjem kraja vektora položaja na ose Dekartovog koordinatnog sistema:

$$x = x(q^1, q^2, q^3); \quad y = y(q^1, q^2, q^3); \quad z = z(q^1, q^2, q^3) . \quad (1.3.3)$$

Iz zahteva za obostranom jednoznačnošću veze između tačaka u prostoru i koordinata q^i , $(i = 1, 2, 3)$ mora biti i

$$q^i = q^i(x, y, z) . \quad (1.3.4)$$

Jednačine 1.3.3 i 1.3.4 predstavljaju jednačine *koordinatne transformacije*. ❀

Da bi važila navedena uzajamno jednoznačna korespondencija potreban uslov je

$$\det \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^i} \right| \neq 0$$

tj.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x} & \frac{\partial q^1}{\partial y} & \frac{\partial q^1}{\partial z} \\ \frac{\partial q^2}{\partial x} & \frac{\partial q^2}{\partial y} & \frac{\partial q^2}{\partial z} \\ \frac{\partial q^3}{\partial x} & \frac{\partial q^3}{\partial y} & \frac{\partial q^3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 . \quad (1.3.5)$$

Bez obzira na kvalitativni značaj generalisanih koordinata, iskustvo određivanja položaja tačke mahom je zasnovano na korišćenju ortogonalnih koordinatnih sistema.

U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu je $q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$, u polarno-cilindarskom sistemu krivolinijskih koordinata je $q^1 = \rho$, $q^2 = \phi$, $q^3 = z$ i u sfernom sistemu krivolinijskih koordinata je $q^1 = r$, $q^2 = \phi$, $q^3 = \theta$, pri čemu

su veze sa Dekartovim pravouglim koordinatama za poslednja dva sistema izražene redom sa:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi, & x &= r \cos \theta \cos \phi, \\y &= \rho \sin \phi, & y &= r \cos \theta \sin \phi, \\z &= z, & z &= r \sin \theta.\end{aligned}$$

Jasno je da u sistemu generalisanih koordinata neki vektor \vec{u} možemo napisati u obliku:

$$\vec{u} = u^1 \vec{g}_1 + u^2 \vec{g}_2 + u^3 \vec{g}_3 \quad (1.3.6)$$

* gde su u^1, u^2 i u^3 – koordinate (komponente?) vektora \vec{u} , a \vec{g}_1, \vec{g}_2 i \vec{g}_3 – osnovni ili bazni vektori sistema generalisanih koordinata.

U opštem slučaju osnovni (bazni) vektori nisu jedinični vektori i dobijamo ih kada se vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3)$ diferencira po generalisanim koordinatama. Ako koordinate osnovnih vektora izrazimo u odnosu na Dekartove pravougle koordinate dobijamo

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x}{\partial q^i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q^i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q^i} \vec{k} \quad (1.3.7)$$

Isto tako,

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \sum_{i=1}^3 \vec{g}_i \frac{\partial q^i}{\partial x} = \frac{\partial q^1}{\partial x} \vec{g}_1 + \frac{\partial q^2}{\partial x} \vec{g}_2 + \frac{\partial q^3}{\partial x} \vec{g}_3, \\ \vec{j} &= \sum_{i=1}^3 \vec{g}_i \frac{\partial q^i}{\partial y}, & \vec{k} &= \sum_{i=1}^3 \vec{g}_i \frac{\partial q^i}{\partial z}\end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Polazeći od jednačine (1.3.1) vektor položaja neke tačke $M(q^1, q^2, q^3)$ dat je sa:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \left[x(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial x} + y(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial y} + z(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial z} \right] \vec{g}_i \quad (1.3.9)$$

$\vec{r} = r^i \vec{g}_i$, gde je

$$r^i = \left[x(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial x} + y(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial y} + z(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial z} \right].$$

Veličine r^i predstavljaju koordinate vektora položaja u odnosu na sistem generalisanih koordinata q^i .

Intenzitete osnovnih vektora određujemo obrascima:

$$|\vec{g}_i| = A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i} \right)^2}, \quad i=1,2,3. \quad (1.3.10)$$

Ako se sa \vec{t}_i označe jedinični vektori u pravcima osnovnih vektora,

$$\vec{t}_i = \frac{\vec{g}_i}{|\vec{g}_i|} \quad (1.3.11)$$

biće, s obzirom na (1.3.10)

$$\vec{g}_i = |\vec{g}_i| \vec{t}_i = A_i \vec{t}_i. \quad (1.3.12)$$

Kako su vektori \vec{g}_i funkcije položaja, to u opštem slučaju ti vektori u svakoj tački prostora obrazuju neki trijedar generalisanih koordinata – *vektorsku bazu* za generalisane koordinate q^i – u kome vektori niti su stalnog intenziteta niti obrazuju u svim tačkama prostora stalno iste uglove, već se i po intenzitetu i po smeru menjaju neprekidno od tačke do tačke prostora. Vektori \vec{g}_i su u svakoj tački prostora tangentni na koordinatne linije u toj tački, a ose čiji se pravci i smerovi poklapaju sa pravcima i smerovima vektora \vec{g}_i u nekoj tački prostora nazivaju se *ose generalisanih koordinata* u posmatranoj tački.

U Dekartovom koordinatnom sistemu osnovni vektori su

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial x}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i}, \quad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \vec{j}, \quad \vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \vec{k} \quad (1.3.13)$$

U ovom slučaju su osnovni vektori jedinični ortogonalni vektori u pravcu koordinatnih osa.

Međutim, osnovni vektori nisu uvek jedinični i nemaju konstantan pravac (kao što je već objašnjeno ranije). Tako, u polarno-cilindarskom koordinatnom sistemu je

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \phi \cdot \vec{i} + \rho \sin \phi \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}), \quad \vec{g}_1 = \cos \phi \cdot \vec{i} + \sin \phi \cdot \vec{j} \Rightarrow |\vec{g}_1| = A_1 = 1 \quad (1.3.14)$$

Osnovni vektor \vec{g}_1 možemo napisati i u obliku $\vec{g}_1 = \vec{\rho}_0$, gde je $\vec{\rho}_0$ jedinični vektor u pravcu radijalne ose.

Dalje imamo,

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \cdot \vec{i} + \rho \cos \phi \cdot \vec{j} \Rightarrow |\vec{g}_2| = A_2 = \rho \quad (1.3.15)$$

Osnovni vektor \vec{g}_2 možemo napisati i u obliku $\vec{g}_2 = \rho \vec{\phi}_0$, gde je $\vec{\phi}_0$ jedinični vektor u ravni ugla ϕ ortogonalan na $\vec{\rho}_0$.

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \Rightarrow |\vec{g}_3| = A_3 = 1 \quad (1.3.16)$$

U sfernom koordinatnom sistemu je

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta \cos \phi \cdot \vec{i} + r \cos \theta \sin \phi \cdot \vec{j} + r \sin \theta \cdot \vec{k}) \Rightarrow \vec{g}_1 = \vec{r}_0, \quad (1.3.17)$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \cos \theta \sin \phi \cdot \vec{i} + r \cos \theta \cos \phi \cdot \vec{j} = r \cos \theta \cdot \vec{\phi}_0, \quad (1.3.18)$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = r \cdot \vec{\theta}_0, \quad (1.3.19)$$

$$|\vec{g}_1| = A_1 = 1, \quad |\vec{g}_2| = A_2 = r \cos \theta, \quad |\vec{g}_3| = A_3 = r \quad (1.3.20)$$

gde su \vec{r}_0 , $\vec{\phi}_0$, $\vec{\theta}_0$ ortogonalni vektori.

U sva tri slučaja je

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = 0, \quad \text{za } i \neq j, \quad (1.3.21)$$

što je osobina ortogonalnih koordinatnih sistema.

§ 4. Veze; klasifikacija veza; materijalna tačka. * Razmatrajući probleme kretanja tela koja se mogu aproksimirati materijalnim tačkom male brzine (tj. nema značajnih relativističkih efekata) možemo da kažemo da će se materijalna tačka, na koju deluje neka sila \vec{F} (koja može biti i rezultanta više sila) kretati u prostoru isključivo na način opisan drugim Njutnovim zakonom, odnosno njeno kretanje je određeno jedino silom i početnim uslovima. Za materijalnu tačku ❀ čije kretanje nije podvrgnuto nikakvim drugim uslovima kaže se da je *slobodna* u celom prostoru ili bar u onom delu prostora u kome se kretanje posmatra.

4.1. Veze i njihova klasifikacija. Međutim, ako se kretanje tačke ograniči ❀ naknadnim uslovima tada je tačka *neslobodna* ili *vezana*. Svako ograničenje slobode ❀ kretanja tačke zove se *veza* ili *prinuda*, a kretanje je *neslobodno* ili *prinudno*.

Prema prirodi prinude, veze se dele na dve vrste:

❀ Veze koje ograničavaju položaj pokretne tačke (pri čemu ograničenje brzine proističe iz uslova da tačka ne može zauzimati proizvoljne položaje) zovu se *geometrijske, konačne ili holonomne veze*. Za ove veze kažemo da prisiljavaju tačku da se kreće po nekoj površi ili liniji (zato "geometrijske") i da su konačne, cele što znači da nisu iskazane diferencijalnim relacijama.

Druga vrsta veza ograničava samo brzine, tako da koordinate brzine moraju zadovoljavati izvesne uslove iskazane pomoću jedne ili više relacija oblika

$$\phi(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0.$$

❀ Takve veze su *diferencijalne, kinematičke ili neholonomne*. Ove veze su diferencijalne jer su određene diferencijalnim jednačinama, kinematičke jer ograničavaju brzinu tačke i neholonomne jer nisu holonomne.

Pored podele na konačne i diferencijalne, važna je i podela veza prema tome da li ❀ su *veze promenljive* u toku vremena ili ne.

❀ Veza koja se ne menja u toku vremena ili je nepokretna naziva se *skleronomna ili stacionarna*, za razliku od *reonomnih ili nestacionarnih* veza koje se menjaju sa vremenom. Relacije koje određuju reonomne veze uvek sadrže i vreme, tj. one su, na primer, oblika $f(x, y, z; t) = 0$ odnosno $\phi(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0$.

* geometrijska tačka kojoj se pripisuje celokupna masa tela

Veze mogu da ograničavaju kretanje tačke samo sa jedne strane i da je prinuđuju da se stalno nalazi u jednoj oblasti prostora u kojoj se kreće kao slobodna. Takve veze se izražavaju nejednakostima oblika $f(x, y, z) \geq 0$ ili $\phi(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \geq 0$.

Za ovakve veze koje se izražavaju nejednakostima kažemo da su *jednostrane* (u-
nilateralne) ili *nezadržavajuće* za razliku od veza koje se izražavaju jednačinama
za koje kažemo da su *zadržavajuće*, *dvostrane* (*bilateralne*). ❀

Treba pomenuti i tzv. *semiholonomne* veze koje imaju oblik neholonomnih veza ❀
ali su integrabilne i predstavljaju posledicu holonomne veze.

Na kraju, prema otporu veze mogu biti *idealne* i *neidealne*. Kod idealnih veza ❀
celokupna sila reakcije pada u pravac gradijenta (normale) površi, tj. $\vec{R}_t = 0$, i
takva površ je glatka. Neidealne veze, pored komponente u pravcu gradijenta,
imaju i komponentu upravnu na gradijent i to su *veze sa trenjem* – hrapave ❀
površine i linije.

Pošto se stvarno kretanje vrši u saglasnosti sa vezama, uticaj veza na kretanje može
se predstaviti silom tako da drugi Njutnov zakon ostane u važnosti i da stvarna tra-
jektorija bude linija koja iz tog zakona proističe. Takva sila se zove *reakcija veze* ili ❀
pasivna sila za razliku od aktivne sile, \vec{F} pod čijim se uticajem tačka kreće. Uloga
sile reakcije \vec{R} je u tome da rezultujuća sila $\vec{F} + \vec{R}$ bude ona pod čijim dejstvom će
stvarno kretanje materijalne tačke biti u saglasnosti sa datim vezama. To možemo
predstaviti vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{R} \quad (1.4.1)$$

ili u skalarnom obliku

$$m\ddot{x} = F_x + R_x \quad m\ddot{y} = F_y + R_y \quad m\ddot{z} = F_z + R_z \quad (1.4.2)$$

Kad postoji samo jedna konačna zadržavajuća veza, ili reonomna $f(q^1, q^2, q^3; t) = 0$,
ili skleronomna, $f(q^1, q^2, q^3) = 0$, kažemo da se uočena materijalna tačka kreće po
površi (u prvom slučaju po pokretnoj, a u drugom slučaju po nepokretnoj).

U Dekartovim pravouglim koordinatama jednačina takve veze biće

$$f(x, y, z; t) = 0 \quad \text{odnosno} \quad f(x, y, z) = 0 \quad (1.4.3)$$

Holonomne veze posredno predstavljaju ograničenje za brzinu i ubrzanje pokretne
tačke. Ako u nekom trenutku t koordinate x, y, z pokretne tačke zadovoljavaju
jednačinu bilateralne (zadržavajuće) veze onda i u trenutku $t + \Delta t$ koordinate novog
položaja tačke moraju da zadovoljavaju tu istu jednačinu

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}; t + \Delta t) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z; t + \Delta t) = 0$$

Kako je kretanje neprekidno to su i $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, kao konačne
jednačine kretanja, neprekidne funkcije vremena pa za mali priraštaj Δt i priraštaji
koordinata $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ moraju biti mali. Za dovoljno malo Δt se gornja relacija
može predstaviti pomoću konvergentnog Tejlorovog reda u kome se smeju zanemar-
iti članovi koji sadrže priraštaje koordinata i vremena na stepenima višim od prvog
tako da imamo:

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}; t + \Delta t) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0$$

Ako se sada ova relacija podeli sa Δt i pusti da $\Delta t \rightarrow 0$ dobiće se u opštem obliku za reonomnu vezu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1.4.4)$$

Parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, i $\frac{\partial f}{\partial z}$ su koordinate gradijenta* skalarne funkcije f , a \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} su koordinate vektora \vec{V} brzine tačke pa je uslov za brzinu koji nameće konačna veza

$$\dot{f} = \text{grad } f \cdot \vec{V} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1.4.5)$$

Ovaj uslov predstavlja ograničenje samo za komponentu brzine u pravcu normale na površ, dok komponenta u tangennoj ravni nije ograničena.

U slučaju stacionarne veze ($\partial f / \partial t = 0$) uslov za brzinu postaje

$$\text{grad } f \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.4.6)$$

što znači da brzina pokretne tačke mora stalno da se nalazi u tangennoj ravni površi $f = 0$, jer je vektor $\text{grad } f$ upravan na površ u uočenoj tački.

Na sličan način dolazimo i do uslova za ubrzanje pokretne tačke pri holonomnoj nestacionarnoj vezi, tj. imamo

$$f(x, y, z; t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Dalje,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + D_2 f = 0 \quad (1.4.7)$$

gde je

$$\begin{aligned} D_2 f = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \dot{x} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Na osnovu svega ovoga možemo napisati uslov za ubrzanje materijalne tačke koja se kreće po površi (inače ovaj uslov proističe iz jednačine veze):

$$\text{grad } f \cdot \vec{W} + D_2 f = 0 \quad (1.4.9)$$

gde su \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} koordinate vektora ubrzanja \vec{W} tačke. Ovaj uslov za ubrzanje ograničava samo komponentu ubrzanja u pravcu normale na površ. Treba napomenuti da i u slučaju skleronomne veze postoji i treba da postoji normalno ubrzanje.

* 2.4. Diferencijalni operatori

Kako pri kretanju neslobodne tačke važi vektorska diferencijalna jednačina (1.4.1), zamenom $\vec{W} = (\vec{F} + \vec{R})/m$ u (1.4.9) dobijamo

$$(\vec{F} + \vec{R}) \cdot \text{grad } f + mD_2f = 0 \quad (1.4.10)$$

i iz ove jednačine možemo odrediti reakciju veze \vec{R} tako da ubrzanje bude moguće i saglasno sa vezom. Iz (1.4.10) proističe

$$\vec{R} \cdot \text{grad } f = -\vec{F} \cdot \text{grad } f - mD_2f \quad (1.4.11)$$

što ne daje jednoznačna rešenja pa silu reakcije rastavljamo na komponente:

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_t.$$

Sada imamo

$$\vec{R}_N \cdot \text{grad } f = -(\vec{F} \cdot \text{grad } f + mD_2f) \quad (1.4.12)$$

Komponenta \vec{R}_N u pravcu normale na površ je kolinearna sa $\text{grad } f$, pa je

$$\vec{R}_N = \lambda \cdot \text{grad } f$$

gde je λ skalarni *množilac* – *multiplikator veze*

$$\lambda = -\frac{1}{|\text{grad } f|^2} (\vec{F} \cdot \text{grad } f + mD_2f) \quad (1.4.13)$$

Komponenta \vec{R}_t nije određena vezom, pa se određuje nekim dopunskim uslovom veze (vrsta materijala veze, obrada...) i teorijski \vec{R}_t može da se tretira kao sila trenja.

Ukoliko je $\vec{R}_t = 0$ kažemo da je veza *idealna*, odnosno da je površ *glatka*; tada se ❀ celokupna sila reakcije određuje sa

$$\vec{R}_N = \lambda \cdot \text{grad } f \quad (1.4.14)$$

4.2. Materijalni sistem; veze.* Položaji i brzine tačaka materijalnog sistema mogu biti bez ikakvih ograničenja i tada se materijalne tačke m_i ($i = 1, 2 \dots N$) kreću slobodno u datom polju sila prema drugom Njutnovom zakonu. Za takav materijalni sistem kaže se da je *slobodan*. Pošto svakoj tački u prostoru odgovaraju tri koordinate položaja konfiguracija Σ slobodnog sistema određena je sa $3N$ nezavisnih *koordinata sistema*. Broj nezavisnih koordinata sistema $n = 3N$ je broj *stepeni* ❀ *slobode* tog sistema.

Međutim, položaji i brzine tačaka sistema mogu biti ograničeni izvesnim vezama kao i u slučaju jedne materijalne tačke, ali se na tome, ovde, više nećemo zadržavati.

* Skup materijalnih tačaka kojih može biti konačan broj (diskretan sistem) i može ih biti beskonačno mnogo (kontinuum)

§ 5. Nebeska tela kao materijalne tačke i materijalni sistemi. U ranijem tekstu već smo govorili o tome da se astronomija bavi izučavanjem nebeskih tela, nebeskih sistema, međusistemske sredine i kosmosa kao celine. Kada krenemo u izbor eksperimenata na osnovi kojih hoćemo da obavimo to izučavanje, po pravilu se opredeljujemo za vrstu matamatičkog i fizičkog modela za to izučavanje. U nebeskoj mehanici to su modeli diferencijalni i modeli integralni. O alatima kojima takvo modelovanje vršimo već smo govorili. Ovde ćemo se pozabaviti sa nekoliko stavova (teorema!) u takvom modelovanju.

Svaki član našeg, Sunčevog, planetenskog sistema predstavlja po jedan zasebni materijalni sistem. Zemlja, sa svojom hidrosferom i atmosferom, predstavlja takođe jedan takav sistem u kojem su zastupljena tri agregatna stanja materije.

Svaki (takav) materijalni sistem možemo predstaviti sa proizvoljno mnogo dovoljno sitnih delića da svaki takav delić možemo smatrati za materijalnu tačku. Time izučavanje datog sistema svodimo na izučavanje sistema materijalnih tačaka, za koji važe sledeća rasuđivanja.

Sve materijalne tačke tog sistema privlače se međusobno po Njutnovom zakonu i, istovremeno, bivaju privlačene, po istom zakonu, i od delića ostalih članova planetenskog sistema.

Ove sile ubrajamo u spoljne sile uočenog materijalnog sistema, dok se privlačne sile između pojedinih delova uočenog nebeskog tela smatraju njegovim unutrašnjim silama. Pored tih unutrašnjih, gravitacionih sila, deluju u uočenom materijalnom sistemu i druge unutrašnje sile: molekularne sile, naponi, trenje i sve ostale sile koje odgovaraju agregatnom stanju u posmatranom delu uočenog materijalnog sistema.

Držeći se Njutnove aksiomatike, imamo da se sve te sile pokoravaju principu akcije i reakcije, tj. sila \vec{p}_{ik} kojom materijalna tačka m_k deluje na drugu materijalnu tačku m_i mora biti jednaka po intenzitetu i pravcu, ali protivnog smera, sili \vec{p}_{ki} kojom materijalna tačka m_i deluje na tačku m_k ; obe te sile deluju u istoj pravoj, onoj koja spaja uočene dve tačke. Te osobine uočenih dveju sila izražene su matematički vektorskom jednačinom:

$$\vec{p}_{ik} + \vec{p}_{ki} = 0. \quad (1.5.1)$$

Matematički izraz koji pokazuje da obe sile deluju po istoj pravoj dobijamo iz sledećeg razmatranja. Neka je \vec{R}_i vektor položaja mase m_i , a \vec{R}_k vektor položaja mase m_k u odnosu na proizvoljnu napadnu tačku; imamo da je navedeni uslov izražen vektorskom jednačinom

$$\vec{R}_i \times \vec{p}_{ik} + \vec{R}_k \times \vec{p}_{ki} = 0. \quad (1.5.2)$$

Jednačine (1.5.1) i (1.5.2) omogućavaju da se izvedu sledeće teoreme.

§ 6. Teoreme o impulsima i momentima. Neka je m_i proizvoljna materijalna tačka uočenog sistema, a \vec{P}_i rezultanta svih spoljnih sila koje deluju na nju. Rezultanta svih unutrašnjih sila koje deluju na m_i predstavljena je, prema oznakama usvojenim u prošlom paragrafu, sa $\sum_k \vec{p}_{ik}$, pri čemu se naznačeni zbir odnosi na sve tačke sistema. Neka je $X_1-Y_1-Z_1$ nepomični koordinatni sistem sa početkom u tački O_1 i neka \vec{R}_i označava vektor položaja mase m_i u odnosu na

taj koordinatni sistem. Sada materijalnu tačku m_i , pod uticajem svih spoljnih i unutrašnjih sila koje na nju deluju, možemo smatrati slobodnom pa važi jednačina:

$$m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \vec{P}_i + \sum_k \vec{p}_{ik}, \quad (1.6.1)$$

gde t označava vreme.

Ako se naš materijalni sistem sastoji od prebrojivog, ali velikog broja tačaka n , onda se za svaku tačku mogu postaviti ovakve jednačine kretanja. Pri tome indeks i uzima vrednosti $1, 2, \dots, n$. Na taj način dolazimo do sistema od n jednačina:

$$m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \vec{P}_i + \sum_k \vec{p}_{ik}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6.2)$$

Ako obrazujemo zbir svih n jednačina oblika (1.6.2), na desnoj strani će se pojaviti dvostruki zbir, $\sum_i \sum_k \vec{p}_{ik}$, a u njemu sve kombinacije indeksa i i k po dva puta, jednom uz član \vec{p}_{ik} , a drugi put uz član \vec{p}_{ki} . Kako se ti dvojni članovi međusobno potiru zbog (1.5.1), to dolazimo do ove jednačine:

$$\sum m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \sum \vec{P}_i. \quad (1.6.3)$$

Pomnožimo li jednačine (1.6.2), jednu za drugom, vektorski sa $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$ i obrazujemo li zbir tako dobijenih jednačina, to ćemo, pošto se, kao i u prethodnom slučaju, dva i dva člana $[\vec{R}_i \times \vec{p}_{ik}]$ i $[\vec{R}_k \times \vec{p}_{ki}]$, zbog (1.5.2), međusobno potiru, dobiti sledeću jednačinu:

$$\sum m_i \left[\vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} \right] = \sum [\vec{R}_i \times \vec{P}_i]. \quad (1.6.4)$$

Vektorski zbir

$$\vec{K} = \sum \vec{P}_i \quad (1.6.5)$$

predstavlja rezultantu svih spoljnih sila koje deluju na uočeni materijalni sistem, a zbir vektorskih proizvoda

$$\vec{M}_1 = \sum [\vec{R}_i \times \vec{P}_i] \quad (1.6.6)$$

predstavlja obrtni moment (moment zaokretanja) spoljnih sila u odnosu na tačku O_1 . Zato je

$$\sum m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \vec{K} \quad (1.6.7)$$

$$\sum m_i \left[\vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} \right] = \vec{M}_1. \quad (1.6.8)$$

Izvod

$$\frac{d \vec{R}_i}{dt} = \vec{V}_i \quad (1.6.9)$$

predstavlja vektor brzine materijalne tačke m_i u nepokretnom koordinatnom sistemu pa je zato

$$\frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \frac{d \vec{V}_i}{dt}. \quad (1.6.10)$$

Kako je, sem toga,

$$\left[\vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\vec{R}_i \times \frac{d \vec{R}_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{R}_i \times \vec{V}_i],$$

to dobijamo umesto (1.6.7) i (1.6.8) ove dve jednačine:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{V}_i = \vec{K} \quad (1.6.11)$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i [\vec{R}_i \times \vec{V}_i] = \vec{M}_1. \quad (1.6.12)$$

Ove jednačine su matematički izraz teoreme o impulsima. Već smo ranije rekli da zbir $\sum m_i \vec{V}_i$ predstavlja celokupni impuls ili količinu kretanja posmatranog materijalnog sistema, a $\sum m_i [\vec{R}_i \times \vec{V}_i]$ moment tog impulsa ili, drugim rečima, *obrtni impuls* u odnosu na tačku O_1 . Ako je uočeni materijalni sistem čvrsto telo, onda se obrtni impuls naziva i **zamahom**. Jednačina (1.6.11) govori da je vremenski izvod impulsa jednak rezultanti spoljnih sila, a jednačina (1.6.12) da je vremenski izvod obrtnog impulsa jednak obrtnom momentu spoljnih sila u odnosu na tačku O_1 .

§ 7. Teorema o kretanju težišta. Ako je S težište, bolje reći centar masa posmatranog materijalnog sistema, a \vec{S} njegov vektor položaja, to je

$$M \vec{S} = \sum m_i \vec{R}_i, \quad (1.7.1)$$

gde

$$M = \sum m_i \quad (1.7.2)$$

predstavlja celokupnu masu uočenog materijalnog sistema. Dvostrukim diferenciranjem obrasca (1.7.1) po vremenu t , dobijamo:

$$M \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2},$$

t.j. zbog (1.6.7)

$$M \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = \vec{K}. \quad (1.7.3)$$

Ova diferencijalna jednačina kretanja težišta S identična je onoj za slobodnu tačku mase M , koja je izložena jedino dejstvu rezultante \vec{K} spoljnih sila, predstavljene obrascem (1.6.5). Odatle sledi:

* *Težište materijalnog sistema kreće se tako kao kad bi u njemu sjedinjene bile sve mase sistema i sve njegove spoljne sile. Unutrašnje sile ne utiču na kretanje težišta.*

§ 8. Zavisnost i nezavisnost rotacije od translacije. Pretpostavimo, za sada, da je posmatrani materijalni sistem jedno čvrsto telo i ispitaćemo kretanje tog tela oko njegovog težišta. U tom cilju neka je položaj koordinatnog početka O_1 sistema $X_1-Y_1-Z_1$, koji za sada smatramo nepomičnim, u

težištu S . Označimo taj novi koordinatni sistem, koji se kreće translatorno u prostoru, (dakle, nema rotaciju) sa X - Y - Z , a njegov početak koji leži, kao što smo rekli, u težištu S , sa O .

Vektori položaja materijalnih tačaka m_1, m_2, \dots, m_n u odnosu na O neka budu označeni sa $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Onda je

$$\vec{R}_i = \vec{S} + \vec{r}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8.1)$$

a zbog (1.7.1),

$$M\vec{S} = \sum m_i(\vec{S} - \vec{r}_i) = M\vec{S} - \sum m_i\vec{r}_i,$$

t.j.

$$\sum m_i\vec{r}_i = 0 \quad (1.8.2)$$

odakle sledi

$$\sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = 0. \quad (1.8.3)$$

Smenom (1.8.1) u (1.6.8), dobijamo:

$$\sum m_i \left[(\vec{S} + \vec{r}_i) \times \left(\frac{d^2\vec{S}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right) \right] = \vec{M}_1,$$

t.j.

$$M \left[\vec{S} \times \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} \right] - \left[\frac{d^2\vec{S}}{dt^2} \times \sum m_i\vec{r}_i \right] + \left[\vec{S} \times \sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right] + \sum m_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right] = \vec{M}_1,$$

dakle, zbog (1.7.3), (1.8.2) i (1.8.3),

$$\sum m_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right] = \vec{M}_1 - [\vec{S} \times \vec{K}]. \quad (1.8.4)$$

Obrtni moment spoljnih sila \vec{P}_i u odnosu na težište S , t.j. u odnosu na pokretnu uporišnu tačku O , predstavljen je sa

$$\vec{M} = \sum [\vec{r}_i \times \vec{P}_i] = \sum [(\vec{R}_i - \vec{S}) \times \vec{P}_i] = \sum [\vec{R}_i \times \vec{P}_i] - \left[\vec{S} \times \sum \vec{P}_i \right],$$

t.j. zbog (1.6.6) i (1.6.5), sa

$$\vec{M} = \vec{M}_1 - [\vec{S} \times \vec{K}]. \quad (1.8.5)$$

Zato iz (1.8.4) i (1.8.5) sledi

$$\sum m_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right] = \vec{M}. \quad (1.8.6)$$

Kretanje čvrstog tela oko njegovog težišta ima tri stepena slobode pa je zato to kretanje jednoznačno određeno prethodnom vektorskom jednačinom koja je ekvivalentna trima skalarnim jednačinama. Jednačina ima isti oblik kao jednačina (1.6.8) u kojoj je uporišna tačka O_1 smatrana nepokretnom. To nam govori da se posmatrano čvrsto telo kreće oko svog težišta tako kao da je to težište bilo nepokretno. To kretanje zavisi samo od obrtnog momenta, \vec{M} spoljnih sila, a ne zavisi od njihove rezultante, \vec{K} .

Jednačine (1.7.3) i (1.8.6) zajedno predstavljaju teorem o uzajamnoj nezavisnosti translatornog i rotacionog kretanja. Iz jednačine (1.7.3) sledi da se problem kretanja slobodnog čvrstog tela svodi na problem kretanja slobodne materijalne tačke, a iz (1.8.6) sledi da se problem rotacionog kretanja čvrstog tela (oko njegovog težišta) svodi na problem obrtanja čvrstog tela oko (jedne) njegove nepomične tačke.

Zato pri opisivanju kretanja težišta nebeskih tela ne moramo voditi računa o njihovim rotacijama oko težišta, a sada vidimo da ne moramo voditi računa o tome ni pri proučavanju njihovog translatornog kretanja, sem ako ono ne menja obrtni moment spoljnih sila.

Jednačine (1.7.3) i (1.8.6) važe i za opštiji slučaj materijalnog sistema koji zadovoljava pretpostavke iz §6, ali tada, pošto posmatrani materijalni sistem ima više od šest stepeni slobode, njegovo kretanje nije određeno navedenim dvema vektorskim jednačinama.



9. Pokretni koordinatni sistemi. Na isti način kako smo iz (1.6.8) izveli jednačinu (1.6.12), sledi iz (1.8.6)

$$\frac{d}{dt} \sum m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i] = \vec{M} \quad (1.9.1)$$

gde \vec{v}_i predstavlja vektor brzine materijalne tačke m_i u odnosu na koordinatni sistem $X-Y-Z$ koji ćemo, od sada, zvati ukratko inercijalnim, jer se u njemu sve tako dešava kao kad bi, zaista, mirovao u prostoru. Zato ćemo kretanja i brzine u odnosu na taj sistem zvati apsolutnim.

Vektor

$$\vec{G} = \sum m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i] \quad (1.9.2)$$

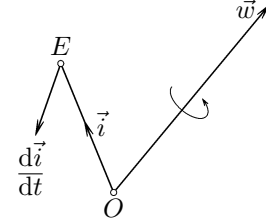
predstavlja, prema ranijoj konvenciji, apsolutni obrtni impuls izabranog materijalnog sistema u odnosu na tačku O pa je

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.9.3)$$

Često je ne samo korisno, nego potrebno da pri našim razmatranjima upotrebimo koordinatni sistem $x-y-z$ koji se obrće u odnosu na inercijalni koordinatni sistem. Pri tome ćemo pretpostaviti da se početak pokretnog koordinatnog sistema $x-y-z$ poklapa sa početkom O inercijalnog koordinatnog sistema $X-Y-Z$ i da u izabranom trenutku t ima, u odnosu na inercijalni sistem, rotaciju koja se odvija oko (jedne) trenutne ose obrtanja koja, dalje, prolazi kroz tačku O . Predstavimo tu rotaciju vektorom \vec{w} , t.j. taj vektor neka pada u trenutnu osu obrtanja,

usmeren je na onu stranu te ose sa koje posmatrano obrtanje ima direktni smer, tj. protivno smeru kretanja kazaljke na satu, a intenzitet w vektora \vec{w} neka bude jednak trenutnoj ugaonoj brzini obrtanja.

Neka \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} predstavljaju jedinične vektore u pravcu osa x , y , z , onda će, usled obrtanja pokretnog sistema, krajnje tačke tih vektora imati u trenutku t brzine koje će, kao što to sledi iz slike 9.1, biti predstavljene ovim obrascima:



Slika 1.9.1.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{w} \times \vec{i}]; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{w} \times \vec{j}]; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{w} \times \vec{k}]. \quad (1.9.4)$$

Ako obrazujemo skalarni proizvod $(\vec{G} \cdot \vec{i})$, onda je, po poznatom pravilu za diferenciranje takvog proizvoda,

$$\frac{d}{dt}(\vec{G} \cdot \vec{i}) = \frac{d\vec{G}}{dt} \cdot \vec{i} + \vec{G} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt},$$

t.j., zbog prethodnih jednačina,

$$\frac{d\vec{G}}{dt} \cdot \vec{i} = \frac{d}{dt}(\vec{G} \cdot \vec{i}) - \vec{G} \cdot [\vec{w} \times \vec{i}]. \quad (1.9.5)$$

Pomnožimo li jednačinu (1.9.3) skalarno sa \vec{i} , onda dobijamo

$$\frac{d}{dt}(\vec{G} \cdot \vec{i}) - \vec{G} \cdot [\vec{w} \times \vec{i}] = (\vec{M} \cdot \vec{i}). \quad (1.9.6)$$

Dve dodatne jednačine istog oblika dobijaju se zamenjujući \vec{i} sa \vec{j} odnosno sa \vec{k} .

Označimo sa G_1 , G_2 , G_3 koordinate vektora \vec{G} u odnosu na pokretni koordinatni sistem, sa w_1 , w_2 , w_3 koordinate vektora \vec{w} , a sa M_1 , M_2 , M_3 koordinate vektora \vec{M} , onda je

$$\vec{G} = G_1\vec{i} + G_2\vec{j} + G_3\vec{k} \quad (1.9.7)$$

$$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k} \quad (1.9.8)$$

$$\vec{M} = M_1\vec{i} + M_2\vec{j} + M_3\vec{k}. \quad (1.9.9)$$

Uzme li se još u obzir da je, po poznatom pravilu vektorskog računa,

$$\vec{G} \cdot [\vec{w} \times \vec{i}] = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

onda dobijamo, mesto jednačine (1.9.6) i njoj dveju sličnih jednačina, sledeće tri jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{dt} + w_2G_3 - w_3G_2 &= M_1 \\ \frac{dG_2}{dt} + w_3G_1 - w_1G_3 &= M_2 \\ \frac{dG_3}{dt} + w_1G_2 - w_2G_1 &= M_3. \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

§ 10. Ojlerove jednačine. Ako je posmatrani materijalni sistem jedno čvrsto telo pogodno je pokretni koordinatni sistem $x-y-z$, o kojem smo govorili u prošlom paragrafu, vezati sa tim čvrstim telom. U tom slučaju vektor \vec{w} predstavlja, u isti mah, i trenutnu rotacionu brzinu čvrstoga tela u odnosu na inercijalni koordinatni sistem pa je, zbog toga, apsolutna brzina materijalne tačke m_i predstavljena izrazom:

$$\vec{v}_i = [\vec{w} \times \vec{r}_i]. \quad (1.10.1)$$

Sada je obrtni impuls, predstavljen obrascem (1.9.2), jednak

$$\vec{G} = \sum m_i [\vec{r}_i \times [\vec{w} \times \vec{r}_i]]. \quad (1.10.2)$$

U slučaju čvrstog tela, u kojem je raspored masa kontinualan, prethodni zbir treba zameniti integralom

$$\vec{G} = \int [\vec{r} \times [\vec{w} \times \vec{r}]] dm. \quad (1.10.3)$$

Integraljenje se vrši po celokupnoj masi izabranog čvrstog tela.

Prema poznatom obrascu vektorskog računa, sada imamo

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

pa dobijamo:

$$\vec{G} = \vec{w} \int (\vec{r} \cdot \vec{r}) dm - \int \vec{r}(\vec{w} \cdot \vec{r}) dm. \quad (1.10.4)$$

Ako koordinate vektora položaja \vec{r} u pokretnom koordinatnom sistemu označimo sa x, y, z , onda je:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad (\vec{r} \cdot \vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2; \quad (\vec{w} \cdot \vec{r}) = w_1x + w_2y + w_3z.$$

Zamenom u vektorsku jednačinu (1.10.4), uzimajući u obzir obrazac (1.9.7), dobijamo tri skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} G_1 &= w_1 \int (y^2 + z^2) dm - w_2 \int xy dm - w_3 \int zx dm \\ G_2 &= w_2 \int (z^2 + x^2) dm - w_3 \int yz dm - w_1 \int xy dm \\ G_3 &= w_3 \int (x^2 + y^2) dm - w_1 \int zx dm - w_2 \int yz dm. \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

Ako pokretni koordinatni sistem $x-y-z$ smešten tako i vezan za izabrano čvrsto telo da se koordinatne ose podudaraju sa glavnim osama inercije tog tela ili, tačnije rečeno, sa centralnim osama inercije, jer početak tog koordinatnog sistema leži u težištu izabranog tela, onda su devijacioni momenti tog tela u odnosu na koordinatni sistem jednaki nuli, dakle

$$\int yz dm = 0; \quad \int zx dm = 0; \quad \int xy dm = 0, \quad (1.10.6)$$

a glavni momenti inercije su predstavljeni ovim izrazima:

$$A = \int (y^2 + z^2) dm; \quad B = \int (z^2 + x^2) dm; \quad C = \int (x^2 + y^2) dm. \quad (1.10.7)$$

Zbog svega ovoga, umesto jednačina (1.10.5) dobijamo jednačine:

$$G_1 = Aw_1; \quad G_2 = Bw_2; \quad G_3 = Cw_3. \quad (1.10.8)$$

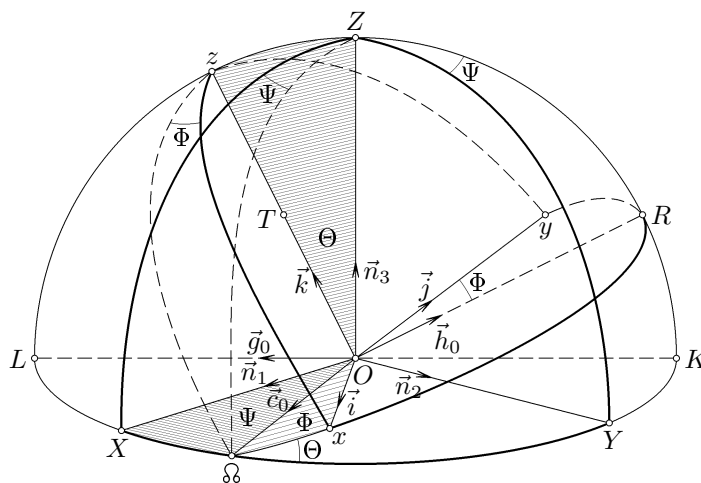
Smenom u jednačine (1.9.10), dobijamo:

$$\begin{aligned} A \frac{dw_1}{dt} + (C - B)w_2w_3 &= M_1 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A - C)w_3w_1 &= M_2 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B - A)w_1w_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (1.10.9)$$

Ove jednačine je 1758. godine izveo Leonard OJLER i zato nose njegovo ime.

§ 11. Ojlerovi uglovi. Neka je oko zajedničkog početka O nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema, kao centra, opisana sfera. Pozitivne grane koordinatnih osa ta dva sistema prodiru površ sfere u tačkama X, Y, Z odnosno x, y, z (slika 11.1.) obrazujući dva sferna trougla XYZ i xyz kojima su i strane i uglovi jednaki 90° . Koordinatne ravni $X-Y$ i $x-y$ seku se međusobno duž prave $O\Omega$ koja prolazi kroz tačku O i koja se naziva *linijom čvorova*. ❀

Prodorna tačka Ω te prave kroz sferu, koja zadovoljava uslov da se pri direktnom kretanju u ravni $x-y$ prolazi kroz tu tačku na pozitivnu stranu ravni $X-Y$, tj. onu na koju je usmerena pozitivna grana ose Z , zove se *uzlazni čvor*, a pravac $O\Omega$ zove se pozitivna grana linije čvorova. ❀ Ako je ravan kroz OZ i Oz i ravan slike, onda je ona upravna na liniju čvorova. Ugao Ψ zahvaćen između ose X i linije čvorova zove se *precesioni ugao*, nalegli ugao Φ , zahvaćena između linije čvorova i ose x , zove se *rotacioni ugao*, a ugao Θ zahvaćen osama Z i z zove se *nutacioni ugao*. ❀ To su tri Ojlerova ugla koja određuju položaj pokretnog koordinatnog sistema u nepokretnom sistemu. ❀



Slika 1.11.1.

§ 12. Polhodija i herpolhodija. Označimo jedinične vektore po osama x, y, z pokretnog koordinatnog sistema sa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, a jedinične vektore po osama X, Y, Z nepokretnog koordinatnog sistema sa $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. Vektor rotacije \vec{w} u pokretnom koordinatnom sistemu može da se predstavi obrascem

$$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}, \quad (1.12.1)$$

a u nepokretnom sistemu obrascem

$$\vec{w} = \omega_1\vec{n}_1 + \omega_2\vec{n}_2 + \omega_3\vec{n}_3, \quad (1.12.2)$$

gde nam w_1, w_2, w_3 odnosno $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ predstavljaju koordinate vektora \vec{w} u pokretnom odnosno u nepokretnom koordinatnom sistemu. Ojlerovi uglovi Ψ, Φ, Θ daju nam vezu između ta dva sistema. Koordinate w_1, w_2, w_3 odnosno $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ možemo da izrazimo pomoću Ojlerovih uglova i njihovih vremenskih izvoda na sledeći način. Sferni trougao XYZ (slika 11.1) može se dovesti do poklapanja sa trouglom xyz pomoću tri rotacije. Rotirajući trougao XYZ oko ose Z , t.j. oko jediničnog vektora \vec{n}_3 , za ugao Ψ , dovodimo ga u položaj ΩKZ , rotirajući ga, zatim, oko linije čvorova $O\Omega$ za ugao Θ , dovešćemo ga u položaj ΩRz , a rotirajući ga, najposle, oko Oz , tj. oko jediničnog vektora \vec{k} , za ugao Φ , dovodimo ga u konačni položaj xyz . Sve rotacije se izvode u direktnom smeru (pozitivnom smislu), suprotno smeru kretanja kazaljki na satu.

Označimo sa

$$\Psi' = \frac{d\Psi}{dt}; \quad \Theta' = \frac{d\Theta}{dt}; \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dt}$$

vremenske izvode Ojlerovih uglova, sa \vec{c}_0 jedinični vektor koji poklapa sa smerom pozitivne grane linije čvorova oko koje smo izvršili drugu od gornjih rotacija, onda je rezultujuća rotacija \vec{w} , koja odgovara vremenskim promenama Ψ', Θ', Φ' Ojlerovih uglova, predstavljena sa

$$\vec{w} = \Psi'\vec{n}_3 + \Theta'\vec{c}_0 + \Phi'\vec{k}. \quad (1.12.3)$$

Neka je \vec{h}_0 jedinični vektor pravca OR , onda iz slike 11.1 sledi

$$\begin{aligned} \Psi'\vec{n}_3 &= (\Psi' \cos \Theta)\vec{k} + (\Psi' \sin \Theta)\vec{h}_0 \\ (\Psi' \sin \Theta)\vec{h}_0 &= (\Psi' \sin \Theta \sin \Phi)\vec{i} + (\Psi' \sin \Theta \cos \Phi)\vec{j} \\ \Theta'\vec{c}_0 &= (\Theta' \cos \Phi)\vec{i} - (\Theta' \sin \Phi)\vec{j}, \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (\Psi' \sin \Theta \sin \Phi + \Theta' \cos \Phi)\vec{i} \\ &+ (\Psi' \sin \Theta \cos \Phi - \Theta' \sin \Phi)\vec{j} + (\Psi' \cos \Theta + \Phi')\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.12.4)$$

Ako sa \vec{g}_0 označimo jedinični vektor pravca OL , na isti način dobijamo

$$\begin{aligned} \Theta'\vec{c}_0 &= (\Theta' \cos \Psi)\vec{n}_1 + (\Theta' \sin \Psi)\vec{n}_2 \\ \Phi'\vec{k} &= (\Phi' \cos \Theta)\vec{n}_3 + (\Phi' \sin \Theta)\vec{g}_0 \\ (\Phi' \sin \Theta)\vec{g}_0 &= (\Phi' \sin \Theta \sin \Psi)\vec{n}_1 - (\Phi' \sin \Theta \cos \Psi)\vec{n}_2, \end{aligned}$$

tj. zbog (1.12.3)

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (\Theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \Theta \sin \Psi)\vec{n}_1 \\ &+ (\Theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \Theta \cos \Psi)\vec{n}_2 + (\Psi' + \Phi' \cos \Theta)\vec{n}_3. \end{aligned} \quad (1.12.5)$$

Iz (1.12.1) i (1.12.4) sledi

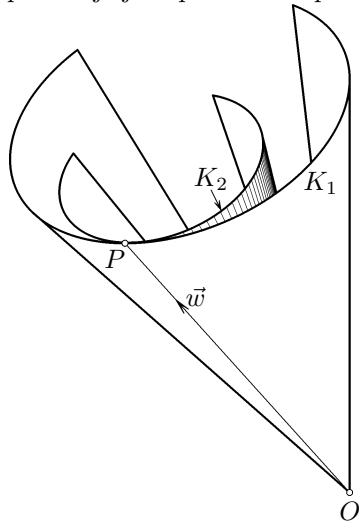
$$\begin{aligned} w_1 &= \Psi' \sin \Theta \sin \Phi + \Theta' \cos \Phi \\ w_2 &= \Psi' \sin \Theta \cos \Phi - \Theta' \sin \Phi \\ w_3 &= \Psi' \cos \Theta + \Phi' \end{aligned} \quad (1.12.6)$$

a iz (1.12.2) i (1.12.5)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \Theta \sin \Psi \\ \omega_2 &= \Theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \Theta \cos \Psi \\ \omega_3 &= \Psi' + \Phi' \cos \Theta. \end{aligned} \quad (1.12.7)$$

Ako su Ojlerovi uglovi dati kao funkcije vremena t , onda nam obrasci (1.12.6) i (1.12.7) predstavljaju, za proizvoljno izabranu vrednost t , koordinate jedne te iste tačke: krajnje tačke P rotacionog vektora \vec{w} .

Ukoliko uzmemo da je t promenljivo, onda nam gornji obrasci predstavljaju dve različite krive: obrascima (1.12.6) predstavljena je ona kriva koju u toku vremena opisuje krajnja tačka P rotacionog vektora \vec{w} u pokretnom, dakle sa pokretnim telom vezanom koordinatnom sistemu; ta se kriva zove *polhodiја*. Obrascima (1.12.7) predstavljena je ona kriva koju P opisuje u prostoru u nepokretnom sistemu; ova kriva zove se *herpolhodiја*. Ako je \vec{w} vektor položaja tačke P , to je (1.12.6) vektorska jednačina polhodiје, a (1.12.7) vektorska jednačina herpolhodiје. Vektor rotacije \vec{w} opisuje, prema tome, u toku vremena, u uočenom pokretnom telu jedan konus; direktrisa toga konusa je polhodiја, a vrh njegov tačka O . Taj se konus zove *konus polhodiје*. Vektor rotacije \vec{w} opisuje u prostoru jedan konus kojem je direktrisa herpolhodiја, a vrh tačka O ; taj se konus zove *konus herpolhodiје*. Konus herpolhodiје je nepokretan u prostoru, a konus polhodiје nepokretan u posmatranom



Slika 1.12.1.

čvrstom telu, a pokretan u prostoru. U svakom trenutku vremena ta dva konusa imaju jednu zajedničku izvodnicu, vektor \vec{w} trenutne rotacije, tj. trenutnu osu rotacije. Oko te ose obrće se, u tom momentu, uočeno čvrsto telo, a s njim i konus polhodiје da bi se, u idućem trenutku, naredna izvodnica konusa polhodiје poklopila sa narednom izvodnicom konusa herpolhodiје i preuzela ulogu trenutne ose rotacije. Odatle sledi da se oba konusa u svakom trenutku dodiruju duž njihove zajedničke izvodnice, drugim rečima, da se konus polhodiје kotrlja bez klizanja po konusu herpolhodiје. Zato možemo rotaciono kretanje izabranog čvrstog tela predstaviti i na ovaj način: po konusu K_1 herpolhodiје (slika 12.1.), koji je nepokretan u prostoru, kotrlja se, bez klizanja, konus K_2 polhodiје, noseći sa sobom izabrano čvrsto telo.



13. Privlačne sile tela konačnih dimenzija. Već smo pretpostavili da se nebeska tela privlače međusobno tako kao kada bi masa svakog od tih

tela bila koncentrisana u njegovom težištu. Sada je potrebno da ispitamo opravdanost te pretpostavke i značaj njenog odstupanja od stvarnosti. Uočimo, dakle, jedno telo proizvoljnih dimenzija; o obliku i rasporedu mase toga tela ne moramo, za sada, činiti nikakvu naročitu pretpostavku. Položimo u težište toga tela početak O ortogonalnog koordinatnog sistema x - y - z (slika 13.1), a orijentiramo taj koordinatni sistem tako da se njegove ose poklapaju sa glavnim osama inercije datog tela. Označimo glavne momente inercije tog tela sa A , B , C . Neka se u tački S , dovoljno udaljenoj od izabranog tela, nalazi masa M (materijalna tačka!). Treba odrediti silu kojom dato telo privlači, prema Njutnovom zakonu gravitacije, masu M . Neka je \vec{R} vektor položaja tačke S u odnosu na početak O našeg koordinatnog sistema, a \vec{r} vektor položaja proizvoljne tačke P ili elementa mase dm izabranog tela. Gravitaciona (Njutnova) sila $d\vec{K}$, kojom elemenat mase dm privlači masu M , predstavljena je izrazom:

$$d\vec{K} = -f \frac{M}{l^3} \vec{l} dm, \quad (1.13.1)$$

gde f predstavlja gravitacionu konstantu, \vec{l} vektor položaja tačke S u odnosu na tačku P , a l intenzitet tog vektora. Pri tome je

$$\vec{l} = \vec{R} - \vec{r}. \quad (1.13.2)$$

Ukupna privlačna sila izabranog tela na masu M predstavljena je vektorskim integralom

$$\vec{K} = - \int_m f \frac{M}{l^3} \vec{l} dm \quad (1.13.3)$$

po celokupnoj masi m izabranog tela.

Vektor $-f(M/l^3)\vec{l}dm$ može biti predstavljen kao gradijent skalara $fMdm/l$ (vidi odeljak 2.4) pa je zato

$$\vec{K} = \int_m \text{grad} \frac{fM dm}{l}.$$

Kako je, u opštem slučaju, proizvoljan, a time i beskonačan, zbir gradijenata skalara jednak gradijentu zbira tih skalara, to je

$$\vec{K} = \text{grad} \int_m \frac{fM dm}{l}$$

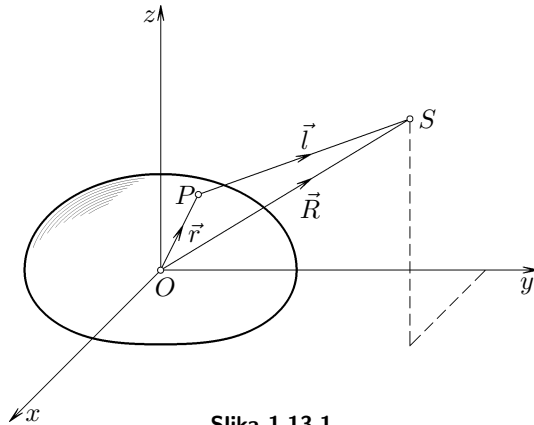
ili, ako stavimo

$$U = fM \int \frac{dm}{l}, \quad (1.13.4)$$

$$\vec{K} = \text{grad} U. \quad (1.13.5)$$

Iz (1.13.2) sledi

$$l^2 = \vec{R}^2 - 2(\vec{R} \cdot \vec{r}) + r^2.$$



Slika 1.13.1.

