UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

O PRISTUPU NASTAVI GEOMETRIJE

MASTER RAD

SMER: PROFESOR MATEMATIKE I RAČUNARSTVA

STUDENT: SNEŽANA RAJŠIĆ

MENTOR: prof. dr NEDA BOKAN

Predgovor

Kako i sam naslov kaže u ovom radu se bavim pristupom nastavi geometrije.

Prvo poglavlje je uvod.
U drugom poglavlju dajem kratak pregled pedagogije o uopštenom radu aktivnog učenja i metodom demonstracije.
Potom prirodno nastavljam razmatranje nastave geometrije u osnovnoj školi u trećem poglavlju, kao i kratak osvrt na različita gledišta nastave geometrije.
Četvrto poglavlje uključuje primedbe o mogućoj ulozi geometrije vezane za opšte obrazovanje đaka.
Poglavlja od petog do osmog obuhvataju neke teme iz geometrije za peti, šesti, sedmi i osmi razred osnovne škole. U svakom se poglavlju bavim isključivo geometrijom, zanimljivim primerima kako iz života tako i iz škole, teoremama i slično.
U pripremi teksta pored LaTeX-a koristila sam software WinGCLC za izradu crteža, zato sam poglavlje devet posvetila predstavljanju ovog software-a, da bi istakla njegove mogućnosti i specifičnosti ne samo za izradu crteža nego i u nastavi, a i šire.
Poslednje poglavlje sačinjava deset zapovesti nastavnicima, mnogo mi se sviđaju i smatram da im je tu pravo mesto.

Ovim radom želim izraziti veliku zahvalnost ljudima koji su mi omogućili da se on ostvari. To su na prvom mestu moji roditelji Ljubica i Joca Nestorović koji su mi pružili moralnu i financijsku podršku, kao i mom suprugu Panteliji Rajšiću i sestri Olgici Nestorović Jelači koji su me podržavali da što efektivnije radim.
Naravno, posebna zahvalnost odnosi se i na mog mentora prof. dr Nedu Bokan sa kojom sam imala odličnu saradnju u svakom trenu.
Sreća se zove to što takve ljude imam oko sebe!

O PRISTUPU NASTAVI GEOMETRIJE

Snežana Rajšić

22.11.2009.

Sadržaj

1 Uvod **3**

2 Šta pedagogija kaže o aktivnom učenju i učenju metodom demonstracije **6**

3 Geometrija u školi **8**

4 Primedbe o mogućoj ulozi geometrije u opštem obrazovanju đaka **10**

5 Geometrija: Peti razred **12**
- 5.1 Osnovni geometrijski objekti 12
  - 5.1.1 Tačka, prava, ravan 12
  - 5.1.2 Krug 14
- 5.2 Ugao 14

6 Geometrija: Šesti razred **15**
- 6.1 Trougao 15
- 6.2 Četvorougao 18
- 6.3 Površina trougla i četvorougla 19

7 Geometrija: Sedmi razred **21**
- 7.1 Pitagorina teorema 21
- 7.2 Krug 23
- 7.3 Mnogougao 25
- 7.4 Grafik funkcije 32
- 7.5 Sličnost 32

8 Geometrija: Osmi razred **35**
- 8.1 Tačka, prava i ravan 35
- 8.2 Prizma 35
- 8.3 Piramida 39
- 8.4 Valjak 41
- 8.5 Kupa 41
- 8.6 Lopta 41

9 WinGCLC **42**

10 Deset zapovesti nastavnicima **44**

11 Zaključak **45**

Poglavlje 1

Uvod

"Nastava matematike nije nauka.
Ona je umetnost."
Đerd Poja- "Matematičko otkriće"´

U poslednjih desetak godina u mnogim zemljama sveta ponovo se javlja mišljenje da nastava matematike treba da ukazuje i na primene matematičkog znanja u modeliranju našeg okruženja.

Osnovne etape koje možemo razlikovati u razvoju geometrije su: dogrčka, grčka i savremena [6]. Nazive etapa shvatamo uslovno jer one nisu vezane za hronološke granice, već definisane metodologijom geometrije, načinima dokazivanja i sistematizacije materijala koji se primenjuju na svakoj od etapa.

- U dogrčkoj etapi geometrija je bila empirijska nauka. Mnogobrojne geometrijske činjenice koje su milenijumima pre našeg vremena poznavali stari Egipćani, Vavilonci, Indusi, Kinezi i drugi narodi, dobijene su kao rezultat posmatranja, iskustva, eksperimenta. Praktične metode koje su u toj etapi bile korišćene i danas fasciniraju svojom originalnošću i oštroumnošću. Kao primer možemo izdvojiti slikoviti dokaz Pitagorine teoreme.

- Početkom šestog veka pre naše ere Grci su upoznali geometriju Egipćana i tokom nekoliko vekova razvili je do visokog stepena savršenstva. U Staroj Grčkoj se odigrao postepeni prelaz od praktične ka teorijskoj geometriji. U tom periodu su otkrivene mnoge geometrijske činjenice, ali što je najvažnije, razrađene su savršene logičke metode i sav geometrijski materijal doveden u skladan sistem, koji je opisao Euklid u svojim "Elementima". Metodološko savršenstvo "Elemenata" je tako veliko da su oni tokom dva milenijuma vršili ogroman uticaj na razvoj geometrije i bili udžbenik geometrije praktično istovremeno u celom svetu.

- Početak savremene etape razvoja geometrije vezan je za razradu aksiomatske metode. Sa savremenog gledišta, u osnovi geometrije leži struktura prostora koju određuje neki sistem aksioma. Savremena geometrija daje mogućnost da se razmatraju modeli ne samo fizičkog prostora, već prostora bilo koje strukture, čiji se pojmovi i svojstva uklapaju u geometrijsku šemu.

Geometrijsko znanje je široko primenljivo na modeliranje realnosti. Ono se koristi pri razmatranju pomračenja preko krugova, refleksija preko elipse i parabole, radio talasa preko hiperbole i parketiranja preko poligona. Koristi se i u dizajniranju brisača stakla automobila i razmatranju vodosnadbevanja iz lokalnog jezera ...

Geometrija doprinosi rešavanju mnogih problema svakodnevnog života kao što su pakovanje, oglašavanje, izgradnja mostova, tunela, zgrada i sportskih terana, izrada mapa gradova i saobraćajnih puteva, itd.

