Математички факултет
Београд

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И ГЕОМЕТРИЈА

- магистарски рад -

Ментор:
проф. Миодраг Матељевић

Кандидат:
Слађана Бабић

јун 2009.

Садржај

I. 1. Комплексна раван, геометријска интерпретација сабирања комплексних бројева и множења комплексног броја реалним скаларом

<u>*Дефиниција 1.1*</u> Формално поље комплексних бројева, са ознаком $\mathbb{C}$, дефинишемо као скуп уређених парова реалних бројева са једнакошћу $(x,y)=(u,v)$ акко је $x=u$ и $y=v$ и операцијама сабирања: $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$ и множења $(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv, xv+yu)$.

Да овако дефинисана алгебарска структура $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ задовољава аксиоме поља директно се проверава.

Неутрални елемент у односу на сабирање је $0=(0,0)$, у односу на множење је $1=(1,0)$ и издвајамо елемент $(0,1)$ који ћемо називати имагинарна јединица и обележавати са i.

Показује се да се сваки комплексан број $z=(x,y)$ може на јединствен начин представити у облику $z=x+iy$, при чему реалан број x називамо реалним делом комплексног броја z и означавамо са $\mathrm{Re}z$, а реалан број y називамо имагинарним делом комплексног броја z и означавамо са $\mathrm{Im}z$. Овако представљање комплексног броја назива се алгебарски облик комплексног броја.

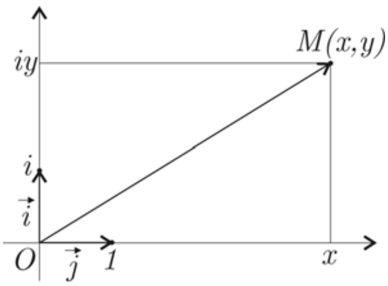
Дефиниција скупа $\mathbb{C}$ као скупа $\mathbb{R}^2$ свих уређених парова реалних бројева омогућује нам геометријско поимање комплексних бројева. Ради формалне дефиниције посматраћемо скуп P свих тачака дате равни Π са уведеним координатним системом xOy. Посматрајмо бијективну функцију $\varphi:\mathbb{C}\to P$, задату са $\varphi(z)=M(x,y)$.

<u>*Дефиниција 1.2*</u> Тачку M са Декартовским координатама (x,y) ћемо називати геометријском сликом комплексног броја $z=(x,y)$ (или $z=x+iy$ у алгебарском облику).

Комплексан број $z=x+iy$ називаћемо комплексном координатом тачке $M(x,y)$. Употребљаваћемо ознаку $M(z)$ да назначимо да је комплексна координата тачке M комплексан број z. (У даљем тексту ће комплексна координата најчешће бити означена одговарајућим малим словом.)

Скуп свих тачака равни Π које идентификујемо са комплексним бројевима називамо комплексном равни, или Гаусовом комплексном равни, пошто је Гаус својом репутацијом омогућио шире прихватање овакве интерпретације скупа комплексних бројева.

Пошто се скуп реалних бројева при оваквој идентификацији пресликава на x-осу њу називамо реалном осом, а скуп чисто имагинарних комплексних бројева (за које је $\mathrm{Re}z=0$) се пресликава на y-осу, па је зато називамо имагинарном осом.



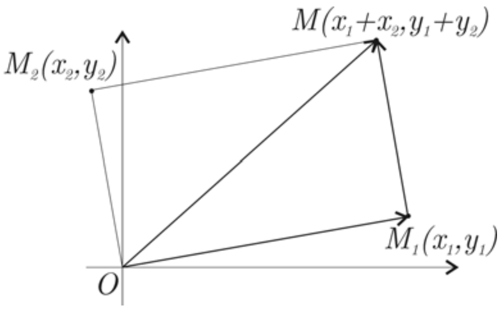
Комплексан број $z=(x,y)$ $(z=x+iy)$ можемо видети и као вектор чија је почетна тачка координатни почетак O а крајња тачка управо геометријска слика тачке z, $M(z)$. Дакле при овој идентификацији броју $z=(x,y)$ одговара вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{z}$, где је M тачка $M(x,y)$. Уколико са $\vec{j}$ и $\vec{i}$ означимо јединичне векторе x-осе и y-осе, пошто су Декартове координате тачке M управо x и y имамо да је $\vec{z}=\overrightarrow{OM}=x\vec{j}+y\vec{i}$.

(Ознака $\vec{i}$ за јединични вектор y-осе се слаже са чињеницом да је то вектор који одговара комплексном броју $z=i$, ознака $\vec{j}$ треба да асоцира да је то вектор који одговара (реалној) јединици).

Посматрајући операцију сабирања комплексних бројева и сабирање вектора видимо да је $z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, док је код вектора $\overrightarrow{z_1}+\overrightarrow{z_2}=(x_1\vec{j}+y_1\vec{i})+(x_2\vec{j}+y_2\vec{i})=(x_1+x_2)\vec{j}+(y_1+y_2)\vec{i}$. Дакле збиру комплексних бројева z_1+z_2 одговара вектор $\overrightarrow{z_1}+\overrightarrow{z_2}$. Ако наведену коресподенцију „додељивања вектора комплексном броју z" означимо са $\vec{z}$ имаћемо $\overrightarrow{z_1+z_2}=\overrightarrow{z_1}+\overrightarrow{z_2}$. Слично важи и за множење комплексног броја реалним скаларем α, тј. биће: $\alpha z_1=\alpha(x_1,y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1)$. А за векторе:

$\alpha\vec{z_1} = \alpha(x_1\vec{j} + y_1\vec{i}) = \alpha x_1\vec{j} + \alpha y_1\vec{i}$. Дакле важи $\overrightarrow{\alpha z_1} = \alpha\vec{z_1}$. Одавде следи да је коресподенција између скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$ и вектора са почетком у *0* не само узајамно једнозначна, већ је и изоморфизам.

Из ове чињенице следи и геометријска интерпретација сабирања комплексних бројева: ако комплексне бројеве z_1 и z_2 посматрамо као векторе $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$ онда њиховом збиру z_1+z_2 одговара вектор $\vec{z_1}+\vec{z_2}$ који се добија из вектора $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$ уобичајеним правилом паралелограма.



Нека тачке M_1 и M_2 имају комплексне координате $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ и нека тачка M има комплексну координату $z=z_1+z_2$ тада је вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x_1+x_2-x_1)\vec{j} + (y_1+y_2-y_1)\vec{i} = x_2\vec{j} + y_2\vec{i} = \vec{z_2}$. Одавде следи да се тачка и M добија транслацијом тачке M_1 за вектор $\vec{z_2}$. Дакле додавање комплексног броја z_2 комплексном броју z_1, чија је геометријска слика M_1 можемо схватити и као транслацију тачке M_1 за вектор $\vec{z_2}$ (тј. вектор $\overrightarrow{OM_2}$, где је $M_2(z_2)$).

Ако је $z=x+iy$ комплексан број, комплексан број $\bar{z} = x - iy$ се назива коњугованим комплексним бројем који одговара датом броју z и означава са $\bar{z}$. Геометријске слике комплексних бројева z и $\bar{z}$ су узајамно симетричне у односу на реалну осу, па коњуговање компликсног броја можемо схватити и као симетрију у односу на реалну осу. Важи $z=\bar{z}$ акко је $z \in \mathbb{R}$, такође је $z=-\bar{z}$ акко $z \in i\mathbb{R}$.

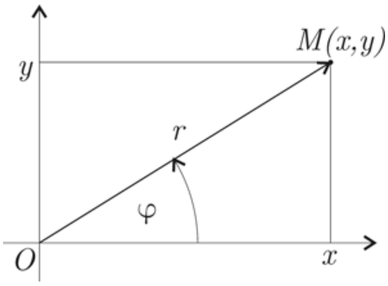
Модул комплексног броја $z=x+iy$ је реалан, ненегативан број $\sqrt{x^2+y^2}$ и означава се са $|z|$. Еуклидско растојање тачака $O(0)$ и $M(x+iy)$ је $r = OM = \sqrt{x^2+y^2}$, па имамо да је $|z| = r = OM$. Значи модул комплексног броја z је једнак растојању тачака O и $M(z)$, што је у ствари интензитет придруженог вектора $\vec{z} = \overrightarrow{OM}$.

Већ је споменуто да постоји бијекција између скупа тачака комплексне равни и скупа комплексних бројева. Уколико тачкама (комплексне) равни доделимо Декартове правоугле координате добијамо алгебарски облик комплексног броја. Уколико им доделимо поларне координате доћи ћемо до тригонометријског (или тригонометријско-експоненцијалног) облика комплексног броја.

Тачка M комплексне равни, која је различита од O, је одређена растојањем r од координатног почетка и величином позитивно оријентисаног угла између позитивног дела реалне осе и вектора $\overrightarrow{OM}$. Уколико величину овог угла φ посматрамо у интервалу $[0,2\pi)$ зваћемо је главном вредношћу аргумента комплексног броја z који одговара тачки M и обележавати са arg$z$ (дакле $\varphi=\arg z$). (Уместо интервала $[0,2\pi)$ често се узима и интервал $(-\pi,\pi]$ и нека то буде друга главна вредност аргумента.)

Координатном почетку O додељујемо растојање $r=0$, а аргумент му не дефинишемо.

Између скупа $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и равни са поларним координатним системом $(0,\infty)\times[0,2\pi)$ постоји бијекција. Уколико останемо на елементарном нивоу и не бавимо се питањима дефинисања тригонометријских функција, можемо извести везу између Декартовог и поларног координатног система користећи као познате основне особине функција синуса и косинуса, дакле $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, одавде имамо поларни или тригонометријски облик комплексног броја $z = x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r=|z|$, $\varphi = \arg z$.



Пошто је $tg\varphi = \frac{y}{x}$ у I квадранту је $\varphi = arctg\frac{y}{x}$ у II и III квадранту је $\varphi = arctg\frac{y}{x} + \pi$ и у IV квадранту је $\varphi = arctg\frac{y}{x} + 2\pi$, при чему је главна вредност аргумента φ у интервалу $[0,2\pi)$.

Уколико величину угла између позитивног дела реалне осе и вектора $\overrightarrow{OM}$ не ограничавамо на интервал $[0,2\pi)$ (или $(-\pi,\pi]$ или неки други полуотворени интервал дужине 2π) добијамо пребројив скуп вредности који означавамо са Arg$z$ (при чему је z комплексна координата тачке M). Ако је $\varphi = \arg z$ имамо да је $Argz = \{\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Узимајући у обзир знамениту Ојлерову формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in [0,2\pi)$, долазимо до експоненцијалног облика комплексног броја $z = re^{i\varphi},\ r = |z|,\ \varphi = argz$.

Ако је λ реалан број биће $|\lambda\vec{z}| = |\lambda||\vec{z}|$, за $\lambda>0$ вектор $\lambda\vec{z}$ је истог смера као и $\vec{z}$, а интензитет му је $|\lambda||\vec{z}|$. За $\lambda<0$ вектор $\lambda\vec{z}$ је супротног смера од $\vec{z}$. Ако са $\mathcal{H}_{O,\lambda}$ означимо хомотетију са центром у O и коефицијентом λ (која свакој тачки A додељује тачку A' такву да је вектор $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$) имамо да је множење реалним скаларом λ у ствари хомотетија са центром у O и коефицијентом λ.

I. 2. Геометријски смисао множења комплексних бројева

Ако су z_1 и z_2 комплексни бројеви тада је $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ и $arg(z_1 z_2) =_{2\pi} \arg z_1 + \arg z_2$ (или $Arg(z_1 z_2) = A\text{rg}\, z_1 + A\text{rg}\, z_2$).

Ово тврђење се може извести уколико се користи тригонометријски облик комплексног броја $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, и адиционе формуле $\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$, $\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$.

Међутим саме адиционе формуле имају своју тежину, што одузима елементарност овом доказу. Испоставља се да се адиционе формуле могу доказати коришћењем чињенице да је $R_{O,\alpha}(z) = ze^{i\alpha}$ (ротација око нуле за угао α) изометрија и чињенице да је дужина лука адитивна функција. (Ово је доследно спроведено у одељку „Комплексни бројеви и елементарна геометрија“ књиге „Комплексне функције“, професора М. Матељевића.)

Множење комплексним бројем $v = |v|e^{i\theta}$ можемо схватити и као композицију једне ротације за угао θ (са центром у $O(0)$) и једне хомотетије са коефицијентом $|v|$ и центром у $O(0)$.

Нека је $v_0 = \dfrac{v}{|v|} = e^{i\theta}$, производ комплексног броја $z = |z|e^{i\varphi}$ и v_0 је комплексан број чији је модуо једнак $|z|\left|\dfrac{v}{|v|}\right| = |z|$, а аргумент му је једнак $(\theta+\varphi)(mod 2\pi)$, дакле то је ротација за угао θ. Пошто је $v = |v|v_0$, а множење комплексног броја са $|v|$ је хомотетија са коефицијентом $|v|$ (и центром у $O(0)$) имамо наведени закључак. (При чему редослед ротације и хомотетије није битан.)

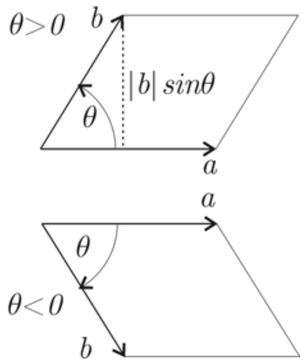
I. 3. Веза скаларaног и векторског производа вектора са множењем комплексних бројева

Један од уобичајених начина да се уведе скаларни производ комплексних бројева a и b (схватамо их као векторе) је да кажемо да је скаларни производ вектора a и b једнак $(a,b) = \operatorname{Re}\overline{a}b$.

Тада се доказује особина да је $(a,b) = |a||b|\cos\theta$ где је θ угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

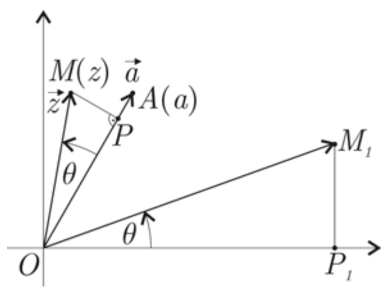
Међутим као дефиницију скаларног производа можемо узети и ову особину (што се често и чини на елементарнијим курсевима математике) дакле рећи да је скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\vec{a}\bullet\vec{b} = |a||b|\cos\theta$ па доказати да заиста важи да је тако дефинисан скаларни производ $\vec{a}\bullet\vec{b} = \operatorname{Re}\overline{a}b$. Оно што је овде важно је да се тај доказ ослања (само) на особине множења комплексних бројева.

Такође је елементарни метод увођења векторског производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ознака $\vec{a}\times\vec{b}$) је да кажемо да је то вектор једнак по интензитету површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ док је он сам нормалан на раван вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и усмерен тако да је систем вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ позитивно оријентисан. Пошто су сви вектори комплексне равни баш у њој, оно што ће разликовати векторски производ комплексних бројева један од другог је његов интензитет и позитивно или негативно усмерење (док је правац увек нормалан на комплексну раван).



Зато је ради дефиниције векторског производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ довољно увести оријентисану површину паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ћемо посматрати као оријентисани конвексан угао у интервалу $(-\pi,\pi]$ и његов знак доделити површини паралелограма над векторима a и b. Тако дефинисана оријентисана површина паралелограма може играти улогу векторског производа комплексних бројева (вектора) a и b. Због непарности функције *sin* имамо да важи $\vec{a}\otimes\vec{b} = |a||b|\sin\theta$ (где ће $\vec{a}\otimes\vec{b}$ бити ознака за овако дефинисан векторски производ), као и $\vec{a}\otimes\vec{b} = -\vec{b}\otimes\vec{a}$.

Да би доказали да из дефиниције $\vec{a}\bullet\vec{b} = |a||b|\cos\theta$ следи особина $\vec{a}\bullet\vec{b} = \operatorname{Re}\overline{a}b$ посматрајмо пресликавање $\psi:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ задато са $\psi(z) = \overline{a}\cdot z$. Ако је $a = |a|e^{i\alpha}$ биће $\overline{a} = |a|e^{-i\alpha}$ па је ψ композиција једне ротације за угао -α и једне хомотетије са центром у O и коефицијентом $|a|$.

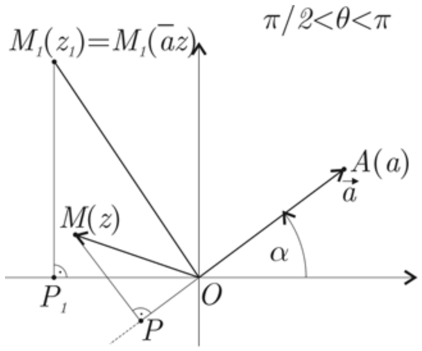


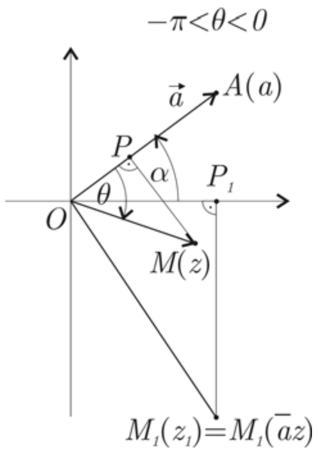
Нека је M геометријска слика тачке z, P њена пројекција на вектор $\vec{a}$. Ако је $z = |z|e^{i\varphi}$ при чему $\varphi,\alpha\in(-\pi,\pi]$ биће $\theta = \varphi-\alpha$ угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{z}$ (тј. вредност оријентисаног угла). Пошто је ψ композиција ротације за угао -α и хомотетије са центром у O и коефицијентом $|a|$, ψ слика троугао OPM у троугао OP_1M_1, где је M_1 геометријска слика тачке $\overline{a}z$, а P_1 њена пројекција на x-осу. При том је $OP_1 = |a|OP = |a||z|\cos\theta$ и $M_1P_1 = |a|MP = |a||z|\sin\theta$.

Дакле $\vec{a}\bullet\vec{z} = \operatorname{Re}\overline{a}z$ и $\vec{a}\otimes\vec{z} = \operatorname{Im}\overline{a}z$. Ово се може извести и аналитички:

$\psi(z)=\overline{a}z=|a|e^{-i\alpha}|z|e^{i\varphi}=|a||z|e^{i(\varphi-\alpha)}=|a||z|e^{i\theta}=|a||z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ одакле следи да је $|a||z|\cos\theta=\operatorname{Re}\overline{a}z;\quad |a||z|\sin\theta=\operatorname{Im}\overline{a}z$.

У литератури се среће још једна дефиниција комплексног производа комплексних бројева. У ознаци $a\times b$, та дефиниција је $a\times b=\frac{1}{2}(\overline{a}b-a\overline{b})$. Пошто је $\frac{1}{2}(\overline{a}b-a\overline{b})=\frac{1}{2}(\overline{a}b-\overline{\overline{a}b})=i\operatorname{Im}\overline{a}b$ имамо да важи релација $a\times b=i\vec{a}\otimes\vec{b}$.





Коментар Овај (геометријски) доказ зависи од међусобног положаја вектора $\vec{a}$ и $\vec{z}$. Међутим пошто почива на чињеници да се пресликавање $\varphi(z)=\overline{a}z$ може схватити као композиција ротације око O за угао $-\alpha=-\arg a$ и хомотетије са коефицијентом $|a|$ и у осталим случајевима важи слично разматрање, с тим што у случају $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ (као и $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$) дуж OP посматрамо као пројекцију вектора $\vec{z}$ на вектор $\vec{a}$ те јој додељујемо негативну вредност. Заправо је $pr_{\vec{a}}(\vec{z})=-|OP|=|OM|\cos\theta=|z|\cos\theta$. Слично је и $pr_{\vec{j}}(\overrightarrow{z_1})=pr_{\vec{j}}(\overline{a}z)=-|OP_1|$, па је $pr_{\vec{j}}(\overrightarrow{z_1})=|a|\,pr_{\vec{a}}(\vec{z})=|a|(|z|\cos\theta)$. Јасно је да је $\operatorname{Re}z_1=pr_{\vec{j}}(\overrightarrow{z_1})$, чиме је оправдана тврдња $\operatorname{Re}\overline{a}z=a\cdot z$.

Да би друга једнакост важила потребно је дуж MP сматрати позитивном ако је угао θ позитиван, а негативном ако је θ негативан. Тако да у случају $-\pi<\theta<0$ имамо $M_1P_1=|a|MP=-|a||MP|=|a||OM|\sin\theta=|a||z|\sin\theta$.

I. 4. Особине модула и њихова геометријска интерпретација

Основне особине модула које следе директно из дефиниције су:

1. $z\overline{z} = |z|^2$,
2. $|z| = |\overline{z}|$,
3. $|z| = 0$ акко $z = 0$,
4. $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$.

Следеће три једнакости имају битан геометријски смисао:

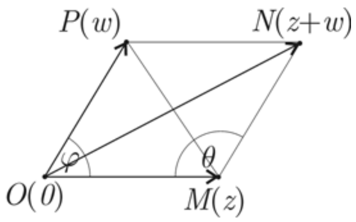
(I) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,

(II) $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,

(III) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

I следи из $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$. Слично се доказује и II, III следи сабирањем I и II.

Пошто је $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = \vec{z} \bullet \vec{w} = |z||w|\cos\measuredangle(\vec{z}, \vec{w})$ видимо да су I и II искази косинусне теореме.



Нека су $z, w \in \mathbb{C}$ и $M(z)$, $P(w)$ и $N(z+w)$, $OMNP$ је паралелограм. Пошто је $\cos\theta = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ из троугла OMN имамо:

$$|z+w|^2 = |z|^2 - 2|z||w|\cos\theta + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w|\cos\varphi + |w|^2 =$$
$$= |z|^2 + \vec{z} \bullet \vec{w} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Дакле формула I се слаже са уобичајеним исказом косинусне теореме, док је то за II очигледно (из троугла OMP јер је $\overrightarrow{MP} = w - z$).

Формула III је правило паралелограма: сума квадрата дужина ивица паралелограма једнака је суми квадрата дијагонала.

Докажимо сада неједнакост троугла: Ако су a, b, c комплексни бројеви тада важи $|a-c| \le |a-b| + |b-c|$. $(\triangle)$

Стављајући $z=a-b$ и $w=b-c$ преостаје да се докаже $|z+w| \le |z| + |w|$. $(*)$

Због $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \le |z\overline{w}| = |z||w|$ имамо да из I следи $|z+w|^2 \le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$.

Пошто је модуо ненегативан број из ове неједнакости следи (*).

Једнакост у неједнакости (*) важи када је $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w|$ тј. када је $|z||w|\cos\theta = |z||w|$, где је θ угао између вектора $\vec{z}$ и $\vec{w}$, па је $\cos\theta = 1$, одакле је угао θ=0. Значи да је $\arg z = \arg w$, па су вектори $\vec{z}$ и $\vec{w}$ истог правца и смера, што се алгебарски може изразити условом $z = \lambda w$, $\lambda > 0$.

Из неједнакости (*) следи неједнакост $\big||z| - |w|\big| \le |z-w|$. $(**)$

У неједнакости (**) једнакост важи акко је $|z-w|^2 = (|z| - |w|)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (z-w)(\overline{z} - \overline{w}) = |z|^2 - 2|z||w| + |w|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w|$, па као у претходном случају закључујемо да је $\arg z = \arg w$.

Ако у (**) уместо w ставимо - w добијамо $\left||z|-|w|\right| \leq |z+w|$. $(***)$

У последњој неједнакости једнакост важи акко је угао између вектора $\vec{z}$ и $-\vec{w}$ једнак 0 тј. угао између вектора $\vec{z}$ и $\vec{w}$ је једнак π. Другим речима вектори $\vec{z}$ и $\vec{w}$ су истог правца а супротних смерова, што се може изразити са $z = \lambda w$, $\lambda < 0$.

Обједињавајући (*) и (***) добијамо $\left||z|-|w|\right| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$. Узимајући да је $z = a-b, w = b-c$, као и у доказу неједнакости $(\triangle)$ имамо да је $\left||a-b|-|b-c|\right| \leq |a-c| \leq |a-b|+|b-c|$. $(\triangle_1)$

Узимајући да су *a, b, c* комплексне координате тачака *A, B, C,* редом, добијамо $|AB-BC| \leq AC \leq AB+BC,$ што је позната геометријска неједнакост која тврди да је свака страница троугла мања од збира остале две странице, а већа од њихове разлике.

Из претходног следи да једнакост у десној неједнакости $(\triangle_1)$ вреди акко је $a-b = \lambda(b-c),\quad \lambda > 0.$ Записујући ову једнакост преко вектора имамо $\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{CB}, \lambda > 0,$ одакле следи да је тачка *B* између тачака *A* и *C* (при чему релацију између узимамо као интуитивно јасну). Другим речима $AC = AB+BC$ акко су тачке *A, B* и *C* колинеарне и тачка *B* је између тачака *A* и *C.* Пошто је овде у питању еквиваленција можемо увести следећу дефиницију.

Дефиниција 4.1 Нека су *A* и *C* две различите тачке са комплексним координатама *a* и *c*. Рећи ћемо да је тачка *M(z)* између тачака *A* и *C* ако $z \neq a$, $z \neq c$ и важи следећа релација $|a-c| = |a-z|+|z-c|$.

Употребљаваћемо ознаку *A-M-C*.

Разматрајући једнакост у левој страни неједнакости $(\triangle_1)$ добијамо (због $\vec{z} = \overrightarrow{BA}, \vec{w} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{CB}, \lambda < 0$) две могућности 1) тачка *C* је између тачака *A* и *B* и 2) тачка *A* је између тачака *B* и *C*, што је последица чињенице да (због модула) лева страна неједнакости $(\triangle_1)$ садржи практично две неједнакости.

I. 5. Дуж и дељење дужи у датом односу

Да би дефинисали дуж користићемо већ дефинисану релацију „између“.

<u>*Дефиниција 5.1*</u> Скуп тачака $\{M\colon A\text{-}M\text{-}B\}$ који ћемо означавати (AB) или само AB, називаћемо отвореном дужи са крајевима у тачкама A и B.

<u>*Тврђење 5.1*</u> Тачка $M\in(AB)$, где је $M(z)$, $A(a)$, $B(b)$, акко је испуњен неки од следећа два услова:

1. постоји позитиван реалан број k такав да је $z-a=k(b-z)$,
2. постоји реалан број $t\in(0,1)$ такав да је $z=(1-t)a+tb$.

$M\in(AB)$ акко је $A\text{-}M\text{-}B$ акко је $|a-b|=|a-z|+|z-b|$ (*).

Када је било речи о томе када важи једнакост у неједнакости троугла речено је да (*) важи акко је $z-a=k(b-z)$, $k>0$.

Доказујемо да су 1. и 2. еквивалентни. $z-a=k(b-z), k\in\mathbb{R}^{+}\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{1+k}a+\dfrac{k}{1+k}b$, стављајући $t=\dfrac{k}{1+k}$ имамо да $t\in(0,1)$ и $z=(1-t)a+tb$. С друге стране из $t=\dfrac{k}{1+k}$ имамо $k=\dfrac{t}{1-t}$ где $t\in(0,1)$ па је $k>0$. □

<u>*Дефиниција 5.2*</u> Нека су $A(a)$, $B(b)$ две различите тачке и нека је $M(z)$ тачка праве AB. Кажемо да тачка M дели дуж AB у односу $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ако важи следећа релација $\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=k$.

<u>*Тврђење 5.2*</u> Комплексна координата z тачке M, која дели дуж AB (где је $A(a)$, $B(b)$) у односу k, је дата са $z=\dfrac{a+kb}{1+k},\quad k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}\Rightarrow z-a=k(b-z)\Rightarrow z=\frac{a+kb}{1+k}.\ \square$$

Приметимо да важи распоред $A\text{-}M\text{-}B$ ако је $k\in\mathbb{R}^{+}$, распоред $A\text{-}B\text{-}M$ ако $k\in(-\infty,-1)$ и распоред $M\text{-}A\text{-}B$ ако је $k\in(-1,0)$.

За $k=1$ добијамо координату средишта дужи AB дату са $z_S=\dfrac{a+b}{2}$.

<u>*Пример 5.1*</u> Доказати да се тежишне дужи троугла секу у тачки T која сваку од њих дели у односу 2:1 (гледајући од одговарајућег темена).

Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи BC, AC, AB редом. Све комплексне координате ће бити означаване одговарајућим малим словима. Тада је $c_1=\dfrac{a+b}{2}, a_1=\dfrac{c+b}{2}, b_1=\dfrac{a+c}{2}$. Нека је T тачка за коју је $\overrightarrow{AT}:\overrightarrow{TA_1}=2:1$, тада је $t=\dfrac{a+2a_1}{1+2}=\dfrac{a+b+c}{3}$. Проверавамо $\overrightarrow{BT}:\overrightarrow{TB_1}=2:1$.

$$\overrightarrow{BT}:\overrightarrow{TB_1}=(t-b):(b_1-t)=\left(\frac{a+b+c}{3}-b\right):\left(\frac{a+c}{2}-\frac{a+b+c}{3}\right)=\frac{a+c-2b}{3}:\frac{a+c-2b}{6}=2:1.$$

Слично се проверава да је $\overrightarrow{CT}:\overrightarrow{TC_1}=2:1$. ◇

<u>*Пример 5.2*</u> Нека је дат четвороугао $ABCD$ и нека су M, N, P, Q, K, L средишта AB, BC, CD, DA, BD, CA. Доказати да се MP, NQ, KL секу у једној тачки T која сваку од њих полови.

Све комплексне координате ће бити означаване одговарајућим малим словима. $m=\frac{a+b}{2}$, $n=\frac{b+c}{2}$, $p=\frac{c+d}{2}$, $q=\frac{a+d}{2}$, $k=\frac{b+d}{2}$, $l=\frac{a+c}{2}$, нека је T средиште дужи MP, тада је $t=\frac{a+b+c+d}{4}$. Ако је T_1 средиште дужи NQ тада је $t_1=\frac{a+b+c+d}{4}$, значи тачке T_1 и T се поклапају. Ако је T_2 средиште дужи KL, тада је $t_2=\frac{a+b+c+d}{4}$ па се и тачке T_2 и T поклапају. ◇

<u>*Пример 5.3*</u> Нека је дат четвороугао $ABCD$ и нека су T_a, T_b, T_c, T_d тежишта троуглова BCD, ACD, BAD, ABC, редом. Доказати да се дужи AT_a, BT_b, CT_c, DT_d секу у једној тачки T која сваку од њих дели у односу 3:1 гледајући од темена четвороугла.

Имамо да је $t_a=\frac{b+c+d}{3}, t_b=\frac{a+c+d}{3}, t_c=\frac{a+b+d}{3}, t_d=\frac{a+b+c}{3}$. Нека је T тачка која дуж AT_a дели у односу 3:1 гледајући од темена A, тј. $\overrightarrow{AT}:\overrightarrow{TT_a}=3:1$ па је $t=\frac{a+3t_a}{4}=\frac{a+b+c+d}{4}$. Показујемо да T дели и остале дужи у истом односу. $\overrightarrow{BT}=t-b=\frac{a+c+d-3b}{4}, \overrightarrow{TT_b}=t_b-t=\frac{a+c+d-3b}{12}$. Дакле $\overrightarrow{BT}:\overrightarrow{TT_b}=3:1$. Слично се показује и за дужи CT_c, DT_d. ◇

Тачку T из претходног примера називамо тежиштем четвороугла. (Приметимо да се тачка T може дефинисати и преко примера 5.2.) Пример 5.3 нам указује како да дефинишемо тежиште петоугла: формирамо дужи које спајају теме петоугла са тежиштем четвороугла формираног од остала четири темена датог петоугла; тако добијених пет дужи се секу у једној тачки коју ћемо назвати тежиштем петоугла. Ако су темена петоугла дата са $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ и $E(e)$ биће координата његовог тежишта дата са $t=\frac{a+b+c+d+e}{5}$. На сличан начин се дефинише тежиште n-тоугла.

<u>*Пример 5.4*</u> Четвороугао $ABCD$ је конвексан, а тачке T_a, T_b, T_c, T_d тежишта троуглова BCD, ACD, BAD, ABC, редом. Доказати да се средње линије четвороуглова $ABCD$ и $T_aT_bT_cT_d$ секу у истој тачки.

Узимајући у обзир закључке из претходна два примера видимо да је довољно доказати да се тежишта четвороуглова $ABCD$ и $T_aT_bT_cT_d$ поклапају (јер се, по примеру 5.2 средње линије четвороугла секу у његовом тежишту).

Имамо да је $t_a=\frac{b+c+d}{3}, t_b=\frac{a+c+d}{3}, t_c=\frac{a+b+d}{3}, t_d=\frac{a+b+c}{3}$. Нека је T_1 тежиште четвороугла $T_aT_bT_cT_d$, тада је $t_1=\frac{\frac{a+b+c}{3}+\frac{b+c+d}{3}+\frac{b+d+a}{3}+\frac{c+d+a}{3}}{4}=\frac{a+b+c+d}{4}$. Ако са T обележимо тежиште четвороугла $ABCD$ биће $t=\frac{a+b+c+d}{4}$, па се тачке T и T_1 поклапају. ◇

I. 6. Мера угла

Претпоставимо као познату чињеницу да се раван може оријентисати, тј. да се око сваке фиксиране тачке равни може изабрати један од два постојећа смера који ће се назвати позитивним. Најчешће се узима да је позитивни смер супротан кретању казаљке часовника. На тај начин се сваком углу могу придружити два оријентисана угла, један позитивно оријентисан, а други негативно оријентисан.

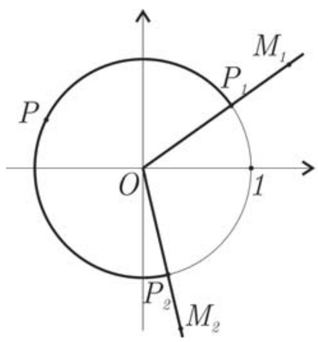
Сматраћемо да је угао $\measuredangle M_1OM_2$ позитивно оријентисан ако "крећући се од полуправе OM_1 ка полуправој OM_2 идемо у смеру супротном од казаљке часовника". Мера позитивно оријентисаног угла је величина угла (мерена у радијанима) са предзнаком +, док је мера негативно оријентисаног угла једнака његовој величини са предзнаком -.

Ако хоћемо да прецизирамо ову, прилично интуитивно објашњену, дефиницију можемо поступити на следећи начин:

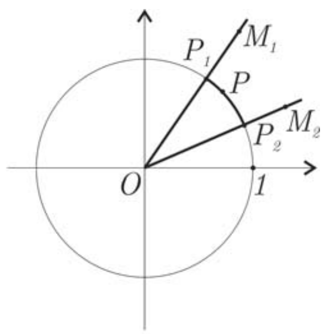
<u>*Дефиниција 6.1*</u> Нека су z_1 и z_2 комплексне координате тачака M_1 и M_2, редом. Нека је $w_1 = \frac{z_1}{|z_1|}$ и $w_2 = \frac{z_2}{|z_2|}$ и $w_1 = e^{i\alpha}$. Тада постоји јединствено β такво да је $w_2 = e^{i\beta}$ и $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Нека је P произвољна тачка отвореног лука $\widehat{P_1P_2}$ која припада унутрашњости угла $\measuredangle M_1OM_2$ при чему су P_1 и P_2 геометријске слике тачака w_1 и w_2 редом. Тада постоји јединствено γ које припада $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ такво да је $w = e^{i\gamma}$, при чему је w комплексна координата тачке P. Уколико је $\alpha < \gamma < \beta$ рећи ћемо да је $\measuredangle M_1OM_2$ позитивно оријентисан и његова мера је једнака $\varphi = \beta - \alpha$. Уколико је $\alpha < \beta < \gamma$ рећи ћемо да је $\measuredangle M_1OM_2$ негативно оријентисан и његова мера је једнака $\varphi = \beta - \alpha - 2\pi$.

Приметимо да ова дефиниција допушта позитивно оријентисане углове у интервалу $[0, 2\pi)$ и негативно оријентисане углове у интервалу $[-2\pi, 0)$, дакле нема вишеструког "обилажења" око нуле.

Ознака за меру оријентисаног угла $\measuredangle M_1OM_2$ је $\measuredangle \overline{M_1OM_2} = \varphi$.



пример позитивно оријентисаног угла



пример негативно оријентисаног угла

<u>*Тврђење 6.1*</u> Мера позитивно оријентисаног угла $\measuredangle M_1OM_2$ је једнака $\arg\frac{z_2}{z_1}$ (где је $\arg w$ прва главна вредност аргумента).

Нека су z_1 и z_2 комплексне координате тачака M_1 и M_2 и нека је $z_1 = |z_1| e^{i\alpha}$ и $z_2 = |z_2| e^{i\beta}$, при чему је β тако изабрано да је $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$. По наведеној дефиницији је мера позитивно оријентисаног угла $\measuredangle M_1OM_2$ једнака $\varphi = \beta - \alpha$. Сада имамо

$$\arg\frac{z_2}{z_1} = \arg\frac{|z_2|e^{i\beta}}{|z_1|e^{i\alpha}} = \arg\frac{|z_2|}{|z_1|}e^{i(\beta-\alpha)},$$

пошто је $\beta \in [\alpha, \alpha+2\pi)$, биће $\beta - \alpha \in [0, 2\pi)$ па важи $\arg\frac{z_2}{z_1} = \beta - \alpha$. □

<u>*Тврђење 6.2*</u> Посматрајмо три различите тачке $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$ и $M_3(z_3)$. Мера позитивно оријентисаног угла $\measuredangle M_2M_1M_3$ је $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

Транслацијом за вектор $-z_1$ тачке M_1, M_2, M_3 се преводе у тачке M_1', M_2', M_3' са комплексним координатама 0, z_2-z_1, z_3-z_1. Осим тога $\measuredangle M_2M_1M_3 = \measuredangle M_2'OM_3'$, док је $\overline{\measuredangle M_2'OM_3'} = \arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$, по претходном тврђењу. □

<u>*Пример 6.1*</u> Збир углова у троуглу је π.

Нека су темена троугла ABC дата са $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Тада је

$$\overline{\measuredangle CBA} = \arg\frac{a-b}{c-b}, \overline{\measuredangle BAC} = \arg\frac{c-a}{b-a}, \overline{\measuredangle ACB} = \arg\frac{b-c}{a-c}.$$

$$\overline{\measuredangle CBA} + \overline{\measuredangle BAC} + \overline{\measuredangle ACB} = \arg\frac{a-b}{c-b} + \arg\frac{c-a}{b-a} + \arg\frac{b-c}{a-c} =_{2\pi}$$

$$=_{2\pi} \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{c-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(-1) = \pi.$$

Пошто је сваки од углова троугла строго мањи од π, то је њихов збир строго мањи од 3π (и позитиван), па једнакост по модулу 2π можемо заменити обичном једнакошћу. ◇

<u>*Пример 6.2*</u> Периферијски угао је једна половина централног угла који одговара истом луку.

Посматраћемо лук $\overset{\frown}{AB}$, можемо претпоставити да је $A(r)$ и $B(re^{i\varphi})$, при чему је $r > 0$ и $\varphi \in (0, \pi)$. Тада је $\overline{\measuredangle AOB} = \varphi$. Нека је $M(re^{i\theta}), r > 0, \theta \in (\varphi, 2\pi)$ тачка комплемента лука AB, тада је $\overline{\measuredangle AMB} = \arg\frac{re^{i\varphi} - re^{i\theta}}{r - re^{i\theta}} = \arg\frac{e^{i\varphi} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$. Пошто је $1 - e^{i\theta} = -2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$ биће $\frac{e^{i\varphi} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{i(\theta-\frac{\varphi}{2})})}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\left(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2})} - e^{i(\frac{\varphi}{2}-\frac{\theta}{2})}\right) = e^{i\frac{\varphi}{2}}\frac{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$. Одавде следи да је $\arg\frac{e^{i\varphi} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\varphi}{2}$, тј. $\overline{\measuredangle AMB} = \frac{1}{2}\overline{\measuredangle AOB}$. ◇

<u>*Тврђење 6.3*</u> Посматрајмо четири различите тачке $M_i(z_i)$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Мера оријентисаног угла између оријентисаних правих M_1M_3 и M_2M_4 је $\arg\frac{z_4-z_2}{z_3-z_1}$.

Оријентисани угао између оријентисаних правих M_1M_3 и M_2M_4 је позитивно оријентисани угао за који треба ротирати вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$ да би се поклопио по правцу и смеру са вектором $\overrightarrow{M_2M_4}$.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$ транслирамо за $-\overrightarrow{z_1}$, тада ће се тачка M_1 пресликати у O, а тачка M_3 у тачку P са комплексном координатом z_3-z_1. Вектор $\overrightarrow{M_2M_4}$ транслирамо за $-\overrightarrow{z_2}$, тада ће се тачка M_2 пресликати у O, а тачка M_4 у тачку Q са комплексном координатом z_4-z_2. Угао између оријентисаних правих M_1M_3 и M_2M_4 је у ствари угао између вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_2M_4}$. Због наведених транслација биће $\measuredangle(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}) = \measuredangle POQ$. По тврђењу 6.1 је $\measuredangle\overline{POQ} = \arg\dfrac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$. □

I. 7. Права, полуправа, услов ортогоналности двеју правих

<u>*Тврђење 7.1*</u> Тачке $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ и $M_3(z_3)$ су колинеарне акко је $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbb{R}^*$ $(\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Тачке M_1, M_2 и M_3 су колинеарне акко је угао $\measuredangle\overline{M_2M_1M_3}\in\{0,\pi\}$. Пошто је $\measuredangle\overline{M_2M_1M_3}=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ имамо да $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\{0,\pi\}\Leftrightarrow\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbb{R}^*$. □

<u>*Последица 7.1*</u> Тачка $M(z)$ припада правој M_1M_2 где је $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$, акко је $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbb{R}^*$. □

Услов $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbb{R}^*$ се може написати у облику $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}$ тј $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$, одакле се, после унакрсног множења добија $\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)z-\left(z_1-z_2\right)\overline{z}+\left(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2\right)=0$.

Ако ставимо $B=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ и $C=z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=2i\cdot\mathrm{Im}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$ имамо да је $Bz-\overline{B}\cdot\overline{z}+C=0,\quad B\in\mathbb{C}, C\in i\cdot\mathbb{R}$, општи облик једначине праве. Стављајући $b=B\cdot i$ и $c=C\cdot i$ имамо да је $b\cdot z+\overline{b}\cdot\overline{z}+c=0,\quad b\in\mathbb{C}, c\in\mathbb{R}$ такође општи облик једначине праве.

Пошто из $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$ следи $\begin{vmatrix} z-z_1 & \overline{z}-\overline{z_1} \\ z_2-z_1 & \overline{z_2}-\overline{z_1}\end{vmatrix}=0$ то ова детерминанта представља још један еквивалентан начин да се изрази припадност тачке $M(z)$ правој M_1M_2, где је $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$.

Стављајући $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t\in\mathbb{R}$ имамо $z=(1-t)\cdot z_1+t\cdot z_2,\quad t\in\mathbb{R}$ што је још један начин да се зада једначина праве која пролази кроз тачке $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$.

<u>*Пример 7.1*</u> Нека је дат троугао *ABC*. Нека су K и H тачке страница *AB* и *AC*, редом, такве да је $AK=\frac{1}{p}AB$ и $AH=\frac{1}{p+1}AC$. Доказати да, без обзира на вредност $p, p\in\mathbb{R}$, праве *KH* пролазе кроз једну тачку.

Нека је $A(0)$, $B(b)$, $C(c)$, $K(k)$, $H(h)$, тада је $k=\frac{b}{p}$ и $h=\frac{c}{p+1}$. Тачке $M(z)$ праве *KH* задовољавају услов $\frac{z-k}{h-k}=t\in\mathbb{R}$, одакле следи да је $z=\frac{1}{p}\left(b+\frac{t}{p+1}\left((c-b)p-b\right)\right)$. Стављајући $t=p+1$ добијамо $z=c-b$, одакле следи да свака права *KH* садржи тачку $X(c-b)$. Пошто је $\overrightarrow{AX}=c-b-0=c-b=\overrightarrow{BC}$, имамо да је X тачка таква да је *ABCX* паралелограм. ◇

<u>*Последица 7.2*</u> Тачка M(z) припада полуправој (*AB* (са почетком у тачки *A*) акко је $\frac{z-a}{b-a}\in\mathbb{R}^+$, где је $A(a)$, $B(b)$.

M припада (*AB* акко је $\measuredangle\overline{BAM}=0\Leftrightarrow\arg\frac{z-a}{b-a}=0\Leftrightarrow\frac{z-a}{b-a}\in\mathbb{R}^+$. □

Стављајући $\frac{z-a}{b-a}=t,\quad t\in\mathbb{R}^+$ имамо $z=\left(1-t\right)\cdot a+t\cdot b,\quad t\in\mathbb{R}^+$, што је други начин да се изрази припадност тачке полуправој.

Користећи особину аргумента: $\arg\frac{z}{w} =_{2\pi} \arg z - \arg w$, имамо да је

$0 = \arg\frac{z-a}{b-a} =_{2\pi} \arg(z-a) - \arg(b-a) \Leftrightarrow \arg(b-a) =_{2\pi} \arg(z-a)$, међутим како $\arg(b-a) \in [0, 2\pi)$ као и $\arg(z-a) \in [0, 2\pi)$ имамо да је $\arg(b-a) = \arg(z-a)$. Стављајући да је $\varphi = \arg(b-a)$ имамо да је $z - a = |z-a| e^{i\arg(z-a)} = |z-a| e^{i\varphi}$, ако ставимо $t = |z-a| \in \mathbb{R}^+$ биће $z = a + te^{i\varphi}$, $t \in \mathbb{R}^+$, где је $\varphi \in [0, 2\pi)$ константа. Ово је параметарски облик једначине полуправе која има почетак у тачки $A(a)$ и заклапа угао φ са реалном осом.

<u>*Тврђење 7.2*</u> Праве M_1M_2 и M_3M_4 су ортогоналне акко је $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*$.

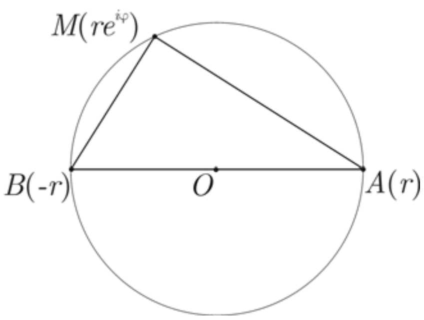
(При чему је $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ и $M_4(z_4)$.)

Праве M_1M_2 и M_3M_4 су ортогоналне акко је:

$$\measuredangle\overline{\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right)} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \arg\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in i \cdot \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i \cdot \mathbb{R}^*. \square$$

<u>*Последица 7.3*</u> Ако је $M_2 = M_4$ у претходном тврђењу тада су праве M_1M_2 и M_3M_2 ортогоналне акко је $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \in i\mathbb{R}^*$. □

<u>*Пример 7.2*</u> Угао над пречником је прав.



Нека је $A(r)$, $B(-r)$ и $M(re^{i\varphi})$, $\varphi \in (0, \pi)$.

$$\frac{r - re^{i\varphi}}{-r - re^{i\varphi}} = \frac{1 - e^{i\varphi}}{-1 - e^{i\varphi}} = \frac{1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)}{-1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{-2i\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)} = i \cdot tg\frac{\varphi}{2}$$

(овде смо користили адиционе формуле за синус и косинус двоструког угла). По последици 7.3 $\measuredangle\overline{BMA}$ је прав. ◇

<u>*Тврђење 7.3*</u> Посматрајмо праве l_1 и l_2 задате једначинама: $\begin{matrix} l_1 : b_1 z + \overline{b_1 z} + c_1 = 0 \\ l_2 : b_2 z + \overline{b_2 z} + c_2 = 0 \end{matrix}$ где је $b_1, b_2 \in \mathbb{C}^*$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Праве l_1 и l_2 су:

1) паралелне акко је $\frac{\overline{b_1}}{b_1} = \frac{\overline{b_2}}{b_2}$,

2) секу се акко је $\frac{\overline{b_1}}{b_1} \neq \frac{\overline{b_2}}{b_2}$,

3) ортогоналне акко је $\frac{\overline{b_1}}{b_1} + \frac{\overline{b_2}}{b_2} = 0$.

Нека су $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ различите тачке праве l_1 такве да је $z_1 - z_2 = \overline{b_1}\, i$ и $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ различите тачке праве l_2 такве да је $z_3 - z_4 = \overline{b_2}\, i$. Такве тачке се могу изабрати, M_1 и M_3 су произвољне а M_2 и M_4 су одређене горњим условом.

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_3M_4}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{\overline{b_1}\, i}{\overline{b_2}\, i} = \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{b_2} = \overline{\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{b_1}}{b_1} = \dfrac{\overline{b_2}}{b_2}.$

2) Праве l_1 и l_2 се секу акко нису паралелне (и не поклапају се), дакле акко $\dfrac{\overline{b_1}}{b_1} \neq \dfrac{\overline{b_2}}{b_2}$.

3) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{\overline{b_1}\, i}{\overline{b_2}\, i} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{b_2} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow -\dfrac{b_1}{b_2} = \overline{\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{b_1}}{b_1} = -\dfrac{\overline{b_2}}{b_2} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{b_1}}{b_1} + \dfrac{\overline{b_2}}{b_2} = 0.$ □

<u>*Тврђење 7.4*</u> Нека је дата права $l: b\,z + \overline{b\,z} + c = 0, \quad b \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{R}$ и тачка $M_0(z_0)$. Једначина праве p која садржи тачку M_0 и паралелна је правој l гласи: $p: z - z_0 = -\dfrac{\overline{b}}{b}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right)$.

Нека су $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ две различите тачке праве l такве да је $z_1 - z_2 = \overline{b}\, i$ и $M(z)$ произвољна тачка праве p, различита од M_0. Тада је $p \parallel l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_0}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(z_2 - z_1\right) = \lambda\left(z_0 - z\right) \Leftrightarrow \dfrac{z_2 - z_1}{z_0 - z} = \lambda \in \mathbb{R}^*$, дакле

$$\frac{z_1 - z_2}{z - z_0} = \frac{\overline{b}\, i}{z - z_0} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{\overline{b} i}{z - z_0} = \frac{-bi}{\overline{z} - \overline{z_0}} \Leftrightarrow z - z_0 = -\frac{\overline{b}}{b}\left(\overline{z} - \overline{z}_0\right). \ \square$$

<u>*Тврђење 7.5*</u> Нека је дата права $l: b\,z + \overline{b\,z} + c = 0, \quad b \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{R}$ и тачка $M_0(z_0)$. Једначина праве n која садржи тачку M_0 и нормална је на правој l гласи: $n: z - z_0 = \dfrac{\overline{b}}{b}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right)$.

Као и раније нека су $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ две различите тачке праве l такве да је $z_1 - z_2 = \overline{b}\, i$ и $M(z)\in n$ је произвољна тачка праве n различита од M_0. Тада је $n \perp l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{MM_0} \Leftrightarrow \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_2} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{z - z_0}{\overline{b}\, i} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{z - z_0}{\overline{b} i} = -\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{-bi} \Leftrightarrow z - z_0 = \dfrac{\overline{b}}{b}\left(\overline{z} - \overline{z}_0\right).$ □

<u>*Тврђење 7.6*</u> Нека је дата права $l: b\,z + \overline{b\,z} + c = 0, \quad b \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{R}$ и тачка $M_0(z_0)$. Подножје нормале n из тачке M_0 на праву l има комплексну координату $z = \dfrac{bz_0 - \overline{b z}_0 - c}{2b}$.

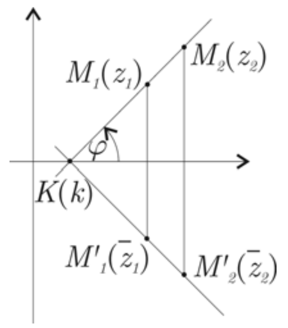
Нека је тачка P подножје нормале n из тачке M_0 на праву l, њена комплексна координата z је решење система: $\begin{cases} bz + \overline{bz} + c = 0 \\ b\left(z - z_0\right) = \overline{b}\left(\overline{z} - \overline{z}_0\right) \end{cases}$. Из прве једначине имамо $\overline{z} = \dfrac{-bz - c}{\overline{b}}$, када то уврстимо у другу једначину имамо $z = \dfrac{bz_0 - \overline{b z}_0 - c}{2b}$. □

<u>*Тврђење 7.7*</u> Растојање тачке $M_0(z_0)$ од праве $l: b\,z + \overline{b\,z} + c = 0, \quad b \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{R}$ је једнако $d\left(M_0, l\right) = \left|\dfrac{bz_0 + \overline{b z}_0 + c}{2b}\right|$.

Користећи резултат и ознаке претходне теореме имамо да је

$$d\left(M_0,l\right)=d\left(M_0,P\right)=\left|z_0-z\right|=\left|z_0-\frac{bz_0-\overline{b}\overline{z_0}-c}{2b}\right|=\left|\frac{bz_0+\overline{b}\overline{z_0}+c}{2b}\right|. \square$$

Посматрајмо праву $l: b\,z+\overline{b}\,\overline{z}+c\ =0,\quad b\in\mathbb{C}^*, c\in\mathbb{R}$ и њене две различите тачке $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ такве да је $z_1-z_2=\overline{b}\,i$, тада је $\frac{z_1-z_2}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}=\frac{\overline{b}i}{b(-i)}=-\frac{\overline{b}}{b}$. Ако са φ обележимо угао

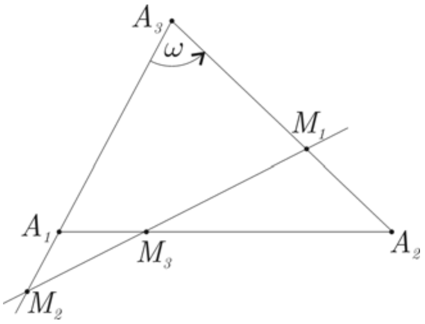


који заклапа права l са позитивним делом реалне осе, а са К(k) тачку пресека праве l и реалне осе имаћемо $\begin{aligned} z_1&=k+r_1e^{i\varphi}, & r_1&=\left|z_1-k\right|=KM_1 \\ z_2&=k+r_2e^{i\varphi}, & r_2&=\left|z_2-k\right|=KM_2\end{aligned}$, приметимо да смо овде претпоставили да је распоред K-M_1-M_2 или K-M_2-M_1, међутим та претпоставка не умањује општост, јер се тачке M_1 и M_2 могу изабрати тако да важи један од наведених распореда. Сада је:

$$\frac{z_1-z_2}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}=\frac{\left(r_1-r_2\right)e^{i\varphi}}{\left(r_1-r_2\right)e^{-i\varphi}}=e^{2i\varphi}, \text{ дакле важи } -\frac{\overline{b}}{b}=e^{2i\varphi}, \text{ тј.}$$

$\varphi=\frac{1}{2}\arg\left(-\frac{\overline{b}}{b}\right)$. Величина $m_l=-\frac{\overline{b}}{b}$ се назива комплексним угаоним коефицијентом праве l и карактерише њен нагиб у односу на реалну осу.

<u>*Пример 7.3 (Менелајева теорема)*</u> Нека је дат троугао $A_1A_2A_3$ и тачке M_1, M_2, M_3 на правама A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2, редом. Тачке M_1, M_2, M_3 су колинеарне акко је $\frac{\overrightarrow{A_1M_3}}{\overrightarrow{M_3A_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_2M_1}}{\overrightarrow{M_1A_3}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_3M_2}}{\overrightarrow{M_2A_1}}=-1$.



Нека је $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_3)$, $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $M_3(m_3)$ и $\frac{\overrightarrow{A_2M_1}}{\overrightarrow{M_1A_3}}=\lambda_1,\ \frac{\overrightarrow{A_3M_2}}{\overrightarrow{M_2A_1}}=\lambda_2,\ \frac{\overrightarrow{A_1M_3}}{\overrightarrow{M_3A_2}}=\lambda_3, \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$. Тада је $m_3=\frac{a_1+\lambda_3a_2}{1+\lambda_3},\quad m_2=\frac{a_3+\lambda_2a_1}{1+\lambda_2},\quad m_1=\frac{a_2+\lambda_1a_3}{1+\lambda_1}\quad (*)$. Тачке M_1, M_2, M_3 су колинеарне акко $\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}\in\mathbb{R}^*$. Коришћењем (*) добијамо да је $\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}=\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_3}\cdot\frac{a_1-a_2+\lambda_1\left(a_1-a_3\right)+\lambda_1\lambda_3\left(a_2-a_3\right)}{a_3-a_2+\lambda_2\left(a_1-a_2\right)+\lambda_1\lambda_2\left(a_1-a_3\right)}\quad (**)$.

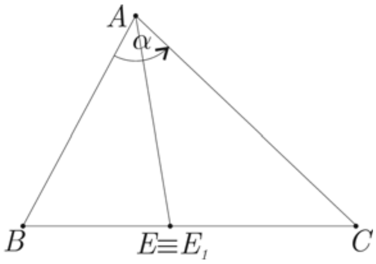
$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-1\Rightarrow\lambda_3=-\frac{1}{\lambda_1\cdot\lambda_2}$, заменом $\lambda_3=-\frac{1}{\lambda_1\cdot\lambda_2}$ у формулу (**) добијамо $\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}=\frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2-1}\in\mathbb{R}^*$, значи да су тачке M_1, M_2, M_3 колинеарне.