Pošto je $\vec{l}^2 = l^2$; $\vec{R}^2 = R^2$; $\vec{r}^2 = r^2$, gde R odnosno r označavaju intenzitet tih vektora redom, onda je

$$l^2 = R^2 - 2(\vec{R} \cdot \vec{r}) + r^2.$$

Iz ove skalarne jednačine sledi

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - 2 \frac{(\vec{R} \cdot \vec{r})}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right\}^{-1/2}. \quad (1.13.6)$$

Pretpostavku da je tačka S toliko udaljena od izabranog tela da sve stepene koji su veći od drugog stepena razlomka r/R možemo zanemariti u odnosu na jedinicu. Razvijemo li gornji izraz u red, uz gornju pretpostavku i uzimajući u obzir da je zbog $r < R$, $(\vec{R} \cdot \vec{r}) \leq Rr$, $(\vec{R} \cdot \vec{r}) < R^2$, dobijamo

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{r})}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{8} \frac{4(\vec{R} \cdot \vec{r})^2}{R^4} \right\}. \quad (1.13.7)$$

Smenom u formuli (1.13.4), dobijamo:

$$U = \frac{fM}{R} \int \frac{dm}{m} + \frac{fM}{R^3} \left(\vec{R} \cdot \int_m \vec{r} dm \right) - \frac{fM}{2R^3} \int_m r^2 dm + \frac{3}{2} \frac{fM}{R^5} \int_m (\vec{R} \cdot \vec{r})^2 dm. \quad (1.13.8)$$

Integral

$$\int_m dm = m$$

predstavlja ukupnu masu izabranog tela. Pošto tačka O , na koju se odnose vektori položaja \vec{r} , leži u samom težištu datog tela, to je

$$\int_m \vec{r} dm = 0.$$

Zato je

$$U = \frac{fMm}{R} - \frac{1}{2} \frac{fM}{R^3} \int_m r^2 dm + \frac{3}{2} \frac{fM}{R^5} \int_m (\vec{R} \cdot \vec{r})^2 dm. \quad (1.13.9)$$

Ako su x, y, z koordinate tačke M , a X, Y, Z koordinate tačke S , onda je

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{R} &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.13.10)$$

dakle

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad (\vec{R} \cdot \vec{r}) = Xx + Yy + Zz$$

$$(\vec{R} \cdot \vec{r})^2 = X^2 x^2 + Y^2 y^2 + Z^2 z^2 + 2XYxy + 2YZyz + 2ZXzx.$$

Smenom u (1.13.9) imamo da članovi sa xy, yz, zx nestaju jer, pošto su koordinatne ose istovremeno i glavne ose inercije, to je

$$\int_m zy dm = \int_m yz dm = \int_m zx dm.$$

Zato je

$$\begin{aligned} U &= \frac{fMm}{R} - \frac{1}{2} \frac{fM}{R^3} (X^2 + Y^2 + Z^2) \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{fM}{R^5} \left\{ X^2 \int_m x^2 dm + Y^2 \int_m y^2 dm + Z^2 \int_m z^2 dm \right\}, \end{aligned}$$

t.j.

$$U = \frac{fMm}{R} + \frac{1}{2} \frac{fM}{R^5} \left\{ X^2 \int_m (2x^2 - y^2 - z^2) dm + Y^2 \int_m (2y^2 - z^2 - x^2) dm + Z^2 \int_m (2z^2 - x^2 - y^2) dm \right\}.$$

Integrali

$$A = \int_m (y^2 + z^2) dm; \quad B = \int_m (z^2 + x^2) dm; \quad C = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (1.13.11)$$

predstavljaju momente inercije izabranog tela u odnosu na koordinatne ose, tj. glavne momente inercije. Znači:

$$U = \frac{fMm}{R} + \frac{1}{2} \frac{fMX^2}{R^5} (B + C - 2A) + \frac{1}{2} \frac{fMY^2}{R^5} (C + A - 2B) + \frac{1}{2} \frac{fMZ^2}{R^5} (A + B - 2C). \quad (1.13.12)$$

Prema (1.13.5) ovaj izraz predstavlja nam funkciju sila atrakcije izabranog tela; njegov gradijent daje silu \vec{K} kojom dato telo privlači masu M . Kad bi bilo

$$A = B = C,$$

tj. kada bi elipsoid inercije datog tela bio lopta, imali bi

$$U = f \frac{Mm}{R}$$

dakle

$$\vec{K} = \text{grad} U = -f \frac{Mm}{R^3} \vec{R},$$

t.j. izabrano telo privlačilo bi masu M tako kao kad bi celokupna masa m toga tela bila koncentrisana u njegovom težištu. Tu pretpostavku smo učinili u odeljku u kojem se govori o translatorsnom kretanju nebeskih tela. Ona bi bila strogo ispunjena kada bi ta tela bila lopte, koje se sastoje od koncentričnih slojeva od kojih je svaki za sebe homogen. Iako taj slučaj nikad nije (strogo) ostvaren u prirodi, odstupanje se mora uzeti u obzir samo u retkim prirodnim slučajevima, kao kod kretanja našeg Meseca, a po pravilu kod veštačkih nebeskih tela. Iz tih odstupanja može se odrediti spljoštenost naše Zemlje, o čemu će još biti govora.

§ 14. Još ponešto o astrodinamici. U neku ruku se može konstatovati da je naučni i tehnološki razvoj s kraja XX stoleća zaokružio definicioni balans velikih teorijskih dostignuća fundamentalnih nauka od kraja XVIII do početka XX stoleća. Tako se u klasifikaciji nauka sve češće *nebeska mehanika* identifikuje kao jedinstvo i raznolikost tri discipline: *matematičke nebeske mehanike*, *fizičke nebeske mehanike* i *astrodinamike*. Uočljivo je da je ova poslednja dobila i sopstveni naziv.

✱ Matematička nebeska mehanika se pretežno bavi rešavanjem zadataka (određivanjem) prostornog kretanja nebeskih tela tragajući za *opštim* metodama, koje bi

✿ mogle da se primene u širokoj klasi problema i zadataka mehanike u celosti. Istovremeno je moguća i idealizacija zadataka da bi se mogli primeniti opšti *analitički* metodi (n.pr., potencijalni), ali se pri tome može pokazati da je zadatak **daleko** ✿ **od realnosti** ili je njegovo *rešenje* nepogodno za praktično korišćenje. U svakom slučaju, kada se dođe do rešenja **modelnog** zadatka, ono se koristi nezavisno od programskih zahteva, računskih i drugih slabosti i nedorečenosti.

Objašnjavanjem posmatračkih pojava i numeričkom ocenom fizičkih konstanti, koje ulaze u analitičke relacije kako astronomije uopšte, tako i nebeske mehanike posebno, bavi se *fizička* nebeska mehanika. Na ovom stadijumu **važan je rezultat**, ✿ a ne put kojim se do njega došlo.

Pojam astrodinamike se odnosi na "treći pravac" u nebeskoj mehanici: teorija i praksa određivanja, integracije i popravke parametara realnih–stvarnih orbita, sa posebnim osvrtom na orbite **veštačkih** nebeskih tela. Astrodinamika ne koristi samo gotove recepte matematičke i fizičke nebeske mehanike, već rešava i sopstvene zadatke i razvija sopstvene metode. Dokaz postojanja rešenja je često poslednja etapa u matematičkoj nebeskoj mehanici i prva etapa u astrodinamici, pri čemu se u astrodinamici skoro po pravilu vrši analiza i komparacija **svih postojećih** rešenja, da bi se, u slučaju potrebe, brzo i efikasno izbralo za konkretnu situaciju, optimalno rešenje.

Fizičke konstante, koje definišu svojstva realnog sveta i jesu predmet fizičke mehanike, predstavljaju poseban interes za astrodinamiku, kako sa stanovišta ulaznih parametara, tako i sa stanovišta njihove korekcije i optimizacije kroz rešavanje konkretnih astrodinamičkih zadataka i problema.

U tom kontekstu, *kosmička navigacija* je nastala pri rešavanju problema određivanja orbita nebeskih tela uopšte, nebeskih letilica i veštačkih objekata posebno i predstavlja **prevashodni** principijelni rezultat nebeske mehanike, a ne terestrične (recimo: pomorske i aero) navigacije. Skoro da je izvesno da su pokušaji da se iskoriste navike i metode pomorske i aero navigacije u razradi osnova kosmičke navigacije izazvali znatno usporenje njenog razvoja i otežali njeno poimanje. Parafrazirajući sentencu poznatog američkog stručnjaka za astrodinamiku Semjuela Herika, možemo reći:

"Aeronautika je za ptice, a metode nebeske mehanike su za kosmičke objekte".

§ 15. Kretanje tela promenljive mase: Zakoni reaktivnog pogo-
na. Ako je masa tela u kretanju konstantna, kako je to usvojeno u Njutnovoj mehanici, tj. ako se masa uopšte ne menja i u toku kretanja nema ni pripajanja ni odvajanja mase, onda važi drugi Njutnov zakon (*osnovna jednačina dinamike* - \vec{W} je ubrzanje tela, \vec{K} je količina kretanja tela mase m)

$$\vec{F} = m\vec{W} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt}$$

Međutim, od velikog praktičnog značaja je proanalizirati kretanje tela čija se masa u toku vremena menja $m = m(t)$ (mehaničkim odvajanjem - odbacivanjem ili pripajanjem, ali ne u smislu teorije relativnosti). Na takvo telo u kretanju deluje

u smislu akcije i reakcije tzv. reaktivna sila. Kretanje takvog tela opisuje *jednačina Meščerskog* za izraz rektivne sile i *obrazac Ciolkovskog* koji određuje brzinu v kretanja usled takve sile u zavisnosti od brzine c odvajanja mase u slučaju odbacivanja mase. Kada se masa tela smanjuje, brzina tela se povećava, dok se u slučaju dodavanja mase brzina smanjuje. Izvođenje ovih (osnovnih) relacija reaktivnog pogona prikazaćemo ovde u izvesnoj meri kritički s obzirom na polazne stavove pri njihovom izvođenju.

Dakle, ako za silu akcije uzmemo silu \vec{F} kojom se masa dm izbacuje brzinom \vec{c} za elementarno vreme dt

$$\vec{F} = \vec{c} \frac{dm}{dt}$$

onda će sila reakcije biti sila \vec{R} koja masi saopštava ubrzanje $\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{R} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Iz zakona akcije i reakcije proističe da je $\vec{R} = -\vec{F}$ odnosno

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{c} \frac{dm}{dt} \quad (1.15.1)$$

Kako su vektori $\frac{d\vec{v}}{dt}$ i \vec{c} kolinearni možemo prethodnu relaciju napisati u skalarnom obliku

$$m \frac{dv}{dt} = -c \frac{dm}{dt} \quad (1.15.2)$$

pri čemu je dm/dt uzeto apsolutno ($dm/dt > 0$). Pri tačnom računu za smanjivanje mase tela biće $dm/dt < 0$ pa se to zove *brzina rashoda mase*. Sa druge strane, ako se telo kreće brzinom \vec{v} u odnosu na neki nepokretni referentni sistem i ako je brzina izbačene čestice u odnosu na taj isti nepokretni sistem \vec{u} , tada je $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$ relativna brzina čestice u odnosu na pokretno telo. Najzad, kretanje ovakvog tela može se (kad je reč o njegovom progresivnom kretanju) posmatrati kao kretanje materijalne tačke samo pod pretpostavkom da je pri smanjenju mase tela pomeranje centra mase (težišta) u samom telu zanemarljivo.

Dakle, reaktivna sila \vec{F}_r (jednačina Meščerskog) glasi

$$\vec{F}_r = -\vec{c} \frac{dm}{dt} = -(\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} \quad (1.15.3)$$

ili u skalarnom obliku

$$F_r = -c \frac{dm}{dt} \quad (1.15.4)$$

U slučaju da na uočeno telo osim reaktivne sile \vec{F}_r dejstvuje još neka spoljašnja aktivna sila \vec{F} vektorska diferencijalna jednačina kretanja tela imaće oblik

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{W} = \vec{F} + \vec{F}_r = \vec{F} - \vec{c} \frac{dm}{dt} \quad (1.15.5)$$

Nedoumicu može da izazove još i pitanje, kako to da "reaktivna sila", kao unutrašnja sila, može da pokrene telo, a rečeno je, s obzirom na zakon o održanju količine kretanja, da (bez obzira na njihov mehanizam) unutrašnje sile ne mogu uticati na kretanje težišta. Međutim, unutrašnje sile mogu pomerati pojedine delove tela jedne u odnosu na druge i u našem slučaju reaktivna sila unutrašnjeg porekla, koja nastaje pri odvajanju mase, ustvari, pokreće *preostali* deo tela posle izbacivanja dela mase.

Jednačina (1.15.2) se može napisati u obliku

$$mdv = -c dm, \quad \text{odn.} \quad dv = -c \frac{dm}{m} \quad (1.15.6)$$

odakle se integracijom od nekog trenutka t_0 do trenutka t dobija

$$v - v_0 = c \ln m \Big|_{t_0}^t = c \ln \frac{M}{m} \quad (1.15.7)$$

gde je v_0 brzina tela u trenutku t_0 , a v njegova brzina u trenutku t , dok je M masa tela na startu za $t = t_0$, a m masa kao funkcija vremena u određenom (kasnijem) trenutku t .

Ako je $v_0 = 0$, onda se prethodni obrazac može napisati u obliku

$$v = c \ln \frac{M}{m} \quad (1.15.8)$$

i to je *obrazac Ciolkovskog* za određivanje brzine tela, kad je brzina odvajanja mase (isticanja gasova) jednaka c . Brzina v je ona brzina koju telo (raketa) postiže, ako se ne uzima u obzir gravitacioni ili neki drugi uticaj (na primer otpor vazduha) i na nju nema uticaja oblik putanje. Treba samo obratiti pažnju da je integracija izvedena pod pretpostavkom da je brzina c u posmatranom intervalu $t - t_0$ konstantna ili bar približno konstantna. ❀

Primer 1. Izvedimo, na kraju, jednačinu kretanja tela promenljive mase na primeru kretanja rakete.

Princip funkcionisanja rakete je relativno prost. Raketa izbacuje materiju (gas) delujući na njega velikom silom. Materija koju ona pri tom izbacuje, deluje na raketu jednakom ali suprotno usmerenom silom, saopštavajući joj odgovarajuće ubrzanje. Ukoliko nema spoljašnjih sila, raketa i izbačena materija čine zatvoren sistem te se njegov impuls ne može menjati sa vremenom. Na tom principu i rade rakete. Celishodno je međutim razmatrati opštiji slučaj, tj. pretpostaviti da na raketu deluju i spoljašnje sile. To mogu biti, na primer, sila zemljine teže, gravitaciono privlačenje od strane Sunca i planeta, sila otpora sredine kroz koju se kreće raketa, ... Neka su $m(t)$ i $\vec{v}(t)$ masa i brzina rakete u proizvoljnom momentu vremena t . Impuls rakete će u tom trenutku biti $\vec{p}(t) = m\vec{v}$. Za interval vremena dt masa rakete i njena brzina će imati priraštaje dm i $d\vec{v}$ jer je za navedeno vreme raketa potrošila dm goriva i izbacila ga kao gas (kao produkt sagorevanja goriva) pa se time njena masa promenila za taj iznos*. Impuls rakete će u trenutku $t + dt$

* u ovom slučaju $dm < 0$

biti $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$. Ukupan impuls sistema sadrži još i impuls gasa izbačenog za dati interval vremena dt , odnosno sabirak

$$dm_{gas}\vec{v}_{gas},$$

gde je \vec{v}_{gas} brzina izbacivanja gasa, a dm_{gas} njegova masa. Razlika impulsa u trenutku $t + dt$ i t predstavlja pripraštaj, a on je, prema *II Njutnovom zakonu*, jednak $\vec{F}dt$, gde je \vec{F} rezultanta svih spoljašnjih sila koje deluju na raketu, odnosno važi jednačina

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt \quad (1.15.9)$$

tj.

$$m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt \quad (1.15.10)$$

Nakon sređivanja, odbacivanja proizvoda $dm d\vec{v}$ kao infinitezimale višeg reda, primene zakona održanja mase $dm + dm_{gas} = 0$ i uvođenja relativne brzine isticanja gasa u odnosu na raketu $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{gas} - \vec{v}$, ova jednačina poprima oblik

$$md\vec{v} = \vec{v}_{rel}dm + \vec{F}dt, \quad (1.15.11)$$

a nakon deljenja sa dt dobijamo

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt} + \vec{F} \quad (1.15.12)$$

Napomena: Jasno je da je \vec{v}_{rel} relativna brzina isticanja gasa u odnosu na raketu, ranije označavano sa \vec{c} ; isto tako, brzina isticanja gasa u odnosu na neki nepokretni referentni sistem ovde je obeležena sa \vec{v}_{gas} umesto sa \vec{u} uglavnom zbog konkretnijeg ukazivanja na pripadnost odgovarajućih brzina.

Po formi je izraz (1.15.11) jednak drugom Njutnovom zakonu. Razlika je u tome što u ovom slučaju masa nije konstantna već se menja sa vremenom (otpadanje, odvajanje materije). Spoljašnjoj sili je dodat još jedan član

$$\vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt},$$

koji predstavlja takozvanu reaktivnu silu, tj. silu kojom na raketu deluju gasovi koje ona izbacuje. Ovu jednačinu je, kao što smo rekli, prvi dobio ruski naučnik Meščerski (1898.) po kome ona i nosi ime – jednačina Meščerskog odnosno jednačina kretanja tela promenljive mase.

Primenimo sada jednačinu Meščerskog na kretanje rakete na koju ne deluju spoljašnje sile. U tom slučaju ($\vec{F} = 0$) ona glasi

$$md\vec{v} = \vec{v}_{rel}dm$$

Ovu vektorsku jednačinu je najpraktičije projektovati na osu koja se poklapa sa pravcem kretanja rakete i usmerena je u smeru tog kretanja. Tako dolazimo do sledeće skalarne jednačine

$$mdv = -v_{rel}dm.$$

Brzina isticanja gasova se u principu menja tokom leta rakete, ali, radi jednostavnosti, može se razmatrati slučaj kada je ona konstantna. U tom slučaju je rešenje prethodne jednačine

$$v = -v_{rel} \int \frac{dm}{m} = -v_{rel} \ln m + C .$$

Vrednost konstante integracije C je određena početnim uslovima. Pretpostavimo * da je u početnom trenutku vremena brzina rakete bila jednaka nuli, a da je njena masa bila m_0 . Tada ova jednačina daje

$$0 = -v_{rel} \ln m_0 + C ,$$

odnosno $C = v_{rel} \ln m_0$. Odavde je sada

$$v = v_{rel} \ln \frac{m_0}{m}$$

odakle se za promenu mase rakete sa vremenom dobija jednačina

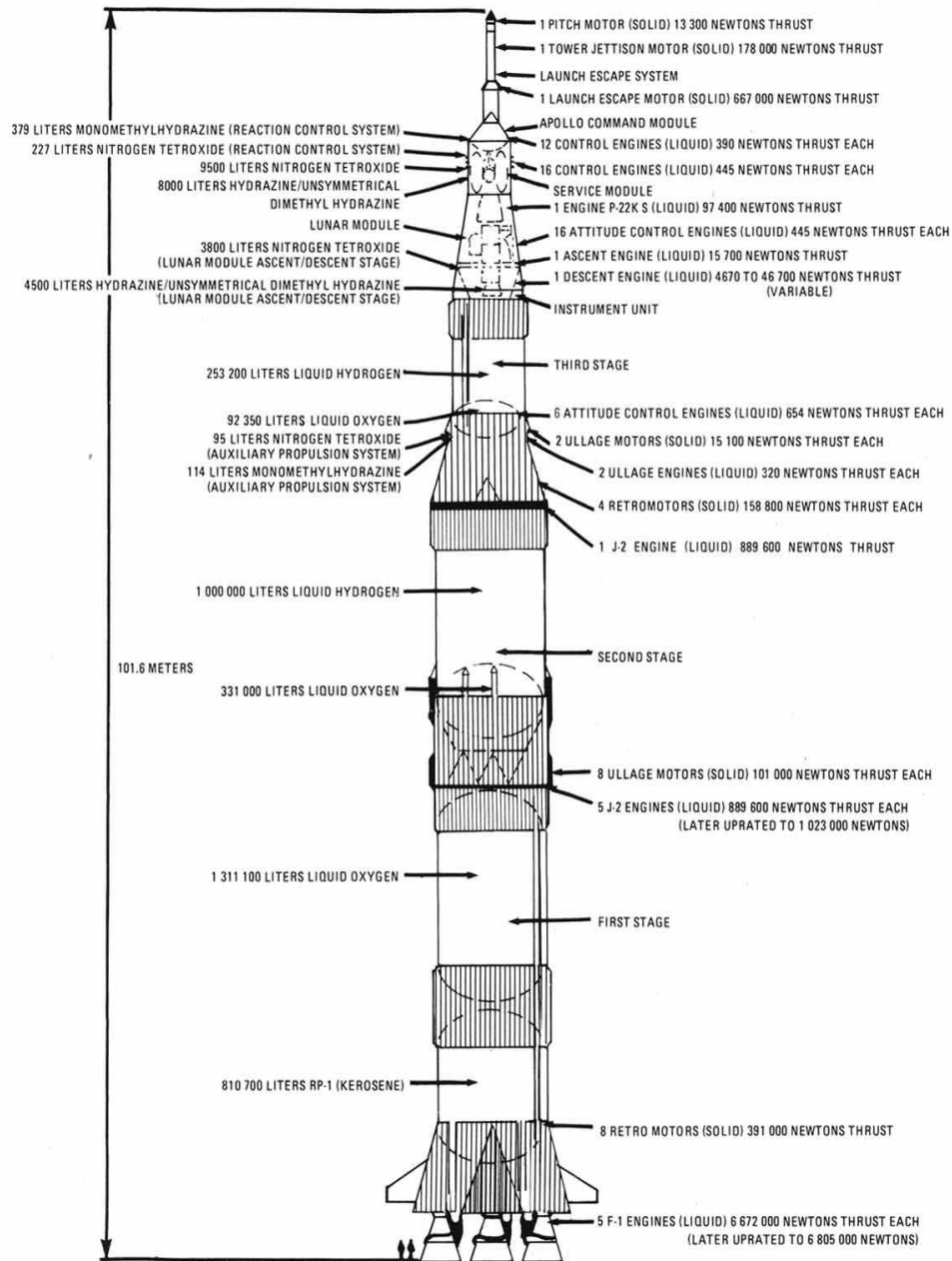
$$m = m_0 e^{-\frac{v}{v_{rel}}}$$

Ova jednačina se naziva formulom Ciolkovskog (1903.).

Napomena: Ovde nećemo ulaziti u detalje konstrukcije kosmičkih raketa nosača i izbora materijala za njihovu gradnju i vrste goriva koje se koriste za reaktivni pogon. U nastavku se nalaze samo snimak jedne od nosećih raketa iz serije Saturn V neposredno pre lansiranja na rampi u Hjustonu (Slika 1.15.1.) i shema njene strukture (Slika 1.15.2.) iz kojih se može naslutiti o kakvim projektima i realizacijama se radi. Radi ilustracije dimenzija, na slici 1.15.2. su u donjem levom uglu, u zoni mlaznica, nacrtane ljudske figure.



Slika 1.15.1 Raketa Saturn V na lansirnoj rampi



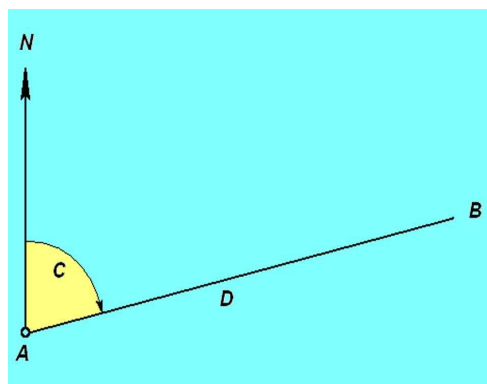
Slika 1.15.2 Shema rakete Saturn V

§ 16. Kosmička navigacija. I pored svega, veoma je poučno izložiti *opštu* predstavu o navigaciji, uporediti i protivstaviti astrodinamiku i pomorstvo, posmatračke metode i metode određivanja putanja i upravljanja u kosmičkom prostoru i na Zemlji kao i presatelitsku i postsatelitsku kosmičku navigaciju.

Problem određivanja trajektorije ili orbite možemo da ilustrujemo na jednostavnom **navigacionom zadatku**:

Zadatak 1. *Date su dve tačke A i B i treba odrediti – izračunati kurs C i rastojanje D (Slika 1.16.1.).*

U pomorstvu se usvaja rešenje po kojem su kurs C i rastojanje D luk velikog kruga kroz tačke A i B , sa centrom u središtu Zemlje; ovde se uvodi i pojam *optimizacije*, koji se kasnije počeo primenjivati i u avijaciji. U kosmičkoj navigaciji takav primer je izračunavanje trajektorije preleta sa Zemlje na Mars. Prvo se nalazi najjednostavnije rešenje, recimo: tražena trajektorija može biti Keplerovska orbita, pa se zadatak postepeno usložnjava – uzimaju se u obzir poremećaji, aktivni segmenti letilice, uslovi optimalnosti, instrumentne greške ...



Slika 1.16.1. Osnovni zadatak navigacije

U presatelitskoj kosmičkoj navigaciji i pored toga što je dovoljno dobro rešavan zadatak određivanja orbite iz posmatranja, za običnog smrtnika račun orbite nije bio ništa više do **teorijska i misaona vežba** ili **matematička apstrakcija**.

Zadatak 2. *U uslovima zadatih početnog položaja A, kursa C i preliminarno (za datu brzinu i vreme) izračunato rastojanje D naći tj. integraliti trajektoriju – orbitu, odnosno odrediti položaj B.*

U kosmičkoj navigaciji se koriste jednostavni analitički integrali Keplerovskih orbita ili se uzimaju u obzir i znatno složeniji efekti – poremećaji, čeonni otpor, relativistički efekti i sl. – pomoću numeričke integracije ili preko razvoja u red i kasnijim integraljenjem u kvadraturama.

Razlika kosmičke i nazemne navigacije najočiglednija je iz razlike u posmatračkoj praksi. U nazemnoj navigaciji se sve svodi na neposredno usavršavanje instrumenata (od sekstanta tačnosti jedne lučne minute, preko mikroskop–mikrometra tačnosti desetinke lučne sekunde, do elektronizovanih pribora tačnosti stotog dela lučne sekunde). Tamo gde prestaje, tj. gde se dostiže granica tačnosti nazemne navigacije, počinje posmatračka tačnost kosmičke navigacije, pri čemu se dalja poboljšanja dostižu kako kroz razradu novih metoda (interferometrija, laserko daljinomerje i sl.), tako i preko razrade specijalnih metoda obrade posmatranja i uklanjanja grešaka, tj. njihove optimizacije.

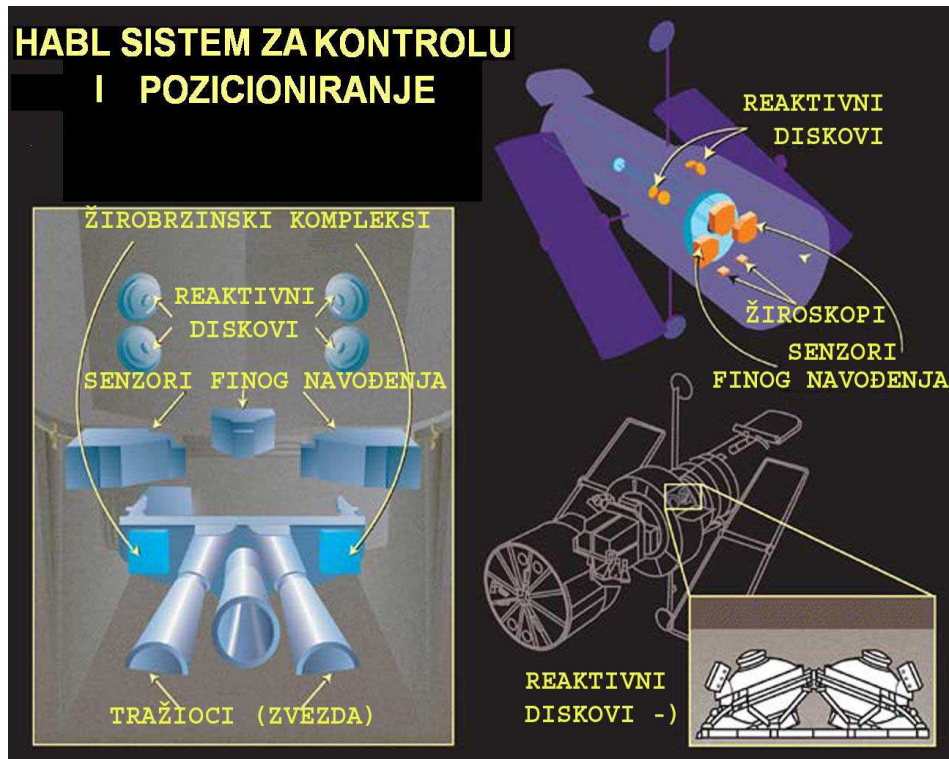
Konačno, zadatak korekcije orbite svodi se na otklanjanje sistematskih grešaka iz posmatranja i minimizacije slučajnih grešaka. Za određivanje integracionih konstanti važno je vreme koje je proteklo od početka kretanja, a kako vreme odmiče, po

pravilu, povećava se tačnost određivanja raznih posmatračkih veličina. Iako se koriste statističke i rekurentne metode, rezultati integracije se dobijaju sa uvećanom tačnošću. Na "višim" etapama određivanja približne orbite, sa odgovarajućom "zalihom" posmatračkih podataka, procedura može da se proširi na trodimenzioni (a ako imamo i podatke o brzinama: na šestodimenzioni) slučaj nazemne navigacije u zadatku sa uporišnom tačkom. Međutim, u tačnoj kosmičkoj navigaciji, u prvoj fazi korekcije orbite ovakva procedura može da uzrokuje ozbiljne greške i ne treba je primenjivati.

Takozvana diferencijalna navigacija, koja je najomiljeniji metod navigatora u avijaciji, u kosmičkoj navigaciji nije mogla da se uspešno primeni. Međutim, upravljanje i fizička korekcija orbite u navođenju na cilj ili zahvatu cilja dobili su svoje mesto u primenjenoj kosmičkoj navigaciji. Algoritmi po kojima se računaju potrebni podaci za pilota letilice ili automat, slični su matematičkim algoritmima za korekciju orbite. Intermedijarno i terminalsko upravljanje su pojmovi nastali u procesu razvoja navigacije i moraju da se jasno razgraniče, posebno u problemima upravljanja susretima, presretanjima i sudarima letilica. Ne treba naglašavati da je prisutnost modernih i specijalizovanih kompjuterskih i žiroskopskih sistema, kako na letilici tako i na dislociranom komandnom punktu, uslov egzistencije i opstanka kosmičke navigacije

§ 17. Žiroskopi kao elementi navigacionih i stabilizacionih kompleksa. Ovde se moramo podsetiti da je jedan od osnovnih ciljeva astronomske prakse realizacija teleskopskih sistema uz uslov minimalnih negativnih uticaja, među kojima Zemljina atmosfera predstavlja skoro najznačajniji izvor tih i takvih uticaja. U tom smislu postavljanje i eksploatacija teleskopa vezanih za kosmičku letilicu predstavlja značajan korak napred ali i veoma komplikovan i težak poduhvat. Ostvarivanje osnovnih funkcija teleskopa u uslovima kada se njegovo postavljanje sa veštačkim nebeskim telom izvrši, zahteva prisustvo visokokvalitetnih sistema za stabilizaciju i orijentaciju, kako nosača letilice u odnosu na eksterni inercijalni ili kvaziinercijalni sistem, tako i samog teleskopa u odnosu na tu letilicu.

Kako to izgleda u jednom od savremenijih međunarodnih projekata ukratko ćemo izložiti na primeru Habl nebeskog teleskopa. Osnovni kontrolni, stabilizacioni i orijentacioni instrumenti i pribori dati su na slici 1.17.1. i označeni su kao: žiroskopi, reaktivni diskovi i senzori finog navođenja. Ovde ćemo samo u kratkim crtama opisati njihovu ulogu u sistemu teleskopa.



Slika 1.17.1 Hابل nebeski teleskop i njegov sistem za kontrolu i pozicioniranje

Dinamika tačke i satelitske orbite

§ **1. Zakon o količini kretanja (impuls).** Proizvod mase materijalne tačke i njenog vektora brzine naziva se **količina kretanja – impuls*** (nalet) pokretne tačke

$$\vec{K} = m\vec{V}. \quad (2.1.1)$$

Pošto je masa pozitivan skalar vektor količine kretanja je vektor kolinearan sa vektorom brzine, samo mu je intenzitet povećan m puta. Izvod ovog vektora po vremenu

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = m\dot{\vec{V}} = m\vec{W} \quad (2.1.2)$$

jednak je *promeni kretanja* (Njutn: *mutatio motus*). Kako je masa konstantna to ❀ je izvod jednak sili koja deluje na materijalnu tačku

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F}. \quad (2.1.3)$$

Ova vektorska jednačina predstavlja *zakon količine kretanja* koji se može ovako ❀ iskazati:

Izvod količine kretanja po vremenu jednak je sili koja deluje na materijalnu tačku.

§ **2. Sila i količina kretanja – impuls.** Njutnov zakon kretanja je formulisan za materijalnu tačku. Kao što je već navedeno u prethodnom paragrafu, ukoliko se masa m materijalne tačke pomnoži njenom brzinom \vec{V} , rezultat se naziva *količina kretanja* ili *impuls*

$$\vec{K} = m\vec{V}. \quad (2.2.1)$$

* Prema Njutnu: *quantitas motus*; ideja se nalazi već kod Dekarta (R. Descartes, 1596-1650)

Brzina \vec{V} je merena u odnosu na inercijalni referentni sistem i za položaj materijalne tačke dat (položajnim) vektorom \vec{r} brzina će biti definisana sa $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$ (vidi ranije). Na osnovu drugog Njutnovog zakona, *promena količine kretanja materijalne tačke u nekom vremenskom intervalu jednaka je sili koja je proizvodi i ova promena se vrši u smeru delovanja te sile*

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F} . \quad (2.2.2)$$

Ukoliko je m konstantno, jednačina se može zapisati i kao

$$\vec{F} = m\dot{\vec{V}} = m\ddot{\vec{r}} . \quad (2.2.3)$$

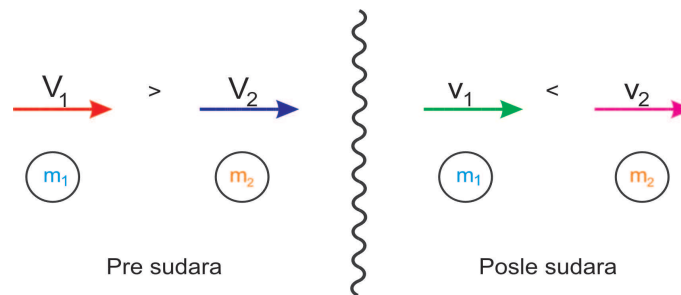
Njutnov prvi zakon, koji je osnova za statiku, jeste u stvari specijalni slučaj drugog Njutnovog zakona, gde je sila \vec{F} jednaka 0. Zapravo, ovo znači da, ukoliko više sila deluje na materijalnu tačku tako da je rezultujuća sila jednaka 0 ($\vec{F} = \dot{\vec{K}} = 0$), materijalna tačka ostaje u stanju mirovanja ($\dot{\vec{K}} = 0$) ili nastavlja da se pravolinijski kreće ravnomernom brzinom (što znači da je $\dot{\vec{K}} = const.$).



3. Impuls sile i količina kretanja. Ukoliko se sila \vec{F} pomnoži sa dt , a potom integrali, dobija se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{V}}{dt} dt = m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 . \quad (2.3.1)$$

Vremenski integral sa leve strane jednačine naziva se *impuls sile*, tako da jednačina (2.3.1) ukazuje na to da je promena u količini kretanja materijalne tačke jednaka impulsu sile koja deluje na tu materijalnu tačku.



Slika 2.3.1. – Impuls pre sudara jednak je impulsu posle sudara

Kada se dva tela međusobno sudare, tj. kada (u meri sistema) velika sila $\vec{f}(t)$ deluje u veoma kratkom vremenskom intervalu, na osnovu trećeg Njutnovog zakona, impulsi $\int \vec{f} dt$, koje dobijaju (daju) ova (dva) tela moraju biti jednaki (po intenzitetu) i suprotnog smera. Kako je impuls jednak promeni količine kretanja, ako posmatramo ova dva tela kao sistem, impulsi sudara poništavaju jedan drugog. Na osnovu ovoga, promena količine kretanja u posmatranom sistemu jednaka je nuli, a količina kretanja pre sudara mora biti jednaka količini kretanja nakon sudara. Po

pravilu, kada dođe do sudara dolazi i do gubitka energije te je impuls posle sudara (relaksacija–opuštanje) manji od impulsa u trenutku sudara (kompresija–sabijanje). Za slučaj centralnog sudara odnos ova dva impulsa ćemo označiti sa e i nazvati **❁** *koeficijent restitucije*. Ovak koeficijent se može prikazati u zavisnosti od brzine:

$$e = \frac{\left(\int \vec{f} \cdot dt\right)_{\text{rel.}}}{\left(\int \vec{f} \cdot dt\right)_{\text{com.}}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\vec{V}_1 - \vec{V}_2} = \frac{\text{odlazne brzine}}{\text{dolazne brzine}}. \quad (2.3.2)$$

Dakle, ukoliko se prilikom sudara ne gubi energija, sudar je elastičan i $e = 1$. Međutim, kada je sudar plastičan, koeficijent restitucije je nula i $e = 0$. U opštem slučaju, koeficijent restitucije, e , zavisi od gradivnosti (materijala), oblika i brzine ta dva tela.

§ 4. Rad i energija. Ukoliko sila deluje na materijalnu tačku tako da je pomeri za neko rastojanje $d\vec{r}$, tada je rad koji je sila izvršila jednak skalarnom proizvodu $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Ukupan rad koji se izvrši prilikom pomeranja od \vec{r}_1 do \vec{r}_2 je tada jednak:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}. \quad (2.4.1)$$

Zamenom sile \vec{F} i promenljive $d\vec{r} = \vec{V} dt$ (uz oznaku $|\vec{V}| = v$), dobija se izraz za rad

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} (\vec{V} \cdot \vec{V}) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} v^2 dt = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (2.4.2)$$

Skalarna velicina $\frac{1}{2} m v^2$ se naziva kinetička energija tačke, tako da je rad koji izvrši sila jednak promeni kinetičke energije te tačke.

Ovim smo definisali rad konzervativne sile koji je zavisio samo od položaja tačke, a ne i od dužine puta koji tačka pređe pod dejstvom sile. Na osnovu ovoga možemo reći da je rad koji se izvrši pod dejstvom konzervativne sile jednak nuli na bilo kojoj *zatvorenoj putanji*. **❁**

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.4.3)$$

Držeći se sličnog pristupa, možemo da definišemo potencijalnu energiju kao rad konzervativne sile na pomeranju neke tačke iz položaja \vec{r}_1 u neki referentni položaj \vec{r}_0 .

$$\int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1). \quad (2.4.4)$$

Svakoj tački u prostoru se može dodeliti skalarni potencijal $U(\vec{r})$, koji će zavisiti od referentne tačke. Posmatrajmo rad izvršen pod dejstvom konzervativne sile od položaja \vec{r}_1 do \vec{r}_2 . Kako rad ne zavisi od pređenog puta, možemo pisati:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{r_0}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{r_2}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(r_1) - U(r_2) . \quad (2.4.5)$$

Iz gore prikazanog se vidi da je rad koji se izvrši od r_1 do r_2 jednak razlici potencijala $-[U(r_2) - U(r_1)]$ pri čemu rezultat ne zavisi od referentne tačke. Dakle, da bi rad neke sile zavisio samo od krajnjih tačaka ta sila mora zavisiti samo od položaja i elementarni rad mora biti totalni diferencijal neke skalarne funkcije $U(\vec{r})$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU . \quad (2.4.6)$$

НАПОМЕНА: Rad neće zavisiti od puta već samo od početnog i krajnjeg položaja pokretne tačke, ako je sila gradijent neke skalarne funkcije zavisne samo od položaja. Ta skalarna funkcija se zove **funkcija sile** a skalar sa suprotnim znakom $V = -U$ je **potencijal sile** ili **potencijalna energija**. Sila koja ima takvu funkciju sile naziva se **konzervativna sila**. Takođe, sila je konzervativna ako je $rot\vec{F} = 0$ (pogledati odeljak 1.7. – **Diferencijalni operatori**).

U konzervativnom sistemu, ukupna energija je konstantna. Ako označimo kinetičku energiju slovom T , jednačina (2.4.2) se može napisati kao

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1) \quad (2.4.7)$$

odnosno, sređivanjem dobijamo

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \quad (2.4.8)$$

što predstavlja princip održanja energije u konzervativnim sistemima.

Kao primer konzervativne sile, može se uzeti gravitaciona sila Zemlje, koja je obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti od centra Zemlje,

$$\vec{F} = -m\vec{g} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (2.4.9)$$

pri čemu su \vec{g} i R gravitaciono ubrzanje na Zemljinoj površini i poluprečnik Zemlje, redom. Na visini h u odnosu na Zemljinu površinu potencijalna energija, odnosno, potencijal mase m jednak je

$$U(h) = \int_{R+h}^R -m\vec{g} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cdot d\vec{r} = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mg \frac{h}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)} . \quad (2.4.10)$$

Jasno je da je za male visine h količnik h/R zanemarljivo mali te se jednačina za potencijalnu energiju svodi na jednostavan oblik

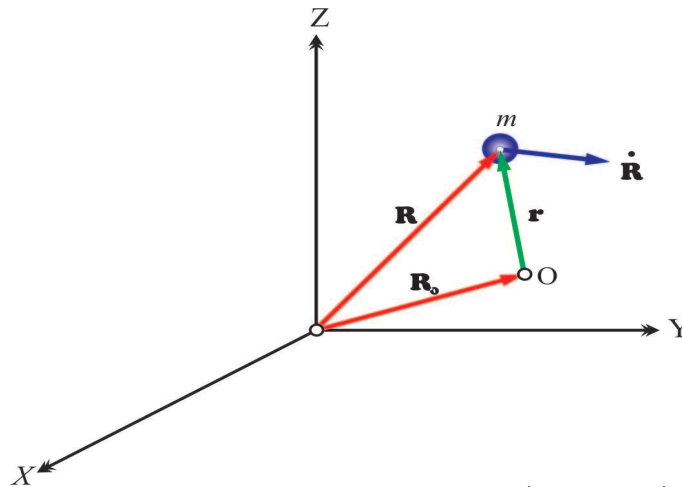
$$U(h) \cong mgh . \quad (2.4.11)$$

§ **5. Moment količine kretanja.** * Moment količine kretanja (kinetički moment) u proizvoljnoj tački O je

$$\vec{h}_0 = \vec{r} \times m\dot{\vec{R}} \quad (2.5.1)$$

gde je $\dot{\vec{R}}$ apsolutna brzina tačke mase m , a \vec{r} vektor položaja tačke u odnosu na izabrani pol O . Diferenciranjem ove jednačine dobija se

$$\dot{\vec{h}}_0 = \dot{\vec{r}} \times m\ddot{\vec{R}} + \vec{r} \times m\dot{\ddot{\vec{R}}}. \quad (2.5.2)$$



Slika 2.5.1. – Moment u odnosu na O impulsa $[m\dot{\vec{R}}]$ je $[\vec{r} \times m\dot{\vec{R}}]$

Zamenom $\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}$, pri čemu je $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$, jednačina (2.5.2) postaje

$$\dot{\vec{h}}_0 = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}} - \ddot{\vec{R}}_0 \times m\dot{\vec{r}}. \quad (2.5.3)$$

Da bi se uspostavila veza između $\dot{\vec{h}}_0$ i momenta \vec{M}_0 sile $\vec{F} = m\ddot{\vec{R}}$ koja deluje na tačku, imamo

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}} = \vec{r} \times m(\ddot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) - \ddot{\vec{R}}_0 \times m\dot{\vec{r}}. \quad (2.5.4)$$

Zamenom $\vec{M}_0 = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}}$ u jednačinu (2.5.3) možemo dobiti

$$\vec{M}_0 = \dot{\vec{h}}_0 + \ddot{\vec{R}}_0 \times m\dot{\vec{r}}. \quad (2.5.5)$$

Na osnovi jednačina (2.5.4) i (2.5.5) sledi nekoliko interesantnih zaključaka:

(a) Ako je tačka O fiksirana u prostoru tada je $\ddot{\vec{R}}_0 = \ddot{\vec{R}} = 0$ i $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}$ i dobijamo jednostavnu jednačinu

$$\vec{M}_0 = \dot{\vec{h}}_0$$

* u literaturi se često nalazi naziv Moment impulsa ili ugaoni moment

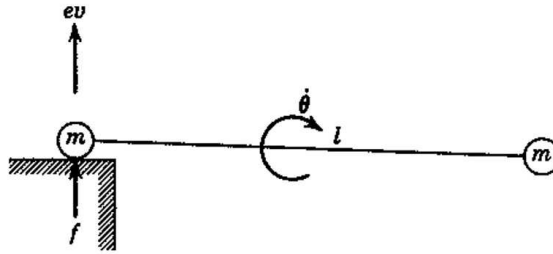
(b) Ako se tačka O kreće konstantnom brzinom, $\ddot{\vec{R}}_0 = 0$, tada je

$$\vec{M}_0 = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})$$

što kazuje da je moment sile jednak brzini promene postojećeg momenta količine kretanja datog preko relativne brzine $\dot{\vec{r}}$.

- (c) Ako su $\ddot{\vec{R}}_0$ i \vec{r} ili $\ddot{\vec{R}}_0$ i $\dot{\vec{r}}$ paralelni tada opet važe pojednostavljene jednačine.
 (d) Ako sistem sadrži više od jedne mase, tada drugi član u jednačini (2.5.4) ima oblik $-\ddot{\vec{R}}_0 \times \sum m\vec{r}$, što je jednako nuli ($\sum m\vec{r} = 0$) kada se tačka O podudara sa centrom mase. Jednačina momenta je tada ista kao i u slučaju (b).

Primer 2.5.1. *Pretpostavimo da se na oba kraja nekog idealnog štapa (bez težine) nalaze dve mase i neka je dužina tog štapa jednaka l . Pretpostavimo i da je taj štap pao bez rotacije i neka je leva masa udarila o ivicu brzinom v . Ukoliko se koeficijent restitucije označi sa e , treba utvrditi ugaonu rotaciju predmeta odmah nakon udara.*



Primer 2.5.1.

Brzina centra mase neposredno nakon udara je $ev - \frac{l}{2}\dot{\theta}$, a promena u količini kretanja je

$$\int f dt = 2m \left(ev - \frac{l}{2}\dot{\theta} \right) - (-2mv). \quad (a)$$

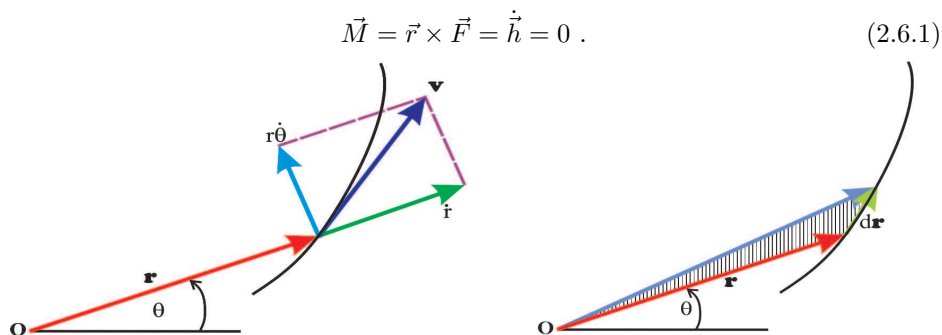
Dalje,

$$\frac{l}{2} \int f dt = 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \dot{\theta}. \quad (b)$$

Eliminacijom integrala, ugaona brzina neposredno nakon udara će biti,

$$\dot{\theta} = \frac{v}{l}(1 + e). \quad (c)$$

* **§ 6. Kretanje pod dejstvom centralne sile.** Sila koja je uvek usmerena ka nepokretnoj tački naziva se *centralna sila*. Ako se tačka O u sistemu polarnih koordinata uzme za nepokretnu tačku, moment centralne sile u tački O biće nula.



Slika 2.6.1. – Radijalna i transverzalna komponenta orbitalne brzine

Prema tome, moment količine kretanja u tački O je konstantan.

$$\vec{h} = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{const.} . \quad (2.6.2)$$

Iznos vektorskog proizvoda

$$|\vec{r} \times \vec{V}| = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt}$$

jednak je dvostruko površini koju "prebriše" radijus vektor u jedinici vremena, a jednak je i momentu količine kretanja jedinične mase koji ćemo označiti slovom h :

$$h = |\vec{r} \times \vec{V}| = r^2\dot{\theta} . \quad (2.6.3)$$

Sada ćemo ispitati kretanje pod dejstvom centralne sile $F(r)$, koja predstavlja neku proizvoljnu funkciju od r po jedinici mase. Radijalno i transverzalno ubrzanje će biti:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F(r) \quad (2.6.4)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} r^2\dot{\theta} = 0 . \quad (2.6.5)$$

Iz druge jednačine će se dobiti integral, uzimajući u obzir i jednačinu (2.6.3)

$$r^2\dot{\theta} = h = \text{const},$$

Zamenom $\dot{\theta} = h/r^2$ jednačina (2.6.4) dobija oblik

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = F(r) \quad (2.6.6)$$

ili, obzirom na

$$\ddot{r} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr}$$

$$\dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{h^2}{r^3} + F(r) . \quad (2.6.7)$$

Primenom integrala

$$\dot{r}^2 = -\frac{h^2}{r^2} + 2 \int F(r)dr + C . \quad (2.6.8)$$

Da bi se eliminisalo vreme, uzima se da je $\dot{r} = (dr/d\theta)\dot{\theta} = (dr/d\theta)(h/r^2)$, pa tako jednačina (2.6.8) izgleda

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = -r^2 + 2\frac{r^4}{h^2} \int F(r)dr + C\frac{r^4}{h^2} . \quad (2.6.9)$$

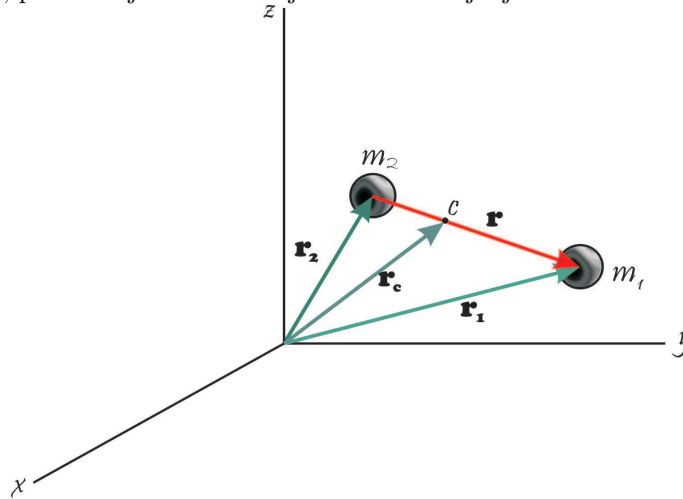
Kada je $F(r)$ određeno, jednačina kružne putanje se dobija integracijom gornje jednačine.

Druga važna jednačina je jednačina iz koje dobijamo brzinu kao zbir njenih komponenti

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = 2 \int F(r)dr + C . \quad (2.6.10)$$

Obzirom da veličina i smer \mathbf{h} moraju biti konstantni, kružna površina upravna na \mathbf{h} takođe mora biti nepromenljiva. Dakle, kretanje pod dejstvom centralne sile zahteva konstantnu promenu i stalnu orijentaciju površine*. Kretanje planeta, na osnovu drugog Keplerovog zakona, potvrđuje gore navedene zahteve.

§ 7. Problem dva tela. Posmatrajmo dva tela kao materijalne tačke koje se kreću pod dejstvom međusobno privlačnih sila. Neka su \vec{r}_1 , \vec{r}_2 i \vec{r}_c , respektivno, vektori položaja svake od masa i njihovog centra mase*. Vektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, pri čemu je \vec{r} vektor koji definiše rastojanje između tačaka.



Slika 2.7.1. – Vektor pomeranja dve mase i njihovog centra mase c



* može se reći da je sektorska brzina (tj. brzina promene površine sektora) konstantna

* može se reći i centar inercije

Udaljenost tačaka od njihovog centra mase je $[m_2/(m_1 + m_2)]\vec{r}$ i $[m_1/(m_1 + m_2)]\vec{r}$, te se \vec{r}_1 i \vec{r}_2 mogu prikazati preko \vec{r}_c i \vec{r} na sledeći način

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2.7.1)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Neka su \vec{F}_1 i \vec{F}_2 sile koje deluju, respektivno, na m_1 i m_2 , tada će Njutnove jednačine kretanja biti

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_c + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} \quad (2.7.2)$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_c - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}$$

Takođe, može se napisati i jednačina za kinetičku energiju

$$T = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{r}_c^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{r}^2 . \quad (2.7.3)$$

Ukoliko pretpostavimo da je sistem izolovan od dejstva spoljnih sila, tada će rezultujuća sila biti $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, što zahteva da ubrzanje centra mase bude nula. Tada se jednačina za silu svodi na

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \ddot{\vec{r}} . \quad (2.7.4)$$

Jednačine (2.7.3) i (2.7.4) ukazuju na to da se problem dva tela može svesti na jedno telo mase $(m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ na udaljenosti \vec{r} od centra mase, koji se ili ne kreće ili se ravnomerno kreće duž pravolinijske putanje. Treba primetiti da uslov $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ne zahteva da sile budu kolinearne, tako da u sistemu sila može biti kako spregnutog tako i kolinearnog međusobnog privlačenja.