Kako se bavim nastavom u osnovnoj školi moji primeri korišćenja geometrije su u skladu sa tim znanjem stečenim u osnovnoj školi.

Cilj ovog rada je da u što većoj meri u budućnosti mog rada sa decom saznam, smislim i prenesem znanje matematike, a da pritom od teškog predmeta napravim zanimljiv predmet.

Nije tajna da veliki broj učenika ne zna, a ni ne želi da zna matematiku, pa sam ja izabrala meni najzanimljiviji deo matematike tj. geometriju da pokušam preneti na stvaran život i time deci u osnovnoj školi približiti matematiku kao korisnu nauku.

"Ako se već toliko zaklinjemo
da nam je od svega važnije
aktivno učešće dece u nastavi,
ako nam je zaista iskrena ta naša želja
da deca misle,
da više razumevaju, a manje pamte,
moramo tražiti konkretne i efikasne načine
da decu pokrenemo,
zainteresujemo i aktiviramo."
Duško Radović - "Na ostrvu pisaćeg stola"

Poglavlje 2

Šta pedagogija kaže o aktivnom učenju i učenju metodom demonstracije

Pozivajući se na prethodnu misao Duška Radovića da se prisetimo šta je to aktivna nastava. *Aktivna nastava* je originalna pedagoška tvorevina koja počiva na teorijskim postavkama i praktičnim pokušajima transformacije tradicionalne škole u aktivnu školu tj. školu u kojoj i učenik i nastavnik imaju aktivnu ulogu.

Razmišljanja o aktivnom učenju potiču u poslednje vreme iz proučavanja kojim se bavi Pijaže.

Mišljenje kod osnovno školaca je povezano sa konkretnim predstavama (neposredno opažanje ili prethodno iskustvo). Na osnovu konkretnih operacija, učenik je u stanju da uspostavi osnovne matematičke pojmove: količina, broj, dužina, sabiranje, odnos "manje od"...

Pijažeov iskaz [11] za aktivnu nastavu ima apsolutno programsko značenje: "U jednoj reči bazično načelo aktivnih metoda, treba da se inspiriše istorijom nauka i može se iskazati na sledeći način: razumeti nešto znači samostalno ga otkriti ili izvršiti rekonstrukciju putem ponovnog otkrića i treba se pridržavati tog načela ako u budućnosti hoćemo da oblikujemo ljude koji će biti sposobni da produkuju i kreiraju, a ne samo da ponavljaju ono što već postoji."

Aktivna škola je usmerena na mladog čoveka, koji se tretira kao celovita ličnost čije intelektualne potencijale treba što više angažovati u nastavnom procesu.

Spomenimo ovde kako pedagogija gleda na realizovanje praktične primene i ta metoda se uopšteno zove *metoda demonstracije*.

To je oblik interaktivnog učenja i naravno tu je aktivnost nastavnika veoma značajna, jer je on taj koji modelira razgovor, ustvari planira interakciju i tok časa, pri čemu se naravno spontanost podrazumeva, priprema materijale za rad i ostala didaktička sredstva, stvara problemske situacije, trudi se da predoči učenicima što više pozitivnih modela itd.

Metod demonstracije podrazumeva prikazivanje praktičnih radnji kojima treba ovladiti do nivoa samostalne primene. Ovaj metod obuhvata sve one oblike učenja u kojima je izvesna aktivnost praktična, ali je takođe neophodno razumevanje smisla praktičnih radnji.

U ovu metodu spada obuka za korišćenje računara, tehnike crtanja i slikanja, sviranja muzičkih instrumenata itd.

Aktivnosti učenika su usmerene na razumevanje smisla praktičnih radnji koje se uče, praktično izvođenje itd.

Ovom metodom učenici uče kako se nešto radi, naspram znanja koje predstavlja skup određenih sistematizovanih informacija.

I naravno u nastavi matematike ova metoda se najčesce koristi kod realizacije geometrijskih sadržaja, naročito kod konstruktivnih sadržaja, terenskih merenja, prikaza praktične primene teorijskih znanja (merenje površine zemljišta, merenje visine objekta pomoću sličnosti korišćenjem senke, itd.)

Poglavlje 3

Geometrija u školi

Opšte je poznata činjenica da većina učenika nema interes za geometriju, a znanje ovog predmeta se nalazi na nedopustivo niskom nivou. O tome govore i nastavnici, i profesori fakulteta, i roditelji, i sami učenici.

Nije tajna da se geometrijski razvoj može smatrati najvažnijim faktorom koji omogućuje spremnost čoveka za permanentno obrazovanje i samoobrazovanje u najrazličitijim oblastima ljudske delatnosti.

U nastavi geometrije moramo kod učenika uporno da težimo razvoju intuicije, prostornog i logičkog mišljenja i formiranju njihovih konstruktivno - geometrijskih umeća i navika.

Nastava geometrije je značajna sa različitih gledišta [6]:

1. logičkog - izučavanje geometrije je izvor i sredstvo aktivnog intelektualnog razvoja čoveka i njegovih umnih sposobnosti;

2. saznajnog - pomoću geometrije dete spoznaje svet koji ga okružuje, njegove prostorne i količinske odnose;

3. primenjenog - trodimenziona euklidska geometrija je ona osnova koja obezbeđuje čovekovu spremnost za savladavanje kako bliskih oblasti tako i mnogih profesija, čini mu dostupnim neprekidno obrazovanje i samoobrazovanje;

4. istorijskog - na primerima iz istorije razvoja geometrije prati se ne samo razvoj matematike već i ljudske kulture u celini;

5. filozofskog - geometrija pomaže da se osmisli svet u kome živimo, da se kod čoveka formiraju razvojne naučne predstave o realnom fizičkom prostoru.

Suština je da učenik u procesu učenja geometrije i tokom svog geometrijskog razvoja mora proći u kondenzovanom obliku osnovne etape razvoja geometrijske nauke, ne preskačući pri tome ni jednu od njih.

Slikovita geometrija treba da se uči u osnovnoj školi i tu je osnovni cilj obogaćenje osnovnih geometrijskih predstava učenika, upoznavanje sa maksimalno bogatim skupom geometrijskih figura (kako ravnih tako i prostornih), usvajanje osnovne geometrijske terminologije, sticanje umeća i navika u predstavljanju (crtanju) geometrijskih figura.