Ако су M_1, M_2, M_3 колинеарне тада $\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}=\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_3}\cdot\frac{a_1-a_2+\lambda_1\left(a_1-a_3\right)+\lambda_1\lambda_3\left(a_2-a_3\right)}{a_3-a_2+\lambda_2\left(a_1-a_2\right)+\lambda_1\lambda_2\left(a_1-a_3\right)}\in\mathbb{R}^*$, пошто је $a_1-a_2=\left(a_1-a_3\right)-\left(a_2-a_3\right)$

биће $\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}=\frac{\left(1+\lambda_1\right)\left(a_1-a_3\right)+\left(\lambda_1\lambda_3-1\right)\left(a_2-a_3\right)}{\lambda_2\left(1+\lambda_1\right)\left(a_1-a_3\right)-\left(1+\lambda_2\right)\left(a_2-a_3\right)}=\frac{\left(1+\lambda_1\right)+\left(\lambda_1\lambda_3-1\right)\frac{\left(a_2-a_3\right)}{\left(a_1-a_3\right)}}{\lambda_2\left(1+\lambda_1\right)-\left(1+\lambda_2\right)\frac{\left(a_2-a_3\right)}{\left(a_1-a_3\right)}}\in\mathbb{R}^*.$

Пошто је $\arg\dfrac{a_2-a_3}{a_1-a_3}=\measuredangle A_1A_3A_2=\omega,\quad 0<\omega<\pi,$ биће $w=\dfrac{a_2-a_3}{a_1-a_3}=\left|\dfrac{a_2-a_3}{a_1-a_3}\right|e^{i\omega}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$ тј $\dfrac{(1+\lambda_1)+(\lambda_1\lambda_3-1)w}{\lambda_2(1+\lambda_1)-(1+\lambda_2)w}\in\mathbb{R}^*\Rightarrow\dfrac{(1+\lambda_1)+(\lambda_1\lambda_3-1)w}{\lambda_2(1+\lambda_1)-(1+\lambda_2)w}=\dfrac{(1+\lambda_1)+(\lambda_1\lambda_3-1)\overline{w}}{\lambda_2(1+\lambda_1)-(1+\lambda_2)\overline{w}}.$ Трансформисањем последњег израза добија се: $(1+\lambda_1)\big(\lambda_2(\lambda_1\lambda_3-1)+(1+\lambda_2)\big)(w-\overline{w})=0$, пошто је $\lambda_1\neq-1,\quad w\neq\overline{w}$, јер $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, имамо да је $\lambda_2(\lambda_1\lambda_3-1)+(1+\lambda_2)=0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$. ◇

Пример 7.4 Нека је дат троугао *ABC* и нека симетрала угла код темена *A* сече наспрамну страницу у тачки *E*. Тада је $BE:EC=AB:AC$.



Нека је $E_1(e_1)$ тачка странице *BC* таква да је

$$BE_1:E_1C=AB:AC=|b-a|:|c-a|\Rightarrow e_1=\frac{|c-a|b+|b-a|c}{|c-a|+|b-a|}.$$

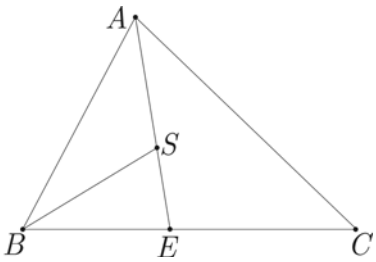
$$\measuredangle BAE_1=\arg\frac{e_1-a}{b-a}=\arg\frac{\dfrac{|c-a|b+|b-a|c}{|c-a|+|b-a|}-a}{b-a}=$$

$=\arg\dfrac{(b-a)|c-a|+(c-a)|b-a|}{(b-a)(|c-a|+|b-a|)}=\arg\dfrac{|c-a|+\dfrac{c-a}{b-a}|b-a|}{|c-a|+|b-a|}$. Пошто је $\measuredangle BAC=\arg\dfrac{c-a}{b-a}=\alpha$ биће

$$\frac{|c-a|+\dfrac{c-a}{b-a}|b-a|}{|c-a|+|b-a|}=\frac{|c-a|+\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|e^{i\alpha}|b-a|}{|c-a|+|b-a|}=\frac{|c-a|\left(1+e^{i\alpha}\right)}{|c-a|+|b-a|}=\frac{2|c-a|\cos\dfrac{\alpha}{2}}{|c-a|+|b-a|}e^{i\frac{\alpha}{2}},$$ дакле

$\measuredangle BAE_1=\dfrac{\alpha}{2}$. Одавде је $\measuredangle E_1AC=\measuredangle BAC-\measuredangle BAE_1=\dfrac{\alpha}{2}$. Дакле тачке *E* и E_1 се поклапају, тј. тачка *E* задовољава дати однос. ◇

Пример 7.5 Израчунати координате центра уписаног круга троугла *ABC*.



Нека је *E(e)* тачка у којој симетрала угла код темена *A* сече страницу *BC*, а *S(s)* центар уписаног круга. Тада је $e=\dfrac{|c-a|b+|b-a|c}{|c-a|+|b-a|}$. У троуглу *ABE* је $AS:SE=AB:BE$. Пошто је

$$BE=|e-b|=\left|\frac{|c-a|b+|b-a|c}{|c-a|+|b-a|}-b\right|==\frac{|b-a||c-b|}{|b-a|+|c-a|},$$

биће $AS:SE=|b-a|:\dfrac{|b-a||c-b|}{|b-a|+|c-a|}=\dfrac{|b-a|+|c-a|}{|c-b|}$. Дакле

$$s=\frac{a+\dfrac{|b-a|+|c-a|}{|c-b|}e}{1+\dfrac{|b-a|+|c-a|}{|c-b|}}=\frac{a|c-b|+b|c-a|+c|b-a|}{|c-b|+|c-a|+|b-a|}.\ ◇$$

I. 8. Услов припадности четири тачке кружници

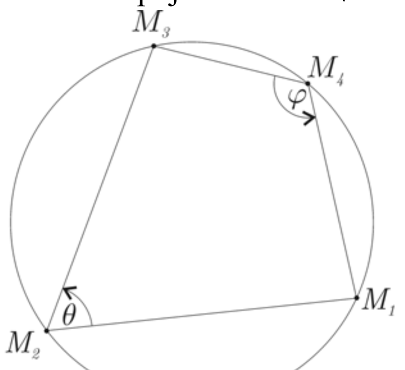
Тврђење 8.1 Различите тачке $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ су колинеарне или припадају истој кружници акко је $k=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\in\mathbb{R}^*$.

Елегантан доказ овог тврђења ће се моћи извести када буде речи о билинеарној функцији. Доказ који следи служи за илустрацију примене аргумента, тачније правила:

$\arg(zw)=_{2\pi}\arg z+\arg w$ (које следи из $\operatorname{Arg}(zw)=\operatorname{Arg}z+\operatorname{Arg}w$).

Ако су дате тачке колинеарне биће $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\in\mathbb{R}^*$, па и $k\in\mathbb{R}^*$.

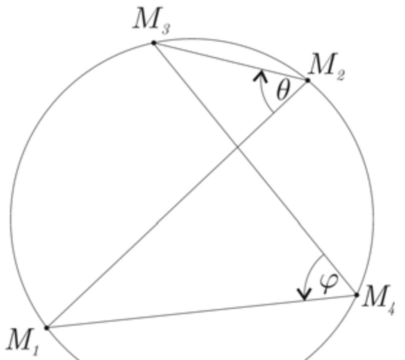
Четири концикличне тачке се на шест начина могу распоредити на кружници. Овде ћемо показати три карактеристична случаја. У овом доказу ће $\measuredangle\overline{ABC}$ означавати меру позитивно оријентисаног $\measuredangle ABC$.



Нека је $\measuredangle M_1M_2M_3=\theta$, $\measuredangle M_3M_4M_1=\varphi$ (овде се ради о оријентисаним угловима). Ако су тачке M_1, M_2, M_3, M_4 на кружници тада је четвороугао $M_1M_2M_3M_4$ тетиван, уколико је распоред M_4,M_3,M_2,M_1 гледајући у позитивном смеру биће $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=\theta+\varphi=\pi$.

$$\theta=\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2},\quad \varphi=\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=\arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4},$$

$\arg\left(\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)=_{2\pi}\arg\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}=\pi$. Пошто $\arg w\in[0,2\pi)$ биће $\arg\left(\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)=\pi$. Одавде је $k=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\in\mathbb{R}^*$.



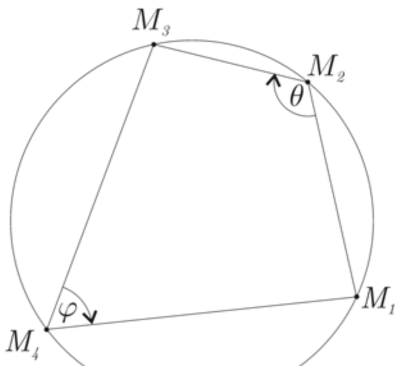
У случају да је распоред M_1,M_4,M_2,M_3 гледајући у позитивном смеру биће $\varphi+\theta=0$, јер је угао φ позитивно оријентисан, а θ негативан $\varphi=\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}$,

$$\theta=\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}-2\pi\Rightarrow\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}+\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}=2\pi.$$

$$\left(\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=\arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4},\quad\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\arg k=\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)=_{2\pi}\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}=_{2\pi}0$$

$$\Rightarrow\arg k=0\Rightarrow k\in\mathbb{R}^*.$$



У случају да је распоред M_1,M_2,M_3,M_4 гледајући у позитивном смеру биће $\varphi+\theta=-\pi$, јер су оба угла φ и θ негативно оријентисана. Сада је:

$$\theta=\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}-2\pi,\quad\varphi=\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}-2\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=3\pi.$$

Одакле следи $\arg k=\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)=_{2\pi}\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}=_{2\pi}3\pi=_{2\pi}\pi\Rightarrow$

$$\Rightarrow\arg k=\pi\Rightarrow k\in\mathbb{R}^*.$$

Остала три случаја су слична претходном.

Да би доказали другу страну еквиваленције приметимо да:

$$k\in\mathbb{R}^*\Rightarrow\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)\in\{0,\pi\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}=_{2\pi}0\ \vee\ \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}=_{2\pi}\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=_{2\pi}0\ \vee\ \measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=_{2\pi}\pi.$$

Пошто је $0+0=0$, $\pi+\pi=2\pi$, $0+\pi=\pi$, $\pi+0=\pi$, имамо да колинеарност тачака M_1,M_2,M_3 уз претходни услов повлачи колинеарност тачака M_3,M_4,M_1, тј. следи да су све четири тачке M_1,M_2,M_3,M_4 колинеарне. У случају да $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}\notin\{0,\pi\}$ и $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}\notin\{0,\pi\}$ имамо да је:

1. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=2\pi$ или
2. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=\pi$ или
3. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=3\pi$.

Претпоставимо да је $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}=\theta$ и нека је l кружница која садржи тачке M_1,M_2,M_3 .

1. Пошто је (позизивно оријентисани) $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=2\pi-\theta$ и
   $\measuredangle\overline{M_1M_4M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=2\pi$, биће
   $\measuredangle\overline{M_1M_4M_3}=2\pi-\measuredangle\overline{M_3M_4M_1}=2\pi-(2\pi-\theta)=\theta=\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}$, а тиме и M_4 припада l .

Приметимо да у овом случају добијамо четири од шест могућих распореда четири тачке на кружници. То су (читано у позитивном смеру) M_1,M_3,M_4,M_2; M_1,M_4,M_2,M_3; $M_1,M_3,M_2,,M_4$; M_1,M_2,M_4,M_3. Слично закључујемо да и у преостала два случаја M_4 припада l. Притом је у случају 2. распоред тачака M_1,M_4,M_3,M_2, док је у трећем случају распоред тачака M_1,M_2,M_3,M_4 (читано у позитивном смеру). □

<u>*Дефиниција 8.1*</u> Број k називамо двосразмером тачака M_1,M_2,M_3,M_4 и обележавамо са $\mathrm{D}(M_1,M_2,M_3,M_4)$.

Директно из дефиниције двосразмере закључујемо да је $\mathrm{D}(M_1,M_2,M_3,M_4)=$ $=\mathrm{D}(M_3,M_4,M_1,M_2)=\mathrm{D}(M_2,M_1,M_4,M_3)$.

<u>*Пример 8.1*</u> Четвороугао $ABCD$ је тетиван, а тачке T_a, T_b, T_c, T_d тежишта троуглова BCD, ACD, BAD, ABC, редом. Доказати да је четвороугао $T_aT_bT_cT_d$ такође тетиван.

Имамо да је $t_a=\frac{b+c+d}{3}, t_b=\frac{a+c+d}{3}, t_c=\frac{a+b+d}{3}, t_d=\frac{a+b+c}{3}$.

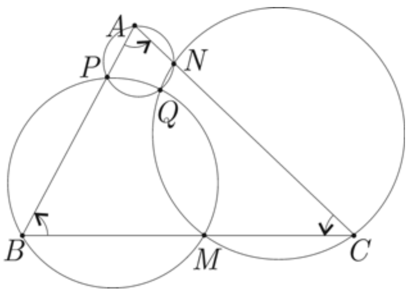
$$\mathrm{D}(T_a,\ T_b,\ T_c,\ T_d)=\frac{t_c-t_b}{t_a-t_b}\cdot\frac{t_a-t_d}{t_c-t_d}=\frac{\frac{b-c}{3}}{\frac{b-a}{3}}\cdot\frac{\frac{d-a}{3}}{\frac{d-c}{3}}=\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}=\mathrm{D(A,\ B,\ C,\ D)}$$. Пошто је четвороугао $ABCD$ тетиван биће $\mathrm{D(A,\ B,\ C,\ D)}\in\mathbb{R}^*$, због претходне једнакости и $\mathrm{D}(T_a,\ T_b,\ T_c,\ T_d)\in\mathbb{R}^*$, а тиме је и $T_aT_bT_cT_d$ тетиван.

<u>*Пример 8.2*</u> Дат је троугао ABC, на страницама AB, AC, BC дате су тачке P, N, M. Доказати да се кружнице описане око троуглова APN, BMP и CMN секу у једној тачки.

Комплексне координате свих тачака биће обележене одговарајућим малим словима.

Мада је геометријско решење задатка неупоредиво једноставније, ради илустрације методе наводимо следеће решење.

Нека је Q пресечна тачка кружница описаних око троуглова APN и BMP. Тачке A, P, Q, N су на једној кружници па је $D(A,P,Q,N)=\frac{q-p}{a-p}\cdot\frac{a-n}{q-n}\in\mathbb{R}^*$. Тачке B, M, Q, P су на једној кружници па је $D(B,M,Q,P)=\frac{q-m}{b-m}\cdot\frac{b-p}{q-p}\in\mathbb{R}^*$. Множећи претходне двосразмере добијамо $\frac{q-m}{q-n}\cdot\frac{a-n}{a-p}\cdot\frac{b-p}{b-m}\in\mathbb{R}^*$, одакле је $\frac{q-m}{q-n}\cdot\frac{n-c}{m-c}\cdot\frac{m-c}{n-c}\cdot\frac{n-a}{p-a}\cdot\frac{p-b}{m-b}\in\mathbb{R}^*$. Сада имамо:

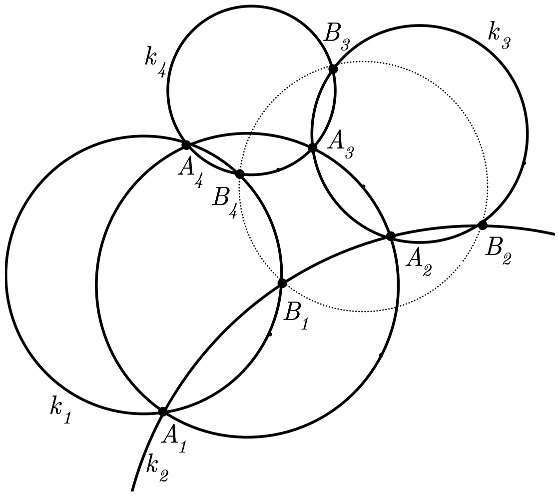


$$\arg\left(\frac{m-c}{n-c}\cdot\frac{n-a}{p-a}\cdot\frac{p-b}{m-b}\right)=_{2\pi}\arg\frac{m-c}{n-c}+$$
$$+\arg\frac{n-a}{p-a}+\arg\frac{p-b}{m-b}=\measuredangle\overline{NCM}+\measuredangle\overline{PAN}+\measuredangle\overline{MBP}=$$
$$=\measuredangle\overline{ACB}+\measuredangle\overline{BAC}+\measuredangle\overline{CBA}=\pi.$$

Одавде је $\frac{m-c}{n-c}\cdot\frac{n-a}{p-a}\cdot\frac{p-b}{m-b}\in\mathbb{R}^*$, а тиме и

$\frac{q-m}{q-n}\cdot\frac{n-c}{m-c}=D(N,Q,M,C)\in\mathbb{R}^*$, што значи да су тачке Q, M, N и C на једној кружници. ◇

<u>*Пример 8.3*</u> Дате су четири кружнице k_1,k_2,k_3,k_4 . Нека се k_1 и k_2 секу у тачкама A_1 и B_1, k_2 и k_3 у тачкама A_2 и B_2, k_3 и k_4 у тачкама A_3 и B_3, k_4 и k_1 у тачкама A_4 и B_4. Доказати да ако тачке A_1,A_2,A_3,A_4 припадају једној кружници, тада и тачке B_1,B_2,B_3,B_4 припадају једној кружници.



Нека су тачке A_1,A_2,A_3,A_4 и B_1,B_2,B_3,B_4 дате својим комплексним координатама које ћемо обележавати одговарајућим малим словима.

Тачке A_1,A_2,B_1,B_2 припадају кружници k_2, па је:

$$D(B_2,A_2,A_1,B_1)=\frac{a_1-a_2}{b_2-a_2}\cdot\frac{b_2-b_1}{a_1-b_1}\in\mathbb{R}^*.$$

Тачке A_2,A_3,B_2,B_3 припадају кружници k_3, па је:

$$D(B_3,A_3,A_2,B_2)=\frac{a_2-a_3}{b_3-a_3}\cdot\frac{b_3-b_2}{a_2-b_2}\in\mathbb{R}^*.$$

Тачке A_3,A_4,B_3,B_4 припадају кружници k_4, па је:

$$D(B_4,A_4,A_3,B_3)=\frac{a_3-a_4}{b_4-a_4}\cdot\frac{b_4-b_3}{a_3-b_3}\in\mathbb{R}^*.$$

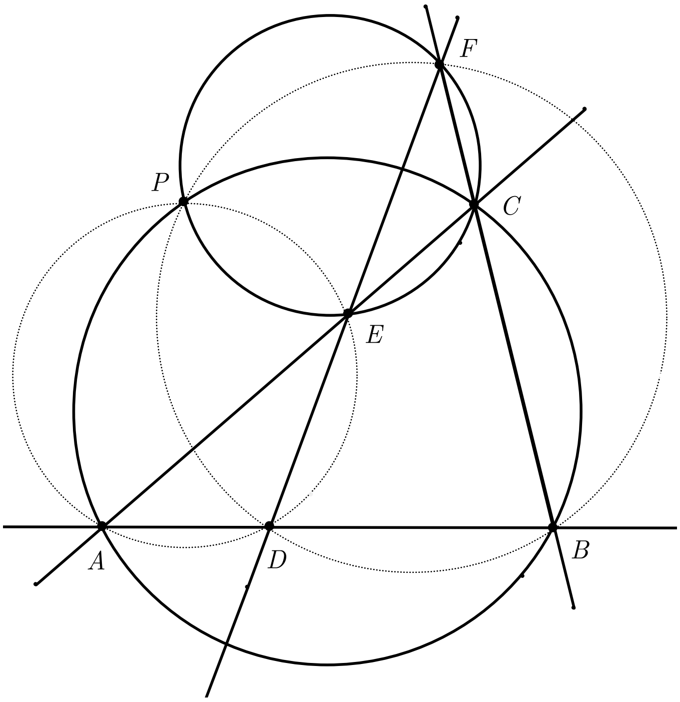
Тачке A_1,A_4,B_1,B_4 припадају кружници k_1, па је: $D(B_1,A_1,A_4,B_4)=\frac{a_4-a_1}{b_1-a_1}\cdot\frac{b_1-b_4}{a_4-b_4}\in\mathbb{R}^*$.

Одавде имамо:

$$\frac{D(B_3,A_3,A_2,B_2)\cdot D(B_1,A_1,A_4,B_4)}{D(B_2,A_2,A_1,B_1)\cdot D(B_4,A_4,A_3,B_3)}=\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}\cdot\frac{a_1-a_4}{a_3-a_4}\cdot\frac{b_3-b_2}{b_1-b_2}\cdot\frac{b_1-b_4}{b_3-b_4}=$$
$$=D(A_1,A_2,A_3,A_4)\cdot D(B_1,B_2,B_3,B_4)\in\mathbb{R}^*$$

Пошто тачке A_1,A_2,A_3,A_4 припадају једној кружници то $D(A_1,A_2,A_3,A_4)\in\mathbb{R}^*$, а тиме и $D(B_1,B_2,B_3,B_4)\in\mathbb{R}^*$, што значи да тачке B_1,B_2,B_3,B_4 припадају једној кружници или правој.◇

Пример 8.4 Четири праве се секу тако да образују четири троугла. Доказати да четири кружнице описане око тих троуглова имају једну заједничку тачку.



Из услова задатка следи да никоје три праве нису конгурентне. Њихове пресечне тачке ћемо обележити са A, B, C, D, E, F, одговарајуће комплексне координате означићемо малим словима. Нека се кружнице описане око троуглова ABC и EFC секу у тачки P. Показаћемо да су тачке E, P, A и D конциклични, слично се показује да су тачке B, D, F, P концикличне. Како је

$$D(B,A,P,C)=\frac{p-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{p-c}\in\mathbb{R}^*,$$

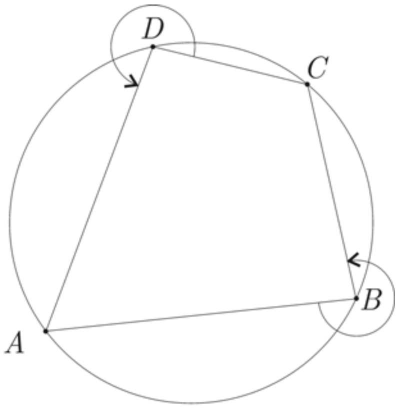
$$D(E,F,C,P)=\frac{c-f}{e-f}\cdot\frac{e-p}{c-p}\in\mathbb{R}^*$$

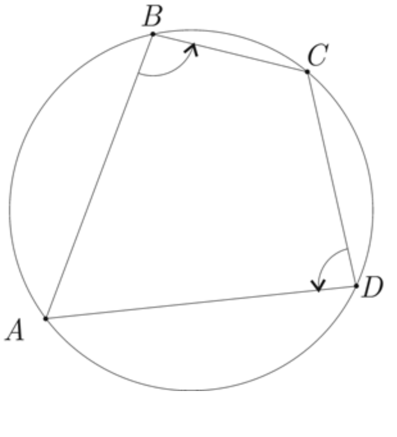
то дељењем ових једнакости добијамо да

$$\frac{p-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{e-p}\cdot\frac{e-f}{c-f}\in\mathbb{R}^* \quad (*).$$

Коришћењем чињенице да су тачке E, F, D колинеарне као и тачке B, A, D имамо: $\frac{e-f}{e-d}=t_1\in\mathbb{R}^*$ и $\frac{b-a}{d-a}=t_2\in\mathbb{R}^*$. Замењујући последње две једнакости у (*) добијамо: $\frac{a-p}{e-p}\cdot\frac{e-d}{a-d}\cdot\frac{b-c}{f-c}\cdot\frac{t_1}{t_2}\in\mathbb{R}^*$. Пошто тачке B, C, F припадају једној правој биће $\frac{b-c}{f-c}\in\mathbb{R}^*$, а тиме и $\frac{a-p}{e-p}\cdot\frac{e-d}{a-d}=D(E,P,A,D)\in\mathbb{R}^*$, што значи да су тачке E, P, A и D концикличне. ◊

Пример 8.5 (Птоломејева теорема) Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао тада је $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$.





Четвороугао $ABCD$ је тетиван па $D(A,B,C,D)\in\mathbb{R}^*$, тј. $\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}\in\mathbb{R}^*$. Постоје две оријентације четвороугла $ABCD$, у случају позитивне оријентације је $\measuredangle\overline{ABC}=\arg\frac{c-b}{a-b}$, $\measuredangle\overline{CDA}=\arg\frac{a-d}{c-d}$, при чему су претходни углови позитивно оријентисани. Сада је:

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}\right)=_{2\pi}\arg\frac{c-b}{a-b}+\arg\frac{a-d}{c-d}=\measuredangle\overline{ABC}+\measuredangle\overline{CDA}=3\pi.$$

Одавде имамо $\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}\right)=\pi$. Једноставно се показује да и у случају негативне оријентације важи претходна једнакост. Одавде је $\left|\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}\right|=-\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}$.

$$\frac{AD\cdot BC}{AB\cdot CD}+1=\frac{|d-a|\cdot|c-b|}{|b-a|\cdot|d-c|}+1=\left|\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}\right|+1=1-\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}=\frac{b-d}{a-b}\cdot\frac{a-c}{c-d}=\left|\frac{b-d}{a-b}\cdot\frac{a-c}{c-d}\right|=$$

$$=\frac{|b-d|\cdot|a-c|}{|a-b|\cdot|c-d|}=\frac{BD\cdot AC}{AB\cdot CD} \quad (*).$$

Јер је $-\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}>0$, то је $1-\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{a-d}{c-d}>0$ па и $\frac{b-d}{a-b}\cdot\frac{a-c}{c-d}>0$. Множењем једнакости (*) са $AB\cdot CD$ добијамо тврђење. ◊

I. 9. Једначина кружнице

Пошто $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z}{z_3-z}\in\mathbb{R}^*$ акко тачке $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M(z)$ припадају истој кружници имамо да једнакост $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z}{z_3-z}=\frac{\overline{z_3}-\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}\cdot\frac{\overline{z_1}-\overline{z}}{\overline{z_3}-\overline{z}}$ изражава припадност тачке M кружници k одређеној тачкама M_1, M_2, M_3, тј. овај услов даје једначину кружнице k. Сређујући претходну једнакост добијамо једначину $Az\overline{z}+Bz-\overline{B}\overline{z}+C=0$, где је

$$A=\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)-\left(z_3-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)$$

$$B=\left(z_3-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\overline{z_3}-\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)\overline{z_1}$$

$$C=\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)\overline{z_1}z_3-\left(z_3-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\overline{z_3}z_1,$$

при чему су A и C чисто имагинарни бројеви.

У случају A=0 имамо једначину праве.

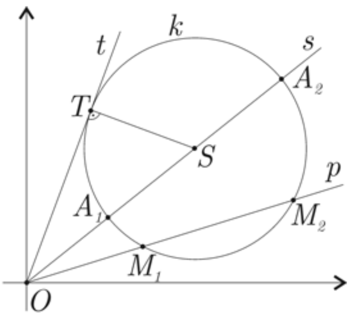
Ако $A\neq0$ биће $z\overline{z}+\frac{B}{A}z-\frac{\overline{B}}{A}\overline{z}+\frac{C}{A}=0$, стављајући $b=\frac{B}{A}, c=\frac{C}{A}$ имамо да $c\in\mathbb{R}$ и $\overline{b}=\frac{\overline{B}}{\overline{A}}=-\frac{\overline{B}}{A}$, па претходна једначина добија облик $z\overline{z}+bz+\overline{b}\overline{z}+c=0,\quad c\in\mathbb{R}$. Последњу једначину једноставно трансформишемо у $\left|z+\overline{b}\right|^2=\left|b\right|^2-c$. Ако је $\left|b\right|^2-c>0$ стављајући $\left|b\right|^2-c=r^2$ добијамо $\left|z+\overline{b}\right|=r$ што представља најуобичајенији облик једначине кружнице.

$\left|z+\overline{b}\right|=r$ можемо читати као: скуп тачака чије је растојање од тачке $S\left(-\overline{b}\right)$ константно и једнако r. Дакле наведена једначина представља једначину кружнице са центром у тачки $S\left(-\overline{b}\right)$ полупречника $r=\sqrt{\left|b\right|^2-c}$.

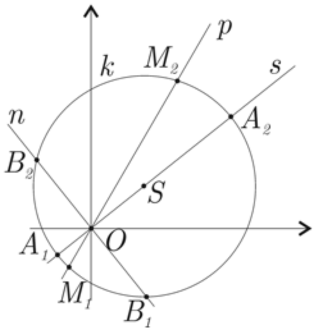
<u>*Пример 9.1*</u> Координата центра кружнице описане око троугла $M_1M_2M_3$ задатог са $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ је $z_O=\frac{\left(z_1-z_2\right)\left|z_3\right|^2+\left(z_2-z_3\right)\left|z_1\right|^2+\left(z_3-z_1\right)\left|z_2\right|^2}{\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)-\left(z_3-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)}$.

$z_O=-\overline{b}=\frac{\overline{B}}{A}=\frac{\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)z_3-\left(z_3-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)z_1}{\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)-\left(z_3-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)}$, израчунавајући бројилац последњег израза добијамо тврђење. ◇

I. 10. Потенција тачке у односу на круг



Нека је $k=(S,r)$ кружница са центром у тачки $S(s)$, полупречника r. Дакле њена једначина је $|z-s|=r$ тј. $z\bar{z}-s\bar{z}-\bar{s}z+|s|^2-r^2=0$. Нека је p права која садржи координатни почетак O и сече кружницу k у тачкама $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$. Тада је $\arg z_1=\arg z_2$ или $\arg z_1-\arg z_2=\pm\pi$. Због тога је $z_1\overline{z_2}=|z_1||z_2|e^{i(\arg z_1-\arg z_2)}\in\mathbb{R}$, па је $z_1\overline{z_2}=\overline{z_1}z_2=\lambda\in\mathbb{R}$. Пошто z_1 и z_2 припадају k биће $z_1\overline{z_1}-s\overline{z_1}-\bar{s}z_1+|s|^2-r^2=0$ и $z_2\overline{z_2}-s\overline{z_2}-\bar{s}z_2+|s|^2-r^2=0$. Множећи прву једнакост са z_2, а другу са z_1 добијамо $z_1\lambda-s\lambda-\bar{s}z_1z_2+\left(|s|^2-r^2\right)z_2=0$ и



$z_2\lambda-s\lambda-\bar{s}z_1z_2+\left(|s|^2-r^2\right)z_1=0$. Одузимањем ових једначина добијамо $\left(z_1-z_2\right)\lambda+\left(|s|^2-r^2\right)\left(z_2-z_1\right)=0.$ Ако је $z_1\neq z_2$ биће $\lambda=|s|^2-r^2.$ Осим тога је $\lambda=z_1\overline{z_2}=\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=z_1\bullet z_2=$

$$=\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}=\begin{cases}|OM_1||OM_2|, & \arg z_1=\arg z_2\\ -|OM_1||OM_2|, & \arg z_1-\arg z_2=\pm\pi\end{cases}.$$

С друге стране је $\lambda=|s|^2-r^2=OS^2-r^2$, дакле скаларни производ $\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}$ не зависи од положаја праве p и једнак је OS^2-r^2.

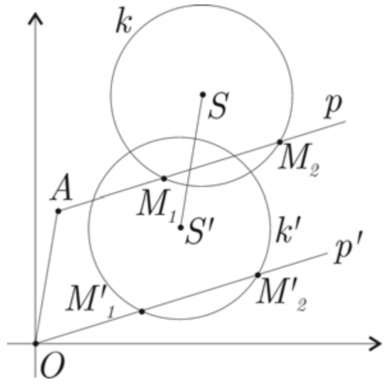
У случају $\arg z_1=\arg z_2$ са T ћемо означити додирну тачку тангенте t из тачке O на кружницу k, па имамо да је $OS^2-r^2=OS^2-ST^2=OT^2$. Дакле биће $OT^2=OM_1\cdot OM_2$.

Геометријски смисао једнакости $OM_1\cdot OM_2=OS^2-r^2$ можемо видети посматрајући праву s која садржи тачке O и S и сече кружницу k у тачкама A_1 и A_2, у случају $\arg z_1=\arg z_2$ је $OM_1\cdot OM_2=OA_1\cdot OA_2=\left(OS-r\right)\cdot\left(OS+r\right)=OS^2-r^2.$

У случају $\arg z_1-\arg z_2=\pm\pi$ посматраћемо праву s која садржи тачке O и S и праву n која је нормална на праву s у тачки O и која сече кружницу k у тачкама B_1 и B_2. Тада је $\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}=-OM_1\cdot OM_2=-OB_1\cdot OB_2=-OB_1^2=-OB_2^2.$ Из правоуглог троугла SOB_1 имамо $OB_1^2=SB_1^2-OS^2=r^2-OS^2.$

Осим тога је $\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OA_1}\bullet\overrightarrow{OA_2}=-OA_1\cdot OA_2=-\left(r-OS\right)\left(r+OS\right)=OS^2-r^2,$ што је други начин да дамо геометријско образложење једнакости $\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}=OS^2-r^2$.

Једнакост $\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}=OS^2-r^2$ је изведена под претпоставком да је $M_1\neq M_2$. У случају да је $M_1=M_2$ биће $M_1=M_2=T$ па по Питагориној теореми опет имамо да важи наведена једнакост.



Посматрајмо сада кружницу k и произвољну тачку $A(a)$. Да би дошли до претходне ситуације извршићемо транслацију за $-a$. Овом транслацијом се тачка A преводи у координатни почетак, а кружница k у кружницу k' са центром $S'(s-a)$ полупречника r, тачке $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$ у тачке $M'_1(z_1-a)$ и $M'_2(z_2-a)$ редом. Биће: $k':\left|z-\left(s-a\right)\right|=r^2$ тј.

$k' : z\overline{z} - (s-a)\overline{z} - (\overline{s}-\overline{a})z + |s-a|^2 - r^2 = 0$. По претходно изведеним закључцима је:

$\overrightarrow{OM_1'} \bullet \overrightarrow{OM_2'} = OS'^2 - r^2 = |s-a|^2 - r^2 = s\overline{s} - a\overline{s} - \overline{a}s + |a|^2 - r^2 \quad (*)$.

Пошто је $\overrightarrow{OM_1'} = \overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{OM_2'} = \overrightarrow{AM_2}$, $OS' = AS$ имамо да важи $\overrightarrow{AM_1} \bullet \overrightarrow{AM_2} = AS^2 - r^2$. Дакле доказано је следеће:

<u>*Тврђење 10.1*</u> Ако су у равни дати кружница $k=k(S,r)$ и тачка A, тада за сваку праву p која садржи тачку A и сече кружницу k у тачкама M_1 и M_2 је скаларни производ $\overrightarrow{AM_1} \bullet \overrightarrow{AM_2}$ константан и једнак $AS^2 - r^2$. □

Ова теорема омогућује да се уведе дефиниција потенције тачке A у односу на кружницу k.

<u>*Дефиниција 10.1*</u> Константан производ $\overrightarrow{AM_1} \bullet \overrightarrow{AM_2}$ установљен претходном теоремом називамо потенцијом тачке A у односу на круг k и означавамо са $p(A,k)$.

Примећујемо да је потенција тачке која је ван кружнице k позитивна, тачке у кругу негативна, док је потенција тачке на кружници једнака 0.

Непосредна последица претходног закључивања (видети формулу (*)) је и:

<u>*Тврђење 10.2*</u> Посматрајмо тачку $A(a)$ и кружницу k чија је једначина $k : z\overline{z} - s\overline{z} - \overline{s}z + |s|^2 - r^2 = 0$. Потенција тачке A у односу на кружницу k је $p(A,k) = a\overline{a} - s\overline{a} - \overline{s}a + |s|^2 - r^2$. □

Посматрајмо две ексцентричне кружнице:

$k_1 : z\overline{z} - s_1\overline{z} - \overline{s_1}z + |s_1|^2 - r_1^2 = 0$ и $k_2 : z\overline{z} - s_2\overline{z} - \overline{s_2}z + |s_2|^2 - r_2^2 = 0 \qquad (\bullet)$.

Скуп тачака $M(z)$ које имају исту потенцију у односу на кругове k_1 и k_2 је, по претходној теореми, задат са $z\overline{z} - s_1\overline{z} - \overline{s_1}z + |s_1|^2 - r_1^2 = z\overline{z} - s_2\overline{z} - \overline{s_2}z + |s_2|^2 - r_2^2$, тј.

$$(s_2 - s_1)\overline{z} + (\overline{s_2} - \overline{s_1})z + |s_1|^2 - |s_2|^2 + r_2^2 - r_1^2 = 0$$

што је једначина праве p коју ћемо називати радикалном или потенцијалном осом кругова k_1 и k_2.

<u>*Тврђење 10.3*</u> Ако су тачке $S_1(s_1)$ и $S_2(s_2)$ центри кругова k_1 и k_2, радикална оса p тих кругова је нормална на правој S_1S_2.

Нека су $Q_1(q_1)$ и $Q_2(q_2)$ две различите тачке радикалне осе p кругова k_1 и k_1, тада је:

$(s_2 - s_1)\overline{q_1} + (\overline{s_2} - \overline{s_1})q_1 + |s_1|^2 - |s_2|^2 + r_2^2 - r_1^2 = 0$ и

$(s_2 - s_1)\overline{q_2} + (\overline{s_2} - \overline{s_1})q_2 + |s_1|^2 - |s_2|^2 + r_2^2 - r_1^2 = 0$. Одузимањем ових двеју једначина добијамо $(s_2 - s_1)(\overline{q_2} - \overline{q_1}) + (\overline{s_2} - \overline{s_1})(q_2 - q_1) = 0$, а одавде је $\mathrm{Re}(s_2 - s_1)(\overline{q_2} - \overline{q_1}) = 0$ тј. $(s_2 - s_1) \bullet (q_2 - q_1) = 0$, што значи да су праве S_1S_2 и Q_1Q_2 узајамно ортогоналне, тј. p је ортогонална на S_1S_2. □

<u>*Тврђење 10.4*</u> Нека је p радикална оса кругова $k_1(S_1,r_1)$ и $k_2(S_2,r_2)$ и нека је $p \cap S_1S_2 = \{K\}$. Тада важи: $S_2K^2 - S_1K^2 = r_2^2 - r_1^2$.

Пошто $K(k) \in p$ биће $(s_2 - s_1)\overline{k} + (\overline{s_2} - \overline{s_1})k + |s_1|^2 - |s_2|^2 + r_2^2 - r_1^2 = 0. \quad (**)$

С друге стране је $S_2K^2 - S_1K^2 = |k - s_2|^2 - |k - s_1|^2 = (s_1 - s_2)\overline{k} + (\overline{s_1} - \overline{s_2})k + |s_2|^2 - |s_1|^2$, па је због (**) $S_2K^2 - S_1K^2 = r_2^2 - r_1^2$. □

Дакле радикална оса кругова $k_1(S_1,r_1)$ и $k_2(S_2,r_2)$ је права која је нормална на правој S_1S_2 у тачки К за коју важи $S_2K^2 - S_1K^2 = r_2^2 - r_1^2$.

Уколико кружнице k_1 и k_2 имају бар једну заједничку тачку A, тада та тачка припада њиховој радикалној оси јер је $p(A,k_1)=p(A,k_2)=0$. Дакле ако кружнице k_1 и k_2 имају две заједничке тачке A и B њихова радикална оса је права AB, ако се додирују у тачки A, тада је радикална оса права која је нормална на S_1S_2 у тачки A (заправо заједничка тангента кружница k_1 и k_2).

Радикалну осу кругова k_1 и k_2 можемо посматрати и као скуп тачака чија је разлика потенција у односу на кругове k_1 и k_2 једнака 0 или количник потенција у односу на кругове k_1 и k_2 једнак 1. На сличан начин можемо посматрати скуп тачака $M(z)$ чија је 1) разлика потенција једнака $\lambda=const$ или 2) количник потенција у односу на кругове k_1 и k_2 једнак $\mu=const$. У првом случају, уколико су једначине кружница k_1 и k_2 задате са (•) имамо да је је $p(M,k_1)$-$p(M,k_2)=\lambda$, тј. $(s_2-s_1)\overline{z}+\left(\overline{s_2}-\overline{s_1}\right)z+|s_1|^2-|s_2|^2+r_2^2-r_1^2-\lambda=0$, што је опет једначина праве. Слично као и за радикалну осу показује се да је та права нормална на S_1S_2.

У другом случају је $\dfrac{p(M,k_1)}{p(M,k_2)}=\mu$, тј.

$$z\overline{z}-s_1\overline{z}-\overline{s_1}z+|s_1|^2-r_1^2=\mu(z\overline{z}-s_2\overline{z}-\overline{s_2}z+|s_2|^2-r_2^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-\mu)z\overline{z}-(s_1-\mu s_2)\overline{z}-(\overline{s_1}-\mu\overline{s_2})z+|s_1|^2-r_1^2-\mu|s_2|^2+\mu r_2^2=0.$$

Случај $\mu=1$ доводи до једначине праве, тј. радикалне осе кружница k_1 и k_2.

Ако је $\mu\neq1$ имамо једначину кружнице са центром у $\dfrac{s_1-\mu s_2}{1-\mu}$.

Уколико су кружнице k_1 и k_2 полупречника 0, тј. тачке S_1 и S_2, биће $p(M,k_1)=MS_1^2$ и $p(M,k_2)=MS_2^2$. Дакле за $r_1=0$ и $r_2=0$ претходна једначина означава скуп тачака чији је однос квадрата растојања до двеју датих тачака S_1 и S_2 једнак μ.

Аполонијева кружница се дефинише као скуп тачака чији је однос растојања до двеју датих тачака константан (рецимо једнак η).

Из претходног следи (стављајући $\mu=\eta^2,\quad r_1=0,\quad r_2=0$) да је једначина Аполонијеве кружнице $(1-\eta^2)z\overline{z}-(s_1-\eta^2 s_2)\overline{z}-(\overline{s_1}-\eta^2\overline{s_2})z+|s_1|^2-\eta^2|s_2|^2=0$.

<u>*Пример 10.1*</u> Ако је s радикална оса двају ексцентричних кругова $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$, P произвољна тачка те исте равни и Q подножје нормале из тачке P на правој s, доказати да је $p(P,k_1)-p(P,k_2)=2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}\bullet\overrightarrow{QP}$.

Једначине кружница су $\begin{array}{l} k_1:|z-o_1|=r_1\Leftrightarrow k_1:z\overline{z}-o_1\overline{z}-\overline{o_1}z+|o_1|^2-r_1^2=0\\ k_2:|z-o_2|=r_2\Leftrightarrow k_2:z\overline{z}-o_2\overline{z}-\overline{o_2}z+|o_2|^2-r_2^2=0\end{array}$ па је

$$p(P,k_1)-p(P,k_2)=(o_2-o_1)\overline{p}+(\overline{o_2}-\overline{o_1})p+|o_1|^2-|o_2|^2+r_2^2-r_1^2=$$

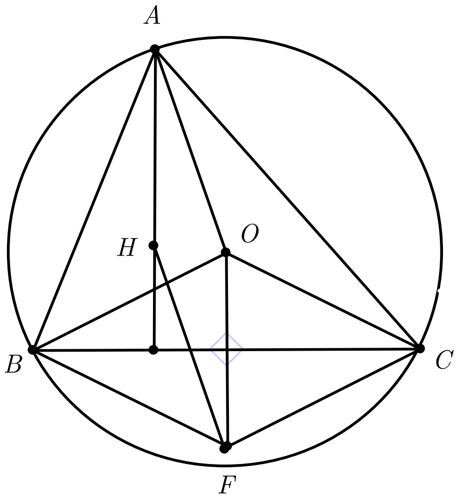
$$=(o_2-o_1)\overline{p}+(\overline{o_2}-\overline{o_1})p-(o_2-o_1)\overline{q}-(\overline{o_2}-\overline{o_1})q+(o_2-o_1)\overline{q}+(\overline{o_2}-\overline{o_1})q+|o_1|^2-|o_2|^2+r_2^2-r_1^2=$$

$$=(o_2-o_1)(\overline{p}-\overline{q})+(\overline{o_2}-\overline{o_1})(p-q)+p(Q,k_1)-p(Q,k_2).$$

Пошто тачка Q припада радикалној оси кругова k_1 и k_2 биће $p(Q,k_1)-p(Q,k_2)=0$. Дакле, биће: $p(P,k_1)-p(P,k_2)=2\operatorname{Re}\left(\overline{o_2}-\overline{o_1}\right)\left(p-q\right)=2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}\bullet\overrightarrow{QP}$. ◇

I. 11. Ојлерова кружница (кружница 9 тачака), Ојлерова права

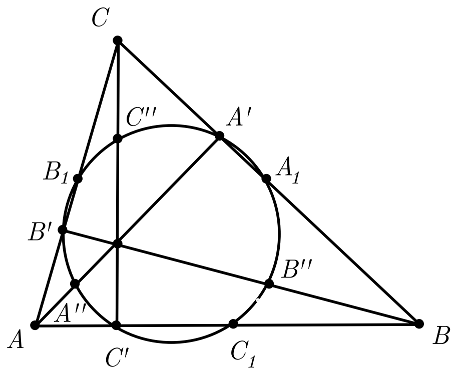
<u>Лема 11.1</u> Нека је ABC троугао чији се центар описаног круга налази у координатном почетку. Ако је $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ показати да је $H(h)$, где је $h=a+b+c$ ортоцентар троугла ABC.



Пошто је центар описаног круга у координатном почетку биће $|a|=|b|=|c|=R$. Ако је F тачка чија је комплексна координата $f=b+c$, тада је четвороугао $COBF$ ромб. Због тога је $OF\perp BC$. Ако је H тачка чија је комплексна координата једнака је $h=a+(b+c)$ биће четвороугао $AOFH$ паралелограм над векторима $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OF}$, дакле биће $AH \parallel OF$. Пошто је $OF\perp BC$ биће $AH\perp BC$. Слично се показује да је $BH\perp AC$ и $CH\perp AB$, дакле тачка H је ортоцентар троугла ABC. □

Нека је ABC троугао задат са $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, нека су A_1, B_1, C_1, средишта дужи BC, AC, AB, редом; A',B',C' подножја висина из A, B, C на странице BC, AC, AB, редом и нека су A'',B'',C'' средишта дужи AH, BH, CH, редом, при чему је H ортоцентар троугла ABC.

<u>Тврђење 11.1</u> У троуглу ABC тачке A_1, B_1, C_1, A',B',C',A'',B'',C'' леже на једној кружници чији је центар E средиште дужи OH, где је O центар описаног круга, H ортоцентар, а полупречник јој је једнак половини полупречника описане кружнице око троугла ABC. (Овај круг се назива Ојлеровим кругом 9 тачака.)



Нека је координатни систем тако постављен да се центар описаног круга O налази у координатном почетку. тада је координата ортоцентра дата са $h=a+b+c$. Значи:

$$a_1=\frac{b+c}{2},\ b_1=\frac{a+c}{2},\ c_1=\frac{b+a}{2},\ a''=\frac{a+h}{2}=a+\frac{b+c}{2},$$

$b''=b+\dfrac{a+c}{2},\ c''=c+\dfrac{b+a}{2}$ и $e=\dfrac{h}{2}=\dfrac{a+b+c}{2}$. Сада је $EA_1=|e-a_1|=\left|\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{b+c}{2}\right|=\dfrac{|a|}{2}=\dfrac{R}{2}$, слично је $EB_1=\dfrac{|b|}{2}=\dfrac{R}{2}$ и $EC_1=\dfrac{|c|}{2}=\dfrac{R}{2}$. $EA''=|e-a''|=\left|\dfrac{a+b+c}{2}-\left(a+\dfrac{b+c}{2}\right)\right|=\dfrac{|-a|}{2}=\dfrac{R}{2}$, слично је $EB''=|e-b''|=\dfrac{R}{2}$ и $EC''=|e-c''|=\dfrac{R}{2}$. Овим је показано да тачке A_1,B_1, C_1, A'',B'',C'' припадају кружници k са центром у E, полупречника $\dfrac{R}{2}$. Да би нашли координату подножја висине из темена C на страницу AB поставићемо прво једначину праве AB:

$$AB:\ \frac{z-a}{b-a}=\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow z\left(\overline{b}-\overline{a}\right)-\overline{z}\left(b-a\right)+\overline{a}b-\overline{b}a=0.$$

Да би могли да користимо формулу за координату подножја нормале из дате тачке на дату праву, изведену раније, потребно је претходну једначину праве AB помножити са i јер $\overline{a}b-\overline{b}a\in i\mathbb{R}$, а у поменутој формули се користи једначина праве у којој је „слободни члан“

реалан. Дакле: $AB: zi\left(\overline{b}-\overline{a}\right)-\overline{z}i\left(b-a\right)+i\left(\overline{a}b-\overline{b}a\right)=0$, по поменутој формули је:

$c'=\dfrac{i\left(\overline{b}-\overline{a}\right)c-\left(-i\left(b-a\right)\right)\overline{c}-i\left(\overline{a}b-\overline{b}a\right)}{2i\left(\overline{b}-\overline{a}\right)}$, тј. $c'=\dfrac{c}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{b-a}{\left(\overline{b}-\overline{a}\right)}\overline{c}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\overline{a}b-\overline{b}a}{\overline{b}-\overline{a}}$.

Пошто је $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=R^2$ биће $c'=\dfrac{c}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{b-a}{\left(\dfrac{R^2}{b}-\dfrac{R^2}{a}\right)}\dfrac{R^2}{c}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{R^2}{a}b-\dfrac{R^2}{b}a}{\dfrac{R^2}{b}-\dfrac{R^2}{a}}=\dfrac{1}{2}\left(a+b+c-\dfrac{ab}{c}\right)$.

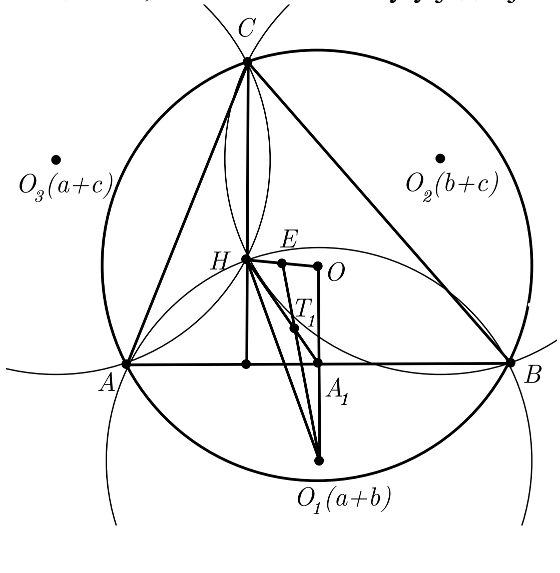
Слично је $a'=\dfrac{1}{2}\left(a+b+c-\dfrac{bc}{a}\right)$, $b'=\dfrac{1}{2}\left(a+b+c-\dfrac{ac}{b}\right)$. Сада имамо:

$EA'=\left|e-a'\right|=\left|\dfrac{a+b+c}{2}-\left(\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{bc}{2a}\right)\right|=\dfrac{|bc|}{2|a|}=\dfrac{R}{2}$. На сличан начин је $EB'=EC'=\dfrac{R}{2}$. Овим је показано да и тачке A', B', C' припадају кружници *k*. □

Раније смо показали да је координата тежишта *T* троугла *ABC* дата са $t=\dfrac{a+b+c}{3}$. Узимајући у обзир да је координата ортоцентра *H* троугла *ABC,* када је центар описаног круга у координатном почетку, дата са $h=a+b+c$, као и да је центар Ојлеровог круга дат са $e=\dfrac{a+b+c}{2}$ имамо да су тачке *O, T, E* и *H* колинеарне. Осим тога је *E* средиште дужи *OH* и $OH=3OT$. Дакле имамо:

<u>*Тврђење 11.2*</u> У троуглу *ABC* су ортоцентар *H,* тежиште *T*, и центар описане кружнице *O* колинеарне тачке и при том је *H-T-O* и $HT=2TO$. (Права којој припадају *H*, *T*, *O* и *E* се назива Ојлеровом правом.) □

<u>*Пример 11.1*</u> Нека је *H* ортоцентар троугла *ABC*. Доказати да се Ојлерове праве троуглова *ABC, ABH*, *BCH* и *CAH* секу у једној тачки.



Нека је центар описаног круга око троугла *ABC* у координатном почетку. Тада *H* има координату $h=a+b+c$. Тачка $O_1(a+b)$ је симетрична са *O* у односу на страницу *AB* јер је четвороугао OAO_1B ромб. Сада је $O_1H=\left|(a+b)-(a+b+c)\right|=|c|=R$, $O_1A=|a+b-a|=|b|=R$, $O_1B=|a+b-b|=|a|=R$, па је O_1 центар описаног круга око троугла *ABH.* Слично је $O_2(c+b)$ центар описаног круга око троугла *BCH,* као што је и $O_3(a+c)$ центар описаног круга око троугла *ACH.* Нека је T_1 тежиште троугла *ABH*, тада је $t_1=\dfrac{a+b+(a+b+c)}{3}=\dfrac{2a+2b+c}{3}$. Ојлерова права троугла *ABH* је права T_1O_1, а Ојлерова права троугла *ABC* је права *OH.* Пошто је $t_1=\dfrac{(a+b)+(a+b+c)+0}{3}$ имамо да је T_1 тежиште троугла HOO_1, па права T_1O_1 сече дуж *OH* у њеном средишту тј. у тачки *E,* где је $e=\dfrac{a+b+c}{2}$. Значи пресечна тачка Ојлерових правих троуглова *ABC* и *ABH* је тачка *E.*

Нека је T_2 тежиште троугла *BCH*, тада је $t_2 = \frac{b+c+(a+b+c)}{3} = \frac{a+2b+2c}{3}$, пошто је $O_2(c+b)$ центар круга описаног око троугла *BCH,* биће права T_2O_2 Ојлерова права троугла *BCH.* Једначина праве T_2O_2 је $z = o_2 + \lambda_2(t_2 - o_2) = b + c + \lambda_2 \frac{a-b-c}{3}, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. За $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ видимо да тачка *E* припада правој T_2O_2.

Слично, ако је T_3 тежиште троугла *ACH*, тада је $t_3 = \frac{a+c+(a+b+c)}{3} = \frac{2a+b+2c}{3}$, пошто је $O_3(c+a)$ центар круга описаног око троугла *ACH,* биће права T_3O_3 Ојлерова права троугла *ACH.* Слично као у претходном случају се проверава да *E* припада правој T_3O_3. Дакле Ојлерове праве троуглова *ABC, ABH*, *BCH* и *CAH* се секу у тачки *E*. ◇

<u>*Пример 11.2*</u> Нека је *H* ортоцентар троугла *ABC.* Доказати да се Ојлерове кружнице троуглова *ABC, ABH*, *BCH* и *CAH* поклапају.

У претходном примеру је показано да кружнице описане око троуглова *ABC, ABH*, *BCH* и *CAH* имају исти полупречник *R*. Нека је центар описаног круга око троугла *ABC* у координатном почетку. Тада је $E\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$ центар Ојлеровог круга троугла *ABC*, а *R*/2 његов полупречник.

У претходном примеру је показано да је $O_1(a+b)$ центар описаног круга троугла *ABH.* Пошто је $CH \perp AB$ и $BC \perp AH$, биће *C* ортоцентар троугла *ABH.* Ако са E_1 обележимо центар Ојлеровог круга троугла *ABH* а са $H_1(h_1)$ његов ортоцентар, биће $h_1=c$ и E_1 средиште дужи O_1H_1, тј. O_1C па је $e_1 = \frac{(a+b)+c}{2} = e$, тј. тачке *E* и E_1 се поклапају.

Слично је $O_2(c+b)$ центар описаног круга око троугла *BCH,* а *A* његов ортоцентар, па је центар његовог Ојлеровог круга E_2 дат са $e_2 = \frac{(b+c)+a}{2} = e$, тј. тачке *E* и E_2 се поклапају.

Слично је $O_3(c+a)$ центар описаног круга око троугла *ACH,* а *B* његов ортоцентар, па је центар његовог Ојлеровог круга E_3 дат са $e_3 = \frac{(a+c)+b}{2} = e$, тј. тачке *E* и E_3 се поклапају.

Пошто је полупречник Ојлеровог круга троугла једнак половини полупречника описаног круга троугла то се Ојлерови кругови троуглова *ABC, ABH*, *BCH* и *CAH* поклапају.◇

<u>*Пример 11.3*</u> Четвороугао *ABCD* је тетиван, доказати да:

a) Ојлерове кружнице троуглова *ABC*, *BAD*, *ACD*, *BCD* се секу у једној тачки,
b) центри наведених Ојлерових кружница су темена тетивног четвороугла.

a) Пошто је четвороугао *ABCD* тетиван, центри описаних кружница троуглова *ABC*, *BAD*, *ACD*, *BCD* се поклапају. Ако са E_1, E_2, E_3, E_4 обележимо центре Ојлерових кружница троуглова *ABC*, *BAD*, *ACD*, *BCD* редом, биће $e_1 = \frac{a+b+c}{2}$, $e_2 = \frac{a+b+d}{2}$, $e_3 = \frac{a+c+d}{2}$, $e_4 = \frac{b+c+d}{2}$. Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 Ојлерове кружнице троуглова *ABC*, *BAD*, *ACD*, *BCD* редом и *R* полупречник круга описаног око *ABCD*. Нека су H_1, H_2, H_3, H_4 ортоцентри троуглова *ABC*, *BAD*, *ACD*, *BCD* редом, тада је $h_1 = a+b+c, h_2 = a+b+d, h_3 = a+c+d, h_4 = b+c+d$. Нека је *E* средиште дужи DH_1 тада је $e = \frac{(a+b+c)+d}{2}$ и $|e - e_1| = \left|\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{a+b+c}{2}\right| = \left|\frac{d}{2}\right| = \frac{R}{2}$, па $\mathrm{E} \in k_1$.

Слично се покаже да је $|e-e_2|=|e-e_3|=|e-e_4|=\dfrac{R}{2}$, па тачка E припада и кружницама k_2, k_3, k_4, дакле $\mathrm{E}\in k_1\cap k_2\cap k_3\cap k_4$.