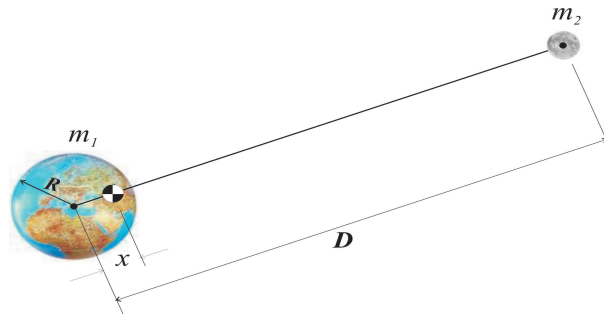
Ukoliko je jedna masa veoma velika u odnosu na drugu, ekvivalent mase $(m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ se svodi na manju masu koja se kreće ka središtu veće mase. Ovo je osnovni uslov koji se uzima u obzir kada satelit uđe u orbitu Zemlje. Ipak, važno je da se zna da imamo problem dva tela koji se može analizirati kao ekvivalent problemu jednog tela.

Primer 2.7.1. *Pretpostavimo da je odnos mase Meseca i zbira mase Zemlje i Meseca poznat kao*

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} .$$

Posmatranjem sistema kao sistema nepokretnih zvezda, ugaona brzina u pravcu linije koja povezuje centre Zemlje i Meseca se može izmeriti kao $\omega = 2.66 \times 10^{-6}$ rad/s. Pokazaćemo da udaljenost dva tela iznosi

$$D^3 = \frac{gR^2}{\omega^2(1-\mu)}$$



Slika 2.7.2. – Sistem Zemlja-Mesec i njihov centar mase

Izraz za centar mase možemo prikazati kao jednačinu

$$m_1x = (D - x)m_2, \quad x = D\mu$$

gde je x rastojanje od središta Zemlje do centra mase i D rastojanje između središta Zemlje i Meseca. Izjednačavanjem sile iz jednačine (2.7.4) sa Njutnovom gravitacionom silom, dobija se

$$\frac{Gm_1m_2}{D^2} = \frac{Km_2}{D^2} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}D\omega^2$$

$$D^3 = \frac{K(m_1 + m_2)}{m_1\omega^2}$$

Zamenom $1 - \mu = m_1/(m_1 + m_2)$ i $K = gR^2$ dobija se

$$D^3 = \frac{gR^2}{\omega^2(1-\mu)}$$

§ 8. Orbite planeta i satelita. U problemu dva tela, gde je masa jednog tela mnogo veća u odnosu na masu drugog, kretanje manje mase se odvija oko veće mase čije je gravitaciono privlačenje obrnuto srazmerno kvadratu rastojanja. Za veštački satelit koji se kreće oko Zemlje kao svog centra, gravitaciono privlačenje je

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \quad (2.8.1)$$

pri čemu su M i m , respektivno, mase Zemlje i satelita, G je konstanta, a r je udaljenost mase m od centra Zemlje. Jednačina (2.8.1) se, takođe, primenjuje na sisteme Zemlja-Sunce i Zemlja-Mesec. Konstanta GM se može dobiti i iz jednostavnog eksperimenta padanja tela na zemljinu površinu. Ako je izmerena brzina padajućeg tela jednaka g za $r = R$, tada je $F/m = -g = -GM/R^2$. Izvršićemo

sad zamenu konstante $GM = gR^2$ slovom μ . Konstanta μ se, takođe, može dobiti i iz merenja prilikom posmatranja kruženja satelita oko Zemlje.

Pod pretpostavkom da je satelit uspešno lansiran, njegovo kretanje se vrši u odnosu na jednačine za:

Radijalnu silu

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.8.2)$$

Transverzalnu silu

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} r^2 \dot{\theta} = 0. \quad (2.8.3)$$

Druga jednačina dovodi do zaključka da se moment količine kretanja održava (po jedinici mase) $r^2\dot{\theta} = h$. S obzirom da je naše interesovanje vezano za oblik orbite, potrebno je eliminisati nezavisnu promenljivu t zamenom na sledeći način

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}$$

Zamenom $1/r = u$, dobija se sledeća promenljiva

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Zamenom ovih veličina u jednačinu za radijalnu silu, dobija se diferencijalna jednačina orbite

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (2.8.4)$$

Jednačina (2.8.4) je diferencijalna jednačina drugog reda i zahteva dve nezavisne promenljive u opštem rešenju. Opšte rešenje za ovu diferencijalnu jednačinu će biti

$$u = \frac{\mu}{h^2} + C \cos(\theta - \theta_0) \quad (2.8.5)$$

pri čemu je $\frac{\mu}{h^2}$ parcijalni integral.

Konstanta θ_0 može biti nula, kada se θ meri od *perigeja* (perigee) (perigej: ❀ tačka na orbiti gde je rastojanje od središta Zemlje najmanje).

Do konstante C se može doći preko jednačine za energiju. Za telo koje se nalazi na visini izvan uticaja atmosfere, sistem je konzervativan i ukupna energija tela $E = T + U$ na bilo kojoj orbiti je konstantna.

Da bi se odredila potencijalna energija tela jedinične mase, za referentnu tačku ćemo izabrati tačku koja se nalazi u beskonačnosti. Tada iz jednačine (2.8.1) dobijamo

$$U(r) = -\mu \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{\mu}{r}. \quad (2.8.6)$$

Dodavanjem ove jednačine kinetičkoj energiji tela jedinične mase, ukupna energija će biti

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (2.8.7)$$

Izraženo preko $\frac{1}{r} = u$ i θ

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = h^2 \left[C^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{\mu}{h^2} + C \cos \theta \right)^2 \right]. \quad (2.8.8)$$

Svrstavanjem jednačina (2.8.5) i (2.8.8) u (2.8.7) rezultat će biti

$$C^2 = \left(\frac{\mu}{h^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2} \right). \quad (2.8.9)$$

Jednačina za u sada se može napisati kao

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \theta) \quad (2.8.10)$$

gde je

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}. \quad (2.8.11)$$

Jednačine (2.8.10) i (2.8.11) se mogu primeniti na opšti slučaj kada se kretanje vrši pod dejstvom centralne sile (koja je, kao što je poznato, obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja), dok se vrsta orbite određuje na osnovu brojnih vrednosti od e na sledeći način

$$\text{Tip Orbite} = \begin{cases} e > 1, & \text{hiperbola} \\ e = 1, & \text{parabola} \\ 0 < e < 1, & \text{elipsa (perigej kome odgovara } \theta = 0) \\ e = 0, & \text{krug} \\ -1 < e < 0, & \text{polukružna elipsa (apogej kome odgovara } \theta = 0) \end{cases}$$

✿ pri čemu je *apogej* tačka na orbiti u kojoj je rastojanje od središta Zemlje najveće.

§ 9. Geometrija konusnih preseka. Kretanje pod dejstvom centralne sile se odvija po orbiti koja predstavlja vrstu konusnog preseka. Za svaki konusni presek u ravni postoji tačka F i prava d takva da je odnos rastojanja proizvoljne tačke konusnog preseka do F i d konstantan i jednak broju e . Koristićemo nazive:

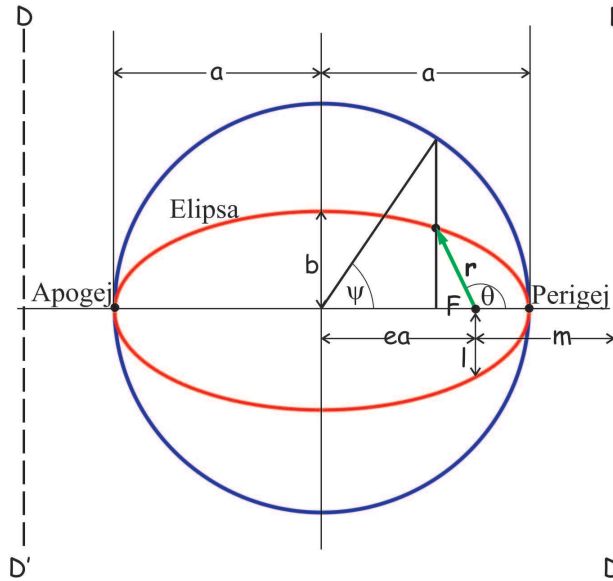
- e – ekscentričnost orbite (ekscentricitet)
- F – žiža ili fokus
- d – direktrisa ili vodilja koja odgovara fokusu F

Ako je m rastojanje od fokusa F do direktrise d onda će polarna jednačina konusnog preseka biti

$$r = e(m - r \cos \theta) \quad \text{ili} \\ r = \frac{em}{1 + e \cos \theta} \quad (2.9.1)$$

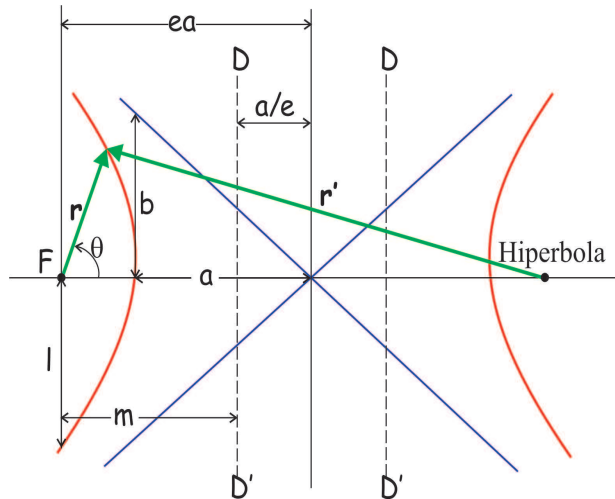
Stavljajući da je $\theta = 0^\circ, 90^\circ$, i $\text{tg}^{-1}(b/a)$, nalazimo karakteristična rastojanja prikazana na slikama 2.9.1, 2.9.2, 2.9.3.

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \\ = \frac{r_p(1 + e)}{1 + e \cos \theta} \\ = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \\ me = l \\ r_p = a(1 - e)$$



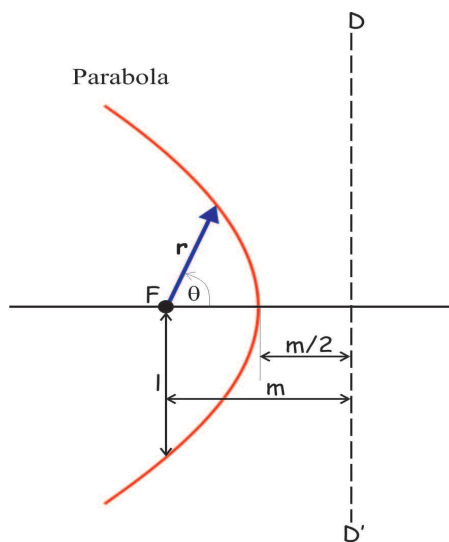
Slika 2.9.1. Elipsa

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \\ = \frac{r_p(1 + e)}{1 + e \cos \theta} \\ = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} \\ me = l \\ r_p = a(e - 1) \\ r' - r = 2a$$



Slika 2.9.2. Hiperbola

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{m}{1 + e \cos \theta} \\
 &= \frac{2r_p}{1 + e \cos \theta} \\
 m &= l \\
 r_p &= \frac{l}{2}
 \end{aligned}$$



Slika 2.9.3. Parabola

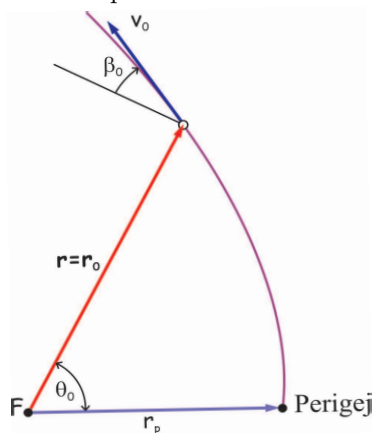
§ 10. **Određivanje putanje iz početnih uslova.** Neka su početni uslovi pri lansiranju neke rakete:

$$r = r_0$$

$$v = v_0$$

$$\beta = \beta_0$$

pri čemu je β čeonni ugao meren od normale na radijus vektor \vec{r} kao što je prikazano na slici (2.10.1). Na osnovu datih podataka trebalo bi ustanoviti



Slika 2.10.1. početni uslovi prilikom lansiranja u orbitu

vrednosti za ekscentricitet e , koje određuju vrstu orbite, i θ_0 tj. ugao između perigeja i r_0 .

Neka je r_p udaljenost perigeja za $\theta = 0$ (kada je e negativno, $\theta = 0$ onda imamo r_a što je udaljenost apogeja) pa se iz jednačine (2.8.10) dobija

$$\frac{h^2}{\mu} = r_p(1 + e) . \quad (2.10.1)$$

Jednačina (2.8.10) se može zapisati i kao

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{r_p(1 + e)} . \quad (2.10.2)$$

Komponente početne brzine su

$$v_0 \cos \beta_0 = r_0 \dot{\theta}_0 = \frac{h}{r_0} \quad (2.10.3)$$

$$v_0 \sin \beta_0 = \dot{r}_0 = -h \left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = \frac{\mu e \sin \theta_0}{r_0 v_0 \cos \beta_0} . \quad (2.10.4)$$

Obzirom da se na osnovu jednačine (2.8.10) može napisati

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \theta_0) \quad (2.10.5)$$

zamenom za h^2 iz jednačine (2.10.3), dobija se jednačina

$$\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \cos^2 \beta_0 = 1 + e \cos \theta_0 . \quad (2.10.6)$$

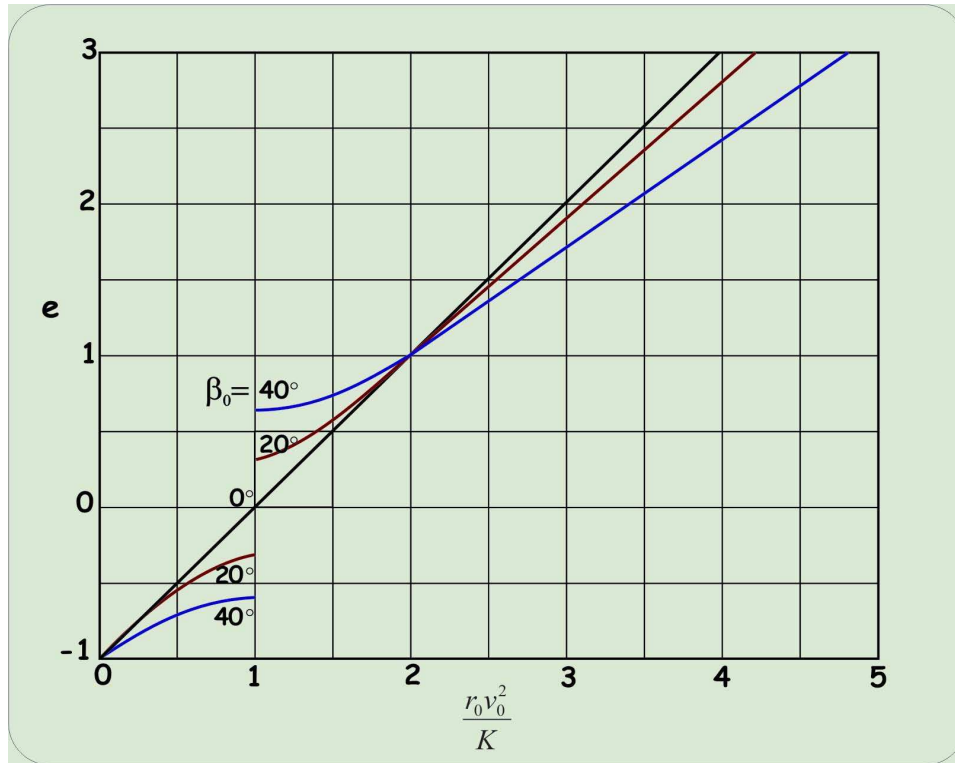
Rešavanjem $e \sin \theta_0$ i $e \cos \theta_0$ iz jednačina (2.9.4) i (2.9.6) i deljenjem, dobija se ugaoni položaj u odnosu na perigej

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{(r_0 v_0^2 / \mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{(r_0 v_0^2 / \mu) \cos^2 \beta_0 - 1} . \quad (2.10.7)$$

Kvadriranjem $e \sin \theta_0$ i $e \cos \theta_0$ i sabiranjem tih kvadrata dobija se

$$e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0 . \quad (2.10.8)$$

Jednačine (2.10.7) i (2.10.8) u potpunosti određuju orbitu za bilo koje početne vrednosti $r_0 v_0^2 / \mu$ i β_0 uređene u bezdimenzionom formatu.



Slika 2.10.2. Određivanje ekcentriciteta orbite iz početnih uslova za β i rv^2/μ

Takođe, ukupna energija pri lansiranju dobija se iz jednačine (2.8.7):

$$\frac{Er_0}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1. \quad (2.10.9)$$

Grafik jednačine (2.10.8), koji daje e u funkciji od $r_0 v_0^2/\mu$ i za parametar β_0 , prikazan je na slici (2.10.2). Očigledno je da, ako je $\beta_0 \neq 0$, e nikad ne može biti nula, a to znači da kružna orbita nije moguća. Jednačina (2.10.7) pokazuje da je $\theta_0 = 90^\circ$ kada je $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 = 1$. Za $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 < 1$ i $\beta_0 > 1$, θ_0 je u drugom kvadrantu.

§ 11. Lansiranje satelita kad je $\beta_0 = 0$. Specijalan slučaj lansiranja satelita pri $\beta_0 = 0$ je veoma poučan, s obzirom da je veoma jednostavan za proučavanje. Iz jednačine (2.10.7) je očigledno da je tada $\theta_0 = 0$, pa tačka lansiranja odgovara perigeju. Sada se jednačina (2.10.8) može zapisati kao

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1 \quad (2.11.1)$$

odakle, za $\beta_0 = 0$, dobijamo pravu liniju na slici (2.10.2). Jednačina (2.11.1) pokazuje da je kružna orbita ($e = 0$) dostižna (moguća samo kada je $r_0 v_0^2/\mu = 1$ i

$\beta_0 = 0$. Ako se v_0 ili r_0 uvećaju tako da je $1 < r_0 v_0^2 / \mu < 2$, onda orbita postaje elipsa. Za vrednosti $r_0 v_0^2 / \mu > 2$, orbita će biti hiperbola i satelit će se odvojiti od Zemlje. Shodno ovome, $r_0 v_0^2 / \mu = 2$ odgovara brzini oslobađanja* na visini $r_0 = R + z$.

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} = R \sqrt{\frac{2g}{R+z}} . \quad (2.11.2)$$

Uzimajući u obzir geometriju eliptičke orbite, velika i mala poluosa su

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{1-e} \quad (2.11.3)$$

$$\frac{b}{r_0} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (2.11.4)$$

Rastojanje apogeja je

$$\frac{r_a}{r_0} = \frac{1+e}{1-e} \quad (2.11.5)$$

i preko visine z iznad Zemlje, visina apogeja i perigeja su

$$\frac{z_a}{R} = \frac{r_0}{R} \frac{1+e}{1-e} - 1 \quad (2.11.6)$$

$$\frac{z_p}{R} = \frac{r_0}{R} - 1 . \quad (2.11.7)$$

Numeričke vrednosti za malo e su date u donjoj tabeli da bi se ilustrovalo malo odstupanje eliptičnih orbita od kružnih uprkos velikim razlikama visina apogeja i perigeja.

Tabela 2.11.1: Račun visina pri lansiranju, $r_0/R = 1.10$

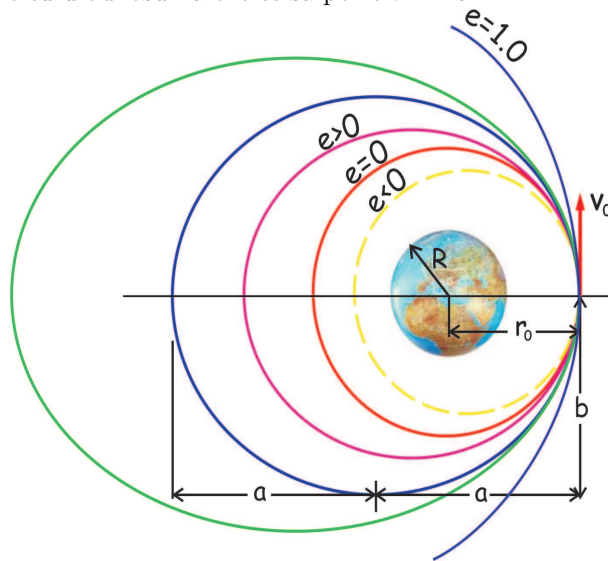
e	$\frac{1+e}{1-e}$	$\frac{z_a}{z_p}$	$\frac{a}{b}$	$\left(\frac{v_e}{v_k}\right)^*$
0.00	1.00	1.00	1.000	1.00
0.05	1.105	2.15	1.00125	1.025
0.10	1.22	3.40	1.0050	1.050
0.20	1.50	6.50	1.020	1.096

Napomena*. v_e je brzina potrebna za kretanje po eliptičnoj orbiti, a v_k je brzina potrebna za kretanje po kružnoj orbiti i obe veličine se odnose na brzine pri lansiranju.

Za ekscentricitet od 0.20, visina apogeja (apogejska visina) je 6,50 puta veća od visine perigeja (perigejske visine) za visinu lansiranja $r_0 = 1.10R$, odnosno za visinu oko 640 kilometara iznad Zemljine površine.

* ova brzina je poznata kao II kosmička brzina – najmanja brzina koju je potrebno dati objektu (čija je masa zanemarljiva u odnosu na masu planete od koje odlazi) da bi objekt nastupio gravitaciono polje planete

Može se sada ispitati i slučaj kada je $r_0 v_0^2 / \mu < 1$. Jednačina (2.8.10) sa negativnim ekscentricitetom e pokazuje da će putanja biti elipsa sa početnom tačkom u apogeju, a perigej je na $\theta = 180^\circ$. Brzina neće biti dovoljna da se uravnoteži Zemljina privlačna sila i udaljenost r satelita će se smanjivati, tj. biće manja u odnosu na početnu vrednost r_0 . Sa negativnim e , centar elipse će se pomerati (nalaziće se, padaće) između svog početnog položaja i tačke lansiranja. Očigledno je da će, na osnovu prethodnog skupa brojnih vrednosti, satelit upasti u oblast delovanja otpora atmosfere, čak i za veoma malo negativno e . Slika (2.11.1) pokazuje jednu takvu orbitu u odnosu na orbite sa pozitivnim e .



Slika 2.11.1 Sateliti lansirani sa $\beta_0 = 0$

Periodi kretanja po približnim putanjama, elipsama ili kružnicama, mogu da se dobiju tako što obuhvaćenu površinu podelimo sa konstantom površine (a to je skalarna vrednost sektorske brzine*) $h/2$. Površina elipse je πab ; mala poluosa je (vidi sliku (2.9.1)) $b = a\sqrt{1 - e^2}$ i h iz jednačine (2.10.5) za $\theta = 0$ je

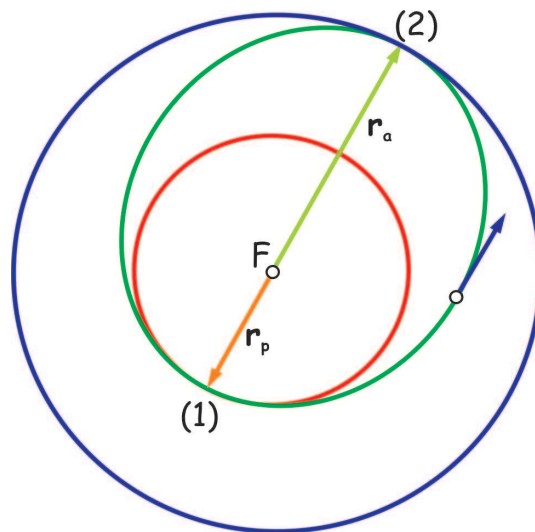
$$h = \sqrt{\mu r_p(1 + e)} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} .$$

Na ovaj način, jednačina za period obilaska orbite je

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} . \quad (2.11.8)$$

* Sektorska brzina ne mora imati dimenziju brzine i predstavlja površinu koju "prebriše" radius vektor u jedinici vremena. Ta površina je uvek ista u jedinici vremena. Za kružne orbite sektorska brzina $h = 2\pi R^2/\tau$ tj. h se dobija kada se dvostruka površina kruga podeli sa periodom obilaska orbite

§ 12. Kotangencijalni transfer između koplanarnih kružnih orbita. Prelaz između koplanarnih kružnih orbita se može postići pomoću jedne prelazne putanje elipsnog oblika koja spaja dve koplanarne (a to znači u istoj ravni) i koncentrične kružne putanje. Pri tome su udaljenosti perigeja i apogeja jednake poluprečnicima dotičnih kružnih orbita, kao što je prikazano na slici (2.12.1). Ova prelazna kotangencijalna elipsa je poznata kao Homanova trajektorija i može se pokazati da ona ima najmanju energiju u odnosu na druge koplanarne kružne orbite.



Slika 2.12.1 Homanova trajektorija

Pretpostavljajući da se prelaz izvršava od 1 ka 2, možemo dobiti odnos r_a/r_p iz jednačine (2.8.10). Uzimajući da je $\theta = 180^\circ$, $u = 1/r_a$ dobija se

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e}. \quad (2.12.1)$$

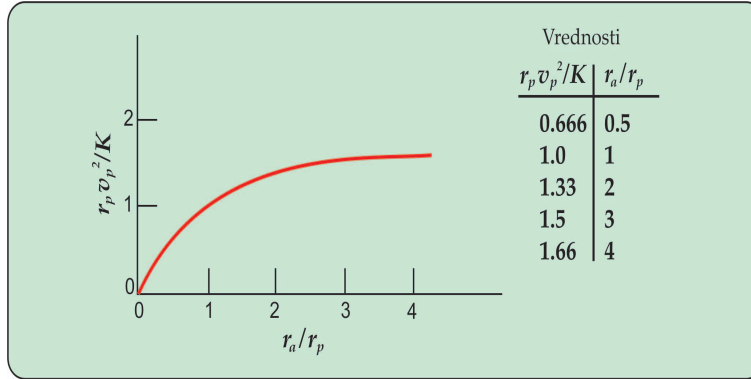
Pomoću jednačine (2.11.1), e se može napisati kao

$$e = \frac{r_p v_p^2}{\mu} - 1. \quad (2.12.2)$$

Zamenom jednačine (2.12.1) u (2.12.2), dobija se

$$\frac{r_p v_p^2}{\mu} = \frac{2(r_a/r_p)}{1+(r_a/r_p)} \quad (2.12.3)$$

što je razmotreno na slici (2.12.2).



Slika 2.12.3. – $r_p v_p^2 / \mu$ potrebno za Homanov transfer između orbita r_a / r_p

Analizirajući ove rezultate, može se pretpostaviti da će svemirska letilica inicijalno kružiti po unutrašnjem krugu poluprečnika r_p . U ovom slučaju vrednost $r_p v_p^2 / \mu$ mora biti jednaka 1.0. Da bi letilica prešla sa unutrašnje kružne putanje na prelaznu elipsnu trajektoriju određenu odnosom r_a / r_p , $r_p v_p^2 / \mu$ mora dostići vrednost datu jednačinom (2.12.3). Dakle, potrebna je promena (i to priraštaj) brzine $\Delta v_1 = v_1 - v_{k1}$ jer je elipsna brzina v_1 veća od kružne brzine v_{k1} . Prema definiciji Homanove trajektorije ova promena mora biti kao vektor tangencijalna na unutrašnju putanju i mora biti usmerena u smeru kretanja po kružnoj putanji. Osim toga, pošto je reč o bespogonskim putanjama smatra se da je promena brzine obavljena jednokratnim trenutnim impulsom, npr. kratkotrajnim radom raketnih motora tako da je trajanje potisnog impulsa zanemarljivo u poređenju sa vremenom preleta po Homanovom putu. Zahtevano uvećanje brzine će biti

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left[\sqrt{\frac{2(r_a/r_p)}{1 + (r_a/r_p)}} - 1 \right]. \quad (2.12.4)$$

Prilikom dostizanja položaja 2, apogej brzina, koja se može pronaći pomoću jednačine momenta količine kretanja (moment impulsa) u položaju 1 i 2 tj. $r_p v_p = r_a v_a$, postaje

$$\frac{r_a v_a^2}{\mu} = \frac{r_p r_p v_p^2}{r_a \mu} = \frac{2}{1 + r_a/r_p}. \quad (2.12.5)$$

Obzirom da kružna brzina putanje poluprečnika r_a iznosi $r_a v_a^2 / \mu = 1$, a da je apogej brzina data u jednačini (2.12.5) manja od 1, neophodan je još jedan trenutni impuls koji će omogućiti prelazak na sledeću orbitu. To znači da kad letilica dospe do spoljašnje putanje kruga r_a ona se mora početi vraćati po drugom delu elipse, zato što je sad elipsna putanjska brzina v_2 tela manja od potrebne kružne brzine v_{k2} po spoljašnjoj trajektoriji. Potrebna promena brzine se obavlja trenutno (uz, kao što je rečeno, trenutni impuls) u položaju dodira i iznosi

$$\Delta v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + r_a/r_p}} \right]. \quad (2.12.6)$$

Ova promena brzine je tangencijalna na spoljašnjoj putanji i u smeru kretanja po dolaznoj elipsnoj putanji.

Znači, ukupni impuls koji se mora ostvariti u smeru kretanja je određen sa $\Delta v_p + \Delta v_a$, a energija goriva koja mu odgovara je proporcionalna sa $(\Delta v_p + \Delta v_a)^2$. Interesantno je i da se uporedi ukupno uvećanje brzine pri prelasku iz orbite 1 u orbitu 2 sa uvećanjem brzine pri oslobađanju iz orbite 1. Parabolička brzina oslobađanja od orbite radijusa r_p biće, na osnovu $r_p v_p^2 / \mu = 2$

$$v_{pe} = 1.414 \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \quad (2.12.7)$$

što zahteva povećanje brzine od

$$\Delta v_p = 0.414 \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \quad (2.12.8)$$

a koje je postignuto jednim trenutnim impulsom.

Ukupno uvećanje brzine za Homanovu trajektoriju se dobija sabiranjem jednačina (2.12.4) i (2.12.6) i iznosi

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left[\sqrt{\frac{2(r_a/r_p)}{1+(r_a/r_p)}} \left(1 - \frac{r_p}{r_a} \right) + \sqrt{\frac{r_p}{r_a}} - 1 \right]. \quad (2.12.9)$$

Izjednačavanjem (2.12.8) i (2.12.9) dobija se da je $r_a/r_p = 3.4$. Znači, transfer između kružnih orbita sa $r_a/r_p > 3.4$ će zahtevati da energija rakete prevaziđe energiju potrebnu za napuštanje orbite.

Heliocentrične orbite

Podsetimo se da u Sunčevom sistemu za posmatrača pretežno vezanog za Zemlju, kretanje veštačkog satelita je, po pravilu, *geocentrično*, ali u nekim slučajevima pogodno je fiktivnog posmatrača smestiti u centar Sunca i onda je to kretanje *heliocentrično*.

Kada su u pitanju planetske orbite, ogromna masa Sunca (koja čini 99,2% od ukupne mase Sunčevog sistema) dozvoljava da se zanemare gravitacioni uticaji svih ostalih tela i sve ostale (negravitacione) sile. Iako su planetske orbite elipse čije su orbitalne ravni blago nagnute u odnosu na ekliptiku*, znatna pojednostavljenja proizilaze iz pretpostavke da su te orbite kružne i koplanarne.

Na sličan način, polazeći od toga da su orbite kružne i koplanarne, jednačine za Homanove trajektorije kod veštačkih satelita su primenljive sa brojnim vrednostima za konstantu μ koja se odnosi na Sunce. μ za Sunce se može dobiti na osnovi merenja za bilo koju planetu. Uzimajući da je Zemljina putanja kružna i poluprečnika r , dobićemo

$$\frac{rv^2}{\mu} = 1 \quad (2.12.10)$$

* Ekliptika je projekcija na nebesku sferu eliptične orbite po kojoj se Zemlja kreće oko Sunca (*revolucija*); ugao između ravni Zemljinog ekvatora i ravni ekliptike iznosi oko $23^\circ 27'$

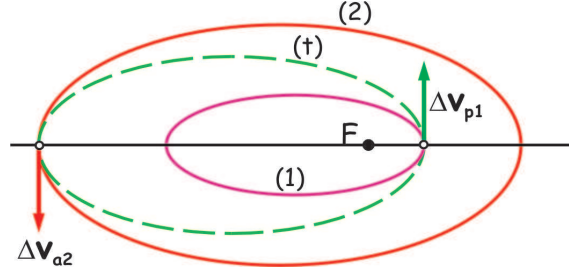


gde je $r = 149.5 \times 10^6$ kilometara
 $\mu = GM_{\odot}$, za Sunce
 $v = 2\pi r/\tau =$ brzina Zemlje
 $\tau = 365.25 \times 86400$ sec = period obilaska Zemlje oko Sunca

Zamenom u jednačinu (2.12.10), dobija se da μ za heliocentrični sistem iznosi $1,32514 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{sec}^2$. ■

Drugi pogodan skup jedinica za planetske i interplanetske orbite je onaj koji se odnosi na Zemljinu orbitu i to $r=1$ astronomska jedinica i $\tau = 1$ godina. Zamenom ovih jedinica u jednačini za period $\tau = 2\pi\sqrt{(r^3/\mu)}$, heliocentrična konstanta μ postaje $4\pi^2 [(AJ)^3/\text{god}^2]$ ([astronomskih jedinica na kub po godini na kvadrat]).

§ 13. Transfer između koplanarnih eliptičnih orbita sa zajedničkom osom. Slika (2.13.1) prikazuje dve eliptičke orbite u istoj ravni i sa zajedničkom osom. Da bi se izvršio transfer sa unutrašnje orbite 1 na spoljnu 2, može se pokazati da, uz minimalam utrošak energije, potisak (onaj kratkotrajni rad raketnih motora, impuls) mora da se izvede u perigeju unutrašnje orbite i potom u apogeju spoljašnje orbite. Neka su dati parametri a i e obe orbite.



Slika 2.13.1. – Transfer između koplanarnih eliptičnih orbita sa zajedničkom osom

Udaljenosti perigeja i apogeja su poznate iz relacija $r_p = a(1 - e)$ i $r_a = a(1 + e)$.

Pre impulsa, brzina u perigeju p_1 se može dobiti iz jednačine (2.10.6), uzimajući da je $\beta = 0$ i $\theta = 0$,

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}}(1 + e_1)}. \quad (2.13.1)$$

Za transfernu orbitu (trajektoriju), potrebna brzina u perigeju v_{pt} može se dobiti pomoću jednačine (2.12.3)

$$v_{pt} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \left[\frac{2(r_{a2}/r_{p1})}{1 + (r_{a2}/r_{p1})} \right]}. \quad (2.13.2)$$

Tada je potrebno uvećanje brzine u perigeju unutrašnje orbite

$$\Delta v_{p1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}}} \left[\sqrt{\frac{2(r_{a2}/r_{p1})}{1 + (r_{a2}/r_{p1})}} - \sqrt{1 + e_1} \right]. \quad (2.13.3)$$

Nakon odvajanja, letilica nastavlja duž transferne orbite ka apogeju. Kada dođe u apogej, brzina letilice v_{at} je

$$v_{at} = \frac{r_{p1}}{r_{a2}} v_{pt} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}} \frac{2}{1 + (r_{a2}/r_{p1})}}. \quad (2.13.4)$$

Brzina u apogeju za orbitu 2 se dobija pomoću jednačine (2.10.6), uzimajući da je $\beta = 0$ i $\theta = 180^\circ$,

$$v_{a2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}} (1 - e_2)}. \quad (2.13.5)$$

Uvećanje brzine koje je potrebno za prelaz iz transferne orbite (t) u orbitu (2) u apogeju iznosi

$$\Delta v_{a2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}}} \left[\sqrt{1 - e_2} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_{a2}/r_{p1})}} \right]. \quad (2.13.6)$$

Ukupno uvećanje brzine u tangencijalnom smeru je

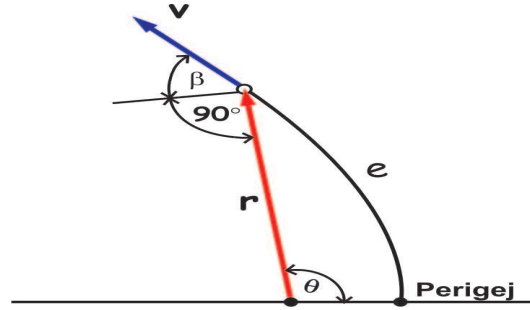
$$\Delta v_{p1} + \Delta v_{a2}$$

§ 14. Promena orbite usled trenutnog impulsa (potiska). U ovom poglavlju će se razmatrati opšti problem preleta iz postojeće orbite u drugu orbitu definisanih osobina. Ovakve promene mogu da se kreću u domenu od malih promena u postojećoj orbiti, do velikih promena u orbiti preleta. Pretpostavka od koje će se polaziti je da će se promena dešavati usled naglog kratkotrajnog potiska; na primer, promena smera i intenziteta vektora brzine će se desiti usled neznatne izmene vektora pomeraja. Ova idealizacija je opšte prihvatljiva kada je dužina putanje dok potisak traje zanemarljivo mala u odnosu na radijus vektor.

U ovom delu ćemo posmatrati eliptičke i hiperboličke orbite, obzirom da su krug i parabola specijalni ograničavajući slučajevi. Odnos brzine v , ugaone pozicije θ , čeonog ugla β i ekscentričnosti e (slika 2.14.1) se vidi iz jednačina (2.9.7) i (2.9.8), pa se tako dobija

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(rv^2/\mu) \sin \beta \cos \beta}{(rv^2/\mu) \cos^2 \beta - 1} \quad (2.14.1)$$

$$e^2 = \left[\frac{rv^2}{\mu} - 1 \right]^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta. \quad (2.14.2)$$



Slika 2.14.1. – Vektor pomeraja, brzina i čeonni ugao β za proizvoljno θ

Uzimajući da je θ konstantno, promenljive β i rv^2/μ se mogu izračunati iz preuređene jednačine (2.14.1)

$$\frac{rv^2}{\mu} = \frac{1}{\cos^2 \beta - (\sin \beta \cos \beta)/(\operatorname{tg} \theta)}. \quad (2.14.3)$$

Ukoliko je e konstantno, a β je promenljiva, kriva zavisnosti rv^2/μ od β se dobija uređivanjem jednačine (2.14.2) i dolazi se do

$$\frac{rv^2}{\mu} = 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1 - e^2}{\cos^2 \beta}\right)}. \quad (2.14.4)$$

Ovi rezultati za elipsu i hiperbolu su razmotreni na slikama (2.14.2) i (2.14.3)

Uz prethodne dve jednačine, postoji i jednačina za energiju (2.8.7) pa imamo

$$\frac{Er}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{rv^2}{\mu} - 1. \quad (2.14.5)$$

Ozbirom da je za datu orbitu E konstantno, može se proceniti energija u perigeju. Uzimajući da je $\theta = \beta = 0$ u jednačinama (2.14.1) i (2.14.2)

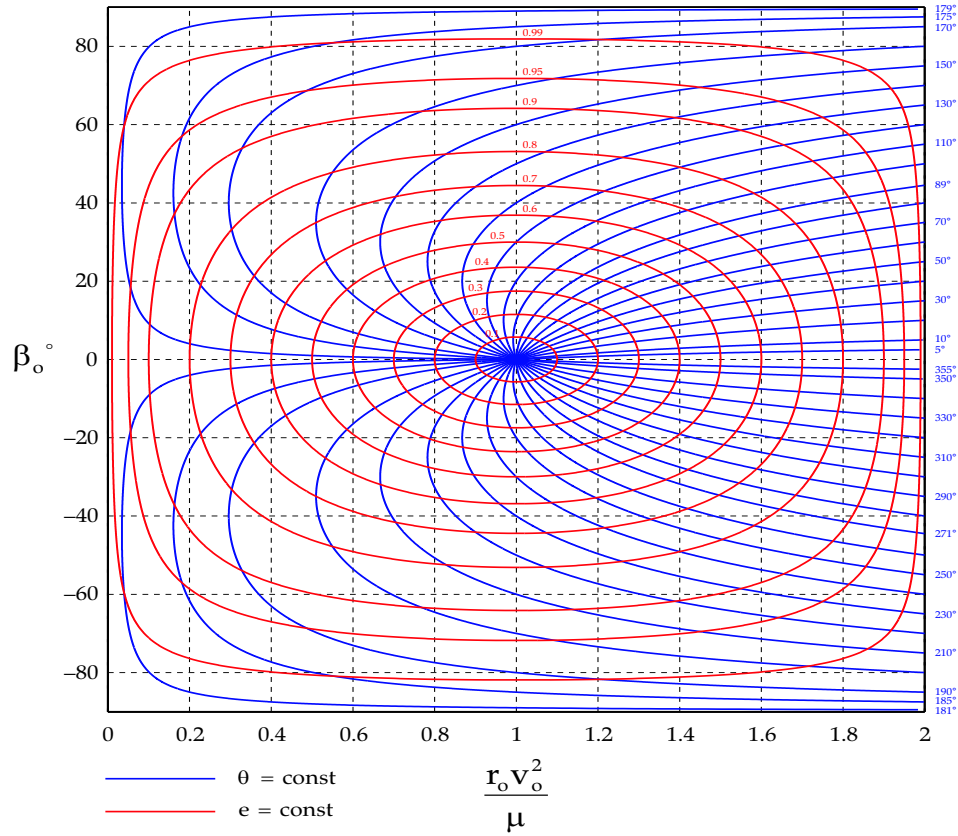
$$e = \frac{r_p v_p^2}{\mu} - 1 \quad (2.14.6)$$

a zatim smenom $r = r_p$ u jednačini (2.14.5) dobijamo

$$\frac{2E}{\mu} = -\frac{1 - e}{r_p}. \quad (2.14.7)$$

Kako je za elipsu $r_p = a(1 - e)$ i za hiperbolu $r_p = a(e - 1)$ (videti poglavlje 4.8), energija E se može izraziti preko a na sledeći način

$$\frac{2E}{\mu} = \begin{cases} -\frac{1}{a}, & \text{za eliptičku orbitu} \\ +\frac{1}{a}, & \text{za hiperboličku orbitu} \end{cases}. \quad (2.14.8)$$



Slika 2.14.2. – Veza između β i rv^2/μ sa e i θ kao parametara eliptičke orbite

Zamenjujući dobijene vrednosti u jednačinu (2.14.5), jednačina za energiju će biti

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2 - (rv^2/\mu)} \quad \text{za eliptičku orbitu} \quad (2.14.9)$$

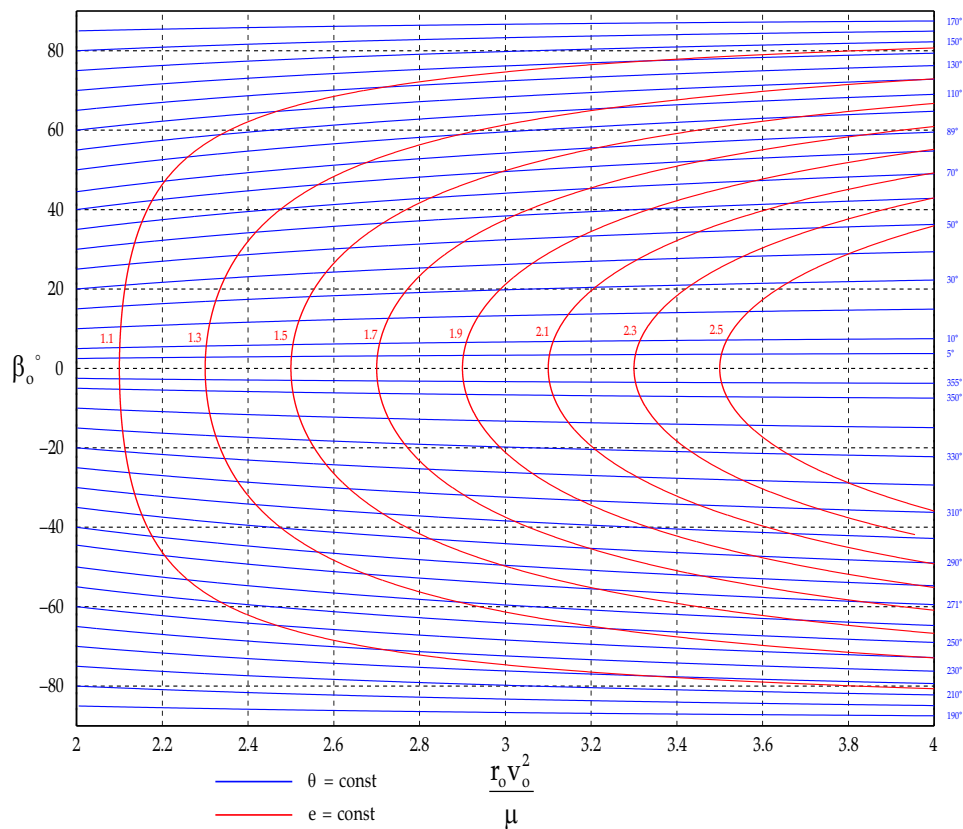
$$\frac{a}{r} = \frac{1}{(rv^2/\mu) - 2} \quad \text{za hiperboličku orbitu} \quad (2.14.10)$$

Na kraju, potrebno je doći do jednačine na osnovu koje se može izračunati vreme obilaženja po orbiti. Krenućemo od jednačine momenta količine kretanja

$$r^2 \dot{\theta} = h = \sqrt{\mu r_p (1 + e)} \quad (2.14.11)$$

i uredićemo je na sledeći način

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{\sqrt{\mu r_p (1 + e)}}{r_p^2 (1 + e)^2} dt.$$



Slika 2.14.3. – Veza β i $r v^2/\mu$ sa e i θ kao parametara hiperboličke orbite

Za $e < 1$, integral leve strane* je

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} &= \frac{1}{1-e^2} \left(\frac{-e\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \int_0^\theta \frac{d\theta}{1+e\cos\theta} \right) \\ &= \frac{1}{1-e^2} \left[\frac{-e\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta \right) \right] \end{aligned}$$

Za $e > 1$,

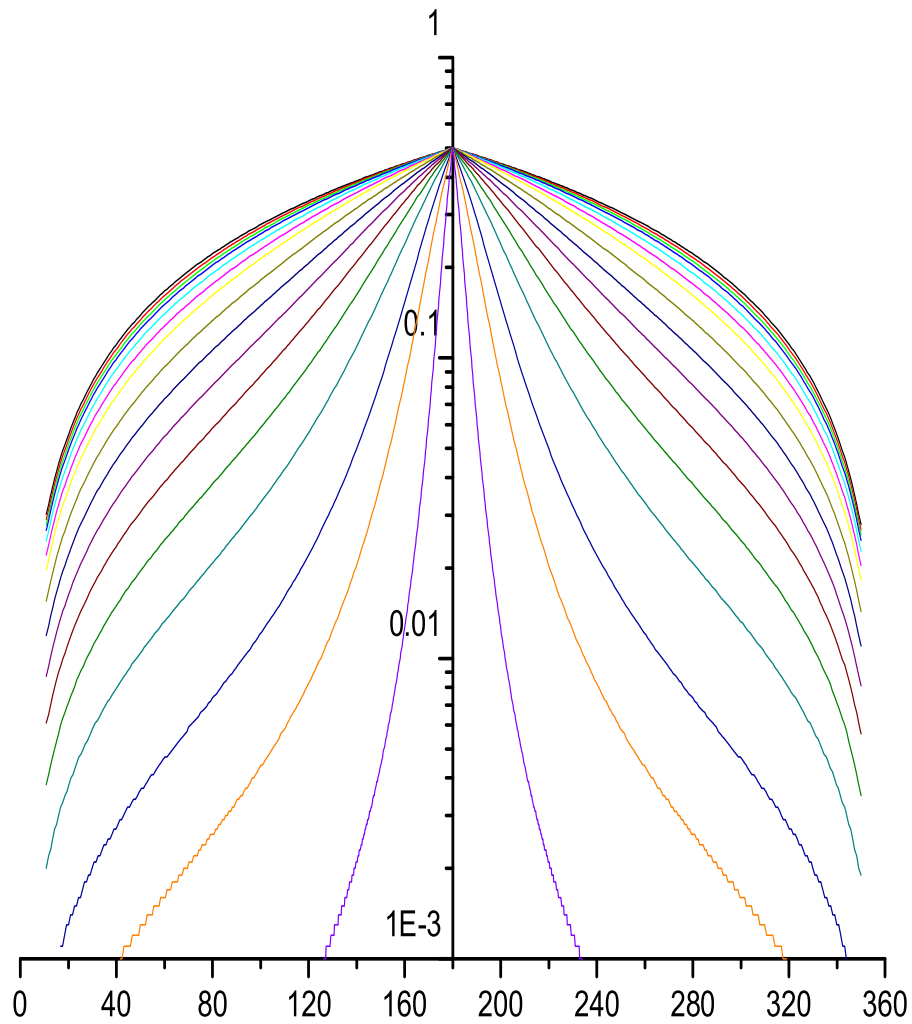
$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{1}{1-e^2} \left[\frac{e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)} - \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta} \right) \right]$$

Ako r_p izrazimo preko e i a (kao ranije), jednačina za vreme će biti:

* videti neku zbirku gotovih integrala

Za eliptičke orbite ($e < 1$)

$$t_e = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]. \quad (2.14.12)$$

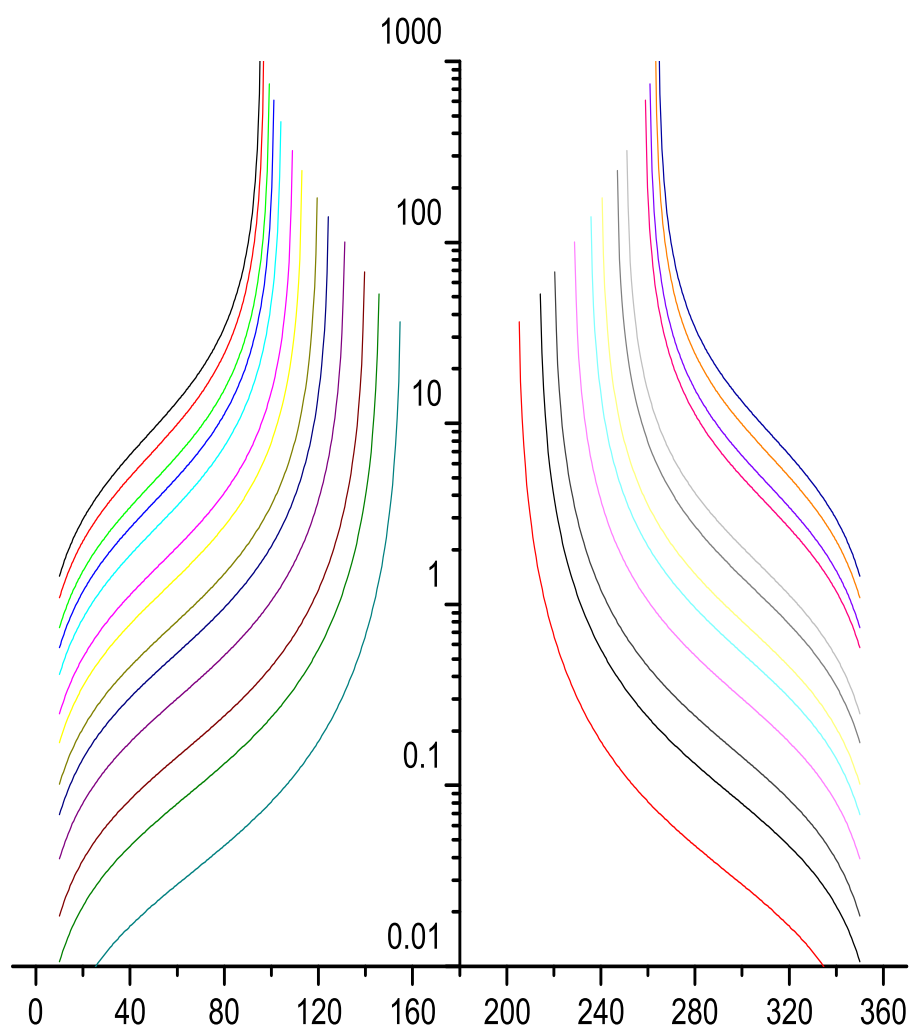


Slika 2.14.4. – Bezdimenziono vreme za eliptičke orbite

Za hiperboličke orbite ($e > 1$)

$$t_h = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{e\sqrt{e^2-1} \sin \theta}{1+e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta} \right) \right]. \quad (2.14.13)$$

Ove bezimenzione jednačine $\tau_e = (t_e\sqrt{\mu})/(2\pi a^{3/2})$ i $\tau_h = (t_h\sqrt{\mu})/a^{3/2}$ su izračunate i analizirane pomoću nekoliko programskih modula napisanih u FORTRAN-u 77 i grafički obrađene u ORIGIN-u 6.1. Rezultati su dati u grafičkom obliku na slikama (2.14.4) i (2.14.5).