Osnovne nastavne delatnosti u ovoj etapi su posmatranje i pravljenje (crtanje) dvodimenzionih i trodimenzionih geometrijskih figura od papira, kartona, plastelina; jednostavni geometrijski eksperimenti kojima se utvrđuju elementarna svojstva figura (jednakost, razloživa jednakost, jednake veličine, simetričnost; merenje; modeliranje).

Poglavlje 4

Primedbe o mogućoj ulozi geometrije u opštem obrazovanju đaka

Judita Cofman [4] je objavila sledeće primebe o ulozi geometrije u opštem obrazovanju đaka.

Sledeće primedbe zasnovane su na njenim iskustvima u radu sa učenicima.

1. Primedba

   U savremenoj nastavi, kada je školski program prenatrpan detaljima iz raznovrsnih oblasti matematike, postoji opasnost da se učenje matematike svede na pamćenje činjenica i mehaničko usvajanje algoritama.

   Nasuprot ovoj pojavi, treba nastojati da učenici shvate postojeće veze fenomenima koje susreću na pojedinim područjima matematičke nastave.

   U okviru ovakvih nastojanja, geometrija može da igra izvrsnu ulogu, jer matematičke discipline koje se predaju obiluju detaljima za koje postoje geometrijske ilustracije dostupne uzrastu učenika.

   Primena ovakvih ilustracija, s jedne strane olakšava proces razumevanja ukupnog nastavnog gradiva, a s druge strane skreću pažnju na to da je geometrija nauka od aktuelne važnosti.

2. Primedba

   Važnost euklidske geometrije u nastavi potkrepljuje činjenica da se geometrijskim oblicima iz ove geometrije susrećemo u sredini u kojoj živimo.

   Naročito izučavanje stereometrije potpomaže izučavanje prostora; nažalost nastava stereometrije se često zanemaruje.

   Većina đaka od najranijih godina poseduje niz osnovnih znanja o telima, kao što su na primer kocka ili lopta.

   Ta se početna znanja dobro mogu koristiti pri uvođenju pojmova kao što su: definisani i nedefinisani elementi, aksiome i teoreme, potrebni i dovoljni uslovi i slično.

Svi ti pojmovi su važni za sve oblasti matematike - a familijarnost s prostorom može poslužiti za to da đaci pomoću konkretnih primera shvate njihovu suštinu.

3. Primedba

   Matematika je jedna od najstarijih naučnih disciplina, važan deo kulturnog nasleđa čoveka.

   Ta činjenica se mora odražavati na tok matematičke nastave: poželjno je pri obradi raznih matematičkih tema skrenuti pažnju učenika, kad god se za to ukaže prilika, na njihovu istorijsku pozadinu.

   Istorija geometrije čini važan deo istorije matematike, i to ne zato što je geometrija jedna od najstarijih grana matematike.

   Važnost geometrije potiče mahom iz razloga da je u ovoj oblasti, počev od grčkog antičkog doba, bilo nekoliko krupnih problema, koji su se tek u XIX veku mogli rešiti.

   Tokom vekova mnogo se tragalo za rešenjima ovih problema; pokušaji da se problemi reše doveli su do niza novih otkrića i doprineli su daljem razvoju čitave matematike.

   Među čuvenim problemima geometrije je tzv. Delski problem udvostručenja kocke.

4. Primedba

   Nastava geomerije može da igra korisnu ulogu i u ilustraciji dostignuća u najmodernijim oblastima matematike.

5. Primedba

   Stečena znanja iz nastave geometrije mogu doprineti boljem razumevanju fenomena iz raznih oblasti prirodnih nauka.

Poglavlje 5

Geometrija: Peti razred

U osnovnoj školi nove pojmove bi trebalo objašnjavati uočavanjem njima sličnih objekata u okruženju (ako je to moguće), zatim im dodeliti nazive i navoditi primere objekata te vrste. Tako je i u životu pa je najprirodnije za đake da nastave i u školi tako razmišljati.

Nakon pojmova, uvode se simboli za te pojmove i kratak dogovor da se tih simbola treba pridržavati.

Program geometije petog razreda obuhvata osnovne geometrijske objekte i krug.

5.1 Osnovni geometrijski objekti

Nastavu geometrije petog razreda treba početi istorijskim nastankom geometrije i ispričati kako je nastala reč geometrija.

Reč geometrija nastala je od grčkih reči gea (zemlja) i metrein (meriti) i te reči opisuju način na koji su ljudi praktično primenili geometriju prvi put. Ta priča trebalo bi da deci bude zanimljiva i dovoljno lepa, da je i zapamte a i uvide njeno dugo značenje za ljude i okolinu.

U Egiptu, reka Nil je plavila obale, i tu se geometrija koristila da bi se kada se voda povuče premerile međe njiva, polja i konstruisale građevine.

Takođe bi im trebalo napomenuti da mnoga velika dostignuća iz raznih oblasti kao što je umetnost, tehnika, nauka itd. ne bi bila ostvarena bez geometrije.

Početno i osnovno znanje iz geometrije koje sledi bi trebalo da pomogne učenicima i u orijentaciji u prostoru ako im se povežu informacije iz udžbenika sa onim koje oni sami znaju vezano za svoje mesto stanovanja, njihovu kuću, stan i slično.

5.1.1 Tačka, prava, ravan

Do ovog nivoa znanja trebalo je da se učenici već upoznaju sa pojmom tačke, prave i ravni. Uglavnom u tom prepoznavanju već znanih pojmova greše u tome što kada nacrtaju model prave ne shvataju da ustvari crtaju samo jedan njen deo, slično važi i za polupravu, ugao, ravan i poluravan.

U ovom delu učenja geometrije treba insistirati na korišćenju šestara, ali naravno i alternativno merenje dužine duži.

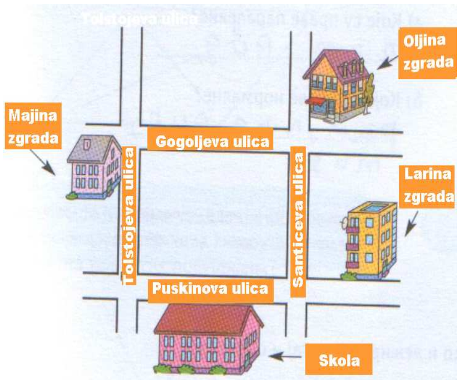
Takođe treba insistirati i na preciznosti i dobrom definisanju pojmova, ne u smislu učenja definicija napamet nego kompletnom razumevanju osnovnih pojmova, da bi lakše usvojili pojmove koje proučavaju u sledećim razredima.