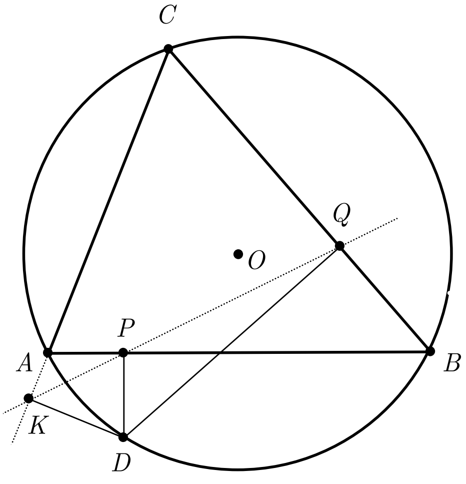
б) Пошто је $|e-e_1|=|e-e_2|=|e-e_3|=|e-e_4|=\dfrac{R}{2}$, то тачке E_1, E_2, E_3, E_4 припадају кружници са центром у тачки E, полупречника $\dfrac{R}{2}$. ◇

Из претходног примера се може закључити да се појмови аналогни ортоцентру, центру Ојлерове кружнице, Ојлеровој кружници и Ојлеровој правој могу дефинисати за тетивни четвороугао, као и за тетивни n-тоугао (видети Јаглом).

I. 12. Симпсонова права

<u>Тврђење 12.1</u> Тачка D припада кружници описаној око троугла ABC акко ортогоналне пројекције тачке D на странице AB, BC, CA (тачке P, Q, K редом) припадају једној правој (ову праву називамо Симпсоновом или Валисовом правом).

Претпоставимо да се центар описаног круга троугла ABC налази у координатном почетку.



Слично као и код доказа теореме о Ојлеровој кружници имамо да су координате тачака P, Q и K дате са $p=\frac{1}{2}\left(a+b+d-\frac{ab}{d}\right), q=\frac{1}{2}\left(b+c+d-\frac{bc}{d}\right)$, $k=\frac{1}{2}\left(a+c+d-\frac{ac}{d}\right)$.

$\frac{q-p}{k-p}=\frac{c-a+\frac{b}{d}(a-c)}{c-b+\frac{a}{d}(b-c)}=\frac{a-c}{b-c}\cdot\frac{b-d}{a-d}=D(B,C,A,D)$, дакле тачке P, Q, K су колинеарне акко $\frac{q-p}{k-p}\in\mathbb{R}^*$ акко $D(B,C,A,D)\in\mathbb{R}^*$ акко су A, B, C, D на истој кружници. □

Сада ћемо извести једначину Симпсонове (Валисове) праве s_d $s_d:\frac{z-p}{q-p}=\frac{\overline{z}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}}\Leftrightarrow z-\frac{q-p}{\overline{q}-\overline{p}}\overline{z}+\frac{q\overline{p}-p\overline{q}}{\overline{q}-\overline{p}}=0.$ Пошто је

$$q-p=\frac{1}{2}\left(c-a+\frac{ab}{d}-\frac{bc}{d}\right)=\frac{c-a}{2}\left(1-\frac{b}{d}\right), \overline{q}-\overline{p}=\frac{\overline{c}-\overline{a}}{2}\left(1-\frac{\overline{b}}{\overline{d}}\right)=\frac{\frac{R^2}{c}-\frac{R^2}{a}}{2}\left(1-\frac{\frac{R^2}{b}}{\frac{R^2}{d}}\right)=R^2\frac{a-c}{2ac}\left(1-\frac{d}{b}\right)$$

биће $\frac{q-p}{\overline{q}-\overline{p}}=\frac{\frac{c-a}{2}\left(1-\frac{b}{d}\right)}{R^2\frac{a-c}{2ac}\left(1-\frac{d}{b}\right)}=\frac{abc}{R^2d}$. Да би добили вредност слободног члана $l=\frac{q\overline{p}-p\overline{q}}{\overline{q}-\overline{p}}$ користићемо чињеницу да $K\in s_d$, тј. $\frac{1}{2}\left(a+c+d-\frac{ac}{d}\right)-\frac{abc}{2R^2d}\left(\overline{a}+\overline{c}+\overline{d}-\frac{\overline{ac}}{\overline{d}}\right)+l=0$, одакле је

$$l=\frac{abc}{2R^2d}\left(\overline{a}+\overline{c}+\overline{d}\right)-\frac{abc}{2R^2d}\frac{\frac{R^2}{a}\frac{R^2}{c}}{\frac{R^2}{d}}-\frac{1}{2}\left(a+c+d\right)+\frac{1}{2}\frac{ac}{d}=\frac{abc}{2R^2d}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}\right)-\frac{1}{2}\left(a+b+c+d\right)$$ па

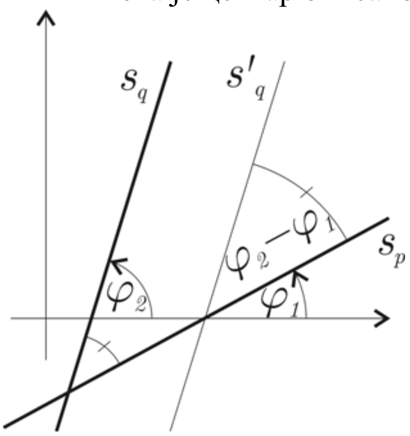
је једначина праве s_d дата са $z-\frac{abc}{R^2d}\overline{z}+\frac{abc}{2R^2d}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}\right)-\frac{1}{2}\left(a+b+c+d\right)=0$.

Из једначине праве s_d јасно је да тачка O_e са координатом $o_e=\frac{a+b+c+d}{2}$ припада s_d. Ако са s_a, s_b, s_c обележимо Симпсонове праве тачака A, B, C у односу на троуглове BCD, ACD, BAD редом, аналогно закључујемо да тачка O_e припада свакој од њих. Дакле, $O_e=s_a\cap s_b\cap s_c\cap s_d$.

Ако посматрамо тачку E која припада кружници описаној око тетивног четвороугла $ABCD$ и подножја нормала из тачке E на праве s_a, s_b, s_c, s_d (обележимо их са E_a, E_b, E_c, E_d, редом) испоставља се да су тачке E_a, E_b, E_c, E_d колинеарне што води дефиницији Симпсонове праве тетивног петоугла (видети Јаглом).

<u>*Пример 12.1*</u> Ако су s_p и s_q Симпсонове праве за тачке P, Q које припадају кружници описаној око троугла ABC, тада је $\measuredangle(s_p, s_q) = \frac{1}{2}\measuredangle POQ$. Доказати.

Нека је центар описаног круга O, троугла ABC у координатном почетку. Тада је



$$s_p : z - \frac{abc}{R^2 p}\bar{z} + \frac{abc}{2R^2 p}\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{p}\right) - \frac{1}{2}\left(a + b + c + p\right) = 0,$$

$$s_q : z - \frac{abc}{R^2 q}\bar{z} + \frac{abc}{2R^2 q}\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{q}\right) - \frac{1}{2}\left(a + b + c + q\right) = 0.$$

Ако је права задата једначином $z + \frac{\bar{b}}{b}\bar{z} + \frac{c}{b} = 0$, тада је $-\frac{\bar{b}}{b} = e^{i2\varphi}$, где је φ угао између позитивног дела реалне осе и дате праве (ово је разматрано када је објашњаван комплексни угаони коефицијент).

Користећи претходну чињеницу имамо да је $e^{i2\varphi_1} = \frac{abc}{R^2 p}$ и $e^{i2\varphi_2} = \frac{abc}{R^2 q}$, одавде је

$$e^{2i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\frac{abc}{R^2 p}}{\frac{abc}{R^2 q}} = \frac{q}{p} = \frac{\mathrm{R}\, e^{i\arg q}}{\mathrm{R}\, e^{i\arg p}} = e^{i(\arg q - \arg p)} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 =_{2\pi} \frac{\arg q - \arg p}{2}$$, из чега следи:

$\measuredangle(s_p, s_q) = \frac{1}{2}\measuredangle POQ$. ◇

<u>*Пример 12.2*</u> Ако Симпсонова права s_p тачке P која припада кружници описаној око троугла ABC пролази кроз тачку Q дијаметрално супротну тачки P тада она пролази и кроз тежиште троугла ABC. Доказати.

Нека је центар описаног круга O, троугла ABC у координатном почетку. По услову задатка права s_p садржи тачку Q дату са $q = -p$. По претходном разматрању права s_p садржи тачку O_e са координатом $o_e = \frac{a+b+c+p}{2}$. Сада имамо: $\overrightarrow{QO_e} = o_e - q = o_e + p = \frac{a+b+c+3p}{2}$.

Ако је T тежиште троугла ABC биће: $\overrightarrow{QT} = t - q = t + p = \frac{a+b+c}{3} + p = \frac{a+b+c+3p}{3}$. Пошто су вектори $\overrightarrow{QT}$ и $\overrightarrow{QO_e}$ колинеарни и $Q \in s_p, O_e \in s_p$, следи да $T \in s_p$.◇

<u>*Пример 12.3*</u> Доказати да Симпсонова права произвољне тачке M која припада кружници описаној око троугла ABC, полови дуж MH, где је H ортоцентар троугла.

Нека је центар описаног круга O, троугла ABC у координатном почетку, тада је ортоцентар H троугла ABC дат са $h = a + b + c$. Ако са F обележимо средиште дужи MH, имамо да је: $f = \frac{\left(a+b+c\right)+m}{2} = \frac{a+b+c+m}{2} = o_e$, где тачка O_e по претходном разматрању припада s_m, пошто се F и O_e поклапају, следи тврђење. ◇

I. 13. Изометријске трансформације равни - транслације и ротације равни

<u>*Дефиниција 13.1*</u> Транслација равни за вектор v (ознака T_v) је пресликавање које свакој тачки z додељује тачку $z+v$ тј. $T_v(z)=z+v$.

Овако дефинисана транслација се поклапа са елементарним схватањем транслације за вектор v. Уколико са M обележимо геометријску слику тачке z, а са M' геометријску слику тачке $z'=T_v(z)$ имаћемо да је $\overrightarrow{MM'}=v$, јер је $z'=T_v(z)=z+v \Rightarrow v=z'-z \Rightarrow v=\overrightarrow{MM'}$.

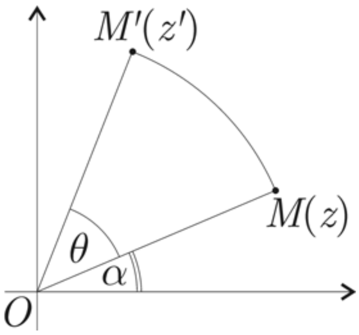
Транслација је изометрија јер је $\left|T_v(z_1)-T_v(z_2)\right|=\left|(z_1+v)-(z_2+v)\right|=\left|z_1-z_2\right|$.

Две транслације су једнаке ако су им једнаки вектори, јер ако је $T_v(z)=z+v$ и $T_w(z)=z+w$ биће $z+v=z+w \Rightarrow v=w$.

Композиција транслација $T_v(z)$ и $T_w(z)$ је транслација $T_{v+w}(z)$ јер је $\left(T_w \circ T_v\right)(z)=$ $=T_w(z+v)=\left(z+v\right)+w=z+\left(v+w\right)=T_{v+w}(z)$. Уколико идентично пресликавање схватимо као транслацију за 0-вектор одавде доказујемо да је $T_v^{-1}=T_{-v}$. Пошто је сабирање комплексних бројева комутативно имамо да је и композиција транслација комутативна.

Одавде следи да скуп свих транслација равни образује комутативну групу. Осим тога та група је изоморфна са адитивном групом $(\mathbb{C},+)$.

<u>*Дефиниција 13.2*</u> Ротација равни око тачке $O(0)$ за угао $\theta \in \left[0,2\pi\right)$ (ознака $R_{O,\theta}$) је пресликавање које свакој тачки z додељује тачку $ze^{i\theta}$ тј. $R_{O,\theta}(z)=ze^{i\theta}$.



Овако дефинисана ротација се поклапа са елементарним схватањем ротације за угао θ око тачке O. Уколико са M обележимо геометријску слику тачке z а са M' геометријску слику тачке $z'=R_{O,\theta}(z)$ биће угао $\measuredangle MOM'=\theta$ и $OM=OM'$:

Како је $z=re^{i\alpha}$, то добијамо $z'=R_{O,\theta}(z)=ze^{i\theta}=$

$$=re^{i\alpha}e^{i\theta}=re^{i(\alpha+\theta)} \Rightarrow \measuredangle MOM'=\arg\frac{z'}{z}=\arg\frac{re^{i(\alpha+\theta)}}{re^{i\alpha}}=\theta \text{ и}$$

$$OM'=\left|z'\right|=\left|re^{i(\alpha+\theta)}\right|=r=\left|z\right|=OM.$$

Ротација око O је изометрија:

$$\left|R_{O,\theta}(z_1)-R_{O,\theta}(z_2)\right|=\left|z_1e^{i\theta}-z_2e^{i\theta}\right|=\left|(z_1-z_2)e^{i\theta}\right|=\left|(z_1-z_2)\right|$$

Композиција двеју ротација око O (чији су углови α и β) је опет ротација око O (чији је угао $\alpha+\beta$):

$$(R_{O,\beta}\circ R_{O,\alpha})(z)=R_{O,\beta}(ze^{i\alpha})=(ze^{i\alpha})e^{i\beta}=z(e^{i\alpha}e^{i\beta})=ze^{i(\alpha+\beta)}=R_{O,\alpha+\beta}(z).$$

Уколико идентично пресликавање схватимо као ротацију за угао величине 0 (или $2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$), користећи претходну особину доказујемо да је $(R_{O,\theta})^{-1}=R_{O,-\theta}$.

Композиција ротација око O је комутативна:

$$(R_{O,\beta}\circ R_{O,\alpha})(z)=(ze^{i\alpha})e^{i\beta}=(ze^{i\beta})e^{i\alpha}=(R_{O,\alpha}\circ R_{O,\beta})(z).$$

Дакле скуп свих ротација око O чини комутативну групу.

Да бисмо дефинисали ротацију око произвољне тачке A (чија је комплексна координата a) уочимо да се ротација око тачке A за угао θ (елементарно схваћена) може приказати као композиција транслације за вектор $-a$, ротације за угао θ око O и транслације за вектор a. Пошто је $(T_a\circ R_{O,\theta}\circ T_{-a})(z)=(T_a\circ R_{O,\theta})(z-a)=T_a((z-a)e^{i\theta})=(z-a)e^{i\theta}+a$, биће:

Дефиниција 13.3 Ротација равни око тачке $A(a)$, за угао $\theta \in [0, 2\pi)$ је пресликавање које свакој тачки $M(z)$ додељује тачку M', са координатом $z' = R_{A,\theta}(z) = (z-a)e^{i\theta} + a$.

Пошто је $R_{A,\theta}(z) = (z-a)e^{i\theta} + a = ze^{i\theta} + a(1-e^{i\theta}) = ze^{i\theta} + k$, уочавамо да је $R_{A,\theta} = T_k \circ R_{O,\theta}$, где је $k = a(1-e^{i\theta})$.

Пошто су T_k и $R_{O,\theta}$ изометријске трансформације имамо да је и $R_{a,\theta}$ такође изометријска трансформација (што се лако може показати и директно):

$$\left|R_{A,\theta}(z_1) - R_{A,\theta}(z_2)\right| = \left|(z_1e^{i\theta} + k) - (z_2e^{i\theta} + k)\right| = \left|(z_1 - z_2)e^{i\theta}\right| = \left|(z_1 - z_2)\right|.$$

Овако дефинисана ротација око тачке A за угао θ се поклапа са елементарним схватањем ротације око тачке A за угао θ. Уколико са A, M и M' обележимо геометријске слике од a, z и $z' = R_{A,\theta}(z)$ биће $M'A = |z'-a| = \left|e^{i\theta}(z-a) + a - a\right| = \left|e^{i\theta}(z-a)\right| = |(z-a)| = MA$,

$$\measuredangle MAM' = \arg\frac{z'-a}{z-a} = \arg\frac{e^{i\theta}(z-a)}{z-a} = \theta.$$

Из дефиниције је јасно да је ротација око произвољне тачке за угао 0 идентитета.

Тврђење 13.1 Две ротације, различите од идентитете, $R_{A,\alpha}$ и $R_{B,\beta}$ су једнаке ако је $a=b$ и $\alpha=\beta$.

Имамо да је $(z-a)e^{i\alpha} + a = (z-b)e^{i\beta} + b,\quad \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, за свако z. Стављајући $z=a$, добијамо: $a = (a-b)e^{i\beta} + b \Rightarrow (a-b)(e^{i\beta} - 1) = 0$, пошто је ротација $R_{B,\beta}$ различита од идентитете, биће $\beta \neq 0 \Rightarrow e^{i\beta} \neq 1$, па је $a=b$. Сада имамо $(z-a)e^{i\alpha} + a = (z-a)e^{i\beta} + a \Rightarrow$ $\Rightarrow e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Rightarrow \alpha = \beta$, јер је $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. □

$$R_{A,\beta} \circ R_{A,\alpha}(z) = R_{A,\beta}\left((z-a)e^{i\alpha} + a\right) = \left((z-a)e^{i\alpha} + a - a\right)e^{i\beta} + a = (z-a)e^{i(\alpha+\beta)} + a = R_{A,\alpha+\beta}(z)$$

Дакле композиција двеју ротација око исте тачке је такође ротација око те тачке за угао који је једнак збиру углова полазних ротација. Уколико идентично пресликавање схватимо као ротацију за угао 0, одавде имамо да је $(R_{A,\theta})^{-1} = R_{A,-\theta}$.

Такође је $R_{A,\alpha} \circ R_{A,\beta}(z) = R_{A,\beta+\alpha}(z) = R_{A,\alpha+\beta}(z) = R_{A,\beta} \circ R_{A,\alpha}(z)$, па имамо да скуп ротација око фиксиране тачке уз композицију пресликавања чини комутативну групу.

Лема 13.1 Композиција $T_v \circ R_{O,\theta},\ \theta \neq 2k\pi$, је ротација око тачке $a = \dfrac{v}{1-e^{i\theta}}$ за угао θ.

Имамо да је $T_v \circ R_{O,\theta}(z) = ze^{i\theta} + v$, ако постоји a које задовољава услове тврђења биће:

$ze^{i\theta} + v = (z-a)e^{i\theta} + a \Rightarrow v = a(1-e^{i\theta}),\quad \theta \neq 0 \Rightarrow a = \dfrac{v}{1-e^{i\theta}}$. Непосредно из дефиниције $R_{A,\theta}$ се проверава да је $R_{A,\theta}(z) = ze^{i\theta} + v$, одакле следи тврђење. □

Тврђење 13.2 Композиција ротација $R_{A,\alpha}$ и $R_{B,\beta}$ за $\alpha + \beta \neq 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$, је ротација $R_{C,\alpha+\beta}$, (тачније за угао $\varphi =_{2\pi} \alpha + \beta,\ \varphi \in [0, 2\pi)$) где је тачка $C(c)$ задата изразом $c = \dfrac{ae^{i\beta}(1-e^{i\alpha}) + b(1-e^{i\beta})}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}$, док је у случају $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ то транслација за вектор $v = (b-a)(1-e^{i\beta})$.

$$R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}(z) = R_{B,\beta}\left((z-a)e^{i\alpha} + a\right) = \left((z-a)e^{i\alpha} + a - b\right)e^{i\beta} + b = ze^{i(\alpha+\beta)} + ae^{i\beta}(1-e^{i\alpha}) + b(1-e^{i\beta})$$

Уколико обележимо $v = ae^{i\beta}(1-e^{i\alpha}) + b(1-e^{i\beta})$ имаћемо $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}(z) = T_v \circ R_{O,\alpha+\beta}$. По леми, у случају $\alpha + \beta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ имамо да је ова композиција једнака $R_{C,\alpha+\beta}$, где је

$c = \dfrac{v}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}}$. Враћајући замену за v добијамо тврђење.

У случају да је $\alpha + \beta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, имамо да је $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}(z) = z + v = T_v(z)$, при чему је $v = ae^{i\beta}(1 - e^{i\alpha}) + b(1 - e^{i\beta}) = ae^{i\beta} - ae^{i(\alpha+\beta)} + b - be^{i\beta} = (b - a)(1 - e^{i\beta})$, чиме је доказан и други део тврђења. □

Последица 13.1 Нека је $I = R_{A_n,\theta_n} \circ R_{A_{n-1},\theta_{n-1}} \circ \ldots \circ R_{A_2,\theta_2} \circ R_{A_1,\theta_1}$ композиција n ротација и нека је $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$. У случају да је $\theta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, је $I = R_{C,\theta}$ (за неку тачку C), док је, у случају да је $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $I = T_v$ (за неки вектор v). □

Користећи претходно тврђење показује се:

Тврђење 13.3 Две централне ротације $R_{A,\alpha}$ и $R_{B,\beta}$, које су различите од идентичног пресликавања, комутирају акко се тачке a и b поклапају.

Ако је $\alpha + \beta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, биће $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha} = R_{C,\alpha+\beta}$, $c = \dfrac{ae^{i\beta}(1 - e^{i\alpha}) + b(1 - e^{i\beta})}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}}$ и $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta} = R_{D,\alpha+\beta}$, $d = \dfrac{be^{i\alpha}(1 - e^{i\beta}) + a(1 - e^{i\alpha})}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}}$.

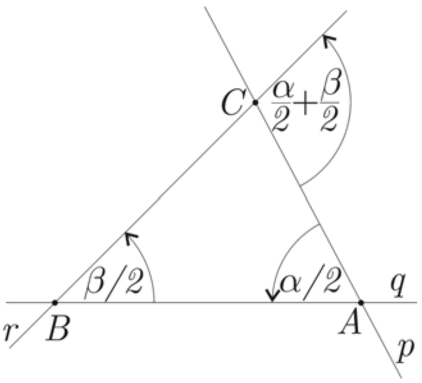
Ако је $\alpha + \beta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, биће $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha} = T_{v_1}$, $v_1 = ae^{i\beta}(1 - e^{i\alpha}) + b(1 - e^{i\beta})$ и $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta} = T_{v_2}$, $v_2 = be^{i\alpha}(1 - e^{i\beta}) + a(1 - e^{i\alpha})$.

Дакле $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha} = R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta} \Rightarrow ae^{i\beta}(1 - e^{i\alpha}) + b(1 - e^{i\beta}) = be^{i\alpha}(1 - e^{i\beta}) + a(1 - e^{i\alpha})$. (Овде користимо чињеницу да су две ротације једнаке ако су им исти центри и углови, а две транслације су једнаке ако имају исте векторе.) Трансформишући последњу једнакост добија се $(a - b)(1 - e^{i\alpha})(1 - e^{i\beta}) = 0$. Због услова да су ротације различите од идентичног пресликавања имамо да је $e^{i\alpha} \neq 1,\quad e^{i\beta} \neq 1$, па је a=b.

С друге стране, ако је a=b, тврђење је већ показано када је доказивана комутативност групе ротација око фиксиране тачке A. □

Класичан геометријски приступ је да се изометријске трансформације изражавају преко најједноставнијих, тј. преко осних рефлексија. Може се показати да се транслација за вектор $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$ може представити као композиција осних рефлексија S_p и S_q таквих да је права p нормална у тачки P на праву $s = PP'$, а ако са Q обележимо средиште дужи PP', права q је нормална на праву s у тачки Q. Дакле важи $T_{\vec{v}} = T_{\overrightarrow{PP'}} = S_q \circ S_p$.

Такође се показује да се централна ротација око тачке S за угао ω може представити као композиција осних рефлексија S_p и S_q, где су p и q произвољне праве које се секу у тачки S под углом ω/2. Дакле важи $R_{S,\omega} = S_q \circ S_p$.



Ову чињеницу можемо искористити да бисмо разматрали композицију двеју ротација са различитим центрима.

Да би представили ротацију $R_{A,\alpha}$ изабраћемо праве p и q такве да је q=AB и $\measuredangle(p,q) = \dfrac{\alpha}{2}$, а за $R_{B,\beta}$ бирамо праве q и r такве да је q=AB и $\measuredangle(q,r) = \dfrac{\beta}{2}$. Дакле важи:

$$R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha} = \left(S_r \circ S_q\right) \circ \left(S_q \circ S_p\right) = S_r \circ \left(S_q \circ S_q\right) \circ S_p = S_r \circ S_p.$$

(Овде је коришћена чињеница да је осна рефлексија инволуција тј. да је $S_q^{-1} = S_q$.) Сада имамо: ако се p и r секу у тачки C (а ово се дешава у случају да је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\neq\pi$) горња композиција је ротација за двоструки оријентисани угао између правих p и r тј. за угао $\alpha+\beta$, што записујемо са $R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}=R_{C,\alpha+\beta}$.

У случају да се p и r не секу, тј. $p\parallel r$ (ово се дешава када је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\pi$) имамо да је $R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}=T_v$, где је v вектор чији је интензитет једнак двоструком растојању између правих p и r усмерен од p ка r.

Сада ћемо показати да је ова геометријска конструкција у складу са израчунавањем раније урађеним код *Тврђења 13.2*.

I. случај: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\neq\pi$. Нека је права $q=AB$. Тачка C је пресек правих p и r изабраних тако да је $\measuredangle(p,q)=\frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle(q,r)=\frac{\beta}{2}$. Дакле тачка C је таква да важи $\measuredangle CAB=\frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ABC=\frac{\beta}{2}$. Ако су a, b, c комплексне координате тачака A, B, C имамо да је $\measuredangle CAB=\arg\frac{b-a}{c-a}$ и $\measuredangle ABC=\arg\frac{c-b}{a-b}$, дакле $\arg\frac{b-a}{c-a}=\frac{\alpha}{2}$ и $\arg\frac{c-b}{a-b}=\frac{\beta}{2}$.

Показује се да c израчунато у *Тврђењу 13.2* задовољава оба ова услова, па је c управо комплексна координата тачке C добијене претходном геометријском конструкцијом.

Пошто је $1-e^{i\varphi}=1-\cos\varphi-i\sin\varphi=-2ie^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$, узимајући у обзир да је $c=\frac{ae^{i\beta}(1-e^{i\alpha})+b(1-e^{i\beta})}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}$ биће:

$$\frac{c-b}{a-b}=\left(\frac{ae^{i\beta}(-2i)e^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}-2bie^{i\frac{\beta}{2}}\sin\frac{\beta}{2}}{-2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}-b\right)\frac{1}{a-b}=e^{i\frac{\beta}{2}}\frac{ae^{i\frac{\beta}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}+b\sin\frac{\beta}{2}-be^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{(a-b)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$

$$=e^{i\frac{\beta}{2}}\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}+be^{-i\frac{\beta}{2}}\left((\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)}{(a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=e^{i\frac{\beta}{2}}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\Rightarrow\arg\frac{c-b}{a-b}=\frac{\beta}{2}.$$

Сличним поступком се доказује и $\arg\frac{b-a}{c-a}=\frac{\alpha}{2}$.

II. случај: $\alpha+\beta=2\pi$. У овом случају је израчунато у *Тврђењу 13.2* да је $R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}=T_v$ при чему је $v=(b-a)(1-e^{i\beta})$. Да би показали да је овако добијен вектор исти као и вектор који се добија геометријском конструкцијом треба показати да је његов интензитет једнак двоструком растојању d између правих p и r и да је он нормалан на p (или r).

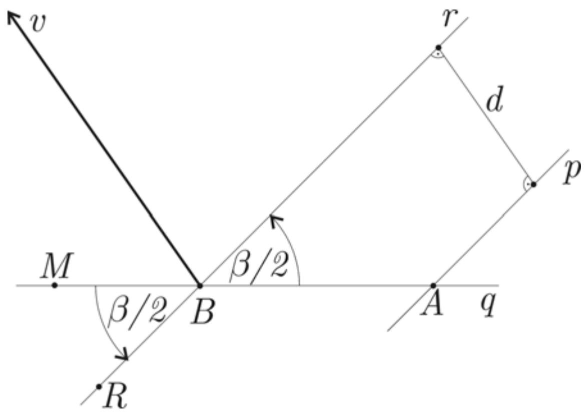
$$v=(b-a)(1-e^{i\beta})=(b-a)(-2i)e^{i\frac{\beta}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\quad\Rightarrow\quad|v|=2|b-a|\sin\frac{\beta}{2}.$$

С друге стране, по конструкцији је:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{d}{AB}\quad\Rightarrow\quad d=AB\sin\frac{\beta}{2}=|b-a|\sin\frac{\beta}{2}\quad\Rightarrow\quad|v|=2d\,.$$

Како је $\measuredangle(\vec{v},\overrightarrow{AB})=\arg\frac{b-a}{v}$, и пошто је: $\frac{v}{b-a}=-2ie^{i\frac{\beta}{2}}\sin\frac{\beta}{2}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\beta}{2}}\sin\frac{\beta}{2}=$

$= 2e^{i\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\sin\frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-a}{v} = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}$, биће $\arg\frac{b-a}{v} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$.



Нека је M тачка праве q таква да је A-B-M и R тачка праве r таква да је оријентисани угао $\measuredangle MBR = \frac{\beta}{2}$. Тада је:

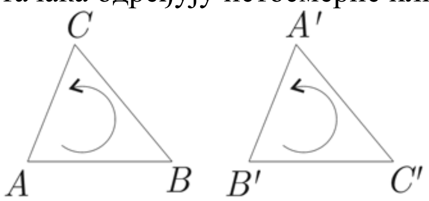
$\measuredangle(\vec{v}, \overrightarrow{BR}) = \measuredangle(\vec{v}, \overrightarrow{BM}) + \measuredangle(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BR}) = \measuredangle(\vec{v}, \overrightarrow{AB}) + \measuredangle MBR =$

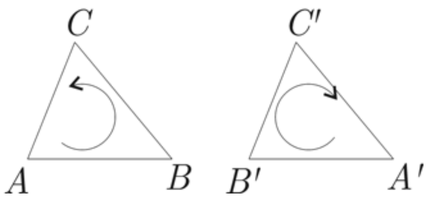
$= \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2}.$

Овим је показано да је вектор $\vec{v}$ нормалан на праву r и да му је интензитет једнак двоструком растојању између правих p и r.

Класификација изометријских трансформација

Према томе да ли мењају оријентацију углова изометријске трансформације делимо на директне (оне не мењају оријентацију углова) и индиректне (оне мењају оријентацију углова). Да бисмо установили да ли је нека изометријска трансформација равни E^2 директна или индиректна довољно је утврдити да ли неке две одговарајуће тројке неколинеарних тачака одређују истосмерне или супротноусмерене троуглове.





<u>*Дефиниција 13.4*</u> Рећи ћемо да су троуглови ABC и $A'B'C'$ једнако оријентисани (тј. истосмерни) акко су $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle A'B'C'$ истовремено позитивни или негативни.

Тако нпр. истосмерни подударни троуглови ABC и $A'B'C'$ одређују директну док супротно усмерени подударни троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ одређују индиректну изометријску трансформацију.

Следећа теорема је преузета из геометријских уџбеника и наводимо је без доказа.

<u>*Теорема 13.1*</u> Свака директна изометријска трансформација Еуклидске равни представља коинциденцију, транслацију или централну ротацију. □

Користећи резултате који су раније доказани добијамо да се свака директна изометријска трансформација може записати као комплексна функција облика $f(z) = e^{i\theta}z + v$. Ако је директна изометријска трансформација коинциденција имамо да је $f(z) = z = e^{0i}z + 0$, ако је директна изометријска трансформација транслација за вектор v имамо да је $f(z) = e^{0i}z + v$ њен запис у облику комплексне функције. Ако је директна изометријска трансформација ротација око тачке $A(a)$ за угао θ као последицу Леме 13.1 имамо да је $R_{A,\theta} = T_v \circ R_{O,\theta}$, где је $v = a(1-e^{i\theta})$. Дакле $R_{A,\theta}(z) = e^{i\theta}z + v$, па се и ротација може представити у наведеном облику.

Коњуговање комплексног броја можемо схватити као осну рефлексију у односу на реалну осу. Пошто је осна рефлексија индиректна изометријска трансформација биће и комплексно коњуговање индиректна изометријска трансформација. Уколико са $J(z)$ обележимо произвољну индиректну изометријску трансформацију равни записану у облику комплексне функције имаћемо да је $\overline{J(z)}$ директна изометријска трансформација равни јер је то композиција двеју индиректних изометријских трансформација (тј. изометријске трансформације J и комплексног коњуговања). По претходном резултату имамо да је:

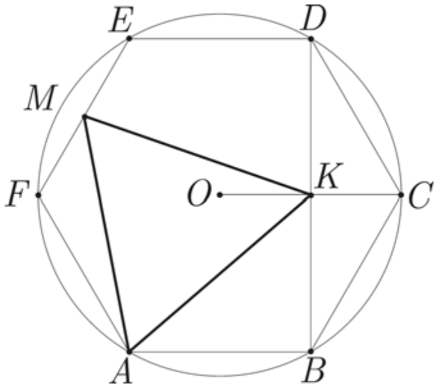
$\overline{J(z)} = e^{i\theta}z + v \quad \Rightarrow \quad J(z) = \overline{e^{i\theta}z + v} = e^{-i\theta}\bar{z} + \bar{v} = e^{i\varphi}\bar{z} + w$, где је $\varphi = -\theta$ и $w = \bar{v}$.

Дакле, свака индиректна изометријска трансформација равни се у облику комплексне функције може записати као $J(z) = e^{i\varphi}\bar{z} + w$.

Закључак: Група изометријских трансформација је генерисана коњугацијом, ротацијама око *O* и транслацијама, при чему је подгрупа директних изометријских трансформација генерисана ротацијама око *O* и транслацијама.

Пример 13.1 Нека је *ABCDEF* правилан шестоугао, *K*, средиште дијагонале *BD*, *M* средиште странице *EF*. Доказати да је троугао *AMK* једнакостраничан.

Нека се центар шестоугла *ABCDEF* поклапа са координатним почетком и нека је страница шестоугла дужине *a*. Тада можемо узети да је $C(a), D(ae^{i\frac{\pi}{3}}), E(ae^{i\frac{2\pi}{3}}), F(ae^{\pi})$, $A(\tilde{a}) = A(ae^{i\frac{4\pi}{3}}), B(ae^{i\frac{5\pi}{3}})$. Ако ставимо *K(k), M(m)*, биће $k = \dfrac{ae^{i\frac{\pi}{3}} + ae^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = \dfrac{a}{2}$,



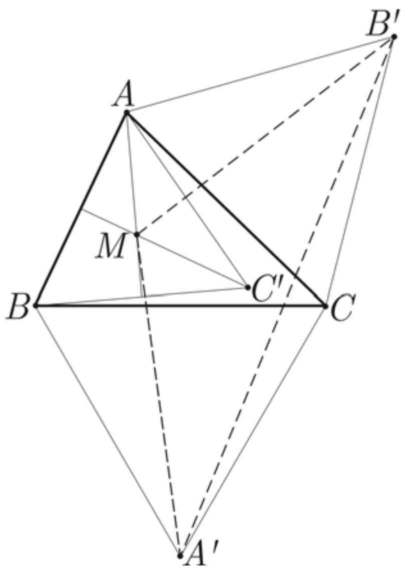
$$m = \frac{ae^{i\frac{2\pi}{3}} + ae^{i\pi}}{2} = \frac{a\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - a}{2} = \left(-\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a.$$

$$R_{A,\frac{\pi}{3}}(k) = (k - \tilde{a})e^{i\frac{\pi}{3}} + \tilde{a} = \left(\frac{a}{2} - ae^{i\frac{4\pi}{3}}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} + ae^{i\frac{4\pi}{3}} =$$

$$= \frac{a}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - ae^{i\frac{5\pi}{3}} + ae^{i\frac{4\pi}{3}} = a\left(-\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = m.$$

Одавде следи да је троугао *AMK* једнакостраничан. ◇

Пример 13.2 На страницама троугла *ABC* конструисани су једнакостранични троуглови $A'BC$, $B'AC$, на спољашњу страну, $C'AB$, на унутрашњу. Ако је M центар троугла $C'AB$, доказати да је $A'B'M$ једнакокраки троугао и да је $\measuredangle A'MB' = \dfrac{2\pi}{3}$.



Нека је *A*(*a*), *B*(*b*), *C*(*c*), тада је $R_{B',\frac{\pi}{3}}(a) = c$. Па је $(a - b')e^{i\frac{\pi}{3}} + b' = c \Rightarrow b' = \dfrac{c - ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$, слично је $R_{A',\frac{\pi}{3}}(c) = b$ и $a' = \dfrac{b - ce^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$, као и $R_{C',\frac{\pi}{3}}(a) = b$ и $c' = \dfrac{b - ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$. Сада је:

$$c' = \frac{b - ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b - ae^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = be^{i\frac{\pi}{3}} - ae^{i\frac{2\pi}{3}}.$$ Па имамо:

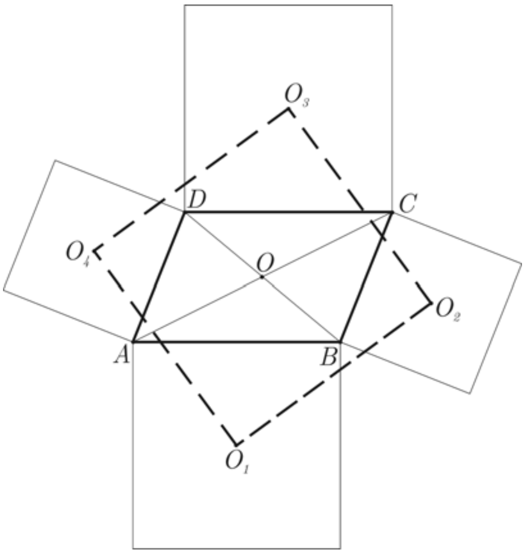
$$m = \frac{a + b + c'}{3} = \frac{1}{3}a\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) + \frac{1}{3}b\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}a + i\frac{\sqrt{3}}{6}b.$$

Да би доказали тврђење задатка довољно је да докажемо да је $R_{M,\frac{2\pi}{3}}(a') = b'$, тј. $(a' - m)e^{i\frac{2\pi}{3}} + m = b'$. Имамо да је:

$$(a'-m)e^{i\frac{2\pi}{3}}+m=a'e^{i\frac{2\pi}{3}}+m\left(1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=\frac{b-ce^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}e^{i\frac{2\pi}{3}}+\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{6}i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-b+ce^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{3a+3b+b-a}{4}+\frac{b-a-a-b}{4}i\sqrt{3}=ce^{i\frac{\pi}{3}}-a\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=ce^{i\frac{\pi}{3}}-ae^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{c-ae^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=b'.\diamond$$

Пример 13.3 Над страницама паралелограма на спољашњу страну су конструисани квадрати. Доказати да њихови центри образују квадрат.



Нека су комплексне координате дате одговарајућим малим словима. Осим тога нека је координатни почетак у пресеку дијагонала паралелограма, тада је: $c=-a$, $d=-b$. Биће:

$$R_{O_1,-\frac{\pi}{2}}(a)=b\Rightarrow(a-o_1)e^{-i\frac{\pi}{2}}+o_1=b\Rightarrow -ai+o_1(1+i)=b\Rightarrow$$

$\Rightarrow o_1=\dfrac{b+ai}{1+i}$, слично је $R_{O_2,-\frac{\pi}{2}}(b)=c\Rightarrow o_2=\dfrac{c+bi}{1+i}$,

$R_{O_3,-\frac{\pi}{2}}(c)=d\Rightarrow o_3=\dfrac{d+ci}{1+i}$ и $R_{O_4,-\frac{\pi}{2}}(d)=a\Rightarrow o_4=\dfrac{a+di}{1+i}$.

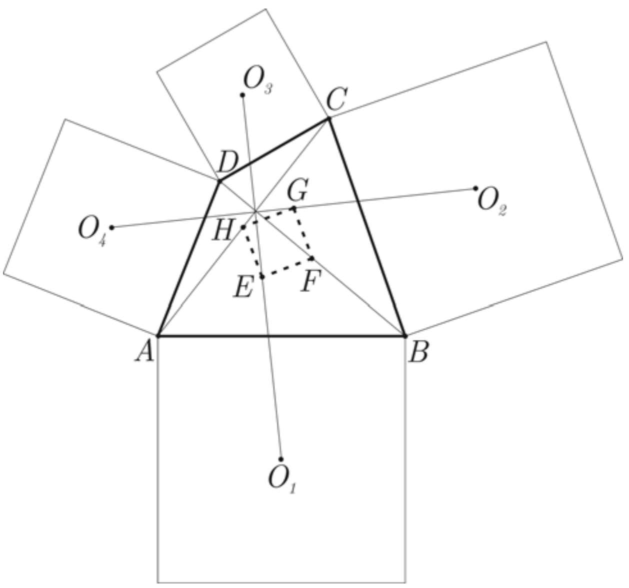
Одавде је $o_2=\dfrac{-a+bi}{1+i}, o_3=\dfrac{-b-ai}{1+i}, o_4=\dfrac{a-bi}{1+i}$.

Сада имамо

$$\overrightarrow{O_1O_2}=o_2-o_1=\frac{-(a+b)+(b-a)i}{1+i}=\overrightarrow{O_4O_3},$$

$\overrightarrow{O_2O_3}=o_3-o_2=\dfrac{a-b-(b+a)i}{1+i}=\ i\dfrac{-(a+b)+(b-a)i}{1+i}=i(o_2-o_1)$, што значи да је $O_1O_2O_3O_4$ квадрат. ◊

Пример 13.4 Над страницама четвороугла на спољашњу страну су конструисани квадрати. Ако је O_1 центар квадрата над страницом AB, O_2 центар квадрата над страницом BC, O_3 центар квадрата над страницом CD, O_4 центар квадрата над страницом AD, E средиште дужи O_1O_3, F средиште дужи BD, G средиште дужи O_2O_4, H средиште дужи AC, тада је $EFGH$ квадрат.



Нека су комплексне координате дате одговарајућим малим словима. Биће:

$$R_{O_1,\frac{\pi}{2}}(b)=a\Rightarrow(b-o_1)e^{i\frac{\pi}{2}}+o_1=a\Rightarrow o_1=\frac{a-bi}{1-i},$$

слично је $R_{O_2,\frac{\pi}{2}}(c)=b\Rightarrow o_2=\dfrac{b-ci}{1-i}$,

$R_{O_3,\frac{\pi}{2}}(d)=c\Rightarrow o_3=\dfrac{c-di}{1-i}$, и

$R_{O_4,\frac{\pi}{2}}(a)=d\Rightarrow o_4=\dfrac{d-ai}{1-i}$. Одавде је:

$e=\dfrac{o_1+o_3}{2}=\dfrac{a+c-(b+d)i}{2(1-i)},\ g=\dfrac{o_2+o_4}{2}=$

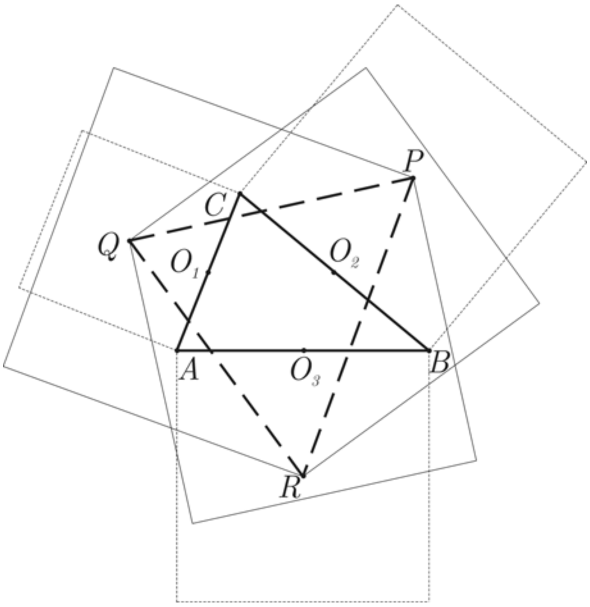
$=\dfrac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)},\ f=\dfrac{b+d}{2},\ h=\dfrac{a+c}{2}$, па

имамо: $\overrightarrow{EF}=f-e=\dfrac{b+d}{2}-\dfrac{a+c-(b+d)i}{2(1-i)}=\dfrac{b+d}{2}\left(1+\dfrac{i}{1-i}\right)-\dfrac{a+c}{2(1-i)}=\dfrac{b+d}{2(1-i)}-\dfrac{a+c}{2(1-i)}$,

$$\overrightarrow{HG}=g-h=\frac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2}\left(1+\frac{i}{1-i}\right)=\frac{b+d}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2(1-i)}=\overrightarrow{EF},$$

$$\overrightarrow{FG}=g-f=\frac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)}-\frac{b+d}{2}=\frac{b+d}{2}\left(\frac{1}{1-i}-1\right)-\frac{(a+c)i}{2(1-i)}=\frac{(b+d)i}{2(1-i)}-\frac{(a+c)i}{2(1-i)}=i\overrightarrow{EF},$$ одакле следи да је *EFGH* квадрат. ◇

Пример 13.5 Над страницама троугла *ABC* са спољашње стране конструисани су квадрати чији су центри *P, Q, R*. Над страницама троугла *PQR* са унутрашње стране су конструисани квадрати. Доказати да су њихови центри средишта страница троугла *ABC*.



Нека је O_1 центар квадрата над страницом *PR*, O_2 центар квадрата над страницом *QR*, O_3 центар квадрата над страницом *PQ*. Тада је:

$$R_{Q,\frac{\pi}{2}}(a)=c\Rightarrow (a-q)e^{i\frac{\pi}{2}}+q=c\Rightarrow q=\frac{c-ai}{1-i}$$

$$R_{P,\frac{\pi}{2}}(c)=b\Rightarrow p=\frac{b-ci}{1-i},\ R_{R,\frac{\pi}{2}}(b)=a\Rightarrow r=\frac{a-bi}{1-i},$$

$$R_{O_1,\frac{\pi}{2}}(r)=p\Rightarrow o_1=\frac{p-ri}{1-i},$$

$$R_{O_2,\frac{\pi}{2}}(q)=r\Rightarrow o_2=\frac{r-qi}{1-i},$$

$$R_{O_3,\frac{\pi}{2}}(p)=q\Rightarrow o_3=\frac{q-pi}{1-i}.$$

Замењујући *p, q r* у претходне три формуле добијамо $o_1=\frac{a+c}{2}, o_2=\frac{b+c}{2}, o_3=\frac{a+b}{2}$, одакле следи тврђење задатка. ◇

Пример 13.6 Дат је троугао $A_1A_2A_3$ и тачка P_0 у његовој равни. Нека је $A_s=A_{s-3}, s\geq 4$. Конструисаћемо низ тачака P_1, P_2, P_3 , ... тако да се ротацијом око A_{k+1} за угао $-\frac{2\pi}{3}$ тачка P_k слика у тачку P_{k+1}. Показати да, ако је $P_{1986}=P_0$, тада је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан.

(Уместо броја 1986 може да стоји било који број дељив са 3, рецимо 2007 или 2010.)

Имамо да је $R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}(p_0)=p_1$, $R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}(p_1)=p_2$, $R_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}(p_2)=p_3$, $R_{A_4,-\frac{2\pi}{3}}(p_3)=R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}(p_3)=p_4$, ... $R_{A_{1986},-\frac{2\pi}{3}}(p_{1985})=R_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}(p_{1985})=p_{1986}=p_0$. Па је $\left(R_{A_{1986},-\frac{2\pi}{3}}\circ\ldots\circ R_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}\right)(p_0)=p_0$. Осим тога је $R_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=T_v$, јер је $3\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-2\pi$. Због тога је $R_{A_{1986},-\frac{2\pi}{3}}\circ\ldots\circ R_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=\left(T_v\right)^{662}=T_{662v}=T_w$, па је $T_w(p_0)=p_0$. Пошто је транслација која има фиксну тачку идентитета, биће $T_w=id\Rightarrow w=0\Rightarrow 662v=0\Rightarrow v=0\Rightarrow T_v=id\Rightarrow R_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=id\Rightarrow R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=R_{A_3,\frac{2\pi}{3}}$.

По геометријској конструкцији резултата композиције ротација са различитим центрима имамо да је $R_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ R_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=R_{S,\frac{2\pi}{3}}$, где је $\{S\}=l_1\cap l_2, \measuredangle(l_1,A_1A_2)=-\frac{\pi}{3}, \measuredangle(A_1A_2,l_2)=-\frac{\pi}{3}$. Дакле *S* је треће теме једнакостраничног троугла странице A_1A_2. Пошто је $R_{A_3,\frac{2\pi}{3}}=R_{S,\frac{2\pi}{3}}$ биће $A_1=S$, па је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан. ◇

I. 14. Трансформације сличности Еуклидске равни у облику комплексног пресликавања

Дефиниција 14.1 Нека је k реалан позитиван број. Трансформацијом сличности са коефицијентом k називамо бијективну трансформацију која преводи сваке две тачке X, Y у тачке X', Y' такве да је $X'Y' = kXY$.

Из дефиниције трансформације сличности следи да су изометријске трансформације специјалан случај трансформација сличности за k=1. Такође из дефиниције следи да трансформација сличности чува односе растојања јер $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{kAB}{kCD} = \dfrac{AB}{CD}$. Специјалан случај трансформације сличности је хомотетија или централна дилатација (ознаке $\mathcal{H}_{S,k}$ или D_S^k).

Дефиниција 14.2 Нека је S произвољна тачка и k реалан број различит од 0. Хомотетија (дилатација) са средиштем S и коефицијентом k је трансформација која сваку тачку X преводи у X' тако да је $\overrightarrow{SX'} = k\overrightarrow{SX}$.

Из дефиниције је јасно да се хомотетија са центром у координатном почетку O и коефицијентом k може представити у облику комплексне функције са $h_{O,k}(z) = k \cdot z$ или $D_O^k(z) = k \cdot z$.

Дефиниција 14.3 Дилатациона ротација са центром у координатном почетку O, коефицијентом k ($k > 0$) и углом α ($\alpha \in (-\pi, \pi]$) је композиција једне хомотетије (дилатације) са центром у O и коефицијентом k и ротације са центром у O и углом α (ознака $D_O^{k,\alpha}$).

У комплексном облику ово пресликавање се може приказати у облику $D_O^{k,\alpha}(z) = (R_{O,\alpha} \circ D_O^k)(z) = R_{O,\alpha}(kz) = (kz)e^{i\alpha} = k(ze^{i\alpha}) = D_O^k(ze^{i\alpha}) = (D_O^k \circ R_{O,\alpha})(z)$. Дакле, редослед ротације $R_{O,\alpha}$ и дилатације D_O^k није битан. Осим тога је $D_O^{k,\alpha}(z) = (ke^{i\alpha})z$, па ако са a обележимо комплексан број $ke^{i\alpha}$ имаћемо да $D_O^{k,\alpha}(z)$ одговара множењу az.

Имамо да је:

$$(D_O^{k_2,\beta} \circ D_O^{k_1,\alpha})(z) = D_O^{k_2,\beta}(k_1 e^{i\alpha} z) = (k_2 e^{i\beta})(k_1 e^{i\alpha})z = k_1 k_2 e^{i(\alpha+\beta)} z = D_O^{k_1 k_2, \alpha+\beta}(z). \quad (*)$$

Одавде се може закључити да је композиција дилатационих ротација са центром у O опет дилатациона ротација са истим центром, а ако идентично пресликавање схватимо као $D_O^{1,0}$ закључујемо да је $(D_O^{k,\alpha})^{-1} = D_O^{\frac{1}{k},-\alpha}$, па дилатационе ротације око O формирају групу у односу на композицију пресликавања. (Комутативност те групе следи из (*)) Осим тога из (*) следи да је та група изоморфна са мултипликативном групом $(\mathbb{C}, \cdot)$.

Дилатациона ротација са центром у произвољној тачки S се (геометријски) дефинише као композиција хомотетије $\mathcal{H}_{S,k}$ (дилатације D_S^k) и ротације $R_{S,\alpha}$. Одавде следи да је дилатациона ротација трансформација сличности.

Интуитивно је јасно да се дилатациона ротација око тачке $S(s)$ може представити као композиција транслације за вектор -s, дилатационе ротације око координатног почетка O за исти угао и исти коефицијент и транслације за вектор s, тј. $D_S^{k,\alpha} = T_s \circ D_O^{k,\alpha} \circ T_{-s}$, па је дакле $D_S^{k,\alpha}(z) = (T_s \circ D_O^{k,\alpha} \circ T_{-s})(z) = (z-s)ke^{i\alpha} + s$, што се може употребити за дефиницију дилатационе ротације око тачке S као комплексне функције.

Дефиниција 14.4 Нека је $S(s)$ произвољна тачка равни, k позитиван реалан број и угао α ($\alpha \in (-\pi, \pi]$ или $\alpha \in [0, 2\pi)$). Дилатациона ротација са центром S, коефицијентом k и углом α је пресликавање које свакој тачки равни $M(z)$ додељује тачку $M'(z')$ тако да је

$z' = D_S^{k,\alpha}(z) = (z-s)ke^{i\alpha} + s$.

Имамо да је $D_S^{k,\alpha}(z) = (z-s)ke^{i\alpha} + s = ke^{i\alpha}z + s(1-ke^{i\alpha})$, па ако са v обележимо вектор $v = s(1-ke^{i\alpha})$ имамо да је $D_S^{k,\alpha}(z) = T_v \circ D_O^{k,\alpha}$. Тј. свака дилатациона ротација са центром у *S*, коефицијентом *k* и углом α се може претставити као композиција дилатационе ротације са центром у *O*, коефицијентом *k* и углом α и транслације за вектор $v = s(1-ke^{i\alpha})$.

Обрнуто, композиција $T_v \circ D_O^{k,\alpha}$ је за $ke^{i\alpha} \neq 1$ дилатациона ротација са центром у *S*, коефицијентом *k* и углом α, при чему је $s = \dfrac{v}{1-ke^{i\alpha}}$. Ово следи из: $ke^{i\alpha}z + v = (z-s)ke^{i\alpha} + s \Rightarrow$

$\Rightarrow v = s(1-ke^{i\alpha}) \Rightarrow s = \dfrac{v}{1-ke^{i\alpha}}$. (За $ke^{i\alpha} = 1$ претходна композиција је транслација.)

Уколико трансформацију сличности са коефицијентом *k* обележимо са $\mathcal{S}^k$ имаћемо да је $\mathcal{J} = D_P^{\frac{1}{k}} \circ \mathcal{S}^k$ изометријска трансформација (овде је тачка *P* произвољна), јер ако је $\mathcal{S}^k(XY) = X'Y'$ и $D_P^{\frac{1}{k}}(X'Y') = X''Y''$, биће $X'Y' = kXY, \quad X''Y'' = \dfrac{1}{k}X'Y' \Rightarrow X''Y'' = XY$.

Сада је $\mathcal{S}^k = D_P^k \circ \mathcal{J}$. Пошто је хомотетија равни (тј. дилатација равни) директна трансформација сличности имамо да је $\mathcal{S}^k$ директна трансформација сличности акко је $\mathcal{J}$ директна изометријска трансформација. Сада ћемо се позвати на једно прилично очигледно геометријско тврђење.

<u>*Тврђење 14.1*</u> Директна изометријска трансформација еуклидске равни је једнозначно одређена ако су задата два пара одговарајућих тачака.

(Скица доказа: Задато је *A, B,* $A' = \mathcal{J}(A)$, $B' = \mathcal{J}(B)$. Ако је *C* произвољна тачка, мора бити $A'C' = AC$ и $B'C' = BC$. За *C* фиксирано постоје тачно две тачке C' које задовољавају ова два услова, али је само један од троуглова $A'B'C'$ исте оријентације као и *ABC*.) □

Користећи ово тврђење имамо да је директна трансформација сличности једнозначно одређена са два пара одговарајућих тачака. Нека су то тачке *A, B,* $A' = \mathcal{S}^k(A)$, $B' = \mathcal{S}^k(B)$, и нека су њихове комплексне координате редом z_1, z_2, z_1', z_2'. Тада постоји пресликавање $f(z) = az + b$, такво да је $f(z_1) = z_1'$ и $f(z_2) = z_2'$, јер: $z_1' = az_1 + b, z_2' = az_2 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{z_1' - z_2'}{z_1 - z_2}, \quad b = \dfrac{z_1 z_2' - z_2 z_1'}{z_1 - z_2}$, при чему је $z_1 \neq z_2$ јер су тачке *A* и *B* различите. Дакле, имамо:

<u>*Тврђење 14.2*</u> Свака директна трансформација сличности која различите тачке $A(z_1)$ и $B(z_1)$ слика у $A'(z_1')$ и $B'(z_2')$ се може представити у облику $f(z) = az + b$, при чему је $a = \dfrac{z_1' - z_2'}{z_1 - z_2}, \quad b = \dfrac{z_1 z_2' - z_2 z_1'}{z_1 - z_2}$. □

Пресликавање $f(z) = az + b$, можемо записати у облику $f(z) = |a|e^{i\alpha}z + b, \quad \alpha = \arg a$, те је тако $f = T_b \circ D_O^{|a|,\alpha}$. По раније доказаном резултату, за $a \neq 1$, то је дилатациона ротација $D_S^{|a|,\alpha}$, где је $s = \dfrac{b}{1-|a|e^{i\alpha}} = \dfrac{b}{1-a}$. За $a=1$ пресликавање f је транслација T_b.

<u>*Последица 14.1*</u> Директна трансформација сличности је или дилатациона ротација или транслација. □

Уколико $\mathcal{S}^k$ индиректна трансформација сличности биће $\overline{\mathcal{S}^k}$ директна трансформација сличности па је $\overline{\mathcal{S}^k}(z)$ $=az+b$, тј. $\mathcal{S}^k(z)=\overline{a}\overline{z}+\overline{b}$. Стављајући да је $c=\overline{a}\in\mathbb{C}$, $d=\overline{b}\in\mathbb{C}$ имамо $\mathcal{S}^k(z)=c\overline{z}+d$. Значи свака индиректна трансформација сличности се може представити као композиција коњуговања, дилатационе ротације око *0* и транслације.