Slika 2.14.5. – Bezdimenziono vreme za hiperboličke orbite

Nešto pojednostavljeniji izraz za vreme duž eliptičke orbite se može dobiti preko ekscentrične anomalije ψ . Za izvođenje ove anomalije, potrebne su sledeće relacije:

- Iz jednačine za elipsu

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}(1 + e \cos \theta) = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)} \quad \text{dobija se}$$

$$h^2 = \mu a(1 - e^2) . \quad (2.14.14)$$

- Iz jednačine (2.8.11) za ekscentričnost važi

$$2E = -(1 - e^2) \frac{\mu^2}{h^2} . \quad (2.14.15)$$

- Iz nepromenljivosti momenta količine kretanja

$$r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^2} . \quad (2.14.16)$$

- Iz jednačine $\cos \psi = (a - r)/ae$

$$(a - r)^2 = a^2 e^2 (1 - \sin^2 \psi) \quad \text{korenovanjem} \quad (2.14.17)$$

$$\dot{r} = ae \dot{\psi} \sin \psi \quad \text{diferenciranjem} . \quad (2.14.18)$$

Sada se može na sledeći način napisati jednačina ukupne energije (jed. 2.8.7), pri čemu je $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$:

$$\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 - \frac{2\mu}{r} = 2E . \quad (2.14.19a)$$

Na osnovu jednačina (2.14.14), (2.14.15) i (2.14.16) prethodna jednačina postaje

$$\frac{r^2 \dot{r}^2}{\mu/a} = a^2 e^2 - (a - r)^2 . \quad (2.14.19b)$$

Zamenom jednačina (2.14.17) i (2.14.18) u jednačinu (2.14.19b) dobija se

$$r \dot{\psi} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} . \quad (2.14.20)$$

Dalje, zamenom r u jednačini $\cos \psi = (a - r)/ae$ i preuređivanjem se dobija

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = a \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt = a(1 - e \cos \psi) d\psi$$

a posle integraljenja rezultat je

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t = \psi - e \sin \psi + C . \quad (2.14.21)$$

Konstanta integracije C je nula ako se vreme meri od perigeja. Jednačina (2.14.21) je poznata kao **Keplerova jednačina** planetskog kretanja.

Primer 2.14.1. *Satelit je lansiran sa sledećim početnim uslovima*

$$\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1.40 \quad \beta_0 = 20^\circ \quad \frac{r_0}{R} = 2.0$$

Odrediti parametre orbite e i a/R i ustanoviti početnu poziciju u odnosu na perigej.

- Iz jednačina (2.14.2) i (2.14.1) sledi

$$e = \sqrt{(0.4)^2(0.939)^2 + (0.342)^2} = 0.508$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(1.4)(0.939)(0.342)}{(1.4)(0.939)^2 - 1} = 62^\circ 23'$$

Ove vrednosti odgovaraju onima sa grafika na slici (2.14.2). Iz jednačine (2.14.9) sledi

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - 1.4} = 1.67 = \frac{a}{R} \frac{R}{r_0}$$

$$\frac{a}{R} = (1.67)(2.0) = 3.34$$

Primer 2.14.2. Neka za orbitu satelita iz Primera 2.14.1 važi da je $e = 0.508$ i $a/R = 3.34$ i da je tačka njegovog lansiranja $r_0/R = 2.0$ i $\theta = 62^\circ 23'$. Ukoliko satelit nastavi putanju duž ove orbite do $\theta = 150^\circ$ i parametar njegove orbite a/R dostigne vrednost $a/R = 3.60$ bez rotacije apsida, odrediti potrebno uvećanje brzine i njen smer.

- Kao prvo, odrediće se vrednosti za rv^2/μ i β pre impulsa, pri $\theta = 150^\circ$ i $e = 0.508$. Uzimajući indekse 1 i 2 za pre i posle dejstva impulsa, iz slike (2.14.2) se dobija

$$\frac{r_1 v_1^2}{\mu} = 0.68 \quad v_1 = 0.823 \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad \beta_1 = 24^\circ$$

Iz jed.(2.14.9) važi

$$\frac{a}{r_1} = \frac{1}{2 - 0.68} = 0.757 = \frac{a}{R} \frac{R}{r_1} = 3.34 \frac{R}{r_1}$$

Stoga,

$$\frac{r_1}{R} = \frac{3.34}{0.757} = 4.41$$

Da bi se održalo stanje bez rotacije apsida, nove vrednosti za $r_2 v_2^2/\mu$ i β_2 posle impulsa moraju biti duž linije $\theta = 150^\circ$, (slika 2.14.2), (uočiti da je $r_2 = r_1$ za kratkotrajne impulse). Vrednost a/R posle impulsa je 3.60, pa se iz jednačine (2.14.9) dobija

$$\frac{a_2}{r_1} = \frac{a_2}{R} \frac{R}{r_1} = \frac{3.60}{4.41} = \frac{1}{2 - (r_1 v_2^2/\mu)}$$

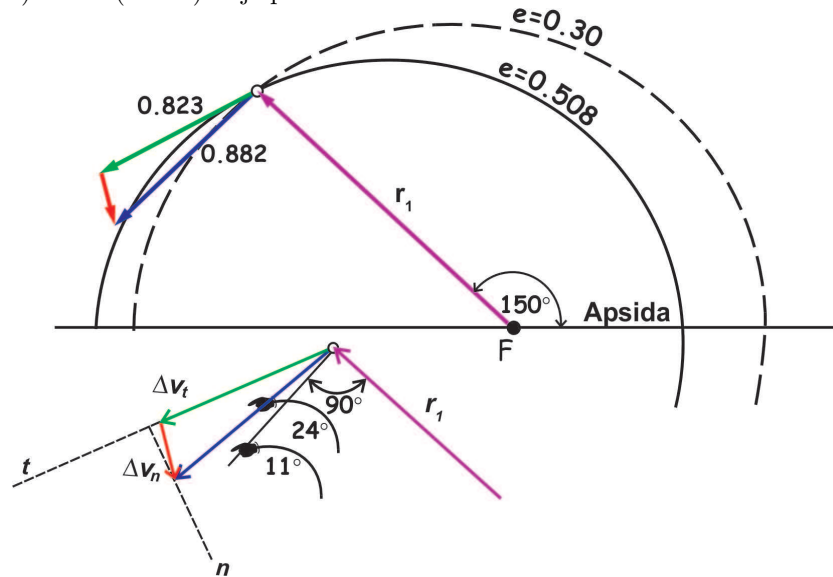
Stoga je

$$\frac{r_1 v_2^2}{\mu} = 0.780 \quad v_2 = 0.882 \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}.$$

Nova ekscentričnost i čeonu ugao za vrednosti $r_1 v_2^2/\mu = 0.78$ i $\theta = 150^\circ$, sa slike (2.14.2), iznose

$$e_2 = 0.30 \quad \beta_2 = 11^\circ$$

(uočiti da su $e_2 = 0.77$ i $\beta_2 = 49^\circ$ takođe rešenja, ali zahtevaju veći priraštaj brzine). Slika (2.14.6) daje približnu skicu dve orbite:



Slika 2.14.6. – Nagla promena orbite, bez izmene apsida

Na osnovu dijagrama vektora brzina, tangencijalna i normalna komponenta potrebnog uvećanja brzine su:

$$\Delta v_t = (0.882 \cos 13^\circ - 0.823) \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = 0.036 \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

$$\Delta v_n = (0.882 \sin 13^\circ) \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = 0.198 \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

a ukupno uvećanje brzine je

$$\Delta v = \sqrt{0.036^2 + 0.198^2} \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = 0.202 \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

tj. ukupna brzina je 1,202 puta veća od kružne brzine za radijus r_1 .

§ 15. Poremećaj parametara orbite. Kretanje svemirske letilice, koja se kreće duž određene orbite, u potpunosti je definisano sa sledeće tri jednačine:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(rv^2/\mu) \sin \beta \cos \beta}{(rv^2/\mu) \cos^2 \beta - 1} \quad (2.15.1)$$

$$e^2 = \left(\frac{rv^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \quad (2.15.2)$$

$$\frac{a}{r} = \frac{\pm 1}{2 - \frac{rv^2}{\mu}} \quad \begin{cases} + & = & \text{elipsa} \\ - & = & \text{hiperbola} \end{cases} \quad (2.15.3)$$

Ako se u određenoj poziciji na orbiti desi kratkotrajni potisak, na koji način će to uticati na parametre orbite? Da bi se dao odgovor na ovo pitanje potrebno je pojedinačno ispitati svaku od gornje tri jednačine.

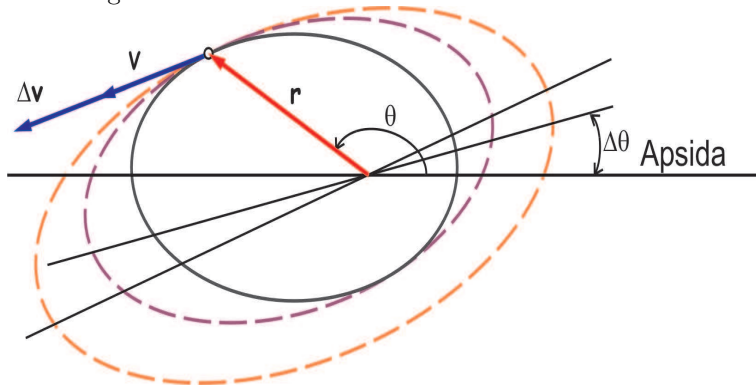
Jednačina (2.15.1) ukazuje da je ugaona pozicija apsida funkcija od rv^2/μ i β , tako da je

$$\theta = f\left(\frac{rv^2}{\mu}, \beta\right)$$

Diferenciranjem,

$$d\theta = \frac{\partial f}{\partial \frac{rv^2}{\mu}} d\frac{rv^2}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta. \quad (2.15.4)$$

Prvo što pokazuje ova jednačina je da dolazi do promene θ usled promene brzine (r se ne menja usled naglog potiska), ukoliko je β konstantno. Ovo je identično pomeranju tačke na slici (2.14.2) duž horizontalne linije. Slika (2.14.2) pokazuje da, ako rv^2/μ raste duž horizontalne linije, tada θ opada i obrnuto. Uz veće brzine, velika poluosa a će se, takođe, uvećavati na osnovu jed. (2.15.3). Slika (2.15.1) ilustruje kako se ove orbite menjaju sa povećanjem brzine u tangencijalnom smeru. Linija brzine će biti tangenta na sve orbite.



Slika 2.15.1. – Različnost orbite usled tangencijalnog potiska

Da bi se procenila rotacija apsida prilikom uvećanja tangencijalne brzine, potrebno je diferencirati jed.(2.15.1), uzimajući da je β konstantno

$$d\theta = \frac{-\sin\beta \cos\beta \cos^2\theta d(rv^2/\mu)}{[(rv^2/\mu) \cos^2\beta - 1]^2} . \quad (2.15.5)$$

Do skraćivanja dolazimo tako što prvo zamenimo imenilac iz jed.(2.15.1)

$$d\theta = \frac{-\sin^2\theta d(rv^2/\mu)}{(rv^2/\mu)^2 \sin\beta \cos\beta}$$

zatim se iz $\sin\beta \cos\beta = (\mu/rv^2)e \sin\theta$ (videti jed.(2.10.4)) dobija

$$d\theta = \frac{-\sin\theta d(rv^2/\mu)}{e rv^2/\mu} = -\frac{2 \sin\theta dv}{e v} . \quad (2.15.6)$$

Ako se v zameni iz jed.(2.15.3) i (2.15.6) prethodna jednačina postaje

$$d\theta = \frac{-2 \sin\theta}{e} \sqrt{\frac{r}{\mu[2 - (r/a)]}} dv . \quad (2.15.7)$$

Ukoliko želimo sledeći poremećaj apsida za malu promenu u β , pri čemu bi intenzitet brzine ostao konstantan, promena u θ se može naći na slici (2.14.2) pomeranjem tačke duž vertikalne linije. Takva promena odgovara drugom članu jednačine (2.15.4), a potrebno uvećanje vektora brzine je $dv = v d\beta$.

Poremećaj u ekscentričnosti e , pri malom uvećanju tangencijalne brzine, takođe se može dobiti sa slike (2.14.2) i to iz pomeranja tačke duž horizontalne ($\beta = \text{const.}$) linije. Do ovog zaključka se može doći i analitički, diferenciranjem jed.(2.15.2), pri čemu je β konstantno. Rezultat je

$$de = \frac{2}{e} (1 - e^2) \left(\frac{a}{r} - 1 \right) \frac{dv}{v} . \quad (2.15.8)$$

Ukoliko je potisak stalan tokom konačne dužine vremena, on se može posmatrati kao serija malih impulsa, a promena orbite se može dobiti kao niz uzastopnih malih promena.

§ 16.

Stabilnost malih oscilacija za kružne orbite. U sistemu centralne sile, kružna orbita je uvek moguća uz određenu brzinu kada je centrifugalna sila izjednačena sa privlačnim silama.

$$-r_0 \dot{\theta}^2 = F(r_0) . \quad (2.16.1)$$

Da bi se odredila stabilnost takve orbite za male radijalne izmene r_1 , treba da se pođe od opšte jednačine za radijalnu silu

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = F(r) \quad (2.16.2)$$

i da se zameni $\dot{\theta}$ iz uslova da moment količine kretanja $r^2 \dot{\theta} = h$ mora biti konstantan.

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = F(r) . \quad (2.16.3)$$

Uzećemo da je $r = r_0 + r_1 = r_0[1 + (r_1/r_0)]$, pa je tada $\ddot{r} = \ddot{r}_1$ i

$$\frac{h^2}{r^3} = \frac{h^2}{r_0^3} \left(1 + \frac{r_1}{r_0}\right)^{-3} = \frac{h^2}{r_0^3} \left(1 - \frac{3r_1}{r_0} + \frac{6r_1^2}{r_0^2} \dots\right)$$

U okolini tačke r_0 razvićemo $F(r)$ u Tejlorov red

$$F(r) = F(r_0) + r_1 F'(r_0) + \frac{1}{2} r_1^2 F''(r_0) + \dots$$

Zanemarujući članove višeg reda, pri čemu je $-h^2/r_0^3 = F(r_0)$, dolazimo do diferencijalne jednačine za male oscilacije oko r_0 .

$$\ddot{r}_1 - \left[\frac{3}{r_0} F(r_0) + F'(r_0) \right] r_1 = 0 . \quad (2.16.4)$$

Ovo je poznato kao diferencijalna jednačina drugog reda za harmonijske oscilacije, koja obezbeđuje da

$$- \left[\frac{3}{r_0} F(r_0) + F'(r_0) \right]$$

bude pozitivan broj; na primer, za stabilne oscilacije treba da važi

$$\frac{3}{r_0} F(r_0) + F'(r_0) < 0 . \quad (2.16.5)$$

Ako je

$$\frac{3}{r_0} F(r_0) + F'(r_0) > 0 ,$$

tada je rešenje eksponencijalno rastuća funkcija vremena i sistem je nestabilan.

Primer 2.16.1. *Odrediti diferencijalnu jednačinu za male oscilacije u okolini kružne orbite, ako je privlačna sila $-\mu/r^2$.*

- Kako je $F(r) = -\mu/r^2$, diferenciranjem se dobija

$$F'(r) = \frac{2\mu}{r^3}$$

Diferencijalna jednačina za male oscilacije je tada

$$\ddot{r}_1 + \frac{\mu}{r_0^3} r_1 = 0$$

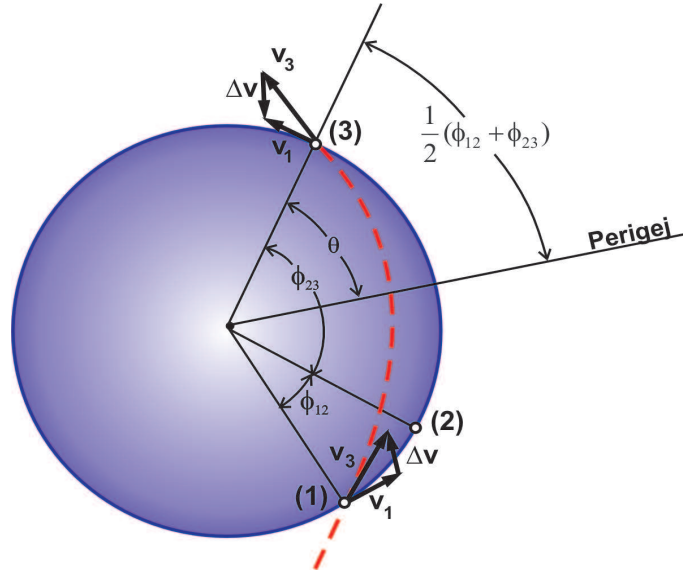
a rešenje za inicijalni poremećaj za $r_1(0)$ i $\dot{r}_1(0) = 0$ iznosi

$$r_1(t) = r_1(0) \cos \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} t$$

§ 17. Presretanje i sastajanje.

Slučaj 1. (Kružne orbite)

Prvo ćemo posmatrati slučaj dve letilice koje se kreću po istoj kružnoj orbiti r/R , pri čemu je jedna letilica ispred druge za ugao ϕ_{12} , kao što je prikazano na slici (2.17.1).



Slika 2.17.1. – Presretanje i mesto sastanka na kružnoj orbiti

Označićemo sa 1 vodeću letilicu, a sa 2 prateću. S obzirom da je putanja kružna, za obe letilice važi $rv^2/\mu = 1$, $\beta = 0$ a ϕ_{12} ostaje isto dok se ne promeni pod dejstvom potiska. Želimo da 1 dostigne 2 na nekoj poziciji 3 duž kružne orbite, koja je prikazana uglom ϕ_{23} , tj. da se susretne. Koliko uvećanje brzine je potrebno za 1 i 3?

Slučaj se rešava na sledeći način. Prvo, vreme koje je potrebno da 2 stigne do 3 je određeno sa

$$t_{23} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{\phi_{23}}{360^\circ}. \quad (2.17.1)$$

Letilica 1 treba da putuje do 3 po novoj orbiti ali za isto vreme. Zbog iste radijalne udaljenosti $O1$ i $O2$, perigej (pericentar) za novu orbitu mora podeliti ugao $\phi_{12} + \phi_{23}$. Na ovaj način, θ mereno od perigeja do 3 iznosi $1/2(\phi_{12} + \phi_{23})$, što je prikazano na slici (2.17.1). Sada treba izabrati vrednost e nove orbite i, uz θ , odrediti $n = a/R$ za jednačinu vremena. Ako je $e > 1$, potrebno je da se uzme formula za hiperbolu

$$n = \frac{a}{R} = \left(\frac{r}{R}\right) \left(\frac{a}{r}\right) = \frac{r}{R} \left(\frac{1 + e \cos \theta}{e^2 - 1}\right). \quad (2.17.2)$$

Na osnovu slike (2.14.5) dobija se $\tau_h = t_h(\sqrt{\mu/a^3})$ i može se izračunati vreme letilice 1 za put od $\theta = 0$ do tačke 3.

$$t_h = \tau_h \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \tau_h \sqrt{n^3} \sqrt{\frac{R^3}{\mu}} = 806 \tau_h \sqrt{n^3} \quad (\text{napomena*}) . \quad (2.17.3)$$

Ukoliko ova vrednost ne odgovara vrednosti $(1/2)t_{23}$, onda se bira novo e i procedura se ponavlja sve dok se ne dođe do navedene vrednosti.

Sa poznatim e i θ , rv^2/μ i β se mogu pronaći sa slike (2.14.3). Obzirom da je $\beta = 0$ za kružnu orbitu, novo β je ugao između dva vektora brzine u tački 3, a uvećanje brzine je određeno vektorskim trouglom kao

$$\Delta v = \sqrt{(v_3 \cos \beta - v_1)^2 + (v_3 \sin \beta)^2} \quad (2.17.4)$$

pri čemu je $v_1 = \sqrt{\mu/r}$ kružna brzina. Zbog simetrije, isto Δv se primenjuje i na 1 da bi se inicirao manevar i na 3 da bi došlo do susreta, što je prikazano na slici (2.17.1).

Primer 2.17.1. *Date su dve letilice na istoj kružnoj orbiti sa $r/R = 3.0$, pri čemu letilica 1 zaostaje za letilicom 2 za 80° . Potrebno je da 1 prestigne 2 i da se susretne sa 2 na poziciji 3 koja je za 40° ispred 2. Odrediti orbitu prelaska (transfernu trajektoriju) i potrebno uvećanje brzine.*

• Pošto je $\phi_{12} = 80^\circ$ i $\phi_{23} = 40^\circ$, tada je perigej za transfernu orbitu određen sa $\theta = 60^\circ$ jer deli ugao 1 – O – 3. Vreme da 2 dođe do 3 iznosi

$$\begin{aligned} t_{23} &= \frac{40(2\pi)}{360} \sqrt{\frac{R^3}{\mu}} (3)^{3/2} \\ &= (0.698)(806)(5.20) = 2930 \text{ sec} \end{aligned}$$

Polovina ovog vremena je 1465 sec.

Polazna pretpostavka je da je $e = 2.0$, pa iz jednačine (2.17.2) možemo naći a/R .

$$n = \frac{a}{R} = 3.0 \left(\frac{1 + 2 \cos 60^\circ}{4 - 1} \right) = 2.0$$

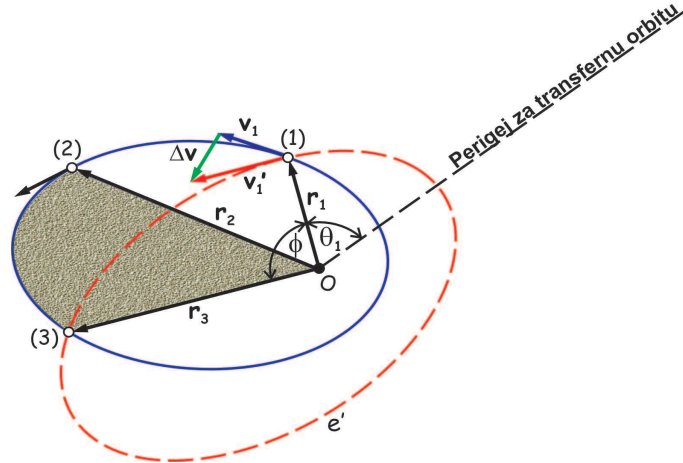
Sa slike (2.14.5), $\tau_h = 0.80$ za $\theta = 60^\circ$ i $e = 2.0$. Polovina vremena leta od 1 do 3 je tada

$$t_h = 0.80(2.0)^{3/2}(806) = 1825 \text{ sec.}$$

Obzirom da je ovo veće od 1465, orbita je suviše "spora" i potrebno je naći bržu orbitu biranjem većeg e . Rezultat nakon nekoliko pokušaja je

$$e = 3.0 \quad \frac{a}{R} = 0.938 \quad \frac{rv^2}{\mu} = 5.2$$

* $\sqrt{\frac{R^3}{\mu}} = \sqrt{\frac{(6378) \cdot 10^3}{9.81}} \text{ sec} = 806 \text{ sec}; \mu = gR^2; R = 6378 \text{ km}$



Slika 2.17.3. – Letilica 1 presreće letilicu 2 u tački 3 na eliptičkoj orbiti

Rešenje je moguće na osnovu sledećeg ispitivanja. Za novu orbitu važi

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{1 + e' \cos \theta_1}{1 + e' \cos(\theta_1 + \phi)}. \quad (2.17.5)$$

Biranjem vrednosti za θ_1 , može se naći ekscentričnost e' . $n = \frac{a}{R}$ se dobija iz $\pm \left(\frac{r_1}{R} \right) \left(\frac{1 + e' \cos \theta_1}{e'^2 - 1} \right)$, gde je + za $e' > 1$, a - za $e' < 1$. Uglovi θ_1 , $\theta_1 + \phi$, i e' određuju τ_1 i τ_3 na osnovu slike (2.14.4) ili (2.14.5). Na osnovu vrednosti $a/R = n$, vreme koje protekne se izračunava kao i u Slučaju 1.

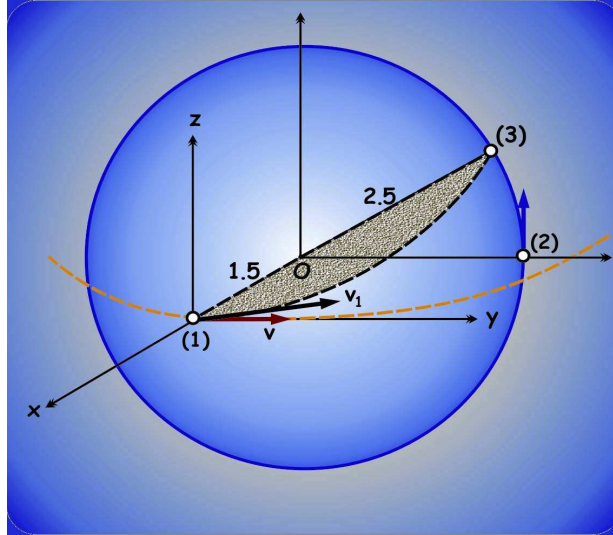
Kada se poklope dva vremena koja proteknu, vrednosti e' i θ_1 , za transfernu orbitu, određuju rv^2/μ i β' , što se može videti na slici (2.14.2) ili (2.14.3). Dalji postupak rešavanja je očigledan.

Slučaj 3. (Nekoplanarna presretanja)

Letilica 2, za $t = 0$, se nalazi na latitudi 0° i longitudi 0° i putuje po kružnoj, polarnoj orbiti $r/R = 2.5$ ka severu. Letilica 1, za $t = 0$, se nalazi na latitudi 0° i longitudi 90° zapad i putuje ka istoku po ekvatorijalnoj eliptičkoj orbiti $e = 0.50$, što je prikazano na slici (2.17.4). Opisanoj poziciji letilice 1 odgovara perigej za koji je $r/R = 1.5$. Odrediti potrebno uvećanje brzine za 1 kako bi presrela letilicu 2 u tački 3 kada je njena latituda (misli se na letilicu 2) $30^\circ N$.

Procedura rešavanja ovog problema je veoma slična kao i u Slučaju 2. Transferna orbita 1 – 3 je nagnuta u odnosu na ekvatorijalnu ravan za 30° , $r_1/R = 1.5$ i $r_3/R = 2.5$, a ugao između r_1 i r_3 je 90° . Perigej za transfernu orbitu je ponovo nepoznat, a njegova pozicija od r_1 je θ_1 . Vreme koje protekne od 1 do 3 mora biti jednako vremenu od 2 do 3, što iznosi

$$t_{23} = \frac{30(2\pi)}{360} \frac{(2.5R)^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{6} (2.5)^{3/2} (806) = 1670 \text{ sec}$$



Slika 2.17.4. – Presretanje za nekoplanarne orbite

Iz opšte jednačine orbita, za dve tačke na transfernoj orbiti važi

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{2.5}{1.5} = 1.666 = \frac{1 + e' \cos \theta_1}{1 + e' \cos(\theta_1 + 90^\circ)} \quad (2.17.6)$$

ili

$$0.666 = e'(\cos \theta_1 + 1.666 \sin \theta_1)$$

Birajući vrednost za θ_1 , ekscentričnost e' transferne orbite se dobija iz gornje jednačine. Kada imamo vrednosti za e' i θ_1 možemo izračunati n iz

$$n = \frac{a}{R} = \pm \frac{r_1}{R} \left(\frac{1 + e' \cos \theta_1}{e'^2 - 1} \right) \quad (2.17.7)$$

pri čemu je + za $e' > 1$ i - za $e' < 1$.

Bezdimenziono vreme τ_h se određuje sa slike (2.14.5) i, sa poznatim a/R , vreme koje protekne se računa i upoređuje sa potrebnim vremenom. Kao prvi pokušaj za odabir θ_1 , uzeće se 340° . Jednačina (2.17.6) daje $e' = 1.803$, a jednačina (2.17.7) daje $n = \frac{a}{R} = 1.795$. Sa slike (2.15.5) važi $\tau_h = 0.15$ za $\theta_1 = 340^\circ$ (isto i za $+20^\circ$) i $\tau_h = 0.80$ za $\theta_3 = 70^\circ$, što čini ukupno proteklo vreme za $\tau_h = 0.95$. Stvarno proteklo vreme je

$$t_h = \tau_h \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 0.95(1.795)^{3/2}(806) = 1845 \text{ sec}$$

S obzirom da je ovo vreme veće od 1670 sec., orbita je suviše spora. Nakon nekoliko pokušaja dobija se

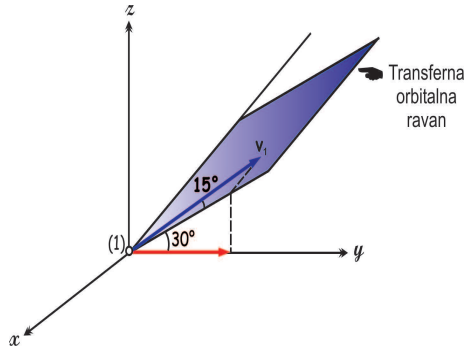
$$\begin{aligned}\theta_1 &= 338^\circ, \quad e' = 2.20 \\ \frac{a}{R} &= 1.19, \quad \tau_{\theta_1} = 0.29, \quad \tau_{\theta_3} = 1.31, \quad \tau_h = 1.60 \\ t_h &= 1.60(1.19)^{3/2}(806) = 1675 \text{ sec} \\ \left(\frac{rv^2}{\mu}\right)_1 &= 3.26, \quad v_1 = 1.8\sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = 1.8\sqrt{\frac{\mu}{1.5R}} = 1.47\sqrt{\frac{\mu}{R}} \\ \beta_1 &= -15^\circ\end{aligned}$$

Da bi se našlo uvećanje brzine, neka su x , y i z , respektivno, radijala, transverzala i normala na ekvatorijalnu ravan u tački 1. Tada su komponente za v_1 (videti sliku (2.17.5))

$$v_{1x} = -v_1 \sin 15^\circ = -0.381 \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$

$$v_{1y} = v_1 \cos 15^\circ \cos 30^\circ = 1.23 \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$

$$v_{1z} = v_1 \cos 15^\circ \sin 30^\circ = 0.711 \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$



Slika 2.17.5.

Uvećanje brzine potrebno u 1 sa slike (2.17.4)

Prvobitna brzina je u potpunosti u y smeru i s obzirom da je početna orbita bila elipsa sa $e = 0.50$ i $r_p v_0^2 / \mu = (1 + e) = 1.50$, biće $v_0 = \sqrt{1.5\mu/r_p} = \sqrt{\mu/R}$.

Komponente uvećanja brzine u odnosu na x , y i z u 1 su tada

$$\Delta v_x = -0.381 \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$

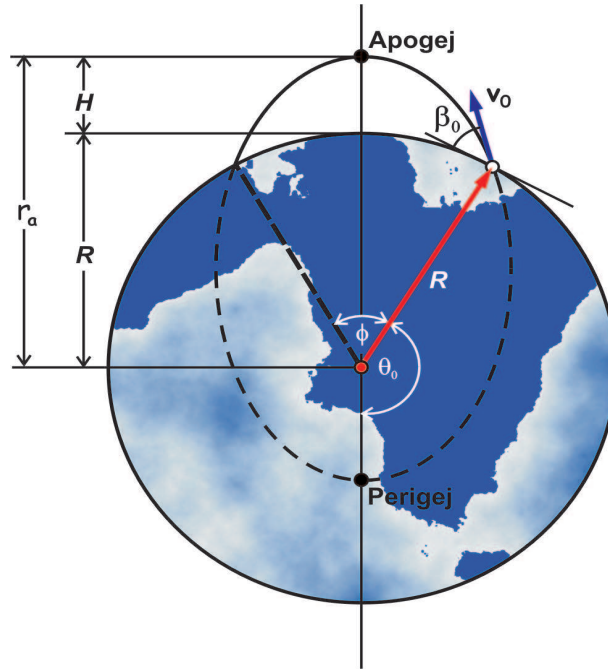
$$\Delta v_y = 0.23 \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$

$$\Delta v_z = 0.711 \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$

§ 18. Balistička trajektorija dugog dometa. Pošto je najkraća udaljenost između dve tačke na površini sfere duž velike kružnice, balističke* trajektorije se takođe posmatraju u okviru ravni velike kružnice. Slika (2.18.1)

* često se kaže i bespogonske ili slobodne putanje što znači da se radi o kretanju tela u uočenom gravitacionom polju po zakonima nebeske mehanike dok su promene brzine impulsnog karaktera i postižu se kratkotrajnim uključivanjem u rad raketnih motora; ove promene mogu menjati intenzitet brzine kao i njen pravac i smer i tako dopuštaju određene manevre sa letelicama

pokazuje konfiguraciju balističke trajektorije, koja je elipsa sa fokusom u centru Zemlje.



Slika 2.18.1. – Konfiguracija balističke trajektorije

Perigej je, tada, unutar Zemlje, dok se tačka najveće visine podudara sa apogejem.

Ono što je od interesa je da se odredi opseg $R\phi$, visina H i vreme t_b kao funkcija početnih vrednosti $r_0 = R$, v_0 i β_0 . Ranije, u okviru ovog teksta, razvijene su jednačine (2.10.7) i (2.10.8) u poglavlju (2.9), koje se odnose na problem početnih vrednosti. Ekscentričnost je dobijena iz jednačine

$$e^2 = \left(\frac{Rv_0^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0. \quad (2.18.1)$$

S obzirom da je $\phi/2 = 180^\circ - \theta_0$, $\text{tg } \theta_0 = -\text{tg}(\phi/2)$, jednačina (2.10.7) se može napisati kao

$$\text{tg } \frac{\phi}{2} = \frac{-(Rv_0^2/\mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{(Rv_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 - 1}. \quad (2.18.2)$$

Slika (2.18.2) predstavlja analizu za ϕ u odnosu na β_0 sa Rv_0^2/μ kao parametrom. Visina H se može odrediti iz ove konfiguracije

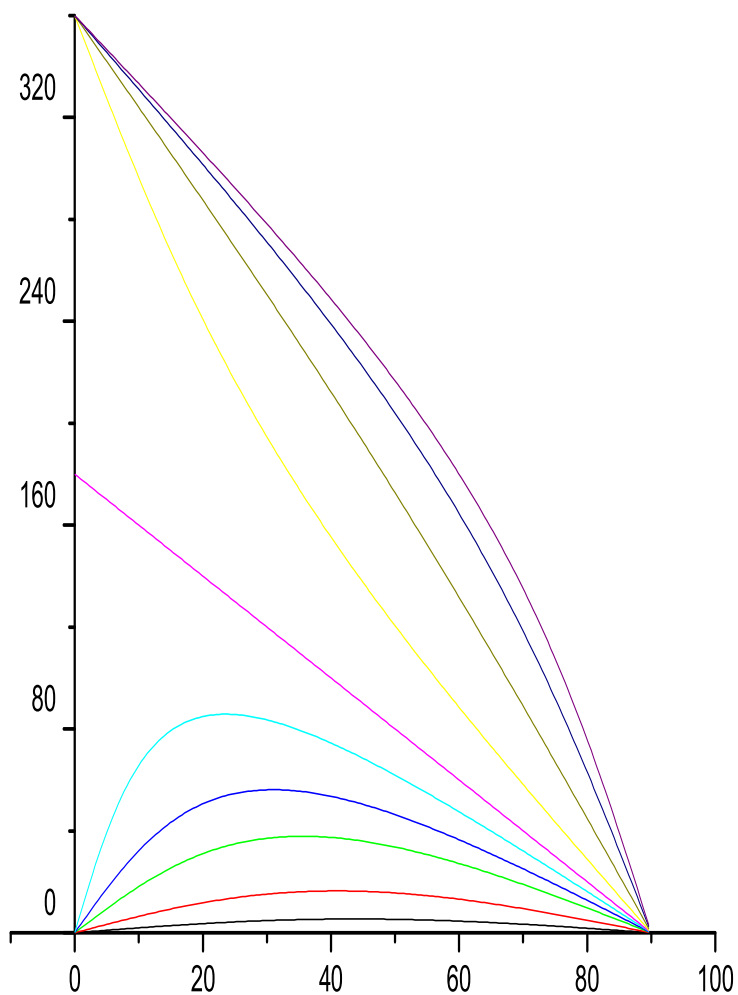
$$\begin{aligned} r_a &= a(1+e) = H + R \\ \frac{H}{R} &= \frac{a}{R}(1+e) - 1 \end{aligned} \quad (2.18.3)$$

Iz jednačine elipse za $\theta_0 = 180^\circ - \phi/2$, $r_0 = R$ dobija se

$$\frac{a}{R} = \frac{\left(1 - e \cos \frac{\phi}{2}\right)}{(1 - e)(1 + e)} \quad (2.18.4)$$

i kada ovu jednačinu uvedemo u jednačinu (2.18.3) rezultat je

$$\frac{H}{R} = \frac{e}{1 - e} \left(1 - \cos \frac{\phi}{2}\right). \quad (2.18.5)$$



Slika 2.18.2.

Analiza jednačine (2.18.2) za balističku trajektoriju (ϕ u odnosu na β_0 i parametar Rv_0^2/μ)

Vreme letenja se dobija tako što se od polovine perioda orbite oduzme vreme koje je potrebno za prelazak od perigeja do $\theta = \theta_0$, a onda se ova vrednost udvostruči

$$\begin{aligned} t_b &= 2 \left(\frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} - t_e \right) \\ &= \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left\{ \pi - \left[2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0 \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta_0}{1+e \cos \theta_0} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.18.6)$$

§ 19. Uticaj Zemljine spljoštenosti. Usled rotacije Zemlje od zapada ka istoku, lansiranje satelita usmerenih ka istoku ima prednosti u dostizanju odgovarajućih brzina. Zbog Zemljinih ekvatorskih ispupčenja, takva orbita će precesirati u zapadnom smeru (imati precesiju – precesija*), pa zato zatvorena orbita nije moguća. Satelit koji se obrće ponaša se kao žiroskop i (vidi Sliku (2.19.1)), njegov moment količine kretanja \vec{h}_s , koji je upravan na ravan orbite i usmeren prema severnoj hemisferi, mora polako da se kreće oko severne polarne ose zbog momenta koji izaziva višak mase (u odnosu na sfernu raspodelu) u zoni ekvatora. Iznos (intenzitet) precesije će zavistiti od nagibnog ugla orbite satelita u odnosu na Zemljin ekvator i, u manjoj meri, od visine.

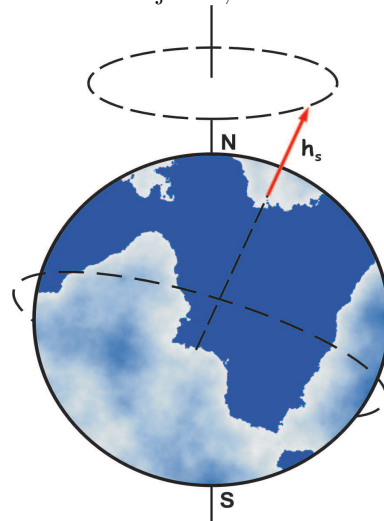
Moment koji dovodi do precesije satelitske orbite, a koji nastaje zbog ekvatorijalnog ispupčenja, može da se odredi na sledeći način: neka je na Slici 2.19.2 m_s satelit na koji deluje privlačna sila iz pravca delića mase Zemlje dm ; važi

$$d\vec{F} = -\frac{\mu m_s dm}{mr^3} \vec{r} \quad (2.19.1)$$

pri čemu je $\mu = Gm$, a m je masa Zemlje. Ako raščlanimo \vec{r} na komponente

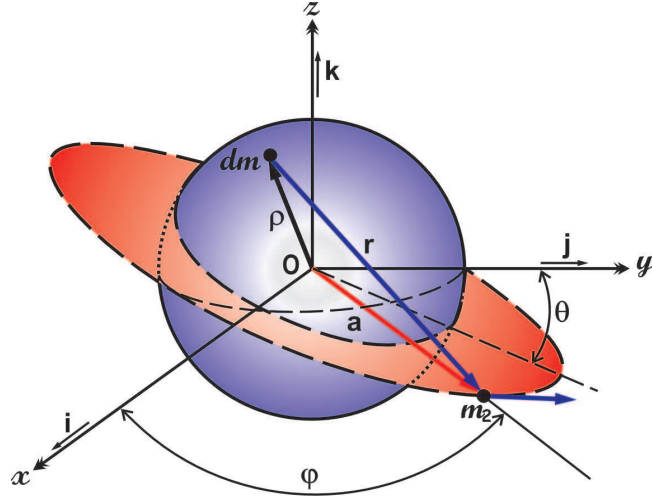
$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{a} - \vec{\rho} \\ &= (a \cos \varphi) \vec{i} + (a \sin \varphi \cos \theta) \vec{j} \\ &\quad - (a \sin \varphi \sin \theta) \vec{k} \\ &= (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.19.2)$$

gde je θ ugao između ravni orbite i ekvatorijalne ravni, a x , y i z su komponente vektora ρ . Moment je tada



Slika 2.19.1. Precesija ravni orbite zbog Zemljine spljoštenosti

* Precesija je pojava koju je primetio Hiparh, još 130. godine pre nove ere i odnosila se na revoluciju Zemljine obrtne ose sa periodom od oko ...

Slika 2.19.2. – Satelit m_s privučen Zemljinim elementom dm

$$\begin{aligned}
 d\vec{M} &= \vec{\rho} \times d\vec{F} & (2.19.3) \\
 &= \frac{-\mu m_s dm}{mr^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ (a \cos \varphi - x) & (a \sin \varphi \cos \theta - y) & (-a \sin \varphi \sin \theta - z) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{+\mu m_s a dm}{mr^3} [(y \sin \varphi \sin \theta + z \sin \varphi \cos \theta) \vec{i} - (x \sin \varphi \sin \theta + z \cos \varphi) \vec{j} \\
 &\quad - (x \sin \varphi \cos \theta - y \cos \varphi) \vec{k}]
 \end{aligned}$$

Iznos $1/r^3$ se može dobiti na osnovu sledećih koraka:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= (\vec{a} - \vec{\rho}) \cdot (\vec{a} - \vec{\rho}) = a^2 + \rho^2 - 2\vec{\rho} \cdot \vec{a} \\
 &= a^2 + \rho^2 - 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \varphi \sin \theta) & (2.19.4) \\
 \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{a^3} \left[1 + \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 - \frac{2}{a} (x \cos \varphi + y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \varphi \sin \theta) \right]^{-3/2}
 \end{aligned}$$

i njegovom zamenom u jednačini za moment dolazi se do složene jednačine za integraciju. Međutim, izraz se može uprostiti ako je a mnogo veće od $\rho(x, y, z)$ i u tom slučaju može se zanemariti član $(\rho/a)^2$ u $1/r^3$. Ostatak izraza se proširi pomoću binomne teoreme, pri čemu se zadrži samo prvi član proširenog izraza. Tada se dobija

$$\frac{1}{r^3} \cong \frac{1}{a^3} \left[1 + \frac{3}{a} (x \cos \varphi + y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \varphi \sin \theta) \right] \quad (2.19.5)$$

što kad se zameni u jednačini za moment kao rezultat daje M_x , M_y i M_z . Komponenta x momenta je

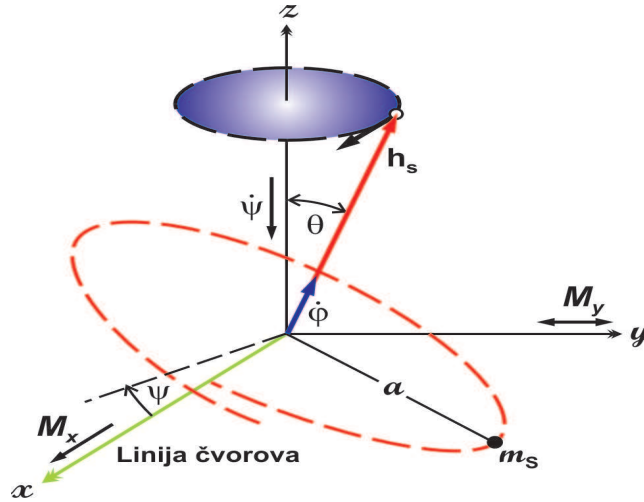
$$M_x = \frac{\mu m_s}{ma^2} \int (y \sin \varphi \sin \theta + z \sin \varphi \cos \theta) dm$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{a} \int (y \sin \varphi \sin \theta + z \sin \varphi \cos \theta) \times (x \cos \varphi \\
& + y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \varphi \sin \theta) dm \Big] \quad (2.19.6)
\end{aligned}$$

pri čemu su θ i φ konstantne tokom integracije. Očigledno je da je prvi integral jednak nuli zbog simetrije spljoštenosti sferoida. Takodje, svi vektorski proizvodi članova xy , xz i yz će prilikom integracije biti nula zbog simetrije. Dakle, preostaje samo integral

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{3\mu m_s}{ma^3} \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \int (y^2 - z^2) dm \\
&= \frac{3\mu m_s}{ma^3} \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \left[\int (x^2 + y^2) dm - \int (x^2 + z^2) dm \right] \\
&= \frac{3\mu m_s}{ma^3} (C - A) \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \quad (2.19.7)
\end{aligned}$$

pri čemu su C i A , respektivno, moment inercije Zemlje oko polarne i ekvatorijalne ose.



Slika 2.19.3. – Precesija vektora \vec{h}_s usled momenata M_x i M_y

Slično, moment oko y ose je

$$M_y = \frac{-3\mu m_s}{ma^3} (C - A) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.19.8)$$

a moment oko z ose je nula.

$$M_z = 0. \quad (2.19.9)$$

Ove jednačine ukazuju da je moment M_y negativan za $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, a pozitivan za $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, pri čemu se ciklus ponavlja između π i 2π . Znači, ukupan moment M_y za kompletan ciklus je nula. Međutim, moment M_x je uvek pozitivan i menja se kao $\sin^2 \varphi$.

Slika (2.19.3) prikazuje ravan orbite, satelit m_s i momente M_x i M_y , koji se ispoljavaju na satelitu od strane Zemlje. Da bi se odredila precesija ravni satelitske orbite, treba primetiti da moment količine kretanja (obrtni, ugaoni moment) iznosi $h_s = m_s a^2 \dot{\varphi}$ i normalan je na ravan orbite. Delovanje momenta M_y na \vec{h}_s je oscilatorno i nula po završenom ciklusu, ali postojanje momenta M_x zahteva da mera promene ugaonog momenta \vec{h}_s u okviru tog ciklusa bude kumulativna u smeru x .

Merenjem regresije linije čvorova ψ na nivou ekvatorijalne ravni, se dolazi do toga da je brzina precesije usmerena ka $-z$ osi, sa komponentama $\dot{\psi} \sin \theta$ u ravni orbite i $\dot{\psi} \cos \theta$ koja je normalna na ravan orbite. Komponenta $\dot{\psi} \sin \theta$ rotira vektor \vec{h}_s kako bi se dobilo

$$\begin{aligned} h_s \dot{\psi} \sin \theta &= M_x & (2.19.10) \\ m_s a^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta &= \frac{3\mu m_s}{ma^3} (C - A) \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

na osnovu čega brzina precesije u ravni orbite postaje

$$\dot{\psi} = \frac{3\mu}{\dot{\varphi} m a^5} (C - A) \cos \theta \sin^2 \varphi$$

Pošto moment inercije sfere radijusa R iznosi $\frac{2}{5} m R^2$, možemo da uvedemo izraz $C = \frac{2}{5} m R^2$, gde je R srednja vrednost radijusa Zemlje, pa se $\dot{\psi}$ može napisati

$$\dot{\psi} = \frac{6}{5a^3} \frac{\mu}{\dot{\varphi}} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(\frac{C - A}{C} \right) \cos \theta \sin^2 \varphi. \quad (2.19.11)$$

Pretpostavljajući da je kružna orbita tj. ugaona brzina konstantna, $\dot{\varphi} = 2\pi/\tau$, gde je τ period orbite i

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

Stoga, φ možemo zameniti sa $(2\pi/\tau)t$, a ugaon precesije, koji se meri u ekvatorijalnoj ravni po revoluciji satelita, postaje

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{6\mu}{5a^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{\tau}{2\pi} \cos \theta \int_0^\tau \sin^2 \frac{2\pi}{\tau} t dt \\ &= \frac{6\mu}{5} \left(\frac{C - A}{C} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{\tau^2}{4\pi a^3} \cos \theta \\ &= \frac{6\pi}{5} \left(\frac{C - A}{C} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.19.12)$$

Veličina $(C - A)/C$ za Zemlju iznosi 0.0032, tako da čvorna linija orbite regresira prema zapadu za iznos

$$\psi = 0.0121 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \cos \theta \quad (2.19.13)$$

za svaku revoluciju satelita oko Zemlje.

Ova jednačina se može uporediti sa Blicerovom jednačinom koja izgleda

$$\psi = 2\pi J \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos i$$

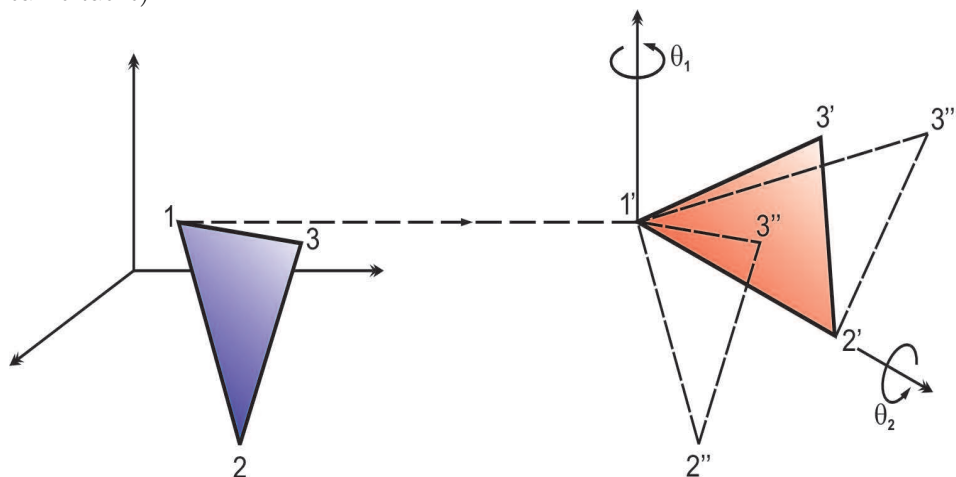
Ako se prevede na notaciju ovog teksta, pri čemu je $J = 1.637 \times 10^{-3}$ tada je Blicerova jednačina

$$\psi = 0.01022 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos \theta$$

što se dosta podudara sa našom aproksimativnom jednačinom (2.19.13).

Obrnut problem gornje navedenom je precesija Zemljine polarne ose usled momenta kojim satelit deluje na Zemlju. Kada satelit ima konačnu masu (kao Mesec) njegov uticaj je merljiva veličina.

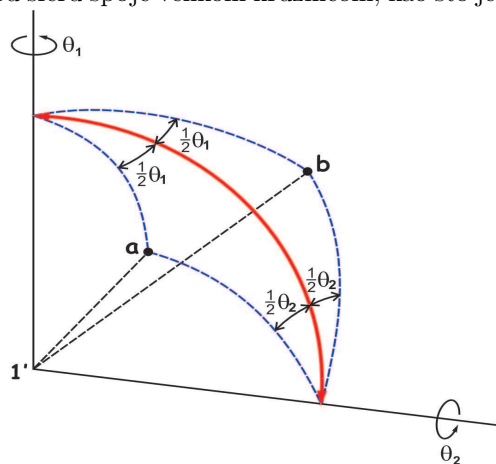
§ 1. Kretanje krutog tela. Pod *krutim telom* ili *mehanički čvrstim telom* * podrazumeva se onaj sistem tačaka čija uzajamna rastojanja ostaju pri svim kretanjima nepromenjena. Broj tačaka, koji obrazuje ovo telo, može biti konačan ili beskonačan. Položaj krutog tela je poznat ako je poznat položaj bilo koje tri tačke tog tela, a koje ne pripadaju istoj pravoj (dakle, ma koje 3 nekolinearne tačke).



Slika 3.1.1. Promena položaja – kretanje krutog tela

Kretanje krutih tela se može opisati kao translacija neke referentne tačke O plus rotacija oko neke ose, koja prolazi kroz O . Posmatraće se tri proizvoljne, nekolinearne tačke u svojim početnim pozicijama $1, 2, 3$ i krajnjim pozicijama $1', 2', 3'$ kao što je pokazano na slici (3.1.1). Prva tačka 1 se može dovesti do tačke $1'$ translacijom, tako da njen novi položaj bude $1'$, ali i $2 = 2'', 3 = 3''$. Dalje, rotacijom oko ose koja prolazi kroz $1'$ i koja je normalna na ravan $1', 2'', 2'$, dolazi do podudaranja $2''$ sa $2'$. Na kraju, rotacija oko ose koja prolazi kroz $1'$ i $2'$, dovodi $3''$ do $3'$.