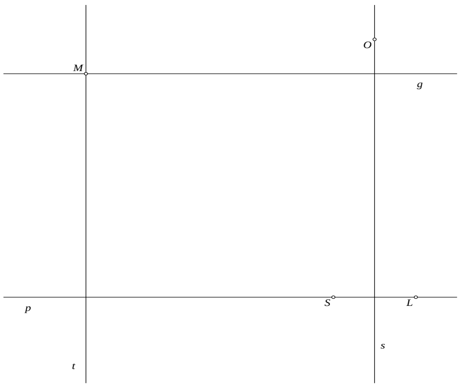
Primere koje koristimo u životu vezano za ovo gradivo možemo naći svuda oko nas, počev od učionice povezujući tačke sa uglovima učionice i sve ostalo što u tom momentu i sami učenici mogu da povežu sa gradivom i u tim trenucima ih pomno slušati i ukazivati na greške koje kažu.

Uglavnom se ovaj deo gradiva dobro savlada.

Navedimo zadatak iz udžbenika za peti razred [12]:

Maja, Olja i Lara idu u istu školu. Na mapi grada označene su zgrade u kojima stanuju i škola u koju idu. Ako se ulice na mapi predstave pravim linijama, a zgrade tačkama, dobija se sledeći crtež.





Potom se traži da se popune sledeće tabele:

tačka	zgrada
M	Majina
O	
L	
S	

prava	ulica
	Tolstojeva
	Šantićeva
	Puškinova
	Gogoljeva

U tom zadatku se na praktičan način uočava kako tačke pripadaju pravima ili kako ne pripadaju, kako se prave seku i u kojim tačkama. Samim zadatkom nastavnik bi mogao sam da napravi malu skicu škole u kojoj radi kao i okolnih ulica i možda i učeničkih kuća i da na njihovom ličnom primeru što bolje razumeju osobine koje se uče.

Prethodni primer iz okoline škole može se primeniti i pri upoznavanju izlomljene linije, možda i bolje nego primer iz knjige ako se u okolini škole nalazi lep primer za to, a da je tim učenicima poznat. Možda baš nešto što mogu povezati sa svojim putem od kuće do škole, i nazad.

5.1.2 Krug

Prvo što treba uvesti kao novi pojam jeste dužina duži. Naravno, kada se duž spominje uvek treba naglasiti razliku između prave i duži.

Ovde treba zahtevati na dopunjavanju znanja o paralelnim i normalnim pravama. Veoma je važno da učenici savladaju veštinu crtanja paralelnih i normalnih pravih korišćenjem dva trougla.

Krug je uglavnom zanimljiv učenicima i lepo ga savladaju, zbog toga je bitno da dobro savladaju izraze kao što su kružni luk, prečnik, poluprečnik, centar, tetiva i tangenta.

5.2 Ugao

Što se ugla tiče, sami geometrijski objekti, u smislu prave, poluprave i ravni i nejasnoća vezana za ugao su isti.

Ugao je za njih matematički pojam koji ponekad povezuju sa primerima iz okruženja, ali kada se zadaci rade zaborave na postojanje tih primera i nemaju osećaj za određivanje mesta ugla u okruženju, a samim tim i u ravni tj. na papiru.

Mislim da je od veće važnosti da svi savladaju onaj nivo pojmova koji zahteva da se određeni ugao u svakom momentu može slobodnom rukom nacrtati.

Sa pojedinim đacima šestog razreda imala sam problema da kada pri konstruisanju zbira dva ugla ili deljenju ugla na dva jednaka, nemaju osećaj da su pogrešili, pa samim tim se uočava da nisu razumeli kako bi dati zadatak i trebalo rešiti.

Taj problem bi se u većem delu mogao rešiti ako bi se stalno insistiralo na odnosu nekog ugla sa pravim uglom ili opruženim, s obzirom da su to najčešći uglovi koje srećemo u našoj okolini.

Takođe treba biti uporan i u crtanju uglova što dovodi do preciznosti uopšte daljeg crtanja u geometriji.

Na primer, ako se jednom razredu zada da konstruišu ugao od $135°$ ima učenika koji ne znajući da to nacrtaju pogreše tako što nacrtaju neki ugao manji od $90°$, što odmah ukazuje na to da ne znaju kako izgleda ugao od $90°$, što je nedopustivo.

Poglavlje 6

Geometrija: Šesti razred

Program geometrije šestog razreda obuhvata trougao, četvorougao, površine trougla i četvorouglova.

Ovde se vrlo lako uočava koliko je važno da su učenici dobro savladali gradivo petog razreda. Ono što bih istakla vezano za ovaj deo gradiva jeste dobro upoznavanje sa vrstama proučavanih četvorouglova i njihovih imena, jer se dešava da učenici u osmom razredu to ne znaju, a razlog tome je što su ovaj deo najverovatnije prebrzo prešli i tu po meni suštinu nisu dobro savladali.

Akcenat treba staviti na samo značenje primene onoga što je najbitnije, pa u zavisnosti od sposobnosti učenika po naosob zahtevati i određene sitnice. Ne sme se dozvoliti da učenik ne savlada ono što bi mu trebalo u daljem životu.

6.1 Trougao

Judita Cofman [2] je uoči prilaza temi o uvođenju pojma trougla često zadavala đacima kao zadatak da joj objasne šta podrazumevaju pod trouglom. Da bi individualna mišljenja svih đaka u razredu došla do izražaja, odgovori na postavljeni zadatak morali su da se daju spontano, na času i to pismeno, da jedni drugima ne smetaju svojim mišljenjima. Posle toga su svi đaci pročitali svoje odgovore, a nakon toga je usledila detaljna diskusija. Tom prilikom su đaci bili pozvani da koriguju odgovore: iz nekih je trebalo odstraniti nepotrebne detalje, druge odgovore je trebalo dopuniti da bi postali dovoljni za karakterizaciju pojma trougla. Na taj način se kod đaka postepeno stvarao utisak o tome šta se podrazumeva pod matematičkom definicijom.