Приметимо да се за $|a|=|\overline{a}|=1$ добија представљање изометријске трансформације на начина како је споменуто у "Класификација изометријских трансформација".

Дакле, група директних трансформација сличности генерисана је дилатационим ротацијама око *0* и транслацијама, док је група трансформација сличности генерисана коњуговањем (тј. симетријом у односу на реалну осу, дилатационим ротацијама око *0* и транслацијама).

I. 15. Сличност троуглова

<u>*Тврђење 15.1*</u> Нека су комплексне координате тачака A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, редом a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Једнако оријентисани троуглови $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ су слични акко је: $\dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\dfrac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$. (*)

Ако је троугао $A_1A_2A_3$ директно сличан са троуглом $B_1B_2B_3$, то постоји директна трансформација сличности f таква да је $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, $f(a_3)=b_3$. Пошто је већ показано да је свака директна трансформација сличности f облика $f(z)=qz+p,\ q,p\in\mathbb{C}$, биће $b_1=qa_1+p$, $b_2=qa_2+p$, $b_3=qa_3+p$, па је $b_2-b_1=q(a_2-a_1), b_3-b_1=q(a_3-a_1)$, одакле следи тврђење.

Ако је за троуглове $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ испуњен услов (*), биће $\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}=\dfrac{b_3-b_1}{a_3-a_1}=$ $=q\in\mathbb{C}\Rightarrow b_2-b_1=q(a_2-a_1), b_3-b_1=q(a_3-a_1)\Rightarrow b_2=qa_2+(b_1-qa_1), b_3=qa_3+(b_1-qa_1).$ Нека је сада $p=b_1-qa_1$. Посматрајмо пресликавање $f(z)=qz+p$. По претходно доказаном то је директна трансформација сличности. Пошто је испуњено $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, $f(a_3)=b_3$, троуглови $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ су директно слични. □

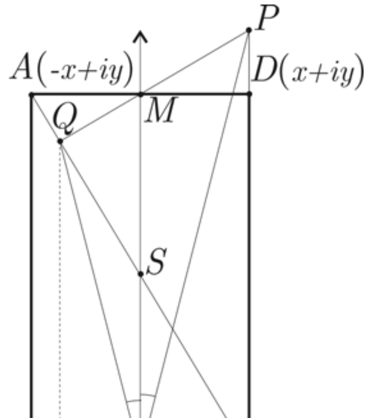
Услов (*) из претходне теореме је еквивалентан услову $\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=0$

јер је $\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2-a_1&a_3-a_1\\b_2-b_1&b_3-b_1\end{vmatrix}$.

<u>*Тврђење 15.2*</u> Нека су комплексне координате тачака A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, редом a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Супротно оријентисани троуглови $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ су слични акко је: $\dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\dfrac{\overline{b_2}-\overline{b_1}}{\overline{b_3}-\overline{b_1}}$.

Доказ је аналоган претходном, с тим што индиректна трансформација сличности има облик $f(z)=p\overline{z}+q,\ p,q\in\mathbb{C}$. □

<u>*Пример 15.1*</u> У правоугаонику $ABCD$ тачка M је средиште странице AD, N је средиште странице BC. На продужетку странице DC, иза тачке D дата је тачка P. Означићемо са Q тачку пресека правих PM и AC. Доказати да је $\measuredangle QNM=\measuredangle MNP$.



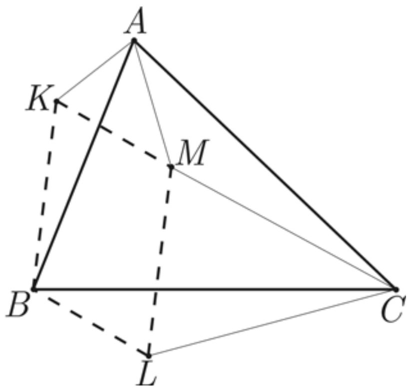
Нека је координатни почетак у тачки N и $B(-x)$, $C(x)$, $D(x+iy)$, $A(-x+iy)$, $P(x+ip)$. Тада је $M(iy)$. Једначина праве PM је: $z(x-ip+iy)-\overline{z}(x+ip-iy)-2ixy=0$, тј.

$PM: z-\overline{z}\dfrac{x+ip-iy}{x-ip+iy}-\dfrac{2ixy}{x-ip+iy}=0$ (*). Нека је $S\left(\dfrac{iy}{2}\right)$ пресек правих MN и AC, тада се праве AC и AS поклапају па је AC: $z\left(x+\dfrac{iy}{2}\right)-\overline{z}\left(x-\dfrac{iy}{2}\right)-ixy=0$, $AC: z-\overline{z}\dfrac{2x-iy}{2x+iy}-\dfrac{2ixy}{2x+iy}=0$ (**). Координату тачке Q налазимо из једначина (*) и (**). Биће $\overline{q}=\dfrac{xy}{y+2p}+i\dfrac{yp}{y+2p}$ тј. $q=\dfrac{xy}{y+2p}-i\dfrac{yp}{y+2p}$.

Ако са K обележимо пројекцију тачке Q на x-осу биће

$k=\dfrac{xy}{y+2p}$. Да би доказали тврђење задатка довољно је да покажемо да је троугао *CPN* индиректно сличан са троуглом *KQN.* Ради тога проверавамо једнакост $\dfrac{(x+ip)-x}{0-x}=\dfrac{\left(\dfrac{xy}{y+2p}+i\dfrac{yp}{y+2p}\right)-\dfrac{xy}{y+2p}}{0-\dfrac{xy}{y+2p}}$, за коју се испоставља да је тачна. ◇

<u>*Пример 15.2*</u> На страницама *AB, BC, CA* троугла *ABC* конструисани су међусобно слични троуглови *ABK, BCL* и *ACM* (у том поретку темена), при чему су прва два у спољашњости троугла *ABC,* а трећи са исте стране праве *AC* са које је и *B*. Доказати да је *BLMK* паралелограм.



Троуглови *AKB* и *BLC* су директно слични па је $\dfrac{k-a}{b-a}=\dfrac{l-b}{c-b}\Rightarrow l=b+(k-a)\dfrac{c-b}{b-a}$. Троуглови *AKB* и *AMC* су директно слични па је $\dfrac{k-a}{b-a}=\dfrac{m-a}{c-a}\Rightarrow \quad m=a+(k-a)\dfrac{c-a}{b-a}$.

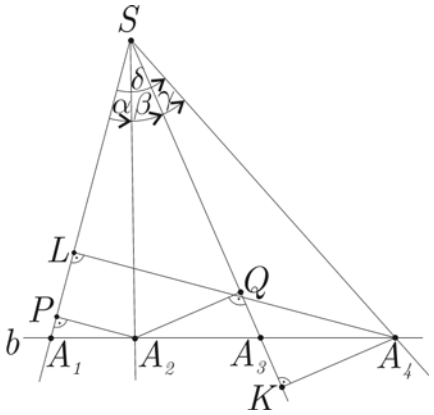
Сада је $\overrightarrow{BL}=l-b=(k-a)\dfrac{c-b}{b-a}$ и

$$\overrightarrow{KM}=m-k=a+(k-a)\frac{c-a}{b-a}-k=(k-a)\left(\frac{c-a}{b-a}-1\right)=$$

$=(k-a)\dfrac{c-b}{b-a}$, одакле следи тврђење задатка. ◇

<u>*Пример 15.3 (**Папосова теорема**)*</u> Нека су дате четири тачке $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_3)$, $A_4(a_4)$ које припадају истој правој *b* и нека је *S(s)* ван те праве. Доказати да важи

$$D(A_1,A_2,A_3,A_4)=\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}\cdot\frac{a_1-a_4}{a_3-a_4}=-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\gamma},\alpha=\measuredangle\overline{A_1S\,A_2},\beta=\measuredangle\overline{A_2S\,A_3},\gamma=\measuredangle\overline{A_3S\,A_4},\ \delta=\measuredangle\overline{A_1S\,A_4}.$$



Нека је $P(p)$ подножје нормале из тачке A_2 на праву SA_1, нека је $Q(q)$ подножје нормале из тачке A_2 на праву SA_3, нека је $L(l)$ подножје нормале из тачке A_4 на праву SA_1, нека је $K(k)$ подножје нормале из тачке A_4 на праву SA_3.

Тада је троугао A_2A_1P директно сличан са троуглом A_4A_1L, па је $\dfrac{a_1-a_2}{p-a_2}=\dfrac{a_1-a_4}{l-a_4}$. Троугао A_2A_3Q је директно сличан са троуглом A_4A_3K, па је $\dfrac{a_3-a_2}{q-a_2}=\dfrac{a_3-a_4}{k-a_4}$. Одавде је

$$\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}\cdot\frac{a_1-a_4}{a_3-a_4}=\frac{a_3-a_2}{a_3-a_4}\cdot\frac{a_1-a_4}{a_1-a_2}=\frac{q-a_2}{k-a_4}\cdot\frac{l-a_4}{p-a_2}=-\frac{q-a_2}{a_4-k}\cdot\frac{l-a_4}{p-a_2}.$$

Пошто је $\overrightarrow{A_2Q}\parallel\overrightarrow{KA_4}$ и истосмерни су, биће $\arg(q-a_2)=\arg(a_4-k)=\varphi$ и $\overrightarrow{A_4L}\parallel\overrightarrow{A_2P}$ и истосмерни су, па је $\arg(l-a_4)=\arg(p-a_2)=\psi$.

Сада је $D(A_1,A_2,A_3,A_4)=-\dfrac{|q-a_2|e^{i\varphi}}{|a_4-k|e^{i\varphi}}\cdot\dfrac{|l-a_4|e^{i\psi}}{|p-a_2|e^{i\psi}}=-\dfrac{\dfrac{|q-a_2|}{|a_2-s|}}{\dfrac{|p-a_2|}{|a_2-s|}}\cdot\dfrac{\dfrac{|l-a_4|}{|a_4-s|}}{\dfrac{|a_4-k|}{|a_4-s|}}=-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma}$. ◇

<u>*Последица 15.1*</u> Уколико праве SA_1, SA_2, SA_3, SA_4 у пресеку са правом c (која је различита од праве b) дају тачке C_1, C_2, C_3, C_4 тада је $D(A_1,A_2,A_3,A_4)=D(C_1,C_2,C_3,C_4)$

По претходном примеру имамо да је $D(A_1,A_2,A_3,A_4)=-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma}$, али је и $D(C_1,C_2,C_3,C_4)=-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma}$, па имамо тражени закључак. □

Хармонијска четворка тачака и двосразмера

У геометрији се среће појам хармонијске четворке тачака који се може повезати са уведеним појмом двосразмере, у случају када су тачке A, B, C, D колинеарне.

<u>*Дефиниција 15.1*</u> Нека су A, B, C, D четири различите колинеарне тачке. Каже се да је пар тачака A, B хамонијски спрегнут са паром тачака C, D (ознака $\mathcal{H}(A,B;C,D)$) ако је задовољена релација $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{BD}$.

Преведено на однос комплексних бројева, ако је $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ биће $\mathcal{H}(A,B;C,D)\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{c-b}\cdot\dfrac{d-b}{d-a}=-1$. Обележићемо $D(A,B,C,D)=\dfrac{c-b}{a-b}\cdot\dfrac{a-d}{c-d}=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ јер су тачке A, B, C, D колинеарне. Сада је $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{a-c+c-b}{c-b}\cdot\dfrac{d-b+b-c}{d-a}=\left(\dfrac{a-c}{c-b}+1\right)\left(\dfrac{d-b}{d-a}+\dfrac{b-c}{d-a}\right)=$
$=\dfrac{a-c}{c-b}\cdot\dfrac{d-b}{d-a}+1\Rightarrow\dfrac{a-c}{c-b}\cdot\dfrac{d-b}{d-a}=\dfrac{1}{\lambda}-1$, па је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ $\Leftrightarrow\dfrac{c-a}{c-b}\cdot\dfrac{d-b}{d-a}=-1\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\lambda}+1=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\lambda=D(A,B,C,D)=\dfrac{1}{2}$.

<u>*Дефиниција 15.2*</u> За четири праве a, b, c, d се каже да су хармонијски спрегнуте и симболички означава са $\mathcal{H}(a,b;c,d)$ ако припадају једном прамену и ако постаји права која их сече у хармонијским тачкама.

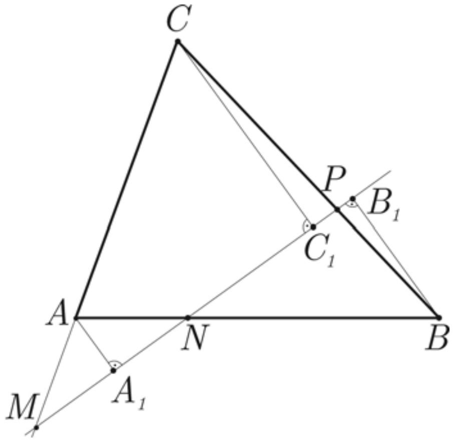
Да је претходна дефиниција добра сведочи претходни пример (Папосова теорема). Тј. ако постоји права која сече конгурентне праве a, b, c, d у хармонијским тачкама, тада их свака друга права (која не садржи њихову пресечну тачку) сече у хармонијским тачкама. Исто важи и у случају да су праве a, b, c, d међусобно паралелне, али то је тривијални део тврђења.

<u>*Пример 15.4* **(Менелајева теорема)**</u> Нека је дат троугао ABC и тачке M, N, P на правама AC, AB, BC редом. Тачке M, N, P су колинеарне акко је $\dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}}=-1$.

Нека је $\dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}}=\lambda_1,\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda_2,\dfrac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}}=\lambda_3$, тада је $n=\dfrac{a+\lambda_1 b}{1+\lambda_1}$, $p=\dfrac{b+\lambda_2 c}{1+\lambda_2}$,
$\lambda_3=-\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}\Rightarrow m=\dfrac{\lambda_1\lambda_2 c-a}{\lambda_1\lambda_2-1}$, $\overrightarrow{PN}=\dfrac{a+\lambda_1 b}{1+\lambda_1}-\dfrac{b+\lambda_2 c}{1+\lambda_2}=\dfrac{(1+\lambda_2)a+(\lambda_1\lambda_2-1)b-\lambda_2(1+\lambda_1)c}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}$,

$$\overrightarrow{PM}=\frac{\lambda_1\lambda_2 c-a}{\lambda_1\lambda_2-1}-\frac{b+\lambda_2 c}{1+\lambda_2}=\frac{(1+\lambda_2)a+(\lambda_1\lambda_2-1)b-\lambda_2(1+\lambda_1)c}{(1+\lambda_1)(1-\lambda_1\lambda_2)}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{PN}}=\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1\lambda_2}\in\mathbb{R}$$ (случај $\lambda_1\lambda_2=1$ даје $NP\parallel AC$, што противуречи коначности тачке M), дакле $PM\parallel PN$ одакле следи колинеарност тачака M, N, P.

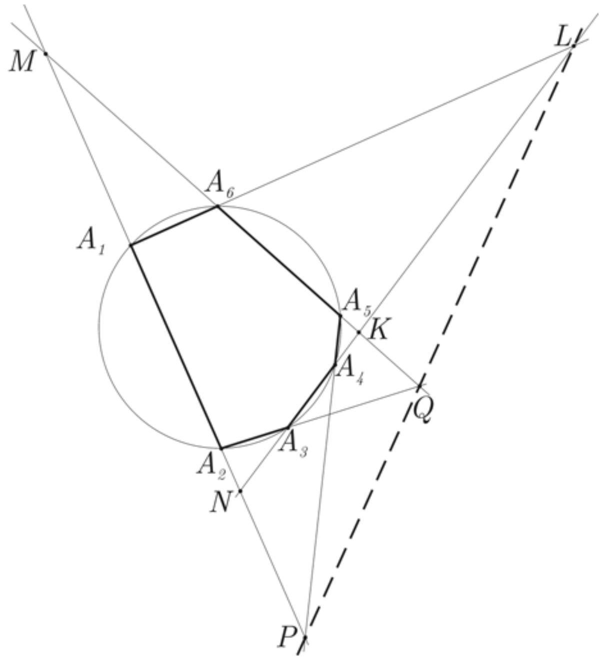
Ако су тачке M, N, P колинеарне, нека леже на правој l, нека су пројекције тачака A, B,



C, на праву *l* тачке A_1, B_1, C_1, редом. Тада је троугао BB_1P директно сличан са троуглом CC_1P па је $\frac{b_1-b}{p-b}=\frac{c_1-c}{p-c}\Rightarrow\frac{b_1-b}{c_1-c}=\frac{p-b}{p-c}$, такође је троугао AA_1M директно сличан са троуглом CC_1M па је $\frac{a_1-a}{m-a}=\frac{c_1-c}{m-c}\Rightarrow\frac{a_1-a}{c_1-c}=\frac{m-a}{m-c}$ и троугао BB_1N је директно сличан са троуглом AA_1N па је $\frac{b_1-b}{n-b}=\frac{a_1-a}{n-a}\Rightarrow\frac{b_1-b}{a_1-a}=\frac{n-b}{n-a}$. Одавде имамо:

$$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}}=\frac{n-a}{b-n}\cdot\frac{p-b}{c-p}\cdot\frac{m-c}{a-m}=\left(-\frac{a_1-a}{b_1-b}\right)\left(-\frac{b_1-b}{c_1-c}\right)\left(-\frac{c_1-c}{a_1-a}\right)=-1.\ \diamond$$

*Пример 15.5 (**Паскалова теорема**)* Нека је дат тетивни шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и нека је $A_1A_2\cap A_4A_5=\{P\}$, $A_2A_3\cap A_5A_6=\{Q\}$, $A_3A_4\cap A_6A_1=\{L\}$, доказати да су тачке *P, Q, L* колинеарне.



Нека је $A_1A_2\cap A_5A_6=\{M\}$, $A_1A_2\cap A_3A_4=\{N\}$, $A_3A_4\cap A_5A_6=\{K\}$.

Једначине правих A_1A_2 и A_4A_5 су

$$A_1A_2: z\frac{\overline{a_2}-\overline{a_1}}{a_2-a_1}-\overline{z}+\frac{a_2\overline{a_1}-a_1\overline{a_2}}{a_2-a_1}=0,$$

$$A_4A_5: z\frac{\overline{a_5}-\overline{a_4}}{a_5-a_4}-\overline{z}+\frac{a_5\overline{a_4}-a_4\overline{a_5}}{a_5-a_4}=0.$$ Пошто је тачка *P* у пресеку правих A_1A_2 и A_4A_5, њена координата је решење система формираног од њихових једначина. Користећи чињеницу да је $\left|a_j\right|^2=a_j\overline{a_j}=R^2$, $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$, где је *R* полупречник круга описаног око шестоугла, имамо да је: $p=\frac{a_1a_2(a_5+a_4)-a_4a_5(a_1+a_2)}{a_1a_2-a_5a_4}$.

На сличан начин добијамо да је:

$q=\frac{a_2a_3(a_5+a_6)-a_5a_6(a_2+a_3)}{a_2a_3-a_5a_6}$, $l=\frac{a_3a_4(a_1+a_6)-a_1a_6(a_3+a_4)}{a_3a_4-a_1a_6}$, $m=\frac{a_1a_2(a_5+a_6)-a_5a_6(a_1+a_2)}{a_1a_2-a_5a_6}$, $n=\frac{a_1a_2(a_3+a_4)-a_3a_4(a_1+a_2)}{a_1a_2-a_3a_4}$, $k=\frac{a_3a_4(a_5+a_6)-a_5a_6(a_3+a_4)}{a_3a_4-a_5a_6}$.

Одавде се, после гломазног рачунања, добија: $\overrightarrow{MP}=p-m=\frac{a_1a_2(a_4-a_6)(a_5-a_2)(a_5-a_1)}{(a_1a_2-a_5a_4)(a_1a_2-a_5a_6)}$,

$\overrightarrow{PN}=n-p=\frac{a_1a_2(a_3-a_5)(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{(a_1a_2-a_3a_4)(a_1a_2-a_4a_5)}$, $\overrightarrow{NL}=l-n=\frac{a_3a_4(a_2-a_6)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}{(a_1a_2-a_3a_4)(a_3a_4-a_1a_6)}$,

$\overrightarrow{LK}=k-l=\frac{a_3a_4(a_5-a_1)(a_6-a_3)(a_6-a_4)}{(a_3a_4-a_1a_6)(a_3a_4-a_5a_6)}$, $\overrightarrow{KQ}=q-k=\frac{a_5a_6(a_2-a_4)(a_3-a_6)(a_3-a_5)}{(a_2a_3-a_5a_6)(a_3a_4-a_5a_6)}$,

$\overrightarrow{QM}=m-q=\frac{a_5a_6(a_1-a_3)(a_2-a_5)(a_2-a_6)}{(a_2a_3-a_5a_6)(a_1a_2-a_5a_6)}$. Имамо да је $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NL}}{\overrightarrow{LK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KQ}}{\overrightarrow{QM}}=-1$, па, користећи Менелајеву теорему, закључујемо да су тачке *P, Q, L* колинеарне. ◇

I. 16. Скаларни производ комплексних бројева

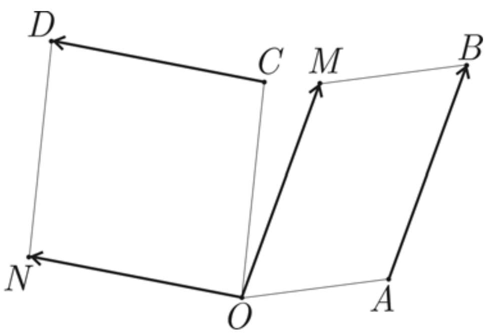
У уводном делу је споменуто да скаларни производ комплексних бројева a и b можемо дефинисати са (*) $a \bullet b = \operatorname{Re} \overline{a} b$ и тада се доказује својство (**) $a \bullet b = |a||b| \cos \measuredangle(a,b)$ (при чему је $\measuredangle(a,b)$ угао између вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, где је O координатни почетак, $A(a)$, $B(b)$, тј. $\measuredangle(a,b) = \measuredangle AOB$). Или се скаларни производ уводи са (**) па се доказује својство (*) користећи особине множења комплексних бројева, тј. чињеницу да је множење комплексним бројем $z = re^{i\theta}$ композиција хомотетије са коефицијентом r (и центром у O) и ротације за угао θ (такође са центром у O).

Следеће особине скаларног производа се једноставно доказују:

1) $a \bullet a = |a|^2$,
2) $a \bullet b = b \bullet a$,
3) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$,
4) $(\alpha a) \bullet b = \alpha (a \bullet b) = a \bullet (\alpha b), \quad \alpha \in \mathbb{R}$,
5) $a \bullet b = 0 \Leftrightarrow OA \perp OB$, где је $A(a)$, $B(b)$,
6) $(az) \bullet (bz) = |z|^2 (a \bullet b)$, при чему су $a, b, c, z \in \mathbb{C}$.

Непосредна последица особине (5) је следеће:

Тврђење 16.1 Ако су $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $D(d)$ четири различите тачке, тада је $AB \perp CD \Leftrightarrow (b-a) \bullet (d-c) = 0$.

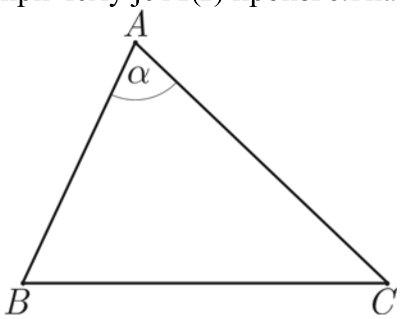


Транслацијом вектора $\overrightarrow{AB}$ за $-\overrightarrow{OA}$ добијамо вектор $\overrightarrow{OM}$, где је $M(b\text{-}a)$, O координатни почетак. Транслацијом вектора $\overrightarrow{CD}$ за $-\overrightarrow{OC}$ добијамо вектор $\overrightarrow{ON}$, где је $N(d\text{-}c)$. Сада је $AB \perp CD \Leftrightarrow OM \perp ON$ (јер је $AB \parallel OM$ и $CD \parallel ON$) $\Leftrightarrow$ $(b-a) \bullet (d-c) = 0$ по својству (5). □

Ово тврђење нам омогућава да једноставно изведемо једначину праве n која садржи тачку $C(c)$ и нормална је на правој која садржи тачке $A(a)$, $B(b)$:

$$(z-c) \bullet (b-a) = 0 \Leftrightarrow (z-c)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{z}-\overline{c})(b-a) = 0 \Leftrightarrow z(\overline{b}-\overline{a}) + \overline{z}(b-a) + a\overline{c} + \overline{a}c - \overline{c}b - c\overline{b} = 0,$$

при чему је $M(z)$ произвољна тачка праве n.



Косинусна теорема се једноставно доказује применом скаларног производа. Нека су дата темена $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ троугла ABC, тада је

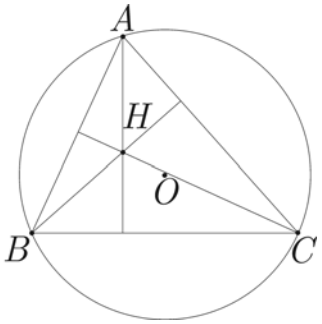
$$\begin{aligned}|b-c|^2 &= (b-c) \bullet (b-c) = \big((b-a)-(c-a)\big) \bullet \big((b-a)-(c-a)\big) = \\ &= |b-a|^2 + |c-a|^2 - 2(b-a) \bullet (c-a) = \\ &= |b-a|^2 + |c-a|^2 - 2|b-a||c-a| \cos \measuredangle BAC.\end{aligned}$$

Применом скаларног производа се могу доказивати тврђења о растојањима и вези углова и растојања.

Пример 16.1 Нека је О центар описане кружнице троугла ABC, а тачка H је таква да је $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, доказати да је H ортоцентар троугла ABC.

Нека је $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $H(h)$, $O(o)$, тада је:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow h - o = a - o + b - o + c - o \Rightarrow h = a + b + c - 2o.$$



Пошто је $AO=BO=CO=R$ биће:

$$(a-o)\bullet(a-o) = R^2 \Rightarrow |a|^2 - 2a\bullet o + |o|^2 = R^2 \quad (1)$$

$$(b-o)\bullet(b-o) = R^2 \Rightarrow |b|^2 - 2b\bullet o + |o|^2 = R^2 \quad (2)$$

$$(c-o)\bullet(c-o) = R^2 \Rightarrow |c|^2 - 2c\bullet o + |o|^2 = R^2 \quad (3)$$

$$(h-b)\bullet(c-a) = (a+c-2o)\bullet(c-a) =$$

$$= (a+c)\bullet(c-a) - 2o\bullet(c-a) = |c|^2 - |a|^2 - 2o\bullet c + 2o\bullet a,$$

узимајући у обзир (1) и (3) имамо да је

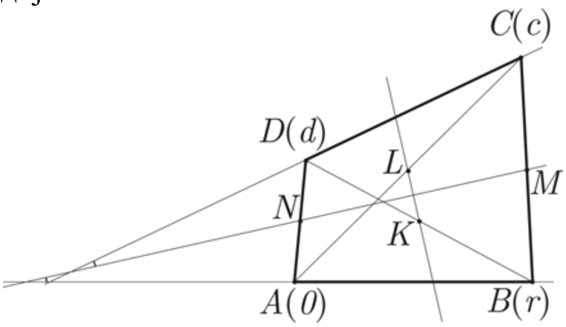
$|c|^2 - |a|^2 - 2o\bullet c + 2o\bullet a = 0 \Rightarrow (h-b)\bullet(c-a) = 0 \Rightarrow BH \perp AC.$ На сличан начин се показује да је $CH \perp AB$ и $AH \perp BC$ одакле следи да је H ортоцентар троугла ABC. ◇

Последица овог примера је да ако узмемо за координатни почетак центар описаног круга, његов ортоцентар тада има комплексну координату $h=a+b+c$, где су $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ темена троугла ABC.

<u>*Пример 16.2*</u> У конвексном четвороуглу $ABCD$ су странице AB и CD једнаке.

а) Доказати да праве AB и CD образују једнаке углове са правом која спаја средишта страница AD и BC.

б) Доказати да праве AB и CD образују једнаке углове са правом која спаја средишта дијагонала AC и BD.



а) Нека је $A(0)$, $B(r)$, $D(d)$, $C(c)$, где је $r \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{C}$. Пошто је N средиште AD и M средиште BC, биће $n = \frac{0+d}{2} = \frac{d}{2}$ и $m = \frac{r+c}{2}$.

$$(b-a)\bullet(m-n) = r\bullet\frac{r+c-d}{2} = \frac{r^2}{2} + \frac{r\bullet(c-d)}{2}$$

$$(c-d)\bullet(m-n) = (c-d)\bullet\frac{r+c-d}{2} = \frac{r\bullet(c-d)}{2} + \frac{|c-d|^2}{2} =$$

$$= \frac{r\bullet(c-d)}{2} + \frac{r^2}{2} = (b-a)\bullet(m-n).$$

Пошто је $AB=CD$ биће $|b-a| = |c-d|$, па из претходног следи да је $\measuredangle(AB, NM) = \measuredangle(NM, DC)$.

б) Нека је L средиште AC и K средиште BD, тада је $l = \frac{c}{2}$ и $k = \frac{r+d}{2}$, па је:

$(k-l)\bullet(m-n) = \frac{1}{2}(r+d-c)\bullet\frac{1}{2}(r+c-d) = \frac{r^2}{4} + \frac{(d-c)\bullet(c-d)}{4} = \frac{r^2}{4} - \frac{|d-c|^2}{4} = 0$ па је $KL \perp MN$, одакле, узимајући у обзир први део задатка, следи тврђење другог дела задатка. ◇

<u>*Пример 16.3*</u> У оштроуглом троуглу ABC је тачка H ортоцентар и важи $HC=AB$. Наћи величину угла код темена C. Размотрити и случај тупоуглог троугла.

Нека се координатни почетак поклапа са центром описаног круга. Тада је $h=a+b+c$ и $HC = |a+b|$ и $AB = |a-b|$, па је: $|a+b|^2 = |a-b|^2 \Rightarrow (a+b)\bullet(a+b) = (a-b)\bullet(a-b) \Rightarrow$

$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a\bullet b = |a|^2 + |b|^2 - 2a\bullet b \Rightarrow a\bullet b = 0 \Rightarrow OA \perp OB \Rightarrow \measuredangle AOB = \frac{\pi}{2}$. Уколико је троугао ABC оштроугли биће $\measuredangle ACB = \frac{\pi}{4}$ (јер је периферијски угао половина централног над истом тетивом), а ако је тупоугли биће $\measuredangle ACB = \dfrac{3\pi}{4}$.

Пример 16.4 Нека је O центар описане кружнице троугла ABC, C_1 средиште странице AB и T његово тежиште.Доказати да је $OT \perp CC_1$ акко $BC^2 + AC^2 = 2AB^2$.

Нека се координатни почетак поклапа са центром описаног круга. Тада је $OT \perp CC_1$ $\Leftrightarrow t\bullet(c_1 - c) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{3}\bullet\left(\dfrac{a+b}{2} - c\right) = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)\bullet(a+b-2c) = 0$

$\Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 - 2|c|^2 + 2a\bullet b - a\bullet c - b\bullet c = 0 \Leftrightarrow 2a\bullet b - a\bullet c - b\bullet c = 0,$ јер је $|a| = |b| = |c| = R$. Осим тога је $BC^2 + AC^2 - 2AB^2 = |c-b|^2 + |c-a|^2 - 2|a-b|^2 =$

$$= (c-b)\bullet(c-b) + (c-a)\bullet(c-a) - 2(a-b)\bullet(a-b) =$$

$$= 2|c|^2 - |a|^2 - |b|^2 + 4a\bullet b - 2a\bullet c - 2b\bullet c = 2(2a\bullet b - a\bullet c - b\bullet c).$$

Дакле $OT \perp CC_1$ акко $2a\bullet b - a\bullet c - b\bullet c = 0$ акко $BC^2 + AC^2 = 2AB^2$. ◇

Пример 16.5 У конвексном четвороуглу $ABCD$ су P и Q средишта дијагонала AC и BD. Доказати да је $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

Пошто су P и Q средишта дијагонала AC и BD биће $p = \dfrac{a+c}{2}$, $q = \dfrac{b+d}{2}$.

$AB^2 = |b-a|^2 = (b-a)\bullet(b-a) = |a|^2 - 2a\bullet b + |b|^2$, слично је $BC^2 = |b|^2 - 2b\bullet c + |c|^2$,

$CD^2 = |c|^2 - 2c\bullet d + |d|^2$, $AD^2 = |a|^2 - 2a\bullet d + |d|^2$, $AC^2 = |a|^2 - 2a\bullet c + |c|^2$, $BD^2 = |b|^2 - 2b\bullet d + |d|^2$ и

$4PQ^2 = 4(q-p)\bullet(q-p) = (b+d-a-c)\bullet(b+d-a-c) =$

$= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + 2a\bullet c + 2b\bullet d - 2a\bullet b - 2b\bullet c - 2c\bullet d - 2a\bullet d.$ Одавде је:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 + 2|c|^2 + 2|d|^2 - 2a\bullet b - 2b\bullet c - 2c\bullet d - 2a\bullet d = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$. ◇

Аполонијева теорема

Теорема 16.1 Ако је M тачка странице BC троугла ABC таква да је $BM : MC = m : n$ тада је $nAB^2 + mAC^2 = mCM^2 + nBM^2 + (m+n)AM^2$.

Нека је $M(z)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, тада је $\overrightarrow{BM} : \overrightarrow{MC} = m : n \Rightarrow z = \dfrac{nb+mc}{m+n}$,

$AB^2 = |b-a|^2 = (a-b)\bullet(a-b) = |a|^2 - 2a\bullet b + |b|^2$, $AC^2 = |a-c|^2 = (a-c)\bullet(a-c) = |a|^2 - 2a\bullet c + |c|^2$,

$BC^2 = |b-c|^2 = (b-c)\bullet(b-c) = |b|^2 - 2b\bullet c + |c|^2$, $CM^2 = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}|b-c|^2 = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}\left(|b|^2 - 2b\bullet c + |c|^2\right)$,

$BM^2 = \dfrac{m^2}{(m+n)^2}|b-c|^2 = \dfrac{m^2}{(m+n)^2}\left(|b|^2 - 2b\bullet c + |c|^2\right)$,

$AM^2 = |a-z|^2 = (a-z)\bullet(a-z) = |a|^2 - 2z\bullet a + |z|^2 =$

$$= |a|^2 + \frac{(nb+mc)\bullet(nb+mc)}{(m+n)^2} - \frac{2n}{m+n}a\bullet b - \frac{2m}{m+n}a\bullet c =$$

$$= |a|^2 + \frac{n^2}{(m+n)^2}|b|^2 + \frac{m^2}{(m+n)^2}|c|^2 + \frac{2mn}{(m+n)^2}b\bullet c - \frac{2n}{m+n}a\bullet b - \frac{2m}{m+n}a\bullet c.$$

Сада добијамо: $mCM^2+nBM^2=\dfrac{mn}{m+n}\left(|b|^2+|c|^2-2b\bullet c\right)$, па следи да је:

$$mCM^2+nBM^2+(m+n)AM^2=\frac{mn}{m+n}|b|^2+\frac{mn}{m+n}|c|^2-2\frac{mn}{m+n}b\bullet c+$$

$$+(m+n)|a|^2+\frac{n^2}{m+n}|b|^2+\frac{m^2}{m+n}|c|^2+\frac{2mn}{m+n}b\bullet c-2na\bullet b-2ma\bullet c=$$

$$=m\left(|a|^2-2a\bullet c+|c|^2\right)+n\left(|a|^2-2a\bullet b+|b|^2\right)=m|a-c|^2+n|a-b|^2=$$

$$=mAC^2+nAB^2.\ \square$$

Стављајући m=n=1 добијамо дужину тежишне дужи AA_1 (A_1 је средиште BC), тј.

$$CA_1^2+BA_1^2+2AA_1^2=AC^2+AB^2\Rightarrow 2AA_1^2=AC^2+AB^2-\frac{1}{4}BC^2-\frac{1}{4}BC^2=AC^2+AB^2-\frac{1}{2}BC^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1^2=\frac{2AC^2+2AB^2-BC^2}{4}.$$

Лагранжова теорема

Посматрајмо различите тачке $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$,..., $A_n(a_n)$ у комплексној равни, нека су k_1, k_2,...,k_n реални бројеви различити од нуле такви да је $k_1+k_2+...+k_n=k\neq 0$. Барицентром или тежиштем система састављеног из коначног броја тачака $A_1,A_2,...,A_n$ којима су редом придружени реални бројеви (тежине) $k_1,k_2,...,k_n$, називамо тачку T чија је комплексна координата дата са $t=\dfrac{1}{k}\left(k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n\right)=\dfrac{k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n}{k_1+k_2+...+k_n}$. У случају да је k_1=k_2=...= k_n=1 тачку T називамо еквибарицентром или једноставно тежиштем скупа тачака $\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

*Теорема 16.2 (**Лагранж**)* Посматрајмо тачке $A_1(a_1),A_2(a_2),...,A_n(a_n)$ и реалне бројеве $k_1,k_2,...,k_n$ различите од нуле, такве да је $k_1+k_2+...+k_n=k\neq 0$. Нека је T барицентар система који се састоји од тачака $A_1,A_2,...,A_n$ и њима придружених реалних бројева $k_1,k_2,...,k_n$ редом. Тада за сваку тачку $M(z)$ комплексне равни важи следећа релација $\sum_{j=1}^{n}k_jMA_j^2=kMT^2+\sum_{j=1}^{n}k_jTA_j^2$.

Из $\overrightarrow{MA_j}=\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA_j}$, следи да је:

$MA_j^2=\left((t-z)+(a_j-t)\right)\bullet\left((t-z)+(a_j-t)\right)=|t-z|^2+|a_j-t|^2+2(a_j-t)\bullet(t-z)$, па имамо:

$\sum_{j=1}^{n}k_jMA_j^2=|t-z|^2\sum_{j=1}^{n}k_j+\sum_{j=1}^{n}k_j|a_j-t|^2+2(t-z)\bullet\sum_{j=1}^{n}k_j(a_j-t),$ пошто је

$\sum_{j=1}^{n}k_j(a_j-t)=\sum_{j=1}^{n}k_ja_j-t\sum_{j=1}^{n}k_j=t\sum_{j=1}^{n}k_j-t\sum_{j=1}^{n}k_j=0,$ то следи

$\sum_{j=1}^{n}k_jMA_j^2=k|t-z|^2+\sum_{j=1}^{n}k_j|a_j-t|^2=kMT^2+\sum_{j=1}^{n}k_jA_jT^2.\ \square$

У случају k_1=k_2=...= k_n=1 добијамо:

*Теорема 16.3 (**Лајбниц**)* Посматрајмо различите тачке A_1, A_2,..., A_n и тежиште T скупа $\{A_1,A_2,...,A_n\}$. За сваку тачку M комплексне равни важи $\sum_{j=1}^{n}MA_j^2=nMT^2+\sum_{j=1}^{n}TA_j^2$.

Ако су тачке A_1, A_2,..., A_n на кружници чији је центар O и полупречник R добијамо релацију (узимајући за тачку M координатни почетак O) $nR^2=nOT^2+\sum_{j=1}^{n}TA_j^2$.

У случају троугла ове релације се могу искористити да се нађу дужине OT, OH (H је ортоцентар троугла) у зависности од дужина страница троугла.

Ако су A_1, A_2,..., A_n темена правилног полигона уписаног у кружницу $|z| = R$, његово тежиште ће бити координатни почетак. (Координатне осе можемо тако поставити да темена правилног полигона имају комплексне координате $a_k = \mathrm{Re}^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$. Тада су a_k, $k \in \{1,2,...,n\}$ нуле полинома $P(z) = z^n - R^n$, по Виетовим формулама (пошто је коефицијент уз z^{n-1} нула) имамо $a_1+a_2+...+a_n=0$, па следи да је $t = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{0}{n} = 0.$) Сада из Лајбницове теореме имамо релацију $\sum_{j=1}^{n} MA_j^2 = nMO^2 + nR^2$, уколико је M на кружници описаној око тог полигона биће $\sum_{j=1}^{n} MA_j^2 = nR^2 + nR^2 = 2nR^2$.

I. 17. Геометријска интерпретација *n*-тих корена комплексног броја

<u>*Дефиниција 17.1*</u> *n*-ти корен комплексног броја *a* је свако решење једначине $z^n = a$.

Испоставља се да су, ако је $a = re^{i\varphi}$, сва различита решења претходне једначине дата са $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, где $k \in \{0,1,...,n-1\}$.

Ако обележимо $M_k(z_k)$ имамо да је $M_0M_1...M_{n-1}$ правилан *n*-тоугао уписан у кружницу са центром у координатном почетку, полупречника $\sqrt[n]{r}$. Заиста: $M_kO = |z_k| = \sqrt[n]{r}$.

$$\measuredangle\overline{M_kOM_{k+1}} = \arg\frac{z_{k+1}}{z_k} = \arg\frac{\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)}}{\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}} = \arg e^{i\frac{2\pi}{n}} = \frac{2\pi}{n}, \text{ за } k \in \{0,1,...,n-2\} \text{ и}$$

$$\measuredangle\overline{M_{n-1}OM_0} = \arg\frac{z_0}{z_{n-1}} = \arg\frac{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}}{\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}} = \arg e^{-\left(2\pi-\frac{2\pi}{n}\right)i} = \frac{2\pi}{n}.$$

Па имамо да је $M_0M_1...M_{n-1}$ правилан *n*-тоугао.

Случај *a=1* је посебно значајан. Корени једначине $z^n = 1$ се називају *n*-ти корени јединице и ако ставимо $\omega = \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ имамо да је $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega^k$, где је $k \in \{1,2,...,n-1\}$, $\omega_0 = 1 = \omega^0 = \omega^n$.

Геометријске слике *n*-тих корена јединице формирају правилан *n*-тоугао чије је једно теме тачка $A_0(1)$, и који је уписан у кружницу полупречника 1, са центром у $O(0)$.

Ако је z_j неки *n*-ти корен из *a* тада су сви остали *n*-ти корени из *a* дати са $z_j\omega, z_j\omega^2,...,z_j\omega^{n-1}$. Дакле да би се упознале особине *n*-тих корена из *a* довољно је познавати особине *n*-тих корена јединице.

<u>*Тврђење 17.1*</u>

а) Ако $n \mid q$ тада је сваки корен од $z^n - 1 = 0$ истовремено и корен од $z^q - 1 = 0$.

б) Заједнички корени од $z^m - 1 = 0$ и $z^n - 1 = 0$ су корени од $z^d - 1 = 0$, где је $d = nzd(m,n)$.

а) $n \mid q \Rightarrow q = np \Rightarrow z^q - 1 = \left(z^n\right)^p - 1 = (z^n - 1)\left((z^n)^{p-1} + (z^n)^{p-2} + ... + z^n + 1\right)$, одакле следи тврђење.

б) Корени од $z^n - 1 = 0$ су $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0,1,...,n-1\}$, корени од $z^m - 1 = 0$ су $\varepsilon_l = e^{i\frac{2l\pi}{m}}$, $l \in \{0,1,...,m-1\}$. Нека је $\omega_k = \varepsilon_l \Rightarrow \frac{2k\pi}{n} = \frac{2l\pi}{m} + 2r\pi, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{l}{m} + r \Rightarrow km - nl = rmn$, $d = nzd(m,n) \Rightarrow m = m'd$ и $n = n'd$, где је $nzd(m',n') = 1$, па је $km'd - ln'd = rm'n'd^2$ $\Rightarrow km' - ln' = rm'n'd \Rightarrow m' \mid ln' \Rightarrow m' \mid l \Rightarrow l = l'm'$, па је $\varepsilon_l = e^{i\frac{2l\pi}{m}} = e^{i\frac{2l'm'\pi}{m'd}} = e^{i\frac{2l'\pi}{d}} \Rightarrow (\varepsilon_l)^d = 1$, па је $\omega_k = \varepsilon_l$ корен од $z^d - 1 = 0$. С друге стране пошто $d \mid n$ и $d \mid m$ имамо по а) да је сваки корен од $z^d - 1 = 0$ истовремено и корен од $z^n - 1 = 0$ и $z^m - 1 = 0$. □

<u>*Последица 17.1*</u> Нека су правилан *n*-тоугао $A_1A_2...A_n$ и правилан *m*-тоугао $B_1B_2...B_m$ уписани у исту кружницу, тако да им се барем једно теме поклапа. Тада они имају $d = nzd(m,n)$ заједничких темена. □

<u>Тврђење 17.2</u> Нека су $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1}$ n-ти корени јединице. За сваки природан број k важи следећа релација: $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = \begin{cases} n, n \mid k \\ 0, n \nmid k \end{cases}$.

$\omega = \omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, важи $\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$ (јер је $\omega^m = 1 \Rightarrow e^{\frac{2m\pi i}{n}} = 1 \Rightarrow \frac{2m\pi}{n} = 2r\pi \Rightarrow m = nr \Rightarrow$

$\Rightarrow n \mid m$ и са друге стране $n \mid m \Rightarrow m = nr \Rightarrow \omega^m = \omega^{nr} = (\omega^n)^r = 1$),

ако $n \nmid k$: $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^j)^k = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^k)^j = \frac{(\omega^n)^k - 1}{\omega^k - 1} = 0$, јер је $\omega^k \neq 1$,

ако $n|k$: $n \mid k \Rightarrow k = qn \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^{qn} = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_j^n)^q = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$. □

<u>Последица 17.2</u> $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \omega_i \omega_j = 0$, где су ω_i n-ти корени јединице за $n>2$. □

Најједноставнији правилан полигон је правилан троугао. Наводимо једну везу између комплексних координата темена троугла која се најчешће користи да би се испитало да ли је дати троугао једнакостраничан.

<u>Тврђење 17.3</u> Троугао $A_1A_2A_3$, где је $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_3)$ је једнакостраничан акко је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$.

Троугао $A_1A_2A_3$, је једнакостраничан акко је директно сличан са троуглом $A_2A_3A_1$, (јер из и ове сличности следи да је $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_2 = \alpha_3, \alpha_3 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{3}$, с друге стране је тврђење тривијално). Сада добијамо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 .\square$$

<u>Пример 17.1</u> Дата је тачка P на кружници описаној око n-тостраног правилног полигона $A_1A_2... A_n$, доказати да сума $PA_1^4 + PA_2^4 + \ldots PA_n^4$ не зависи од избора тачке P.

Претпоставићемо да је координатни систем тако постављен да је координатни почетак у центру правилног полигона, и да теме A_1 има координату R и да је $P(z)$ и $A_j(a_j)$. По разматрању иза Лајбницове теореме је $PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots PA_n^2 = 2nR^2$.

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 \right)^2 - 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k<j}}^{n} PA_k^2 PA_j^2 \quad (**)$$

$$PA_k^2 PA_j^2 = |z - a_k|^2 |z - a_j|^2 = \left(|z|^2 + |a_k|^2 - 2z \bullet a_k \right) \left(|z|^2 + |a_j|^2 - 2z \bullet a_j \right) =$$
$$= 4(R^2 - z \bullet a_k)(R^2 - z \bullet a_j) = 4R^4 - 4R^2 z \bullet (a_k + a_j) + 4(z \bullet a_k)(z \bullet a_j) .$$

Посебно ћемо израчунати $4(z \bullet a_k)(z \bullet a_j) = (\overline{z}a_k + \overline{a_k}z)(\overline{z}a_j + \overline{a_j}z) = \overline{a_k a_j} z^2 + a_k a_j \overline{z}^2 +$

$+(a_k \overline{a_j} + a_j \overline{a_k}) |z|^2 = \overline{a_k a_j} z^2 + a_k a_j \overline{z^2} + (a_k \overline{a_j} + a_j \overline{a_k}) R^2 = 2(a_k a_j) \bullet z^2 + 2R^2 (a_k \bullet a_j)$.

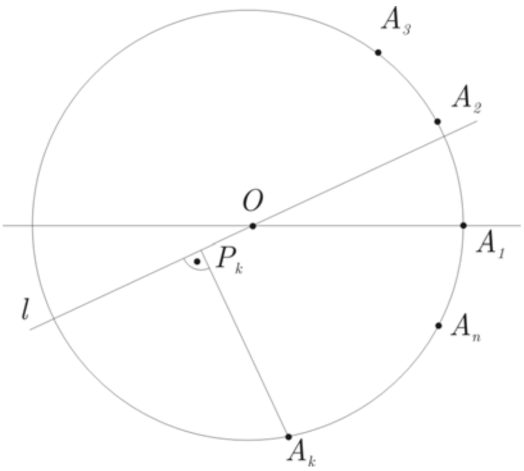
Сада је $PA_k^2 PA_j^2 = 4R^4 - 4R^2 z \bullet (a_k + a_j) + 2z^2 \bullet (a_k a_j) + 2R^2 (a_k \bullet a_j)$.

$$\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} PA_k^{\,2} PA_j^{\,2} = 4R^4\frac{n(n-1)}{2} - 4R^2 z\bullet\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n}(a_k+a_j) + 2z^2\bullet\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} a_k a_j + 2R^2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} a_k\bullet a_j =$$

$$= 2R^4 n(n-1) - 4R^2(n-1)z\bullet\sum_{k=1}^{n} a_k + 2z^2\bullet\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} a_k a_j + 2R^2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} a_k\bullet a_j = 2R^4 n(n-1) + 2R^2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} a_k\bullet a_j \ (*),$$

јер су $a_1, a_2,\dots a_n$ решења једначине $z^n = R^n$, па је $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ и $\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} a_k a_j = 0$. Одавде следи да $\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n} PA_k^{\,2} PA_j^{\,2}$ не зависи од положаја тачке *P,* а тиме ни сума $\sum_{k=1}^{n} PA_k^{\,4}$ не зависи од положаја тачке *P* (ово следи из (*) и (**)).◇

<u>*Пример 17.2*</u> Наћи суму квадрата растојања од темена правилног *n*-тоугла, уписаног у кружницу полупречника *R,* до произвољне праве која садржи центар *n*-тоугла.



Нека је $A_1A_2 \dots A_n$ дати *n*-тоугао и нека је координатни систем тако постављен да је координатни почетак у центру датог полигона, и да теме A_1 има координату *R*. Једначина праве *l* која пролази кроз координатни почетак и заклапа угао φ са реалном осом је $l: \dfrac{z-0}{e^{i\varphi}} = \dfrac{\overline{z}}{e^{-i\varphi}} \Rightarrow l: \overline{z} = ze^{-2i\varphi}$. Нека су тачке $P_1, P_2, \dots, P_n$ пројекције темена $A_1, A_2, \dots, A_n$ на праву *l*. Пошто је $A_kP_k \perp P_kO$ биће $(p_k - a_k)\bullet p_k = 0 \Rightarrow \left|p_k\right|^2 - a_k\bullet p_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_k\overline{p_k} - \dfrac{1}{2}(a_k\overline{p_k} + \overline{a_k}p_k) = 0.$ Пошто $p_k \in l$ биће $\overline{p_k} = p_k e^{-2i\varphi} \Rightarrow p_k^{\,2}e^{-2i\varphi} - \dfrac{1}{2}p_k(a_k e^{-2i\varphi} + \overline{a_k}) = 0$

$\Rightarrow p_k = 0 \vee p_k = \dfrac{1}{2}a_k + \dfrac{1}{2}\overline{a_k}e^{2i\varphi}.$ Одавде је $A_kP_k^2 = (a_k - p_k)(\overline{a_k} - \overline{p_k}) = \dfrac{1}{4}(a_k - \overline{a_k}e^{2i\varphi})(\overline{a_k} - a_k e^{-2i\varphi}) =$

$= \dfrac{1}{4}\left(2\left|a_k\right|^2 - (\overline{a_k}^{\,2}e^{2i\varphi} + a_k^{\,2}e^{-2i\varphi})\right) = \dfrac{1}{2}R^2 - \dfrac{1}{2}a_k^{\,2}\bullet e^{2i\varphi} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_kP_k^2 = n\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{1}{2}e^{2i\varphi}\bullet\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2} = n\dfrac{R^2}{2}$, јер је $\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2} = R^2\sum_{k=1}^{n}\omega_k^{\,2} = 0$, где су ω_k *n*-ти корени јединице. ◇

<u>*Пример 17.3*</u> Комплексне координате темена троугла $A_1A_2A_3$ су решења једначине $z^3 - 3pz^2 + 3qz - r = 0$.

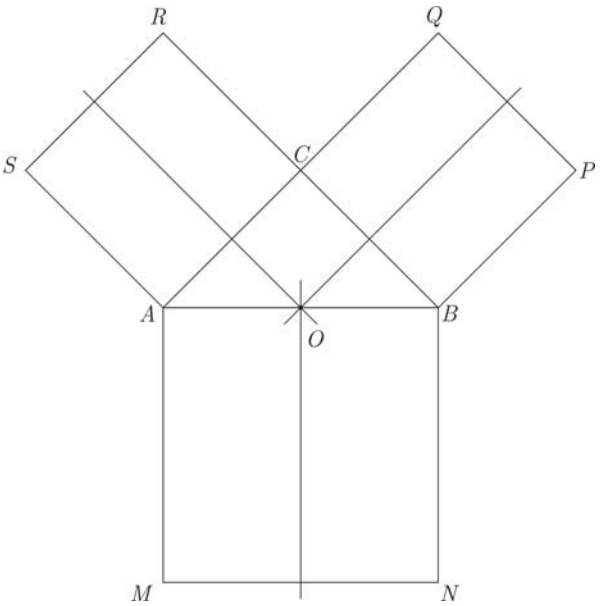
а) Доказати да тежиште тог троугла има координату *p*.
б) Доказати да је $A_1A_2A_3$ једнакостраничан акко је $p^2 = q$.

а) По Виетовим формулама је $a_1 + a_2 + a_3 = 3p$, $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 3q$, $a_1a_2a_3 = r$. Координата тежишта троугла $A_1A_2A_3$ је $t = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = p$.

б) $q = \dfrac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3}{3}$, $p^2 = \dfrac{1}{9}(a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3)$, $p^2 = q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+2a_1a_2+2a_1a_3+2a_2a_3=3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3 \Leftrightarrow \text{троугао } A_1A_2A_3 \text{ је једнакостраничан. } \diamond$$

<u>*Пример 17.4*</u> Над страницама троугла на спољашњу страну су конструисани квадрати. Какви треба да буду углови тог троугла да би шест темена тих квадрата која су различита од темена троугла била на једној кружници?



$R_{A,\frac{\pi}{2}}(m)=b\Rightarrow(m-a)i=b-a\Rightarrow m=a+i(a-b)$, на сличан начин се добија $n=b+i(a-b)$, $p=b+i(b-c)$, $q=c+i(b-c)$, $r=c+i(c-a)$, $s=a+i(c-a)$. Нека је центар описаног круга троугла *ABC* у координатном почетку. Пошто се симетрале дужи *AB* и *MN* поклапају, као и симетрале дужи *BC* и *PQ, AC* и *RS,* центар круга описаног око *MNPQRS* ће се поклапати са *O*(*0*). Јасно је да у том случају важи *OM=ON, OP=OQ, OR=OS,* па да би *MNPQRS* био тетиван мора бити *ON=OP=OR.*

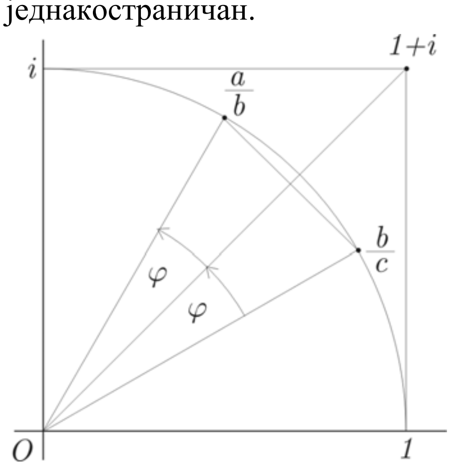
$$ON^2=|n|^2=n\overline{n}=\big(b+i(a-b)\big)\Big(\overline{b}+(-i)(\overline{a}-\overline{b})\Big)=$$
$$=|a|^2+2|b|^2+i(a\overline{b}-b\overline{a})-(a\overline{b}+b\overline{a})=$$
$$=3R^2-\Big(a\overline{b}(1-i)+b\overline{a}(1+i)\Big)=3R^2-2a\overline{b}\bullet(1+i),$$

слично је $OR^2=3R^2-2c\overline{a}\bullet(1+i)$ и $OP^2=3R^2-2b\overline{c}\bullet(1+i)$. Пошто је *ON=OP=OR* биће $a\overline{b}\bullet(1+i)=b\overline{c}\bullet(1+i)=c\overline{a}\bullet(1+i)$, а због $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=R$ имамо $\frac{a}{b}\bullet(1+i)=\frac{b}{c}\bullet(1+i)=\frac{c}{a}\bullet(1+i)$.

Пошто је $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{b}{c}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$, $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ су тачке јединичне кружнице такве да је

$\cos\measuredangle(\frac{a}{b},1+i)=\cos\measuredangle(\frac{b}{c},1+i)=\cos\measuredangle(\frac{c}{a},1+i)$. Сада имамо могућности:

1) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\Rightarrow b^2=ac, c^2=ab, a^2=bc\Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc\Rightarrow$ троугао *ABC* је једнакостраничан.