Sada sledi prikaz Ojlerovog dokaza da se dve pojedinačne rotacije mogu svesti na jednu rotaciju. Prvo se nacрта jedinična sfera oko tačke $1'$, zatim se tačke kroz koje rotacione ose prodiru sferu spoje velikom kružnicom, kao što je dato na slici (3.1.2).



Slika 3.1.2. Rezultantna osa rotacije na osnovu Ojlerovog dokaza

Izmeriti $\frac{1}{2}\theta_1$ na osi 1 sa svake od strana velike kružnice, konstruišući tako druge dve velike kružnice, a potom isto uraditi sa uglom θ_2 na osi 2. Rotacijom za θ_1 oko ose 1, tačka a će doći do tačke b , a rotacijom θ_2 oko ose 2 će b doći do a . Pri svemu ovome, osa $1'a$ ostaje nepromenjena tokom rotacije θ_1 i θ_2 , što znači da je ta osa rezultantna osa rotacije. Treba uočiti da osa $1'a$ nije u istoj ravni koja sadrži ose rotacije θ_1 i θ_2 , što ukazuje na činjenicu da konačne rotacije ne poseduju osobine vektora (drugim rečima, rotacije θ_1 i θ_2 ne zadovoljavaju zakon komutativnosti i rezultat sabiranja ovih rotacija nije veličina koja je dijagonala paralelograma, što je jedan od uslova da je neka veličina vektor).

§ 2. Moment količine kretanja krutog tela (oko fiksirane tačke ili pokretnog centra mase). Postavićemo Dekartov pravougli sistem koordinata $Oxyz$, sa početkom u nekoj proizvoljnoj tački O tela. Brzina proizvoljne tačke i tog tela će tada biti

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (3.2.1)$$

pri čemu je $\vec{\omega}$ ugaona brzina tela a \vec{v}_o translatorska komponenta brzine.

Moment količine kretanja u odnosu na tačku O sistema $Oxyz$ je

$$\begin{aligned} \vec{h}_o &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) m_i - \vec{v}_o \times \sum_i m_i \vec{r}_i \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Ako je referentna tačka O nepokretna, tada je $\vec{v}_o = 0$, dok za O u centru masa važi

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0 /$$

Znači, ako je tačka O nepokretna ili predstavlja centar mase, moment količine kretanja će biti jednak prvom elementu gornje jednačine, što se može izraziti preko sledećeg integrala

$$\vec{h}_o = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad (3.2.3)$$

Da bi se ovaj integral odredio, treba uočiti da vektorski proizvod $\vec{\omega} \times \vec{r}$ iznosi

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k} \quad (3.2.4)$$

Množenjem sa dm , dobijaju se x , y , z komponente impulsa (količine kretanja) elementarne mase dm , kao što je prikazano na slici (3.2.1).

Vektorski proizvod $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$ je

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ (\omega_y z - \omega_z y) & (\omega_z x - \omega_x z) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix} dm \\ &= \vec{i} [\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y (xy) - \omega_z (xz)] dm \\ &\quad + \vec{j} [-\omega_x (xy) + \omega_y (x^2 + z^2) - \omega_z (yz)] dm \\ &\quad + \vec{k} [-\omega_x (xz) - \omega_y (yz) + \omega_z (x^2 + y^2)] dm \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

što predstavlja moment impulsa (količine kretanja) u odnosu na ose x , y , z kako je prikazano na slici (3.2.1). Integracijom na nivou celog tela, dolazi se do x , y , z komponenti momenta impulsa (količine kretanja).

$$\vec{h}_o = h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k} \quad (3.2.6)$$

Ukoliko se momenti inercije (tzv. aksijalni momenti inercije) u odnosu na ose x , y , z definišu kao

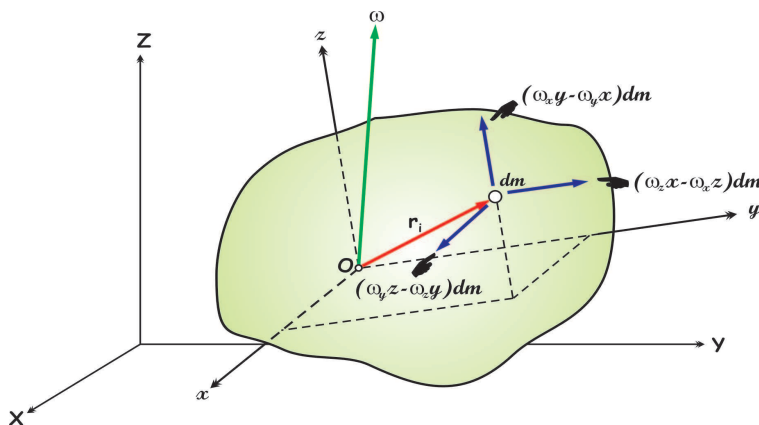
$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dm \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

i proizvodi inercije (tzv. devijacioni momenti) kao

$$I_{xy} = \int xy dm \quad I_{xz} = \int xz dm \quad I_{yz} = \int yz dm$$

tada su komponente momenta impulsa u odnosu na ose x , y , z

$$\begin{aligned} h_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ h_y &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ h_z &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Slika 3.2.1. Komponente impulsa $(\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$

- * Momenti i proizvodi inercije se mogu jasno predstaviti pomoću *tenzora inercije** I_o^T na sledeći način

$$I_o^T = \begin{vmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{vmatrix} \quad (3.2.8)$$

i ako uzmemo u obzir da je vektor ugaone brzine,

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

moment impulsa ili moment količine kretanja možemo napisati u opštem obliku

$$\vec{h} = I_o^T \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

Tenzor inercije je simetričan tenzor ($I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$), što znači da šest njegovih koordinata određuje aksijalne momente i proizvode inercije krutog tela u odnosu na Dekartove pravougule ose x , y , z . Tenzor inercije određuje raspodelu mase krutog tela.

* Ako je svojstvo nekog objekta, tela, nezavisno od koordinatnog sistema kažemo da je ono **invarijantno** u odnosu na promenu koordinatnog sistema. Matematički aparat koji izdvaja veličine koje ne zavise od transformacija koordinatnih sistema zove se **tenzorski račun**, a objekti kojima operiše zovu se **tenzori**. Tenzori nultog reda su skalari - npr. temperatura, masa, energija... Veličine za čije poznavanje nam je potrebno tri podatka, broja, zovu se vektori ili tenzori prvog reda - brzina, ubrzanje sila... Ali postoje i veličine koje su mnogo složenije od pomenutih, za čije opisivanje je potrebno devet podataka i to su tzv. **tenzori drugog reda** - napon, **moment inercije**...; za više informacija o tenzorima pogledati knjigu "Tenzorski račun" od Tatomira Anđelića

§ 3. Kinetička energija krutog tela. Pretpostavimo da se čvrsto telo kreće kroz prostor pri čemu su za telo vezane pravougle ose x , y , z sa početkom u centru mase tela. Brzina proizvoljne tačke, sa vektorom položaja \vec{r} u odnosu na centar mase, biće

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.3.1)$$

Kvadrat brzine se dobija skalarnim proizvodom vektora te brzine

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_o^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{v}_o \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Na osnovu ovoga, kinetička energija krutog tela je data sa

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm + \vec{v}_o \cdot \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm \\ &= \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

pri čemu je $\int \vec{r} dm = 0$ kada se početak koordinatnog sistema poklapa sa centrom mase. Na ovaj način se dolazi do toga da se kinetička energija pri translaciji određuje kao da je celokupna masa koncentrisana u centru mase (kao da se radi o materijalnoj tački!), a drugi član jednačine je kinetička energija pri rotaciji oko ose $\vec{\omega}$ koja prolazi kroz centar mase.

Ako posmatramo kinetičku energiju rotacije, ispitajmo i vrednost $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Rastavljanjem $\vec{\omega} \times \vec{r}$ na komponente u pravcu osa tela, skalarni proizvod je prikazan kao kvadrat i , j i k komponenti:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (x^2 + z^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\omega_x \omega_z xz - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_x \omega_y xy \end{aligned}$$

Dakle,

$$2T_{\text{rot}} = \omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z - 2\omega_x \omega_z I_{xz} - 2\omega_y \omega_z I_{yz} - 2\omega_x \omega_y I_{xy} \quad (3.3.3)$$

§ 4. Moment inercije u odnosu na osu koja ima rotaciju. Neka je $I_{\xi\xi}$ moment inercije tela u odnosu na proizvoljnu osu ξ koja rotira ugaonom brzinom ω , tada se može napisati

$$2T_{\text{rot}} = I_{\xi\xi} \omega^2 \quad (3.4.1)$$

Smenom iz jednačine (3.3.3) gornja jednačina postaje

$$I_{\xi\xi} = \left(\frac{\omega_x}{\omega}\right)^2 I_x + \left(\frac{\omega_y}{\omega}\right)^2 I_y + \left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)^2 I_z - 2\left(\frac{\omega_x}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)I_{xz} - 2\left(\frac{\omega_y}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)I_{yz} - 2\left(\frac{\omega_x}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_y}{\omega}\right)I_{xy} \quad (3.4.2)$$

Ako se sa $l_{\xi x}$, $l_{\xi y}$, $l_{\xi z}$ obeleže kosinusi pravaca vektora $\vec{\omega}$ ili ose ξ u odnosu na ose x , y , z , gornja jednačina se može napisati kao

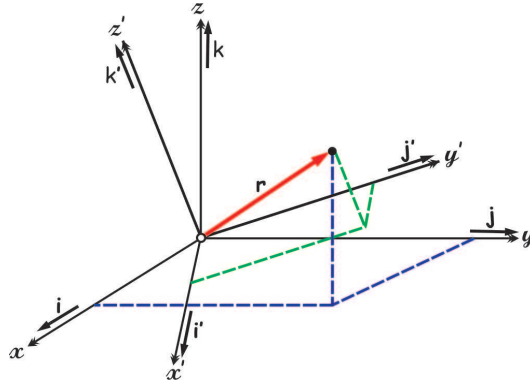
$$I_{\xi\xi} = l_{\xi x}^2 I_x + l_{\xi y}^2 I_y + l_{\xi z}^2 I_z - 2l_{\xi x}l_{\xi z}I_{xz} - 2l_{\xi y}l_{\xi z}I_{yz} - 2l_{\xi x}l_{\xi y}I_{xy} \quad (3.4.3)$$

Jednačina (3.4.3) se može zapisati i u obliku dvostruke sume, kao

$$I_{\xi\xi} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} l_{\xi\alpha}l_{\xi\beta}I_{\alpha\beta} \quad (3.4.4)$$

pri čemu α i β zamenjuju oznake x , y , z tako da se $I_{\alpha\beta}$ interpretira kao $I_{xx} = I_x$, I_{yy} , itd., a $I_{\alpha\beta}$ kao $-I_{xy}$, $-I_{yz}$, $-I_{xz}$. Zapravo, jednačina (3.4.4) se može izmeniti, tako da se može primeniti i na proizvode inercije, i to pomoću jednačine

$$-I_{\xi\eta} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} l_{\xi\alpha}l_{\eta\beta}I_{\alpha\beta} \quad (3.4.5)$$



Slika 3.4.1. Komponente vektora položaja \vec{r} u odnosu na dva koordinatna sistema

Kosinusi pravaca $l_{\xi\alpha}$ koji se koriste u jednačinama (3.4.4) i (3.4.5), mogu se formirati pomoću matrice transformacije između dva koordinatna sistema. Ako su x, y, z i x', y', z' dva koordinatna sistema sa jediničnim vektorima, respektivno, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, položaj proizvoljne tačke u prostoru se može prikazati preko oba koordinatna sistema kao

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad (3.4.6)$$

što je prikazano na slici (3.4.1).

Skalarnim množenjem jednačine (3.4.6) sa $\vec{i}, \vec{j},$ i \vec{k} dobija se

$$x = (\vec{i}' \cdot \vec{i})x' + (\vec{j}' \cdot \vec{i})y' + (\vec{k}' \cdot \vec{i})z'$$

$$\begin{aligned} y &= (\vec{i}' \cdot \vec{j})x' + (\vec{j}' \cdot \vec{j})y' + (\vec{k}' \cdot \vec{j})z' \\ z &= (\vec{i}' \cdot \vec{k})x' + (\vec{j}' \cdot \vec{k})y' + (\vec{k}' \cdot \vec{k})z' \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

što, prikazano u matricnoj notaciji, izgleda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & l_{xz'} \\ l_{yx'} & l_{yy'} & l_{yz'} \\ l_{zx'} & l_{zy'} & l_{zz'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

Dakle, ukoliko je poznata matrica transformacije između dva koordinatna sistema, tada članove te matrice čine kosinusi pravaca.

Dalje, treba imati na umu da se kinetička energija može prikazati kao skalarni proizvod ugaone brzine i momenta impulsa (količine kretanja)

$$2T = \vec{\omega} \cdot \vec{h}_o \quad (3.4.9)$$

Obzirom da se \vec{h}_o može prikazati preko tenzora inercije I_o^T (videti jed.(3.2.9)), gornja jednačina postaje

$$2T = \vec{\omega} \cdot I_o^T \cdot \vec{\omega} \quad (3.4.10)$$

tj. dobijamo poznati izraz za kinetičku energiju pri rotacionom kretanju krutog tela

$$T = \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

gde je I_c moment inercije u odnosu na centar mase krutog tela.

§ 5. Glavne ose inercije. Glavne ose inercije tela, $[O_1, O_2, O_3]$, definišu se kao one ose u odnosu na koje proizvodi inercije nestaju. Neka su A, B, C , respektivno, momenti inercije u odnosu na ose $[O_1, O_2, O_3]$ tada će moment inercije u odnosu na trenutne ose rotacije, izražen preko A, B, C , biti

$$I_\xi = Al_{\xi 1}^2 + Bl_{\xi 2}^2 + Cl_{\xi 3}^2 \quad (3.5.1)$$

pri čemu su $l_{\xi 1}, l_{\xi 2}, l_{\xi 3}$ kosinusi pravaca vektora ω ili ose ξ i glavnih osa $[O_1, O_2, O_3]$. Kako su ose $[O_1, O_2, O_3]$ nepokretne ose, vezane za telo, momenti A, B, C su konstante. Međutim, trenutna osa ξ se pomera, vrednosti $l_{\xi 1}, l_{\xi 2}, l_{\xi 3}$ se zbog toga menjaju što utiče na promenu vrednosti momenta inercije I u odnosu na osu ξ .

Ako se za sve moguće pravce trenutne ose ξ stavi $\rho = 1/\sqrt{I_\xi}$ (pri čemu se I_ξ , za određeni pravac ose ξ i odgovarajuće kosinuse pravaca, određuje iz jednačine (3.4.3)) dobija se *elipsoid inercije* koji prikazuje raspored (raspodelu) momenata inercije tela za datu tačku O . Ako jednačinu (3.5.1) podelimo sa I_ξ i uočimo da su $l_{\xi 1}/\sqrt{I_\xi} = l_{\xi 1}\rho = x, l_{\xi 2}\rho = y, l_{\xi 3}\rho = z$ glavne koordinate jednačine za elipsoid inercije, jednačina (3.5.1) postaje

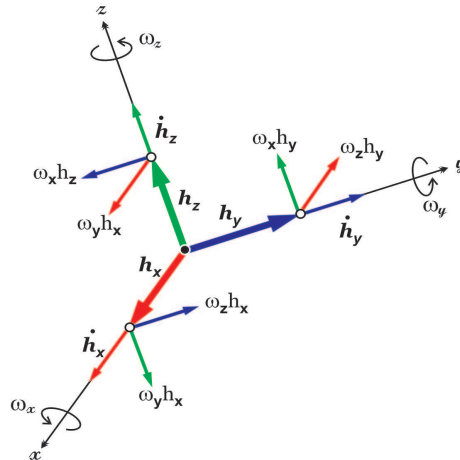
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad (3.5.2)$$

§ 6. Ojlerova momentna jednačina. Prethodno je pokazano da je obrtni moment (ili moment sile) u odnosu na centar mase jednak izvodu po vremenu momenta impulsa (količine kretanja) u odnosu na centar mase. Kako je $\vec{h}_c = h_x\vec{i} + h_y\vec{j} + h_z\vec{k}$, može se izvršiti diferenciranje, uzimajući u obzir da \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} rotiraju sa telom.

$$\vec{M}_c = [\dot{\vec{h}}_c] + \vec{\omega} \times \vec{h}_c = (\dot{h}_x\vec{i} + \dot{h}_y\vec{j} + \dot{h}_z\vec{k}) + \vec{\omega} \times \vec{h}_c \quad (3.6.1)$$

Vektorski proizvod $\vec{\omega} \times \vec{h}_c$ se može sagledati kao rotacija vektora $h_x\vec{i} + h_y\vec{j} + h_z\vec{k}$ usled ω_x , ω_y , ω_z , kao što je prikazano na slici (3.6.1). Tako, dodavanjem vektora duž x , y , z smerova, gornja jednačina postaje

$$\begin{aligned} \vec{M}_c &= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \\ &= (\dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y)\vec{i} + (\dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z)\vec{j} + (\dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x)\vec{k} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$



Slika 3.6.1. Komponente momenta impulsa i iznos njihove promene

Jednačine za određivanje komponenti, poznate kao Ojlerove momentne jednačine, su

$$\begin{aligned} M_x &= \dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y \\ M_y &= \dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z \\ M_z &= \dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

pri čemu ose x , y , z , sa koordinatnim početkom u centru mase, rotiraju ugaonom brzinom $\vec{\omega}$.

Jednačine (3.6.1) i (3.6.3) za obrtni moment su primenljive na bilo koji koordinatni sistem sa nepokretnim koordinatnim početkom ili sa pokretnim koordinatnim početkom koji se poklapa sa centrom mase. Ugaona brzina $\vec{\omega}$ je brzina koordinatnog sistema i, ako su ose vezane za telo, momenti i proizvodi inercije su konstantni.

Za telo koje se obrće i ima momente inercije A , B , C u odnosu na glavne ose, važi da je moment inercije A isti u odnosu na bilo koju poprečnu osu. Zato se može

izabrati sistem takvih poprečnih osa, koje rotiraju brzinom različitom od brzine tela, da se moment inercije ne menja u toku vremena. Recimo, može se izabrati takav sistem osa ξ , η , ζ za koje su momenti

$$\begin{aligned} M_\xi &= \dot{h}_\xi + h_\zeta\omega_\eta - h_\eta\omega_\zeta \\ M_\eta &= \dot{h}_\eta + h_\xi\omega_\zeta - h_\zeta\omega_\xi \\ M_\zeta &= \dot{h}_\zeta + h_\eta\omega_\xi - h_\xi\omega_\eta \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Ove jednačine su poznate kao Ojlerove modifikovane jednačine.

§ 7. Ojlerove jednačine za glavne ose. Ukoliko je koordinatni početak sistema nekog tela podudaran sa centrom mase, ose x , y , z se mogu tako orijentisati da se poklope sa glavnim osama $[O_1, O_2, O_3]$ inercije tog tela, te se time ukidaju proizvodi inercije u jednačinama za moment impulsa. Tada će važiti

$$h_1 = A\omega_1 \quad h_2 = B\omega_2 \quad h_3 = C\omega_3$$

gde su A , B , C glavni momenti inercije koji su konstantni, obzirom da su ose $[O_1, O_2, O_3]$ fiksirane za telo. Momentne jednačine su tada

$$\begin{aligned} M_1 &= A\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(C - B) \\ M_2 &= B\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(A - C) \\ M_3 &= C\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(B - A) \end{aligned}$$

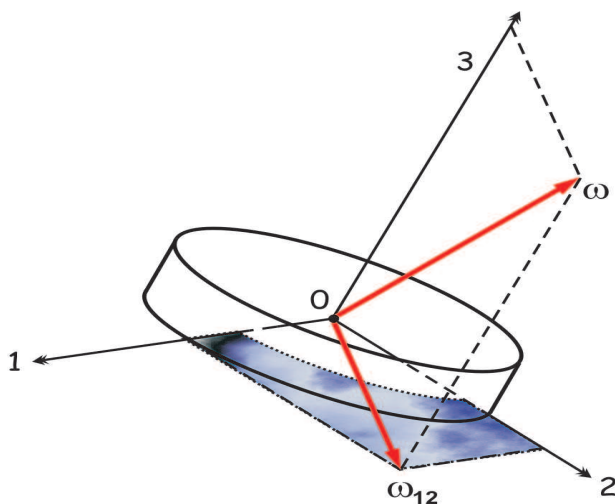
i nazivaju se Ojlerove jednačine za glavne ose. Opšte rešenje ovih jednačina je komplikovano, stoga će se u narednim delovima poglavlja razmatrati specijalni slučajevi koji omogućavaju analitičko rešenje.

§ 8. Telo sa momentom inercije $A = B$ i nultim spoljnim momentom (koordinate tela). U ovom delu će se razmatrati cilindrični disk sa osom 3 normalnom na kružnu površinu, kao što je prikazano na slici (3.8.1). Momenti inercije u odnosu na postavljene ose tela iznose

$$\begin{aligned} B = A & \quad \text{u odnosu na ose } O_1 \text{ i } O_2 \\ C & \quad \text{u odnosu na osu } O_3 \end{aligned}$$

Ojlerova jednačina tada postaje

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ A\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ C\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.1)$$



Слика 3.8.1. Obrtanje tela sa glavnim osama $[O_1, O_2, O_3]$

Iz treće od gornjih jednačina se zaključuje da ω_3 mora biti konstantno.

$$\omega_3 = n \quad (3.8.2)$$

Zamenom se dobija

$$n \left(\frac{C - A}{A} \right) = \lambda \quad (3.8.3)$$

Sada se prve dve jednačine mogu napisati kao

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \lambda \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \lambda \omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Množenjem prve jednačine sa ω_1 , a druge sa ω_2 , i sabiranjem dobija se

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0$$

ili

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{12}^2 = \text{constant} \quad (3.8.5)$$

Iz ovoga zaključujemo da je intenzitet rezultantnog vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ konstantan.

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\omega_{12}^2 + n^2} = \text{constant} \quad (3.8.6)$$

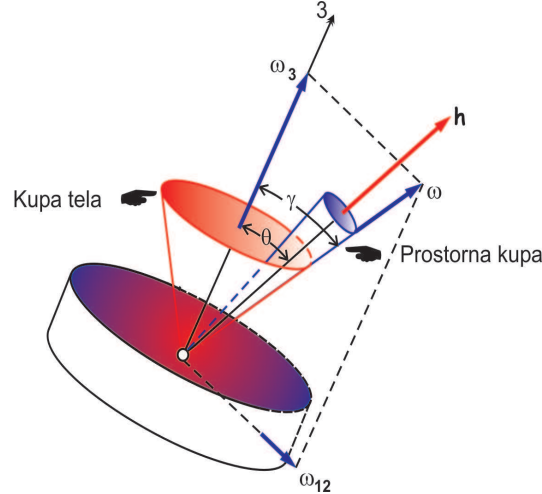
Obzirom da ne postoji spoljni momenat koji deluje na telo, biće

$$\vec{M} = \dot{\vec{h}} = 0 \quad (3.8.7)$$

što zahteva da vektor momenta impulsa (ugaonog momenta) \vec{h} bude konstantan i fiksiran u prostoru. Očigledno je da \vec{h} mora ležati u istoj ravni u kojoj su osa O_3 i $\vec{\omega}$, obzirom da komponenta \vec{h} u ravni $[O_1, O_2]$ iznosi

$$A(\omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j}) = A\omega_{12}\vec{l}_{12} \quad (3.8.8)$$

i ima isti smer kao i komponenta od $\vec{\omega}$ u ravni $[O_1, O_2]$. Na osnovu ovoga, ravan koja sadrži osu O_3 i vektor $\vec{\omega}$, rotira oko fiksnog vektora \vec{h} , kao što je prikazano na slici (3.8.2). Kretanje se može zamisliti kao obrtanje kupe tela* po prostornoj kupi, koja je fiksirana u prostoru vektorom h .



Slika 3.8.2. Kupa, koju formiraju ose tela, obrće se po prostornoj kupi

Brzina rotacije ravni, koja sadrži $\vec{\omega}$ i osu O_3 oko linije \vec{h} , može se predstaviti na sledeći način. Diferenciranjem prve od jednačina (3.8.4) i zamenom iz druge, dobija se

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda^2 \omega_1 = 0 \quad (3.8.9)$$

Ako su $\omega_1(0)$ i $\dot{\omega}_1(0)$ početni uslovi za $t = 0$, rešenje jednačine će biti

$$\omega_1 = \omega_1(0) \cos \lambda t + \frac{\dot{\omega}_1(0)}{\lambda} \sin \lambda t \quad (3.8.10)$$

Takođe, iz istog skupa jednačina, važi

$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\lambda} = \omega_1(0) \sin \lambda t - \frac{\dot{\omega}_1(0)}{\lambda} \cos \lambda t \quad (3.8.11)$$

Iz poslednje jednačine, za $t = 0$, dobija se

$$\omega_2(0) = -\frac{\dot{\omega}_1(0)}{\lambda}$$

* vizuelna prezentacija ovakvog kretanja se može videti na sajtu Eugen-a Butikov-a:
FREE ROTATION OF AN AXIALLY SYMMETRICAL BODY
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=555.0>

Kako važi da je

$$\omega_{12} = \omega_1 + i\omega_2 \quad (3.8.12)$$

pri čemu je $i = \sqrt{-1}$, drugi oblik rešenja se dobija unošenjem izraza za ω_1 i ω_2

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \left[\omega_1(0) - i \frac{\dot{\omega}_1(0)}{\lambda} \right] (\cos \lambda t + i \sin \lambda t) \\ &= [\omega_1(0) + i\omega_2(0)] e^{i\lambda t} = \omega_{12}(0) e^{i\lambda t} \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

Sve ove jednačine ukazuju na to da vektor $\omega_{12} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ u ravni $[O_1, O_2]$ rotira brzinom jednakom λ rad/sec u odnosu na rotirajuće ose tela $[O_1, O_2, O_3]$. U ovom slučaju je λ ugaona brzina vektora $\vec{\omega}$ sa aspekta posmatrača koji se nalazi na telu i to na osi simetrije.

Ugao θ između \vec{h} i ose O_3 iznosi

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A\omega_{12}}{Cn} \quad (3.8.14)$$

Ugao γ između $\vec{\omega}$ i ose O_3 iznosi

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_{12}}{n} \quad (3.8.15)$$

Upoređivanjem se dobija

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{C} \operatorname{tg} \gamma \quad (3.8.16)$$

Ako je $C > A$, tada je γ veće od θ , kao što je prikazano na slici (3.8.2), a \vec{h} će biti između $\vec{\omega}$ i ose O_3 . Ako je $C < A$, tada je γ manje od θ i $\vec{\omega}$ će ležati između \vec{h} i ose O_3 .

Jednačine, izvedene u ovom odeljku, odnose se na ose tela koje se kreću sa samim telom. One nam ne ukazuju na to kako se telo kreće u prostoru. Međutim, došlo se do sledećih zaključaka:

1. Vektori $\vec{\omega}$, \vec{h} i osa O_3 leže u istoj ravni.
2. U ravni $\vec{\omega}$, \vec{h} i ose O_3 , ugao θ između ose O_3 i \vec{h} je konstantan.
3. Ugao γ između ose O_3 i $\vec{\omega}$ je konstantan.
4. Vektor \vec{h} je konstantan ili ima nepromenljiv pravac i intenzitet.
5. Vektor $\vec{\omega}$ ima konstantan intenzitet $\sqrt{\omega_{12}^2 + n^2}$.
6. Ravan, koja sadrži tri pomenuta vektora, rotira u odnosu na ose tela brzinom λ .

§ 9. Obrtanje tela sa nultim spoljnim momentom u odnosu na Ojlerove uglove. U ovom odeljku će biti razmatran slučaj iz odeljka (3.8) uvođenjem Ojlerovih uglova ψ , θ , φ , kako bi se ustanovilo kretanje u odnosu na nepokretne ose. Obzirom da je vektor \vec{h} nepromenljiv u prostoru, može mu se odrediti položaj duž OZ ose i, u tom slučaju, $\dot{\psi}$ postaje ugaona brzina čvorne lini-

je i ose obrtanja oko pravca OZ . Takođe je dobijeno u prethodnom odeljku da je $\dot{\theta} = 0$, pa jednačine za transformaciju koordinata brzina postaju

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = n\end{aligned}\tag{3.9.1}$$

Uz uslov da je $\dot{\theta} = 0$, posle diferenciranja jednačina, za ugaona ubrzanja dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\omega}_2 &= -\dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}\tag{3.9.2}$$

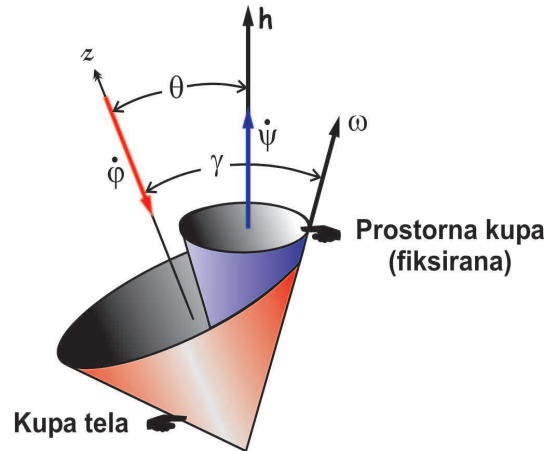
Zamenom u prvoj od jednačina (3.8.1), dobija se

$$A\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + (\dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi)(C - A) = 0\tag{3.9.3}$$

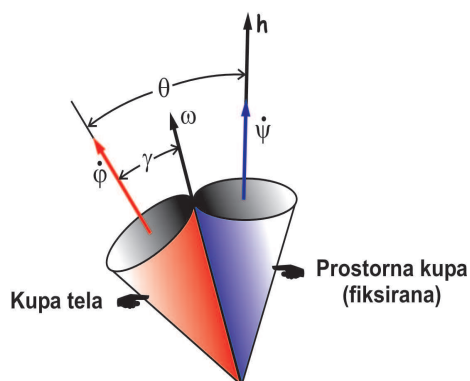
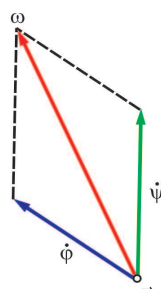
Zatio brzina precesije, izražena preko brzine obrtanja $\dot{\varphi}$, C , A i θ , postaje

$$\dot{\psi} = \frac{C\dot{\varphi}}{(A - C) \cos \theta}\tag{3.9.4}$$

Jednačina (3.9.4) kazuje da obrtna osa (a takođe i ravan koja sadrži z i $\vec{\omega}$), rotira oko fiksirane OZ ili \vec{h} ose brzinom $\dot{\psi}$ koja je proporcionalna ugaonoj brzini obrtanja $\dot{\varphi}$. Ako je $C > A$, brzina obrtanja $\dot{\varphi}$ mora biti negativna jer je $\dot{\psi}$ pozitivne orijentacije. Dakle, ako je $C > A$ $\dot{\varphi}$ će biti orijentisano u suprotnom smeru od smera $\dot{\psi}$ što se naziva *retrogradna precesija*. Ako je $C < A$, tada su $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$ istog smera i dobija se *direktna precesija*. Zato će ravan disk, koji se obrće oko ose normalne na njegovu ravan, imati retrogradnu precesiju, za razliku od tanke šipke koja će imati direktnu precesiju tokom obrtanja oko svoje longitudinalne ose. Prostorna kupa i kupa tela za ova dva slučaja su prikazane na slikama (3.9.1) i (3.9.2).



Slika 3.9.1. Retrogradna precesija $C > A$

Slika 3.9.2. Direktna precesija $C < A$ Slika 3.9.3. Za stabilnu precesiju ω je vektorski zbir $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$

Takođe, treba primetiti da za $C > A$, važi

$$\left| \frac{C}{(A - C) \cos \theta} \right| > 1$$

te je

$$\dot{\psi} > \dot{\phi}$$

Kako $\theta \rightarrow 90^\circ$, $\dot{\psi}$ postaje veoma veliko u poređenju sa $\dot{\phi}$. S obzirom da je $\dot{\theta} = 0$, resultantna ugaona brzina $\vec{\omega}$ je vektorski zbir od $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$, kao što je prikazano na slici (3.9.3).

§ 10. Nesimetrična tela sa nultim spoljnim momentom (Poissovo geometrijsko rešenje). U opštem slučaju za telo bez ose simetrije, glavni momenti inercije su nejednaki, tako da Ojlerove jednačine za spoljni obrtni moment postaju

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10.1)$$

pri čemu su $[O_1, O_2, O_3]$ fiksirane ose tela koje se poklapaju sa glavnim osama. Rešenje ovih jednačina uključuje eliptičke funkcije i razmotreno je u narednom odeljku (3.11). U ovom odeljku sledi diskusija rešenja sa aspekta geometrije, i Poansoovog geometrijskog rešenja.

Bez spoljnog obrtnog momenta kinetička energija i moment impulsa u odnosu na centar mase C su konstantni.

$$\vec{h} = \text{cons.} \quad (3.10.2)$$

Nikakav rad nije izvršen na telo, pa je stoga i

$$T = \text{cons.} \quad (3.10.3)$$

Izrazi za $\vec{\omega}$ i \vec{h} su

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \quad (3.10.4)$$

$$\vec{h} = A\omega_1 \vec{i} + B\omega_2 \vec{j} + C\omega_3 \vec{k} \quad (3.10.5)$$

na osnovu čega se dobija

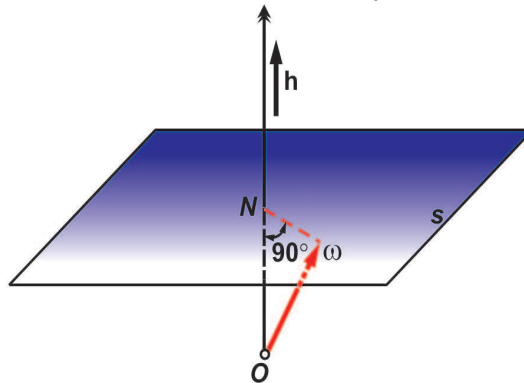
$$\vec{\omega} \cdot \vec{h} = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2T = \text{cons.} \quad (3.10.6)$$

$$h^2 = A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = \text{cons.} \quad (3.10.7)$$

Ako se \vec{h} postavi u određenom smeru, tada je njegov jedinični vektor \vec{h}/h a komponenta za $\vec{\omega}$ duž \vec{h} će biti data sa

$$ON = \vec{\omega} \cdot \frac{\vec{h}}{h} = \frac{2T}{h} = \text{cons.} \quad (3.10.8)$$

Na osnovu ovoga, tačka N je fiksirana na pravcu \vec{h} , što je prikazano na slici (3.10.1), a kraj vektora $\vec{\omega}$ mora ležati u ravni kroz N normalnoj na ON . Linija ON se naziva *invarijantna linija*, a normalna ravan se naziva *invarijantna ravan*. Dakle, ✿ kraj vektora $\vec{\omega}$ se mora kretati u okviru ove invarijantne ravni.

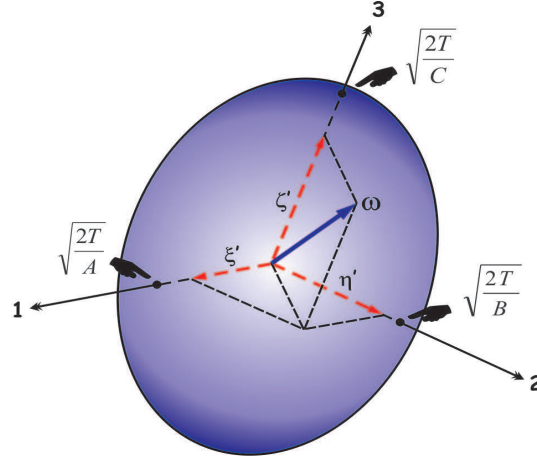


Slika 3.10.1. Invarijantna linija ON i invarijantna ravan s

Ako su koordinate od $\vec{\omega}$ - ξ' , η' , ζ' , tada važi $\omega_1 = \xi'$, $\omega_2 = \eta'$, i $\omega_3 = \zeta'$. Jednačina za $2T$ se, stoga, može zapisati kao

$$\frac{\xi'^2}{(\sqrt{2T/A})^2} + \frac{\eta'^2}{(\sqrt{2T/B})^2} + \frac{\zeta'^2}{(\sqrt{2T/C})^2} = 1 \quad (3.10.9)$$

i naziva se Poansoovim elipsoidom. Slika (3.10.2) je ilustracija elipsoida.



Slika 3.10.2. Poansoov elipsoid

Sledeće što treba ispitati je elipsoid inercije, prethodno opisan kao geometrijsko mesto položaja $\rho = 1/\sqrt{I}$ duž vektora $\vec{\omega}$. Ako su koordinate od ρ - ξ , η , ζ , iz jednačine (3.5.2), jednačina za elipsoid inercije postaje

$$\frac{\xi^2}{(\sqrt{1/A})^2} + \frac{\eta^2}{(\sqrt{1/B})^2} + \frac{\zeta^2}{(\sqrt{1/C})^2} = 1 \quad (3.10.10)$$

Na osnovu ovoga se vidi da je Poansoov elipsoid proporcionalan elipsoidu inercije i čije su koordinate $\sqrt{2T}$ puta veće od koordinata elipsoida inercije.

Poansoov elipsoid se može prikazati kako se obrće po invarijantnoj ravni sa centrom na udaljenosti $ON = 2T/h$ od ravni. Polazeći od jednačine

$$2T = \vec{\omega} \cdot \vec{h} \quad (3.10.11)$$

i uzimajući da su \vec{h} i T konstantni, dobija se sledeća diferencijalna veza

$$d(2T) = d\vec{\omega} \cdot \vec{h} = 0 \quad (3.10.12)$$

Kako bi se izbegao skalarni proizvod dva vektora $d\vec{\omega}$ i \vec{h} , potrebno je da kosinus ugla između njih bude nula. Dakle, ova dva vektora su međusobno upravna. Kako se kraj vektora $\vec{\omega}$ kreće u invarijantnoj ravni, bilo koja promena $d\vec{\omega}$ od $\vec{\omega}$ je upravna na \vec{h} i, s obzirom da geometrijsko mesto položaja od $\vec{\omega}(\xi', \eta', \zeta')$ odgovara Poansoovom elipsoidu, mora biti tangenta na invarijantnu ravan. Znači, za nekog posmatrača koji se nalazi u fiksiranom koordinatnom sistemu, kretanje tela je opisano obrtanjem Poansoovog elipsoida (ili elipsoidom inercije sa ξ , η , ζ koordinatama uvećanim za $\sqrt{2T}$) po invarijantnoj ravni.

Ukoliko se želi ispitati kretanje sa gledišta posmatrača koji se nalazi na telu koje se kreće, tada će se invarijantna ravan kretati u odnosu na telo. Iz jednačine momenta impulsa (ugaonog momenta), jednačina (3.10.7), elemente možemo preurediti tako da se obrazuje sledeći elipsoid ugaonog momenta

$$\frac{\xi'^2}{(h/A)^2} + \frac{\eta'^2}{(h/B)^2} + \frac{\zeta'^2}{(h/C)^2} = 1. \quad (3.10.13)$$

Kriva, koju formira kraj vektora $\vec{\omega}$ se tada definiše presekom Poansoovog elipsoida, jednačina (3.10.9), i elipsoida ugaonog momenta, jednačina (3.10.13).

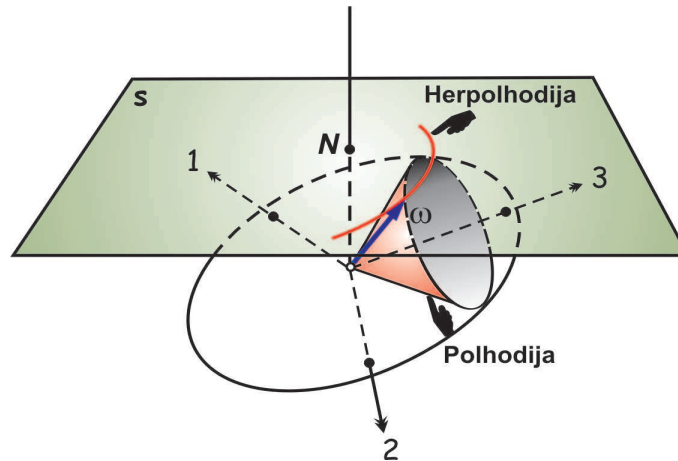
Trenutna osa $\vec{\omega}$ prolazi kroz tačku dodira između Poansoovog elipsoida i invarijantne ravni. Zato ova osa istovremeno generiše dve kupe, jednu u fiksiranom prostoru, a drugu na telu ili Poansoovom elipsoidu. Ove kupe, nazvane redom *herpolhodiја* i *polhodiја*, prikazane su na slici (3.10.3). ❀

Obzirom da je $\vec{\omega}$ zajedničko i za Poansoov elipsoid i za elipsoid ugaonog momenta, jednačina za kupu tela može se dobiti oduzimanjem jednačine (3.10.9) od jednačine (3.10.13) i množenjem sa h^2 .

$$A\left(A - \frac{h^2}{2T}\right)\xi'^2 + B\left(B - \frac{h^2}{2T}\right)\eta'^2 + C\left(C - \frac{h^2}{2T}\right)\zeta'^2 = 0 \quad (3.10.14)$$

Shodno ovoj jednačini, da bi kupa tela bila realna, mora ležati između najveće i najmanje vrednosti A , B i C . Na primer, ako je $A > B > C$, tada $h^2/2T$ mora da zadovoljava relaciju

$$A \geq \frac{h^2}{2T} \geq C.$$



Slika 3.10.3. Poansoov elipsoid se obrće po invarijantnoj ravni s

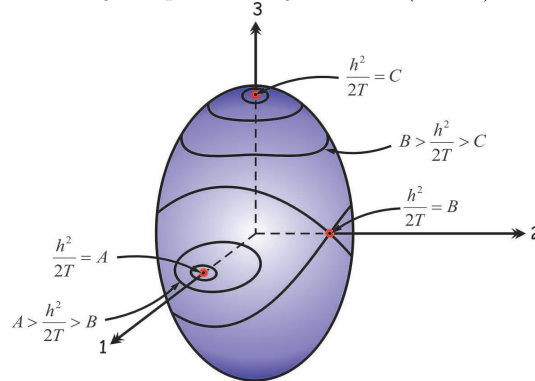
Da bi se odredile krive polhodiје, neka Poansoov elipsoid seče kupu polhodiје. Oblik ovih krivih se najbolje može sagledati posmatranjem njihovih projekcija na glavnu ravan, koje se dobijaju eliminacijom jedne od kordinata iz jednačina (3.10.9) i (3.10.14). Tako dobijene jednačine su

$$\begin{aligned}
 A(A-C)\xi'^2 + B(B-C)\eta'^2 &= 2T\left(\frac{h^2}{2T} - C\right) \\
 A(A-B)\xi'^2 - C(B-C)\zeta'^2 &= 2T\left(\frac{h^2}{2T} - B\right) \\
 B(A-B)\eta'^2 + C(A-C)\zeta'^2 &= 2T\left(A - \frac{h^2}{2T}\right)
 \end{aligned} \tag{3.10.15}$$

Ako je $h^2/2T = C$, prva jednačina je zadovoljena za $\zeta' = \eta' = 0$. Kriva polhodijske se tada svodi na tačku na osi ζ' . Ako je $h^2/2T = B$, iz druge od gornje tri jednačine se dobija

$$\frac{\zeta'}{\xi'} = \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}} \tag{3.10.16}$$

koja ukazuje na dve ravni koje prolaze kroz η' osu. Projekcije $\xi'\eta'$ i $\eta'\zeta'$, iz druge dve jednačine, jesu elipse. Ako je $h^2/2T = A$, treća od gornje tri jednačine može biti zadovoljena samo ako je $\eta' = \zeta' = 0$. Tada se kriva polhodijske svodi na tačku na osi ξ' . Ako $h^2/2T$ leži između B i C , tada polhodijske leže između ravni jednačine (3.10.16) i ose ζ' . Njihove $\xi'\eta'$ projekcije su elipse. Ako $h^2/2T$ leži između A i B , tada polhodijske leže u centralnom delu elipsoida, između ravni jednačine (3.10.16). Njihove $\eta'\zeta'$ projekcije su elipse, a $\xi'\zeta'$ projekcije su hiperbole. Opšta priroda krive polhodijske za različite slučajeve, prikazana je na slici (3.10.4).



Slika 3.10.4. Krive polhodijske

Ako se jednačine (3.10.6) i (3.10.7) napišu preko komponenti momenta impulsa h_1 , h_2 , h_3 , one tada postaju

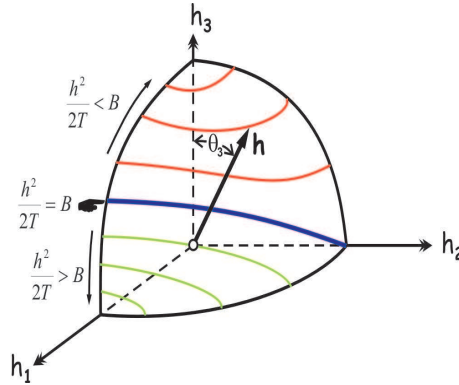
$$\frac{h_1^2}{A} + \frac{h_2^2}{B} + \frac{h_3^2}{C} = 2T \tag{3.10.17}$$

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = h^2 \tag{3.10.18}$$

i njihovo istovremeno rešenje daje presek Poansonovog elipsoida, jednačina (3.10.17), i sfere momenta impulsa, jednačina (3.10.18), izražen preko komponenti momenta

impulsa. S obzirom da su jednačine (3.10.14) i (3.10.15) takođe rešenja istog problema, potrebno je samo ponovo napisati jednačine tako da se izraze preko h_1 , h_2 i h_3 . Stoga, jednačina (3.10.14) preuređena preko komponenti momenta impulsa, izgleda

$$\left(1 - \frac{1}{A} \frac{h^2}{2T}\right) h_1^2 + \left(1 - \frac{1}{B} \frac{h^2}{2T}\right) h_2^2 + \left(1 - \frac{1}{C} \frac{h^2}{2T}\right) h_3^2 = 0 \quad (3.10.19)$$



Slika 3.10.5. Položaji vektora \vec{h} na sferi momenta impulsa

Gornja slika je analiza jednačine (3.10.19), koja pokazuje položaje vektora \vec{h} na sferi momenta impulsa za razne vrednosti $h^2/2T$, gde je $A > B > C$ i $A \geq h^2/2T \geq C$.

§ 11. Nejednaki momenti inercije sa nultim spoljnim momentom (Analitičko rešenje). Kada su momenti inercije A , B , C nejednaki, opšte rešenje jednačine (3.10.1) rezultira eliptičkim funkcijama. Ako se uzmu jednačine (3.10.6) i (3.10.7), koje predstavljaju integrale Ojlerovih jednačina, dobija se

$$h^2 - 2TA = B(B - A)\omega_2^2 + C(C - A)\omega_3^2 \quad (3.11.1)$$

$$h^2 - 2TB = A(A - B)\omega_1^2 + C(C - B)\omega_3^2 \quad (3.11.2)$$

$$h^2 - 2TC = A(A - C)\omega_1^2 + B(B - C)\omega_2^2 \quad (3.11.3)$$

Ako se pretpostavi da je $A > B > C$, jednačina (3.11.1) je uvek negativna, jednačina (3.11.3) je uvek pozitivna, a jednačina (3.11.2) je ili pozitivna ili negativna. Iz jednačine (3.11.1) i (3.11.3), može se napisati

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{h^2 - 2TC}{A(A - C)} \left\{ 1 - \frac{B(B - C)}{h^2 - 2TC} \omega_2^2 \right\} \\ \omega_3^2 &= \frac{2TA - h^2}{C(A - C)} \left\{ 1 - \left(\frac{A - B}{B - C} \right) \left(\frac{h^2 - 2TC}{2TA - h^2} \right) \frac{B(B - C)}{(h^2 - 2TC)} \omega_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.11.4)$$

Ako stavimo

$$y = \sqrt{\frac{B(B-C)}{h^2 - 2TC}} \omega_2$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{A-B}{B-C}\right) \left(\frac{h^2 - 2TC}{2TA - h^2}\right)} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (3.11.5)$$

tada važi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{h^2 - 2TC}{A(A-C)}} \sqrt{1 - y^2} \quad (3.11.6)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2TA - h^2}{C(A-C)}} \sqrt{1 - k^2 y^2} \quad (3.11.7)$$

Zamenom u drugoj od jednačina (3.10.1), dobija se

$$\dot{\omega}_2 = \sqrt{\frac{h^2 - 2TC}{B(B-C)}} \dot{y}$$

$$= \frac{(C-A)}{B} \sqrt{\frac{(h^2 - 2TC)(2TA - h^2)}{AC(C-A)^2}} \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)} \quad (3.11.8)$$

✿ koja je poznata kao *eliptički integral* prvog reda,

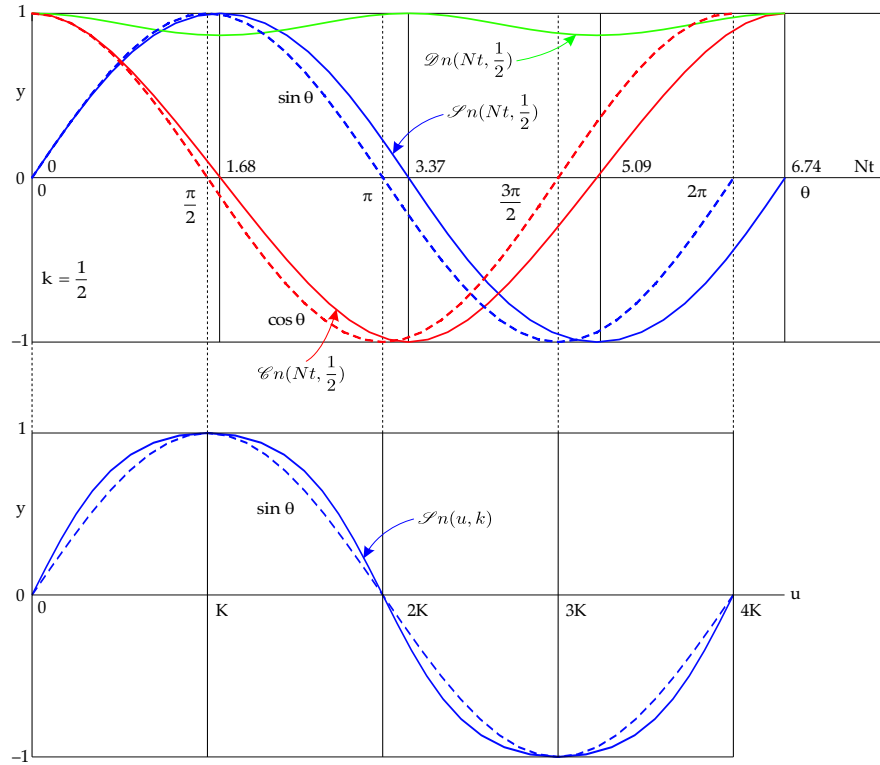
$$Nt = u = \sqrt{\frac{(B-C)(2TA - h^2)}{ABC}} t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \quad (3.11.9)$$

pri čemu se t meri u momentu kada je $\omega_2 = 0$. Uzimajući da je $y = \sin \phi$, važi

$$u = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = F(\phi, k) \quad (3.11.10)$$

a u postaje funkcija od apsolutne vrednosti k i amplitude ϕ . Obrnuto, y je funkcija od $u = Nt$ i k i postaje tablična funkcija za $0 \leq k \leq 1$, pri čemu je N definisano jednačinom (3.11.9).

$$y = \mathcal{S}n(u, k) \quad (3.11.11)$$



Slika 3.11.1 i 3.11.2 Analiza eliptičkih funkcija

Iz jednačine (3.11.5) rešenje za ω_2 je

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{h^2 - 2TC}{B(B - C)}} \mathcal{S}n(Nt, k) \quad (3.11.12)$$

Slično se može pokazati da rešenje za ugaone brzine u odnosu na druge dve ose iznosi

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{h^2 - 2TC}{A(A - C)}} \mathcal{C}n(Nt, k) \\ \omega_3 &= -\sqrt{\frac{2TA - h^2}{C(A - C)}} \mathcal{D}n(Nt, k) \end{aligned} \quad (3.11.13)$$

gde su $\mathcal{C}n$ i $\mathcal{D}n$ funkcije povezane sa funkcijom $\mathcal{S}n$ preko jednačina

$$\begin{aligned} \mathcal{C}n^2 x &= 1 - \mathcal{S}n^2 x \\ \mathcal{D}n^2 x &= 1 - k^2 \mathcal{S}n^2 x \end{aligned} \quad (3.11.14)$$

Ova rešenja odgovaraju slučaju $h^2 < 2TB$ koji je potreban za $0 \leq k \leq 1$.