Ovo je dobar primer pristupu temi trougla posle čega sledi uvođenje novih pojmova podrazumevajući da svi imaju dobru sliku trougla.

Samu činjenicu da je zbir uglova trougla 180° učenici gotovo od prve prihvate i upamte, pa po mom mišljenju ne treba insistirati na dokazivanju, naravno da treba pokazati dokaz, ali ne i pitati za ocenu.

Obavezno treba ponoviti opružen ugao i na osnovu njega lako izvoditi formule za zbir unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla trougla.

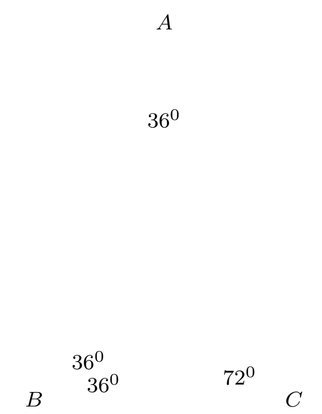
Ovde je od izuzetne važnosti da se vrste trouglova i njihov izgled trajno nauče. U suštini oni bi to već i trebalo da znaju, ali bih prioritet stavila na to da sami, dođu do imena tih trouglova i u tim momentima ih usmeravala ka tačnim imenima svakog od njih.

Kada učenici sami dođu do imena različitih tipova trouglova onda mogu da rešavaju i složenije zadatke.

Primera radi navodimo sledeći zadatak, koji je veoma zanimljiv i veoma sličan zadatak sve učenike čeka u zbirci za prijemni ispit za srednju školu, s tim da je ovde malo drugačiji pristup tom zadatku.

Zadatak glasi:

Trougao čiji su uglovi $36°$, $72°$ i $72°$ je jednakokraki, moguće je podeliti na dva trougla, pri čemu je svaki od njih jednakokraki. Naći sve mogućnosti jednakokrakog trougla koji se može podeliti na dva jednakokraka trougla.



Rešenje:

Neka je trougao ABC jednakokraki trougao čiji su uglovi kod temena B i C jednaki. Pretpostavimo da trougao ABC presečemo pravom l na dva jednakokraka trougla. Ovde imamo sledeće diskusije:

1. l deli jedan od dva podudarna ugla, na primer ugao kod temena B,
2. l deli ugao kod temena A.

Slučaj 1. Obeležimo uglove trougla ABC sa α, β, γ redom kod temena A, B i C. Obeležimo sa D tačku gde prava l seče stranicu AC, i označimo sledeće uglove ovako:

$\angle ABD = x$, $\angle ADB = x'$, $\angle DBC = y$, $\angle BDC = y'$.

Pošto trouglovi ABC i DBC moraju biti jednakokraki imamo sledećih devet slučaja:

1. α=x i y=γ,
2. α=x i y=y',

3. α=x i y'=γ,
4. α=x' i y=γ,
5. α=x' i y=y',
6. α=x' i y'=γ,
7. x=x' i y=γ,
8. x=x' i y=y',
9. x=x' i y'=γ.

Sedam od tih slučaja su nemogući. 7., 8. i 9. su nemogući zbog toga što je $x' > \gamma = \beta > x$.

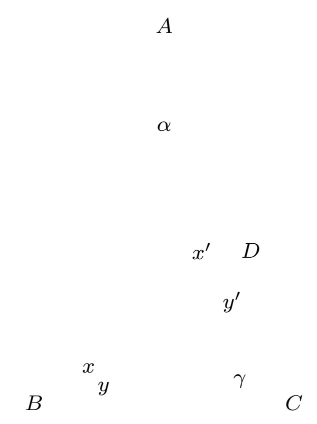
1. i 4. takođe su nemogući jer je $y < \beta = \gamma$,

6. je nemoguće zbog toga što je $x' + y' = 180°$, a znamo i da je $\alpha + \gamma < 180°$. 5. je nemoguće jer je $x' + y' < 180°$.

U preostala dva slučaja uzimajući u obzir da je zbir uglova u trouglu jednak 180°, uglovi trougla ABC se mogu lako izračunati:

U 2. slučaju je $\alpha = \frac{180°}{7}$, $\beta = \gamma = \frac{540°}{7}$.

U 3. slučaju je α=36°, β=γ=72°.



Slučaj 2.

Prava l seče stranicu BC u tački E. Označimo uglove trougla ABC sa α, β i γ redom kod temena A, B i C i označimo sa $u = \angle BAE$, $v = \angle EAC$, $u' = \angle BEA$ i $v' = \angle AEC$. Opet postoji devet slučaja. Lako je odrediti da jedino sledeći slučaji dolaze u obzir:

1. u=β i v=γ, što znači da je α=90°, β=γ=45°;

2. $u=\beta$ i $v=v'$ odakle je $\alpha=108°$, $\beta=\gamma=36°$;

3. $v=\gamma$ i $u=u'$, i ovaj slučaj je simetričan 2. slučaju i tu je $\alpha=108°$, $\beta=\gamma=36°$.

A

α

u v

β u' v' γ

B E C

6.2 Četvorougao

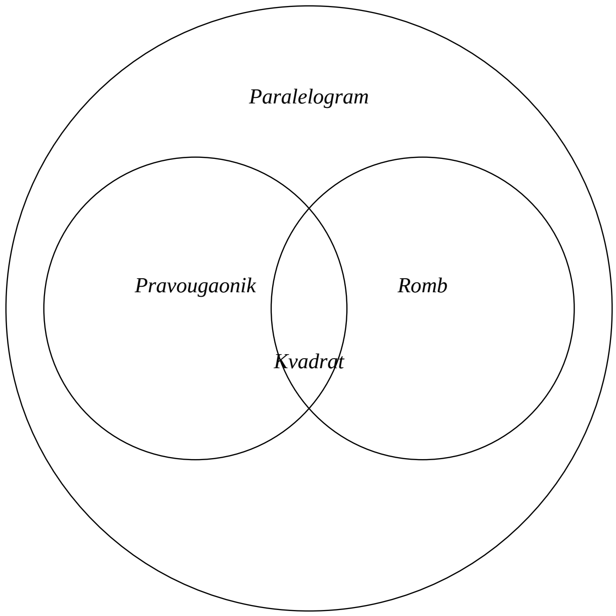
Ova oblast je interesantna, a izuzetno bitna za dalje proučavanje matematike. To bi trebalo da se stalno napominje učenicima, da bi svi savladali osnovne pojmove.