2) Ако је рецимо $\frac{a}{b}\neq\frac{b}{c}$, тада је $\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$. Нека је $\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Пошто је $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{c}\right)\bullet(1+i)=0$, биће $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{c}\right)\perp(1+i)$. Пошто $\frac{a}{b}\neq\frac{b}{c}$, биће $\measuredangle(1+i,\frac{a}{b})=\measuredangle(\frac{b}{c},1+i)=\varphi$ (овде се ради о оријентисаним угловима), па је $\arg\frac{b}{c}=_{2\pi}\frac{\pi}{4}-\varphi$ и $\arg\frac{a}{b}=_{2\pi}\frac{\pi}{4}+\varphi.$ Сада је:

$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\frac{b}{c}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i\Rightarrow a=ic\Rightarrow a\perp c$, $\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{b}=i\Rightarrow c\perp b$. Сада из $|a|=|b|=|c|=R$ и $a\perp c$ и $b\perp c$ имамо да је троугао *ABC* једнакокрако-правоугли

($AC=BC$).◇

<u>*Пример 17.5*</u> Троугао $A'B'C'$ је добијен ротацијом троугла ABC око тачке O за $\dfrac{\pi}{3}$. Доказати да средишта дужи $A'B, B'C, C'A$ образују једнакостраничан троугао.

Нека су тачке M, N, P средишта дужи $A'B, B'C, C'A$, редом и нека је координатни почетак у тачки O око које се врши ротација. $R_{o,\frac{\pi}{3}}(a)=a' \Rightarrow a'=ae^{i\frac{\pi}{3}}$, слично је $b'=be^{i\frac{\pi}{3}}$ и $c'=ce^{i\frac{\pi}{3}}$, па је $m=\dfrac{b+ae^{i\frac{\pi}{3}}}{2}$, $n=\dfrac{c+be^{i\frac{\pi}{3}}}{2}$, $p=\dfrac{a+ce^{i\frac{\pi}{3}}}{2}$. Сада је

$$m^2+n^2+p^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2)e^{i\frac{2\pi}{3}}+2(ab+bc+ac)e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=$$

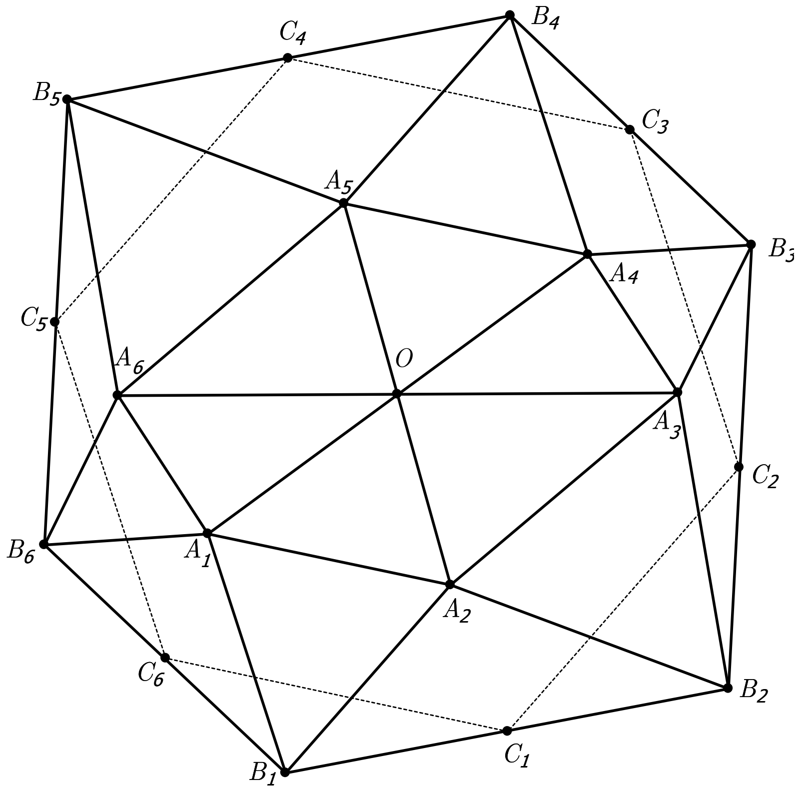
$$=\frac{1}{4}\left((a^2+b^2+c^2)e^{i\frac{\pi}{3}}+2(ab+bc+ac)e^{i\frac{\pi}{3}}\right),$$

$$mn+np+pm=\frac{1}{4}\left((a^2+b^2+c^2)e^{i\frac{\pi}{3}}+(ab+bc+ac)\left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)+(ab+bc+ac)e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left((a^2+b^2+c^2)e^{i\frac{\pi}{3}}+2(ab+bc+ac)e^{i\frac{\pi}{3}}\right),$$

$\Rightarrow m^2+n^2+p^2=mn+mp+np \Rightarrow$ троугао MNP је једнакостраничан. ◇

<u>*Пример 17.6*</u> Над страницама конвексног, централно-симетричног шестоугла конструисани су у његовој спољашњости једнакостранични троуглови. Темена тих троуглова која не припадају полазном шестоуглу спојена су дужима. Доказати да су средишта страница тако добијеног шестоугла темена једног правилног шестоугла.



Нека је координатни почетак центар симетрије шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, тада је $a_4=-a_1, a_5=-a_2,\quad a_6=-a_3$ (*). Пошто је

$R_{A_{k+1},\frac{\pi}{3}}(a_k)=b_k \Rightarrow b_k=a_{k+1}+$

$+(a_k-a_{k+1})e^{i\frac{\pi}{3}}, 1\le k\le 6,$ уз договор да је $a_7=a_1$.

Одавде, узимајући у обзир (*) добијамо

$$b_1=a_2+(a_1-a_2)e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$b_2=a_3+(a_2-a_3)e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$b_3=-a_1+(a_3+a_1)e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$b_4=-a_2+(-a_1+a_2)e^{i\frac{\pi}{3}}=-b_1,$$

$b_5=-a_3+(-a_2+a_3)e^{i\frac{\pi}{3}}=-b_2$, $b_6=a_1+(-a_3-a_1)e^{i\frac{\pi}{3}}=-b_3$.

Нека је C_1 средиште дужи B_1B_2, тада је $c_1=\frac{a_2+a_3}{2}+\frac{a_1-a_3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, нека је C_2 средиште дужи B_2B_3, тада је $c_2=\frac{a_3-a_1}{2}+\frac{a_2+a_1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, нека је C_3 средиште дужи B_3B_4, тада је $c_3=\frac{-a_1-a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, нека је C_4 средиште дужи B_4B_5, тада је $c_4=\frac{-a_2-a_3}{2}+\frac{-a_1+a_3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, нека је C_5 средиште дужи B_5B_6, тада је $c_5=\frac{a_1-a_3}{2}+\frac{-a_2-a_1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, нека је C_6 средиште дужи B_6B_1, тада је $c_6=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{-a_2-a_3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Јасно је да је $c_4=-c_1, c_5=-c_2, c_6=-c_3$ $(**)$, тј. шестоугао $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$, је централно-симетричан у односу на O. Сада је $c_1e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{a_2+a_3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{a_1-a_3}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{a_2}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{a_3}{2}(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi}{3}})+\frac{a_1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{a_2}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{a_3}{2}+\frac{a_1}{2}(e^{i\frac{\pi}{3}}-1)=c_2$, на сличан начин се покаже да је $c_2e^{i\frac{\pi}{3}}=c_3$ и $c_3e^{i\frac{\pi}{3}}=c_4$. Одавде из (**) следи $c_4e^{i\frac{\pi}{3}}=-c_1e^{i\frac{\pi}{3}}=-c_2=c_5$, као и $c_5e^{i\frac{\pi}{3}}=c_6$, $c_6e^{i\frac{\pi}{3}}=c_1$, што значи да је шестоугао $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ правилан. ◇

I. 18. Векторски производ комплексних бројева

У уводу је споменуто да се векторски производ комплексних бројева a и b (у ознаци $a\otimes b$) може дефинисати као вектор нормалан на комплексну раван чији је интензитет једнак оријентисаној површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тада је $a\otimes b=|a||b|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ где је $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ оријентисан угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Користећи геометријску интерпретацију множења показује се да је (*) $a\otimes b=\operatorname{Im}\bar{a}b$.

Може се кренути и обрнуто, тј. дефинисати векторски производ комплексних бројева релацијом (*) и показати да је он једнак оријентисаној површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Користећи релацију (*) једноставно се показују следеће особине векторског производа:

1) $a\otimes b=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=0\vee b=0\vee a=\lambda b$ где је $\lambda\in\mathbb{R}$,

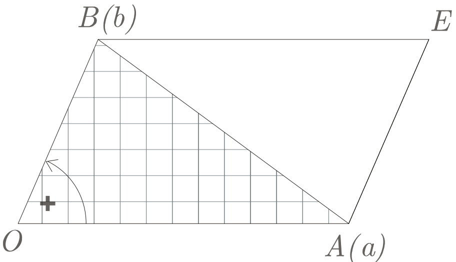
2) $a\otimes b=-b\otimes a$,

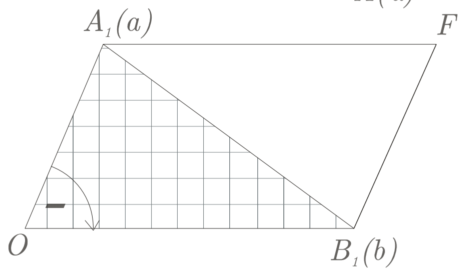
3) $a\otimes(b+c)=a\otimes b+a\otimes c$,

4) $\alpha(a\otimes b)=(\alpha a)\otimes b=a\otimes(\alpha b)$ за $\alpha\in\mathbb{R}$,

из особине 1) се добија

5) ако су $A(a)$ и $B(b)$ међусобно различите тачке, од којих се ниједна не поклапа са координатним почетком тада је $a\otimes b=0$ акко су тачке O, A и B колинеарне.





По самој дефиницији векторског производа комплексних бројева имамо да је површина позитивно оријентисаног троугла OAB, где је O координатни почетак, $A(a)$, $B(b)$ једнака $\frac{1}{2}a\otimes b=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{a}b$. Док је површина (овде се ради о површини у уобичајеном смислу речи) код негативно оријентисаног троугла OA_1B_1 (опет је O координатни почетак, $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$) једнака $S=-\frac{1}{2}a\otimes b=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{a}b$.

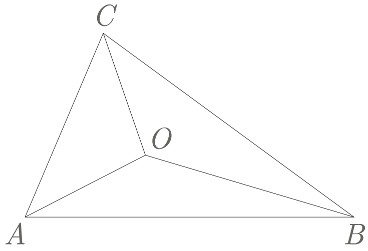
<u>*Тврђење 18.1*</u> Површина позитивно оријентисаног троугла ABC, (где је $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$) је дата са $S=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)$.

У случају да је једно од темена троугла ABC координатни почетак имамо већ споменуту ситуацију која следи из дефиниције векторског производа. Ако то није случај транслираћемо троугао ABC за вектор $\overrightarrow{OA}$ тј. $-a$, при чему се добија позитивно оријентисан троугао OB_1C_1 при чему је $b_1=b-a$ и $c_1=c-a$ (као и пре је $B_1(b_1)$ и $C_1(c_1)$) који је једнаке површине са полазним. Тј.

$$S_{ABC}=S_{OB_1C_1}=\frac{1}{2}b_1\otimes c_1=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{b}_1c_1)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((\bar{b}-\bar{a})(c-a)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{b}c-\bar{a}c-a\bar{b}+a\bar{a}\right).$$

Пошто је $\operatorname{Im}\bar{z}=-\operatorname{Im}z$ и $\operatorname{Im}|z|^2=0$ и $\operatorname{Im}(z_1+z_2)=\operatorname{Im}z_1+\operatorname{Im}z_2$, као и $\operatorname{Im}(z_1-z_2)=\operatorname{Im}z_1-\operatorname{Im}z_2$, добијамо

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{b}c-\bar{a}c-a\bar{b}+a\bar{a}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a\right).$$



Други начин да докажемо ову формулу је да разматрамо да ли је тачка O ван или унутра троугла ABC. Ако је O унутра биће и троуглови OAB, OBC и OCA позитивно оријентисани па је $S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{a}b+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{b}c+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{c}a=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a\right).$$

Ако је тачка O ван троугла ABC, нека је $T(t)$ тежиште троугла ABC, па транслација за вектор $\overrightarrow{TO}$ (тј. $-t$) троугао ABC преводи у троугао $A_1B_1C_1$ чије су координате $a_1=a-t$, $b_1=b-t$, $c_1=c-t$.

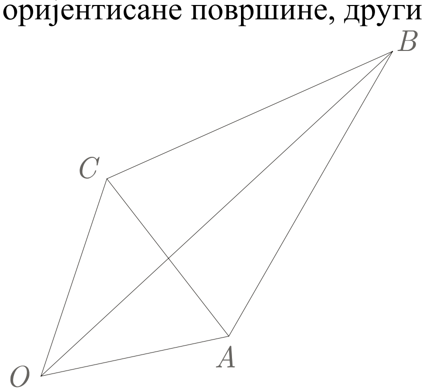
Пошто се датом транслацијом T преводи у O и T је унутар троугла ABC, биће O унутар троугла $A_1B_1C_1$, па ћемо, по претходном имати:

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a_1}b_1+\overline{b_1}c_1+\overline{c_1}a_1)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((\bar{a}-\bar{t})(b-t)+(\bar{b}-\bar{t})(c-t)+(\bar{c}-\bar{t})(a-t)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}t+\bar{t}a)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{b}t+\bar{t}b)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{c}t+\bar{t}c)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(3|t|^2)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a\right),$$

јер је $\operatorname{Im}(z+\bar{z})=0$. Пошто је $S_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}$ биће $S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)$ и у овом случају. □

Уколико нећемо да користимо транслацију, а желимо да истакнемо концепт оријентисане површине, други део доказа можемо да образложимо помоћу примера са слике:



$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OBC}-S_{OCA}=\tilde{S}_{OAB}+\tilde{S}_{OBC}+\tilde{S}_{OCA}=$$

$$=\frac{1}{2}a\otimes b+\frac{1}{2}b\otimes c+\frac{1}{2}c\otimes a=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{a}b+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{b}c+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{c}a=$$

$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a\right)$, при чему је ознака $\tilde{S}_{MNP}$ уведена за оријентисану површину троугла MNP.

У ситуацији са слике троуглови OAB и OBC су позитивно оријентисани па су њихове површине позитивне и једнаке њиховим оријентисаним површинама, док је троугао OCA негативно оријентисан па има негативну оријентисану површину тј. $S_{OCA}=-\tilde{S}_{OCA}$. Чињеница да је векторски производ дефинисан преко оријентисане површине објашњава остале једнакости.

Међутим, троугао ABC у односу на координатни почетак може да заузме више положаја које би све требало засебно разматрати да би ово заиста био доказ.

<u>*Последица 18.1*</u> Површина негативно оријентисаног троугла ABC је дата са $S=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)$. □

<u>*Последица 18.2*</u> Различите тачке $A(a)$, $B(b)$ и $C(c)$ су колинеарне акко је испуњен један од услова:

(1) $(b-a)\otimes(c-a)=0$,

(2) $a\otimes b+b\otimes c+c\otimes a=0$.

Тачке A, B и C су колинеарне акко је површина троугла ABC једнака 0, тј. $0=S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{a}b+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{b}c+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar{c}a=a\otimes b+b\otimes c+c\otimes a$. За доказ прве једнакости имамо:

$$(b-a)\otimes(c-a)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{b}-\bar{a})(c-a)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)=S_{ABC}=0.$$ □

Тврђење 18.2 Нека су $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $D(d)$ четири различите тачке од којих никоје три нису колинеарне. Тада је $AB \parallel CD$ акко је $(b-a)\otimes(d-c)=0$.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су паралелни акко постоји $\lambda\neq 0$ такво да је $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$. Биће $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$, где је $M(m)$ и $m=b-a$; $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ON}$, где је $N(n)$ и $n=d-c$. Пошто је $b-a=\lambda(d-c)$ имамо да је $m=\lambda n$, па по првој особини векторског производа, имамо: $m\otimes n=0$ тј. $(b-a)\otimes(d-c)=0$.□

Тврђење 18.3 Нека је $A_1A_2 \dots A_n$ позитивно оријентисан конвексан полигон чија темена имају комплексне координате $a_1, a_2, \dots a_n$, редом. Тада је његова површина

$$S_{A_1A_2\dots A_n}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2+\overline{a_2}a_3+\dots+\overline{a_n}a_1).$$

1) Ако тачка O (координатни почетак) припада унутрашњости n-тоугла, биће: $S_{A_1A_2\dots A_n}=S_{OA_1A_2}+S_{OA_2A_3}+\dots+S_{OA_{n-1}A_n}+S_{OA_nA_1}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2+\overline{a_2}a_3+\dots+\overline{a_{n-1}}a_n+\overline{a_n}a_1)$.
2) Ако тачка O не припада унутрашњости n-тоугла, изаберимо произвољну тачку $K(k)$ из његове унутрашњости и транслирајмо n-тоугао $A_1A_2\dots A_n$ за вектор $\overrightarrow{KO}$. Добијамо n-тоугао $B_1B_2 \dots B_n$ са координатама $b_1=a_1-k$, $b_2=a_2-k$, ..., $b_n=a_n-k$, при чему је тачка O унутар n-тоугла $B_1B_2\dots B_n$, па је: $S_{A_1A_2\dots A_n}=S_{B_1B_2\dots B_n}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{b_1}b_2+\overline{b_2}b_3+\dots+\overline{b_{n-1}}b_n+\overline{b_n}b_1)=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\overline{a_1}-\overline{k})(a_2-k)+(\overline{a_2}-\overline{k})(a_3-k)+\dots(\overline{a_n}-\overline{k})(a_1-k)\Big)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2+\overline{a_2}a_3+\dots+\overline{a_n}a_1).$$ Јер је $\operatorname{Im}(\overline{k}a_1+k\overline{a_1})=\operatorname{Im}(\overline{k}a_2+k\overline{a_2})=\dots=\operatorname{Im}(\overline{k}a_n+k\overline{a_n})=\operatorname{Im}(n|k|^2)=0$. □

Пример 18.1 У конвексном петоуглу $ABCDE$ страница BC је паралелна дијагонали AD, $CD\parallel BE$, $DE\parallel AC$, $AE\parallel BD$. Доказати да је тада $AB\parallel CE$.

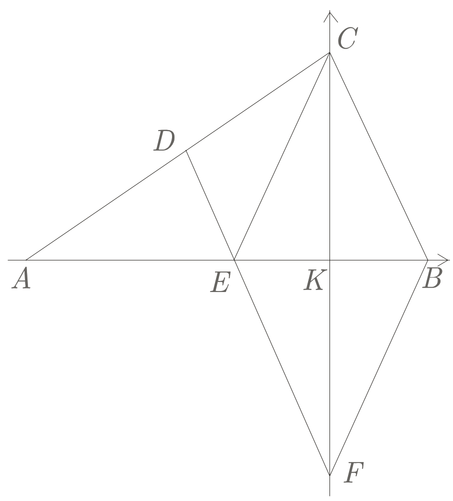
$BC\parallel AD\Rightarrow(c-b)\otimes(d-a)=0\Rightarrow c\otimes d-b\otimes d-c\otimes a+b\otimes a=0$,
$CD\parallel BE\Rightarrow(d-c)\otimes(e-b)=0\Rightarrow d\otimes e-c\otimes e-d\otimes b+c\otimes b=0$,
$DE\parallel AC\Rightarrow(e-d)\otimes(c-a)=0\Rightarrow e\otimes c-d\otimes c-e\otimes a+d\otimes a=0$,
$AE\parallel BD\Rightarrow(e-a)\otimes(d-b)=0\Rightarrow e\otimes d-a\otimes d-e\otimes b+a\otimes b=0$. Да би доказали да је $AB\parallel CE$ потребно је доказати да је $(b-a)\otimes(e-c)=0$, тј. $b\otimes e-a\otimes e-b\otimes c+a\otimes c=0$.

Имамо да је

$b\otimes e=-e\otimes b=-e\otimes d+a\otimes d-a\otimes b$, $-a\otimes e=e\otimes a=e\otimes c-d\otimes c+d\otimes a$,
$-b\otimes c=c\otimes b=-d\otimes e+c\otimes e+d\otimes b$, $a\otimes c=-c\otimes a=-c\otimes d+b\otimes d-b\otimes a$,

сабирајући ове једнакости имамо да је $b\otimes e-a\otimes e-b\otimes c+a\otimes c=0$.◊

Пример 18.2 У правоуглом троуглу ABC CK је висина, а у троуглу ACK CE је бисектриса, D је средиште дужи AC, F тачка пресека правих DE и CK. Доказати да је $BF\parallel CE$.



Нека је координатни почетак у тачки К и нека су координате тачака A и B, $-x$ и y, редом. Пошто је троугао ABC правоугли биће:

$\frac{AK}{CK}=\frac{CK}{BK}\Rightarrow CK^2=AK\cdot BK=xy$, тј. $c=i\sqrt{xy}$, па је $AC^2=AK^2+CK^2=x^2+xy\Rightarrow AC=\sqrt{x(x+y)}$. Пошто је CE је бисектриса $\measuredangle ACK$ имамо да је: $\frac{AE}{EK}=\frac{AC}{CK}$ тј.

$$\frac{x-e}{e}=\frac{\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}}\Rightarrow e=\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{y}+1}+1}=\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x+y}},$$ при чему је *E(-e).*

Сада ћемо применити Менелајеву теорему на троугао ACK и праву DE.

$$\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KF}}{\overrightarrow{FC}}=-1\Rightarrow 1\cdot\frac{-e+x}{0+e}\cdot\frac{f-0}{i\sqrt{xy}-f}=-1\Rightarrow -1+\frac{x}{e}=\frac{f-i\sqrt{xy}}{f}$$, пошто је

$$\frac{x}{e}-1=\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}}-1=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}}$$ имаћемо $f=-i\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}$. Сада је

$$(f-b)\otimes(-e-c)=\left(-y-i\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}\right)\otimes\left(-\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}-i\sqrt{xy}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(-y+i\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}\right)\left(-\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}-i\sqrt{xy}\right)=\frac{-xy\sqrt{x}\sqrt{y}}{x+y-y}+y\sqrt{xy}=0.$$

Одакле следи $BF \parallel CE$. ◇

<u>*Пример 18.3*</u> Шестоугао *ABCDEF* је уписан и кружницу *k*. Дијагонале *AD, BE* и *CF* су пречници те кружнице. Доказати да је површина шестоугла *ABCDEF* једнака двострукој површини троугла *ACE.*

Нека је координатни почетак у центру кружнице *k*. Ако је *A*(*a*), *B*(*b*), *C*(*c*) тада је *D*(-*a*), *E*(-*b*), *F*(-*c*). Биће: $S_{ABCDEF}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}(-a)+(-\overline{a})(-b)+(-\overline{b})(-c)+(-\overline{c})a)=\operatorname{Im}(\overline{a}b+\overline{b}c-\overline{c}a)$

и

$$S_{ACE}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}c+\overline{c}(-b)+(-\overline{b})a)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}c-\overline{c}b-\overline{b}a)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{\overline{a}c-\overline{c}b-\overline{b}a})=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(a\overline{c}-c\overline{b}-b\overline{a})=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(-a\overline{c}+c\overline{b}+b\overline{a})=S_{ABCDEF}.$$

Јер је $\operatorname{Im}(\overline{z})=-\operatorname{Im}z$ и $\operatorname{Im}(-z)=-\operatorname{Im}z$. ◇

<u>*Пример 18.4*</u> Нека је дат конвексан четвороугао *ABCD* и тачке A_1, B_1, C_1, D_1 такве да важе распореди A-B-B_1, B-C-C_1, C-D-D_1 и D-A-A_1, при чему је $AB=BB_1$, $BC=CC_1$, $CD=DD_1$ и $DA=AA_1$. Доказати да је површина четвороугла $A_1B_1C_1D_1$ пет пута већа од површине четвороугла *ABCD.*

$\overrightarrow{DA_1}=2\overrightarrow{DA}\Rightarrow a_1-d=2(a-d)\Rightarrow a_1=d+2(a-d)=2a-d$, слично је $b_1=2b-a$, $c_1=2c-b$ и $d_1=2d-c$. Сада је $S_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a_1}b_1+\overline{b_1}c_1+\overline{c_1}d_1+\overline{d_1}a_1)=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((2\overline{a}-\overline{d})(2b-a)+(2\overline{b}-\overline{a})(2c-b)+(2\overline{c}-\overline{b})(2d-c)+(2\overline{d}-\overline{c})(2a-d)\Big)=$$

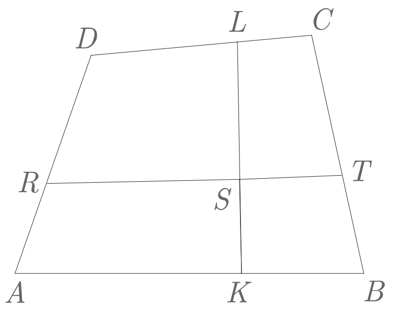
$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(5\overline{a}b+5\overline{b}c+5\overline{c}d+5\overline{d}a-2(\overline{d}b+\overline{b}d)-2(\overline{a}c+\overline{c}a)-2|a|^2-2|b|^2-2|c|^2-2|d|^2)=$$

$$=\frac{5}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}d+\overline{d}a)=5S_{ABCD}.$$

Јер је $\operatorname{Im}(\overline{z}+z)=0$ и $\operatorname{Im}(|z|^2)=0$. ◇

<u>*Лема 13.1*</u> Нека су *K, T, L, R* тачке страница *AB, BC, CD, DA,* редом, четвороугла *ABCD* такве да је $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{DL}=\alpha\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{AR}=\beta\overrightarrow{RD}$, $\overrightarrow{BT}=\beta\overrightarrow{TC}$ и нека је $KL\cap RT=\{S\}$, тада је $\overrightarrow{RS}=\alpha\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{KS}=\beta\overrightarrow{SL}$.

$$\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{KB}\Rightarrow\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KB}=\alpha\Rightarrow k=\frac{a+\alpha b}{1+\alpha}, \text{ слично је } l=\frac{d+\alpha c}{1+\alpha},\ r=\frac{a+\beta d}{1+\beta},\ t=\frac{b+\beta c}{1+\beta}.$$



Нека је S_1 тачка дужи KL таква да је $\overrightarrow{KS_1}=\beta\overrightarrow{S_1L}$, тада је $s_1=\dfrac{k+\beta l}{1+\beta}$. Показаћемо да је $S_1\in RT$, одакле следи да се тачке S_1 и S поклапају.

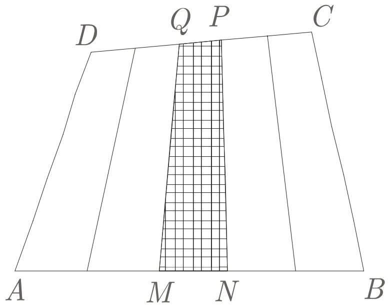
$$t-r=\frac{b+\beta c}{1+\beta}-\frac{a+\beta d}{1+\beta}=\frac{b-a+\beta(c-d)}{1+\beta}$$

$$s_1-r=\frac{k+\beta l}{1+\beta}-\frac{a+\beta d}{1+\beta}=\frac{k-a+\beta(l-d)}{1+\beta}=$$

$=\dfrac{1}{1+\beta}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}(b-a)+\beta\dfrac{\alpha}{\alpha+1}(c-d)\right)=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}(t-r).$ Сада имамо $(s_1-r)\otimes(t-r)=0$, одакле следи да су тачке S_1, R и T колинеарне тј $S_1\in RT$. Слично се покаже да је $\overrightarrow{RS}=\alpha\overrightarrow{ST}$.

<u>*Пример 18.5*</u> а) Наспрамне странице AB и CD конвексног четвороугла $ABCD$ подељене су на пет делова и одговарајуће тачке наспрамних страница су спојене. Доказати да је површина средњег (шрафираног) четвороугла пет пута мања од површине полазног четвороугла.

б) Свака страница конвексног четвороугла је подељена на пет делова и одговарајуће тачке наспрамних страница су спојене. Доказати да је површина средњег четвороугла 25 пута мања од површине полазног.



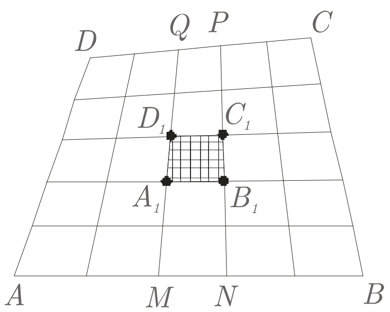
а) $\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=2:3\Rightarrow m=\dfrac{3a+2b}{5}$, $\overrightarrow{AN}:\overrightarrow{NB}=3:2\Rightarrow$

$\Rightarrow n=\dfrac{2a+3b}{5}$, слично је $q=\dfrac{3d+2c}{5}$, $p=\dfrac{2d+3c}{5}$.

$S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{m}n+\overline{n}p+\overline{p}q+\overline{q}m)$, када у ову формулу заменимо наведене изразе за m, n, p, q добијамо:

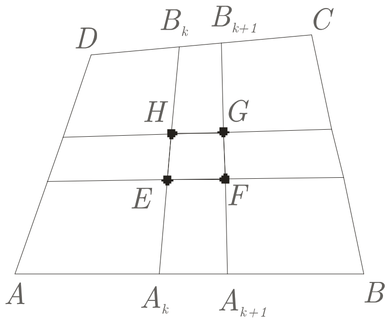
$$S_{MNPQ}=\frac{1}{50}\operatorname{Im}(5\overline{a}b+5\overline{b}c+5\overline{c}d+5\overline{d}a+4(\overline{a}b+\overline{b}a)+4(\overline{b}c+\overline{c}b)+$$
$$+4(\overline{c}d+\overline{d}c)+4(\overline{d}a+\overline{a}c)+6(\overline{b}d+\overline{d}b)+6(\overline{a}c+\overline{c}a)+$$
$$+6|a|^2+6|b|^2+6|c|^2+6|d|^2).$$

Одавде је $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{10}\operatorname{Im}(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}d+\overline{d}a)=\dfrac{1}{5}S_{ABCD}$.



б) По претходној леми је $\overrightarrow{MA_1}:\overrightarrow{A_1Q}=2:3$, $\overrightarrow{MD_1}:\overrightarrow{D_1Q}=3:2$, $\overrightarrow{NB_1}:\overrightarrow{B_1P}=2:3$, $\overrightarrow{NC_1}:\overrightarrow{C_1P}=3:2$. По а) је $S_{A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{1}{5}S_{MNPQ}=\dfrac{1}{25}S_{ABCD}$.◇

Претходни пример се може уопштити тако што се странице AB и CD деле на $2k+1$ делова, а странице AD и BC на $2l+1$ делова, где $k,l\in\mathbb{N}$. Тада је површина средњег четвороугла $S_{A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k}=\dfrac{1}{2k+1}S_{ABCD}$, док је површина централног четвороугла једнака $S_{EFGH}=\dfrac{1}{(2k+1)(2l+1)}S_{ABCD}$.



$\overrightarrow{AA_k} : \overrightarrow{A_kB} = k : (k+1) \Rightarrow a_k = \dfrac{(k+1)a + kb}{2k+1}$,

$\overrightarrow{AA_{k+1}} : \overrightarrow{A_{k+1}B} = (k+1) : k \Rightarrow a_{k+1} = \dfrac{ka + (k+1)b}{2k+1}$, слично је

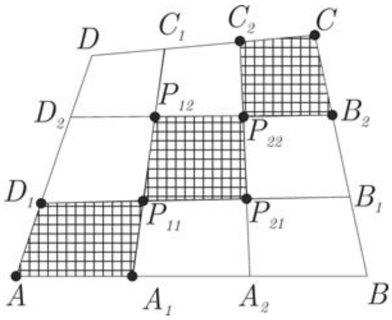
$b_k = \dfrac{(k+1)d + kc}{2k+1}$ и $b_{k+1} = \dfrac{kd + (k+1)c}{2k+1}$. Одавде се добија:

$$S_{A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k} = \frac{1}{2(2k+1)^2}\operatorname{Im}(((k+1)^2 - k^2)\overline{a}b + ((k+1)^2 - k^2)\overline{b}c + ((k+1)^2 - k^2)\overline{c}d + ((k+1)^2 - k^2)\overline{d}a$$

$$+k(k+1)(\overline{b}d + \overline{d}b) + k(k+1)(\overline{a}c + \overline{c}a) + k(k+1)|a|^2 + k(k+1)|b|^2 + k(k+1)|c|^2 + k(k+1)|d|^2) =$$

$= \dfrac{1}{2(2k+1)}\operatorname{Im}(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}d + \overline{d}a) = \dfrac{1}{2k+1}S_{ABCD}$. Остали део уопштења следи применом леме *.

<u>*Пример 18.6*</u> Свака страна конвексног четвороугла $ABCD$ подељена је са две тачке на три подударне дужи. Одговарајуће тачке поделе наспрамних страна спојене су дужима и на тај начин је четвороугао $ABCD$ подељен на девет четвороуглова. Доказати да је збир површина три четвороугла те поделе - четвороугла који садржи теме *A*, средњег четвороугла и четвороугла који садржи теме *C*- једнак 1/3 површине четвороугла *ABCD*.



Нека су тачке поделе означене као на слици. По уопштењу претходног примера је $S_{P_{11}P_{21}P_{22}P_{12}} = \dfrac{1}{9}S_{ABCD}$, осим тога је

$a_1 = \dfrac{2a+b}{3}$, $d_1 = \dfrac{2a+d}{3}$, $b_2 = \dfrac{2c+b}{3}$, $c_2 = \dfrac{2c+d}{3}$,

$p_{11} = \dfrac{4a+2b+c+2d}{9}$, $p_{22} = \dfrac{a+2b+4c+2d}{9}$.

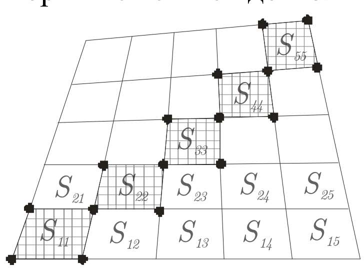
Сада је $S_{AA_1P_{11}D_1} + S_{P_{22}B_2CC_2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}a_1 + \overline{a_1}p_{11} + \overline{p_{11}}d_1 + \overline{d_1}a) + \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{p_{22}}b_2 + \overline{b_2}c + \overline{c}c_2 + \overline{c_2}p_{22})$,

После замене наведених вредности за a_1, d_1, b_2, c_2, p_{11}, p_{22} и сређивања израза добија се

$$S_{AA_1P_{11}D_1} + S_{P_{22}B_2CC_2} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}d + \overline{d}a}{3} + \frac{\overline{a}d + \overline{b}a + \overline{c}b + \overline{d}c}{9}\right) = \frac{1}{9}\operatorname{Im}(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}d + \overline{d}a) = \frac{2}{9}S_{ABCD}.$$

Па је $S_{AA_1P_{11}D_1} + S_{P_{11}P_{21}P_{22}P_{12}} + S_{P_{22}B_2CC_2} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}$. ◇

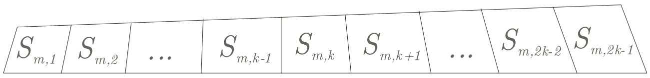
Претходни пример се може уопштити тако што се странице деле на *n* делова. испоставља се да и у том случају важи закључак: збир површина четвороуглова који се налазе на дијагонали полазног четвороугла је једнак 1/*n* површине полазног четвороугла. Коришћењем већ доказаних чињеница прво ћемо тврђење доказати за *n=2k-1* па за *n=2k*.



Површине четвороуглова који се добијају поделом полазног четвороугла ћемо нумерисати слично матрици (видети слику). Нека је $1 \le m \le 2k-1$, тада је $S_{m,k} = \dfrac{1}{3}(S_{m,k-1} + S_{m,k} + S_{m,k+1}) \Rightarrow S_{m,k} = \dfrac{1}{2}(S_{m,k-1} + S_{m,k+1})$ по уопштењу иза примера 5. Слично је

$$S_{m,k}=\frac{1}{5}(S_{m,k-2}+S_{m,k-1}+S_{m,k}+S_{m,k+1}+S_{m,k+2})=\frac{1}{5}(S_{m,k-2}+S_{m,k+2})+\frac{1}{5}(S_{m,k-1}+S_{m,k+1})+\frac{1}{5}S_{m,k}$$

$$\Rightarrow S_{m,k}=\frac{1}{2}(S_{m,k-2}+S_{m,k+2}).$$



Претпоставимо да $S_{m,k}=\frac{1}{2}(S_{m,k-j}+S_{m,k+j})$ важи за све $j\in\{1,2,\ldots l-1\}$, показујемо да важи и за l (при чему опет користимо уопштење примера 5):

$$S_{m,k}=\frac{1}{2l+1}(S_{m,k-l}+S_{m,k-l+1}+\ldots+S_{m,k-1}+S_{m,k}+S_{m,k+1}+\ldots+S_{m,k+l-1}+S_{m,k+l})=$$

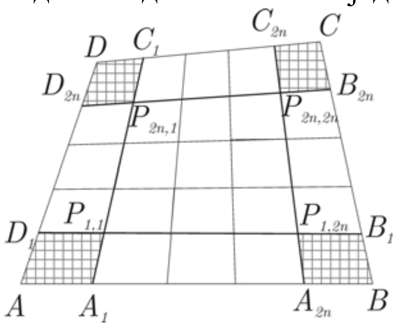
$$=\frac{1}{2l+1}(S_{m,k-l}+S_{m,k+l})+\frac{1}{2l+1}\underbrace{(S_{m,k-l+1}+S_{m,k+l-1})}_{=2S_{m,k}}+\ldots+\frac{1}{2l+1}\underbrace{(S_{m,k-1}+S_{m,k+1})}_{=2S_{m,k}}+\frac{1}{2l+1}S_{m,k}=$$

$$=\frac{1}{2l+1}(S_{m,k-l}+S_{m,k+l})+\frac{2(l-1)}{2l+1}S_{m.k}+\frac{1}{2l+1}S_{m,k}\Rightarrow S_{m,k}=\frac{1}{2}(S_{m,k-l}+S_{m,k+l}).$$ Одавде је:

$$2S_{1,k}=S_{1,1}+S_{1,2k-1},\,2S_{2,k}=S_{2,2}+S_{2,2k-2},\ldots,2S_{k-1,k}=S_{k-1,k-1}+S_{k-1,k+1},\,2S_{k,k}=S_{k,k}+S_{k,k},$$
$$2S_{k+1,k}=S_{k+1,k+1}+S_{k+1,k-1},\ldots,2S_{2k-1,k}=S_{2k-1,2k-1}+S_{2k-1,1}$$
$$\Rightarrow 2(S_{1,k}+S_{2,k}+\ldots+S_{2k-1,k})=(S_{1,1}+S_{2,2}+\ldots+S_{2k-1,2k-1})+(S_{1,2k-1}+S_{2,2k-2}+\ldots+S_{2k-1,1})$$
$$\Rightarrow\frac{2}{2k-1}S=S_{\Delta_1}+S_{\Delta_2}.$$

Индукцијом се показује да је $S_{\Delta_1}=S_{\Delta_2}$, па је $S_{\Delta_1}=S_{\Delta_2}=\frac{1}{2k-1}S$.

За *n=3* имамо да је $S_{\Delta_1}=\frac{1}{3}S$, слично се покаже $S_{\Delta_2}=\frac{1}{3}S$. Претпоставимо да при подели страница четвороугла на *2n-1* делова важи $S_{\Delta_1}=S_{\Delta_2}$. Да би доказали да и у подели на *2n+1* делова важи $S_{\Delta_1}=S_{\Delta_2}$ довољно је да докажемо да је збир малих четвороуглова *2n+1* поделе код темена *A* и *C* једнак збиру малих четвороуглова *2n+1* поделе код темена *B* и *D*.



Испоставља се да је

$$S_{AA_1P_{1,1}D_1}+S_{P_{2n,2n}B_{2n}CC_{2n}}=\frac{1}{2n+1}S+\frac{1}{(2n+1)^3}S-\frac{4n^2}{(2n+1)^3}S=$$
$$=S_{BB_1P_{1,2n}A_{2n}}+S_{P_{2n,1}C_1DD_{2n}}$$

Да би тврђење доказали за парне бројеве користићемо следећу лему:

<u>*Лема 13.2*</u> Нека су тачке A_1, B_1, C_1, D_1 средишта страница *AB, BC, CD, DA,* редом, четвороугла *ABCD.* Нека је још $A_1C_1\cap B_1D_1=\{S\}$. Тада је

$$S_{AA_1SD_1}+S_{SB_1CC_1}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{A_1BB_1S}+S_{SC_1DD_1}.$$

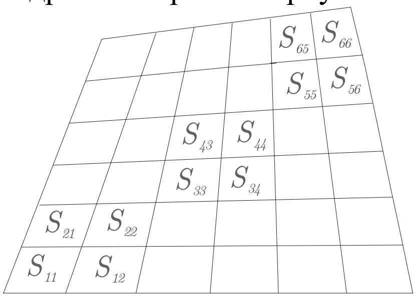
Биће $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=\frac{b+c}{2}$, $c_1=\frac{c+d}{2}$, $d_1=\frac{a+d}{2}$, $s=\frac{a+b+c+d}{4}$, па је

$$S_{AA_1SD_1}+S_{SB_1CC_1}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\bar{a}a_1+\bar{a}_1s+\bar{s}d_1+\bar{d}_1a\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\bar{s}b_1+\bar{b}_1c+\bar{c}c_1+\bar{c}_1s\right)=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Одавде је $S_{A_1BB_1S}+S_{SC_1DD_1}=S_{ABCD}-\left(S_{AA_1SD_1}+S_{SB_1CC_1}\right)=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Из ове леме следи тврђење уопштења за *n=2*.

Сада доказујемо тврђење уопштења за *n=2k.* Пошто је *n=2k* паран, осим четвороуглова који се добијају поделом страница на *2k* делова, можемо посматрати и четвороуглове који се добијају поделом страница на *k* делова. Сваки четвороугао *k*-поделе садржи четири четвороугла 2*k*-поделе. Биће:



$$\left(S_{1,1}+S_{1,2}+S_{2,1}+S_{2,2}\right)+\left(S_{3,3}+S_{3,4}+S_{4,3}+S_{4,4}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(S_{2k-1,2k-1}+S_{2k-1,2k}+S_{2k,2k-1}+S_{2k,2k}\right)=$$
$$=\widetilde{S_{1,1}}+\widetilde{S_{2,2}}+\ldots+\widetilde{S_{k,k}}=\frac{1}{k}S,$$

где су са $S_{j,j}$ означени дијагонални четвороуглови 2*k*-поделе, а са $\widetilde{S_{j,j}}$ дијагонални четвороуглови *k*-поделе.

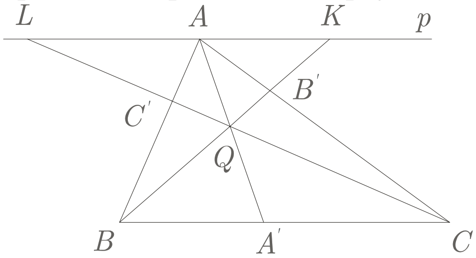
По леми 13.2 имамо:

$$\frac{1}{k}S=\left(S_{1,1}+S_{1,2}+S_{2,1}+S_{2,2}\right)+\left(S_{3,3}+S_{3,4}+S_{4,3}+S_{4,4}\right)+\ldots+\left(S_{2k-1,2k-1}+S_{2k-1,2k}+S_{2k,2k-1}+S_{2k,2k}\right)=$$
$$=2\left(S_{1,1}+S_{2,2}\right)+2\left(S_{3,3}+S_{4,4}\right)+\ldots+2\left(S_{2k-1,2k-1}+S_{2k,2k}\right)$$
$$\Rightarrow S_{1,1}+S_{2,2}+S_{3,3}+S_{4,4}+\ldots+S_{2k-1,2k-1}+S_{k,k}=\frac{1}{2k}S.$$

Чевијева теорема

<u>*Теорема 18.1*</u> Нека је дат троугао *ABC*, при чему је *A*(*a*)*, B*(*b*)*, C*(*c*). Доказати да се праве одређене теменима *A*, *B*, *C* и тачкама A',B',C' које припадају страницама *BC*, *CA*, *AB* редом секу у једној тачки акко је $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}=1.$

Ово је исказ Чевијеве теореме уобичајен у геометрији па је и доказ који следи практично превод геометријског доказа.



Нека се AA', BB' и CC' секу у тачки *Q*. Нека је $A'(a'), B'(b')$ и $C'(c')$, и нека је *p* права која садржи тачку *A* и паралелна је правој *BC*. Нека је $BB'\cap p=\{K\}$ и $CC'\cap p=\{L\}$ и нека је *K*(*k*), *L*(*l*) тада имамо: троугао $A'QB$ је директно сличан троуглу AQK па следи да је $\frac{q-a'}{b-a'}=\frac{q-a}{k-a}$; и троугао $A'CQ$ је директно сличан троуглу ALQ па следи да је $\frac{c-a'}{q-a'}=\frac{l-a}{q-a}$. Сада имамо:

$$\frac{\frac{b-a'}{q-a'}}{\frac{c-a'}{q-a'}}=\frac{\frac{k-a}{q-a}}{\frac{l-a}{q-a}}\Rightarrow\frac{b-a'}{c-a'}=\frac{k-a}{l-a}.$$

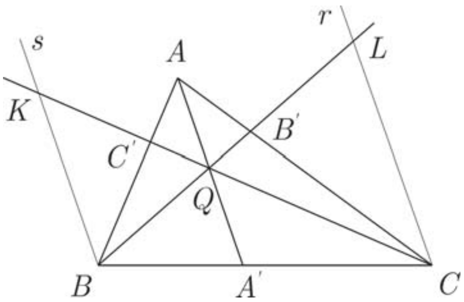
Такође је троугао $CB'B$ директно сличан троуглу $AB'K$ па следи да је $\frac{b'-c}{b-c}=\frac{b'-a}{k-a}\Rightarrow\frac{b'-c}{b'-a}=\frac{b-c}{k-a}$; и троугао BCC' је директно сличан троуглу ALC' па следи да је $\frac{c-b}{c'-b}=\frac{l-a}{c'-a}\Rightarrow\frac{c'-a}{c'-b}=\frac{l-a}{c-b}$.

Сада имамо да је

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}=\frac{a'-b}{c-a'}\cdot\frac{b'-c}{a-b'}\cdot\frac{c'-a}{b-c'}=\left(-\frac{k-a}{l-a}\right)\left(-\frac{b-c}{k-a}\right)\left(-\frac{l-a}{c-b}\right)=1.$$

С друге стране, ако је $BB'\cap CC'=\{Q\}$ и $AQ\cap BC=\{A''\}$ биће по доказаном делу теореме $\frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}=1$ а по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}=1$ па добијамо да је $\frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}}=\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}$ одакле следи да се тачке A' и A'' поклапају, тј. да је $Q\in AA'$. □

Теорема 18.2 (**Ван Обела**) Ако су A', B', C' тачке страница BC, CA, AB троугла ABC такве да се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачки Q тада је $\frac{AQ}{QA'}=\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}$.



Нека су комплексне координате тачака дате одговарајућим малим словима. Нека је r права која садржи тачку C и паралелна је са AA' и s права која садржи тачку B паралелна је са AA'. Нека је још $r\cap BB'=\{L\}$ и $s\cap CC'=\{K\}$.

Троугао AQC' је директно сличан троуглу BKC' па следи да је $\frac{q-a}{c'-a}=\frac{k-b}{c'-b}\Rightarrow\frac{c'-a}{c'-b}=\frac{q-a}{k-b}$; и троугао $CB'L$ је директно сличан троуглу $AB'Q$ па следи да је $\frac{b'-c}{l-c}=\frac{b'-a}{q-a}\Rightarrow\frac{b'-a}{b'-c}=\frac{q-a}{l-c}$.

Троугао BKC је директно сличан троуглу $A'QC$ па следи да је $\frac{k-b}{c-b}=\frac{q-a'}{c-a'}\Rightarrow\frac{c-a'}{c-b}=\frac{q-a'}{k-b}$; и троугао CLB је директно сличан троуглу $A'QB$ па следи да је $\frac{l-c}{b-c}=\frac{q-a'}{b-a'}\Rightarrow\frac{b-a'}{b-c}=\frac{q-a'}{l-c}$. Сада је:

$$\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{|c'-a|}{|b-c'|}+\frac{|b'-a|}{|c-b'|}=\frac{|q-a|}{|k-b|}+\frac{|q-a|}{|l-c|}=|q-a|\left(\frac{1}{|k-b|}+\frac{1}{|l-c|}\right)=$$

$$=|q-a|\left(\frac{1}{|q-a'|}\frac{|c-a'|}{|c-b|}+\frac{1}{|q-a'|}\frac{|b-a'|}{|b-c|}\right)=\frac{|q-a|}{|q-a'|}\frac{|c-a'|+|b-a'|}{|b-c|}=\frac{|q-a|}{|q-a'|}=\frac{AQ}{QA'}.\ \square$$

Закључак Ако се праве AA', BB' и CC' из претходних теорема секу у једној тачки Q биће $\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=1$ па постоје реални бројеви m, n и p такви да је $\frac{BA'}{A'C}=\frac{p}{n},\frac{CB'}{B'A}=\frac{m}{p},\frac{AC'}{C'B}=\frac{n}{m}$.

Тада је координата тачке A' дата са $a'=\frac{nb+pc}{n+p}$. По Ван Обеловој теореми је

$\dfrac{AQ}{QA'} = \dfrac{AC'}{C'B} + \dfrac{AB'}{B'C} = \dfrac{n}{m} + \dfrac{p}{m} = \dfrac{n+p}{m}$ па је комплексна координата тачке Q дата са $q = \dfrac{ma + (n+p)a'}{m+n+p} = \dfrac{ma+nb+pc}{m+n+p}$. □

Важи и обрнуто:

<u>*Тврђење 18.4*</u> Нека је дат ABC и тачке A', B', C' на страницама BC, CA, AB тог троугла тако да је $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{p}{n}, \dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{m}{p}, \dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{n}{m}$. Тада се праве AA', BB' и CC' секу у тачки Q која има комплексну координату $q = \dfrac{ma+nb+pc}{m+n+p}$.

Из $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{p}{n}$ следи да је $a' = \dfrac{nb+pc}{n+p}$. Из $\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{m}{p}$ следи да је $b' = \dfrac{pc+ma}{p+m}$. Из $\dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{n}{m}$ следи да је $c' = \dfrac{ma+nb}{m+n}$. Показаћемо да тачка Q припада свакој од правих AA', BB' и CC':

$$(q-a) \otimes (a'-a) = \frac{ma+nb+pc-(ma+na+pa)}{m+n+p} \otimes \frac{nb+pc-(n+p)a}{n+p} =$$

$= \dfrac{n(b-a)+p(c-a)}{m+n+p} \otimes \dfrac{n(b-a)+p(c-a)}{n+p} = 0$, па следи да су тачке Q, A и A' колинеарне.

Слично је $(q-b) \otimes (b'-b) = 0$, па су тачке Q, B и B' колинеарне, као и $(q-c) \otimes (c'-c) = 0$, па су тачке Q, C и C' колинеарне. □

Ово тврђење се може искористити да нађемо координате неких важних тачака троугла као што су тежиште, центар уписаног круга, Жергонове тачке (која се добија као пресек правих које спајају теме троугла са тачком у којој уписани круг додирује наспрамну страницу) итд. Овде ћемо то урадити само за центар уписаног круга S.

Већ је показано да важи $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{AB}{AC}, \dfrac{CB'}{AB'} = \dfrac{BC}{AB}, \dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{AC}{BC}$, тј. $p=AB$, $n=$AC, $m=BC$. Тада је:

$$s = \frac{a \cdot BC + b \cdot AC + c \cdot AB}{AB + AC + BC} = \frac{a \cdot |c-b| + b \cdot |c-a| + c \cdot |b-a|}{|b-a| + |c-a| + |c-b|}.$$

II. 1. Билинеарна функција и инверзија

Дефиниција 1 Пресликавање облика $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc\neq 0$ (1) називамо билинеарном функцијом. Оваква пресликавања први је разматрао Август Фердинанд Мебијус (1790-1868) па се зато називају и Мебијусовим пресликавањима.

Пошто за *c≠0* важи $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{bc-ad}{c^2}\cdot\dfrac{1}{z+\dfrac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}$ (2), видимо да у случају *bc-ad=0* добијамо константно пресликавање, па зато тај (тривијални) случај избацујемо. Из претходног израза (2) јасно је да је билинеарна функција композиција функција $f_1(z)=z+\dfrac{d}{c},\ f_2(z)=\dfrac{1}{z},\ f_3(z)=\dfrac{bc-ad}{c^2}z,\ f_4(z)=z+\dfrac{a}{c}.$ (3)

Функције f_1, f_3, f_4 су разматране раније и њихова геометријска интерпретација је позната: f_1 и f_4 су транслације, док је f_3 дилатациона ротација (у случају $\left|\dfrac{bc-ad}{c^2}\right|=1$ само ротација).

Случај *c=0* доводи до функције облика $f(z)=\tilde{a}z+\tilde{b}$ која је такође дилатациона ротација.

Ако је *c≠0* појављује се функција $f_2(z)=\dfrac{1}{z}$ која до сада није разматрана. Она је у блиској вези са инверзијом коју као геометријско пресликавање дефинишемо на следећи начин:

Дефиниција 2 Нека је *k* кружница са центром у *O*, полупречника *R*. Инверзијом у односу на кружницу *k* називамо пресликавање Ψ_k Еуклидске равни у себе које свакој тачки *P* додељује тачку *P′* такву да важи $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OP'}=R^2$.

(Другим речима тачке *P* и P' су узајемно инверзне у односу на кружницу *k* акко леже на истој полуправој чији је почетак тачка *O* и ако важи $OP\cdot OP'=R^2$)

Тачку *O* називамо центром инверзије, кружницу *k* називамо кружницом инверзије, а број *R* полупречником инверзије Ψ_k, понекад се користи и термин R^2- коефицијент инверзије.

Уколико за кружницу инверзије узмемо $k:|z|=1$, имаћемо да се тачка *P(z)*, где је $z=re^{i\varphi}$, слика у тачку *P′* чија је комплексна координата $p'=\dfrac{1}{r}e^{i\varphi}=\dfrac{1}{re^{-i\varphi}}=\dfrac{1}{\bar{z}}$. Дакле тачка $\widetilde{P}(\bar{z})$ се инверзијом слика у тачку P^* чија је комплексна координата $\dfrac{1}{z}$. Пошто је коњуговање у ствари симетрија у односу на реалну осу , видимо да је пресликавање f_2 у ствари композиција $f_2(z)=\left(\psi_k\circ S_x\right)(z)=\psi_k(\bar{z})$, тј. важи $\dfrac{1}{z}=\psi_k(\bar{z})$. Такође је $\dfrac{1}{\bar{z}}=\psi_k(z)$, тј. $\dfrac{1}{z}=\overline{\psi_k(z)}$, што се може записати и са $f_2(z)=\left(S_x\circ\psi_k\right)(z)$, што значи да редослед коњуговања и инверзије у претходној композицији није битан.

Из претходног разматрања је јасно да се инверзија у односу на јединичну кружницу $k:|z|=1$ у облику комплексне функције изражава са $\psi_k(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Пресликавање $f_2(z)=\frac{1}{z}$, које је у блиској вези са инверзијом, називаћемо комплексна инверзија.

Из (2) јасно је да Мебијусова трансформација (1) пресликава $\mathbb{C}/\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ у $\mathbb{C}/\left\{\frac{a}{c}\right\}$. Пошто су пресликавања *f₁, f₂, f₃, f₄* бијекције из (3) следи да је Мебијусова трансформација $f:\mathbb{C}/\left\{-\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{C}/\left\{\frac{a}{c}\right\}$ бијекција. Међутим пошто је $\lim\limits_{z\to-\frac{d}{c}} f(z)=\infty$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\frac{a}{c}$ видимо да уколико ставимо $f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$ и $f\left(\infty\right)=\frac{a}{c}$ добијамо пресликавање $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ које остаје бијекција.

Решавањем једначине $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ по z добијамо $z=\frac{dw-b}{-cw+a}$, дакле биће $f^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$, а пошто је $ad-(-b)(-c)=ad-bc\neq 0$, имамо да уколико је пресликавање f нетривијално, биће такво и f^{-1}.

Посматрајмо композицију пресликавања $f_1(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ и $f_2(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$. Испоставља се да је $\left(f_2\circ f_1\right)(z)=\frac{(a_1a_2+c_1b_2)z+b_1a_2+d_1b_2}{(a_1c_2+c_1d_2)z+b_1c_2+d_1d_2}\quad(4)$. Из чињенице да су f_1 и f_2 бијекције јасно је да пресликавање $f_2\circ f_1$ не може бити тривијално (тј. ако би $f_2\circ f_1$ сликало $\overline{\mathbb{C}}$ у једну тачку, пошто је f_1 бијекција, морало би f_2 да слика $\overline{\mathbb{C}}$ у једну тачку, што противуречи чињеници да је f_2 бијекција). Дакле композиција две нетривијалне Мебијусове трансформације је нетривијална Мебијусова трансформација.

Заједно са чињеницом да је пресликавање $f(z)=z$ билинеарно и да свака нетривијална билинеарна функција има инверз одавде добијамо да скуп Мебијусових трансформација у односу на композицију пресликавања чини групу.

Пошто је $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{kaz+kb}{kcz+kd}, k\neq 0$, јасно је да коефицијенти Мебијусове трансформације нису јединствени. Ако је $k=\frac{\pm 1}{\sqrt{ad-bc}}$, добијамо да нови коефицијенти задовољавају једнакост $ka\cdot kd-kb\cdot kc=k^2(ad-bc)=1$. Ако коефицијенти Мебијусове трансформације задовољавају једнакост $ad-bc=1$ кажемо да је та трансформација задата у нормализованом облику. Дакле, свака Мебијусова трансформација се може представити у нормализованом облику и то на два начина јер је $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{-az-b}{-cz-d}$.