Za male vrednosti $k \rightarrow 0$ (na primer, A se približava B) eliptičke funkcije teže trigonometrijskim funkcijama

$$\mathcal{S}n(Nt, 0) = \sin(Nt)$$

$$\mathcal{C}n(Nt, 0) = \cos(Nt)$$

$$\mathcal{D}n(Nt, 0) = 1.0$$

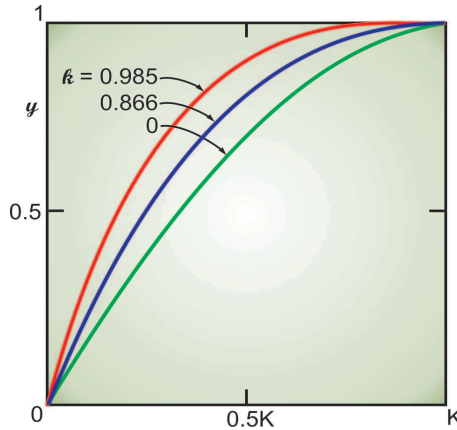
Tako, ako je $A = B$, ugaone brzine se dobijaju kao

$$\omega_2 = \beta \sin(Nt)$$

$$\omega_1 = \beta \cos(Nt)$$

$$\omega_3 = n$$

što se slaže sa rezultatima dobijenim u Odeljku (3.8).



Slika 3.11.3

Analiza eliptičkih funkcija $\mathcal{S}n(u, k)$

Tabela za $y = \sin \phi = \mathcal{S}n(u, k)$ (uzeto iz Pirsove tabele integrala, str.122)

ϕ	Ordinata $\mathcal{S}n(u; k)$ $= \sin \phi$	Apscisa $= u = Nt = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$				
		$k = 0$	$k = 0; 50$	$k = 0; 707$	$k = 0; 866$	$k = 0; 9848$
0°	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10°	0,1736	0,111	0,1037	0,0943	0,0814	0,0556
20°	0,3420	0,222	0,2080	0,190	0,1646	0,113
30°	0,500	0,3333	0,3140	0,289	0,2515	0,174
45°	0,707	0,500	0,477	0,445	0,3945	0,278
60°	0,866	0,666	0,645	0,616	0,563	0,413
75°	0,9563	0,834	0,821	0,802	0,765	0,617
90°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		K	$=1,686$	$=1,854$	$=2,156$	$3,153$

Da bi se pokazao ishod za $A \neq B$, analiza eliptičke funkcije za $k = 1=2$ se poredi sa trigonometrijskom funkcijom na slici (3.11.1). Ako se $y = \sin \phi = \mathcal{S}n(u; k)$ razmatra u odnosu na $u = Nt$ za različite vrednosti k sa u normalizovanim na jedinicu za $\phi = 90^\circ$, tada će analiza $\mathcal{S}n(u; k)$ biti kao na slikama (3.11.2) i (3.11.3).

§ 12. Stabilnost rotacije u odnosu na glavne ose inercije. Pod pretpostavkom da nema spoljnih momenata, Ojlerove jednačine mogu da se zapišu u formi

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 &= (B - C)\omega_2\omega_3 \\ B\dot{\omega}_2 &= (C - A)\omega_1\omega_3 \end{aligned} \quad (3.12.1)$$

$$C\dot{\omega}_3 = (A - B)\omega_1\omega_2$$

i tada važi

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \text{cons.} & \text{ako} & \quad \omega_2 = \omega_3 = 0 \\ \omega_2 &= \text{cons.} & \text{ako} & \quad \omega_1 = \omega_3 = 0 \\ \omega_3 &= \text{cons.} & \text{ako} & \quad \omega_1 = \omega_2 = 0 \end{aligned}$$

što ukazuje da su moguće stalne rotacije oko svake od glavnih osa. Sada treba pokazati da su ove stalne rotacije stabilne u odnosu na ose za koje su vrednosti momenata inercije najmanje i najveće, a nestabilne u odnosu na ose za koje se vrednosti momenata inercije nalaze između navedenih vrednosti momenata inercije. Neka postoji konstantna rotacija oko jedne od osa, na primer ose O_1 , i neka postoji malo narušavanje stabilnosti te rotacije. Tada ćemo imati početne uslove $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ i stanje zbog narušavanja stabilnosti $\omega_1 = \omega_0 + \epsilon$, pri čemu su ω_2 i ω_3 veoma mali. Linearizovane jednačine će biti

$$\begin{aligned} A\dot{\epsilon} &= 0 \\ B\dot{\omega}_2 &= (C - A)\omega_0\omega_3 \\ C\dot{\omega}_3 &= (A - B)\omega_0\omega_2 \end{aligned} \tag{3.12.2}$$

Diferenciranjem druge i treće od jednačina (3.12.2), dobijamo jednačine

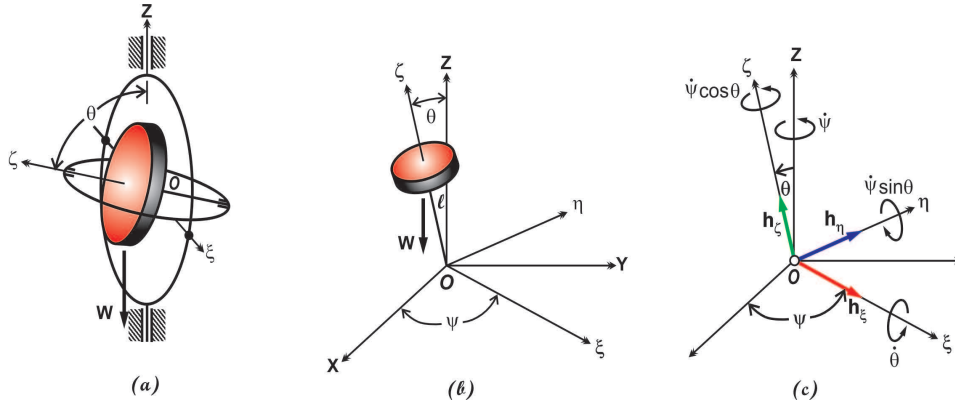
$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_2 + \frac{(A - B)(A - C)}{BC}\omega_0^2\omega_2 &= 0 \\ \ddot{\omega}_3 + \frac{(A - B)(A - C)}{BC}\omega_0^2\omega_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.12.3}$$

koje su održive uz uslov da je $(A - B)(A - C)$ pozitivno. Uslov pozitivnosti važi ako je $A > B$ i $A > C$ (što znači da je A glavna osa sa maksimumom momenta inercije) ili ako je $B > A$ i $C > A$ (A je glavna osa sa minimumom momenta inercije). Kada A ima vrednost između B i C , tada je $(A - B)(A - C)$ negativno i male vrednosti ω_2 i ω_3 će rasti. Prva od jednačina (3.12.2) zahteva da mali poremećaj ϵ bude konstantan. Shodno tome, ako je osa O_1 ili osa sa maksimumom ili osa sa minimumom momenta inercije, rotacija je stabilna. Ako je osa O_1 osa sa vrednostima momenta inercije između maksimuma i minimuma, ω_2 i ω_3 će se povećati i time dovesti do nestabilne oscilacije. Gore navedeni zaključci se mogu demonstrirati jednostavnim ispuštanjem gumice koja bi se obrtala oko svake od glavnih osa.

§ 13. Opšte kretanje simetričnog žiroskopa ili čigre. slika (3.13.1) prikazuje simetrični žiroskop* koji se obrće oko ose ζ i koga drže dva okvira sa zajedničkim centrom. Unutrašnji okvir omogućava vibrirajuću (klimajuću)

* Žiroskop je kruto telo koje se obrće oko nepokretne tačke O u kojoj je elipsoid inercije rotacioni; pod žiroskopom se najčešće podrazumeva disk obešen u jednom ili dva okvira koji

rotaciju obrtne ose oko horizontalnih ležišta (oslonaca) ζ , dok spoljašnji okvir može slobodan da rotira oko vertikalne Z ose.



Slika 3.13.1. Simetrični žiroskop - ugaoni moment u odnosu na ose okvira

Žiroskop se tada obrće oko nepokretnog geometrijskog centra sistema ova dva okvira, a centar mase se ne poklapa sa fiksiranim centrom O .

- * Potrebno je sada definisati precesiju i nutaciju na sledeći način. Rotacija $\dot{\psi}$ horizontalne ose ξ (čvorne ose) oko vertikalne ose Z naziva se *precesija*. Ukoliko je ugao θ konstantan, obrtna osa će formirati kupu, usled precesije. Rotacija $\dot{\theta}$ unutrašnjeg okvira oko čvorne ose naziva se *nutacija*. Nutacija, kao termin, ukazuje na "klimanje" obrtne ose. U opštem slučaju, i nutacija i precesija mogu postojati u isto vreme.

Ukoliko se, za početak, zanemari masa okvira, dobiće se obrtni točak koji slobodno rotira oko geometrijskog centra O , kao što je prikazano na slici (3.13.1b). Sistem je tada identičan onom sistemu u kome se čigra obrće oko nepokretne tačke O pri čemu je sistem izložen gravitacionom obrtnom momentu $Wl \sin \theta$ u odnosu na osu ξ ($W = m \frac{GM}{R^2} = mg$ - težina tela). Ukoliko je $l = 0$, tada se radi o specijalnom slučaju kada žiroskop slobodno rotira oko centra gravitacije.

Pogodno je ovde predstaviti jednačine momenta u odnosu na Dekartov sistem pravouglanih koordinata sa početkom u geometrijskom centru pri čemu je linija čvorova ξ jedna od osa. Neka moment inercije točka u odnosu na čvornu osu sistema ξ, η, ζ bude A, A, C . Ugaone brzine osa ξ, η, ζ i ugaoni moment (moment impulsa) u odnosu na njih će tada biti

$$\begin{aligned} \omega_{\xi} &= \dot{\theta} & h_{\xi} &= A\dot{\theta} \\ \omega_{\eta} &= \dot{\psi} \sin \theta & h_{\eta} &= A\dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\psi} \cos \theta & h_{\zeta} &= C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.13.1)$$

se nalaze u posebnom nosaču (kućištu žiroskopa); rotacija diska proizvodi inerciju koja osu rotacije diska u nedostatku spoljnih uticaja zadržava usmerenu u istom pravcu u prostoru. Stabilnost žiroskopa se ogleda u snažnom odupiranju spoljnim uticajima koji teže da mu promene položaj ose; precesija žiroskopa je osobina žiroskopa da pri nasilnoj promeni položaja jedne njegove ose skreće oko druge njoj upravne ose

gde je φ ugao obrtanja osa O_1 , O_2 tela u odnosu na čvornu osu ξ .
Komponente momentne jednačine

$$\vec{M} = [\dot{\vec{h}}] + \vec{\omega} \times \vec{h} \quad (3.13.2)$$

se mogu na osnovu slike (3.13.1c) zapisati

$$\begin{aligned} M_\xi &= \dot{h}_\xi + h_\zeta \dot{\psi} \sin \theta - h_r \dot{\psi} \cos \theta \\ M_r &= \dot{h}_r + h_\zeta \dot{\psi} \cos \theta - h_\xi \dot{\theta} \\ M_\zeta &= \dot{h}_\zeta + h_r \dot{\theta} - h_\xi \dot{\psi} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.13.3)$$

Zamenom komponenti za \vec{h} i \vec{M} , ove jednačine postaju

$$\begin{aligned} Wl \sin \theta &= A\ddot{\theta} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)\dot{\psi} \sin \theta - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 &= A \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \sin \theta) + A\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta - C\dot{\theta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \\ 0 &= C \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.13.4)$$

Poslednja jednačina pokazuje da je $\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$ konstantno te se može izjednačiti sa n

$$n = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (3.13.5)$$

Ova zamena omogućava da se prve dve jednačine (3.13.4) integrale preko odgovarajućih integracionih faktora. Međutim, ovde ćemo razmatrati alternativni pristup zasnovan na određenim konstantnim integralima jednačina kretanja. Pod ovim se podrazumeva održanje ukupne energije i održanje ugaonog momenta (momenta impulsa) u odnosu na vertikalnu Z osu pri čemu nema spoljnog momenta.

Ukoliko se prouče jednačine ugaonih brzina u odnosu na ose tela

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = n \end{aligned} \quad (3.13.6)$$

vidimo da se sabiranjem kvadrata prve dve od gornjih jednačina dobija kvadrat rezultujuće brzine u ekvatorijalnoj ravni koji, izražen preko Ojlerovih uglova, ima oblik

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta. \quad (3.13.7)$$

S obzirom da je ω_3 konstantno i jednako n , kinetička energija se može zapisati kao

$$T = \frac{1}{2} C n^2 + \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \quad (3.13.8)$$

Posmatrajući potencijalnu energiju u odnosu na početak koordinatnog sistema

$$U = Wl \cos \theta \quad (3.13.9)$$

ukupna energija E , koja mora biti konstantna, postaje

$$E = \frac{1}{2}Cn^2 + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + Wl \cos \theta \quad (3.13.10)$$

i predstavlja jedan od prvih integrala diferencijalnih jednačina kretanja.

Sa momentom, koji je u odnosu na Z osu jednak nuli, moment impulsa

$$h_Z = h_z \cos \theta + h_r \sin \theta$$

mora biti konstantan

$$h_Z = Cn \cos \theta + A\dot{\psi} \sin^2 \theta \quad (3.13.11)$$

Ova jednačina se, takođe, može dobiti i pomoću Langranžovog pristupa, s obzirom da je generalisana koordinata ψ , zapravo, kružna koordinata sa $M_Z = 0$. Iz gornje jednačine, rešenje za $\dot{\psi}$ je

$$\dot{\psi} = \frac{h_Z - Cn \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \quad (3.13.12)$$

i, smenom u jednačini (3.13.10), dobija se sledeći oblik jednačine za energiju

$$E - \frac{Cn^2}{2} = \frac{A\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(h_Z - Cn \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + Wl \cos \theta \quad (3.13.13)$$

Jednačina (3.13.13) u potpunosti zavisi od θ i njeno rešenje, zamenjeno u jednačini (3.13.10), u potpunosti opisuje kretanje sistema.

Sledećom smenom oznaka:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \frac{2}{A} \left(E - \frac{Cn^2}{2} \right), & \text{konstanta} \\ \beta = \frac{2Wl}{A}, & \text{konstanta} \\ \gamma = \frac{h_Z}{A}, & \text{konstanta} \\ N = \frac{Cn}{A}, & \text{konstanta} \\ u = \cos \theta, & \text{promenljiva} \end{array} \right.$$

možemo jednačinu (3.13.13) zapisati u obliku

$$\alpha \sin^2 \theta = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + (\gamma - N \cos \theta)^2 + \beta \cos \theta \sin^2 \theta . \quad (3.13.14)$$

Ukoliko se izrazi preko u , jednačina izgleda ovako

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - Nu)^2 . \quad (3.13.15)$$

Rešenje gornje jednačine je dato sledećim integralom, koji može da se razvije pomoću eliptičkih funkcija

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - Nu)^2}} \quad (3.13.16)$$

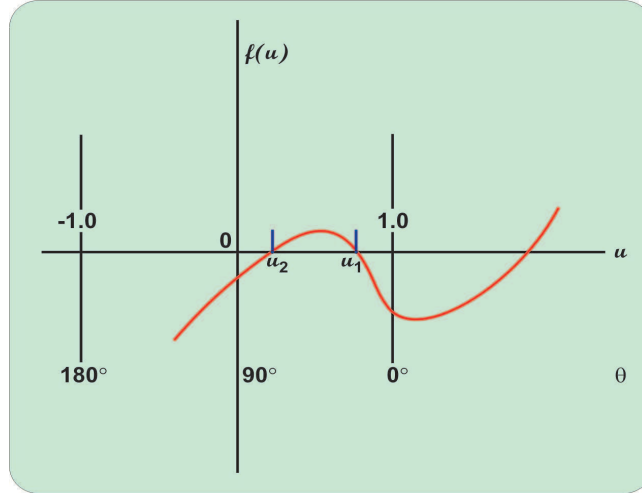
Matematičko rešenje gornjeg integrala je komplikovano za interpretaciju. Međutim, to rešenje nije neophodno da bi se procenilo ponašanje žiroskopa. Neka je

$$\dot{u}^2 = f(u) \quad (3.13.17)$$

Jednačina (3.13.15) se može zapisati kao

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - Nu)^2 \quad (3.13.18)$$

a koreni ove jednačine upravo dosta govore o kretanju žiroskopa. Iako je fizički gledano $u = \cos \theta$ ograničeno i nalazi se između ± 1 , matematički gledano u može da izađe van ovog ograničenja. Za velike vrednosti u , dominantna vrednost u $f(u)$ je βu^3 , pa tako $f(u)$ mora biti pozitivno za velike vrednosti pozitivnog u i negativno za velike vrednosti negativnog u , kao što je prikazano na slici (3.13.2).



Slika 3.13.2. Kubna jednačina koja predstavlja kretanje simetričnog žiroskopa

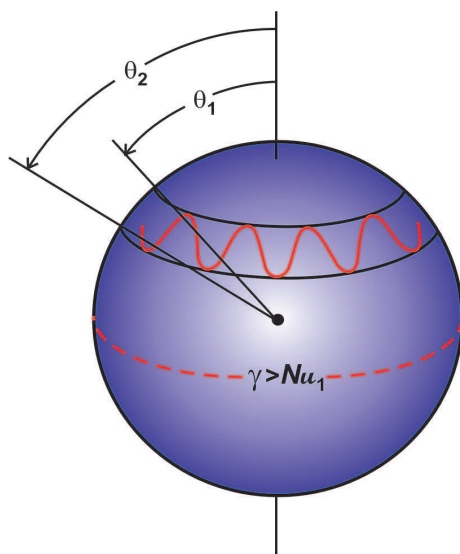
Takođe, za $u = 1$ prvi deo izraza u $f(u)$ se gubi pa će biti

$$f(\pm 1) = -(\gamma \mp N)^2$$

Očigledno je da za $u = \pm 1$ $f(u)$ mora biti uvek negativno. Posmatrajući izraz za $f(u)$ izražen preko θ

$$f(u) = \dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \quad (3.13.19)$$

vidimo da, za stvarne vrednosti θ i $\dot{\theta}$, $f(u)$ mora biti pozitivno. Shodno ovome, zaključuje se da, za fizički slučaj, $u = \cos \theta$ uvek mora biti između u_1 i u_2 za koje je $f(u)$ pozitivno. Pored svega ovoga, za $\theta > 0$, $\dot{\theta}$ mora imati vrednost nula u u_1 i u_2 , što zahteva da se obrtna osa Oz kreće između graničnih krugova $u_1 = \cos \theta_1$ i $u_2 = \cos \theta_2$, kao što je prikazano na slici (3.13.3).

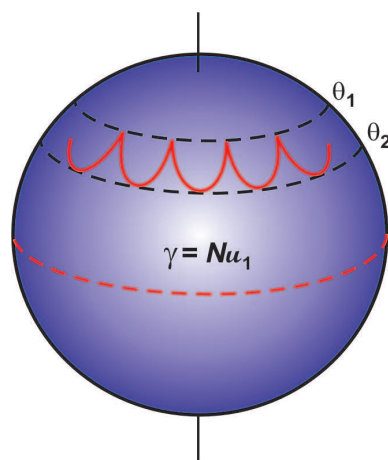


Слика 3.13.3. Oscilovanje ograničeno sa θ_1 i θ_2 za $\gamma > Nu_1$

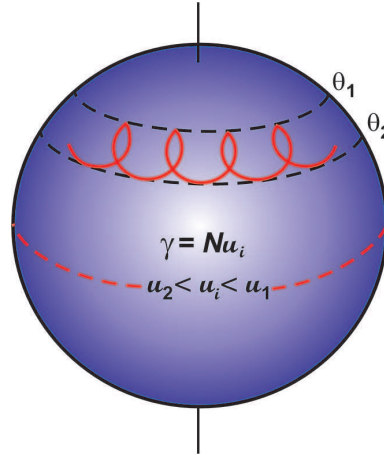
Vrsta krive koju formira obrtna osa u oblasti θ_1 i θ_2 , zavisi od relativnih vrednosti γ i N . Na primer, jednačina (3.13.12) se može zapisati kao

$$\dot{\psi} = \frac{\gamma - Nu}{1 - u^2}$$

i, s obzirom da je $u < 1$ između u_1 i u_2 , znak za $\dot{\psi}$ zavisi od $\gamma - Nu$. Ako je $\gamma = Nu_1$, tada $\dot{\psi}$ mora biti nula na gornjem graničnom krugu i pozitivno za $\theta > \theta_1$, kao što je prikazano na slici (3.13.4). Da bi se dobila kriva sa slike (3.13.5), $\dot{\psi}$ mora da menja znak za neke vrednosti od u , između u_1 i u_2 . Stoga, u ovom slučaju, $\gamma - Nu_i = 0$ za $u_2 < u_i < u_1$.



Слика 3.13.4. Oscilovanje ograničeno sa θ_1 i θ_2 za $\gamma = Nu_1$



Slika 3.13.5. Oscilovanje ograničeno sa θ_1 i θ_2 za $\gamma = Nu_i$, gde je $u_2 < u_i < u_1$

Početni uslovi

Ako se žiroskop ili čigra pokrenu u $t = 0$ sa $\theta = \theta_0$ i $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$, vrednosti dve konstante sistema, E i h_Z se mogu dobiti iz jednačina (3.13.12) i (3.13.13)

$$\begin{aligned} h_Z &= Cn \cos \theta_0 \\ E - \frac{1}{2}Cn^2 &= Wl \cos \theta_0 \end{aligned}$$

Zamenom u jednačinama (3.13.12) i (3.13.13), jednačine za precesiju i nutaciju su

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{N(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\ \dot{\theta}^2 &= (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[\beta - \frac{N^2}{\sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (3.13.20)$$

Obe ove jednačine su u saglasnosti sa početnim uslovima koji deluju na sistem. Druga od gornjih jednačina ukazuje da desna strana te jednačine mora uvek biti pozitivna, zato θ_0 mora odgovarati najvećoj elevaciji (visini, nagibu) obrtne ose ili gornjem graničnom krugu. Niži granični krug se nalazi rešavanjem $\cos \theta$ za $\dot{\theta} = 0$. Rezultat će biti

$$\cos \theta = \frac{N^2}{2\beta} \pm \sqrt{1 - \frac{N^2}{\beta} \cos \theta_0 + \left(\frac{N^2}{2\beta}\right)^2} \quad (3.13.21)$$

Može se pokazati da znak ispred korena mora biti negativan. Recimo, s obzirom da je $\cos \theta_0 < 1$, koren će biti veći od

$$\sqrt{1 - \frac{N^2}{\beta} + \left(\frac{N^2}{2\beta}\right)^2} = 1 - \frac{N^2}{2\beta} < \sqrt{1 - \frac{N^2}{\beta} \cos \theta_0 + \left(\frac{N^2}{2\beta}\right)^2} = \cos \theta - \frac{N^2}{2\beta}$$

Sada, ako se iskoristi pozitivan znak, onda je $\cos \theta > 1$, što je nemoguće. Shodno ovome, θ_2 će odgovarati nižem graničnom krugu i biće određeno jednačinom

$$\cos \theta_2 = \frac{N^2}{2\beta} - \sqrt{1 - \frac{N^2}{\beta} \cos \theta_0 + \left(\frac{N^2}{2\beta}\right)^2} \quad (3.13.21)$$

§ 14. Stabilna precesija simetričnog žiroskopa ili čigre. U prethodnom delu je pokazano da se čigra, koja se obrće oko fiksirane tačke O , kreće tako što se njena osa simetrije $O\zeta$ nalazi u oblasti između θ_1 i θ_2 i to kretanje je određeno korenima za $f(u) = 0$ u u_1 i u_2 . Očigledno je da, ukoliko se u_1 približava u_2 , kružni prsten između θ_1 i θ_2 će se sužavati sve dok se ne spoje u jednu vrednost θ_s , kao što je prikazano na slici (3.14.1). Fizički, ovo je ugao stabilne precesije koji se može definisati početnim uslovima $\theta = \theta_s$, $\dot{\theta} = 0$ i $\dot{\psi} = \dot{\psi}_s$.

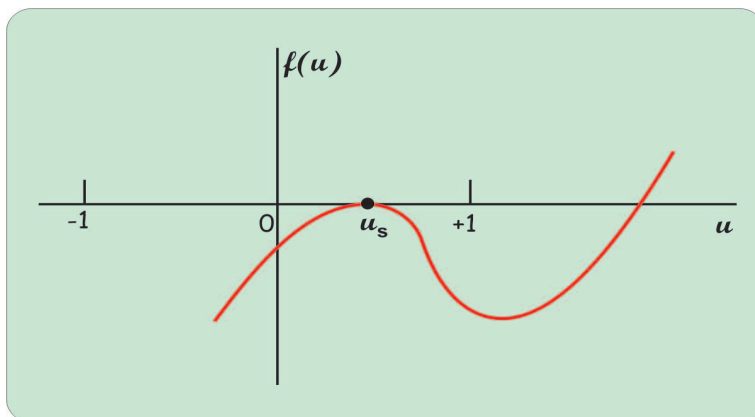
Analiza ovog specijalanog slučaja je analiza jednog od najjednostavnijih slučajeva čigre koja se obrće i sada će biti razmotrena. Iako se problemu može pristupiti matematički pomoću jednačina

$$\begin{aligned} f(u) &= 0 \\ \frac{df(u)}{du} &= 0 \end{aligned}$$

poželjnije je ispitati slučaj fizički, na sledeći način.

Za stabilnu precesiju je $\dot{\theta} = 0$ a ugaone brzine u odnosu na ose ξ , η , ζ (slika 3.13.1c) su

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= 0 \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned}$$



Slika 3.14.1. Stabilna precesija koja odgovara $u_1 = u_2 = u_s$

Ugaoni momenti (momenti impulsa) u odnosu na odgovarajuće ose su

$$\begin{aligned} h_\xi &= 0 \\ h_\eta &= A\dot{\psi} \sin \theta \\ h_\zeta &= C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cn \end{aligned} \quad (3.14.1)$$

a moment u odnosu na ξ osu postaje

$$M_\xi = h_\zeta \dot{\psi} \sin \theta - h_\eta \dot{\phi} \cos \theta = Cn \dot{\psi} \sin \theta - A \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = Wl \sin \theta \quad (3.14.2)$$

ili

$$\dot{\psi}^2 - \left(\frac{Cn}{A \cos \theta} \right) \dot{\psi} + \frac{Wl}{A \cos \theta} = 0 \quad (3.14.3)$$

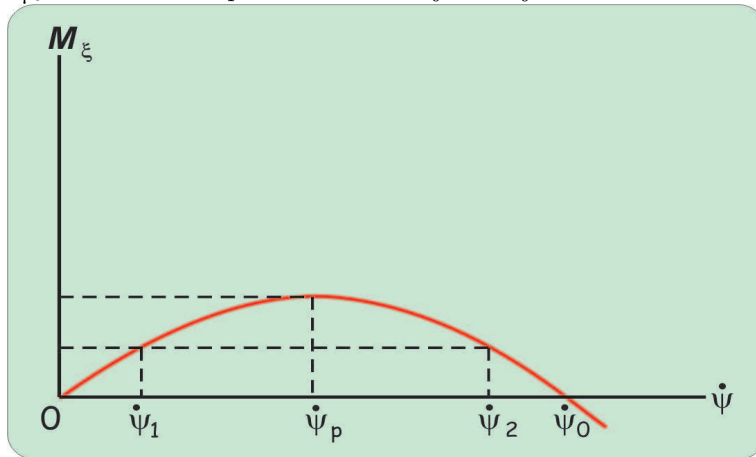
Dve precesione brzine su tada date jednačinom

$$\dot{\psi}_{1,2} = \frac{Cn}{2A \cos \theta} \pm \sqrt{\left(\frac{Cn}{2A \cos \theta} \right)^2 - \frac{Wl}{A \cos \theta}} \quad (3.14.4)$$

što obezbeđuje da brzina obrtanja bude dovoljno velika kako bi se zadržao pozitivan koren gornje jednačine. Ovaj zahtev je ispunjen ako je

$$n^2 > \frac{4AWl \cos \theta}{C^2} \quad (3.14.5)$$

Detalji problema se dobijaju razmatranjem M_ξ u odnosu na $\dot{\psi}$ pomoću jednačine (3.14.2), kao što je prikazano na slici (3.14.2). Prikazana kriva je parabola i za bilo koju vrednost M_ξ postoje dve precesione brzine. Kada je $M_\xi = 0$, precesione brzine su nula i $\dot{\psi}_0$. Ova vrednost precesione brzine je data jednačinom



Slika 3.14.2. Konstantan moment M_ξ rezultira sa dve moguće precesione brzine $\dot{\psi}_1$ i $\dot{\psi}_2$

$$\dot{\psi}_0 = \frac{Cn}{A \cos \theta} = \frac{C\dot{\phi}}{(A - C) \cos \theta} \quad (3.14.6)$$

koja se slaže sa jednačinom za žiroskop bez momenta (pogledati jednačinu (3.9.4)). Precesiona brzina koja odgovara maksimalnom momentu u tački vrha parabole, iznosi

$$\dot{\psi}_p = \frac{Cn}{2A \cos \theta} \quad (3.14.7)$$

i odgovarajući maksimalni moment je

$$M_{\xi \max} = \frac{1}{4} \frac{C^2 n^2}{A} \operatorname{tg} \theta \quad (3.14.8)$$

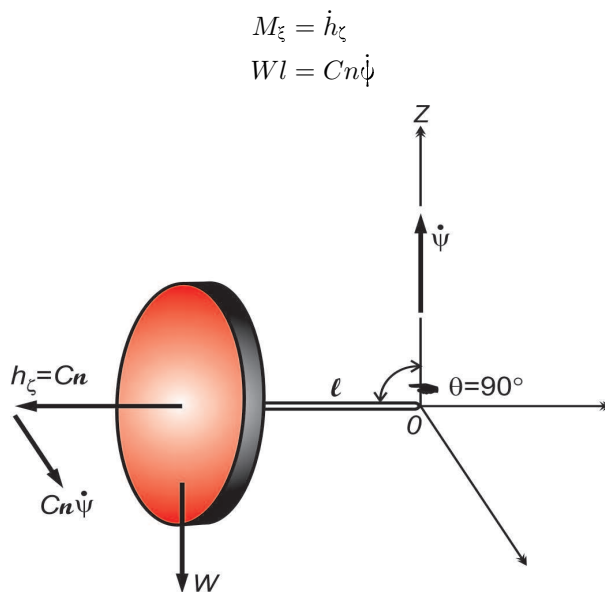
Za središnji moment M_{ξ} precesione brzine $\dot{\psi}_1$ i $\dot{\psi}_2$ se odnose na sporu i brzu precesiju. Generalno, brza precesija se ne dostiže jer je potrebna velika kinetička energija te je precesija čigre koja se obrće obično spora precesija.

Ograničenja

Da bi $\dot{\psi}$ bilo realno, potrebno je da izraz pod korenom u jednačini (3.14.4) bude veći od nule ili

$$C^2 n^2 \geq 4WlA \cos \theta$$

Ako je $\theta = 90^\circ$, jednačina (3.14.5) pokazuje da najmanja zahtevana vrednost za n iznosi nula. Međutim, ako pogledamo jednačinu (3.14.4) vidimo da je u tom slučaju $\dot{\psi}$ neodređeno. Ovo ograničenje se može rešiti za $n > 0$ uzimajući u razmatranje sliku (3.14.3). Mera promene vektora momenta impulsa $h_{\xi} = Cn$ odgovara obrtnom momentu $M_{\xi} = Wl$



Slika 3.14.3. Ograničavajući slučaj $\theta = 90^\circ$

Zato će obrtna brzina $\dot{\psi}$ za $\theta = 90^\circ$ biti

$$\dot{\psi} = \frac{Wl}{Cn} \quad (3.14.9)$$

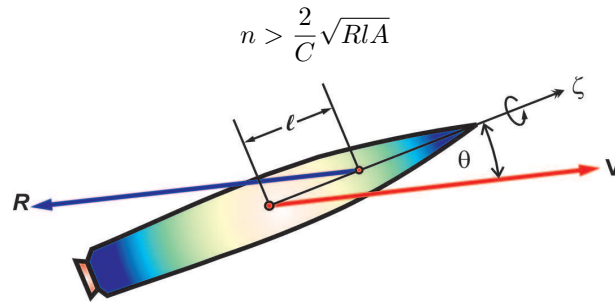
i sve dok je n konačno i $\dot{\psi}$ je konačno.

Isti rezultat se može dobiti i iz jednačine (3.14.3) u kojoj će, za $\cos \theta \rightarrow 0$, prvi član izraza $\dot{\psi}^2$ biti zanemarljivo mali u odnosu na druga dva.

Za $\theta = 0^\circ$, potrebna vrednost za n u jednačini (3.14.5) mora zadovoljavati jednačinu

$$n \geq \frac{2}{C} \sqrt{WlA} \quad (3.14.10)$$

i u tom slučaju se dobija tzv. *uspavana čigra*. Jednačina (3.14.10) se često koristi za određivanje one obrtne brzine pri kojoj je kretanje rakete ili projektila stabilno. Na osnovu slike (3.14.4), sve dok se osa obrtanja $O\zeta$ podudara sa vektorom brzine projektila, sila otpora će se takođe podudarati sa osom $O\zeta$. Međutim, ukoliko osa obrtanja blago odstupa za mali ugao θ u odnosu na vektor brzine, tada će sila otpora, koja deluje u centru pritiska na udaljenosti l od centra mase, imati moment $Rl \sin \theta$ u odnosu na centar mase. Dakle, ovaj problem je identičan slučaju uspavane čigre samo što je Wl zamenjeno sa Rl . Raketa (ili projektil) će stoga biti stabilna, ako je brzina obrtanja dovoljno velika, što je ustanovljeno sa



Slika 3.14.4. Stabilizacija obrtanja rakete ili projektila

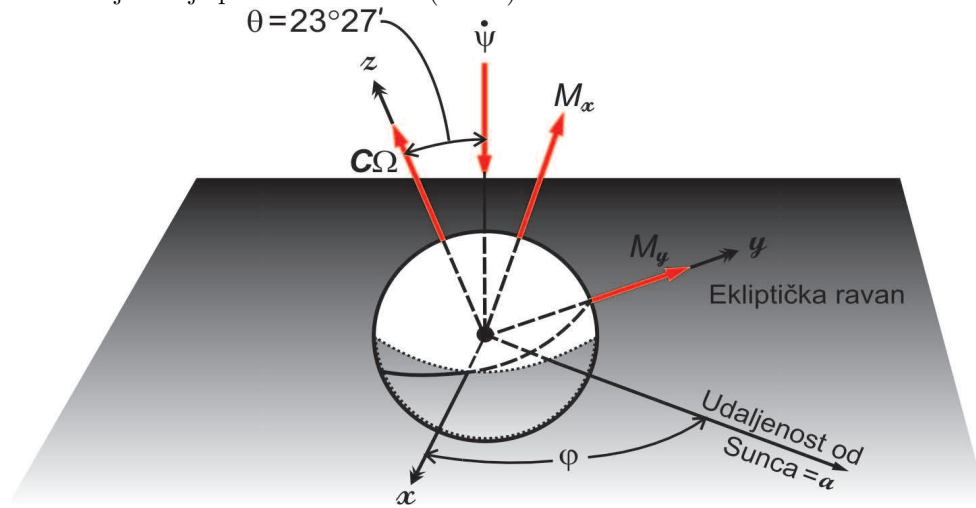
§ 15. Precesija i nutacija Zemljine polarne ose. U odeljku (2.18), izvedene su jednačine momenta, kojim Zemlja, usled svoje spljoštenosti, deluje na satelit koji kruži. Na osnovi trećeg Njutnovog zakona, satelit mora da deluje istim i suprotnim momentom na Zemlju, ali zbog velike Zemljine mase u poređenju sa masom satelita, uticaj momenta je merljiv samo za kretanje satelita.

Momentne jednačine iz odeljka (2.18), sa suprotnim znakom za moment kojim satelit deluje na Zemlju, biće

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{3Km_s}{ma^3} (C - A) \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\ M_y &= -\frac{3Km_s}{ma^3} (C - A) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.15.1)$$

$$M_z = 0$$

Ove jednačine se primenjuju na bilo koja dva tela koja se nalaze u položaju opisanom u odeljku (2.18), pa su zato primenljive i na Sunce i Zemlju ili na Mesec i Zemlju. Zbog nagiba Zemljine polarne ose pod uglom od $23^\circ 27'$ koji polarna osa zaklapa sa normalom na ekliptičku ravan, dolazi do momenta kojim Sunce deluje na Zemlju što je prikazano na slici (3.15.1)



Slika 3.15.1. Uticaj Sunca na Zemlju preko momenata M_x i M_y

Vektor momenta impulsa Zemlje koja se obrće je $C\Omega$ i moment M_y dovodi do toga da se kraj vektora $C\Omega$ kreće uvek u istom pravcu i pri tome menja ugao θ . Obzirom da je moment M_y oscilatoran (njegova vrednost po završenom ciklusu je jednaka nuli), M_y stvara oscilatornu nutaciju sa nultim rezultatnim uglom po ciklusu.

Moment M_x je oscilatoran ali zbiran duž negativne x ose, što zahteva postojanje rezultantne precesije po ciklusu. Neka je $\dot{\psi}$ brzina precesije normalna na ekliptičku ravan, tada će komponenta $\dot{\psi} \sin \theta$, duž negativnog smera y ose, rotirati vektor momenta impulsa u pravcu M_x i dobiće se

$$C\Omega \dot{\psi} \sin \theta = M_x \quad (3.15.2)$$

Brzina precesije, iz jednačine (3.15.1), će biti

$$\dot{\psi} = -\frac{3Km_s}{m\Omega a^3} \left(\frac{C-A}{C} \right) \cos \theta \sin^2 \varphi \quad (3.15.3)$$

Vrednost $Km_s/m = Gm_s$ u jednačini, pri čemu su m_s i m , respektivno, mase Sunca i Zemlje, može se eliminisati iz jednačine centralne sile između Sunca i Zemlje na sledeći način

$$\frac{Gm_s m}{a^2} = \frac{Km_s}{a^2} = ma \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \quad (3.15.4)$$

Takođe, prosečna (srednja) vrednost $\sin^2 \varphi$ za $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ je $1/2$, pa je prosečna brzina precesije po godini, zbog dejstva Sunca, data jednačinom

$$\dot{\psi}_{\text{sr}} = -\frac{3}{2\Omega} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \left(\frac{C-A}{C}\right) \cos \theta \quad (3.15.5)$$

gde je Ω brzina obrtanja Zemlje, (zavisi od izbora referentnog sistema) τ je period obilaska Zemlje oko Sunca, $\theta = 23^\circ 27'$ i $(C-A)/C = 0.0032$ je spljoštenost Zemlje.

Jednačina (3.15.3) se odnosi i na sistem Zemlja-Mesec, gde je m_s sada masa Meseca. Međutim, prilikom eliminacije veličine Km_s/ma^3 , privlačna sila između Zemlje i Meseca data jednačinom (4.6.4) se mora iskoristiti kao

$$\frac{Gmm_s}{a^2} = \left(\frac{mm_s}{m+m_s}\right) a \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \quad (3.15.6)$$

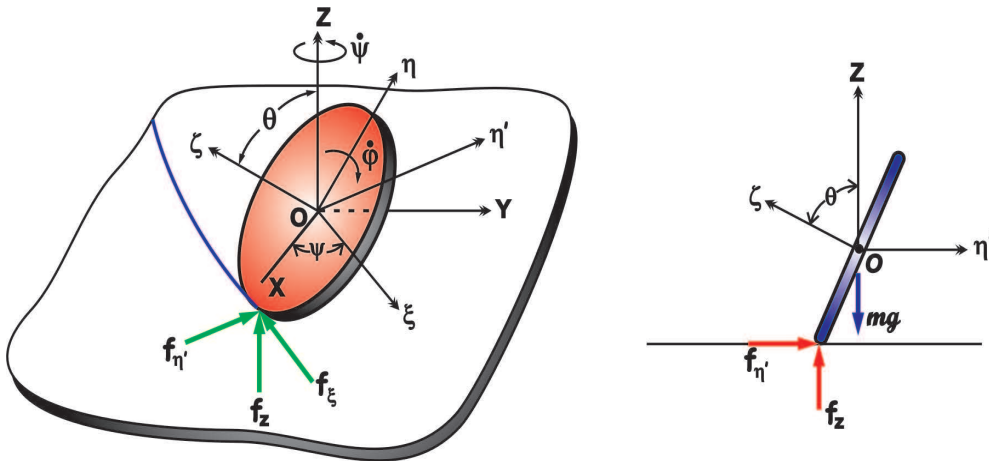
Kako je $(Km_s/ma^3) = [m_s/(m+m_s)](2\pi/\tau)^2$, jednačina za prosečnu brzinu precesije Zemljine polarne ose po revoluciji Meseca oko Zemlje postaje

$$\dot{\psi}_{\text{sr}} = -\frac{3}{2\Omega} \frac{mm_s}{m+m_s} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \left(\frac{C-A}{C}\right) \cos \theta \quad (3.15.7)$$



16. Opšte kretanje krutih tela. Do sada su razmatrani slučajevi u kojima se kretanje oko centra mase ili fiksirane tačke može određivati nezavisno pomoću momentne jednačine

$$\vec{M} = \dot{\vec{h}} + \vec{\omega} \times \vec{h} \quad (3.16.1)$$



Slika 3.16.1. Kotrljanje tankog diska po površi

Međutim, u opštijem slučaju kretanja, sila

$$\vec{F} = m(\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (3.16.2)$$

može dovesti do pojave momenta \vec{M} , pa navedene dve jednačine više nisu nezavisne. Ako se svaka od ovih jednačina razloži na tri komponente, dobiće se, zapravo, šest međusobno zavisnih jednačina, koje se potom moraju rešavati paralelno. Naravno, ovakvi slučajevi su teži za rešavanje. Ipak, opšta procedura se može ilustrirati sledećim jednostavnim primerom.

Kotrljanje tankog kružnog diska po neravnoj horizontalnoj površini

Primer kotrljanja diska je prikazan na slici (3.16.1). Neka postoje dva sistema osa, sa početkom u središtu diska; ose X, Y, Z sa fiksiranim pravcem i ose ξ, η, ζ koje se kreću sa diskom. Neka je ζ osa normalna na ravan diska, a ose ξ, η su u ravni diska gde je ξ osa duž horizontale. Zgodno je uvesti i η' osu, tako da ose ξ, η', Z formiraju treći skup osa rotiranih oko Z ose u odnosu na ose X, Y, Z . Osa η' će se definisati kao horizontalna projekcija ose η . Položaj osa ζ i ξ je definisan rotacijom θ oko ose ζ za ζ i rotacijom ψ oko ose Z za ξ .

Sila otpora podloge se sastoji od normalne sile reakcije f_Z i sile trenja f koja se razlaže na komponente f_ξ (koja je paralelna ξ osi) i $f_{\eta'}$ (koja je upravna na ξ osu).

Sa A, A, C kao momentima inercije, respektivno, u odnosu na ose ξ, η, ζ i sa R kao radijusom diska, momentne jednačine su

$$M_\zeta = -C\dot{\omega}_\zeta = -f_\xi R \quad (3.16.3)$$

$$M_\eta = A(\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) + A\dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta + C\omega_\zeta \dot{\theta} = 0 \quad (3.16.4)$$

$$M_\eta = A\ddot{\theta} - C\omega_\zeta \dot{\psi} \sin \theta - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = -f_Z R \cos \theta + f_{\eta'} R \sin \theta \quad (3.16.5)$$

pri čemu je $\omega_\zeta = \dot{\phi} - \dot{\psi} \cos \theta$ u negativnom smeru ζ ose.

Jednačina (3.16.4) se može preurediti na sledeći način

$$A\ddot{\psi} \sin \theta = -\dot{\theta}(C\omega_\zeta + 2A\dot{\psi} \cos \theta) \quad (3.16.6)$$

što ukazuje na to da ako je $\dot{\theta}$ negativno (npr. kada disk pada), tada $\ddot{\psi}$ raste, povećava se brzina obrtanja oko vertikalne Z ose i disk se kotrlja u užim krugovima.

Ako se pretpostavi da nema klizanja diska u odnosu na površinu podloge, onda vektor brzine centra diska ima sledeće komponente

$$v_\xi = R\omega_\zeta \quad (3.16.7)$$

$$v_\zeta = R\dot{\theta} \quad (3.16.8)$$

$$v_Z = R\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.16.9)$$

$$v_{\eta'} = -R\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.16.10)$$

što je prikazano na slici (3.16.2). Jednačina sile se tada može napisati kao

$$f_\xi = -m(R\dot{\omega}_\zeta + R\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta) \quad (3.16.11)$$

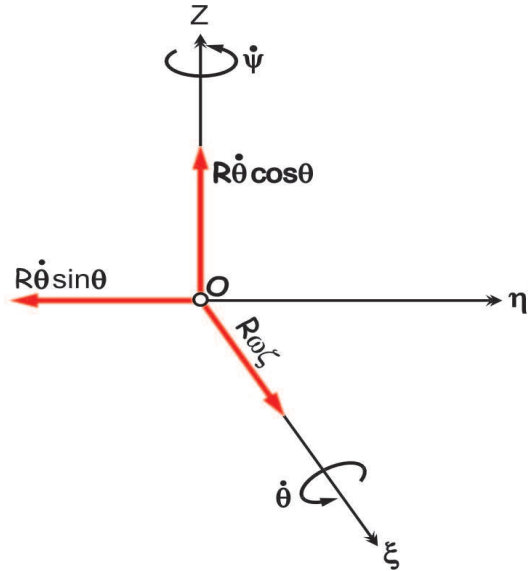
$$f_{\eta'} = -m(R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta - R\omega_\zeta \dot{\psi}) \quad (3.16.12)$$

$$f_Z - mg = m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (3.16.13)$$

Jednačine (3.16.3), (3.16.4), (3.16.5) i (3.16.11), (3.16.12), (3.16.13) su jednačine prethodno pomenutih šest komponenti koje se moraju paralelno rešavati. Međutim, ove jednačine imaju jednostavno rešenje samo za specijalne uslove kao što su:

$$\begin{cases} \theta \cong 90^\circ & \text{i } \omega_\zeta \text{ veliko} \\ \theta \cong 90^\circ & \text{i } \omega_\zeta \rightarrow 0, \dot{\psi} \text{ veliko} \\ \theta \cong 0^\circ & \text{i } \omega_\zeta \text{ malo, } \dot{\psi} \text{ veliko} \end{cases}$$

Prvi slučaj predstavlja kotrljanje diska čija je ravan skoro vertikalna; drugi slučaj odgovara obrtanju diska oko njegovog vertikalnog prečnika; poslednji slučaj je kotrljanje diska čija je ravan skoro u horizontalnom položaju.



Slika 3.16.2. Komponente brzine

Kotrljanje diska čija je površina približno vertikalna

Posmatraćemo disk koji se kotrlja tako da mu je ravan približno vertikalna. U ovom slučaju, ugaone brzine $\dot{\theta}$ i $\dot{\psi}$ će biti male u poređenju sa ω_ζ . Takođe, važi da je $\sin \theta \cong 1$ i $\cos \theta = \alpha$, gde je α komplementaran ugao $\alpha = (\pi/2) - \theta$ (u prvoj aproksimaciji!). Shodno ovome, $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ se mogu, respektivno, zameniti sa $-\dot{\alpha}$ i $-\ddot{\alpha}$. Jednačine sile i momentne jednačine su tada

$$f_\zeta R = C \dot{\omega}_\zeta \quad (3.16.14)$$

$$A \ddot{\psi} = C \omega_\zeta \dot{\alpha} \quad (3.16.15)$$

$$-A \ddot{\alpha} - C \omega_\zeta \dot{\psi} = -f_Z R \alpha + f_{\eta'} R \quad (3.16.16)$$

$$-f_\zeta = m R \dot{\omega}_\zeta \quad (3.16.17)$$

$$f_{\eta'} = m R (\ddot{\alpha} + \omega_\zeta \dot{\psi}) \quad (3.16.18)$$

$$f_Z - mg = 0 \quad (3.16.19)$$

Iz jednačina (3.16.14) i (3.16.17) važi

$$(C + mR^2)\dot{\omega}_\zeta = 0$$

pa dobijamo

$$\omega_\zeta = n = \text{cons.} \quad (3.16.20)$$

Uz početne uslove $\dot{\psi} = 0$ i $\alpha = 0$ (npr. disk započinje pravolinijsko kretanje pri čemu je ravan diska vertikalna), integrali se jednačina (3.16.15) i dobija se

$$A\dot{\psi} = Cn\alpha \quad (3.16.21)$$

Dalje, zamenom jednačina (3.16.18), (3.16.19) i (3.16.20) u jednačinu (3.16.16) dobija se

$$(A + mR^2)\ddot{\alpha} + \left[\frac{Cn^2(C + mR^2)}{A} - mgR \right] \alpha = 0 \quad (3.16.22)$$

Ova jednačina ukazuje na to da se ravan diska "klima" (klimata) ka unutra i ka spolja u odnosu na vertikalnu, ostvarujući tako brzinu obrtanja koja je dovoljno velika da bi se zadovoljila nejednačina

$$n^2 > \frac{mgAR}{C(C + mR^2)} \quad (3.16.23)$$

Takođe, jednačina (3.16.21) pokazuje da je $\dot{\psi}$ proporcionalno sa α , pa stoga precesija sinusoidno vibrira. U ovom slučaju, disk se kotrlja po talasastoj liniji koja je skoro prava.

Vertikalno obrtanje diska

Ovde razmatramo slučaj gde je glavno kretanje diska obrtanje oko vertikalne ose. Usled određenih poremećaja, disk će se kretati u malim krugovima, ali je očigledno da će ω_ζ biti malo, a $\dot{\psi}$ veliko. Međutim, θ će ostati blizu 90° , pa će i dalje važiti $\sin \theta \cong 1$ i $\cos \theta \cong \alpha$, gde je α mali ugao.

Na osnovi ovih aproksimacija, jednačine sile i momentne jednačine će biti

$$f_\zeta R = C\dot{\omega}_\zeta \quad (3.16.24)$$

$$A\ddot{\psi} = 0 \quad (3.16.25)$$

iz čega sledi da je $\dot{\psi} = \text{cons.}$.

$$-A\ddot{\alpha} - C\omega_\zeta\dot{\psi} - A\dot{\psi}^2\alpha = -f_Z R\alpha + f_{\eta'} R \quad (3.16.26)$$

$$-f_\zeta = mR(\dot{\omega}_\zeta - \dot{\alpha}\dot{\psi}) \quad (3.16.27)$$

$$f_{\eta'} = mR(\omega_\zeta\dot{\psi} + \ddot{\alpha}) \quad (3.16.28)$$

$$f_Z - mg = 0 \quad (3.16.29)$$

Iz jednačina (3.16.24) i (3.16.27) se dobija

$$(C + mR^2)\dot{\omega}_\zeta = mR^2\dot{\alpha}\dot{\psi} \quad (3.16.30)$$

Uz početne vrednosti $\omega_\zeta = 0$ i $\alpha = 0$, integral gornje jednačine je

$$(C + mR^2)\omega_\zeta = mR^2\dot{\psi}\alpha \quad (3.16.31)$$

Zamenom jednačina (3.16.28), (3.16.29) i (3.16.31) u jednačinu (3.16.26), konačna jednačina postaje

$$(A + mR^2)\ddot{\alpha} + [(A + mR^2)\dot{\psi}^2 - mgR]\alpha = 0 \quad (3.16.32)$$

Iz ove jednačine se zaključuje da je obrtno kretanje stabilno sve dok važi

$$\dot{\psi}^2 > \frac{mgR}{A + mR^2} \quad (3.16.33)$$

Ako je gornja nejednačina zadovoljena, disk će oscilirati sinusoidno sa malim uglom α u odnosu na osu ζ , što predstavlja obrtanje oko vertikalne ose brzinom $\dot{\psi}$.

Disk koji se obrće približno horizontalno

Ako se novčić obrne oko svog vertikalnog prečnika i ako se posmatra njegovo konačno stanje kada ravan novčića dostigne skoro horizontalan položaj, na osnovu zvuka se može zaključiti da se frekvencija veoma brzo uvećava tokom poslednje faze oscilacija. Takođe se može uočiti da se tačka dodira novčića kreće po krugu prečnika koji je skoro jednak prečniku novčića i da je ω_ζ veoma malo (odnosno, površina novčića rotira veoma sporo). Osa ζ je približno vertikalna, tako da je i θ veoma malo. Međutim, kraj ζ ose precesira u odnosu na vertikalnu veoma brzo, pa je $\dot{\psi}$ veoma veliko.