Pod osnovnim pojmovima podrazumevam vrste četvorouglova, tj. njihovo raspoznavanje i znanje njihovih osobina.

Takođe i zbir uglova četvorougla.

Ne tako mali broj učenika osmog razreda često pogreši u tome koji je koji četvorougao.

Posle uvođenja osobina četvorouglova kao i samo grupisanje kao npr. upoznavanje sa paralelogramom, pravougaonikom, kvadratom, rombom, njihove zajedničke osobine i različitosti učenici preko dijagrama veoma lepo savladaju.



6.3 Površina trougla i četvorougla

Na kraju šestog razreda uče se površine. U ovoj oblasti se može lepo videti celokupno znanje koje je učenik stekao tokom dosadašnjeg školovanja, ne samo iz geometrije već i iz algebre.

Ako je to dosadašnje znanje dobro sama oblast površina je izuzetno lako prihvatljiva i ne samo to, nego praktično gotovo najprimenljivija.

Bio učenik muškog ili ženskog pola, završio bilo koju srednju školu i radio bilo koji posao ovo znanje matematike uvek u životu može da iskoristi. I zato učenicima dajem primere gde će to koristiti.

Pošto radim u seoskoj školi gotovo svi učenici imaju zemlju koju obrađuju, svi imaju kuće i dvorišta, a samim tim možemo računati i površine njihovih njiva, kuća i dvorišta. Takođe im dajem primer korišćenja najjednostavnije površine pravougaonika u samoj kući. Ako budu kupovali pločice za kupatilo, parket za sobu, krečili zidove itd.

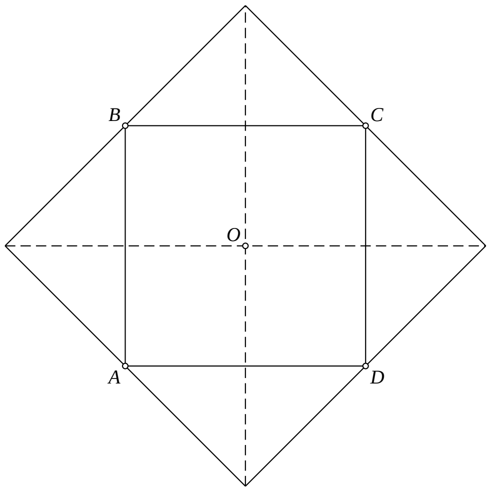
U svim tim primerima mere mogu dosta često biti i decimalni brojevi pa se tako ne preskače i ono što oni ne vole, a i često zaboravljaju, a to su računske operacije sa decimalnim brojevima.

Ovde je izuzetno važno napominjati i kako se dolazi do formula za izračunavanje svih površina jer se formula napamet naučena brzo zaboravi, a u osmom razredu će im to biti od velike važnosti.

Judita Cofman [4] je postavljala učenicima sledeći zadatak:

Dat je kvadrat $ABCD$ sa centrom O. Konstruiši tačke simetrične tački O u odnosu na sve četiri strane kvadrata i spoji svaku od novodobijenih tačaka s onim dvama temenima kvadrata $ABCD$ koji su dotičnoj tački najbliža.

1. Odredi prirodu geometrijske figure F ograničene tako konstruisanim dužima.
2. Izračunaj odnos površina figure F i kvadrata $ABCD$.



Taj zadatak je lako rešiti: figura F je takođe kvadrat i njena površina je dva puta veća od površine kvadrata $ABCD$, tj. figura F je udvostručenje kvadrata $ABCD$.

Poglavlje 7

Geometrija: Sedmi razred

Program geometrije sedmog razreda obuhvata Pitagorinu teoremu, krug, mnogougao, grafik funkcije, sličnost.

7.1 Pitagorina teorema

Pitagorina teorema je veoma zgodna i za upoznavanje učenika sa istorijom matematike, tj. sama priča o Pitagori i njegovom postojanju bi im mogla biti od važnosti da što lakše prihvate teoremu.

Ne treba učenike zbunjivati sa previše informacija. Dovoljno je reći da je teorema dobila ime po grčkom matematičaru i filozofu Pitagori koji je živeo u šestom veku pre nove ere, rođen na ostrvu Samosu. On je jedan od najuticajnijih ljudi grčke intelektualne istorije. Preselio se u Italiju i tamo osnovao svoju školu, u koju su primani i žene i muškarci pod istim uslovima. Iako je teorema bila poznata još indijskim, grčkim, kineskim i vavilonskim matematičarima puno pre no što je Pitagora živeo, prvi poznati dokaz Pitagorine teoreme može se naći u Euklidovim elementima.

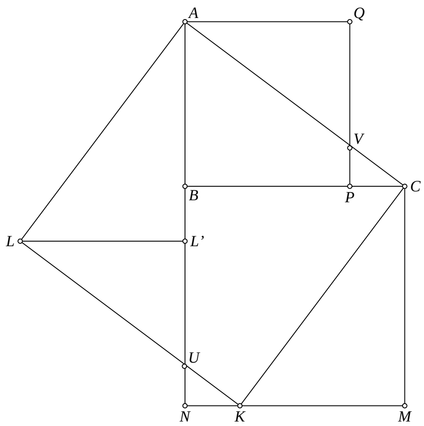
Setimo se dva dokaza Pitagorine teoreme koji su dosta lepi i laki da bi se mogli ispričati učenicima osnovne škole. Naravno da ne treba insistirati na tome da učenici nauče dokaz, ali svakako uz laganu priču i crtanje slike dokaza i to što preciznije, moguće je ne samo zainteresovati đake nego im i ispričati priču koju će da razumeju.

TEOREMA 7.1.1 *Pitagorina teorema:*
Površina kvadrata nad hipotenuzom pravouglog trougla jednaka je zbiru površina kvadrata nad katetama tog trougla.

Izuzetno zanimljiva je i Pitagorina teorema u obliku pesmice:
Pitagorinu teoremu, to zna svako dete, kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad obe katete.