Сада ћемо показати да се скуп кругова и правих комплексне равни Мебијусовим трансформацијама пресликава у самог себе. Ради тога посматраћемо Мебијусову функцију представљену у облику (2) тј. као композицију функција (3). Показаћемо да комплексна инверзија $f_2(z)$ пресликава скуп кругова и правих у себе, а за пресликавања f_1, f_3, f_4 је то очигледно јер је већ раније показано да су f_1 и f_4 транскације, а да је f_3 композиција хомотетије (дилатације) и ротације. Такође је раније показано да је:
$Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\overline{z}+C=0,\ A,C\in\mathbb{R},\left|B\right|^2-AC\geq 0\quad(5)$, општи облик једначине круга или праве у комплексној равни (за $A=0$ добија се једначина праве). Примењујући функцију $w=f_2(z)=\frac{1}{z}$

добијамо да је $z=\dfrac{1}{w}$, замењујући ово у (5) имамо да је $Cw\overline{w}+\overline{B}w+B\overline{w}+A=0 \quad (6)$, што је опет једначина круга или праве. Прецизније, имамо:

- *(i)* *A=0* и *C=0,* па је (5) једначина праве која пролази кроз 0, из (6) следи да је њена слика права која пролази кроз 0.
- *(ii)* *A=0* и *C≠0,* па је (5) једначина праве која не садржи 0, из (6) следи да је њена слика кружница која садржи 0.
- *(iii)* *A≠0* и *C=0,* па је (5) једначина кружнице која садржи 0, из (6) следи да је њена слика права која не садржи 0.
- *(iv)* *A≠0* и *C≠0,* па је (5) једначина кружнице која не садржи 0, из (6) следи да је њена слика кружница која не садржи 0.

Дакле Мебијусова трансформација (1) пресликава кругове или праве комплексне равни у кругове или праве исте равни при чему:

- *(i)* права која садржи тачку $X\left(-\dfrac{d}{c}\right)$ се слика у праву која садржи тачку $Y\left(\dfrac{a}{c}\right)$,
- *(ii)* права која не садржи тачку *X* се слика у кружницу која садржи тачку *Y*,
- *(iii)* кружница која садржи тачку *X* се слика у праву која не садржи тачку *Y,*
- *(iv)* кружница која не садржи тачку *X* се слика у кружницу која не садржи тачку *Y*.

Кружнице и праве комплексне равни се могу поистоветити са кружницама у $\overline{\mathbb{C}}$, тако што ћемо праву комплесне равни посматрати као кружницу која садржи тачку ∞ и бесконачно је великог пречника. Наведено својство *(ii)* се може образложити и на следећи начин: пошто је у питању права у $\mathbb{C}$, поистовећујемо је са кружницом у $\overline{\mathbb{C}}$ која садржи тачку ∞ и не садржи тачку $X\left(-\dfrac{d}{c}\right)$. Пошто Мебијусова трансформација слика кружнице у $\overline{\mathbb{C}}$ у кружнице у $\overline{\mathbb{C}}$, њена слика је кружница у $\overline{\mathbb{C}}$ која садржи слику тачке ∞, а то је $Y\left(\dfrac{a}{c}\right)$, а не садржи слику тачке *X*, тј. ∞, дакле то је кружница и у $\mathbb{C}$. На сличан начин се могу образложити и остала наведена својства.

Претходне особине указују да постоји веза између Мебијусове трансформације (1) и инверзије у односу на круг $k:\left|z+\dfrac{d}{c}\right|=1$.

<u>*Тврђење1*</u> Мебијусова трансформација (1) се може изразити као композиција инверзије ψ_k, где је $k:\left|z+\dfrac{d}{c}\right|=1$ и пресликавања $g(z)=p\overline{z}+q$ (за које је раније показано да је индиректна трансформација сличности).

Прво ћемо извести комплексну функцију која одговара инверзији у односу на кружницу $l:|z-s|=R$. Тачки *P(z),* где је $z=s+re^{i\varphi}$, при инверзији у односу на кружницу *l* одговараће тачка *P′(z′)* при чему је $|z'-s|\cdot|z-s|=R^2$, тј. $|z'-s|=\dfrac{R^2}{r}$, а пошто су *S, P* и *P′* колинеарне биће $z'=s+\dfrac{R^2}{r}e^{i\varphi}=s+\dfrac{R^2}{re^{-i\varphi}}=s+\dfrac{R^2}{\overline{z-s}}$. Пошто је у тврђењу *R=1* и $s=-\dfrac{d}{c}$, биће $\psi_k(z)=-\dfrac{d}{c}+\dfrac{1}{\overline{z}+\overline{\dfrac{d}{c}}}$. По представљању (2) Мебијусове трансформације биће:

$$f(z)=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c^2}\overline{\left(\psi_k(z)+\frac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c^2}\overline{\psi_k(z)}+\left(\frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}}+\frac{a}{c}\right),$$

стављајући $p=\frac{bc-ad}{c^2}, q=\frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}}+\frac{a}{c}$ имамо тврђење $f=g\circ\psi_k$, при чему је $g(z)=p\overline{z}+q$.□

Слично се може показати да се Мебијусова трансформација (1) може приказати у облуку $f=\psi_k\circ h$, где је ψ_k инверзија у односу на кружницу $k:\left|z-\frac{a}{c}\right|=1$, а $h(z)=\tilde{p}\overline{z}+\tilde{q}$ индиректна трансформација сличности.

<u>*Тврђење 2*</u> Тачке *P* и *Q* су инверзне у односу на круг $k:|z-o|=r$ акко је $(p-o)(\overline{q}-\overline{o})=r^2$.

Нека је *Ψ$_k$(P)=Q*. Одавде имамо да су тачке *P* и *Q* са исте стране од тачке *O*. Због тога је $p=o+l_1e^{i\varphi}, q=o+l_2e^{i\varphi}, l_1,l_2\in\mathbb{R}^+$. Осим тога је $OP\cdot OQ=r^2$, одакле је $|p-o|\cdot|q-o|=r^2$, тј. $l_1\cdot l_2=r^2$. Сада имамо $l_1\cdot l_2=l_1e^{i\varphi}l_2e^{-i\varphi}=(p-o)(\overline{q}-\overline{o})$, одакле следи тврђење.

Ако је испуњен услов $(p-o)(\overline{q}-\overline{o})=r^2$ имамо да је $(\overline{p}-\overline{o})(q-o)=r^2$, одакле је $|p-o|\cdot|q-o|=r^2$. Ако је $p=o+le^{i\varphi},\ l\in\mathbb{R}^+$ имамо да је $\overline{q}-\overline{o}=\frac{r^2}{le^{i\varphi}}=\frac{r^2}{l}e^{-i\varphi}$, тј. $q-o=\frac{r^2}{l}e^{i\varphi}$, што значи да су тачке *P* и *Q* на истој полуправој чији је почетак тачка *O*. Дакле важи *Ψ$_k$(P)=Q.*□

Размотрићемо фиксне тачке Мебијусовог пресликавања (1). Тачка *z* је фиксна тачка тог пресликавања акко је решење једначине $\frac{az+b}{cz+d}=z$ која је еквивалентна са једначином $cz^2+(d-a)z-b=0\quad(7)$.

Пошто је (7) квадратна једначина, она има највише два решења, дакле Мебијусово пресликавање може имати највише две фиксне тачке. Уколико *c≠0* те фиксне тачке су дате са $\xi_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2-4bc}}{2c}$, а ако претпоставимо да је Мебијусово пресликавање нормализовано (тј. да је $\Delta=ad-bc=1$) имаћемо да су са $\xi_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$ (8) дате његове фиксне тачке. Из ове формуле примећујемо да се у случају нормализованог Мебијусовог пресликавања фиксне тачке ξ_1 и ξ_2 поклапају акко је $a+d=\pm 2$, тј. тада наведено пресликавање има само једну фиксну тачку.

Ако је *c=0* Мебијусово пресликавање постаје $f(z)=a'z+b', a'=\frac{a}{d}, b'=\frac{b}{d}$ и једначина (7) у том случају за $a'=1$ и $b'\neq 0$ нема решења у $\mathbb{C}$, али важи $f(\infty)=\infty$ па је ∞ једина фиксна тачка, случај $a'=1$ и $b'=0$ даје идентичко пресликавање коме су све тачке фиксне. Ако је $a'\neq 1$ једначина (7) има решење $z=\frac{b'}{1-a'}\in\mathbb{C}$ али и тачка ∞ испуњава услов $f(\infty)=\infty$, те Мебијусово пресликавање у овом случају има две фиксне тачке, једну коначну и још тачку ∞.

Основни закључак из овог разматрања, који је потребан за следеће твеђење је да Мебијусово пресликавање има највише две фиксне тачке, па ако има више (рецимо три) фиксних тачака оно мора бити идентитета.

<u>*Тврђење3*</u> Ако су *Q(q), R(r), S(s), q, r,* $s\in\overline{\mathbb{C}}$, три међусобно различите тачке и $\tilde{Q}(\tilde{q}), \tilde{R}(\tilde{r}), \tilde{S}(\tilde{s}), \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}\in\overline{\mathbb{C}}$ три међусобно различите тачке, тада постоји јединствена

Мебијусова трансформација f таква да је $f(q)=\tilde{q},\ f(r)=\tilde{r},\ f(s)=\tilde{s}$ (9).

Та трансформација је имплицитно задата формулом:

$$\frac{w-\tilde{s}}{w-\tilde{q}}\cdot\frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}=\frac{z-s}{z-q}\cdot\frac{r-q}{r-s}. \quad (10)$$

Ако је нека од шест датих тачака једнака ∞ онда разломак у коме се она јавља у бројиоцу и имениоцу треба заменити са 1, на пример ако је $\tilde{s}=\infty$, разломак $\frac{w-\tilde{s}}{\tilde{r}-\tilde{s}}$ треба заменити са 1.

Ако би постојале две Мебијусове функције f_1 и f_2 које задовољавају услов (9), Мебијусова трансформација $f_2^{-1}\circ f_1$ би имала три различите фиксне тачке q, r и s, па мора бити једнака идентичком пресликавању, одакле следи $f_1=f_2$, чиме је показана јединственост Мебијусовог пресликавања са својством (9).

Да је са (10) дата Мебијусова трансформација са својством (9) можемо закључити решавајући једнакост (10) по w, међутим то је прилично гломазан рачун. Други начин је да обележимо $f_1(z)=\frac{z-s}{z-q}\cdot\frac{r-q}{r-s}$ и $f_2(w)=\frac{w-\tilde{s}}{w-\tilde{q}}\cdot\frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}$. Тада имамо: $f_1(s)=0$ и $f_2(\tilde{s})=0$, $f_1(q)=\infty$ и $f_2(\tilde{q})=\infty$, $f_1(r)=1$ и $f_2(\tilde{r})=1$, па композиција $f_2^{-1}\circ f_1=f$ има особину (9). Пошто из $f=f_2^{-1}\circ f_1$ имамо $f_2\circ f=f_1$, стављајући $w=f(z)$ имамо да за овакво f важи (10).□

Приметимо да се функција $f_1(z)$ поклапа са двоsразмером тачака $M(z), Q(q), R(r), S(s)$ уведеном раније(тј. $D(M,Q,R,S)=f_1(z)$). Користећи ову чињеницу и претходно тврђење имамо:

<u>*Последица 1*</u> Постоји билинеарна трансформација која пресликава тачке $P(p), Q(q), R(r), S(s)$ редом у тачке $\tilde{P}(\tilde{p}), \tilde{Q}(\tilde{q}), \tilde{R}(\tilde{r}), \tilde{S}(\tilde{s})$ акко је $D(P,Q,R,S)=D(\tilde{P},\tilde{Q},\tilde{R},\tilde{S})$. (11)

Ако постоји билинеарна трансформација са наведеним својством тада она пресликава тачке Q, R, S редом у тачке $\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}$, па је она облика (10) при чему је $f(p)=\tilde{p}$, па важи (11).

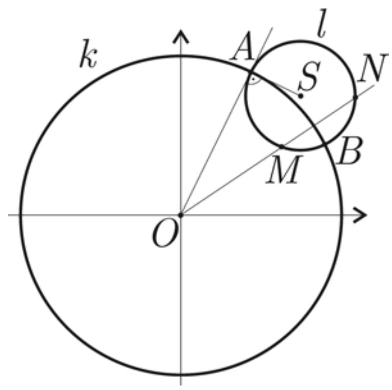
Ако важи (11) тада је $\frac{\tilde{p}-\tilde{s}}{\tilde{p}-\tilde{q}}\cdot\frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}=\frac{p-s}{p-q}\cdot\frac{r-q}{r-s}$. Нека је f билинеарна трансформација која пресликава тачке Q, R, S редом у тачке $\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}$, тада је она задата са (10), због тога је $\frac{f(p)-\tilde{s}}{f(p)-\tilde{q}}\cdot\frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}=\frac{p-s}{p-q}\cdot\frac{r-q}{r-s}$, одакле је $\frac{f(p)-\tilde{s}}{f(p)-\tilde{q}}\cdot\frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}=\frac{\tilde{p}-\tilde{s}}{\tilde{p}-\tilde{q}}\cdot\frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}$, тј. $f(p)=\tilde{p}$.□

<u>*Последица 2*</u> Тачке $P(p),Q(q),R(r),S(s)$ припадају истој кружници акко је $\operatorname{Im} D(P,Q,R,S)=0$.

Тачке Q, R, S одређују кружницу k. Билинеарно пресликавање f које кружницу k слика у реалну осу је одређено са $f(q)=\infty,\ f(r)=1,\ f(s)=0$, дакле за њега важи (10), при чему је $\tilde{q}=\infty, \tilde{r}=1, \tilde{s}=0$, па је оно задато са $f(z)=w=\frac{z-s}{z-q}\cdot\frac{r-q}{r-s}=D(M,Q,R,S)$, где је $M(z)$. Тачка $P(p)$ припада кружници k акко слика тачке P при билинеарном пресликавању f припада реалној оси, тј. акко је $\operatorname{Im} f(p)=0$, што је еквивалентно са $\operatorname{Im} D(P,Q,R,S)=0$.□

Сада ћемо показати да инверзија чува углове између кружница (узетих у општем смислу, дакле праву схватамо као кружницу која садржи бесконачну тачку) по величини, али им мења оријентацију (тј. да је антикнформно пресликавање). Одавде ће следити да комплексна инверзија $f(z)=\frac{1}{z}$ чува углове по величини и смеру (тј. да је конформно пресликавање). Ради тога доказаћемо неколико геометријских тврђења.

Тврђење 4 Кружница l са центром у S, полупречника r је ортогонална на круг k са центром у O полупречника R акко је $\psi_k(l)=l$.



Поставићемо координатни систем тако да је његов координатни почетак у тачки O. Нека је $l \perp k$ и нека се кружнице l и k секу у тачкама $A(a)$ и $B(b)$. Тада је $\measuredangle OAS = \frac{\pi}{2}$, тј. троугао OAS је правоугли, па је $OS^2 = OA^2 + AS^2$, тј. $|s|^2 = R^2 + r^2$. Пошто је $w = \psi_k(z) = \frac{R^2}{\overline{z}}$ имамо да је $z = \frac{R^2}{\overline{w}}$ $(*)$. Једначина кружнице l је $|z-s|^2 = r^2$, тј.

$$l : |z|^2 - s\overline{z} - \overline{s}z + |s|^2 = r^2 \quad (12).$$

Заменом (*) у претходну једначину и множењем добијеног израза са $|w|^2$ добијамо $R^4 - R^2 s\overline{w} - R^2\overline{s}w + (|s|^2 - r^2)|w|^2 = 0 \quad (13)$. Пошто је $|s|^2 = R^2 + r^2$ биће $|s|^2 - r^2 = R^2$, па заменом овог израза у (13) и дељењем једначине са R^2 добијамо: $|w|^2 - s\overline{w} - \overline{s}w + R^2 = 0 \quad (14)$. Узимајући у обзир да је $|s|^2 - r^2 = R^2$ видимо да је (14) једначина кружнице l, дакле инверзијом ψ_k се кружница l пресликава у себе.

Обрнуто, нека се инверзијом ψ_k кружница l пресликава у себе. Њена слика $\psi_k(l)=l'$ је задата једначином (13) тј. са $l' : \frac{R^4}{|s|^2 - r^2} - \frac{R^2}{|s|^2 - r^2} s\overline{w} - \frac{R^2}{|s|^2 - r^2}\overline{s}w + |w|^2 = 0 \quad (15)$.

(Дељење са $|s|^2 - r^2$ је легитимно, јер не може бити $|s|^2 = r^2$, пошто кружница l не садржи O. Када би кружница l садржала O она би се сликала у неку праву а не у себе.) Пошто се кружнице l и l' поклапају једначине (12) и (15) имају исте коефицијенте, тј. биће $\frac{R^4}{|s|^2 - r^2} = |s|^2 - r^2$ и $\frac{R^2}{|s|^2 - r^2} = 1$. Одавде имамо да је $|s|^2 - r^2 = R^2$, па су кружнице l и k ортогоналне.□

Последица Ако су две различите тачке M и N узајамно инверзне у односу на круг $k=k(O,R)$ тада круг k ортогонално сече сваки круг l који садржи тачке M и N.

Пошто је $\psi_k(M)=N$ тачке M и N су једна унутар, а једна изван кружнице k (јер је $OM \cdot ON = R^2$) па кружница k са кружницом l има две заједничке тачке A и B. Инверзијом ψ_k се тачке A, B и M кружнице l пресликавају редом у тачке A, B и N кружнице l, дакле инверзијом ψ_k се кружница l слика у себе. По претходном тврђењу имамо да је $l \perp k$.□

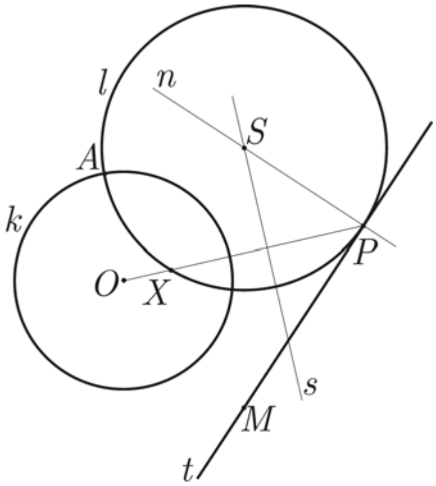
Тврђење 5 Нека су тачке O, M и N колинеарне и $M \neq N$. Ако је свака кружница која садржи тачке M и N ортогонална на кружницу $k=k(O,R)$ тада је $\psi_k(M)=N$.

Нека су k_1 и k_2 две кружнице које су ортогоналне на k и садрже тачке M и N. По претходном тврђењу је $\psi_k(k_1)=k_1$ и $\psi_k(k_2)=k_2$ па је $\psi_k(k_1 \cap k_2) = k_1 \cap k_2$ тј. $\psi_k(\{M,N\}) = \{M,N\}$ $(*)$. Како $M \neq N$ то тачке M и N нису на кружници k. (Ако би било рецимо $M \in k$ имали би $\psi_k(M) = M$, због (*) би било $\psi_k(N) = N$, па би било $N \in k$, пошто су тачке O, M и N колинеарне следило би $M = N$, што је контрадикција.) Дакле не може бити $\psi_k(M) = M$ и $\psi_k(N) = N$ па због (*) имамо $\psi_k(M) = N$. □

Аналогно тврђење важи у случају када је k права: ако је свака кружница која садржи тачке M и N ортогонална на праву k тада су тачке M и N симетричне у односу на праву k.

Због ове аналогије као и још неких сличних својстава које поседују инверзија и симетрија у односу на праву (рецимо инверзија је инволуција, антиконформна је) инверзију у односу на кружницу k називамо и симетријом (рефлексијом) у односу на кружницу k.

Тврђење 6 Нека је k кружница чији је центар $O(o)$ и полупречник R, t права која садржи тачке $P(p)$ и $M(m)$. Ако $P \notin k$ и $O \notin t$ тада постоји јединствена кружница l која додирује праву t у тачки P и ортогонална је на кружници k.



Пошто $P \in t$ и кружница l додирује праву t у тачки P, центар S кружнице l се налази на правој n која је у тачки P нормална на праву t. Нека је X тачка таква да је $\psi_k(P)=X$. По доказаној последици свака кружница која садржи X и P је ортогонална на кружници k. Центри таквих кружница се налазе на симетрали s дужи XP. Дакле центар S кружнице l се налази у пресеку правих s и n, јасно је да је њен полупречник $r=SP$. Пошто $P \notin k$ тачке P и X су различите, па постоји симетрала s дужи XP која је различита од праве n. Пошто $O \notin t$ праве s и n нису паралелне, тј. секу се у тачки S, дакле кружница l постоји и јединствена је.

Ово тврђење се може доказати и аналитички. Нека кружница l има центар $S(s)$ и полупречник r. Пошто је $l \perp k$ биће троугао OAS правоугли са правим углом код темена A, тј. важи $|s-o|^2 = R^2 + r^2$ одакле је $|o|^2 - s\overline{o} - \overline{s}o + |s|^2 = R^2 + r^2 \quad (16)$.

Тачка P припада кружници l, тј. $|p-s|^2 = r^2$ или $|p|^2 - s\overline{p} - \overline{s}p + |s|^2 = r^2 \quad (17)$.

Права t је тангента на кружницу l, тј. $MP \perp SP$, одакле је $(m-p)\bullet(s-p)=0$. Израчунавањем последњег израза добијамо $(m-p)(\overline{s}-\overline{p}) = -(\overline{m}-\overline{p})(s-p)$ или $(m-p)\overline{s} + (\overline{m}-\overline{p})s = p\overline{m} + m\overline{p} - 2|p|^2 \quad (18)$.

Одузимањем (16) и (17) добијамо $(o-p)\overline{s} + (\overline{o}-\overline{p})s = |o|^2 - |p|^2 - R^2 \quad (19)$.

Једначине (18) и (19) чине систем по непознатим s и $\overline{s}$ који можемо решити тако што једначину (18) поделимо са m-p, а једначину (19) са o-p, па одузимањем добијених једначина добијамо $\left(\dfrac{\overline{o}-\overline{p}}{o-p} - \dfrac{\overline{m}-\overline{p}}{m-p}\right)s = \dfrac{|o|^2-|p|^2-R^2}{o-p} - \dfrac{m\overline{p}+\overline{m}p-2|p|^2}{m-p} \quad (20)$

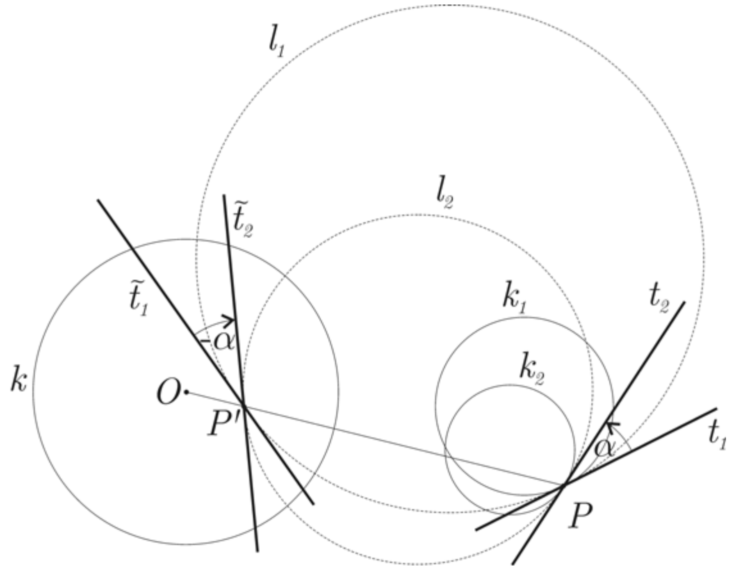
Пошто је $\dfrac{\overline{o}-\overline{p}}{o-p} - \dfrac{\overline{m}-\overline{p}}{m-p} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-p}{o-p} = \dfrac{\overline{m}-\overline{p}}{\overline{o}-\overline{p}}$ акко су тачке O, M и P колинеарне, пошто имамо услов $O \notin t$, то се не може десити. Решавањем једначине (20) добијамо s, док је $r = |p-s|$. □

Приметимо да у случају $O \in t$ праву t можемо схватити као „кружницу“ која је ортогонална на k и садржи P.

Тврђење 7 Нека су дате две кружнице (у општем смислу) k_1 и k_2 које се секу у тачки P под углом α. Ако се инверзијом у односу на кружницу $k=k(O,R)$, при чему је $P \neq O$, кружнице k_1 и k_2 сликају у кружнице k_1' и k_2' тада је угао између кружница k_1' и k_2' у тачки $P'=\psi_k(P)$ једнак $-\alpha$.

Претпоставићемо да $P \notin k$. Ако је t_1 тангента на кружницу k_1 у тачки P и t_2 тангента на кружницу k_2 у тачки P биће оријентисани угао $\measuredangle(t_1,t_2)=\alpha$. По претходном тврђењу постоји кружница l_1 која додирује t_1 утачки P и ортогонална је на k, као и кружница l_2 која додирује t_2 у тачки P и која је ортогонална на k. Инверзијом у односу на k се кружнице l_1 и l_2

сликају у себе док се тачка P слика у P', при чему је P' друга пресечна тачка кружница l_1 и l_2. Угао између кружница l_1 и l_2 у тачки P' је једнак по величини, али је супротно оријентисан у односу на угао између кружница l_1 и l_2 у тачки P.



Ако су $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ тангенте на кружнице l_1 и l_2 у тачки P' биће $\measuredangle(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2)=-\alpha$. Пошто се кружнице l_1 и k_1 додирују у тачки P и пошто је инверзија бијекција, то ће се кружнице l_1 и k_1' додиривати у тачки P', те је $\tilde{t}_1$ тангента и кружнице k_1' у тачки P', слично је и $\tilde{t}_2$ тангента и кружнице k_2' у тачки P' па је тиме показано да је угао између кружница k_1' и k_2' једнак $-\alpha$.

У случају $P\in k$ посматраћемо кружницу $\tilde{k}$ која је концентрична са k и полупречника $R_1=\dfrac{R}{2}$. Нека се координатни почетак поклапа са тачком O, тада је $\psi_k(z)=\dfrac{R^2}{\bar{z}}$ и $\psi_{\tilde{k}}(z)=\dfrac{R_1^2}{\bar{z}}=\dfrac{R^2}{4\bar{z}}$, дакле, $\psi_k(z)=4\psi_{\tilde{k}}(z)$. Другим речима инверзија ψ_k се може схватити као композиција инверзије $\psi_{\tilde{k}}$ и хомотетије (дилатације) са центром у 0 и коефицијентом 4.

Пошто $P\notin\tilde{k}$ на кружницу $\tilde{k}$ можемо применити претходни део тврђења које доказујемо, а како хомотетија са позитивним коефицијентом чува углове по величини и оријентацији, следи да ће угао између кружница k_1' и k_2' у тачки P' остати $-\alpha$.□

<u>*Примедба*</u> Претходно тврђење важи и у случају када су k_1 и k_2 криве које се секу у тачки P под углом α. Доказ је потпуно исти.

<u>*Последица*</u> Нека су дате две кружнице (у општем смислу) k_1 и k_2 које се секу у тачки P, различитој од координатног почетка, под углом α. Нека се комплексном инверзијом $f(z)=\dfrac{1}{z}$ k_1, k_2 и P сликају редом у k_1', k_2' и P'. Тада је угао између кружница k_1' и k_2' у тачки P' једнак α.

Пошто је $f(z)=\dfrac{1}{z}=\overline{\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)}$ имамо да је комплексна инверзија композиција инверзије у односу на јединичну кружницу и симетрије у односу на реалну осу. Пошто оба ова пресликавања чувају углове по величини али им мењају оријентацију имамо наведени закључак.□

Претходна последица важи и у случају када су k_1 и k_2 криве које се секу у тачки $P(p)$, $p\neq 0$. Пресликавања која имају својство да је угао између кривих $f(k_1)$ и $f(k_2)$ у тачки $f(p)$ једнак углу између кривих k_1 и k_2 у тачки p називамо конформним. Дакле $f(z)=\dfrac{1}{z}$ је конформна у $\mathbb{C}/\{0\}$. Пресликавања која чувају угао између слика по величини, али му мењају оријентацију, називамо антиконформним.

<u>*Последица*</u> Мебијусова трансформација (1) је конформно пресликавање у $\mathbb{C}/\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Овај закључак следи из претходне последице и представљања Мебијусове трансформације у облику (2).□

<u>*Тврђење 8*</u> Мебијусова трансформација (1) чува симетрију тачака у односу на кружнице (или праве). Другим речима, ако су тачке *A* и *B* симетричне у односу на кружницу (или праву) *l* и ако се Мебијусовом трансформацијом *f A, B* и *l* сликају у *A′, B′* и *l′,* тада ће тачке *A′* и *B′* бити симетричне у односу на кружницу (или праву) *l′.*

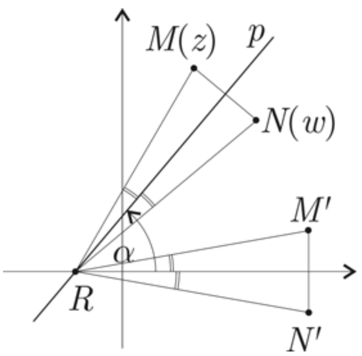
Надаље ћемо под појмом кружница подразумевати кружницу или праву, али то, ради краћег писања нећемо наглашавати.

Нека је *k′* произвољна кружница која садржи тачке *A′* и *B′.* Због тога кружница $k = f^{-1}(k')$ садржи тачке *A* и *B*. Пошто су тачке *A* и *B* симетричне у односу на кружницу *l* то ће свака кружница која их садржи бити ортогонална на *l*, па је и $k \perp l$. Пошто је пресликавање *f* конформно биће $k' \perp l'$. Пошто је *k′* била произвољна следи да је свака кружница која садржи *A′* и *B′* ортогонална на *l′,* па су *A′* и *B′* симетричне у односу на *l′.*□

Пошто се инверзија у односу на кружницу $k: |z-s| = R$ у облику комплексног пресликавања исказује са $\psi_k(z) = s + \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{s}} = \dfrac{s\overline{z} + R^2 - |s|^2}{\overline{z} - \overline{s}}$ (21), док се симетрија у односу на праву *p* која сече *x*- осу у тачки *R(r),* $r \in \mathbb{R}$ и са њом заклапа угао *α* може представити са

$$w = S_p(z) = \left(R_{R,\alpha} \circ \left(\overline{R_{R,-\alpha}}\right)\right)(z) = R_{R,\alpha}\left(\overline{(z-r)e^{-i\alpha} + r}\right)$$

$$= \left(\left((\overline{z} - r)e^{i\alpha} + r\right) - r\right)e^{i\alpha} + r = (\overline{z} - r)e^{2i\alpha} + r = \overline{z}e^{2i\alpha} + (1 - e^{2i\alpha})r \qquad (22),$$



закључујемо да је композиција инверзије (симетрије) у односу на кружницу и симетрије у односу на праву, као и композиција две инверзије у односу на кружницу или композиција две симетрије у односу на праву, Мебијусова трансформација. Дакле композиција парног броја симетрија у односу на кружницу или праву је Мебијусова трансформација.

Из репрезентације (2) јасно је да се Мебијусова трансформација може представити као композиција одређеног броја симетрија у односу на кружнице или праве (тачније њих 10). Међутим питање је који је најмањи број тих симатрија.

Посматрајмо фиксне тачке Мебијусове трансформације (1), раније је показано да су у случају *c≠0*, када је Мебијусово пресликавање нормализовано, оне задате са (8), одакле се види да су коначне. У случају *c=0*, када Мебијусово пресликавање постаје $f(z) = a'z + b'$ имамо могућности:

1) *a′=1* и *b′= 0,* тада је *f* идентитета (све тачке су фиксне),

2) *a′=1* и *b′≠ 0,* ∞ је једина фиксна тачка и *f* је транслација,

3) *a′≠ 1* и $|a'| = 1$, тада је једна фиксна тачка коначна и једнака $\xi_1 = \dfrac{b'}{1-a'}$, а друга је ∞, пресликавање *f* је ротација око тачке је ξ_1 за угао $\alpha = \arg a'$ (ово је последица леме 13.1)

4) *a′≠ 1* и $\arg a' = 0$, тада је једна фиксна тачка коначна и једнака $\xi_1 = \dfrac{b'}{1-a'}$, а друга је ∞, пресликавање *f* је хомотетија са центром у ξ_1 и коефицијентом $|a'|$.

5) $a' \neq 1$ (при чему $|a'| \neq 1$ и $\arg a' \neq 0$), тада је једна фиксна тачка коначна и једнака $\xi_1 = \dfrac{b'}{1-a'}$, а друга је ∞, пресликавање f је општа дилатациона ротација са центром у ξ_1, углом $\alpha = \arg a'$ и коефицијентом $|a'|$ (ово је разматрано у тачки 14).

<u>*Лема*</u> Композиција две инверзије са центром у O и полупречницима r_1 и r_2 је хомотетија са центром у O и коефицијентом $k = \dfrac{r_2^2}{r_1^2}$.

Претпоставићемо да је координатни почетак у тачки O, тада су инверзије дате са $\psi_{k_1}(z) = \dfrac{r_1^2}{\bar{z}}$ и $\psi_{k_2}(z) = \dfrac{r_2^2}{\bar{z}}$, па је $\left(\psi_{k_2} \circ \psi_{k_1}\right)(z) = \psi_{k_2}\left(\dfrac{r_1^2}{\bar{z}}\right) = \dfrac{r_2^2}{r_1^2} z = H_{O,\frac{r_2^2}{r_1^2}}(z)$.□

<u>*Последица*</u> Хомотетија са центром у O и коефицијентом k, $k>0$, се може представити као композиција инверзија (симетрија) у односу на две концентричне кружнице са центром у O чији је однос полупречника једнак $\dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{k}$.□

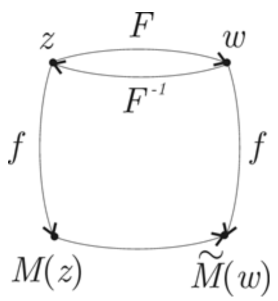
Раније је било показано да се транслација и ротација могу представити као композиција двеју осних симетрија (у случају транслације њихове осе су паралелне, у случају ротације се секу у центру ротације под углом који је једнак половини угла ротације). Јасно је да је идентитета композиција двеју осних симетрија у односу на исту праву. Из претходне леме имамо да је хомотетија композиција двеју симетрија у односу на концентричне кружнице.

Пошто је дилатациона ротација композиција ротације и хомотетије следи да је она композиција четири симетрије у односу на кружнице у општем смислу.

Дакле, добили смо да се у случају $c=0$ Мебијусова трансформација може претставити у облику композиције две или четири симетрије (четири ако је $a' \neq 1$ и $|a'| \neq 1$ и $\arg a' \neq 0$). Показаћемо да сличан закључак важи и ако је $c \neq 0$.

Ако је $c \neq 0$ разликоваћемо случајеве $\xi_1 \neq \xi_2$ и $\xi_1 = \xi_2$, где су ξ_1 и ξ_2 фиксне тачке Мебијусовог пресликавања (1).

Ако је $\xi_1 \neq \xi_2$ посматраћемо пресликавања $F(z) = \dfrac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$ (23) и $\tilde{f}(z) = F \circ f \circ F^{-1}$. (24)

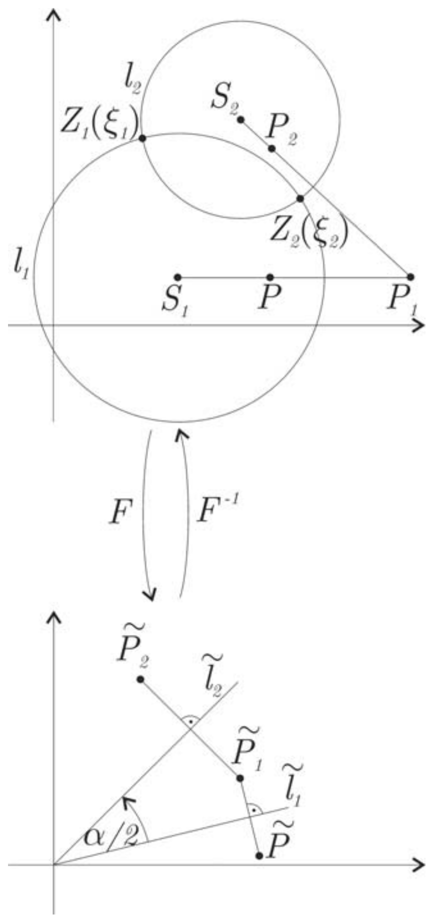


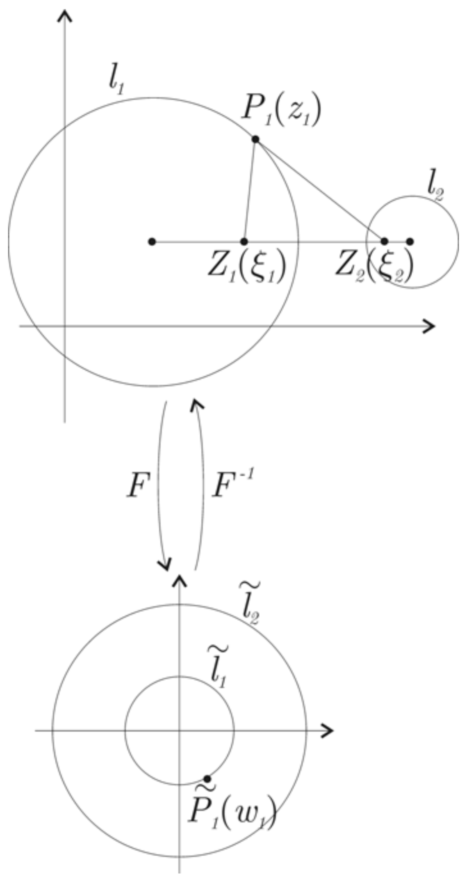
Пошто је F билинеарно биће то и $\tilde{f}$, осим тога $F(\xi_1)=0$ и $F(\xi_2)=\infty$ па је $\tilde{f}(0)=0$ и $\tilde{f}(\infty)=\infty$. Из разматрања фиксних тачака билинеарног пресликавања (1) имамо да је билинеарно пресликавање које има ∞ за фиксну тачку облика $f(z) = a'z + b'$, а ако је уз то и 0 фиксна тачка, следи да мора бити $f(z) = a'z$, где је

$$a' = m = re^{i\alpha},\ r > 0,\ 0 \le \alpha < 2\pi .$$

Сада имамо ситуацију сличну случају $c=0$. За $r = 1$ $\tilde{f}$ је ротација, дакле $\tilde{f} = S_{\tilde{l}_2} \circ S_{\tilde{l}_1}$, при чему се праве $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ секу у $O(0)$ под углом $\alpha/2$.

Посматрајмо тачку $P(z)$, нека је $w=F(z)$, $S_{\tilde{l}_1}(w) = w_1$, $z_1 = F^{-1}(w_1)$ и $\tilde{P}(w), \tilde{P}_1(w_1), P_1(z_1)$. Пошто су тачке $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ симетричне у односу на праву $\tilde{l}_1$, и F^{-1} билинеарно, и пошто билинеарна пресликавања чувају симетрију у односу на кружнице у општем смислу, следи да су тачке P и P_1 симетричне у односу на кружницу $l_1 = F^{-1}(\tilde{l}_1)$, дакле $\psi_{l_1} = F^{-1} \circ S_{\tilde{l}_1} \circ F$. На сличан





начин се показује да је $\psi_{l_2} = F^{-1} \circ S_{\widetilde{l}_2} \circ F$, где је $l_2 = F^{-1}(\widetilde{l}_2)$.

Дакле, $f = F^{-1} \circ \widetilde{f} \circ F = F^{-1} \circ S_{\widetilde{l}_2} \circ S_{\widetilde{l}_1} \circ F$

$$= F^{-1} \circ S_{\widetilde{l}_2} \circ F^{-1} \circ F \circ S_{\widetilde{l}_1} \circ F = \psi_{l_2} \circ \psi_{l_1}.$$

Овим смо показали да се у случају *r=1* билинеарно пресликавање (1) може представити као композиција двеју симетрија у односу на кружнице l_1 и l_2 које се секу под углом $\alpha/2$ у тачки $Z_1(\xi_1)$. (Јер се праве $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ секу у 0 под углом $\alpha/2$, а F^{-1} је билинеарно и чува углове. Осим тога кружнице у општем смислу $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ садрже тачке 0 и ∞, па пошто је $F^{-1}(0) = \xi_1$ и $F^{-1}(\infty) = \xi_2$ то ће кружнице l_1 и l_2 садржати тачке $Z_1(\xi_1)$ и $Z_2(\xi_2)$.) Билинеарно пресликавање које се може представити облику композиције двеју симетрија у односу на кружнице које се секу назива се елиптичким.

У случају да је $\alpha=0$ имамо да је $\widetilde{f}$ хомотетија облика $\widetilde{f} = rz, r > 0$, па је $\widetilde{f} = \psi_{\widetilde{l}_2} \circ \psi_{\widetilde{l}_1}$, где су $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ кружнице са центром у $O(0)$ чији је однос полупречника дат са $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{r}$. Слично као у претходном случају закључујемо да је $f = \psi_{l_2} \circ \psi_{l_1}$, где су l_1 и l_2 кружнице дате са $l_1 = F^{-1}(\widetilde{l}_1)$ и $l_2 = F^{-1}(\widetilde{l}_2)$. Нека је $P_1(z_1)$ произвољна тачка кружнице l_1, тада је $|F(z_1)| = \left|\frac{z_1 - \xi_1}{z_1 - \xi_2}\right| = |w_1| = r_1$, јер $\widetilde{P}_1(w_1) \in \widetilde{l}_1$. Одавде закључујемо да је l_1 Аполонијева кружница одређена тачкама $Z_1(\xi_1)$ и $Z_2(\xi_2)$, таква да је $\frac{P_1Z_1}{P_1Z_2} = r_1$. (Да је $\left|\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}\right| = r_1$, за $r_1 \neq 1$ једначина кружнице, а за $r_1=1$ једначина праве доказано је када је било речи о потенцији тачке у односу на круг.) Ова чињеница даје прецизнију карактеризацију кружница l_1 и l_2: кружницу l_1 можемо изабрати као произвољну Аполонијеву кружницу одређену тачкама Z_1 и Z_2. Ако је за тачке P_1 кружнице l_1 испуњено $\frac{P_1Z_1}{P_1Z_2} = r_1$, кружница l_2 је тада Аполонијева кружница одређена тачкама Z_1 и Z_2 таква да је за сваку њену тачку P_2 испуњено $\frac{P_2Z_1}{P_2Z_2} = r_1\sqrt{r}$.

Из претходног закључивања можемо извести још нека својства Аполонијевих кругова. Наиме, пресликавање F има особину да је $F(\xi_1)=0$ и $F(\xi_2)=\infty$, пошто су тачке 0 и ∞ симетричне у односу на сваку кружницу са центром у $O(0)$ имамо да су тачке Z_1 и Z_2 симетричне у односу на сваки Аполонијев круг дефинисан тачкама Z_1 и Z_2. Осим тога кружнице са центром у $O(0)$ су ортогоналне на праве које пролазе кроз O, па је свака Аполонијева кружница дефинисана тачкама Z_1 и Z_2 ортогонална на сваку кружницу која садржи тачке Z_1 и Z_2.

Билинеарно пресликавање које се може представити облику композиције двеју симетрија у односу на кружнице које припадају прамену Аполонијевих кружница називамо хиперболичким.

Ако је $r \neq 1$ и $\alpha \neq 0$, $\widetilde{f}$ је дилатациона ротација коју можемо посматрати као композицију ротације и хомотетије (редослед није битан) тј. $\widetilde{f} = H_{O,r} \circ R_{O,\alpha} = S_{\widetilde{k_2}} \circ S_{\widetilde{k_1}} \circ S_{\widetilde{l_2}} \circ S_{\widetilde{l_1}}$, где су $\widetilde{k_1}$ и $\widetilde{k_2}$ кружнице са центром у O чији је однос полупречника једнак $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{r}$, а $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ су праве које се секу у тачки O под углом $\alpha/2$. На сличан начин као и раније добијамо да је $f = \psi_{k_2} \circ \psi_{k_1} \circ \psi_{l_2} \circ \psi_{l_1}$, где су k_1, k_2, l_1, l_2 слике кружница $\widetilde{k_1}$, $\widetilde{k_2}$, $\widetilde{l_1}$, $\widetilde{l_2}$ при пресликавању F^{-1}. По претходном разматрању кружнице l_1 и l_2 садрже тачке Z_1 и Z_2, а кружнице k_1 и k_2 су из прамена Аполонијевих кружница дефинисаног тачкама Z_1 и Z_2. Билинеарно пресликавање које се може представити оваквом композицијом четири симетрије се назива локсодромичким.

Укратко ћемо скицирати како се добија коефицијент $m=a'$ од кога зависи природа пресликавања $\widetilde{f}$ а тиме и f. Из једнакости (24) имамо да је $F \circ f = \widetilde{f} \circ F \quad (25)$, па ако ставимо $u = f(z)$ у израз (23) који дефинише F из (25) имамо: $\frac{u-\xi_1}{u-\xi_2} = m \cdot \frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$, а пошто је $f(\infty) = \frac{a}{c}$ имамо да је $\frac{\frac{a}{c}-\xi_1}{\frac{a}{c}-\xi_2} = m$ тј. $m = \frac{a-c\xi_1}{a-c\xi_2}$. Напоменућемо да се коефицијент m може одредити и преко сопствених вредности матрице нормализованог билинеарног пресликавања f. Тај резултат захтева доста алгебарских појмова па га нећемо овде изводити.

Остао је још случај $\xi_1=\xi_2$. Посматраћемо пресликавање $G(z) = \frac{1}{z-\xi_1}$, (26) при чему ће опет бити $\widetilde{f} = G \circ f \circ G^{-1}$. (27) Пошто је $G(\xi_1)=\infty$, то ће ∞ бити једина фиксна тачка билинеарног пресликавања $\widetilde{f}$. Из разматрања фиксних тачака пресликавања f, следи да су билинеарна пресликавања која имају само ∞ као фиксну тачку, транслације. Дакле, биће $\widetilde{f}(z) = z+t, \quad t \in \mathbb{C}$. Пошто се транслација може претставити као композиција две осне симетрије чије су осе $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ паралелне и на растојању $|t|/2$, биће $\widetilde{f} = S_{\widetilde{l_2}} \circ S_{\widetilde{l_1}}$, па је слично као и раније $f = \psi_{l_2} \circ \psi_{l_1}$, где је $l_1 = G^{-1}(\widetilde{l_1})$ и $l_2 = G^{-1}(\widetilde{l_2})$. Пошто је $G^{-1}(z) = \xi_1 + \frac{1}{z}$ и праве $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ паралелне па садрже тачку ∞ и бар једна од њих не садржи O, и $G^{-1}(\infty) = \xi_1$, њихове слике при пресликавању G^{-1} су кружнице (тачније бар једна од њих је кружница, може се рећи да су то кружнице у општем смислу) l_1 и l_2 које се додирују у тачки $Z_1(\xi_1)$.

Извешћемо како се t израчунава у случају када је билинеарно пресликавање (1) нормализовано, тј. када је $ad-bc=1$. Из (27) имамо $G \circ f = \widetilde{f} \circ G$, тј. ако ставимо $u = f(z)$: $\frac{1}{u-\xi_1} = \frac{1}{z-\xi_1} + t$, пошто је $f(\infty) = \frac{a}{c}$, имамо да је $\frac{1}{\frac{a}{c}-\xi_1} = t$. Из (8) имамо да је, у случају нормализованог пресликавања f испуњено $\xi_1=\xi_2$ акко је $a+d=\pm 2$ и да је тада $\xi_1 = \xi_2 = \frac{a-d}{2c}$.

Користећи ову чињеницу имамо да је $t = \dfrac{1}{\dfrac{a}{c} - \dfrac{a-d}{2c}} = \dfrac{2c}{a+d} = \pm c$.

Билинеарно пресликавање које се може представити као композиција симетрија у односу на кружнице које се додирују назива се параболичким.

Дакле и у случају *c≠0* смо добили ситуацију сличну као за *c=0*, Мебијусово пресликавање се може приказати као композиција најмање две или четири симетрије у односу на кружнице или праве.

Дефиниција 3 Елиптички прамен кружница је скуп кружница које садрже две фиксиране различите тачке A и B.

Параболички прамен кружница је скуп кружница које се додирују у једној фиксираној тачки A.

Хиперболички прамен кружница је скуп свих Аполонијевих кружница које су дефинисане у односу на дате тачке A и B.

Пример 1 Доказати да увек постоји инверзија која дати

а) параболички прамен кружница пресликава у прамен паралелних правих,
б) елиптички прамен кружница пресликава у елиптички прамен правих,
в) хиперболички прамен кружница пресликава у систем концентричних кружница.

а) Претпоставимо да је координатни почетак постављен у тачку додира кружница параболичког прамена. Нека је x-оса постављена тако да пролази кроз тачку додира кружница и кроз њихове центре. Пресликавање G које смо користили у претходном разматрању има облик $w = G(z) = \dfrac{1}{z}$, оно дати параболички прамен кружница пресликава у прамен правих које су нормалне на реалну осу w-равни (јер су кружнице параболичког прамена нормалне на x-осу z-равни).

Пресликавање $\psi_k(z) = \overline{G(z)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ је инверзија у односу на јединичну кружницу која полазни прамен кружница пресликава у исти прамен паралелних правих као и пресликавање G.

б) Поставићемо координатни систем тако да је координатни почетак у једној тачки која дефинише елиптички прамен кружница а x-оса је таква да садржи обе тачке које одређују дати прамен и да друга тачка има позитивну координату, тј. та тачка је $X(x)$ где је $x>0$. Пресликавање F о коме је било речи у претходном разматрању има облик $F(z) = \dfrac{z}{z-x}$, оно дати елиптички прамен кружница преводи у елиптички прамен правих са центром у $O(0)$. Инверзија у односу на кружницу је облика (21), па инверзија у односу на кружницу $k : |z - x| = x$ има облик $\psi_k(z) = x + \dfrac{x^2}{\overline{z} - x} = x \dfrac{\overline{z}}{\overline{z} - x} = x\overline{F(x)}$. Пошто пресликавање F слика дати елиптички прамен кругова у елиптички прамен правих са центром у $O(0)$ а коњуговање и хомотетија са центром у O и коефицијентом x сликају тај елиптички прамен правих у самог себе, имамо да је ψ_k тражена инверзија.

в) Координатни систем ћемо поставити као у *б*) с тим што ћемо тачке које дефинишу елиптички прамен заменити тачкама које дефинишу хиперболички прамен. Пресликавање $F(z) = \dfrac{z}{z-x}$ ће, по претходном разматрању, сликати дати хиперболички прамен кружница у систем концентричних кружница (са центром у O). Инверзија ψ_k из *б*) је тражена инверзија јер коњуговање и хомотетија са центром у O и коефицијентом x сликају систем концентричних кружница са центром у O у себе самог.◊

Пример 2 Доказати да су билинеарна пресликавања која горњу полураван $H=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ пресликавају у себе облика $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc>0$.

Претпоставићемо да је пресликавање $M(z)$ нормализовано, тј. да је $ad-bc=1$. Ова претпоставка не умањује општост, јер ако је $ad-bc=k$, множећи коефицијенте $M(z)$ са $\dfrac{1}{\sqrt{k}}, \sqrt{k}=\sqrt{|k|}e^{i\frac{\arg k}{2}}, 0\le \arg k<2\pi$, добићемо нормализовану Мебијусову трансформацију.

$M(z)$ пресликава реалну осу на себе, па је $M(r_0)=0$, где $r_0\in\mathbb{R}$, или $M(\infty)=0$. Ако је $r_0\in\mathbb{R}$ и ако са $g_{r_0}(z)=z+r_0$ обележимо транслацију за r_0, имамо да је $\left(M\circ g_{r_0}\right)(0)=0$, осим тога је $\left(M\circ g_{r_0}\right)(z)=\dfrac{az+ar_0+b}{cz+cr_0+d}$. Коефицијенти a, ar_0+b, c, cr_0+d су реални акко су коефицијенти a, b, c, d реални, па је тврђење довољно доказати за пресликавање $M\circ g_{r_0}$ које фиксира 0. Дакле, без умањења општости можемо претпоставити да је у овом случају $r_0=0$, тј. $M(0)=0$. Одавде имамо да је $b=0$, па је $ad=1$.

Пошто су тачке $A(\alpha i)$ и $B(-\alpha i)$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$ симетричне у односу на x-осу, по принципу симетрије, имамо да су тачке чије су комплексне координате $M(\alpha i)$ и $M(-\alpha i)$ симетричне у односу на x-осу. Дакле важи: $\overline{M(\alpha i)}=M(-\alpha i), \alpha\in\mathbb{R}^+$. Пошто је у овом случају $M(z)=\dfrac{az}{cz+d}$, применом претходне једнакости имамо $\dfrac{\bar a}{-\bar c\alpha i+\bar d}=\dfrac{a}{-c\alpha i+d}, \alpha\ne 0$, сређивањем овог израза имамо $\bar a d-a\bar d=(\bar a c-a\bar c)\alpha i$, тј. $\operatorname{Im}\bar a d=\alpha i\operatorname{Im}\bar a c$. Ако је $c=0$, имамо $\operatorname{Im}\bar a d=0$, ако $c\neq 0$, имамо $\operatorname{Im}\bar a d=0$ и $\operatorname{Im}\bar a c=0$, дакле у оба случаја ($c=0$ и $c\neq 0$) важи $\operatorname{Im}\bar a d=0$ и $\operatorname{Im}\bar a c=0$. Одавде, због $a\bar a=|a|^2$, имамо $\dfrac{c}{a}\in\mathbb{R}$ и $\dfrac{d}{a}\in\mathbb{R}$. Пошто из $ad=1$ имамо $d=\dfrac{1}{a}$, биће $\dfrac{d}{a}=\dfrac{1}{a^2}\in\mathbb{R}$, а одавде је $a^2\in\mathbb{R}$, тј. $a\in\mathbb{R}$ или $a=a_0 i, a_0\in\mathbb{R}$. Ако је $a=a_0 i, a_0\in\mathbb{R}$, биће $d=-\dfrac{i}{a_0}$ и $\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{ia_0}\in\mathbb{R}$, дакле $c=c_0 i, c_0\in\mathbb{R}$. Сада је $M(z)=\dfrac{a_0^2 z}{a_0c_0z-1}$, па је $M(i)=\dfrac{a_0^2 i}{a_0c_0 i-1}=\dfrac{a_0^3c_0-a_0^2 i}{1+a_0^2c_0^2}\notin H$, што је у супротности са захтевима задатка, зато мора бити $a\in\mathbb{R}$, а тиме и $c\in\mathbb{R}$ и $d\in\mathbb{R}$.

Ако је $M(\infty)=0$ биће $a=0$ и $-bc=1$, јер је $M(z)=\dfrac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}$. Аналогно као у претходном случају имамо да из $\overline{M(\alpha i)}=M(-\alpha i), \alpha\in\mathbb{R}^+$ следи $\dfrac{\bar b}{-\bar c\alpha i+\bar d}=\dfrac{b}{-c\alpha i+d}, \alpha\ne 0$, одакле је $\bar b d-b\bar d=(\bar b c-b\bar c)\alpha i$, тј. $\operatorname{Im}\bar b d=\alpha i\operatorname{Im}\bar b c$. Слично као раније закључујемо да је $\dfrac{c}{b}\in\mathbb{R}$ и $\dfrac{d}{b}\in\mathbb{R}$. Из $-bc=1$ следи да је $\dfrac{c}{b}=-\dfrac{1}{b^2}\in\mathbb{R}$, тј. $b^2\in\mathbb{R}$, што значи да је $b\in\mathbb{R}$ или $b=b_0 i, b_0\in\mathbb{R}$. Ако је $b=b_0 i, b_0\in\mathbb{R}$, биће $c=\dfrac{i}{b_0}$ и $d=d_0 i, d_0\in\mathbb{R}$. Сада је $M(z)=\dfrac{b_0^2}{z+b_0d_0}$, па је

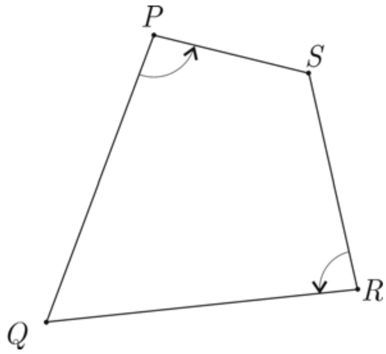
$M(i)=\dfrac{b_0^2}{i+b_0d_0}=\dfrac{d_0b_0^3-b_0^2 i}{1+b_0^2d_0^2}\notin H$, што је у супротности са захтевима задатка, зато мора бити $b\in\mathbb{R}$, а тиме и $c\in\mathbb{R}$ и $d\in\mathbb{R}$.

С друге стране , ако је $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc>0$, тада је и $\sqrt{ad-bc}\in\mathbb{R}^+$ (јер је $\sqrt{k}=\sqrt{|k|}e^{i\frac{\arg k}{2}}$, а у нашем случају је $k=ad-bc>0$, па је $\arg k=0$), па за коефицијенте нормализованог пресликавања који се добијају дељењем полазних са $\sqrt{k}$ важи $M(z)=\dfrac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}, \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in\mathbb{R}, \tilde{a}\tilde{d}-\tilde{b}\tilde{c}=1$. Дакле можемо претпоставити да је $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc=1$. Сада је $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\cdot\dfrac{c\bar{z}+d}{c\bar{z}+d}=\dfrac{ac|z|^2+bd+bc\bar{z}+adz}{|cz+d|^2}$,

па је $\operatorname{Im}M(z)=\operatorname{Im}\dfrac{bc\bar{z}+adz}{|cz+d|^2}=\operatorname{Im}\dfrac{adz-bcz}{|cz+d|^2}=\dfrac{\operatorname{Im}z}{|cz+d|^2}$.