Pod ovakvim pretpostavkama, momentne jednačine i jednačine za silu će biti

$$f_\zeta R = C\dot{\omega}_\zeta \quad (3.16.34)$$

$$A\ddot{\psi}\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} = 0 \quad (3.16.35)$$

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2\theta = -f_Z R + f_{\eta'} R\theta \quad (3.16.36)$$

$$-f_\zeta = mR\dot{\omega}_\zeta \quad (3.16.37)$$

$$f_{\eta'} = mR\omega_\zeta\dot{\psi} \quad (3.16.38)$$

$$f_Z - mg = mR\ddot{\theta} \quad (3.16.39)$$

Iz jednačina (3.16.34) i (3.16.37) sledi da je ω_ζ konstantno.

$$(C + mR^2)\dot{\omega}_\zeta = 0 \quad (3.16.40)$$

$$\omega_\zeta = n = \text{cons.}$$

Iz jednačine (3.16.35) se dobija

$$\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = -2\frac{\dot{\theta}}{\theta} \quad (3.16.41)$$

Integracijom, uz početne uslove $\dot{\psi}_0$ i θ_0 , dobijamo

$$\ln \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_0} = -2 \ln \frac{\theta}{\theta_0}$$

Stoga je

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{-2}. \quad (3.16.42)$$

Zamenom jednačina (3.16.38), (3.16.39) i (3.16.42) u jednačinu (3.16.36), dolazi se do diferencijalne jednačine za θ

$$(A + mR^2)\ddot{\theta} = \frac{A\dot{\psi}_0^2\theta_0^4}{\theta^3} + \left(-mgR + mR^2n\dot{\psi}_0\frac{\theta_0^2}{\theta} \right) \quad (3.16.43)$$

S obzirom da su θ i θ^3 imenioci, ubrzanje $\ddot{\theta}$ raste kako se θ približava nuli. Takođe, jednačina (3.16.42) ukazuje da precesija teži beskonačnosti, kada se θ približava nuli.



Dinamika žiroskopskih instrumenata

§ 1. Male oscilacije žiroskopa. Ako se žiroskop ili čigra sa Slike (3.13.1) blago izvedu iz stabilnog stanja, može se pokazati da su oscilacije oko ravnotežnog (stabilnog) položaja harmonijske.

Podimo od jednačina (3.13.4) koje predstavljaju momentne jednačine u odnosu na čvorni sistem koordinata prikazan na slici (4.1.1).

$$\begin{aligned} Wl \sin \theta &= A\ddot{\theta} + Cn\dot{\psi} \sin \theta - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 &= A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cn\dot{\theta} \\ 0 &= C\dot{n} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Neka su θ_0 i $\dot{\psi}_0$ vrednosti stabilnog stanja od θ i $\dot{\psi}$, respektivno, i neka su odstupanja od stabilnog stanja θ_v i $\dot{\psi}_v$, tada su važeće trenutne vrednosti od θ i $\dot{\psi}$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \theta_v \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_v \end{aligned}$$

Za male oscilacije se mogu napraviti sledeće aproksimacije

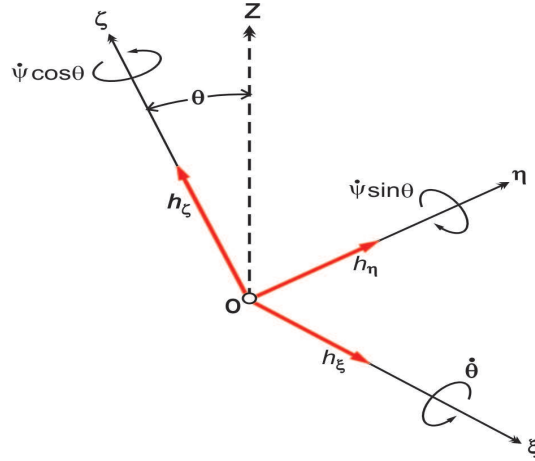
$$\begin{aligned} \dot{\theta}\dot{\psi} &= \dot{\theta}_v(\dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_v) \cong \dot{\theta}_v\dot{\psi}_0 \\ \sin \theta &\cong \sin \theta_0 + \theta_v \cos \theta_0 \\ \cos \theta &\cong \cos \theta_0 - \theta_v \sin \theta_0 \end{aligned}$$

Zamenom ovih vrednosti u drugu od jednačina (4.1.1) i zanemarujući proizvode i kvadrate malih odstupanja, dobija se

$$A\ddot{\psi}_v \sin \theta_0 + 2A\dot{\theta}_v\dot{\psi}_0 \cos \theta_0 - Cn\dot{\theta}_v = 0 \quad (4.1.2)$$

Integracijom,

$$\begin{aligned} A \sin \theta_0 \int_0^{\dot{\psi}_v} d\dot{\psi}_v &= (Cn - 2A\dot{\theta}_v \cos \theta_0) \int_0^{\theta_v} d\theta_v \\ A\dot{\psi}_v \sin \theta_0 &= (Cn - 2A\dot{\theta}_v \cos \theta_0)\theta_v \end{aligned} \quad (4.1.3)$$



Slika 4.1.1.

Moment impulsa (ugaoni moment) u odnosu na čvorni sistem koordinata

Slično, iz prve od jednačina (4.1.1), dobija se

$$A\ddot{\theta}_v - A(\dot{\psi}_0^2 + 2\dot{\psi}_0\dot{\psi}_v)(\sin\theta_0 \cos\theta_0 - \theta_v \sin^2\theta_0 + \theta_v \cos^2\theta_0) + Cn(\dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_v)(\sin\theta_0 + \theta_v \cos\theta_0) = Wl(\sin\theta_0 + \theta_v \cos\theta_0) \quad (4.1.4)$$

Međutim, za stabilnu precesiju $\ddot{\theta}$ je jednako nuli, pa su stabilne komponente jednačine (4.1.4)

$$-A\dot{\psi}_0^2 \cos\theta_0 + Cn\dot{\psi}_0 = Wl$$

Stoga, zamenom ovog izraza u jednačinu (4.1.4) i koristeći jednačinu (4.1.3) za eliminisanje $\dot{\psi}_v$, dobija se diferencijalna jednačina drugog reda po θ_v :

$$A^2\ddot{\theta}_v + [(Cn)^2 - 4AWl \cos\theta_0 + A^2\dot{\psi}_0^2(1 - \cos^2\theta_0)]\theta_v = 0 \quad (4.1.5)$$

Skrećemo pažnju da se u domaćoj literaturi za oscilacije ovog tipa najčešće koristi naziv *nutacija*, međutim, iz nekih praktičnih razloga, ovde ćemo veoma često koristiti pojam *čvorne oscilacije*. Dakle, na osnovi prethodnog, čvorne oscilacije (tj. *nutacija*) su sinusoide sa periodom

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi A}{\sqrt{(Cn)^2 - 4AWl \cos\theta_0 + A^2\dot{\psi}_0^2(1 - \cos^2\theta_0)}} \quad (4.1.6)$$

Ako je n veoma veliko, period nutacije se smanjuje na

$$\tau_0 \cong \frac{2\pi A}{Cn} \quad (4.1.7)$$

I period precesije je isti jer iz jednačine (4.1.3) imamo

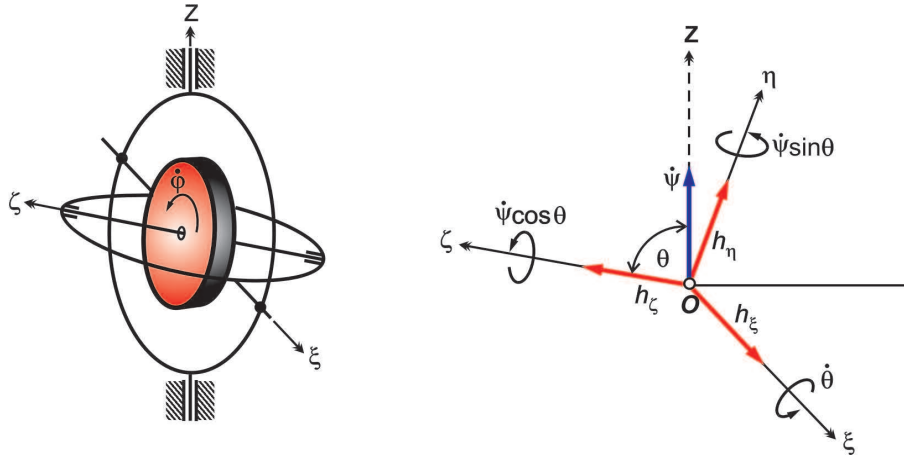
$$\dot{\psi}_v = \left(\frac{Cn - 2A\dot{\psi}_0 \cos\theta_0}{A \sin\theta_0} \right) \theta_v \quad (4.1.8)$$

pri čemu je $\dot{\psi}_v$ proporcionalno sa θ_v .

Ako je $\cos \theta_0 = 1$, dobija se uspavana čigra, a da bi imenilac u jednačini (4.1.6) bio realan, $(Cn)^2$ mora biti veće od $4AWl$. Na ovaj način se ponovo dolazi do uslova stabilnosti uspavane čigre

$$n > \frac{2}{C} \sqrt{AWl}$$

§ 2. Oscilacije u odnosu na ose okvira. Slika (4.2.1) prikazuje žiroskop sa dva okvira čiji se centar mase poklapa sa geometrijskim centrom okvira. Potrebno je napisati momentne jednačine u odnosu na ose u ležištima okvira.



Slika 4.2.1. Simetričan žiroskop sa osama okvira ξ i Z

Zanemarujući mase okvira, momenti inercije točka (žiroskopa) u odnosu na ose ξ , η , ζ biće A , A , C . Ugaone brzine i ugaoni moment (moment impulsa) u odnosu na ose ξ , η , ζ su opisani u Odeljku (3.13), a momentne jednačine u odnosu na ose ξ , η , ζ mogu se zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} M_\xi &= A\ddot{\theta} + Cn\dot{\psi} \sin \theta - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ M_\eta &= A(\ddot{\psi} \sin \theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta) - Cn\dot{\theta} \\ M_\zeta &= C \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Momenti M_η i M_ζ se mogu razložiti na komponente duž (vertikalne) ose Z i na komponente u horizontalnoj ravni. Komponenta Z ($M_\zeta = 0$) je

$$M_Z = M_\eta \sin \theta + M_\zeta \cos \theta = M_\eta \sin \theta = A\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - Cn\dot{\theta} \sin \theta \quad (4.2.2)$$

Ove nelinearne jednačine se mogu linearizovati ako usvojimo neke pojednostavljene pretpostavke. Po pravilu, brzina obrtanja $\dot{\phi}$ je mnogo veća od brzina $\dot{\psi}$ i $\dot{\theta}$. Tada je $\dot{\phi}$, brzina obrtanja, približno jednaka n - konstanti velike vrednosti. Zane-

marujući proizvode i kvadrate manjih veličina $\dot{\psi}$ i $\dot{\theta}$, pojednostavljenije jednačina, o kojima je reč, biće

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= A\ddot{\theta} + Cn\dot{\psi}\sin\theta \\ M_Z &= A\ddot{\psi}\sin^2\theta - Cn\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Postoji nekoliko mogućih rešenja gornjih jednačina, u zavisnosti od onog što se želi dobiti. Prvo se može ispitati uslov stabilne precesije

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0 \\ \dot{\theta} &= \ddot{\theta} = \ddot{\psi} = 0 \end{aligned}$$

Jednačine (4.2.3) tada postaju

$$\begin{aligned} M_{\xi 0} &= Cn\dot{\psi}_0\sin\theta_0 \\ M_{Z0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

što zahteva konstantan spoljni moment u odnosu na horizontalnu osu okvira, kao što je prethodno pokazano u odeljku (3.14).

Razmotrimo slučaj kada se u uslovima stabilne precesije obrtnoj osi daje odstupanje (poremećaj) usled delovanja momenta $M_{\xi}(t)$.

Pod pretpostavkom da su oscilacije male, mogu se ustanoviti jednačine

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \theta_v & \sin\theta &= \sin\theta_0 + \theta_v\cos\theta_0 \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_v & \cos\theta &= \cos\theta_0 - \theta_v\sin\theta_0 \end{aligned}$$

Zanemarujući ponovo proizvode izraza sa malim oscilacijama, iz jednačina (4.2.3) dobijamo

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_v + \frac{Cn}{A}(\dot{\psi}_0\theta_v\cos\theta_0 + \dot{\psi}_0\sin\theta_0 + \dot{\psi}_v\sin\theta_0) &= \frac{M_{\xi}(t) + M_{\xi 0}}{A} \\ \ddot{\psi}_v\sin\theta_0 - \frac{Cn}{A}\dot{\theta}_v &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Zamenom izraza za $M_{\xi 0}$ iz jednačine (4.2.4) (koji predstavlja uslov stabilnog stanja) i uzimajući da je $Cn/A = p$, dobija se konačan oblik diferencijalnih jednačina za odstupanje od stabilne precesije

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_v + p(\dot{\psi}_0\theta_v\cos\theta_0 + \dot{\psi}_v\sin\theta_0) &= \frac{M_{\xi}(t)}{A} \\ \ddot{\psi}_v\sin\theta_0 - p\dot{\theta}_v &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Do rešenja ovih jednačina najlakše se dolazi primenom Laplasovih transformacija sa zavisnim promenljivim θ_v i $\dot{\psi}_v$. Kako inicijalno važi $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ i $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, $\theta_v(0) = \dot{\theta}_v(0) = \dot{\psi}_v(0) = 0$, onda su jednačine transformacije

$$\begin{aligned}(s^2 + p\dot{\psi}_0 \cos \theta_0) \bar{\theta}_v(s) + (p \sin \theta_0) \bar{\psi}_v(s) &= \frac{\overline{M}_\xi(s)}{A} \\ -p \bar{\theta}_v(s) + (\sin \theta_0) \bar{\psi}_v(s) &= 0\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Koristeći Kramerovo pravilo, jednačine za $\bar{\theta}_v(s)$ i $\bar{\psi}_v(s)$ će biti

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_v(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{A} \overline{M}_\xi(s) & p \sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2 + p\dot{\psi}_0 \cos \theta_0) & p \sin \theta_0 \\ -p & \sin \theta_0 \end{vmatrix}} \\ \bar{\psi}_v(s) &= \frac{\begin{vmatrix} (s^2 + p\dot{\psi}_0 \cos \theta_0) & \frac{1}{A} \overline{M}_\xi(s) \\ -p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2 + p\dot{\psi}_0 \cos \theta_0) & p \sin \theta_0 \\ -p & \sin \theta_0 \end{vmatrix}}\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

koje se mogu rešiti za bilo koje očekivano $M_\xi(t)$ i bilo koji ugao θ_0 .

Primer 4.2.1. Kada obrtna osa miruje za $\theta_0 = \pi/2$, deluje impuls na obrtnu osu koji rezultuje impulsnim momentom $\vec{M}_\xi(t) = \widehat{M} \delta(t)$ gde je $\delta(t)$ delta funkcija* sa jediničnom merom po sekundi, a \widehat{M} je moment u kg po sekundi.

▷ Iz jednačine (4.2.8) važi

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_v(s) &= \frac{\widehat{M}}{A} \frac{1}{s^2 + p^2} \\ \bar{\psi}_v(s) &= \frac{p \widehat{M}}{A} \frac{1}{s^2 + p^2}\end{aligned}$$

i odgovarajuća rešenja po vremenu biće

$$\begin{aligned}\theta_v(t) &= \frac{\widehat{M}}{Ap} \sin pt & \dot{\theta}_v(t) &= \frac{\widehat{M}}{A} \cos pt \\ \dot{\psi}_v(t) &= \frac{\widehat{M}}{A} \sin pt & \psi_v(t) &= \frac{\widehat{M}}{Ap} (1 - \cos pt)\end{aligned}$$

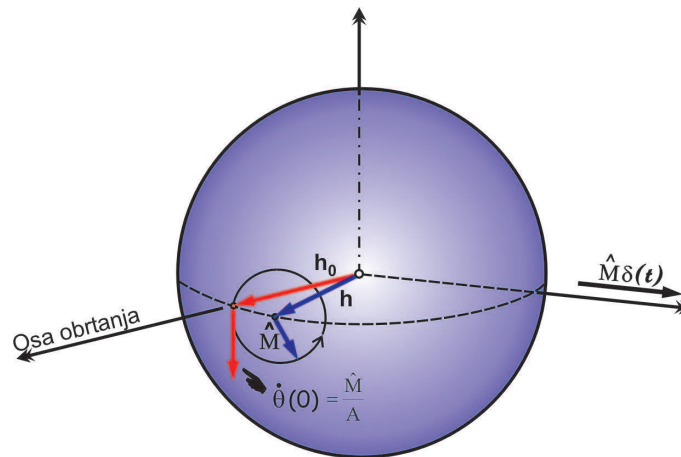
* Veoma je zgodno koristiti Dirakovu delta funkciju u slučaju dejstva impulsa na neko telo jer je

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Stvarni položaj obrtne ose u proizvoljnom trenutku je tada jednak

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{M}}{Ap} \sin pt, \\ \psi(t) &= \frac{\widehat{M}}{Ap} (1 - \cos pt). \quad \triangleleft\end{aligned}$$

Dobijeni rezultati se mogu interpretirati na sledeći način. Neka je, prvo, obrtna osa fiksirana pa je $\dot{\psi}_0 = 0$. Impuls momenta \widehat{M} naglo menja vektor momenta impulsa Cn duž ekvatora za ugao $\widehat{M}/Ap = \widehat{M}/Cn$.

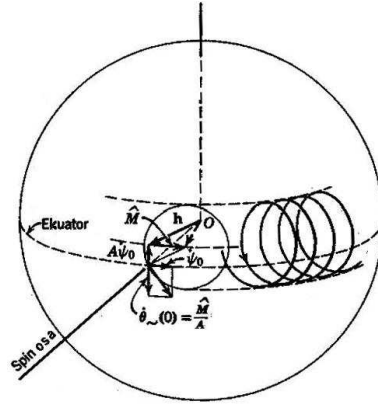


Slika 4.2.2.

Kretanje obrtne ose za delta funkciju impulsa (početni moment je nula)

Iako obrtna osa ne može trenutno da se menja, ona razvija brzinu $\dot{\theta}_v(0) = \widehat{M}/A$ usmerenu od ekvatorske pozicije na dole. Stoga, rotacija obrtne ose oko novog rezultujućeg vektora momenta impulsa generiše kupu sa osnovom čiji je radijus \widehat{M} , kao što je prikazano na slici (4.2.2). Naravno, ovo je u saglasnosti sa zaključkom iz odeljka (3.8) koji ukazuje na to da, sa nultim momentom (kada imamo delta funkciju momenta, moment je nula za svako t osim za $t = 0$), vektor momenta impulsa je konstantan i nepromenljiv, a obrtna osa će precesirati oko njega.

Dalje, ako se posmatra početna stabilna (ravnotežna) precesija sa obrtnom osom u $\theta_0 = \pi/2$ usled konstantnog momenta M_{z0} , rezultujući vektor momenta impulsa \vec{h} biće iznad ekvatora sa komponentom momenta $A\dot{\psi}_0$. Impuls momenta će, opet, naglo okrenuti rezultantu \vec{h} za iznos \widehat{M} duž latitude $\lambda = A\dot{\psi}_0/Cn$, kao što je prikazano na slici (4.2.3).



Slika 4.2.3. Kretanje obrtne ose za delta funkciju impulsa (početni moment je konstantan, sa stabilnom precesijom $\dot{\psi}_0$)

Za vreme t posle $t = 0$ ($t = 0+$), obrtna osa će imati vertikalnu i horizontalnu komponentu ugaone brzine $\dot{\theta}(0) = \widehat{M}/A$ i $\dot{\psi}_0$, redom. Međutim, njihova rezultanta će biti normalna na radijalnu liniju iz vektora \vec{h} , kao što je prikazano na slici (4.2.3).

Zato će vektor \vec{h} , približne dužine Cn , stabilno precesirati duž latitude

$$\lambda = A\dot{\psi}_0/Cn$$

ugaonom brzinom $\dot{\psi}_0$, dok će obrtna osa rotirati oko \vec{h} po krugu radijusa

$$\sqrt{\widehat{M}^2 + (A\dot{\psi}_0)^2}.$$

Rezultat je kombinovana precesija i nutacija, a kriva koju opisuje obrtna osa zavisi od odgovarajućih početnih vrednosti komponenta brzine \widehat{M}/A i $\dot{\psi}_0$. Ovakvo ponašanje je slično ponašanju ometane čigre (disturbed top), sa tom razlikom što je ovde nametnut konstantan moment u odnosu na čvornu osu ξ , dok će se u slučaju klasične čigre gravitacioni moment menjati sa θ . Međutim, za male poremećaje, kretanja su identična.

§ 3. Okviri konačne mase (Tehnika poremećaja). Na osnovu slike (4.2.1), momenti inercije rotora u odnosu na ose ξ , η , ζ su bili A , A , C . Sada ćemo predstaviti i moment inercije okvira na sledeći način. Moment inercije unutrašnjeg okvira u odnosu na ose ξ , η , ζ su A_i , B_i , C_i , respektivno. Moment inercije spoljašnjeg okvira u odnosu na osu OZ je C_0 .

Polazeći od toga da ose ξ , η , ζ rotiraju ugaonim brzinama $\dot{\theta}$, $\dot{\psi} \sin \theta$, $\dot{\phi} \cos \theta$ i uzimajući u obzir mase koje rotiraju usled navedenih komponenti, momenti inercije u odnosu na ove tri ose su:

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= A + A_i \\ I_{\eta} &= A + B_i \\ I_{\zeta} &= C_i \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Kosinusi pravaca OZ ose, u odnosu na ξ , η , ζ , su $l_{Z\xi} = 0$, $l_{Z\eta} = \sin \theta$, $l_{Z\zeta} = \cos \theta$ pa moment inercije u odnosu na Z osu postaje

$$\begin{aligned} I_Z &= C_0 + I_{\xi} l_{Z\xi}^2 + I_{\eta} l_{Z\eta}^2 + I_{\zeta} l_{Z\zeta}^2 \\ &= C_0 + (A + B_i) \sin^2 \theta + C_i \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Sledeće što određujemo su momenti impulsa (ugaoni momenti) u odnosu na ξ , η , ζ

$$h_{\xi} = (A + A_i) \dot{\theta} \quad (4.3.3)$$

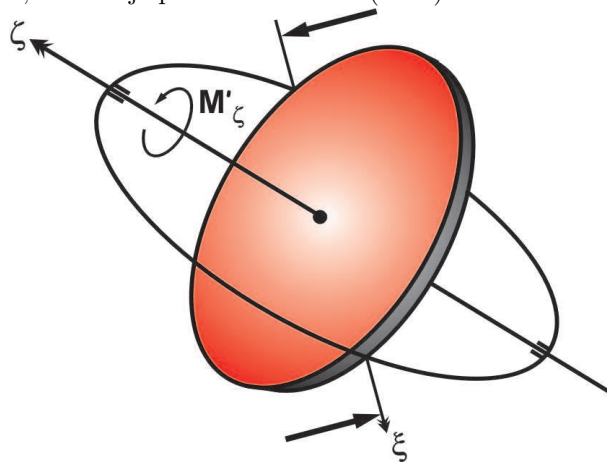
$$h_{\eta} = (A + B_i) \dot{\psi} \sin \theta \quad (4.3.4)$$

$$h_{\zeta} = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) + C_i \dot{\psi} \cos \theta \quad (4.3.5)$$

Moment u odnosu na osu ζ se može razdvojiti na dva dela:

$$\begin{aligned} M_{\zeta} &= h_{\zeta} - h_{\xi} \dot{\psi} \sin \theta + h_{\eta} \dot{\theta} \\ &= C \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) + \left[C_i \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \theta) + (B_i - A_i) \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \right] \\ &= M'_{\zeta} + M''_{\zeta} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

pri čemu je $M'_{\zeta} = C(d/dt)(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)$ moment u odnosu na osu rotora, a M''_{ζ} je moment koji se javlja usled dejstva sila kojima spoljašnji okvir deluje na osu unutrašnjeg okvira, kao što je prikazano na slici (4.3.1).



Slika 4.3.1. Momenti koji deluju na unutrašnji okvir i rotor

Ako se pretpostavi da je M'_{ζ} jednako nuli, tada je moment impulsa rotora konstantan.

$$C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cn = \text{constant}. \quad (4.3.7)$$

Komponente momenta impulsa duž osa ξ , η , ζ , što je prikazano na slici (4.3.2), mogu se razložiti duž osa ξ' , η' , ζ' pomoću vertikalne i horizontalne komponente od h_η i h_ζ . Komponente h_ξ i $h_{\eta'}$ će, pri tome, rotirati oko OZ ose ugaonom brzinom $\dot{\psi}$, kao što je prikazano sa slici (4.3.2). Komponente od \vec{h} , duž osa ξ' , η' , ζ' , biće

$$h_{\zeta'} = (A + A_i)\dot{\theta} \quad (4.3.8)$$

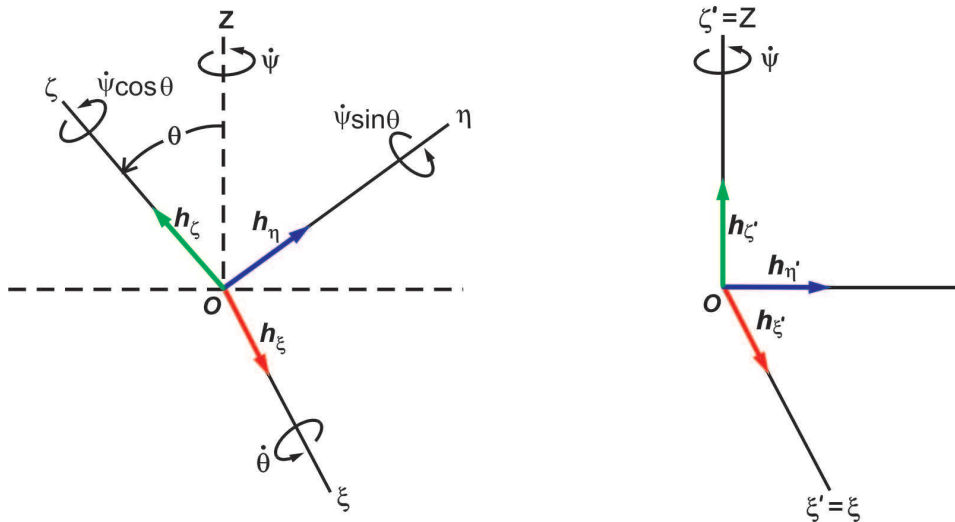
$$h_{\eta'} = h_\eta \cos \theta - h_\zeta \sin \theta = (A + B_i)\dot{\psi} \sin \theta \cos \theta - (Cn + C_i\dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta \quad (4.3.9)$$

$$h_{\xi'} = h_\eta \sin \theta + h_\zeta \cos \theta + C_0\dot{\psi} = (A + B_i)\dot{\psi} \sin^2 \theta + (Cn + C_i\dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + C_0\dot{\psi} \quad (4.3.10)$$

Sada se mogu napisati momentne jednačine u odnosu na ose ζ' , i ξ' na sledeći način

$$\begin{aligned} M_{\zeta'} &= M_Z = \dot{h}_{\zeta'} = (A + B_i)(\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) - \\ &\quad - (Cn + C_i\dot{\psi} \cos \theta)\dot{\theta} \sin \theta + (C_i\ddot{\psi} \cos \theta - C_i\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta + C_0\ddot{\psi} \\ &= [C_0 + C_i \cos^2 \theta + (A + B_i) \sin^2 \theta]\ddot{\psi} + 2(A + B_i - C_i)\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - Cn\dot{\theta} \sin \theta \\ &= I_Z\ddot{\psi} + \dot{\psi} \frac{dI_Z}{dt} - Cn\dot{\theta} \sin \theta \\ &= \frac{d}{dt}(I_Z\dot{\psi}) - Cn\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$\begin{aligned} M_{\xi'} &= \dot{h}_{\xi'} - h_{\eta'}\dot{\psi} \\ &= (A + A_i)\ddot{\theta} + Cn\dot{\psi} \sin \theta + [C_i - (A + B_i)]\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.3.12)$$



Slika 4.3.2. Razlaganje ugaone brzine i momenta impulsa (ugaonog momenta)

Nakon ovoga, treba analizirati slučaj u kome ose inicijalno miruju, a osa unutrašnjeg okvira u poziciji θ_0 ima početnu ugaonu brzinu $\dot{\theta}(0) = \alpha$, prouzrokovanu impulsivnim momentom u formi delta funkcije u odnosu na ξ osu. Vreme $t = 0$ se odnosi na trenutak neposredno nakon impulsa i u tom slučaju važi $M_\xi = M_Z = 0$, a početni uslovi su $\psi(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \alpha$. Sa sigurnošću se može pretpostaviti da je $\dot{\psi}(0) = 0$, obzirom da početna brzina α rezultira žiroskopskim momentom u odnosu na osu Z (kroz reakciju ležišta ose ξ), a što nije impulsnog karaktera.

Za slobodnu osu spoljašnjeg okvira važi $M_Z = 0$, pa se jednačina (4.3.11) može zapisati kao

$$d(I_Z \dot{\psi}) = Cn \sin \theta d\theta \quad (4.3.13)$$

Integracijom, gde je $I_Z \dot{\psi}$ jednako nula za $t = 0$, dobija se jednačina

$$I_Z \dot{\psi} = -Cn(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4.3.14)$$

Ako se napravi aproksimacija malih oscilacija

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \theta_v \\ \sin \theta &\cong \sin \theta_0 + \theta_v \cos \theta_0 \\ \cos \theta &\cong \cos \theta_0 - \theta_v \sin \theta_0 \\ \sin \theta \cos \theta &\cong \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \theta_v (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \end{aligned}$$

onda se jednačine (4.3.2), (4.3.14) i (4.3.12) mogu napisati u obliku jednačina

$$\begin{aligned} I_Z &= [C_0 + (A + B_i) \sin^2 \theta_0 + C_i \cos^2 \theta_0] \\ &\quad + 2\theta_v (A + B_i - C_i) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} &= I_0 + 2\theta_v (A + B_i - C_i) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ I_0 \dot{\psi} - (Cn \sin \theta_0) \theta_v + 2\theta_v \dot{\psi} (A + B_i - C_i) \sin \theta_0 \cos \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} (A + A_i) \ddot{\theta}_v + (Cn \sin \theta_0) \dot{\psi} \\ + \{ (Cn \cos \theta_0) \theta_v \dot{\psi} - (A + B_i - C_i) [\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ + \theta_v (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)] \dot{\psi}^2 \} = 0 . \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Jednačine (4.3.16) i (4.3.17) su nelinearne zbog poslednjeg izraza u svakoj od njih. Rešenje jednačina se može dobiti tehnikom poremećaja, koja će biti ilustrovana sledećim jednostavnim primerom. Uzmimo u obzir nelinearnu jednačinu prvog reda

$$\dot{y} + ay + by^2 = 0 \quad (a)$$

gde je koeficijent b u nelinearnom članu mala veličina. Sada ćemo uzeti u obzir sličnu jednačinu

$$\dot{y} + ay + \mu by^2 = 0 \quad (b)$$

koja se razlikuje od prethodne po dodatnom faktoru μ , koji može biti proizvoljan pozitivan broj. Ako se nađe rešenje jednačine (b), onda se ujedno rešava i jednačina (a) za $\mu = 1$.

Rešenje tražimo u obliku

$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots \quad (c)$$

Zamenom jednačine (c) u (b) dobija se

$$\begin{aligned} (\dot{y}_0 + \mu \dot{y}_1 + \mu^2 \dot{y}_2 + \dots) + a(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots) \\ + \mu b(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots)^2 = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

Preuređivanjem, ova jednačina se može zapisati "izvlačenjem" μ ispred zagrade

$$(\dot{y}_0 + ay_0) + \mu(\dot{y}_1 + ay_1 + by_0^2) + \mu^2(\dot{y}_2 + ay_2 + 2by_0y_1) + \mu^3(\dot{y}_3 + \dots) = 0 \quad (e)$$

Primećuje se da je, za $\mu = 0$, dobijeno y_0 rešenje linearne jednačine. Rešenje y_0 se naziva **generičkim rešenjem** i može se smatrati početnim uslovom za izloženi slučaj. Ako μ raste, počevši od nule, jednačina (e) će biti zadovoljena samo ako koeficijenti uz μ različitog stepena budu jednaki nuli. Na ovaj način, dobijaju se sledeće jednačine

$$\dot{y}_1 + ay_1 + by_0^2 = 0 \quad (f)$$

$$\dot{y}_2 + ay_2 + 2by_0y_1 = 0, \text{ itd } \dots \quad (g)$$

koje mogu biti rešene po y_1 , y_2 , itd...

Prethodna tehnika se sada može primeniti na jednačine (4.3.16) i (4.3.17), ali izvedeno rešenje će se odnositi samo na korekciju prvog reda. Obzirom da jednačine (4.3.16) i (4.3.17) već sadrže simbol θ_0 , rešenje linearne jednačine (koje odgovara y_0) će biti θ_{00} i $\dot{\psi}_{00}$. Tada su linearne jednačine oblika

$$I_0 \dot{\psi}_{00} - (Cn \sin \theta_0) \theta_{00} = 0 \quad (4.3.16a)$$

$$(A + A_i) \ddot{\theta}_{00} + (Cn \sin \theta_0) \dot{\psi}_{00} = 0 \quad (4.3.17a)$$

Eliminisanjem $\dot{\psi}_{00}$, dobija se

$$\ddot{\theta}_{00} + \frac{(Cn \sin \theta_0)^2}{I_0(A + A_i)} \theta_{00} = 0 \quad (4.3.18)$$

Ako se uzme da je

$$\omega = \frac{Cn \sin \theta_0}{\sqrt{I_0(A + A_i)}} \quad (4.3.19)$$

opšte rešenje koje odgovara početnim uslovima je

$$\theta_{00} = \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (4.3.20)$$

$$\dot{\psi}_{00} = \frac{Cn \sin \theta_0}{I_0} \left[\frac{\dot{\theta}(0)}{\omega} \sin \omega t \right] \quad (4.3.21)$$

Sledeće, što treba razmotriti, jeste korekcija prvog reda po y_1 u jednačini (f). Iz prethodno dobijenog rešenja, određeni su nelinearni izrazi

$$\begin{aligned} \theta_{00} \dot{\psi}_{00} &= \frac{\dot{\theta}(0)^2 Cn \sin \theta_0}{\omega^2 I_0} \sin^2 \omega t \\ \dot{\psi}_{00}^2 &= \left(\frac{Cn \sin \theta_0}{I_0} \right)^2 \left(\frac{\dot{\theta}(0)}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

koji, kada se zamene u jednačine (4.3.16) i (4.3.17), rezultuju novim skupom diferencijalnih jednačina

$$I_0 \dot{\psi}_1 - (Cn \sin \theta_0) \theta_1 = - \frac{2(A + B_i - C_i) \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 Cn \dot{\theta}(0)^2}{I_0 \omega^2} \sin^2 \omega t \quad (4.3.16b)$$

$$\begin{aligned} (A + A_i) \ddot{\theta}_1 + (Cn \sin \theta_0) \dot{\psi}_1 &= -(Cn \cos \theta_0) \frac{\dot{\theta}(0)^2 Cn \sin \theta_0}{\omega^2 I_0} \sin^2 \omega t \\ &+ (A + B_i - C_i) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left(\frac{\dot{\theta}(0) Cn \sin \theta_0}{\omega I_0} \right)^2 \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (4.3.17b)$$

Sada treba eliminisati θ_1 . Iz jednačine (4.3.16b) se dobija

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\frac{I_0}{Cn \sin \theta_0} \right) (\ddot{\psi}_1) + \left[\frac{4\dot{\theta}(0)^2 (A + B_i - C_i) \cos \theta_0 \sin \theta_0}{I_0} \right] (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$

Zamenom u jednačinu (4.3.17b), sledi diferencijalna jednačina po ψ_1 .

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_0 (A + A_i)}{Cn \sin \theta_0} \right] (\ddot{\psi}_1) + (Cn \sin \theta_0) \dot{\psi}_1 &= \\ \left[\frac{\dot{\theta}(0) Cn}{\omega} \right]^2 \left[\frac{(A + B_i - C_i) \sin^3 \theta_0 \cos \theta_0}{I_0^2} - \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{I_0} \right] \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) & \\ - \frac{A + A_i}{I_0} [4\dot{\theta}(0)^2 (A + B_i - C_i) \sin \theta_0 \cos \theta_0] \cos 2\omega t & \end{aligned} \quad (4.3.17c)$$

Ispitivanjem ove jednačine vidimo da je rešenje homogene jednačine po $\dot{\psi}_1$ harmonijsko sa frekvencijom ω , kao što je i dato jednačinom (4.3.19). Ovo konkretno rešenje će sadržati harmonijski član frekvencije 2ω , a konstantan deo izraza biće jednak konstantnom izrazu na desnoj strani jednačine koji je podeljen sa koeficijentom $\dot{\psi}_1$ na levoj strani. Od interesa je konstantan izraz koji utiče svojim nepromenljivim delovanjem na rotaciju spoljašnjeg okvira shodno jednačini $\psi_s = \dot{\psi}_s t$.

Konstantan izraz rešenja je

$$\dot{\psi}_s = - \frac{\dot{\theta}(0)^2 Cn}{2\omega^2 I_0^2 \sin \theta_0} [(A + B_i - C_i) \sin^3 \theta_0 \cos \theta_0 - I_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0]$$

Zamenom za I_0 iz jednačine (4.3.15), gornji izraz se skraćuje na

$$\dot{\psi}_s = -\frac{\dot{\theta}(0)^2 C n (C_0 + C_i) \cos \theta_0}{2\omega^2 I_0^2} \quad (4.3.22)$$

Dakle, očigledno je da spoljašnji okvir osciluje i deluje u negativnom smeru, a ovaj fenomen se naziva *hod okvira*. Treba primetiti da hod okvira ne postoji za $\theta_0 = 90^\circ$ ili ako je moment inercije $(C_0 + C_i)$ jednak nula. ❀

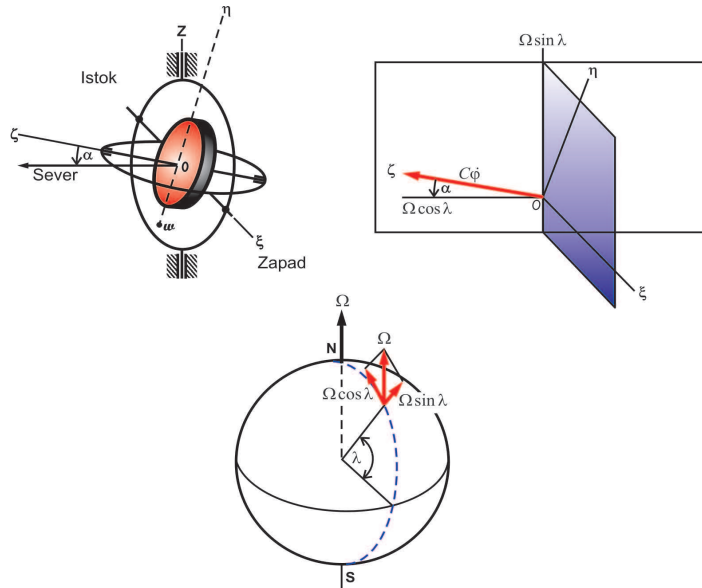
§ 4. Žirokompas. Osobina žirokompasa je da pokazuje sever na bilo kojoj latitudi u bilo kom trenutku. Žiroskop velike brzine, sa dva okvira i sa težinom vešanja w na $-\eta$ osi, koji dobija moment $wl \cos \theta$ u odnosu na ζ osu kada je osa nagnuta iznad horizontalne ravni, kao što je prikazano na slici (4.4.1), zadovoljiće pomenute osobine.

Na slici (4.4.1), rotacija Zemlje sa zapada na istok prikazana je vektorom ugaone rotacije Ω , koji je usmeren u pravcu severa. Njegova brojna vrednost je

$$\Omega = 2\pi / (24 \times 3600) = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/sec.}$$

Za bilo koju latitudu λ , ω će imati komponente u meridijalnoj ravni jednake $\Omega \cos \lambda$ horizontalno i $\Omega \sin \lambda$ vertikalno.

Sa Z osom žirokompasa u pravcu vertikale, da bi osa ζ ostala u ravni meridijana i pri tome bila usmerena ka severu, spoljni okvir mora stabilno precesirati brzinom $\dot{\psi} = \Omega \sin \lambda$ i, dodatno, treba da ima ugaonu brzinu $\Omega \cos \lambda$ u odnosu na $-\eta$ osu koja je normalna na ravan spoljašnjeg okvira. Ukoliko se žiroskop navede da se kreće pod pomenutim uslovima, u daljem tekstu će se ispitivati zahtevi koji se nameću momentu da bi ovakvo kretanje bilo ostvareno.



Slika 4.4.1. Žirokompas i komponente ugaone brzine

Ukoliko je $\theta = 90^\circ - \alpha_0$, pri čemu je α_0 veoma mali ugao iznad horizontalne ravni na latitudi λ , ugaone brzine osa ξ , η , ζ će biti:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= 0 \\ \omega_\eta &= \Omega(\sin \lambda \cos \alpha_0 - \cos \lambda \sin \alpha_0) \\ \omega_\zeta &= \Omega(\sin \lambda \sin \alpha_0 + \cos \lambda \cos \alpha_0)\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

Pretpostavljajući da je brzina obrtanja veoma velika, mogu se zanemariti sve ostale komponente od h . Za $M_Z = 0$ važi $\dot{\varphi} = \text{constant}$. Zahtevani moment u odnosu na ξ osu biće:

$$\begin{aligned}M_\xi &= (C\dot{\varphi})\omega_\eta \\ wl \sin \alpha_0 &= C\dot{\varphi}\Omega(\sin \lambda \cos \alpha_0 - \cos \lambda \sin \alpha_0)\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

Deljenjem sa $\sin \alpha_0$, potreban nagib ose obrtanja iznad horizontalne ravni iznosi:

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{C\dot{\varphi}\Omega \sin \lambda}{wl + C\dot{\varphi}\Omega \cos \lambda}\quad (4.4.3)$$

i zavisi od latituda λ .

Moment, potreban za ugaonu brzinu $\Omega \cos \lambda$ u odnosu na osu $-\eta$, dobija se zbog reakcije ležišta ose Z spoljašnjeg okvira.

§ 5. Oscilacije žirokompasa. Ukoliko se osa žirokompasa izmesti iz meridijanske ravni, kao što je prikazano na slici (4.5.1), oscilacija koja se pri tome javlja imaće dve komponente, jednu normalnu na meridijansku ravan a drugu u samoj meridijanskoj ravni. Obe oscilacije će imati istu frekvenciju i pri tome će kraj ose žirokompasa opisivati elipsu.

Neka je ψ ugaono odstupanje obrtne ose u odnosu na meridijansku ravan i neka je α nagib ose iznad horizontalne ravni; neka su oba ova ugla mala, tada će ugaone brzine u odnosu na ξ , η , ζ ose biti

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= -\dot{\alpha} - \Omega\psi \cos \lambda \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} + \Omega \sin \lambda - \Omega\alpha \cos \lambda \\ \omega_\zeta &= (\dot{\psi} + \Omega \sin \lambda)\alpha + \Omega \cos \lambda\end{aligned}\quad (4.5.1)$$

Ukoliko se pretpostavi da je brzina obrtanja velika i da je ugaoni moment kretanja u odnosu na ξ i η osu zanemarljivo mali, tada

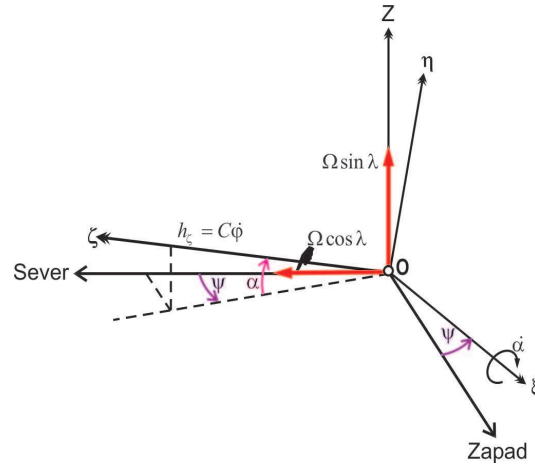
$$\begin{aligned}h_\zeta &= C\dot{\varphi} = \text{constant} \quad \text{za } M_\zeta = 0 \\ h_\xi &= h_\eta = 0\end{aligned}$$

Momentne jednačine, koje su od interesa, biće:

$$\begin{aligned}M_\eta &= -h_\zeta\omega_\xi = C\dot{\varphi}(\dot{\alpha} + \Omega\psi \cos \lambda) = 0 \\ M_\xi &= h_\zeta\omega_\eta = C\dot{\varphi}(\dot{\psi} + \Omega \sin \lambda - \Omega\alpha \cos \lambda) = wl\alpha\end{aligned}\quad (4.5.2)$$

pri čemu je wl neizbalansirana masa zbog postojanja dodatne težine duž $-\eta$ ose. Preuređujući date jednačine, dobija se

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + (\Omega \cos \lambda)\psi &= 0 \\ (C\dot{\phi})\dot{\psi} - (wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda)\alpha &= -C\dot{\phi}\Omega \sin \lambda \end{aligned} \quad (4.5.3)$$



Slika 4.5.1. Vektorske komponente kod žirokompasa

Eliminacijom ψ iz gornjih jednačina, diferencijalna jednačina po α postaje

$$\ddot{\alpha} + \frac{(wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda)(\Omega \cos \lambda)}{C\dot{\phi}}\alpha = \Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \quad (4.5.4)$$

sa opštim rešenjem

$$\alpha = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt + \frac{C\dot{\phi}\Omega \sin \lambda}{wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda} \quad (4.5.5)$$

$$p = \sqrt{\frac{wl\Omega \cos \lambda + C\dot{\phi}\Omega^2 \cos^2 \lambda}{C\dot{\phi}}} \cong \sqrt{\frac{wl\Omega \cos \lambda}{C\dot{\phi}}} \quad (4.5.6)$$

Na osnovu jednačine (4.5.3) jednačina za ψ biće

$$\psi = \frac{-p}{\Omega \cos \lambda}(C_1 \cos pt - C_2 \sin pt) \quad (4.5.7)$$

Ove navedene jednačine ukazuju na to da obrtna osa osciluje horizontalno oko meridijalne ravni i vertikalno oko nepromenljivog ugla α_0 , datog jednačinom (4.4.3). Frekvencija oscilovanja p (jednačina (4.5.6)) je funkcija od latituda λ i veoma je mala, obzirom da je $C\dot{\phi}$ u imeniocu. Frekvencija p teži nuli kada se žirokompas nalazi blizu severne polarne ose gde se pouzdanost instrumenta smanjuje.

Visokofrekventne oscilacije

Pored sporih oscilacija, datih pomoću gore navedenih jednačina, postoji i visokofrekventna oscilacija koja se nije pokazivala, obzirom da se pretpostavljalo da

je ugaoni moment u odnosu na ξ i η osu jednak nuli. Dodavanjem $I_\eta \ddot{\psi}$ i $-I_\xi \ddot{\alpha}$ u jednačinu (4.5.2), dobija se

$$\begin{aligned} M_\eta &= C\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \Omega\psi \cos \lambda) + I_\eta \ddot{\psi} = 0 \\ M_\xi &= C\dot{\phi}(\dot{\psi} + \Omega \sin \lambda - \Omega\alpha \cos \lambda) - I_\xi \ddot{\alpha} = wl\alpha \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Uređivanjem i uzimajući da važi

$$\begin{aligned} a &= C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda \\ b &= wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda \end{aligned}$$

gornja jednačina postaje

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \frac{C\dot{\phi}}{I_\eta} \dot{\alpha} + \frac{a}{I_\eta} \psi &= 0 \\ \ddot{\alpha} - \frac{C\dot{\phi}}{I_\xi} \dot{\psi} + \frac{b}{I_\xi} \alpha &= \frac{C\dot{\phi}\Omega \sin \lambda}{I_\xi} \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Pretpostavljajući harmonijske oscilacije, e^{ipt} , osnovne frekvencije su date determinantom

$$\begin{vmatrix} -p^2 + \frac{b}{I_\xi} & -\frac{C\dot{\phi}}{I_\xi} ip \\ \frac{C\dot{\phi}}{I_\eta} ip & -p^2 + \frac{a}{I_\eta} \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$p^4 - \left[\frac{(C\dot{\phi})^2 + aI_\xi + bI_\eta}{I_\xi I_\eta} \right] p^2 + \frac{ab}{I_\xi I_\eta} = 0 \quad (4.5.10)$$

Obzirom da je $(C\dot{\phi})^2$ znatno veće od aI_ξ ili bI_η , pojednostavljena jednačina osnovne frekvencije je

$$p^2 = \frac{(C\dot{\phi})^2}{2I_\xi I_\eta} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4abI_\xi I_\eta}{(C\dot{\phi})^4}} \right] = \frac{(C\dot{\phi})^2}{2I_\xi I_\eta} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{2abI_\xi I_\eta}{(C\dot{\phi})^4} + \dots \right] \right\} \quad (4.5.11)$$

Stoga, dve frekvencije će biti

$$p_1^2 = \frac{ab}{(C\dot{\phi})^2} = \frac{(wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda)\Omega \cos \lambda}{C\dot{\phi}} \quad p_2^2 = \frac{(C\dot{\phi})^2}{I_\xi I_\eta} \quad (4.5.12)$$

Frekvencija p_1 odgovara jednačini (4.5.6), a ujedno je predstavljena i dodatna visokofrekventna oscilacija frekvencije p_2 . Ukoliko je $h_\xi = h_\eta = 0$, tada $p_2 = \infty$ ne ulazi u prethodno rešenje. Ipak, amplituda visokofrekventne oscilacije je izuzetno mala i, stoga, spora oscilacija sa frekvencijom p_1 je, generalno, jedina koja se detektuje tj. uočava.

Amortizovane oscilacije

Prigušivanje spore oscilacije žirokompasa se može proizvesti uvođenjem momenta u odnosu na η osu i to na sledeći način. Pomeranjem od centralne linije ka istoku težine vešanja w za iznos e , koordinate težine w biće $(\xi, \eta, \zeta) = (-e, -l, 0)$. Jednačina za moment u odnosu na osu se tada menja i biće

$$M_{\eta} = C\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \Omega\psi \cos \lambda) = -we\alpha \quad (4.5.13)$$

ili

$$\dot{\alpha} = -\Omega\psi \cos \lambda - \frac{we\alpha}{C\dot{\phi}} \quad (4.5.14)$$

Diferenciranjem jednačine po M_{ξ} (druga od jednačina (4.5.8) bez izraza $I_{\xi}\ddot{\alpha}$) i zamenom za $\dot{\alpha}$ iz prethodne jednačine i α iz M_{ξ} , dolazi se do sledeće diferencijalne jednačine po ψ :

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{we}{C\dot{\phi}}\right)\dot{\psi} + \frac{(wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda)\Omega \cos \lambda}{C\dot{\phi}}\psi = -\frac{we\Omega \sin \lambda}{C\dot{\phi}} \quad (4.5.15)$$

Rezultat pomeranja viseće težine (težine vešanja) za rastojanje e je upravo prigušivanje ψ oscilacija i pomeranje mesta ravnoteže ka istoku za ugao

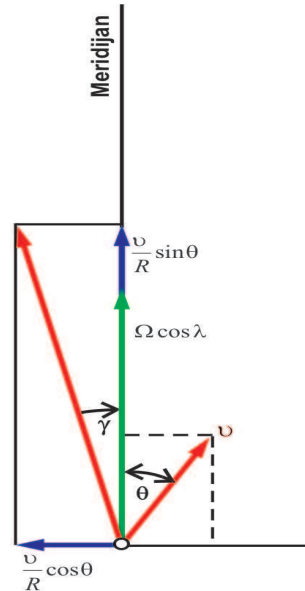
$$\psi_0 = -\frac{we \operatorname{tg} \lambda}{wl + C\dot{\phi}\Omega \cos \lambda} \quad (4.5.16)$$

Greška kompasa pri određivanju pravca (čeono odstupanje) usled kretanja pokretnog sistema

Da ne bismo svaki put pravili razliku između kosmičkih letilica i zemaljskih objekata u kretanju na kojima se koriste žiroskopski sistemi za navigaciju i stabilizaciju, a kako se govori o principima izgradnje navigacionih i stabilizacionih kompleksa, u daljem tekstu ćemo takve objekte nazivati opštim imenom **pokretni sistem**. Dakle, kada se pokretni sistem, koji nosi žirokompas, kreće u smeru severa brzinom v duž meridijana, ugaona brzina v/R je usmerena ka zapadu, pri čemu je R radijus Zemlje. Kombinacijom vektora ugaonog ubrzanja v/R sa horizontalnom komponentom Zemljine rotacije, $\Omega \cos \lambda$, rezultujuća ugaona brzina u horizontalnoj ravni skreće ka zapadu za ugao

$$\gamma \cong \frac{v/R}{\Omega \cos \lambda}$$

i žirokompas će pokazivati u smeru rezultujuće ugaone brzine, sa uvedenim γ ugaonim odstupanjem.