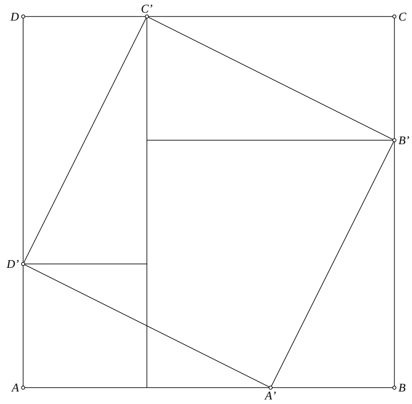
Dokaz pomoću razložive jednakosti [8]:

Ako je ABC trougao sa pravim uglom kod temena B, možemo pretpostaviti da je $AB \leq BC$. Ako su zatim, $ACKL$, $BCMN$ i $ABPQ$ kvadrati koji se redom nalaze sa onih strana pravih AC, BC i AB sa kojih su, redom, tačke B, K i C, tada, ako sa L' obeležimo podnožje upravne iz tačke L na pravoj AN, a sa U i V tačke u kojima se seku parovi pravih KL i BN, PQ i CA, biće trouglovi $AL'L$ i CMK, $LL'U$ i AQV, VPC i UNK, međusobno translatorno podudarni. Odatle sledi da je kvadratna površ $ACKL$ T-razloživo jednaka uniji kvadratnih površi $ABPQ$ i $BCMN$.



Dokaz pomoću dopunske jednakosti [8]:

Neka je $ABCD$ kvadrat čije ivice su jednake zbiru kateta a i b pravouglog trougla kojem je hipotenuza c, a A', B', C', D', redom, tačke ivica AB, BC, CD, DA takve da je $A'B'C'D'$ kvadrat ivice c. Kvadratna površ $ABCD$ je unija kvadratne površi $A'B'C'D'$ i četiri trougaone površi kojima su ivice a, b, c. Međutim, površ $ABCD$ je unija dveju kvadratnih površi ivica a i b koje pripadaju duži AB i dveju pravougaonih površi kojima su dijagonale $B'C'$ i $C'D'$. Kako su te dve pravougaone površi unija četiri trougaone površi kojima su ivice a, b, c, kvadratna površ $A'B'C'D'$ ivice c dopunski je jednaka uniji kvadratnih površi kojima su ivice a i b.

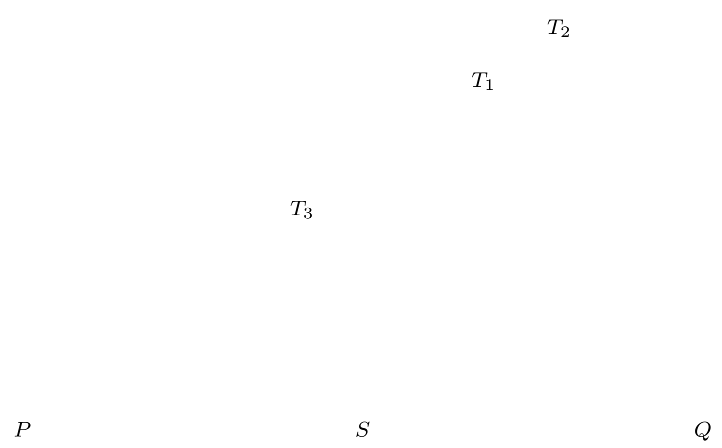


7.2 Krug

U sedmom razredu se obrađuju Talesova teorema i pojmovi centralnog i periferijskog ugla. Jedna od posledica je i da je periferijski ugao nad prečnikom prav. Koristeći se tom činjenicom dokazujemo da važi [9]:

TEOREMA 7.2.1 *Neka je u ravni α data duž PQ i neka je tačka S središte duži PQ. Za tačku T ravni α, koja ne pripada pravoj p(PQ) važi:*

1. *T pripada kružnoj liniji k(S,PQ) ako i samo ako je $\angle PTQ$ prav;*
2. *T je van kruga k(S,PQ) ako i samo ako je $\angle PTQ$ oštar;*
3. *T je unutrašnja tačka kruga k(S,PQ) ako i samo ako je $\angle PTQ$ tup.*



Dokaz:
Skica dokaza.

1. Tvrđenje je poznato.
2. $\angle P\mathrm{T}_1Q = 90°$, $\angle P\mathrm{T}_2Q = \angle \mathrm{T}_1\mathrm{T}_2Q$, $\angle \mathrm{T}_1T_2Q + \angle \mathrm{T}_2Q\mathrm{T}_1 = 90°$. Odatle sledi $\angle \mathrm{T}_1\mathrm{T}_2Q < 90°$.
3. Slično, $\angle P\mathrm{T}_3Q = \angle \mathrm{T}_3\mathrm{T}_1Q + \angle \mathrm{T}_1Q\mathrm{T}_3 = 90° + \angle \mathrm{T}_1Q\mathrm{T}_3$. Odatle sledi $\angle P\mathrm{T}_3Q > 90°$.

Koristeći se dokazanom teoremom možemo rešiti nekoliko zanimljivih zadataka o pokrivanju trouglova i četvorouglova krugovima [9].

Označimo na uobičajeni način, sa a, b, c stranice BC, CA, AB trougla ABC, a sa K_a, K_b, K_c krugove čiji su prečnici, redom a, b, c.

Zadatak 1. Neka je ABC proizvoljan trougao. Dokazati da unija krugova K_a, K_b, K_c pokriva $\triangle ABC$.

Rešenje:

Ako $\mathrm{K}_a \bigcup \mathrm{K}_b \bigcup \mathrm{K}_c$ ne pokriva $\triangle ABC$, onda u njemu postoji tačka T, koja je izvan sva tri kruga. Prema tome znači da su sva tri ugla $\angle ATB, \angle BTC$ i $\angle CTA$ oštra. Dakle, $\angle ATB < 90^\circ$, $\angle BTC < 90^\circ$, $\angle CTA < 90^\circ$. Stoga je

$$\angle ATB + \angle BTC + \angle CTA < 270^\circ.$$

S druge strane je $\angle ATB + \angle BTC + \angle CTA = 360^\circ$. Prema tome, ne postoji tačka T u trouglu ABC koja je izvan sva tri posmatrana kruga, što pokazuje da unija ta tri kruga pokriva trougao ABC.