Одавде имамо да $M:H\to H$ акко $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc>0$.◊

<u>*Пример 3 (Птоломејева теорема)*</u> Ако је *PQRS* конвексан тетиван четвороугао, тада је *PS·QR+PQ·SR=PR·SQ.*



Нека су тачке $P(p)$, $Q(q)$, $R(r)$, $S(s)$ на кружници описаној око тетивног четвороугла *PQRS* распоређене тако да одређују позитивну оријентацију. Тада су углови $\measuredangle QPS$ и $\measuredangle SRQ$ позитивно оријентисани и збир им је π. Имамо да је:

$$\arg\frac{p-s}{p-q}\cdot\frac{r-q}{r-s}=_{2\pi}\arg\frac{s-p}{q-p}+\arg\frac{q-r}{s-r}=\measuredangle QPS+\measuredangle SRQ=\pi.$$

Претпоставимо да се билинеарним пресликавањем тачке *P, Q, R, S* пресликавају у тачке $P'(p')$, $Q'(q')$, $R'(r')$, $S'(s')$. По последици 1 такво билинеарно пресликавање постоји акко је: $D(P,Q,R,S)=D(P',Q',R',S')$. Одавде је $\arg D(P,Q,R,S)=\arg D(P',Q',R',S')$, па је $\arg\dfrac{p'-s'}{p'-q'}\cdot\dfrac{r'-q'}{r'-s'}=\arg\dfrac{p-s}{p-q}\cdot\dfrac{r-q}{r-s}=_{2\pi}\pi$. Дакле имамо да је:

$\measuredangle Q'P'S'+\measuredangle S'R'Q'=\arg\dfrac{p'-s'}{p'-q'}+\arg\dfrac{r'-q'}{r'-s'}=_{2\pi}\arg\dfrac{p'-s'}{p'-q'}\cdot\dfrac{r'-q'}{r'-s'}=_{2\pi}\pi$. Ако изаберемо такав четвороугао да је $\measuredangle Q'P'S'=\measuredangle S'R'Q'$ и да су оба ова угла позитивно оријентисана имаћемо да су оба једнака $\pi/2$. Осим тога је $|D(P,Q,R,S)|=|D(P',Q',R',S')|=k$ тј. $\dfrac{|p'-s'|}{|p'-q'|}\cdot\dfrac{|r'-q'|}{|r'-s'|}=\dfrac{|p-s|}{|p-q|}\cdot\dfrac{|r-q|}{|r-s|}=k$. Дакле количник производа наспрамних страница новог четвороугла је једнак количнику производа наспрамних страница полазног четвороугла. Ако изаберемо да су наспрамне странице новог четвороугла једнаке и то $P'S'=Q'R'=a$ $P'Q'=R'S'=b$ имаћемо да треба да буде $\dfrac{a^2}{b^2}=k.$ (*)

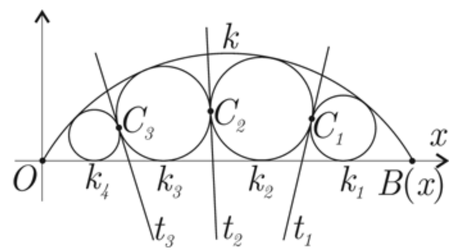
Дакле, полазни четвороугао се може пресликати у правоугаоник са страницама *a* и *b* које задовољавају (*). Сада је:

$$\frac{|q-r|}{|p-r|}\cdot\frac{|p-s|}{|q-s|}+\frac{|q-p|}{|r-p|}\cdot\frac{|r-s|}{|q-s|}=|D(P,R,Q,S)|+|D(R,P,Q,S)|=$$

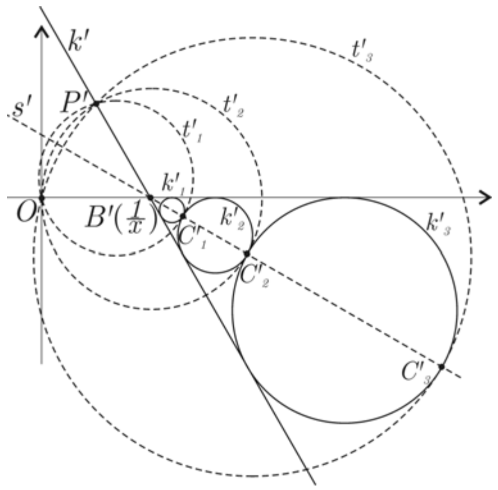
$= \left|D(P',R',Q',S')\right| + \left|D(R',P',Q',S')\right| = \frac{|q'-r'|}{|p'-r'|}\cdot\frac{|p'-s'|}{|q'-s'|} + \frac{|q'-p'|}{|r'-p'|}\cdot\frac{|r'-s'|}{|q'-s'|} = \frac{a^2+b^2}{d^2} = 1,$ где је d дијагонала правоугаоника $P'Q'R'S'$. Помноживши добијену једнакост са $|p-r|\cdot|q-s|$ добијамо Птоломејеву теорему.

У случају да тачке *P, Q, R, S* одређују негативну оријентацију, тада *P, S, R, Q,* одређују позитивну оријентацију, па се на четвороугао *PSRQ* може применити доказана теорема. Пошто су наспрамне странице и дијагонале четвороугла *PSRQ* исте као и код четвороугла *PQRS* имамо да тврђење важи и у овом случају.◊

<u>*Пример 4*</u> У одсечак кружнице се уписују кружнице које додирују лук и тетиву, докле је то могуће. За сваки пар уписаних кружница кроз додирну тачку постављена је њихова заједничка тангента. Доказати да се све те тангенте секу у једној тачки.



Претпоставићемо да је координатни систем тако постављен да је једна тачка пресека тетиве и лука у координатном почетку, а да је друга тачка са позитивном координатом *B(x)*. Дати одсечак са уписаним кружницама и одговарајућим тангентама (обележеним као на слици) ћемо пресликати функцијом $f(z) = \frac{1}{z}$.



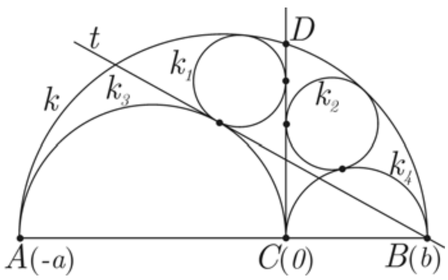
Кружница k (чији је лук $\widehat{OB}$) садржи тачку O, па се комплексном инверзијом f слика на праву k' која у тачки $B'\left(\frac{1}{x}\right)$ сече x-осу под истим углом као и полазна кружница. Нека су $k_1', k_2', k_3', \ldots$ слике уписаних кружница при пресликавању f. Пошто $k_1, k_2, k_3, \ldots$ не садрже $O(0)$, њихове слике су кружнице које додирују x-осу и праву k'. Нека је s' симетрала угла са теменом B' који заклапају права k' и x-оса. Слике $t_1', t_2', t_3', \ldots$ тангената $t_1, t_2, t_3, \ldots$ су кружнице које садрже O, пошто су оригинали праве које не садрже O. Пошто кружнице $t_1', t_2', t_3', \ldots$ додирују редом кружнице k_1' и k_2', k_2' и k_3', k_3' и k_4', њихови центри ће се налазити на правој s'. Дакле важи $S_{s'}(t_i' \cap t_j') = t_i' \cap t_j', i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$. Пошто $O \in t_i' \cap t_j'$ имамо да $S_{s'}(O) \in t_i' \cap t_j', i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$, како $O \notin s'$ (јер B' има координату $1/x$ која је различита од 0 а s' је симетрала угла са теменом B') биће $S_{s'}(O) = P', P' \neq O$ при чему $P' \in t_i' \cap t_j', i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$. Дакле све кружнице $t_1', t_2', t_3', \ldots$ садрже тачке O и P' па тиме чине један елиптички прамен.

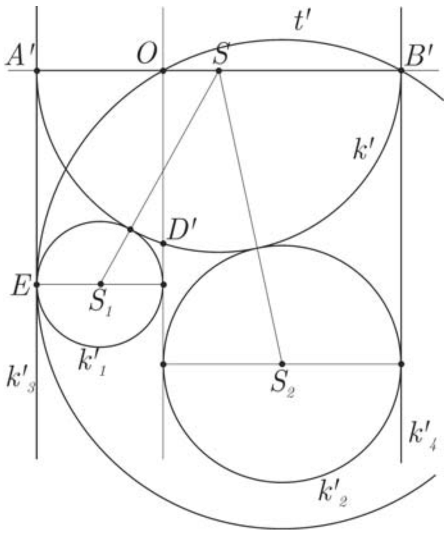
Пошто $P'(p')$ припада свим кружницама $t_1', t_2', t_3', \ldots$, то ће $P(1/p')$ припадати свим правама $t_1, t_2, t_3, \ldots$ ◊

<u>*Пример 5*</u> На дужи *AB* је изабрана тачка *C* и на дужима *AC, BC, AB* као над пречницима конструисане су полукружнице са исте стране праве *AB*. Кроз тачку *C* је конструисана права која је нормална на праву *AB* и сече полукружницу пречника *AB* у тачки *D.* У криволинијске троуглове *ACD* и *BCD* су уписане кружнице k_1 и k_2.

а) Доказати да су полупречници тих кружница једнаки.

б) Доказати да заједничка тангента полукружнице пречника *AC* и кружнице k_1 садржи тачку *B*.





а) Поставићемо координатни систем тако да је тачка C у координатном почетку, нека је још $B(b)$ и $A(-a)$. Из сличности троуглова ACD и DCB добијамо да је $CD^2=ab$ тј. $D(\sqrt{ab})$. Пресликавањем $f(z)=\frac{ab}{z}$ се праве AB и CD сликају у себе, полукружнице k_3 и k_4 над дужима AC и BC као над пречницима се сликају у полуправе које су у тачкама $A'(a')$ и $B'(b')$ нормалне на x-осу, при чему је $a'=f(-a)=-b$ и $b'=f(b)=a$ (зато што k_3 и k_4 садрже тачку $O(0)$ и ортогоналне су на x-осу редом у тачкама A и B које су различите од O). Кружнице k_1, k_2 и k не садрже O, па се сликају у кружнице k_1', k_2' и k', при чему је кружница k' ортогонална на x-осу у тачкама A' и B' јер је k ортогонална на x-осу у тачкама A и B. Следи да центар S кружнице k' има координату $s=\frac{a-b}{2}$, а да јој је полупречник $r=\frac{a+b}{2}$. Кружница k_1 додирује k_3, k и y-осу, па k_1' додирује k_3', k' и y-осу, слично k_2' додирује k_4', k' и y-осу. Пошто k_2' додирује паралелне праве k_4' и y-осу његов центар S_2 ће имати координату облика $s_2=\frac{a}{2}-iy_2$, а полупречник ће му бити $r_2=\frac{a}{2}$. Пошто се кружнице k' и k_2' додирују биће $SS_2=r+r_2=a+\frac{b}{2}$, тј. $|s-s_2|=a+\frac{b}{2}\Rightarrow\left|\frac{a-b}{2}-\frac{a}{2}+iy_2\right|=a+\frac{b}{2}\Rightarrow y_2=\sqrt{a(a+b)}$. Дакле једначина кружнице k_2' је $|w-s_2|=\frac{a}{2}$, тј. $k_2':w\overline{w}-s_2\overline{w}-\overline{s_2}w+a(a+b)=0$. Пошто је $w=f(z)=\frac{ab}{z}$ заменом у претходну једначину добијамо $k_2:z\overline{z}-s_2\frac{b}{a+b}z-\overline{s_2}\frac{b}{a+b}\overline{z}+\frac{ab^2}{a+b}=0$, сређивањем ове једначине добија се $k_2:\left|z-\overline{s_2}\frac{b}{a+b}\right|=\frac{|s_2|^2b^2}{(a+b)^2}-\frac{ab^2}{a+b}$. Дакле полупречник кружнице k_2 је R_2, при чему је $R_2^2=\frac{|s_2|^2b^2}{(a+b)^2}-\frac{ab^2}{a+b}=\frac{a^2b^2}{4(a+b)^2}$, тј. $R_2=\frac{ab}{2(a+b)}$.

Пошто k_1' додирује паралелне праве k_3' и y-осу његов центар S_1 ће имати координату облика $s_1=-\frac{b}{2}-iy_1$, а полупречник ће му бити $r_1=\frac{b}{2}$. Пошто се кружнице k' и k_1' додирују биће $SS_1=r+r_1=b+\frac{a}{2}$, одакле је $\left|\frac{a-b}{2}+\frac{b}{2}+iy_1\right|=b+\frac{a}{2}$ па је $y_1=\sqrt{b(a+b)}$. Дакле једначина кружнице k_1' је $|w-s_1|=\frac{b}{2}$, тј. $k_1':w\overline{w}-s_1\overline{w}-\overline{s_1}w+b(a+b)=0$. Пошто је $w=f(z)=\frac{ab}{z}$ заменом у претходну једначину добијамо $k_1:z\overline{z}-s_1\frac{a}{a+b}z-\overline{s_1}\frac{a}{a+b}\overline{z}+\frac{ba^2}{a+b}=0$, сређивањем ове једначине добија се $k_1:\left|z-\overline{s_1}\frac{a}{a+b}\right|=\frac{|s_1|^2a^2}{(a+b)^2}-\frac{ba^2}{a+b}$. Дакле полупречник кружнице k_1 је R_1, при чему је $R_1^2=\dfrac{|s_1|^2a^2}{(a+b)^2}-\dfrac{ba^2}{a+b}=\dfrac{a^2b^2}{4(a+b)^2}$, тј. $R_1=\dfrac{ab}{2(a+b)}=R_2$.

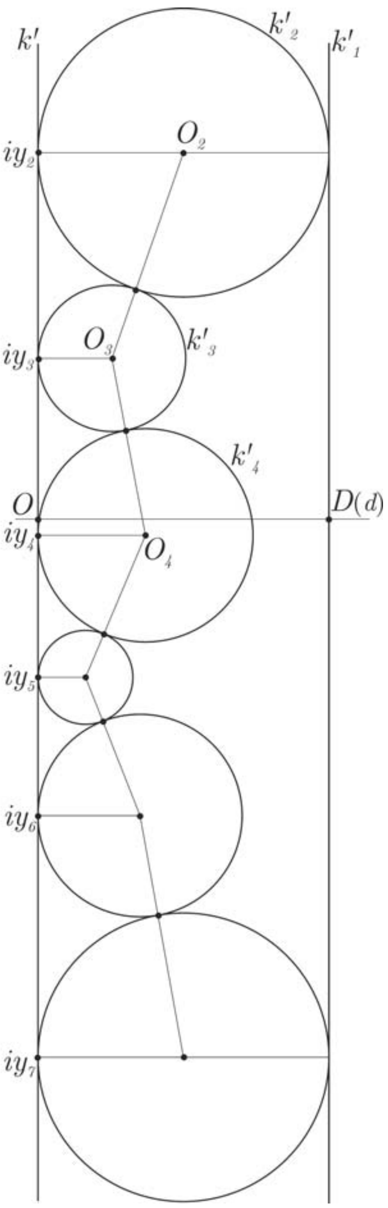
б) Слика заједничке тангенте t кружница k_1, k_3 је кружница t' која пролази кроз O и додирује праву k_3' и кружницу k_1' у тачки $E(e)$ (јер је t права која не садржи O и додирује k_1 и k_3). Пошто k_1' додирује k_3' у тачки E биће $e=-b-iy_1=-b-i\sqrt{b(a+b)}$. Пошто кружница t' додирује k_1' и k_3' у тачки E биће координата центра S_3 кружнице t' облика $s_3=x_3-iy_1=x_3-i\sqrt{b(a+b)}$. Пошто кружница t' садржи тачке O и E биће $S_3O=S_3E$, тј. $|s_3-e|=|s_3|\Rightarrow|x_3-iy_1+b+iy_1|=|x_3-iy_1|\Rightarrow(x_3+b)^2=x_3^2+b(a+b)\Rightarrow x_3=\dfrac{a}{2}\Rightarrow s_3=\dfrac{a}{2}-i\sqrt{b(a+b)}.$

Сада је $S_3B'^2=\left|\dfrac{a}{2}-i\sqrt{b(a+b)}-a\right|^2=\dfrac{a^2}{4}+b(a+b)=|s_3|^2=S_3O^2$, што значи да тачка B' припада кружници t', а тиме и тачка B припада правој t.◊

<u>*Пример 6*</u> На кружници k су изабране тачке $A_1, A_2, A_3,\dots, A_n$.

а) Доказати да ако је n непарно, то постоје кружнице $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ које споља додирују кружницу k у тачкама $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ тако да k_1 додирује k_n и k_2, k_2 додирује k_1 и k_3,... k_n додирује k_1 и k_{n-1}.

б) Доказати да ако је n парно такве кружнице постоје ако је задовољен услов $A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot\ldots\cdot A_{n-1}A_n=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot\ldots A_nA_1$.



Поставићемо координатни почетак у тачку A_1 и x-осу тако усмерити да центар кружнице k_1 има позитивну координату. Нека је r полупречник кружнице k, r_1 полупречник кружнице k_1 и $A_j(a_j)$ за све $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Функцијом $w=f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2r}$ кружница k ће се пресликати на имагинарну осу w-равни, а кружница k_1 у праву која је у тачки $D(d)$, где је $d=\dfrac{1}{2r_1}+\dfrac{1}{2r}=\dfrac{r+r_1}{2rr_1}$, нормална на реалну осу w-равни.

Пошто остале кружнице $k_2, k_3,\dots, k_n$ не садрже тачку $A_1=O$, то ће њихове слике бити кружнице $k_2', k_3',\dots, k_n'$ које додирују имагинарну осу у тачкама чије су координате $f(a_2), f(a_3),\dots, f(a_n)$. Нека је $f(a_j)=iy_j$, $j\in\{2,\dots,n\}$. Пресликавањем f је полазни задатак трансформисан у следећи: на у-оси је задато n-1 тачака чије су координате $iy_2, iy_3, \dots, iy_n$ и права k_1' која је нормална на реалну осу у тачки $D(d)$. Потребно је конструисати кружнице $k_2', k_3', \dots, k_n'$ такве да k_j' додирује имагинарну осу у тачкама $Y_j(iy_j)$ и k_2' додирује k_1' и k_3', ... k_n' додирује k_1' и k_{n-1}'. Нека је $O_j(o_j)$ центар кружнице k_j', а R_j њен полупречник. Тада је $o_2=\dfrac{d}{2}+iy_2$ и $R_2=\dfrac{d}{2}$, такође је и $o_n=\dfrac{d}{2}+iy_n$ и $R_n=\dfrac{d}{2}$. Осим тога је $O_2O_3=R_2+R_3$ и $O_2O_3{}^2=(y_2-y_3)^2+(R_2-R_3)^2$, одакле се добија:

$4R_2R_3=(y_2-y_3)^2$, а пошто је $R_2=\dfrac{d}{2}$, имамо $R_3=\dfrac{(y_3-y_2)^2}{2d}$.

Слично, из $O_4O_3 = R_4 + R_3$ и $O_4O_3^2 = (y_4 - y_3)^2 + (R_4 - R_3)^2$, добијамо $4R_4R_3 = (y_4 - y_3)^2$, што уз претходни резултат даје $R_4 = \dfrac{(y_4 - y_3)^2 d}{2(y_3 - y_2)^2}$. Закључујемо да је: $R_{2k+1} = \dfrac{(y_{2k+1} - y_{2k})^2 \cdot \ldots \cdot (y_3 - y_2)^2}{2(y_{2k} - y_{2k-1})^2 \cdot \ldots \cdot (y_4 - y_3)^2 d}$ (*) и $R_{2k} = \dfrac{(y_{2k} - y_{2k-1})^2 \cdot \ldots \cdot (y_4 - y_3)^2 d}{2(y_{2k-1} - y_{2k-2})^2 \cdot \ldots \cdot (y_3 - y_2)^2}$ (**) што се једноставно доказује индукцијом.

а) Ако је *n* непаран број облика *n=2k+1* из $R_n = \dfrac{d}{2}$ и (*) имамо да је $d^2 = \dfrac{(y_{2k+1} - y_{2k})^2 \ldots (y_3 - y_2)^2}{(y_{2k} - y_{2k-1})^2 \ldots (y_4 - y_3)^2}$, одакле добијамо *d,* па коришћењем (*) и (**) добијамо R_j као и $o_j = R_j + iy_j$, што одређује кружнице k_j'. Инверзним пресликавањем $f^{-1}(z) = \dfrac{2r}{2rz - 1}$ кружнице k_j' се пресликавају у кружнице k_j које имају особине из поставке задатка.

б) Ако је *n* паран број облика *n=2k* из $R_n = \dfrac{d}{2}$ и (**) имамо да је $(y_{2k} - y_{2k-1})^2 \ldots (y_4 - y_3)^2 = (y_{2k-1} - y_{2k-2})^2 \ldots (y_3 - y_2)^2$. Пошто је $y_j = f(a_j) = \dfrac{1}{a_j} + \dfrac{1}{2r}$, заменом у претходни израз, после сређивања добијамо:
$(a_{2k} - a_{2k-1})^2 \ldots (a_4 - a_3)^2 a_2^2 = a_{2k}^2 (a_{2k-1} - a_{2k-2})^2 \ldots (a_3 - a_2)^2$, узимајући у обзир да је $a_1 = 0$, одавде добијамо $A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \ldots \cdot A_{2k-1}A_{2k} = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot \ldots \cdot A_{2k}A_1$, што је услов из поставке задатка. Дакле ако је претходни услов испуњен, независно од величине *d* (тј. независно од r_1) кружнице са особином из поставке задатка се могу конструисати. ◊

<u>Пример 7 (Штајнеров поризам)</u> Дате су две дисјунктне кружнице k_1 и k_2 тако да k_2 припада унутрашњости k_1. Тада:

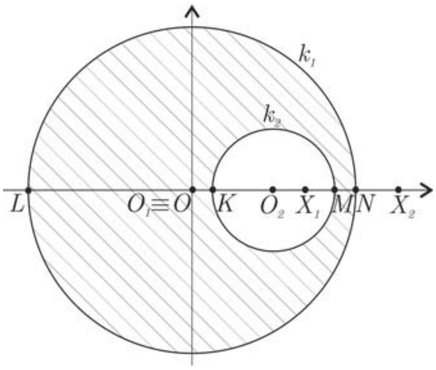
- или је немогуће конструисати ланац кружница $l_1, l_2, l_3,..., l_n$ таквих да свака додирује k_1 и k_2 и две суседне кружнице из тог ланца (при чему l_n додирује l_1 и l_{n-1}), ни за једно *n,*
- или постоји *n* за које је могуће конструисати такав ланац кружница $l_1, l_2, l_3,..., l_n$ и при томе ако је t_1 било која кружница која додирује k_1 и k_2 тада постоји ланац $t_1, t_2, t_3,..., t_n$ који има иста својства као и ланац $l_1, l_2, l_3,..., l_n$.

(Поризам је посебна конструкција математичког проблема који или нема решења или их има бесконачно много.)

Циљ нам је да дате кружнице k_1 и k_2 билинеарном трансформацијом пресликамо у пар концентричних кружница. (Пар кружница које немају заједничких тачака одређује један хиперболички прамен кружница, па по примеру 1 може да се преслика у пар концентричних кружница.) Ради тога потребно је да нађемо тачке X_1 и X_2 које су узајамно инверзне у односу на обе дате кружнице.

Нека су O_1 и O_2 центри кружница k_1 и k_2. Пошто је $\psi_{k_1}(X_1) = X_2$ (28) тачке O_1, X_1 и X_2 су колинеарне. Пошто је $\psi_{k_2}(X_1) = X_2$ (29) тачке O_2, X_1 и X_2 су колинеарне. Дакле O_1 и O_2 су на правој X_1X_2, а тиме су и тачке X_1 и X_2 на правој $O_1O_2=p$. Ово закључивање је изведено под претпоставком да се тачке X_1 и X_2 не поклапају, међутим, ако би било $X_1 = X_2$ из (28) би следило $X_1 \in k_1$, а из (29) би било $X_1 \in k_2$, али ово је у контрадикцији са претпоставком да су кружнице k_1 и k_2 дисјунктне. Осим тога из (28) следи да је једна од тачака X_1 или X_2 унутар кружнице k_1, а друга изван, нека је X_1 унутра, а X_2 изван. Пошто је k_2 унутар кружнице k_1 и пошто важи (29) закључујемо да је X_1 унутар кружнице k_2, а X_2 изван ње.

Поставићемо сада координатни систем тако да тачка O_1 лежи у координатном почетку, а да тачка O_2 лежи на позитивном делу *x*-осе. Нека је $O_2(d)$ и $X_1(x_1)$, $X_2(x_2)$. Из (28) и



тврђења 2 имамо да је $x_1\overline{x_2} = r_1^2$ тј. $x_1 x_2 = r_1^2$ (30), из (29) и тврђења 2 имамо да је $(x_1 - d)(\overline{x_2} - \overline{d}) = r_2^2$ тј. $(x_1 - d)(x_2 - d) = r_2^2$ (31). Одавде је: $x_1 x_2 - d(x_1 + x_2) + d^2 = r_2^2$, замењујући у ову једначину (30) добијамо $x_1 + x_2 = \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{d}$. Дакле x_1 и x_2 су решења квадратне једначине $t^2 - \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{d} t + r_1^2 = 0$.

Дискриминанта ове једначине је:

$$D = \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{d} \right)^2 - 4r_1^2 = \frac{(r_1 - d - r_2)(r_1 - d + r_2)(r_1 + d - r_2)(r_1 + d + r_2)}{d^2} \quad (32).$$

Јасно је да је $r_1 + d + r_2 > 0$, $r_1 - d + r_2 > 0$, јер је $r_1 - d > 0$, $r_1 + d - r_2 > 0$, јер је $r_1 - r_2 > 0$. Ако са *M* и *N* обележимо тачке у којима кружнице k_1 и k_2 секу позитивни део *x*-осе (при чему је *O-O₂-M*), имаћемо да важи $OO_2 + O_2M + MN = ON$ тј. $d + r_2 + MN = r_1$, одакле је $MN = r_1 - d - r_2$, по условима задатка имамо да је $MN>0$, тј. $r_1 - d - r_2 > 0$. Дакле $D>0$, па су x_1 и x_2 реални и различити, њихове вредности су:

$$x_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} - \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} + \frac{\sqrt{D}}{2}. \quad (33)$$

Билинеарна функција $f(z) = \dfrac{z - x_1}{z - x_2}$ пресликава дате кружнице k_1 и k_2 у концентричне кружнице k_1' и k_2'.

Пошто су тачке $X_1(x_1)$ и $X_2(x_2)$ узајамно симетричне у односу на кружнице k_1 и k_2 биће свака кружница *k* која садржи тачке X_1 и X_2 ортогонална на кружнице k_1 и k_2. Пошто кружница *k* садржи тачке X_1 и X_2 она ће се пресликати у праву k' која садржи тачку *O*(*0*). Како су кружнице k_1 и k_2 ортогоналне на *k* то ће и њихове слике k_1' и k_2' бити ортогоналне на k'. Пошто је и *x*-оса ортогонална на k_1 и k_2, а њена слика при пресликавању *f* је опет *x*-оса, следи да су кружнице k_1' и k_2' ортогоналне на *x*-осу. Дакле кружнице k_1' и k_2' су ортогоналне на две различите праве које пролазе кроз *O* па тачка *O* мора бити центар кружница k_1' и k_2'.

Осим овог геометријског доказа извешћемо и аналитички чињеницу да су кружнице k_1' и k_2' концентричне. Други разлог за тај поступак је што ћемо добити и полупречнике кружница k_1' и k_2' што ће бити потребно касније.

Кружница k_1 има једначину $z = r_1 e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$, ако је $z \in k_1$ биће:

$f(z) = f(r_1 e^{i\varphi}) = \dfrac{r_1 e^{i\varphi} - x_1}{r_1 e^{i\varphi} - x_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi} - x_1}{r_1 e^{i\varphi} - \frac{r_1^2}{x_1}} = -\dfrac{x_1}{r_1 e^{i\varphi}} \dfrac{r_1 e^{i\varphi} - x_1}{r_1 e^{-i\varphi} - x_1}$, па је $\left| f(r_1 e^{i\varphi}) \right| = \dfrac{x_1}{r_1}$, што значи да се кружница k_1 пресликава у кружницу $k_1' : |w| = \dfrac{x_1}{r_1}$. (34)

Кружница k_2 има једначину $z = d + r_2 e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$, ако је $z \in k_2$ биће:

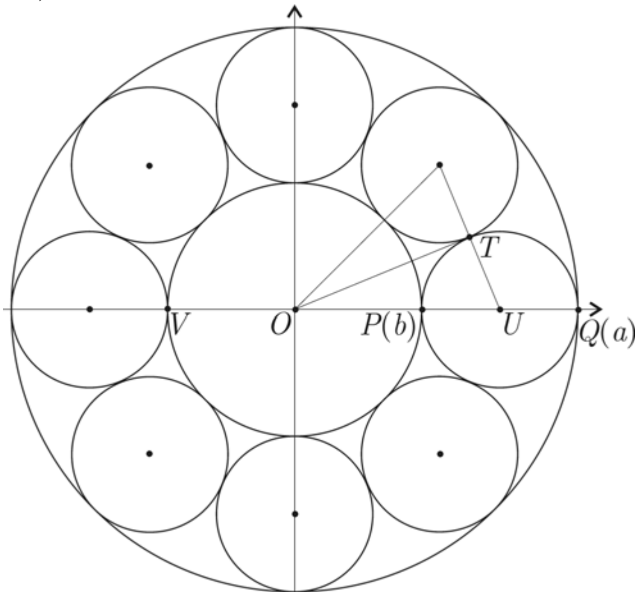
$f(z) = f(d + r_2 e^{i\varphi}) = \dfrac{d + r_2 e^{i\varphi} - x_1}{d + r_2 e^{i\varphi} - x_2} = \dfrac{d + r_2 e^{i\varphi} - x_1}{r_2 e^{i\varphi} - \frac{r_2^2}{x_1 - d}} = -\dfrac{x_1 - d}{r_2 e^{i\varphi}} \dfrac{d + r_2 e^{i\varphi} - x_1}{d + r_2 e^{-i\varphi} - x_1}$, па је $\left| f(r_2 e^{i\varphi}) \right| = \dfrac{x_1 - d}{r_2}$, што значи да се кружница k_2 пресликава у кружницу $k_2' : |w| = \dfrac{x_1 - d}{r_2}$. (35)

Дакле полупречници кружница k_1' и k_2' су редом $r_1' = \frac{x_1}{r_1} = \frac{r_1}{x_2}$ (36) и $r_2' = \frac{x_1 - d}{r_2} = \frac{r_2}{x_2 - d}$. (37)

Нека је $\Omega = \{z : |z| < r_1 \wedge |z - d| > r_2\}$ ексцентрични прстен који се добија када се из унутрашњости круга k_1 избаци унутрашњост круга k_2. Пошто је X_1 унутар k_2 она је изван Ω па је тачка чија је координата $f(x_1)=0$ ван $f(\Omega)$, слично је X_2 ван k_1, па је ван Ω, одакле је $f(x_2)=\infty$ ван $f(\Omega)$. Одавде закључујемо да је $f(\Omega)$ прстен чију границу чине кружнице k_1' и k_2'.

Пошто је из (36) и (37) тешко упоредити r_1' и r_2' функцију f ћемо декомпоновати на следећи начин: $f(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2} = 1 + \frac{x_2 - x_1}{z - x_2}$, ставићемо $z_1 = f_1(z) = z - x_2$, $z_2 = f_2(z_1) = \frac{1}{z_1}$, $z_3 = f_3(z_2) = (x_2 - x_1)z_2$, $z_4 = f_4(z_3) = 1 + z_3$. Дакле важи $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Функција f_1 је транслација и тачке $L(-r_1)$, $K(d-r_2)$, $M(d+r_2)$, $N(r_1)$ пресликава у тачке $L_1(-r_1-x_2)$, $K_1(d-r_2-x_2)$, $M_1(d+r_2-x_2)$, $N_1(r_1-x_2)$. Функција f_2 је комплексна инверзија и она тачке L_1, K_1, M_1, N_1 пресликава редом у тачке $L_2\left(\frac{1}{-r_1 - x_2}\right), K_2\left(\frac{1}{d - r_2 - x_2}\right), M_2\left(\frac{1}{d + r_2 - x_2}\right), N_2\left(\frac{1}{r_1 - x_2}\right)$. Пошто је $-r_1 - x_2 < d - r_2 - x_2 < d + r_2 - x_2 < r_1 - x_2 < 0$ (јер из чињенице да је X_2 ван k_1 следи да је распоред тачака L-K-M-N-X_2, а тиме и L_1-K_1-M_1-N_1-O) биће $\frac{1}{r_1 - x_2} < \frac{1}{d + r_2 - x_2} < \frac{1}{d - r_2 - x_2} < \frac{1}{-r_1 - x_2} < 0$, па је распоред N_2-M_2-K_2-L_2-O. Пошто је кружница $\widetilde{k_1} = f_1(k_1)$ ортогонална на x-осу у тачкама L_1 и N_1 то је кружница $\widetilde{\widetilde{k_1}} = f_2(\widetilde{k_1})$ ортогонална на x-осу у тачкама L_2 и N_2, слично је и кружница $\widetilde{\widetilde{k_2}} = (f_2 \circ f_1)(k_2)$ ортогонална на x-осу у тачкама K_2 и M_2. Дакле, кружница $\widetilde{\widetilde{k_2}}$ је унутар кружнице $\widetilde{\widetilde{k_1}}$. Пресликавање f_3 је хомотетија са позитивним коефицијентом x_2-x_1, а f_4 је транслација, па ће оне задржати однос кружница $\widetilde{\widetilde{k_2}}$ и $\widetilde{\widetilde{k_1}}$, због тога ће кружница k_2' бити унутар кружнице k_1', тј. биће $r_2'<r_1'$.

У ексцентрични прстен Ω се може уписати ланац кружница $l_1, l_2, l_3, ..., l_n$ са описаним особинама акко се у прстен $f(\Omega)$ може уписати ланац кружница $l_1', l_2', l_3', ..., l_n'$. (Ова особина следи из чињенице да је f билинеарно, па кружнице у општем смислу које се додирују пресликава у кружнице у општем смислу које се додирују. У нашој ситуацији све полазне кружнице се пресликавају у кружнице јер ниједна од оригиналних кружница не садржи тачку X_2.)



Испитаћемо када се у прстен $\widetilde{\Omega} = \{z : b < |z| < a\}$ може уписати ланац кружница са особинама постављеним у задатку.

Пошто уписане кружнице додирују границу прстена $\widetilde{\Omega}$ која се састоји од концентричних кружница, то ће њихови полупречници бити једнаки, нека су једнаки ρ.

Тада је, са ознакама на слици: $OU = \frac{VQ}{2} = \frac{a+b}{2}$, $\rho = UQ = \frac{a-b}{2}$. Ако се у кружни прстен $\widetilde{\Omega}$ може уписати n кружница тада је $\measuredangle UOT = \dfrac{\pi}{n}$, па је: $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{UT}{OU} = \dfrac{UQ}{OU} = \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}$, стављајући $t = \dfrac{a}{b}$, добијамо

$\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{t-1}{t+1}$ (38), а одавде $t = \dfrac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}$. (39)

Дакле у прстен $\widetilde{\Omega}$ се може уписати ланац од *n* кружница акко је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}$.

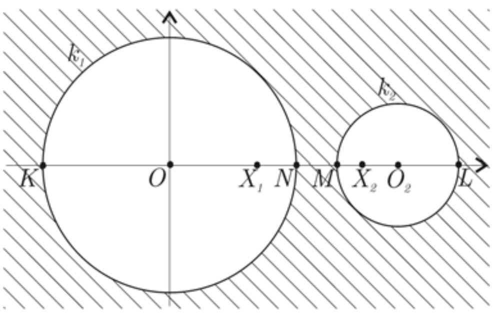
У нашој ситуацији је $a=r_1'$ и $b=r_2'$ па се у прстен $f(\Omega)$ може уписати ланац кружница са описаним особинама акко постоји *n* за које је испуњен услов (38) за $t = \dfrac{r_1'}{r_2'}$.

Узимајући у обзир (36) и (37) имамо да је $t = \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{x_2-d}{x_2}$ (или $t = \dfrac{r_2}{r_1}\dfrac{x_1}{x_1-d}$ или $t = \dfrac{r_1^2 - x_1 d}{r_1 r_2}$) одакле, заменом у (38) добијамо: $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{(r_1-r_2)x_2 - r_1 d}{(r_1+r_2)x_2 - r_1 d}$ (40) (или $\sin\dfrac{\pi}{n} = -\dfrac{(r_1-r_2)x_1 - r_1 d}{(r_1+r_2)x_1 - r_1 d}$ или $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{r_1^2 - r_1 r_2 - x_1 d}{r_1^2 + r_1 r_2 - x_1 d}$), где су x_1 и x_2 дати са (33).

Дакле у полазни ексцентрични прстен Ω се може уписати ланац кружница са описаним особинама акко постоји *n* за које је испуњен услов (40). Јасно је да постојање ланца уписаних кружница не зависи од положаја прве кружнице у ланцу већ само од узајамног односа кружница k_1 и k_2 преко кога се одређује број *n* чланова тог ланца (што се види из (40)). Навешћемо и геометријско образложење ове чињенице. Нека постоји ланац $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ кружница са описаним особинама уписаних у прстен Ω и нека је t_1 произвољна кружница уписана у прстен Ω. Функцијом *f* се ланац $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ слика у ланац подударних кружница $l_1', l_2', l_3', \ldots, l_n'$, а кружница t_1 у кружницу t_1' која је подударна са l_i'. Пошто је $f(\Omega)$ прстен чију границу чине концентричне кружнице, постоји угао *α* такав да је $R_{O,\alpha}(l_1') = t_1'$. Нека се ротацијом за угао *α* ланац $l_1', l_2', l_3', \ldots, l_n'$ преслика у ланац $t_1', t_2', t_3', \ldots, t_n'$. Функцијом f^{-1} се ланац $t_1', t_2', t_3', \ldots, t_n'$ пресликава у ланац $t_1, t_3, t_3, \ldots, t_n$ кружница које се додирују и додирују границе полазног ексцентричног прстена Ω.

<u>*Уопштења*</u> Претпоставка да је кружница k_2 унутар кружнице k_1 није битна јер и у случају да је k_2 изван k_1 област $\Omega_1 = \{z : |z| > r_1 \wedge |z-d| > r_2\}$ се може пресликати у прстен чију границу чине концентричне кружнице. (Чак и у случају да је једна од кружница k_1 или k_2 права постоји билинеарна функција која их пресликава у концентричне кружнице.) Разлог за ово је што две дисјунктне кружнице (или кружница дисјунктна са правом) дефинишу хиперболички прамен кружница који се може пресликати у систем концентричних кружница (пример 1).

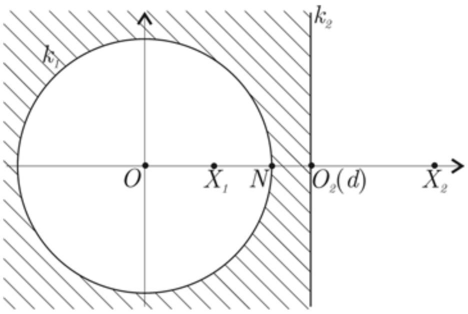
Укратко ћемо поновити претходно разматрање за случај *(i)* да су k_1 и k_2 дисјунктне кружнице једна ван друге и за случај *(ii)* да је једна кружница права (рецимо k_2).



(i) Координатни систем ћемо поставити у средиште веће кружнице (нека је то k_1), а *x*-осу усмерити тако да је O_2 на њеном позитивном делу. Пошто су тачке X_1 и X_2 инверзне у односу на кружнице k_1 и k_2 следи да је једна од њих унутар k_1, а друга унутар k_2, нека је X_1 унутар k_1, а X_2 унутар k_2. Такође је распоред O-X_1-X_2-O_2, јер ако би било O-O_2-X_2 следило би да је O-O_2-X_1 што је у контрадикцији са X_1 унутар k_1. Сва разматрања у вези са израчунавањем координата x_1

и x_2 важе и у овом случају па су x_1 и x_2 дати са (33) при чему ћемо D сада написати у облику $D=\frac{\left(d-(r_1-r_2)\right)\left(d-(r_1+r_2)\right)(r_1+d-r_2)(r_1+d+r_2)}{d^2}$. Јасно је да је $r_1+d-r_2>0$ и $d+r_1+r_2>0$. Из $d>r_1+r_2$ (јер је $MN=d-(r_1+r_2)$) следи $d>r_1-r_2$, па имамо позитивност D.

Иста билинеарна функција $f(z)=\frac{z-x_1}{z-x_2}$ пресликава k_1 и k_2 у концентричне кружнице k_1'и k_2' задате са (34) и (35). Изрази за r_1' и r_2' су такође дати са (36) и (37), међутим испоставља се да је $r_1'<r_2'$. Сада је $t=\frac{r_2'}{r_1'}=\frac{r_1}{r_2}\frac{x_1-d}{x_1}$, па из (38) следи да је $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{(r_1-r_2)x_1-r_1d}{(r_1+r_2)x_1-r_1d}$. (41) Пошто је $f(x_1)=0$ и $f(x_2)=\infty$, а тачке X_1 и X_2 су изван области Ω_1 следи да су тачке O и ∞ изван области $f(\Omega_1)$, па је $f(\Omega_1)=\left\{z:r_1'<|z|<r_2'\right\}$. Дакле у прстен Ω_1 се може уписати ланац кружница са описаним својствима акко постоји n тако да важи (41), при чему је x_1 дато са (33).



(ii) Координатни почетак ћемо поставити у центар кружнице (рецимо да је k_1 кружница), а x-осу тако да је нормална на праву k_2 и да је сече у тачки $O_2(d)$ тако да је $d>0$. Као и раније, из услова $\psi_{k_1}(x_1)=x_2$ следи $x_1x_2=r_1^2$. Из $S_{k_2}(x_1)=x_2$ имамо да је $d-x_1=x_2-d$ тј. $x_1+x_2=2d$. Дакле x_1 и x_2 су решења једначине $t^2-2d\cdot t+r_1^2=0$ (42) тј. $x_1=d-\sqrt{d^2-r_1^2}$, $x_2=d+\sqrt{d^2-r_1^2}$. (43)

Билинеарна функција која област $\Omega_2=\left\{z:|z|>r_1\wedge \operatorname{Re}z<d\right\}$ пресликава у прстен је опет $f(z)=\frac{z-x_1}{z-x_2}$. Да је слика кружнице k_1 кружница k_1' чија је једначина (34) и полупречник r_1' дат са (36), доказује се исто као и у претходним случајевима. Наћи ћемо слику праве k_2: $f(d+iy)=\frac{d+iy-x_1}{d+iy-x_2}=\frac{\frac{x_2-x_1}{2}+iy}{-\frac{x_2-x_1}{2}+iy}$, па је $\left|f(d+iy)\right|=\left|\frac{\frac{x_2-x_1}{2}+iy}{-\frac{x_2-x_1}{2}-iy}\right|=1$. Значи да је $k_2':|z|=1$, тј. r_2'=1. Пошто је тачка X_1 унутар кружнице k_1 (једна од тачака X_1 или X_2 мора бити унутар кружнице k_1, пошто смо у (43) ставили да је $x_1<x_2$ следи да је X_1 унутар кружнице k_1) биће $x_1<r_1$ па је $r_1'=\frac{x_1}{r_1}<1$, тј. $r_1'<r_2'$. Сада је $t=\frac{r_2'}{r_1'}=\frac{r_1}{x_1}$, па из (38) следи да је $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r_1-x_1}{r_1+x_1}$ (44), где је x_1 дато са (43). Пошто је $f(x_1)=0$ и $f(x_2)=\infty$ и тачке X_1 и X_2 су изван области Ω_2, имамо да су тачке O и ∞ изван области $f(\Omega_2)$, тј. да је $f(\Omega_2)=\left\{z:r_1'<|z|<r_2'\right\}$. Значи у „прстен“ Ω_2 се може уписати ланац кружница са наведеним својствима акко постоји n тако да је испуњено (44) при чему је x_1 дато са (43).

Можемо посматрати нешто другачији проблем: за дато n желимо да окарактеришемо прстене у које се може уписати ланац од n кружница које имају особине из поставке задатка. Услови (40), (41) и (44) донекле дају ту карактеризацију, али су формуле врло компликоване.

У концентрични прстен облика $\widetilde{\Omega}=\{z: b<|z|<a\}$ се може уписати ланац од n кружница са наведеним особинама акко $t=\dfrac{a}{b}$ испуњава (39).

Приметићемо да смо доказујући да су слике кружница k_1 и k_2 при пресликавању f концентричне кружнице доказали да је:

$$|f(z)|=\left|\frac{z-x_1}{z-x_2}\right|=r_1' \text{ за } P(z)\in k_1 \qquad (45)$$

$$|f(z)|=\left|\frac{z-x_1}{z-x_2}\right|=r_2' \text{ за } Q(z)\in k_2. \qquad (46)$$

Ове формуле можемо на други начин прочитати. Дакле, формула (45) значи да $P(z)\in k_1$ акко је $\dfrac{PX_1}{PX_2}=r_1'=const$ где је $X_1(x_1)$ и $X_2(x_2)$, тј. (45) значи да је k_1 Аполонијева кружница дефинисана тачкама X_1 и X_2, при чему је количник растојања произвољне њене тачке P до тачака X_1 и X_2 једнак $r_1'=const$. На сличан начин (46) значи да је k_2 Аполонијева кружница дефинисана тачкама X_1 и X_2, при чему је количник растојања произвољне њене тачке Q до тачака X_1 и X_2 једнак $r_2'=const$.

У првобитној варијанти задатка (када је мањи круг k_2 унутар већег круга k_1) је било $r_2'=b$ и $r_1'=a$. Да би избегли разматрање проблема по случајевима да ли је r_2' веће или мање од r_1' ставићемо да је k_a кружница која се слика у кружницу $|w|=a$ и k_b кружница која се слика у кружницу $|w|=b$. Притом једна од кружница k_a или k_b (не обе) може бити права. Из претходног разматрања имамо да ако је n дато и изаберемо a произвољно, тада мора бити $b=a/t$, при чему t задовољава (39). Нека су $X_1(x_1)$ и $X_2(x_2)$ произвољне тачке реалне праве. Нека је k_a Аполонијва кружница дефинисана тачкама X_1 и X_2, таква да за произвољну њену тачку A важи $\dfrac{AX_1}{AX_2}=a$ и нека је k_b Аполонијва кружница дефинисана тачкама X_1 и X_2, таква да за произвољну њену тачку B важи $\dfrac{BX_1}{BX_2}=b$, где је $b=a/t$, при чему t задовољава (39). Тада се у прстен чију границу чине кружнице k_a и k_b може уписати ланац од n кружница са описаним особинама, при чему ако је k_a ван k_b под прстеном подразумевамо спољашњост кругова k_a и k_b, док у случају да је k_a унутар k_b (аналогно k_b унутар k_a) прстен ће бити $\operatorname{int} k_b / \operatorname{int} k_a$ (аналогно $\operatorname{int} k_a / \operatorname{int} k_b$). У случају да је једна од кружница права, прстен ће бити разлика полуравни чија је граница дата права и која садржи центар другог круга и другог круга.

Приметићемо још да у случају да је $a=1$ (или $b=1$) добијамо да је k_a (или k_b) права. Ако је $b<a<1$ (или $1<b<a$) имаћемо случајеве k_b унутар k_a (или k_a унутар k_b). У случају да је $b<1<a$ биће k_a ван k_b. Ово закључујемо посматрањем инверзне функције од функције f. Имамо да је $f^{-1}(z)=\dfrac{x_1-zx_2}{1-z}=x_2+\dfrac{x_1-x_2}{1-z}$. Функцију f^{-1} можемо посматрати као композицију функција $g(z)=\dfrac{1}{1-z}, h(z)=(x_1-x_2)z, t(z)=z+x_2$. Функција h је хомотетија са коефицијентом x_1-x_2, а t је транслација за вектор z_2, пошто оне не мењају однос између оригиналних кружница (тј. ако је једна кружница унутар (ван) друге после примене функција h и t њена слика ће остати унутар (ван) слике друге кружнице), битно је само деловање функције g. Разматрајући деловање функције g на кружнице $|z|=a$ и $|z|=b$ у случајевима $a=1$, $b=1$,

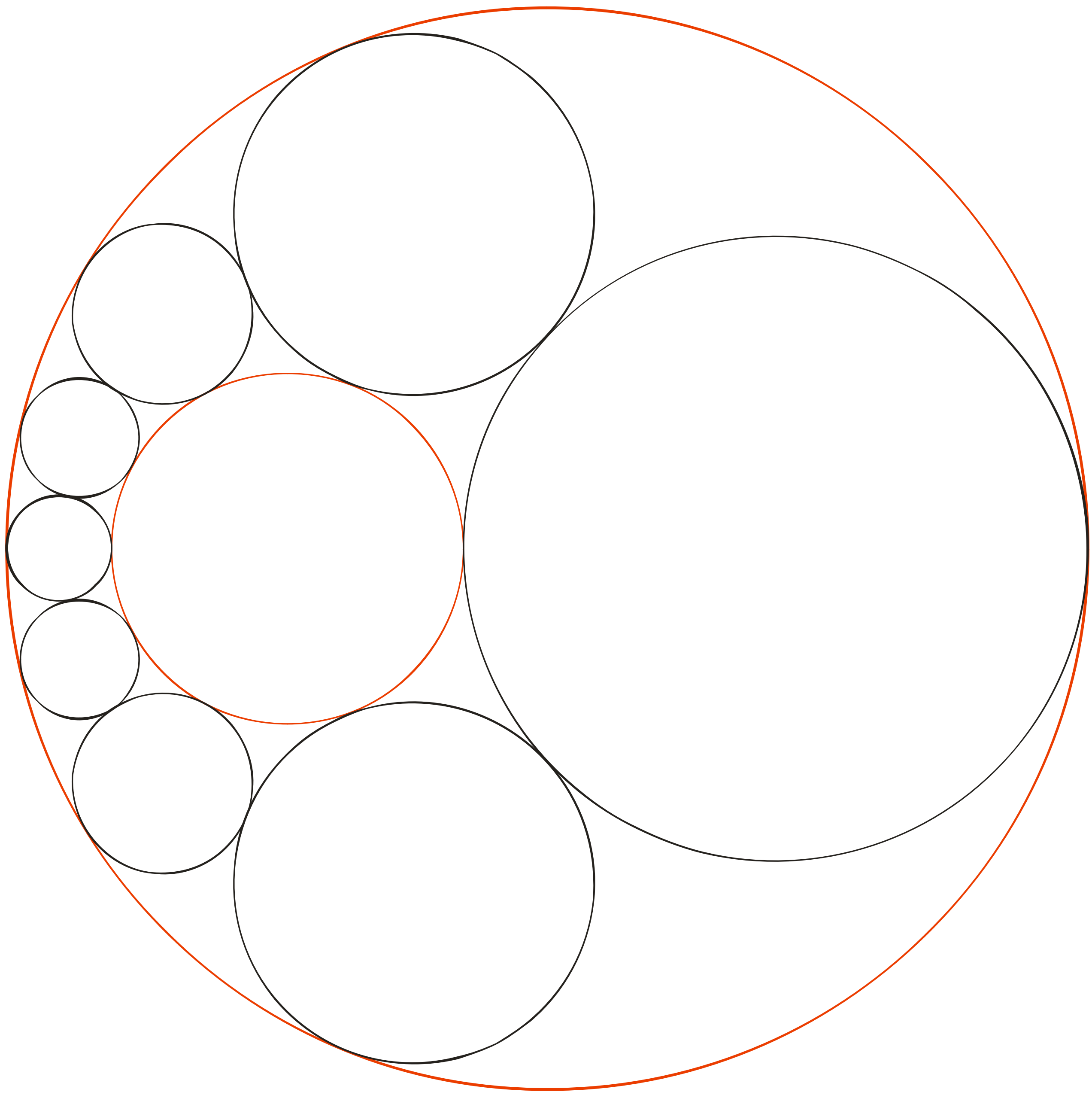
$b<a<1$, $1<b<a$ и $b<1<a$ имамо наведени закључак.

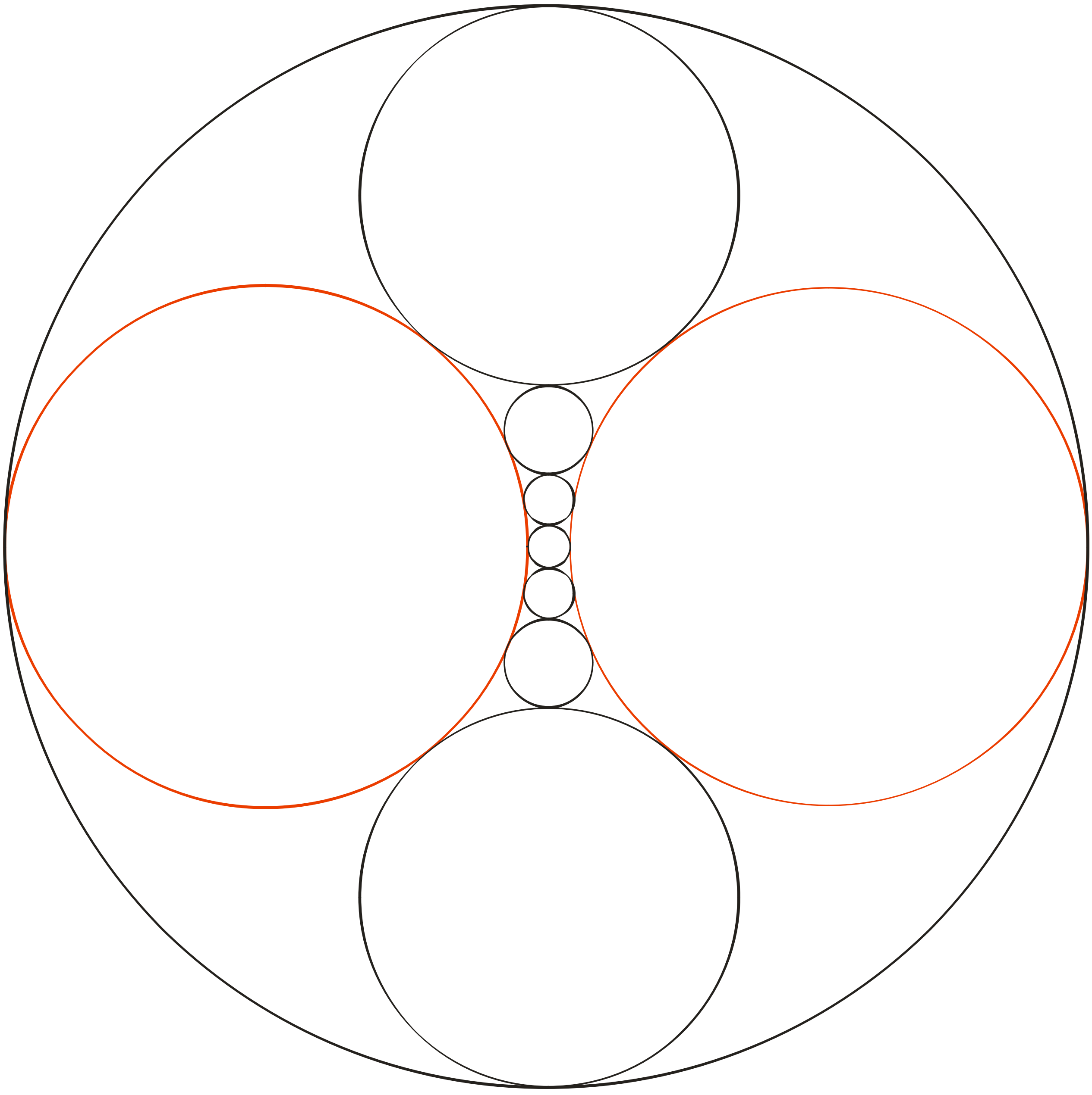
Приметићемо још да претпоставка $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ није битна, јер случај $Z_1(z_1)$ и $Z_2(z_2)$ можемо свести на разматрани транслацијом за вектор $-z_1$ и ротацијом око нуле за угао $\arg(z_2 - z_1)$. Дакле претходни закључак у вези конструкције ексцентричног прстена у који се може уписати n кружница са особинама из поставке задатка важи и када је $X_1(z_1)$ и $X_2(z_2)$, при чему је $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

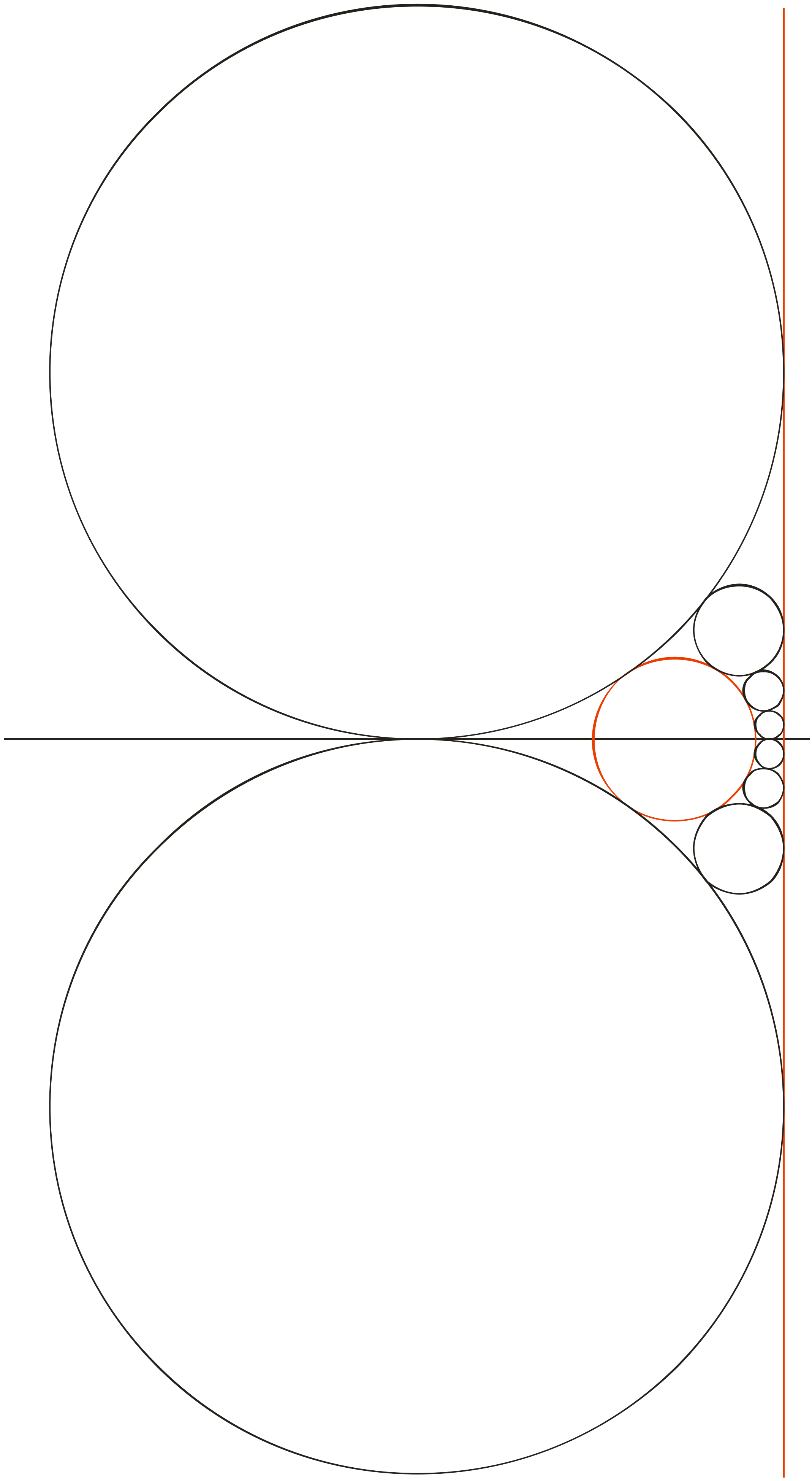
Следеће слике илуструју ситуацију када границу прстена формирају:

1. Две кружнице од којих је једна унутар друге,
2. Две кружнице, једна ван друге,
3. Једна кружница и једна права.