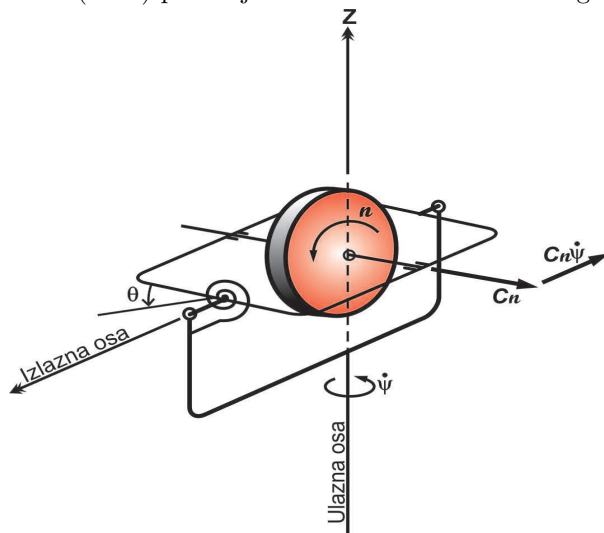
Slika 4.5.2. Ugaone brzine u horizontalnoj ravni zbog kretanja sistema brzinom v

Ukoliko pokretni sistem putuje u pravcu koji pravi ugao θ sa meridijanskom ravni, v se može zameniti sa $v \cos \theta$ kako bi se dobilo

$$\gamma \cong \frac{v \cos \theta}{R\Omega \cos \lambda + v \sin \theta}$$

pri čemu se uticaj komponente $v \sin \theta$ može zanemariti, s obzirom da je ona veoma mala u poređenju sa $\Omega \cos \lambda$.

§ 6. Brzinski žiroskop. Žiroskopi velikih brzina služe kao osnovni elementi kod mnogih instrumenata i to za navođenje i kontrolu kretanja pokretnog sistema. Slika (4.6.1) pokazuje osnovne elemente brzinskog žiroskopa.



Slika 4.6.1. Brzinski žiroskop

Unutrašnji okvir, koji pridržava obrtni točak, prikačen je oprugom koja dozvoljava ograničenu rotaciju oko spoljašnjeg okvira koji je pričvršćen za pokretni sistem. Osa Z , oko koje se pokretni sistem okreće, naziva se ulazna osa, a osa rotacije unutrašnjeg okvira se naziva izlazna osa.

Ukoliko pokretni sistem napravi stabilan okret oko ulazne ose brzinom $\dot{\psi}$, brzina promene vektora momenta impulsa Cn iznosi $Cn\dot{\psi}$, što zahteva moment jednak njemu ali u odnosu na izlaznu osu. Ovaj moment proizvodi torziona opruga krutosti K prilikom nagnjanja izlazne ose za mali ugao θ , što je prikazano na slici (4.1.1). Izjednačavanjem pomenuta dva momenta, dobija se

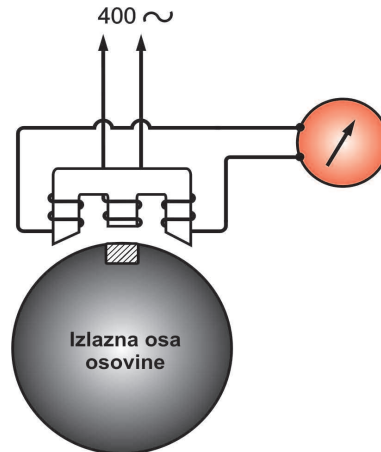
$$Cn\dot{\psi} = K\theta$$

ili

$$\theta = \frac{Cn}{K}\dot{\psi} \quad (4.6.1)$$

i spoljašnji ugao θ je proporcionalan brzini obrtanja ulazne ose ili samog pokretnog sistema.

Spoljašnji ugao θ se, u opštem slučaju, elektronski očitava pomoću posebnog uređaja – davača signala. Jedan od takvih uređaja je i E-davač, prikazan na slici (4.6.2).



Slika 4.6.2. E-davač na držaču

Središnji krak E uređaja napaja se naizmeničnom strujom od oko 400 cps. Dva spoljašnja kraka su suprotno namotana, tako da kada se armatura*, prikačena za spoljašnju osu, centrira oko središnjeg kraka, ne postoji napon u suprotnim serijski povezanim spoljašnjim kalemovima. Kada se armatura pomeri usled θ , stanje magnetnog fluksa neće biti ujednačeno, čime se stvara napon koji se očitava na spoljašnjim kalemovima.

Kod instrumenta kod koga ne postoji nikakvo prigušenje, spoljašnja osa će prevazići stabilan ugao θ i oscilovaće oko novog dobijenog ugla. Da bi se izbegli ovi neželjeni uslovi, prigušivanje se, generalno, obezbeđuje, a ponašanje instrumenta (pri prigušivanju) se dobija iz sledeće diferencijalne jednačine

$$A\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + K\theta = Cn\dot{\psi} \quad (4.6.2)$$

gde je A moment inercije točka i unutrašnjeg okvira u odnosu na izlaznu osu, a c je koeficijent viskoznog prigušenja. Shodno ovome, dinamičke karakteristike instrumenta se mogu dobiti na osnovu slične homogene jednačine

* po definiciji, armatura je kalem u kome se indukuje napon usled kretanja kroz magnetno polje

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad (4.6.3)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{K}{A}} = \text{nepriгуšena osnovna frekvencija} \\ \zeta &= \frac{c}{c_{cr}} = \text{faktor prigušivanja} \\ c_{cr} &= 2\sqrt{KA} = \text{kritično prigušivanje} \end{aligned}$$

§ **7. Integracioni žiroskopi.** Ukoliko se torziona opruga, koja ograničava vrednost izlaznih rezultata, zameni viskozним prigušivačem instrument postaje *integracioni žiroskop*. Izjednačavanjem brzine promene momenta impulsa sa momentom usled viskoznog prigušivača dobija se

$$Cn\dot{\psi} = c\dot{\theta}$$

ili

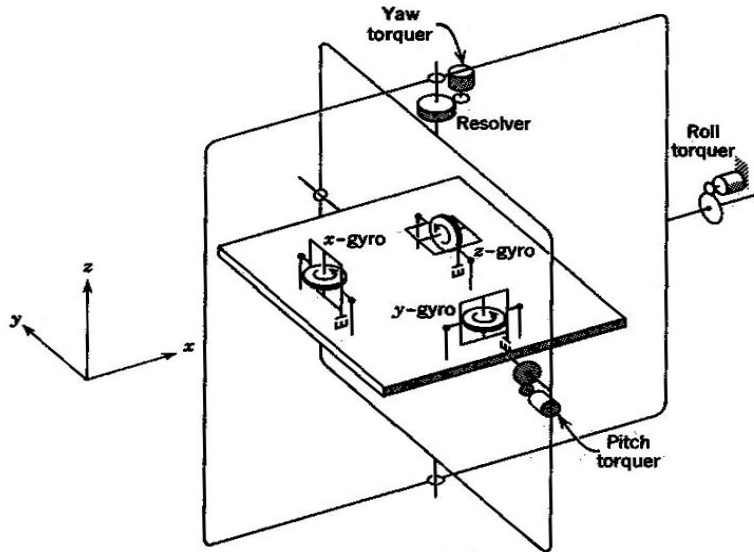
$$\theta = \frac{Cn}{c} \int \dot{\psi} dt = \frac{Cn}{c} \psi \quad (4.7.1)$$

Na ovaj način, spoljašnji ugao θ je proporcionalan integralu ulazne ugaone brzine, što je zapravo sam ulazni ugao.

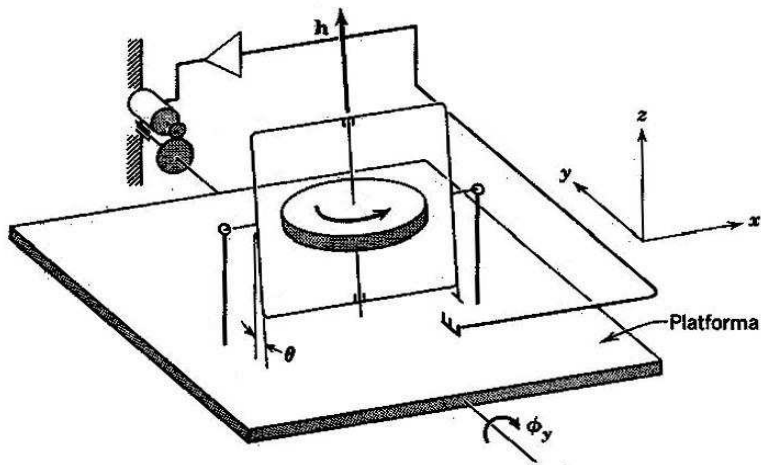
§ **8. Stabilne platforme.** Osnovna funkcija stabilne platforme je da održava ugaone vrednosti koje su fiksirane u prostoru. Ovo je ključni deo za inercijalne sisteme navođenja. Platforma omogućava korišćenje osobina žiroskopa, a to je da obrtni moment u odnosu na ulaznu osu (ne uzimajući u obzir obrtnu osu) izaziva ugaonu brzinu u odnosu na ortogonalnu (izlaznu) osu. Generalno, tri žiroskopa sa jednim stepenom slobode, usmereni u međusobno normalnim pravcima, postavljaju se na platformu, kao što je prikazano na slici (4.8.1). S druge strane, platforma je postavljena u dva okvira koji joj dozvoljavaju tri stepena ugaone slobode. Ukoliko je platforma perfektno izbalansirana i pri tome su ležišta idealna (bez trenja), platforma neće proizvesti nikakav obrtni moment i ostaće istog usmerenja bez obzira na kretanje nosača platforme.

Međutim, usled neravnoteže i trenja, što se ne može u potpunosti izbeći, na platformu će delovati poremećajni obrtni moment. Uloga žiroskopa jeste da oseti ove poremećaje i da, kroz servo sistem, spreči poremećajni obrtni moment i obezbedi sistem bez obrtnih momenata.

Da bi se razumela dinamika stabilne platforme potrebno je opisati platformu sa jednom osom, koja je prikazana na slici (4.8.2), gde je y osa ulazna osa a osa x (rotacija obrtne ose) je izlazna osa. Poremećajni obrtni moment T_y u odnosu na y osu rotiraće obrtnu osu, i shodno tome, i \vec{h} za ugao θ , a razlika između primenjenog obrtnog momenta i obrtnog momenta inercije mora biti jednaka brzini promene momenta impulsa \vec{h} na osnovu jednačine



Slika 4.8.1. Stabilna platforma za inercijalno navođenje

Slika 4.8.2. Platforma sa jednom osom za održavanje ugaone orijentacije u odnosu na y osu

$$T_y - J_y \ddot{\phi}_y = h \dot{\theta} \quad (4.8.1)$$

gde je J_y moment inercije platforme i žiroskopa sa okvirom u odnosu na y osu. U gornjoj jednačini, na desnoj strani je uzeta mala aproksimacija ugla, što je opravdano obzirom da se veoma retko dozvoljava da θ bude veće od 1° .

Precesija $\dot{\theta}$, koju razvija T_y , takođe daje jednačinu obrtnog momenta u odnosu na x osu na sledeći način:

$$-T_x = I_x \ddot{\theta} - h \dot{\phi}_y = 0 \quad (4.8.2)$$

gde je I_x moment inercije žiroskopa sa okvirom u odnosu na x osu.

Koristeći notaciju Laplasove transformacije $\mathcal{L}\dot{\theta} = s\bar{\theta}(s)$, gornje dve jednačine se mogu zapisati kao

$$\begin{aligned} \bar{T}_y(s) - J_y s^2 \bar{\phi}_y(s) &= h s \bar{\theta}(s) \\ I_x s^2 \bar{\theta}(s) &= h s \bar{\phi}_y(s) \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Eliminacijom $\bar{\phi}_y(s)$, dobija se

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}_y(s)} = \frac{h/J_y J_x}{s[s^2 + (h^2/J_y J_x)]} \quad (4.8.4)$$

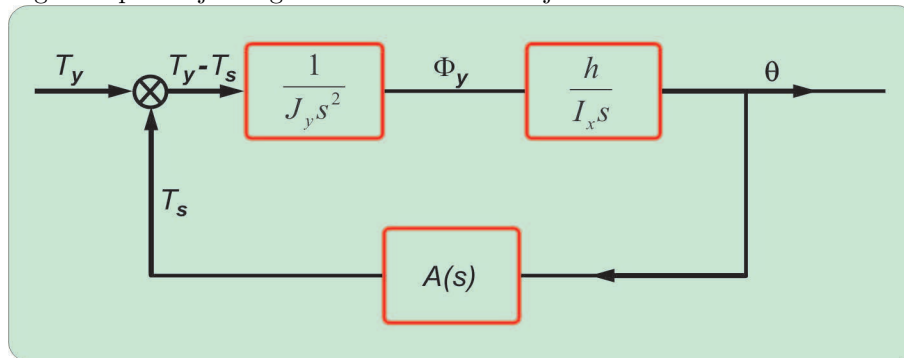
čime se definiše funkcija prenosa između izlaznog $\bar{\theta}(s)$ i ulaznog poremećajnog obrtnog momenta $\bar{T}_y(s)$.

Ugaona brzina žiroskopa $\dot{\theta}$ u odnosu na platformu registruje električni davač (pokazatelj), pojačava se i navodi do servomotora, koji primenjuje obrtni moment T_s suprotnog smera u odnosu na poremećajni obrtni momenat T_y . Generalno, inercija platforme J_y je velika, tako da je nutaciona frekvencija $\sqrt{h^2/J_y J_x}$ (videti jednačinu (4.3.19)) zanemarljiva. Približna funkcija prenosa tada je jednaka

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}_y(s)} = \frac{h}{J_y J_x s^3} \quad (4.8.5)$$

što omogućava da se servosistem platforme prikaže blok dijagramom kao na slici (4.8.3), pri čemu je $A(s)$ funkcija prenosa električnog davača, pojačivača i servo motora. Ukoliko je $A(s)$ poznato, dinamičko ponašanje stabilne platforme se može proučavati kroz njene osobine stabilnosti i pomeranja.

Stabilna platforma sa tri ose može se smatrati skupom od tri platforme sa jednom osom, sličnih onima kao u prethodnom odeljku, ali postavljenim na jednu stabilnu jedinicu, kao što je prikazano na slici (4.8.1). Analiza takve platforme je mnogo kompleksnija zbog veze između tri rotacije.



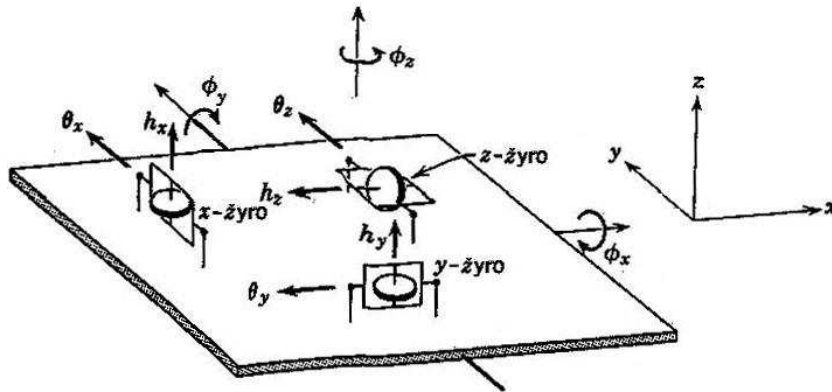
Slika 4.8.3. Blok dijagram platforme sa jednom osom

Zbog opisa inercijalnog sistema navođenja, dovoljno je pretpostaviti da postoji platforma koja uspešno održava određenu orijentaciju u prostoru.

§ 9. Platforme sa tri ose (Razlaganje kretanja). Analiza platforme sa tri ose znatno je kompleksnija zbog povezivanja tri rotacije uz neizbežno razlaganje signala davača sa platforme, pošto se ose okvira i ose platforme ne nalaze u istoj liniji.

Slika (4.9.1) prikazuje vektore momenta impulsa za x , y , z žiroskopa. Neka su θ_x , θ_y , θ_z izlazni rezultati x , y , z žiroskopa usled rotacija ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z ulaznih osa, tada prikazivanje (stanje davača) svakog od žiroskopa mora biti

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \theta_x - \phi_y \\ \sigma_y &= \theta_y - \phi_x \\ \sigma_z &= \theta_z - \phi_y\end{aligned}\quad (4.9.1)$$



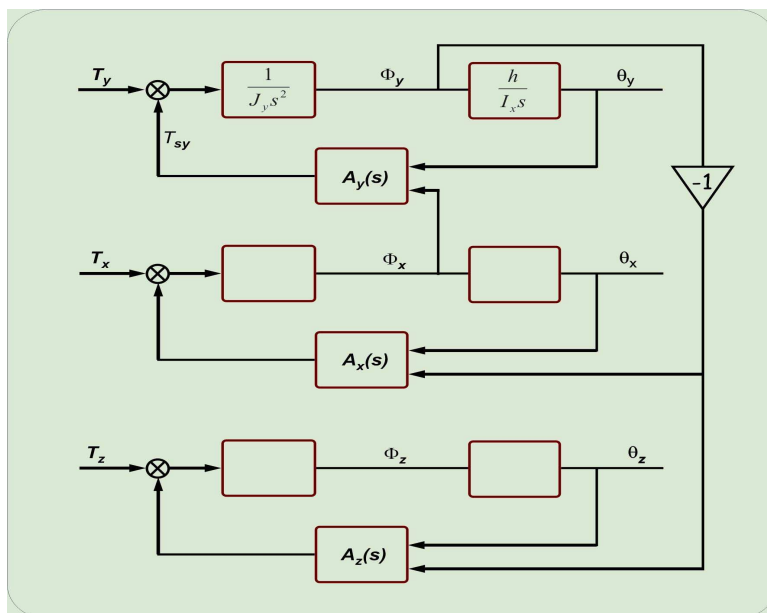
Slika 4.9.1. Kombinacija žiroskopa na platformi sa tri ose

Ukoliko se ose okvira poravnaju sa osama platforme, izraz za obrtni momenat anulirajućeg efekta, određen davačem signala, ima oblik

$$T_{sy}(s) = A_y(s) \sigma_y(s) = A_y(s) [\theta_y(s) + \phi_x(s)] \quad (4.9.2)$$

pri čemu je $A_y(s)$ funkcija prenosa za y servosistem. Na ovaj način, ponašanje platforme sa jednom osom se modifikuje pomoću kombinovanog izraza oblika

$$A_y(s) \phi_x(s) .$$



Слика 4.9.2. Блок дијаграм платформе са три осе

Блок дијаграм платформе са три осе садржи три појединачна струјна кола облика, као на слици (4.8.3), са додатним везама које одговарају комбинованим изразима $-A_x(s)\phi_y(s)$, $A_y(s)\phi_x(s)$ и $A_z(s)\phi_y(s)$ што је приказано на слици (4.9.2).

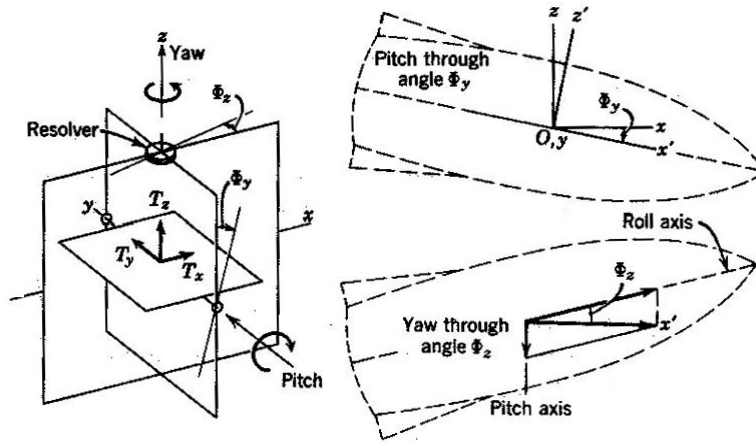
Pod pretpostavkom da je osa spoljašnjeg okvira, koja je na početku paralelna sa x osom platforme, vezana za pokretni sistem, kao što je prikazano na slici (4.9.3), i pod pretpostavkom da se pokretni sistem ne obrće oko svoje ose (ose x , tj. *stabilisano je u odnosu na valjanje*), kretanje pokretnog sistema usled vertikalnog oscilovanja u odnosu na horizontalu (*propinjanje*) i horizontalnog oscilovanja u odnosu na vertikalnu (*skretanje*) uzrokuje odstupanje osa okvira od osa platforme. Očigledno je da obrtne momente platforme sad moramo razložiti duž pomerених osa okvira, gde deluju servomotori tj. uzročnici pomenutih obrtnih momenata. S obzirom da su kompenzacioni (anulirajući) obrtni momenti proporcionalni skinutim signalima, signalima sa davača platforme, odgovarajući obrtni momenti u odnosu na nove ose okvira dobijaju se razlaganjem skinutih signala platforme duž osa okvira.

Neka je pokretnom sistemu, koji je stabilan u smislu da se ne obrće oko svoje ose, dakle nema valjanja, i dozvoljeno je pomeranje "nosem na dole" za ugao Φ_y koji se naziva (*uglom propinjanja*). Uzimajući da su nove ose okvira označene sa "prim", komponente signala davača sa platforme duž osa okvira iznose

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos \Phi_y - \sigma_z \sin \Phi_y$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_y$$

$$\sigma_{z'} = \sigma_x \sin \Phi_y + \sigma_z \cos \Phi_y .$$



Slika 4.9.3. Rotacija okvira zahteva razlaganje obrtnog momenta

Dalje, neka je sada dozvoljena i rotacija Φ_z usled horizontalne oscilacije (*skretanja*, ❁ *azimutalno pomeranje*) oko z' ose.

Ako se sada $\sigma_{x'}$ rastavi duž *usponske* ((*elevacione*) ose okvira i nove *rotacione* ose, ❁ biće

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{rot}} &= \sigma_{x'} \sec \Phi_z \\ \sigma_{\text{elv}} &= -\sigma_{x'} \operatorname{tg} \Phi_z\end{aligned}$$

Rezultujući signal u odnosu na nove *rotacionu*, *elevacionu* i *azimutalnu* osu okvira, zbog Φ_y i Φ_z biće

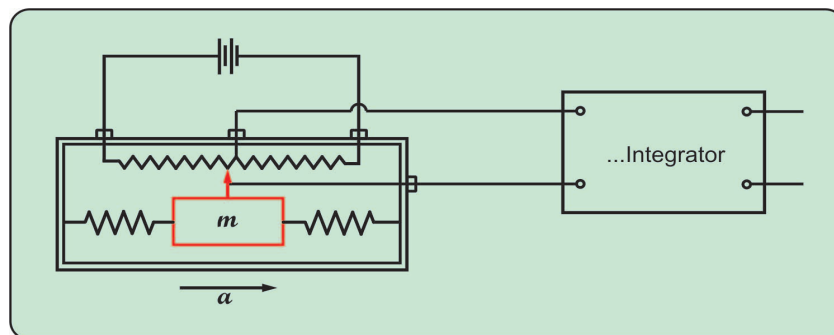
$$\begin{aligned}\sigma_{\text{rot}} &= (\sigma_x \cos \Phi_y - \sigma_z \sin \Phi_y) \sec \Phi_z \\ \sigma_{\text{elv}} &= -(\sigma_x \cos \Phi_y - \sigma_z \sin \Phi_y) \operatorname{tg} \Phi_z + \sigma_y \\ \sigma_{\text{azi}} &= (\sigma_x \sin \Phi_y + \sigma_z \cos \Phi_y) = \sigma_{z'}\end{aligned}$$

što se može prikazati i pomoću sledeće matrične notacije

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\text{rot}} \\ \sigma_{\text{elv}} \\ \sigma_{\text{azi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_y \sec \Phi_z & 0 & -\sin \Phi_y \sec \Phi_z \\ -\cos \Phi_y \operatorname{tg} \Phi_z & 1 & \sin \Phi_y \operatorname{tg} \Phi_z \\ \sin \Phi_y & 0 & \cos \Phi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Razlagač ima ulogu da razloži signale davača σ_x , σ_y , σ_z platforme na komponente σ_{rot} , σ_{elv} i σ_{azi} duž izmestjenih osa okvira opslužujući tako *rotacione*, *elevacione* i *azimutalne* servomotore.

§ 10. Inercijalna navigacija. Navigacija je nauka o usmeravanju pokretnog sistema ka određenoj destinaciji pomoću određivanja pozicije tog pokretnog sistema. Kod inercijalne navigacije, ovaj zadatak se postiže bez posmatranja obeležja na kopnu, nebeskih tela ili radio talasa (vrsta elektromagnetnog zračenja).



Slika 4.10.1. Akcelerometar i integrator

Vozilo, koje se kreće u prostoru, ima šest stepeni slobode, tri translatorna i tri rotaciona. Na osnovu ovoga, potrebno je šest senzora. Stabilna platforma, opisana u Odeljku (4.8), pruža objašnjenje za rotaciono kretanje, dok je akcelerometar u mogućnosti da detektuje translatorno kretanje. Zapravo, tri žiroskopa na stabilnoj platformi i tri akcelerometra, orijentisanih u međusobno normalnim pravcima, mogu obezbediti sve informacije potrebne za utvrđivanje kretanja čvrstih tela, a visok stepen tačnosti dobijenih informacija čini inercijalnu navigaciju praktičnom i realnom.

Slika (4.10.1) daje šematski prikaz akcelerometra i integratora. Ubrzanje duž ose prikazuje odnos mase i sile elastičnosti na osnovu Njutnove jednačine $F = ma$, pri čemu je F sila elastičnosti. Promena položaja mase, koja se vrši proporcionalno ubrzanju, određuje se potenciometrom a zatim se integriše u brzinu i pomeranje pokretnog sistema.

Akcelerometar se postavlja na tablu i to uvek upravno na mesni Zemljin poluprečnik. Ovo se postiže sredstvima kao što su računar i časovnik koji rotiraju tablu u odnosu na stabilnu platformu, kao što je prikazano na slici (4.10.2). U nekim slučajevima, akcelerometar se postavlja direktno na stabilnu platformu i dejstvom obrtnog momenta se dovodi u normalan položaj.

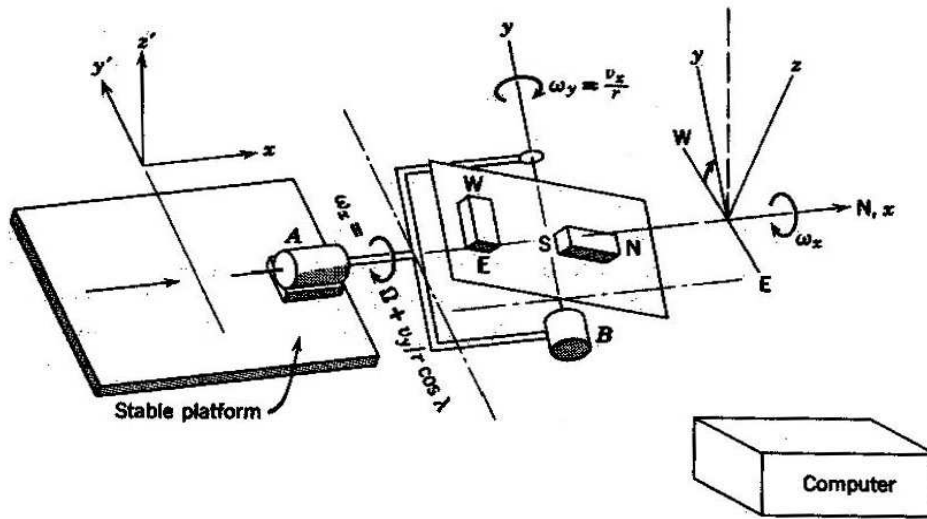
Da bi se razumelo kako inercijalni navigator radi, treba pretpostaviti da pokretni sistem kreće od ekvatora i da je ravan stabilne platforme horizontalna pri čemu strelica pokazuje na severni polarni pravac N . Ukoliko se pokretni sistem kreće ka severu duž longitude, a tabla akcelerometra se održava normalno na geocentrični radijus r , $N - S$ akcelerometar će meriti ubrzanje a_x (videti sliku (4.10.2)).

Odgovarajuća brzina rotacije table u odnosu na y osu biće $\omega_x = v_x/r$, gde se v_x dobija kao prvi integral od a_x . Latitudni motor B će tada rotirati tablu brzinom ω_y kako bi se na tabli održala $N - S$ linija normalna na r .

Zbog rotacije Zemlje prema istoku, $E - W$ linija table mora biti rotirana pomoću longitudinalnog motora A da bi se rotacija Zemlje odvijala nesmetano. Obzirom da, tokom kretanja pokretnog sistema, orijentacija stabilne platforme ostaje fiksirana u inercijalnom prostoru (usmerena ka N), potrebna rotacija table akcelerometra u odnosu na x osu stabilne platforme na proizvoljnoj latitudi biće Ω ili $15^\circ/hr$.

Ovoj rotaciji se mora dodati i rotacija u odnosu na x osu platforme usled $E - W$ kretanja pokretnog sistema u odnosu na početnu latitudu. Integracijom izlaznih

rezultata $E - W$ akcelerometra i deljenjem sa $r \cos \lambda$, dodatna rotacija koja treba da održi $E - W$ liniju table normalne na r iznosiće $\omega_x = v_y / r \cos \lambda$.



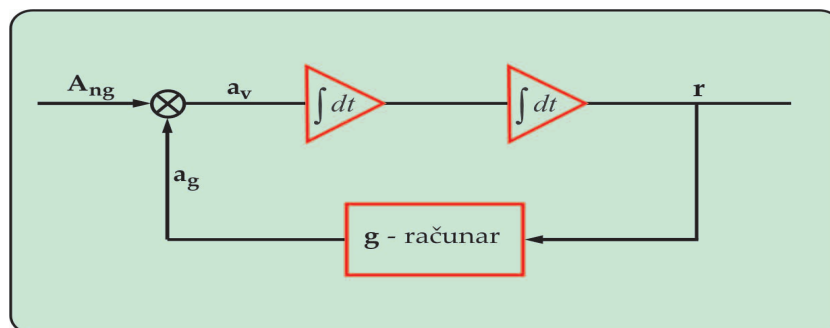
Slika 4.10.2. Komponente inercijalnog navigatora

Data računanja se izvode pomoću računara, koji mora biti integralni deo inercijalnog sistema. Shodno tome, inercijalni navigator se mora sastojati od stabilne platforme, akcelerometra sa integratorom, računara koji izračunava odgovarajuće ugaone brzine table prilikom kretanja pokretnog sistema, časovnika koji prihvata Zemljinu rotaciju i servomotora koji, zapravo, omogućava navedeno funkcionisanje.

§ 11. Oscilacije navigacionih odstupanja. Akcelerometri postavljeni na pokretni sistem, mere samo negravitacionu silu \vec{F}_{ng} koja deluje na pokretni sistem i, stoga, potrebno je toj sili dodati gravitacionu silu \vec{F}_g kako bi se odredila ukupna sila koja određuje ubrzanje \vec{a} , pokretnog sistema.

$$\vec{F}_{ng} + \vec{F}_g = m\vec{a}, \quad (4.11.1)$$

Na primer, ako pokretni sistem miruje na površini Zemlje vertikalni akcelerometar će ukazivati na silu koja deluje na pokretni sistem tako da je od površine Zemlje usmerena na gore (sila potiska), odnosno $\vec{F}_{ng} = \vec{W}$. Na sve ovo treba dodati gravitaciono privlačenje Zemlje, koje deluje na pokretni sistem, $\vec{F}_g = -\vec{W}$ što kao rezultat daje nula ubrzanje pokretnog sistema.



Slika 4.11.1. Pojednostavljen blok dijagram gravitacionog i pozicionog izračunavanja

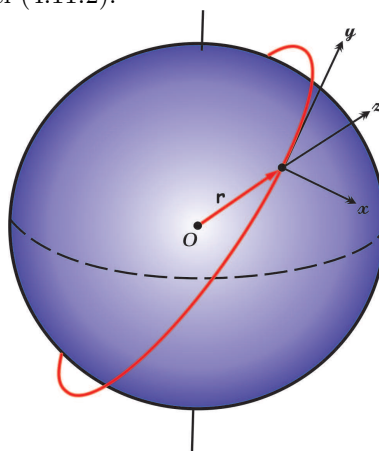
Jednačina (4.11.1) se, u potpunosti, može prikazati preko ubrzanja i to deljenjem sa m :

$$\vec{a}_v = \vec{A}_{ng} + \vec{a}_g \quad (4.11.2)$$

gde je \vec{A}_{ng} negravitaciono ubrzanje (potisak), izmereno akcelerometrima. Položaj pokretnog sistema se tada određuje dvostrukom integracijom ubrzanja \vec{a}_v pokretnog sistema, kako je pokazano na slici (4.11.1). Gravitaciono ubrzanje \vec{a}_g , koje zavisi samo od položaja \vec{r} , izračunava se i dodaje izlaznim rezultatima akcelerometara kako bi se dobilo ubrzanje pokretnog sistema \vec{a}_v .

Očigledno je da bi odstupanje akcelerometra rezultovalo netačnim rotacionim brzinama table akcelerometra, što bi dovelo do greške položaja, netačne vrednosti za \vec{a}_g , kao i odstupanja table akcelerometra od normale u odnosu na pravi geocentrični radijus r . Ova odstupanja su promenljiva za podsatelitske brzine, te će se u daljem tekstu ispitati njihova priroda.

Tačan položaj pokretnog sistema će se definisati pomoću vektora \vec{r} koji je određen u odnosu na nepokretni sistem koordinata (inercijalni sistem) sa početkom u centru Zemlje. Takođe, uvodi se i drugi skup koordinata x, y, z sa početkom koji se podudara sa tačnim položajem pokretnog sistema i sa z osom paralelnom sa \vec{r} , kako je prikazano na slici (4.11.2).



Slika 4.11.2. Položaj pokretnog sistema dat sa \vec{r} ; početak sistema x, y, z se podudara sa položajem pokretnog sistema

Na ovaj način, ugaona brzina pokretnog sistema je određena, respektivno, sa ω_x , ω_y , ω_z , a ravan xy je uvek normalna na lokalni geocentrični radijus \vec{r} .

Pod pretpostavkom da položaj pokretnog sistema ima odstupanje

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \quad (4.11.3)$$

prvo će se ispitati odstupanje za $\vec{a}_g = -\vec{g}$. Obzirom da je \vec{g} obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja od centra Zemlje, neispravne komponente od \vec{g} , izračunate iz $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, biće

$$\begin{aligned} g_z &= -g \left(\frac{r}{r + \Delta z} \right)^2 = -g \left(1 - \frac{2\Delta z}{r} \right) = -g + 2\omega_0^2 \Delta z \\ g_x &= -g \frac{\Delta x}{r} = -\omega_0^2 \Delta x \\ g_y &= -g \frac{\Delta y}{r} = -\omega_0^2 \Delta y \end{aligned} \quad (4.11.4)$$

pri čemu je $-g$ ispravna vrednost i $\omega_0^2 = g/r$.

Odstupanje ubrzanja pokretnog sistema može se odrediti iz opšte jednačine za ubrzanje i to zamenom \vec{r} sa $\Delta\vec{r}$.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{a}_v &= [\Delta\ddot{x} + \omega_x\omega_y\Delta y + \omega_x\omega_z\Delta z - (\omega_y^2 + \omega_z^2)\Delta x + \dot{\omega}_y\Delta z - \dot{\omega}_z\Delta y \\ &\quad + 2(\omega_y\Delta\dot{z} - \omega_z\Delta\dot{y})]\vec{i} + [\Delta\ddot{y} + \omega_x\omega_y\Delta x + \omega_y\omega_z\Delta z - (\omega_x^2 + \omega_z^2)\Delta y \\ &\quad + \dot{\omega}_z\Delta x - \dot{\omega}_x\Delta z + 2(\omega_z\Delta\dot{x} - \omega_x\Delta\dot{z})]\vec{j} + [\Delta\ddot{z} + \omega_x\omega_z\Delta x + \omega_y\omega_z\Delta y \\ &\quad - (\omega_x^2 + \omega_y^2)\Delta z + \dot{\omega}_x\Delta y - \dot{\omega}_y\Delta x + 2(\omega_x\Delta\dot{y} - \omega_y\Delta\dot{x})]\vec{k} \end{aligned} \quad (4.11.5)$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu za odstupanje

$$\Delta\vec{a}_v = \Delta\vec{A} + \Delta\vec{g}$$

komponente jednačine za odstupanje se mogu zapisati kao

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 - (\omega_y^2 + \omega_z^2) \right] \Delta x &= \Delta A_x + \left(2\omega_z \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y \right) \Delta y \\ &\quad - \left(2\omega_y \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_y + \omega_x\omega_y \right) \Delta z \end{aligned} \quad (4.11.6)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 - (\omega_x^2 + \omega_z^2) \right] \Delta y &= \Delta A_y + \left(2\omega_x \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z \right) \Delta z \\ &\quad - \left(2\omega_z \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y \right) \Delta x \end{aligned} \quad (4.11.7)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} - 2\omega_0^2 - (\omega_x^2 + \omega_y^2) \right] \Delta z &= \Delta A_z + \left(2\omega_y \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z \right) \Delta x \\ &\quad - \left(2\omega_x \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z \right) \Delta y \end{aligned} \quad (4.11.8)$$

Da bi se ove jednačine jasnije sagledale, pretpostaviće se da pokretni sistem putuje brzinom v , u pravcu y ose duž velikog kruga na konstantnoj altitudi. Tada je

$$\omega_y = \omega_z = 0 \quad \text{i} \quad \omega_x = -v/r .$$

Gornje jednačine tada dobijaju skraćeni oblik

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \Delta x = \Delta A_x \quad (4.11.9)$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) \right] \Delta y = \Delta A_y + \left(2\omega_x \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_x \right) \Delta z \quad (4.11.10)$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \left(2\omega_0^2 + \frac{v^2}{r^2} \right) \right] \Delta z = \Delta A_z - \left(2\omega_x \frac{d}{dt} + \dot{\omega}_x \right) \Delta y \quad (4.11.11)$$

Prve dve jednačine imaju rešenja koja su harmonijske oscilacije frekvencije

$$\omega_0 = \sqrt{g/r} \quad \text{i} \quad \sqrt{\omega_0^2 - (v^2/r^2)} .$$

Rešenje treće jednačine je hiperboličko i mora da divergira.

Za uobičajene altitude, period izračunat iz ω_0 iznosi

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6378 \times 1000}{9.81}} = 5063.693 \text{ sec.} = 84 \text{ min} \quad (4.11.12)$$

a inercijalni sistem se često naziva 84-rominutnim Šulerovim klatnom. Kada se v približava orbitalnoj brzini satelita, $\omega_0^2 - (v^2/r^2)$ će težiti nuli, a željena oscilatorna priroda položajnog odstupanja se gubi.

treba, dalje, ukratko pomenuti i odstupanje akceleratorne table od normale. Ukoliko je tabla iskošena za mali ugao $\vec{\Phi} = \Phi_x \vec{i} + \Phi_y \vec{j} + \Phi_z \vec{k}$, odstupanja u izlaznom rezultatu akcelerometra biće

$$\vec{\Phi} \times \vec{A} = (\Phi_y A_z - \Phi_z A_y) \vec{i} + (\Phi_z A_x - \Phi_x A_z) \vec{j} + (\Phi_x A_y - \Phi_y A_x) \vec{k} \quad (4.11.13)$$

§ 12. Performanse i klasifikacija inercijalnih sistema. Inercijalni navigacioni sistemi (INS), koji se primenjuju u sistemima upravljanja i stabilizacije pokretnih sistema, u svom sastavu imaju žirostabilisanu platformu kao neizostavni element. Funkcija te platforme je, prvo, da obezbedi odgovarajuću prostornu orijentaciju triadra koji formiraju merne ose akcelerometara, i, drugo, da omogući dobijanje informacije o ugaonim pomeranjima objekta u odnosu na platformu, tj. da se odrede parametri orijentacije. U svojstvu parametara koji određuju orijentaciju objekta uzima se sistem uglova koji se mere davačima smeštenim u ležištima vešanja platforme.

To znači da se mereni pribori za merenje prividnog ubrzanja pokretnih objekata sa inercijalnim navigacionim sistemima (INS) montiraju, po pravilu, na žiroskopske platforme, koje su na određeni način prostorno stabilizovane. Suštinska namena

takve platforme je da obezbedi zahtevanu prostornu orijentaciju triedra koji formiraju merne ose akcelerometara. Za normalno funkcionisanje INS potrebna je informacija o projekcijama (komponentama) navedenog vektora ubrzanja na ose triedra, koji se uzima kao bazni triedar. Ako je merni triedar u bilo kom trenutku tokom kretanja letilice orijentisan tao da su mu ose kolinearne sa osama baznog triedra, signali koji stižu sa akcelerometara davaće, u suštini, projekciju ubrzanja na ose baznog triedra.

Na taj način žiroskopska platforma, koja ulazi u sastav INS, materijalizuje traženi koordinatni sistem, a signali koji dolaze sa akcelerometara koriste se za upravljanje orijetacijom platforme–mernog triedra. Takvi INS se nazivaju sistemima zatvorenog tipa; oni INS kod kojih se signali sa akcelerometara ne koriste za upravljanje orijetacijom platforme, nazivaju se otvorenim.

U tehničkoj literaturi INS sa platformama se dele na tri osnovna tipa: analitičke, poluanalitičke i geometrijske.

Osnovno obeležje analitičkih INS je da nemaju uređaje i delove za materijalizaciju osnovne ravni – ravni horizonta ili vertikale, a svi parametri orijentacije se računaju analitički.

INS geomterijskog tipa su sistemi sa striktnom kinematičkom šemom koja daje uslove korekcije promene položaja žirostabilisane platforme preko signala sa teleskopa. Kod ovih sistema je materijalizovana osnovna ravan, tj. vertikalna koordinatnog sistema, koji su spregnuti sa triedrom osa akcelerometara.

Kod INS poluanalitičkog tipa osnovnim obeležjem se javlja materijalizacija i pravca vertikale i osnovnog pravca za dati topocentar. Ukoliko se kod ovih sistema mogu očitati vrednosti ugaonih pomeranja (propinjanja, valjanja i skretanja), onda izostaje potreba analitičkog računa parametara koordinatnih korekcija, već se korekcija vrši odgovarajućim reakcijama servo motora na osama.

§ 13. Kosmičke letilice i inercijalni kompleksi. Za rešavanje zadataka navigacije i upravljanja letom pokazalo se da je neophodno da se poveća broj merenih parametara, da se naprave složeniji algoritmi navigacionih zadataka, da se poveća tačnost i nivo očekivanja merenja, da se suštinski ubrza i automatizuje obrada informacija.

Pored tekućih informacija sa navigacionih senzora i davača značajno je porasla uloga apriorne informacije o režimu leta, konstantama i zakonitostima mernih metoda, parametrima zadatih trajektorija, orijentacije i ciljeva. Rešavanje ukupnosti ovih zadataka bilo je moguće samo u uslovima objedinjavanja pojedinih navigacionih pribora, uređaja i podсистема u **navigacione komplekse** (NK). U NK se procesi dobijanja i obrade informacija ostvaruju kroz povezanost mogućnosti dopunjavanja merenja, kompenzacije i filtracije grešaka, promene parametara sistema i njegove strukture u zavisnosti od zadatka koji se rešava i od uslova leta.

Primena u NK brzih, relativno moćnih i portativnih kompjutera, automatizacija svih merenja i poboljšanje uslova transfera izlaznih podataka i informacija, povećava efektivnost rada letilice u celini, nazemnih i nebeskih posada, posebno. Pri tome se uloga čoveka sve više svodi na najviši nivo intelektualne kontrole, nadzora

i prekomponovanja strukture funkcija i zadataka, a sve manje ostaje neposrednog i zamornog fizičkog rada.

U prvom koraku razvoja navigacionih sistema stvoreni su navigacioni kompleksi **federativnog** tipa: odlikovali su se samostalnim računskim resursima, sopstvenim uređajima za indikaciju, upravljanje i kontrolu. Najpoznatiji su bili podtipovi vazdušno–doplerski, inercijalno–doplerski, astroinercijalni, radioinercijalni,... Osnovni nedostaci ovih sistema su nedovoljna veza među davačima i sensorima, neracionalna eksploatacija informacija, značajno opterećenje čoveka–operatora obradom i koordinacijom merenja, upravljanjem režimom rada kompleksa i očuvanjem funkcionalnosti.

Dalji razvoj je tekao kroz stvaranje savršenijih i ekonomičnijih navigacionih kompleksa, sa povećanom tačnošću informacija i adaptivnošću na uslove rada. takvi su danas **integralni navigacioni kompleksi** razdeljenog intelekta, u kojima se prijem i obrada informacija obavlja po hijerarhijskom principu uz pomoć mikroprocesora i savremenih sredstava za odlaganje i predstavljanje izlaznih podataka.

U svakom slučaju veoma je korisno u izučavanju NK za principe klasifikacije uzeti fizičke osnove, granice primenljivosti, nivo informacione podrške, nivo adaptacije i sl. U zavisnosti od oblasti primene, NK se dele na avijacione, raketne, kosmičke itd.

U zavisnosti od režima rada razlikujemo jednorežimne, višerežimne i sverežimne NK. Ovi poslednji – univerzalni – obezbeđuju ceo skup navigacionih merenja potrebnih za realizaciju leta.

Zavisno od informacione snabdevenosti razlikujemo informaciono–nedovoljne, informaciono–dovoljne i informaciono–prepunjene NK. Prema nivou adaptacije razlikujemo stacionarne, autopodesive, autoorganizujuće i autoeduktivne. Prvi se odlikuju konstantnom strukturom i parametrima, koji se ne menjaju u zavisnosti od uslova leta režima navigacije. Autopodesivi samostalno menjaju sopstvene parametre radi povećanja efektivnosti navigacionih merenja, autoorganizujući osim parametara mogu da menjaju strukturu, sastav aparata i veze među podsistemima, oспособljavajući na taj način NK u potpunosti za uslove leta. Autoedukativni, osim samoorganizacije, akumuliraju prethodna iskustva i obradjuju ih i preko korelacionih veza donose rešenja o izmeni i poboljšanjima i parametara i strukture.

Prema vezi kompleksa i čoveka–operatora razlikujemo automatske, ergonomske i telemetrijske NK sisteme. Ovaj poslednji sadrži sistem direktne i povratne veze sa nazemnim i drugim komandnim i kontrolnim tačkama i upravljačkim stanicama.

Prema metodi obrade (i prijema) informacije razlikujemo analogne, digitalne i kombinovane NK. Prema karakteru eksploatacije NK se dele na sisteme sa nazemnim, poluautomatskim i automatskim opsluživanjem.

Pri svemu tome ne smemo izgubiti iz vida da su principi rada navigacionih kompleksa zasnovani na modelovanju kretanja letilice, u odnosu na navigacioni sistem, pod dejstvom ukupnosti sila: sile teže, otpora atmosfere i sl. To znači da sastav davača (i senzora) primarnih informacija, sistema veza, računskih resursa i cela struktura kompleksa moraju da **reprodukuju** zakone dinamike u kretanju letilice kao krutog tela, a takođe i kinematike u odnosu na **repere** na Zamlji, u vazdušnom omotaču i u kosmičkom prostoru.

З А К Л Ј У Ч А К



Zaključak

§ 1. Zaključak. Ako pažljivo pogledamo sadržaj ovog rada videćemo da je okosnica izlaganja na mehanicističkim osnovama. Razlog je jasan, mada nije i sasvim eksplicitan. U paragrafima o pravcima razvoja i nivou tehničkih i tehnoloških promena (Glava I, paragraf 17; Glava IV, Paragrafi 12 i 13) pokazano je da mehaničke komponente i dinamika žiroskopskih sistema i dalje predstavljaju njihovu osnovu, ali se sve više može govoriti o matematičkom modelu ili matematičkoj realizaciji takvih sistema.

Možemo već sada govoriti da **inercijalna navigacija**, kao potpuna i samostalna tehnika, postepeno nestaje, ali **integrisani navigacioni sistemi i kompleksi**, sa višestrukim ulazima i sve kvalitetnijom sofisticacijom, koja se i dalje veoma brzo razvija, zahtevaju na ulazu **inercijalne podatke** kao važan ingredijent. U tom smislu je i naša analiza, data u ovom radu, deo neophodnog fundamentalnog znanja na koje se oslanja razvoj modernih i inercijalnih i neinercijalnih navigacionih sistema.

Radi ilustracije spomenućemo potpuni publicitet žiroskopskih efekata posredstvom Mikro Elektronskih Mehaničkih Sistema (MEMS) koji se ugrađuju i u najbezazlenije proizvode potrebne za svakodnevne ljudske aktivnosti: automobili, mobilni telefoni, plovila, palm-top kompjuteri i sl.

Sa stanovišta kontrole i nadzora svemirskih letilica, očuvanja njihovih projektovanih orbitalnih performansi i parametara, izučavanje dinamike žiroskopskih sistema ne samo da nije izgubilo na značaju, nego je pokrenulo i niz paralelnih istraživanja. Spomenućemo samo procese integracije informacija sa lokalnih satelitskih sistema stabilizacije i upravljanja sa podacima sa GPS-a, posebno u zoni efekativnog dejstva GPS-a. Analogija za interplanetarne letove i letilice već se materijalizuje u integraciji inercijalnih informacija sa NTP klijent-server podacima uz primenu najsavremenije komunikacione tehnike i laserskog prenosa informacija.

Pri tome ne smemo izgubiti iz vida da nekada veoma neugodan problem propagacije grešaka u ponovljenim navigacionim određivanjima položaja i brzine veštačkog nebeskog objekta, posebno zbog nedostataka mehaničkih komponenti, danas ima dva veoma interesantna i komparativno jednako prihvaljiva rešenja: ili multipliciranje inercijalnih ulaza (senzora) i njihova kombinacija sa akcelerometarskim

sistemima uz značajno smanjenje dimenzija uređaja kao celine ili multipliciranje kompenzacionih mogućnosti kako navigacionih platformi kao celine, tako i nezavisnih sistema poput GPS-a, radiointerferometara i sl.

U svakom slučaju, pravljenje odgovarajućih modela zahteva dalju razradu i teorije grešaka mehaničkih i elektronskih komponenti i optimizaciju dimenzija u skladu sa zahtevima koji se za satelite, tj. veštačka nebeska tela postavljaju pre lansiranja, za vreme aktivnog i pasivnog leta i u vreme pred kraj njihovog životnog veka.

Cilj nije bio da damo iscrpne analize svakog pojedinačnog problema, već da koristimo tipične primere da bi čitalac dobio osećaj za važnost raznih problema koje treba rešiti kako bi se postigao zadati nivo tačnosti kontrole u projektovanju i nadzoru kretanja satelita.

Pri tome smo nastojali da dinamiku žiroskopskih sistema izložimo u takvom vidu da se jasno vidi sprega sa potrebama stabilizacije kosmičkih letilica i sa problemima žiroskopskih efekata koji se javljaju i kod prirodnih i kod veštačkih nebeskih tela u uslovima delovanja određenih sila.

LITERATURA:

1. Anđelić, Tatomir, *Uvod u astrodinamiku*, Matematički institut, Beograd 1983
2. Anđelić, Tatomir; Stojanović, Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika Beograd 1965
3. Rašković, D., *Mehanika III dinamika*, Naučna knjiga, Beograd 1956
4. William, Tyrrel, Thomson, *Introduction to Space Dynamics*, Dover publications 1986
5. М.И.Батъ; Г.Ю.Джанелидзе; А.С.Кельзон, *Теоретическая механика*, Москва 1975
6. Milanković, Milutin, *Nebeska mehanika*, Beograd 1935
7. Blitzer; L.M.Weisfield and D.Wheelon, *Perturbation of a Satellite Orbit due to the Earth's Oblateness*, J.Appl. Physics 27, 1956
8. King-Hele; D.G. and D.M.C.Walker, *Methods for Predicting the Orbits of Near Earth-Satellites*, J.Interplanetary soc.,17, 1959
9. Augenstein, B.W., *Dynamics Problems Associated with Satellite Orbit Control*, Trans.ASME, 1959
10. Frye, E., *Fundamentals of Inertial Guidance and Navigation*, J. Astronaut.Sci, 1958
11. Mitsutomi, T., *Characteristics and Stabilization of an Inertial Platform*, Trans.IRE, 1958

E – KNJIGE:

1. George M. Siouris, *Missile Guidance and Control Systems*, New York 2004
2. Jay A.Farrell & Matthew Barth, *The Global Positioning System & Inertial Navigation*, New York 1999
3. David A.Vallado; Wayne D.McClain, *Fundamentals of astrodynamics and applications*, USA 2001
4. Marcel J.Sidi, *Spacecraft Dynamics and control*, Cambridge 1997

KORISNI LINKOVI:

1. Butikov, Eugene, Simulations in Physics, *Free rotation of an axially symmetrical body*, <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/Precession.html> (18.9.2009.)
2. Beal, Robert, M., *Derivation of the equations of gyroscopic motions*, <http://www.gyroscopes.org/math2.asp> (18.9.2009.)
3. Tong, David, *The motions of rigid bodies*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics/three.pdf> (18.9.2009.)
4. Perepelitsa, Dennis, *The sleeping top*, <http://web.mit.edu/dvp/www/Work/6.946/dvp-6.946-pset7.pdf> (18.9.2009.)
5. Solutions for sleeping and sliding top, http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph106a/106a_soln5_07.pdf (18.9.2009.)
6. Braeunig, *Orbital mechanics – basic of space flight*, <http://www.braeunig.us/space/orbmech.htm> (18.9.2009.)
7. A.D.King, *Inertial Navigation – forty years of navigation*, http://www.imar-navigation.de/download/inertial_navigation_introduction.pdf (18.9.2009.)