У свим случајевима у прстен је уписиван ланац од осам кружница.◊



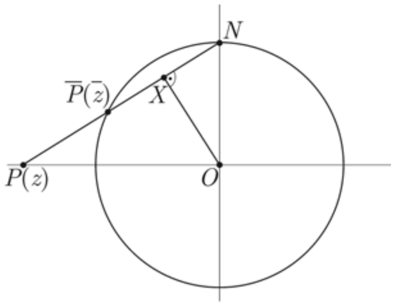




III. 1. Стереографска пројекција

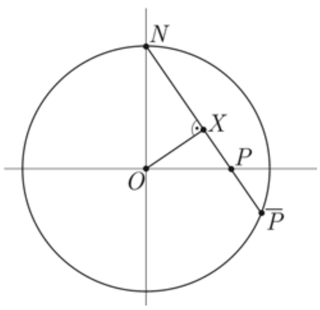
Нека је Σ сфера полупречника 1 чији је центар у координатном почетку комплексне равни $\mathbb{C}$. Северни пол сфере ћемо означити са N. Посматрајмо пресликавање које свакој тачки P комплексне равни додељује тачку $\overline{P}$ сфере Σ која се добија као пресек полуправе NP (са почетком у N) и сфере Σ. Испоставља се да је ово пресликавање бијекција између проширене комплексне равни $\overline{\mathbb{C}}$ и сфере Σ. При стереографској пројекцији се тачке унутар јединичног круга $D=\{z:|z|<1\}$ сликају на доњу полусферу сфере Σ, док се остале тачке комплексне равни сликају на горњу полусферу, при чему се тачка ∞ слика у N.

Испоставља се да се стереографска пројекција може видети као рестрикција инверзије у односу на сферу σ чији је центар тачка N, а полупречник $\sqrt{2}$, на комплексну раван $\overline{\mathbb{C}}$. Инверзија у односу на сферу се дефинише аналогно инверзији у односу на круг. Дакле, тачке M и M' су узајамно инверзне у односу на сферу σ' чији је центар S, а полупречник r, акко се налазе на истој полуправој са почетком у S и ако је $SM\cdot SM'=r^2$. Нека је $\overline{P}$ стереографска пројекција тачке P, посматраћемо раван одређену правама $P\overline{P}$ и NO. Нека је X ортогонална пројекција тачке O на праву $P\overline{P}$.

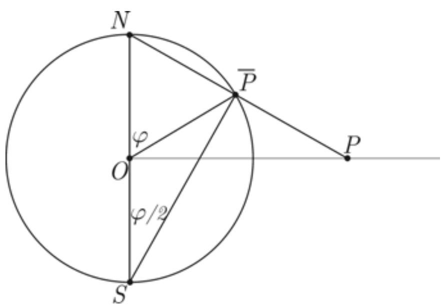


Тада су троуглови NOX и NPOслични, па је $\dfrac{NX}{NO}=\dfrac{NO}{NP}$, пошто је $NO=1$ и $NX=\dfrac{N\overline{P}}{2}$ имамо да је $NP\cdot N\overline{P}=2$. Дакле тачке P и $\overline{P}$ су инверзне у односу на сферу σ.

Пошто инверзија у односу на сферу аналогно инверзији у односу на круг пресликава кружнице које не садрже центар сфере у кружнице, то ће и стереографска пројекција кружнице $\mathbb{C}$ равни пресликавати у кружнице на сфери Σ. Инверзија у односу на сферу пресликава праве које не садрже центар сфере у кружнице које га садрже, па стереографска пројекција праве $\mathbb{C}$ равни пресликава у кружнице на сфери Σ које садрже N. Притом стереографска пројекција чува углове по величини, али не и по смеру, дакле она је антиконформно пресликавање (ова особина се може извести из антиконформности инверзије у односу на сферу, што нећемо доказивати).



Ако ставимо да је тачка $P(x+iy)=P(z)$ и да је тачка $\overline{P}$ дата тродимензионалним Декартовим координатама $\overline{P}(\overline{x},\overline{y},\overline{z}),\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{R}$ при чему је $\overline{x}^2+\overline{y}^2+\overline{z}^2=1$, можемо успоставити везу између Декартових координата у равни тачке $P(x,y)$ и тродимензионалних Декартових координата тачке $\overline{P}$. Међутим природније је да посматрамо тачку P задату њеним поларним координатама $z=re^{i\theta}$ и тачку $\overline{P}$ задату сферним координатама. Ако тачка M припада јединичној сфери Σ, она је одређена 1) углом између равни OXN (где је X проузвољна тачка реалне праве) и равни OMN и 2) углом између осе ON и праве OM. Ако је $\overline{P}$ стереографска пројекција тачке $P(re^{i\theta})$ тада ће угао између равни OXN и равни $O\overline{P}N$ бити θ, а угао између осе ON и $O\overline{P}$ ћемо израчунати користећи пресек сфере Σ и равни $O\overline{P}N$.



Нека је S јужни пол сфере Σ. Пошто је NS пречник, $\measuredangle N\overline{P}S$ је прав, па је троугао $NS\overline{P}$ сличан троуглу NPO. Ако обележимо $\measuredangle NO\overline{P}=\varphi$ биће $\measuredangle NS\overline{P}=\varphi/2$ (као периферијски над луком $N\overline{P}$). Из наведене сличности закључујемо да је $\measuredangle NPO=\varphi/2$, па је $ctg\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{OP}{ON}=r$. Дакле, пошто је стереографска пројекција бијекција, можемо закључити да ако је тачка $\overline{P}\in\Sigma$ дата угловима θ и φ на напред описани начин, тада ће њена (инверзна) стереографска пројекција бити тачка $P(z)$, где је $z=\left(ctg\dfrac{\varphi}{2}\right)e^{i\theta}$. (1)

<u>*Пример*</u> Нека су тачке $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ антиподалне тачке сфере Σ (тј, дуж $\overline{PQ}$ садржи O) и нека су $P(p)$ и $Q(q)$ њихове слике при (инверзној) стереографској пројекцији. Тада је $q=-\dfrac{1}{\overline{p}}$.

Нека $\overline{P}$ има сферне координате θ и φ, тада тачка $\overline{Q}$ има сферне координате $\theta+\pi$ и π-φ па користећи (1) имамо да је: $q=\left(ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\right)e^{i(\pi+\theta)}=\dfrac{-1}{\left(ctg\dfrac{\varphi}{2}\right)e^{-i\theta}}=\dfrac{-1}{\overline{p}}$.

III. 2. Сферна геометрија

Нееуклидске геометрије су се развиле из покушаја да се чувени V постулат Еуклидових "Елемената" докаже коришћењем осталих постулата. Испоставило са да је то немогуће и да негација V постулата (који тврди да постоји тачно једна права која садржи дату тачку и паралелна је датој правој) даје две могућности:

1) не постоји ни једна права која садржи дату тачку и паралелна је датој правој;
2) постоје бар две праве које садрже дату тачку и паралелне су датој правој.

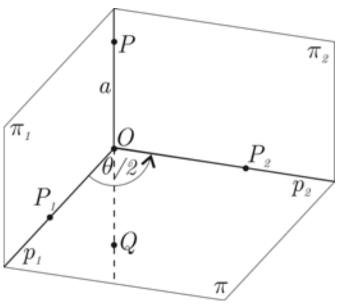
(Приметићемо да у овом уводном делу појам паралелан користимо у смислу - немају заједничких тачака, што би у комплексној равни значило - немају заједничких тачака у $\mathbb{C}$, док им ∞ јесте заједничка тачка.)

Обе наведене могућности имају своју реализацију, прва у сферној геометрији, друга у хиперболичкој (или гометрији Лобачевски-Бољајија). Текст који следи има за циљ да покаже како се могу направити модели обеју наведених геометрија коришћењем комплексних бројева, при чему нећемо све чињенице детаљно образлагати.

Захтев да дуж као део праве реализује најкраће растојање између двеју тачака доводи до избора великих кругова за праве на сфери. За две произвољне тачке сфере јасно је да постоји јединствен велики круг који их садржи, такође је јасно да се свака два велика круга секу. Због тога је на сфери испуњен захтев да кроз две различите тачке пролази тачно једна права, али је и остварена могућност 1) која следи из негације V постулата. Још у XVII веку је био познат резултат да је $S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$, где је ABC сферни троугао чији су углови α, β, γ а R полупречник сфере (под S_{ABC} подразумевамо површину сферног троугла ABC, при чему су странице сферног троугла делови великих кругова који садрже њихове крајње тачке). Јасно је да одавде следи да је збир углова сферног троугла увек већи од π.

Ако је s велики круг који се добија у пресеку сфере σ и равни π, под рефлексијом (симетријом) у односу на праву s сфере σ (ознака S_s) ћемо сматрати рестрикцију раванске рефлексије S_π на сферу σ.

Нека су P и Q две антиподалне тачке сфере σ чији је центар O и нека је права $a=PQ$. Ротација простора око праве a за угао θ се дефинише као композиција раванских рефлексија S_{π_1} и S_{π_2} у односу на равни π_1 и π_2 које се секу по правој a и чине диедар угла $\theta/2$. (Доказује се да није битно који пар таквих равни изаберемо.) Нека је угао θ позитиван, нека је π раван која садржи тачку O и нормална је на праву a и нека је $p_1 = \pi_1 \cap \pi$, $p_2 = \pi_2 \cap \pi$, док су P_1 и P_2 произвољне тачке правих p_1 и p_2 такве да је $\measuredangle P_1OP_2 = \theta/2$.



Посматрајмо 1) триедар са врхом O и ивицама OP_1, OP_2, OP и 2) триедар са врхом O и ивицама OP_1, OP_2, OQ. Један од њих има позитивну оријентацију. Тачке P и Q можемо пренумерисати тако да триедар са ивицама OP_1, OP_2, OP има позитивну оријентацију. Ротацијом сфере σ око тачке P за угао θ сматраћемо рестрикцију ротације простора $R_{a,\theta}$ на сферу σ (ознака $R_{P,\theta}$). Притом је $R_{P,\theta} = R_{Q,-\theta}$. Због тога за угао φ=-θ, θ>0, ротацију $R_{P,\varphi}$ дефинишемо као ротацију $R_{Q,-\varphi} = R_{Q,\theta}$, где је Q антиподална тачка тачки P.

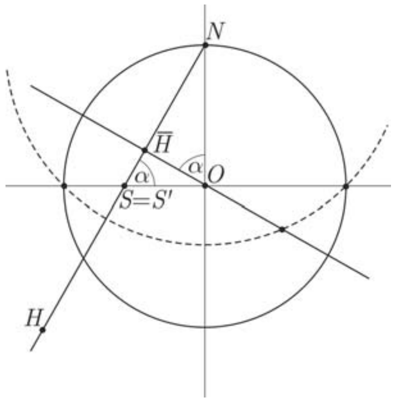
Из ове дефиниције следи да се ротација сфере $R_{P,\theta}$ може претставити као композиција двеју рефлексија сфере S_{s_1} и S_{s_2}, при чему се велики кругови s_1 и s_2 секу у тачки P под углом $\theta/2$.

Испоставља се да је свака директна изометријска трансформација сфере ротација, а свака индиректна изометријска трансформација сфере је композиција ротације и рефлексије сфере. (Ово нећемо доказивати.)

Надаље ћемо сматрати да је сфера Σ јединичног полупречника, са центром у координатном почетку, да би могли примењивати стереографску пројекцију.

Нека је $\overline{P} \in \Sigma$ и s велики круг сфере Σ. Ако је $S_s(\overline{P}) = \overline{M}$, где је S_s рефлексија сфере у односу на s, нека су M и P слике тачака $\overline{M}$ и $\overline{P}$ при инверзној стереографској пројекцији. Може се доказати да су тачке M и P узајамно инверзне у односу на слику круга s при инверзној стереографској пројекцији.

<u>*Доказ*</u> Раније је наведено да је стереографска пројекција рестрикција инверзије у односу на сферу K са центром у N (северни пол од Σ) и полупречником $\sqrt{2}$, на сферу Σ. Такође је наведено да је S_s рестрикција рефлексије простора S_π, где је $\pi \cap \Sigma = s$, на сферу Σ. Зато ћемо посматрати деловање инверзије ψ_K на тачке $\overline{M}$ и $\overline{P}$. По принципу симетрије који аналогно важи за инверзију у односу на сферу имамо да су тачке $\psi_K(\overline{M})$ и $\psi_K(\overline{P})$ симетричне у односу на $\psi_K(\pi)$, јер је $S_\pi(\overline{P}) = \overline{M}$. Ако велики круг s не садржи N, тада ни π не садржи N, па је $\psi_K(\pi) = \sigma$ сфера која садржи N. Најудаљенија тачка сфере σ од тачке N је слика најближе тачке равни π тачки N.



Дакле посматраћемо тачку $\overline{H}$ која је подножје нормале из тачке N на раван π (то је најближа тачка равни π у односу на тачку N). Нека је α угао између правих NO и $\overline{H}O$. Тада је $\sin\alpha = \dfrac{N\overline{H}}{1} = N\overline{H}$, нека је $\psi_K(\overline{H}) = H$, тј. $N\overline{H} \cdot NH = 2$, дакле биће $NH = \dfrac{2}{\sin\alpha}$. Ако са S обележимо средиште дужи NH имаћемо да је $NS = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Нека је S' пресек праве $N\overline{H}$ са комплексном равни (он постоји јер је тачка $\overline{H}$ унутар сфере Σ). Тада је $\measuredangle NS'O = \alpha$, па имамо да је $\sin\alpha = \dfrac{1}{NS'}$ тј. $NS' = \dfrac{1}{\sin\alpha}$. Одавде следи да се тачке S и S' поклапају тј. S је у комплексној равни. Пошто је H најудаљенија тачка сфере σ од тачке N и $N \in \sigma$ имамо да је S центар сфере σ.

С друге стране, $\overline{M}$ и $\overline{P}$ су на сфери Σ, па су M и P на $\psi_K(\Sigma) = \mathbb{C}$. Дакле тачке M и P комплексне равни су симетричне у односу на сферу σ чији је центар S такође у комплексној равни. Одавде следи да су тачке M и P симетричне (тј. инверзне) у односу на кружницу која је пресек сфере σ и комплексне равни. Пошто је $s = \pi \cap \Sigma$, биће $\psi_K(s) = \psi_K(\pi) \cap \psi_K(\Sigma)$ тј. $\psi_K(s) = \sigma \cap \mathbb{C}$.

У случају да $N \in \pi$, биће $\psi_K(\pi) = \pi$, па су M и P симетричне у односу на π. Како $N \in \pi$ и $O \in \pi$ имамо да је π нормална на комплексну раван. Као и у претходном случају су M и P на комплексној равни и симетричне у односу на $\pi \cap \mathbb{C} = \psi_K(\pi) \cap \psi_K(\Sigma) = \psi_K(s)$. □

Посматрајмо сада ротацију сфере око тачке $\overline{P}$ за угао *θ*. Наведено је да се она може представити као композиција двеју рефлексија сфере S_{s_1} и S_{s_2}. Ако је $\overline{Q}$ антиподална тачка тачке $\overline{P}$ велики кругови s_1 и s_2 секу у тачкама $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ и у тачки $\overline{P}$ заклапају угао *θ*/2. Пошто рефлексијама сфере S_{s_1} и S_{s_2} при инверзној стереографској пројекцији одговарају симетрије (тј. инверзије) у односу на слике великих кругова s_1 и s_2 при инверзном стереографском пресликавању које ћемо обележити са l_1 и l_2, имаћемо да ротацији сфере $R_{\overline{P},\theta}$ при инверзној стереографској пројекцији одговара композиција $\psi_{l_2} \circ \psi_{l_1}$. (1)

Приметимо да слика великог круга сфере *Σ* који не садржи *N*, круг који сече јединичну кружницу у дијаметрално супротним тачкама. Ако велики круг садржи *N*, његова слика је права која садржи координатни почетак, а тиме сече јединични круг у дијаметрално супротним тачкама. У случају да је $l_i, \quad i \in \{1,2\}$, права, у претходној композицији ψ_{l_i} треба заменити са S_{l_i} (при чему је овде реч о рефлексији као о изометрији равни).

Пошто се s_1 и s_2 секу у антиподалним тачкама $\overline{P}(p_1)$ и $\overline{Q}(q_1)$ њихове слике *P*(*p*) и *Q*(*q*) ће бити у пресеку l_1 и l_2, дакле фиксне, осим тога, по примеру 1 ће бити $q = -\dfrac{1}{\overline{p}}$.

Композиција облика (1) је већ разматрана у делу о Мебијусовим трансформацијама. То је елиптичка Мебијусова трансформација и користећи неке резултате из алгебре, може се показати да је та Мебијусова трансформација облика:

$$M(z) = \frac{Az+B}{-\overline{B}z+\overline{A}}, A, B \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Пошто је свака директна изометријска трансформација сфере ротација, закључујемо да при инверзној стереографској пројекцији директној изометрији сфере одговара пресликавање (2).

Показује се да свакој индиректној изометријској трансформацији сфере при инверзној стереографској пројекцији одговара пресликавање облика:

$$\widetilde{M}(z) = \frac{A\overline{z}+B}{-\overline{B}\overline{z}+\overline{A}}, A, B \in \mathbb{C} \quad (3).$$

Коришћењем стереографске пројекције се може увести метрика на сфери. Уз чињеницу да је стереографска пројекција антиконформно пресликавање, имамо да се преко те пројекције може реализовати модел сферне геометрије у комплексној равни (тачкама сфере ћемо додељивати њихове слике при стереографској пројекцији). Изразима (2) и (3) је одређен општи облик изометријских трансформација у том моделу.

III. 3. Хиперболичка геометрија

Описаћемо Поенкаров модел хиперболичке геометрије у горњој полуравни $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексне равни $\mathbb{C}$.

Да бисмо избегли неспоразуме објекте модела ћемо означавати са словом *H,* тако ће полураван *H* бити *H*-раван (тј. хиперболичка раван), *H*-права ће означавати праву у хиперболичкој равни која не мора бити представљена еуклидском правом, назив права ће остати за еуклидске праве.

Права $y=0$ је гранична права *H*-равни и назива се хоризонтом, њене тачке се називају идеалним или бесконачним тачкама или тачкама у бесконачности и не припадају *H*-равни. Нешто касније ћемо видети да је хиперболичко растојање произвољне тачке *H*-равни до идеалне тачке заиста ∞, што оправдава овај назив.

Нека су $P(z)$ и $Q(w)$ две тачке горње полуравни *H.* Хиперболичко растојање између тачака *P* и *Q* ћемо обележавати са $d_H(P,Q)$ и оно је са еуклидским растојањем везано релацијом:

$$\cosh d_H(P,Q) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \quad (4)$$

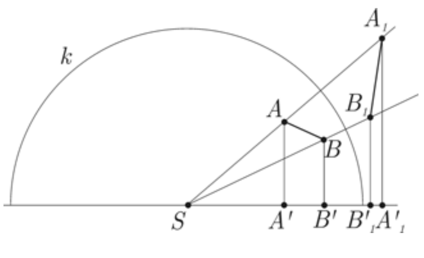
Из захтева да је дуж део праве који реализује најкраће растојање између две тачке следи да ће *H*-праве бити полуправе горње полуравни које су нормалне на хоризонт и полукругови горње полуравни који су нормални на хоризонт. (Дакле, центар таквог полукруга је на хоризонту. Полуправу која је нормална на хоризонт можемо видети као полукруг чији је полупречник ∞.) Једноставно се показује да кроз две различите тачке постоји тачно једна права која их садржи.

Нека су $M(p+im)$ и $N(p+in)$ тачке полуправе која је нормална на хоризонт. Нека је $m>n>0$, и $d_H(M,N)=d$, тада је: $\cosh d = 1 + \frac{(m-n)^2}{2mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)$. Решавањем ове једначине по d добијамо $d = \ln\frac{m}{n}$. Ако би било $n>m>0$ имали би $d = \ln\frac{n}{m}$, што заједно даје $d = \left|\ln\frac{m}{n}\right|$. Дакле

$$d_H(M,N) = \left|\ln\frac{m}{n}\right|. \quad (5)$$

Одавде имамо да ако $n \to 0$ растојање $d_H(M,N) \to \infty$ тј. растојање произвољне *H*-тачке *M* до хоризонта је ∞.

<u>*Лема 1*</u> Инверзија у односу на полукруг *k* који је ортогоналан на хоризонт је (индиректна) изометријска трансформација *H*-равни.



Нека је *k* полукруг са центром у $S(s)$, $s \in \mathbb{R}$, полупречника *R.* Нека су $A(a)$ и $B(b)$ тачке горње полуравни и нека је $\psi_k(A) = A_1$ и $\psi_k(B) = B_1$, где је $A_1(a_1)$ и $B_1(b_1)$. Тада је $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1 = R^2$ (6), па је $\frac{SA}{SB} = \frac{SB_1}{SA_1}$, пошто је $\measuredangle ASB = \measuredangle A_1SB_1$, имамо да је троугао *ASB* сличан троуглу B_1SA_1, па је $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SA}{SB_1}$, пошто је $SB_1 = \frac{R^2}{SB}$, имамо да је $A_1B_1 = \frac{R^2}{SA \cdot SB} \cdot AB.$ (7) .

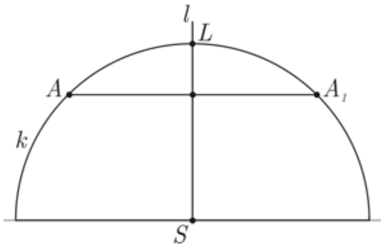
Нека су A', B', A_1', B_1' пројекције тачака A, B, A_1, B_1 на x-осу. Тада је: $\frac{AA'}{SA}=\frac{A_1A_1'}{SA_1}$ и $\frac{BB'}{SB}=\frac{B_1B_1'}{SB_1}$, тј. $\frac{\operatorname{Im} a}{|s-a|}=\frac{\operatorname{Im} a_1}{|s-a_1|}$ (8) и $\frac{\operatorname{Im} b}{|s-b|}=\frac{\operatorname{Im} b_1}{|s-b_1|}$ (9). Дакле из (7) имамо: $\frac{|a_1-b_1|^2}{\operatorname{Im} a_1 \operatorname{Im} b_1}=\frac{R^4|a-b|^2}{\operatorname{Im} a_1 \operatorname{Im} b_1 |s-a|^2|s-b|^2}$, одакле, користећи (8), (9) и (6) следи: $\frac{|a_1-b_1|^2}{\operatorname{Im} a_1 \operatorname{Im} b_1}=\frac{R^4|a-b|^2}{|s-a_1|\operatorname{Im} a|s-b_1|\operatorname{Im} b|s-a||s-b|}=\frac{|a-b|^2}{\operatorname{Im} a \operatorname{Im} b}$. Одавде је, по (4) $d_H(A_1,B_1)=d_H(A,B)$.□

Аналогно као и у еуклидском случају под рефлексијом у односу на H-праву k ћемо подразумевати пресликавање које тачки B H-равни додељује тачку $B_1=S_k(B)$, такву да је H-права $l_1=BB_1$ ортогонална на H-праву k, и ако обележимо $k\cap l_1=\{M\}$, тада важи $d_H(B,M)=d_H(B_1,M)$.

Тврђење 1 Инверзија у односу на полукруг k који је ортогоналан на хоризонт је H-рефлексија S_k хиперболичке равни у односу на H-праву k.

Нека је $\psi_k(B)=B_1$ и l_1 кружница која садржи B и B_1 ортогонална је на хоризонт. Пошто је свака кружница која садржи B и B_1 ортогонална на k, биће и $l_1\perp k$. Нека је $k\cap l_1=\{M\}$, пошто $M\in k$ имамо да је $\psi_k(M)=M$, а како је $\psi_k(B)=B_1$ и ψ_k изометрија H-равни имамо да је $d_H(B,M)=d_H(B_1,M)$. Дакле ψ_k је рефлексија S_k хиперболичке равни.□

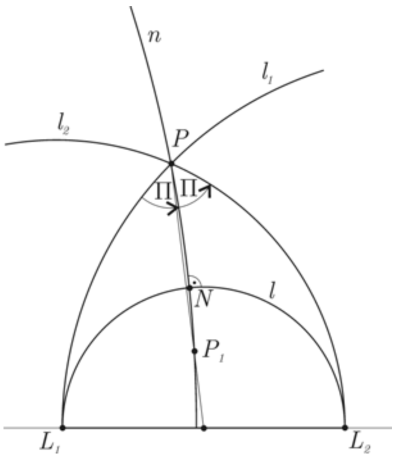
Тврђење 2 Рефлексија у односу на праву $\tilde{l}$ која је нормална на хоризонт, сужена на горњу полураван, је H-рефлексија S_l, где је l полуправа која се поклапа са $\tilde{l}$ у H.



Нека су A и A_1 симетричне у односу на $\tilde{l}$. Ако је k полукруг коме је центар у пресеку $\tilde{l}$ са реалном осом (тачка S) и полупречник SA, биће k H-права која садржи A и A_1. Нека је $k\cap l=\{L\}$. Тада је $AL=A_1L$, па ако ставимо $A(a)$, $A_1(a_1)$ и $L(z)$ биће $\cosh d_H(A,L)=1+\frac{|z-a|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} a}=1+\frac{|z-a_1|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} a_1}=\cosh d_H(A_1,L)$, јер је $\operatorname{Im} a=\operatorname{Im} a_1$. Пошто је $l\perp k$ имамо да је $S_l(A)=A_1$, при чему овде S_l означава H-рефлексију у односу на H-праву l.□

Нека је дата тачка P H-равни и H-права l. Ако је $S_l(P)=P_1$ (при чему S_l означава H-рефлексију) и ако је n H-права која садржи тачке P и P_1, биће $n\perp l$, чиме смо конструисали H-праву n која је нормална на дату H-праву l и садржи дату тачку P. Осим тога за сваку тачку $L\in l$ важи $d_H(P,L)=d_H(P_1,L)$, јер је $S_l(L)=L$.

Ако су l и k две H-праве од којих је бар једна полукруг нормалан на хоризонт. Ако l и k имају заједничку тачку H-равни, тада кажемо да се оне секу. Ако l и k немају заједничких тачака у H-равни, али ни на хоризонту, тада кажемо да су оне хиперпаралелне. Може се показати да две хиперпаралелне праве имају тачно једну заједничку нормалу. Ако l и k немају заједничких тачака у H-равни, али имају заједничку тачку на хоризонту тада кажемо да су оне паралелне (или асимптотски паралелне). У случају да су обе *H*-праве *l* и *k* представљене полуправама нормалним на хоризонт оне су (асимптотски) паралелне.



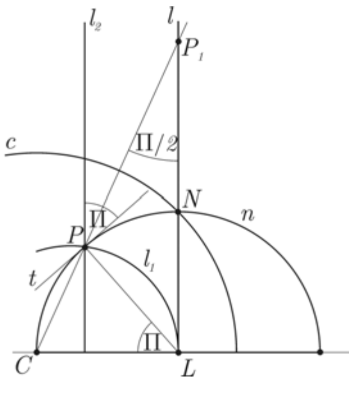
Нека је *P* тачка ван *H*-праве *l* и нека су l_1 и l_2 (асимптотски) паралелне *H*-праве *H*-правој *l* које садрже тачку *P*. Нека је *n* *H*-права која је нормална на *l* и садржи тачку *P*. Пошто је $n \perp l$ биће $S_n(l) = l$ (ово закључујемо разматрајући могућности: *n* и *l* су полукругови, *n* је полуправа и *l* је полукруг, *n* је полукруг и *l* је полуправа). Пошто је *n* ортогонална на хоризонт *h,* биће $S_n(h) = h$, па пошто је S_n индиректна изометријска трансформација, ако са L_1 и L_2 обележимо тачке у којима *H*-права *l* сече хоризонт (може бити и $L_2 = \infty$), имаћемо да је $S_n(L_1) = L_2$, а тиме и $S_n(l_1) = l_2$.

Дакле $\measuredangle(l_1Pn) = \measuredangle(nPl_2) = \Pi$. Овај угао ћемо називати углом паралелности који одговара тачки *P* и правој *l.* У еуклидској геометрији угао паралелности је увек *π*/2, док је у хиперболичкој мањи од *π*/2. Испоставља се да је дужина $d_H(P,N)$, где је $\{N\} = n \cap l$ обрнуто сразмерна величини угла *П.*

<u>*Тврђење 3*</u> Уз ознаке из претходног разматрања важи $tg(\Pi/2) = e^{-d_H(P,N)}$.

Ако је *l* полукруг који сече хоризонт у тачкама L_1 и L_2*,* инверзија са центром у L_1 произвољног полупречника (погодно је $R=L_1P$) преводи полукруг *l* у полуправу нормалну на хоризонт. Пошто је инверзија изометрија *H*-равни следи да је довољно доказати тврђење само у случају када је *l* полуправа нормална на хоризонт.

Нека је *n* *H*-права која садржи тачку *P* и нормална је на *H*-праву *l.* Ако је *L* подножје нормале *l* на хоризонт, биће центар полукруга *n* у тачки *L.* Нека је *C* тачка у којој полукруг *n* сече хоризонт, таква да припада полуравни чија је граница *l* и којој припада тачка *P.* Нека је *c* полукруг са центром у *C* полупречника *CN.* Нека је $\psi_c(P) = P_1$. Тада је $\psi_c(n) = l$ јер је слика (при инверзији ψ_c) полукруга *n* полуправа која је нормална на хоризонт и која садржи тачку $\psi_c(N) = N$.



Пошто $P \in n$ биће $P_1 \in l$. Нека су l_1 и l_2 *H*-праве које су паралелне са *H*-правом *l* и садрже тачку *P.* По дефиницији угла паралелности је $\measuredangle(l_2Pn) = \Pi$. Ако је *t* тангента на полукружницу *n* у тачки *P* имамо да је $\measuredangle(l_2Pn) = \measuredangle(l_2Pt) = \measuredangle CLP$, као углови са нормалним крацима. Из једнакокраког троугла *CLP* имамо да је $\measuredangle LCP = \frac{\pi}{2} - \frac{\Pi}{2}$, а из правоуглог троугла CLP_1 је $\measuredangle CP_1L = \frac{\Pi}{2}$. Пошто је $\psi_c(P) = P_1$ и $\psi_c(N) = N$ биће $d_H(P,N) = d_H(P_1,N)$. Сада је: $d_H(P_1,N) = \left|\ln\frac{P_1L}{NL}\right| = \left|\ln\frac{P_1L}{CL}\right| = \left|\ln ctg\frac{\Pi}{2}\right| = \ln ctg\frac{\Pi}{2} = -\ln tg\frac{\Pi}{2}$, јер је $\Pi < \pi/2$ па је $tg\frac{\Pi}{2} < 1$. Из претходне једнакости следи $tg(\Pi/2) = e^{-d_H(P,N)}$.□

У апсолутној геометрији (тј. геометрији без V постулата и без његове негације) се може доказати да се свака директна изометријска трансформација равни може представити као композиција две осне рефлексије те равни. Такође се у апсолутној геометрији доказује да је свака индиректна изометријска трансформација равни или осна рефлексија или клизајућа рефлексија. Овде ћемо се концентрицати на директне изометријске трансформације равни. По наведеном тврђењу из апсолутне геометрије имамо да је свака директна изометријска трансформација H-равни облика $M = S_{l_2} \circ S_{l_1} \quad (10)$, где су S_{l_1} и S_{l_2} рефлексије H-равни, тј. ако је l_j полукруг S_{l_j} је еуклидска инверзија ψ_{l_j}, а ако је l_j полуправа S_{l_j} је еуклидска рефлексија S_{l_j}. Раније је изведено да је композиција две инверзије, као и композиција инверзије и рефлексије, као и композиција две рефлексије Мебијусова трансформација $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (11)$. Сада ћемо утврдити какви су коефицијенти Мебијусове трансформације (11) која је задата композицијом (10).

Када је било речи о Мебијусовим трансформацијама изведено је да се инверзија у односу на круг k са центром у $Q(q)$, полупречника R, може записати са $\psi_k(z) = \dfrac{q\bar{z} + R^2 - q^2}{\bar{z} - q}$, такође је изведн општи облик осне рефлексије, нама је овде потребна осна рефлексија у односу на праву l ортогоналну на хоризонт у тачки $L(r)$, $r \in \mathbb{R}$, она се може записати са $S_l(z) = 2r - \bar{z}$. Сада имамо могућности:

1) l_1 је полукруг са центром у $Q_1(q_1)$, $q_1 \in \mathbb{R}$, полупречника R_1 и l_2 је полукруг са центром у $Q_2(q_2)$, $q_2 \in \mathbb{R}$, полупречника R_2, тада је: $a = q_1q_2 + R_2^2 - q_2^2$, $b = q_2(R_1^2 - q_1^2) - q_1(R_2^2 - q_2^2)$, $c = q_1 - q_2$, $d = q_1q_2 + R_1^2 - q_1^2$ и важи $ad - bc = R_1^2R_2^2$;

2) l_1 је полукруг са центром у $Q_1(q_1)$, $q_1 \in \mathbb{R}$, полупречника R_1 и l_2 је полуправа нормална на реалну осу у тачки $L(r)$, $r \in \mathbb{R}$, тада је: $a = 2r - q_1$, $b = -2rq_1 - R_1^2 + q_1^2$, $c = 1$, $d = -q_1$ и важи $ad - bc = R_1^2$;

3) l_1 је полуправа нормална на реалну осу у тачки $L(r)$, $r \in \mathbb{R}$ и l_2 је полукруг са центром у $Q_2(q_2)$, $q_2 \in \mathbb{R}$, полупречника R_2, тада је: $a = q_2$, $b = -2rq_2 - R_2^2 + q_2^2$, $c = 1$, $d = -2r + q_2$ и $ad - bc = R_2^2$;

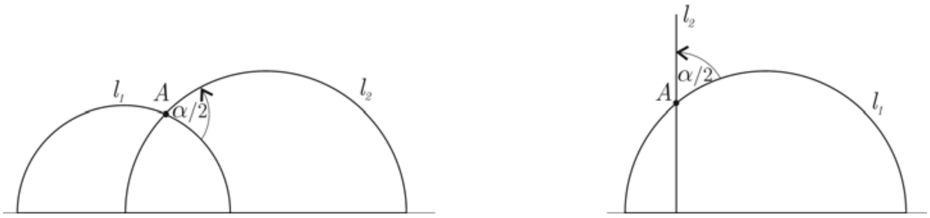
4) l_1 и l_2 су полуправе нормалне на реалну осу у тачкама $L_1(r_1)$ и $L_2(r_2)$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$,тада је: $a = 1, b = 2r_2 - 2r_1, c = 0, d = 1$ и $ad - bc = 1$.

Јасно је да у сва четири случаја имамо $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0 \quad (12)$. У примеру 2 (део билинеарно пресликавање и инверзија), је показано да је општи облик Мебијусове трансформације која слика горњу полураван на себе управо (11) при чему важи (12). Дакле, Мебијусове трансформације које сликају горњу полураван на себе представљају директне изометријске трансформације Поенкареовог модела Хиперболичке равни и облика су (11) при чему важи (12).

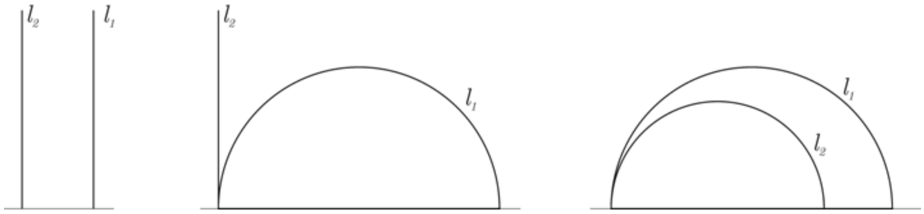
Према томе да ли се H-праве l_1 и l_2 секу, паралелне су или хиперпаралелне, композиција $S_{l_2} \circ S_{l_1}$ се назива ротацијом, орицикличком ротацијом (паралелним померањем) или транслацијом. Из разматрања које је изведено када је било рачи о Мебијусовим трансформацијама имамо да у зависности да ли се кругови (у општем смислу) l_1 и l_2 секу, немају заједничких тачака или се додирују, Мебијусово пресликавање (11) је елиптичко, хиперболичко или параболичко. Дакле ротацијама H-равни одговарају елиптичка Мебијусова пресликавања горње полуравни на саму себе, орицикличким ратацијама H-равни одговарају параболичка Мебијусова пресликавања горње полуравни на саму себе, а транслацијама H-равни одговарају хиперболичка Мебијусова пресликавања горње полуравни на саму себе.

На следећим цртежима виде се могући односи *H*-правих l_1 и l_2 у случају да је $M = S_{l_2} \circ S_{l_1}$

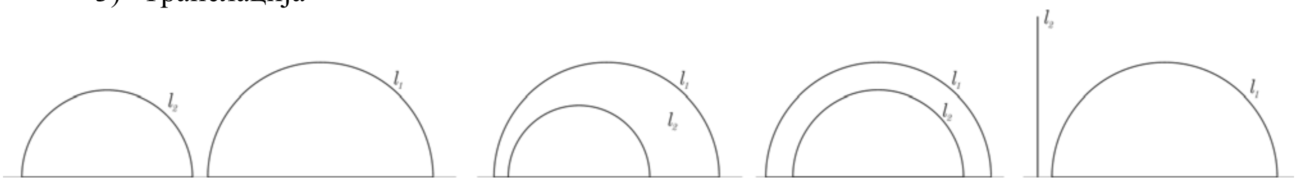
1) Ротација $R_{A,\alpha} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$



2) Орициклична ротација



3) Транслација



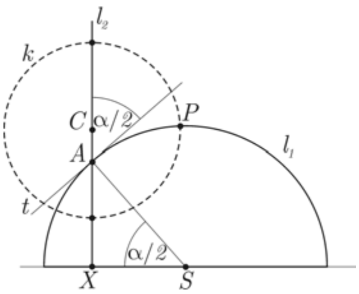
Показаћемо да су (аналогно као у случају еуклидске ротације) *H*-кругови са *H*-центром у центру *H*-ротације инваријантни при тој *H*-ротацији.

H-круг са *H*-центром у $S(a+ib)$ полупречника ρ је скуп тачака P таквих да је $d_H(S,P) = \rho$.

<u>*Пример 1*</u> *H*-круг са *H*-центром у $S(a+ib)$ полупречника ρ је еуклидски круг са центром у $C(a + ib\cosh\rho)$ и полупречником $r = b\sinh\rho$.

Нека је $P(x+iy)$, имамо да је: $d_H(S,P) = \rho \Rightarrow \cosh d_H(S,P) = \cosh\rho$, одакле је $1 + \dfrac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2yb} = \cosh\rho$, па имамо $(x-a)^2 + (y - b\cosh\rho)^2 = b^2\sinh^2\rho$.◊

<u>*Тврђење 4*</u> Нека је $R_{A,\alpha}$ *H*-ротација. Тада је сваки *H*-круг k са центром у A инваријантан при $R_{A,\alpha}$.



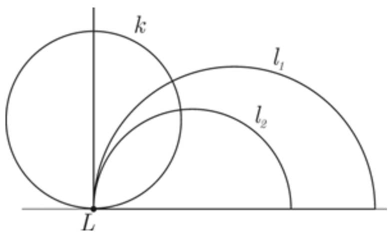
Нека је l_2 полуправа у H која садржи тачку A и ортогонална је на хоризонт у тачки $X(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тада постоји полукруг l_1 који је ортогоналан на хоризонт, садржи тачку A и са полуправом l_2 гради угао $\alpha/2$. Нека је $S(s)$, $s \in \mathbb{R}$, центар тог полукруга, а полупречник нека му је r_1. Нека је $A(x+iy)$ и полупречник *H*-круга k нека је ρ. Тада је k еуклидски круг са центром у $C(x + iy\cosh\rho)$ и полупречником $r = y\sinh\rho$. Пошто је $\measuredangle ASX = \alpha/2$ биће $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AX}{AS} = \dfrac{y}{r_1}$ и $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AX}{SX} = \dfrac{y}{s-x}$. Из троугла CXS имамо:

$$SC^2 = CX^2 + SX^2 = y^2 \cosh^2 \rho + (s-x)^2 = y^2 \cosh^2 \rho + \frac{y^2}{tg^2 \frac{\alpha}{2}} = y^2(1+\sinh^2 \rho) + y^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) =$$

$$= y^2 \sinh^2 \rho + \frac{y^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = r^2 + r_1^2.$$

Одавде закључујемо да су кругови $k(C,r)$ и l_1 ортогонални. Пошто $C \in l_2$, јасно је да је $k(C,r)$ ортогоналан на l_2. Пошто је $R_{A,\alpha} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ (или у еуклидском запису $S_{l_2} \circ \psi_{l_1}$) и круг $k(C,r)$ ортогоналан на l_1 и на l_2, он је инваријантан при инверзији ψ_{l_1} као и при еуклидској рефлексији S_{l_2}, а тиме и при њиховој композицији $R_{A,\alpha}$.□

У случају орицикличке ротације криве које су инваријантне називају се орициклима. У овом моделу орицикли су представљени круговима који додирују хоризонт и правама које су паралелне хоризонту.



Ако је орицикличка ротација представљена композицијом $S_{l_2} \circ S_{l_1}$, при чему је бар једна од H-правих l_j полукруг, тада се l_1 и l_2 додирују у тачки L хоризонта. Свака кружница k која додирује хоризонт у тачки L је ортогонална на l_1 и на l_2. Следи да је k инваријантна при инверзијама ψ_{l_j} (од којих нека може бити и симетрија, али опет је k инваријантна). Дакле, k је инваријантна и у композицији $S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

Слично, ако су l_1 и l_2 паралелне полуправе ортогоналне на хоризонт, права која је (у еуклидском смислу) паралелна хоризонту је ортогонална и на l_1 и на l_2 па тиме и инваријантна при композицији $S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

У случају H-транслације инваријантне криве се називају еквидистантама. Само једна H-права је инваријантна при H-транслацији и то је H-права која је ортогонална на обе H-праве l_1 и l_2 које дефинишу H-транслацију. Ако су Z_1 и Z_2 тачке хоризонта које су симетричне у односу и на l_1 и на l_2 показује се да су еквидистанте представљене кружним луковима који садрже тачке Z_1 и Z_2.

Занимљив пример H-транслације је када су l_1 и l_2 концентричне кружнице, $\psi_{l_2} \circ \psi_{l_1}$ је еуклидска хомотетија али она представља H-транслацију. У овом случају еквидистанте су полуправе са почетком у заједничком центру кружница l_1 и l_2.

Нека је $P(z)$ тачка H-равни. Раније је показано да је са $S_q(P) = P_1$, где је $P_1(z_1)$ и $z_1 = -\overline{z}$ дата рефлексија у односу на праву q која је у координатном почетку ортогонална на хоризонт. Одговарајуће пресликавање у скупу $\mathbb{C}$ ћемо обележити са f, при чему је $f(z) = -\overline{z}$. Јасно је да, пошто је $q \perp h$ (h хоризонт), пресликавање f (тј. S_q) је H-рефлексија, па тиме и индиректна изометријска трансформација H-равни.

Нека је $\widetilde{M}$ произвољна индиректна изометријска трансформација H-равни, тада је $f \circ \widetilde{M}$ директна изометријска трансформација H-равни, а тиме и облика: $\left(f \circ \widetilde{M}\right)(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0$. Одавде имамо да је:

$\widetilde{M}(z) = -\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} = \dfrac{(-a)\overline{z}+(-b)}{c\overline{z}+d} = \dfrac{a_1\overline{z}+b_1}{c_1\overline{z}+d_1}$, при чему је очигледно да $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ и $a_1 d_1 - b_1 c_1 = -ad + bc < 0$. Дакле свака индиректна изометријска трансформација *H*-равни се може претставити у облику $\widetilde{M}(z) = \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc < 0.$ (13)

Одредићемо фиксне тачке пресликавања (13), оне задовољавају $z = \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, тј. $c \cdot |z|^2 + d \cdot z - a\overline{z} - b = 0.$ (14)

Ако претпоставимо да је тражена фиксна тачка реална, биће: $cx^2 + (d-a)x - b = 0.$ (15) Ова квадратна једначина има дискриминанту $D = (d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 + 4(bc - ad)$, пошто коефицијенти од $\widetilde{M}$ задовољавају $a,b,c,d \in \mathbb{R}, bc - ad > 0$, имамо да је $D > 0$, дакле квадратна једначина (15) за $c \neq 0$ има два реална и различита решења. Пошто су та решења истовремено и решења једначине (14) закључујемо да једначина (14) има два реална и различита решења у случају да је $c \neq 0$. Ако је $c=0$, једначина (15) има реално решење $x = \dfrac{b}{d-a}$, за $d \neq a$ (случај $d=a$ је неодржив, јер из $c=0$ и $a=d$ имамо $ad=a^2<0$, што је немогуће јер $a \in \mathbb{R}$), то решење је истовремено и решење од (14).

Нека су r_1 и r_2, при чему $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, решења једначине (14) за $c \neq 0$ и нека су $L_1(r_1)$ и $L_2(r_2)$ тачке хоризонта, док је *l* *H*-права којој су граничне тачке L_1 и L_2. Имамо да је $l \perp h$ у тачки L_1, пошто је $\widetilde{M}$ антиконформно, биће слика праве *l* при пресликавању $\widetilde{M}$ ортогонална на слику праве *h* при пресликавању $\widetilde{M}$. Ако ставимо $\widetilde{M}(l) = l'$, пошто је $\widetilde{M}(h) = h$, биће $l' \perp h$ у тачки која има координату $\widetilde{M}(r_1) = r_1$. Дакле $l' \perp h$ у тачки L_1. Слично закључујемо да је $l' \perp h$ у тачки L_2. Дакле мора бити $l = l'$. Посматрајмо сада композицију $S_l \circ \widetilde{M}$, то је директна изометијска трансформација *H*-равни која има инваријантну *H*-праву *l*. Пошто је *H*-транслација једина директна изометријска трансформација *H*-равни која има фиксну *H*-праву, значи да је $S_l \circ \widetilde{M} = T$, тј. $\widetilde{M} = S_l \circ T$, где је *T* *H*-транслација дуж *H*-праве *l*. Дакле, за $c \neq 0$ $\widetilde{M}$ је *H*-клизајућа рефлексија.

Ако је $c=0$ и $d \neq -a$, нека је *r*, при чему $r \in \mathbb{R}$, решење једначине (14) и $L(r)$, тачка хоризонта, док је *l* *H*-права која је претстављена полуправом која је у тачки *L* нормална на хоризонт. Слично као горе закључујемо да је $\widetilde{M}(l) = l$ одакле следи да је $\widetilde{M}$ је *H*-клизајућа рефлексија дуж праве *l*.

Ако је $c=0$ и $d=-a$, $\widetilde{M}$ је *H*-рефлексија у односу на *H*-праву *l* која је претстављена полуправом која је у тачки $L(r)$, где је $r = -\dfrac{b}{2a}$, нормална на хоризонт. (Ово закључујемо из општег облика еуклидске рефлексије у односу на праву коју је изведен у делу о Мебијусовим трансформацијама.)

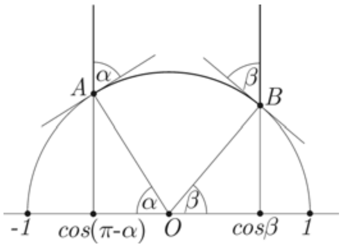
Дакле, доказали смо да су индиректне изометријске трансформације *H*-равни *H*-рефлексије и *H*-клизајуће рефлексије.

Нека су дате три тачке *H*-равни. Спајањем тих тачака *H*-дужима добијамо *H*-троугао. Дозволићемо ситуацију да је једно теме *H*-троугла тачка у бесконачности, тј да су две његове странице *H*-полуправе које су паралелне. Такав троугао се назива асимптотским.

Тврђење 5 Нека је ABC асимптотски H-троугао такав да је теме C тачка у бесконачности. Ако су α и β његови углови код (коначних) темена A и B, тада је површина тог троугла $S_H(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta.$ (16)

Пошто из H-метрике следи да је H-елемент дужине дат са $d\hat{s} = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{ds}{y}$, при чему је $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, имамо да је H-елемент површине дат да $d\hat{S} = \frac{dxdy}{(\operatorname{Im} z)^2} = \frac{dxdy}{y^2}$.

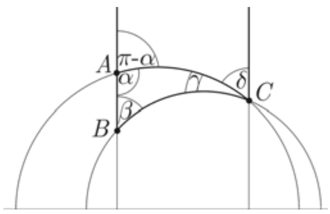
Без губљења општости можемо претпоставити да је коначна страница асимптотског троугла на јединичној кружници и да су бесконачне странице полуправе нормалне на хоризонт. Ако је теме C тачка хоризонта, инверзија у односу на круг k са центром у C, произвољног полупречника (а то је H-рефлексија) пресликаће бесконачне странице у полуправе нормалне на хоризонт.



Ако је центар полукруга који репрезентује коначну страницу тачка $X(x)$ орициклична ротација (записана као компкексна функција $f(z)=z-x$) ће пресликати тај полукруг у полукруг са центром у $O(0)$. Ако је r полупречник добијеног полукруга H-транслација (записана као комплексна функција са $g(z)=z/r$) ће пресликати тај полукруг у јединични. Сада имамо ситуацију као на слици, па је:

$$S_H(\triangle ABC) = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta\ .\square$$

Последица Површина H-троугла ABC чији су углови α, β, γ је дата са $S_H(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$ (17)



H-ротацијом око једног темена H-троугао ABC можемо довести у положај да му једна страница припада полуправој која је нормална на хоризонт, нека је то страница AB. Применом формуле (16) на асимптотске троуглове са теменима $AC\infty$ и $BC\infty$ имамо:

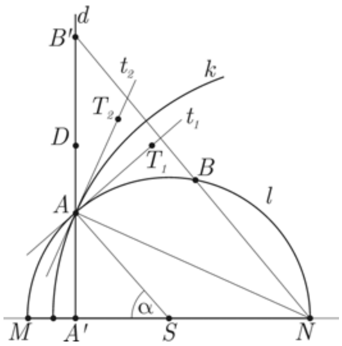
$$S_H(\triangle ABC) = S_H(\triangle BC\infty) - S_H(\triangle AC\infty) = \pi - \big(\beta + (\gamma + \delta)\big) - \big(\pi - \big((\pi - \alpha) + \delta\big)\big) =$$
$$= \pi - (\alpha + \beta + \gamma).\square$$

Дакле, имамо да је површина H-троугла увек мања од π, али је и збир углова H-троугла увек мањи од π.

Осим описаног модела хиперболичке равни постији још неколико модела те равни. Поенкареов диск-модел хиперболичке равни је један од чешће коришћених модела и он се такође може интерпретирати као подскуп комплексне равни са специфичном метриком. Испоставља се да су модел хиперболичке равни на полуравни и диск-модел међусобно изоморфни. За директне изометријске трансформације диск-модела важи аналоган резултат као у полураванском моделу: општа Мебијусова пресликавања која сликају јединични диск на самог себе представљају директне изометријске трансформације диск-модела хиперболичке равни. Та пресликавања су облика $M(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, при чему је $|a| > |b|$.

Аналогно полураванском моделу хиперболичке равни може се правити полупросторни модел хиперболичког простора, за чији хоризонт можемо узети $\mathbb{C}$ раван. Да су директне изометријске трансформације H-простора у таквом моделу општа Мебијусова пресликавања $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ доказао је Поенкаре 1883. године.

<u>*Пример*</u> Ако су $A(a)$ и $B(b)$ две тачке H-равни такве да H-права l која их садржи је еуклидски полукруг који сече хоризонт у тачкама $M(m)$ и $N(n)$, при чему је распоред на кружници l M-A-B-N, доказати да се H-растојање између њих може изразити са $d_H(A,B)=\left|\ln D(A,N,B,M)\right|$.



Нека је $k=k(N,NA)$ кружница са центром у тачки N полупречника NA. Нека је t_1 тангента на кружницу l у тачки A и t_2 тангента на кружницу k у тачки A. Ако $T_1\in t_1$ и $T_2\in t_2$ биће $\measuredangle T_1AT_2=\measuredangle SAN$ (као углови са нормалним крацима). Нека је d полуправа која садржи тачку A и нормална је на хоризонт у тачки A'. Ако је тачка $D\in d$ таква да је A'-A-D, биће $\measuredangle DAT_1=\measuredangle ASA'=\alpha$ (углови са нормалним крацима). Пошто је $\measuredangle ANA'=\alpha/2$, биће $\measuredangle T_1AT_2=\alpha/2$, а тиме и $\measuredangle T_2AD=\alpha/2$.

Посматрајмо H-ротацију $R_{A,\alpha}=S_k\circ S_l$ (што је у еуклидском запису $\psi_k\circ\psi_l$). Имамо да је $\psi_k(l)=p$ права која је нормална на хоризонт, пошто је $A\in l$ и $\psi_k(A)=A$ имамо да $A\in p$ и p је нормална на хоризонт, дакле $p=d$, тј. $\psi_k(l)=d$. Због тога је $\psi_k(M)=A'$ и $\psi_k(B)=B'$, где је $B'(b')$ пресек праве NB и праве d. Јасно је да је $\psi_k(N)=\infty$. Зато имамо $(\psi_k\circ\psi_l)(M)=A'$, $(\psi_k\circ\psi_l)(N)=\infty$, $(\psi_k\circ\psi_l)(A)=A$, $(\psi_k\circ\psi_l)(B)=B'$, па је $d_H(A,B)=d_H(A,B')=\ln\dfrac{\operatorname{Im} b'}{\operatorname{Im} a}$. Пошто је $D(A,N,B,M)=D(A,\infty,B',A')=\dfrac{b'-\infty}{a-\infty}\cdot\dfrac{a-a'}{b'-a'}=\dfrac{a-a'}{b'-a'}=\dfrac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Im} b'}$, јер Мебијусово пресликавање чува двоспразмеру, а $\psi_k\circ\psi_l$ је Мебијусово пресликавање, имамо да је:

$$d_H(A,B)=\frac{1}{D(A,N,B,M)}=\left|\ln D(A,N,B,M)\right|.\Diamond$$

Литература

1. Andreescu T., Andrica D., *Complex Numbers from A to...Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.
2. Needham T., *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford University Press Inc., New York, 1997.
3. Coxeter H.S.M., Greitzer S.L., *Geometry Revisited*, Random House, New York, 1967.
4. Toth G., *Glimpses of Algebra and Geometry, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 2002.
5. Яглом И.М., *Комплексные числа и их применение в геометрии*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.
6. Матељевић М., *Комплексне функције 1 и 2*, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.
7. Краљевић Х., Курепа С., *Математичка анализа (функција комплексне варијабле) 4/I*, Техничка књига, Загреб, 1986.
8. Митриновић Д.С., *Комплексна анализа*, Грађевинска књига, Београд, 1981.
9. Лопандић Д., *Геометрија за III разред усмереног образовања*, Научна књига, Београд, 1988.
10. Тошић Р., Петровић В., *Збирка задатака из основа геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1985.
11. Лучић З., *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Математички факултет, Београд, 1997.
12. Прасолов В.В., *Задачи по планиметрии, част I*, Наука, Москва, 1963.
13. Прасолов В.В., *Задачи по планиметрии, част II*, Наука, Москва, 1963.
14. Engel A., *Problem – Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.
15. Larson L.C., *Problem – Solving Through Problems*, Springer-Verlag, New York, 1983.
16. Карамата Ј., *Комплексан број са применом на елементарну геометрију*, Научна књига, Београд, 1950.