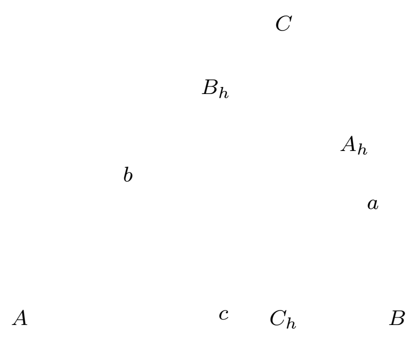
Zadatak 2. Dokazati da proizvoljan trougao ABC pokrivaju bilo koja dva od krugova K_a, K_b i K_c.

Rešenje:

1. Ako je trougao ABC oštrougli onda podnožja visina h_a, h_b i h_c, označimo redom sa A_h, B_h i C_h, pripadaju odgovarajućim stranicama a, b i c. Krug K_a pokriva trougao $BC\mathrm{B}_h$ dok krug K_c pokriva trougao $AB\mathrm{B}_h$. Stoga $\mathrm{K}_a \bigcup \mathrm{K}_c$ pokriva trougao ABC.

2. Neka je trougao ABC pravougli i teme pravog ugla je tačka C. Onda K_c pokriva trougao ABC pa ga pokrivaju i $\mathrm{K}_a \bigcup \mathrm{K}_c$ odnosno $\mathrm{K}_b \bigcup \mathrm{K}_c$. Preostaje da dokažemo da i $\mathrm{K}_a \bigcup \mathrm{K}_b$ pokriva trougao ABC. Podnožje visine h_c, tačka C_h pripada stranici c, pa se u tom slučaju nalazimo u situaciji kao pod 1.

3. Neka je trougao ABC tupougli i neka je teme tupog ugla tačka C. Ponavljajući korake iz dela 2. dokazujemo da i u tom slučaju važi tvrđenje.



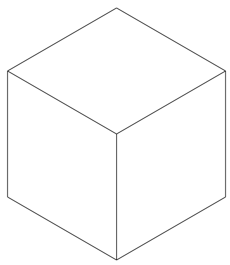
7.3 Mnogougao

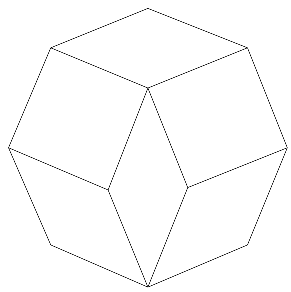
Mnogougao je moguće predstaviti veoma lepo preko razlaganja nekog mnogougla na manje i poznatije mnogouglove. To se čak može povezati sa primenom u građevinarstvu, što je u poznatom okruženju za učenike, a to je postavljanje parketa u sobi ili učionici, zatim postavljanje pločica u kupatilo i to posebno ako se postavlja u neki neobičan položaj.

Ovde je dobar trenutak da predstavimo sledeći zadatak koji bi mogao biti zanimljim učenicima sedmog razreda i glasi [2]:

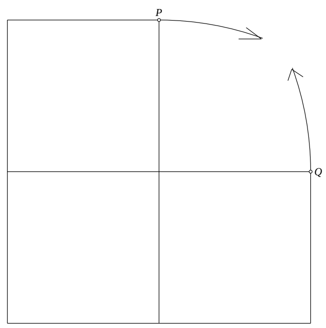
Pravilan šestougao se može podeliti na tri romba, a pravilan osmougao na šest rombova.

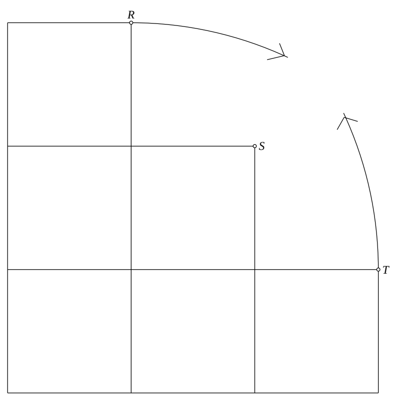
Da li je moguće podeliti bilo koji pravilan poligon na određen broj rombova?

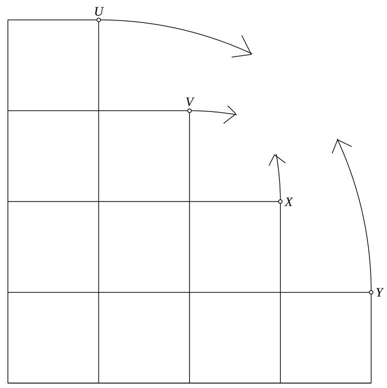




Rešenje:
Jeste, moguće je. Deljenje pravilnih poligona sa 6, 8, 10, ... stranica na rombove može se demonstrirati pomoću mreža kao na slikama







Te mreže od 3, 6 i 10 kvadrata se mogu širiti i dalje. Ako tačke P i Q spojimo u jednu tačku stvara se pravilan šestougao. Takođe, ako se tačke R, S i T spoje u jednu tačku formira se pravilan osmougao. I na kraju ako spojimo tačke U, V, X i Y dobija se pravilan desetougao. Svaki od tih kvadrata se pretvara u romb i njih može biti 3, 6 i 10. U opštem slučaju mogu se oformiti $(n-1)n/2$ kvadrata, koji čine poligon sa $2n$ strana, i taj poligon se može konstruisati. I taj poligon se automatski može razložiti na $(n-1)n/2$ rombova.

Ovde se prirodno nadovezuje parketiranje [3], koje podrazumeva pokrivanje ravni, ili određenog dela ravni geometrijskim figurama, pri čemu su ispunjena sledeća dva uslova:

1. među figurama nisu ostavljene praznine;
2. nikoje dve figure se ne poklapaju, izuzev eventualno u tačkama na njihovim rubovima.

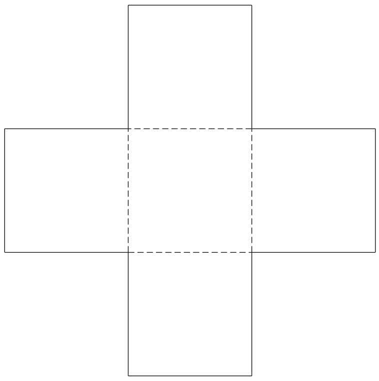
Slika koja pri tom načinu nastaje naziva se parket, a parketi se izučavaju i u drugim naukama pored matematike.

Ovde ćemo parketiranje koristiti kao pomoćno sredstvo za rešavanje sledećih zadataka, koji se mogu rešiti i bez primene parketa.

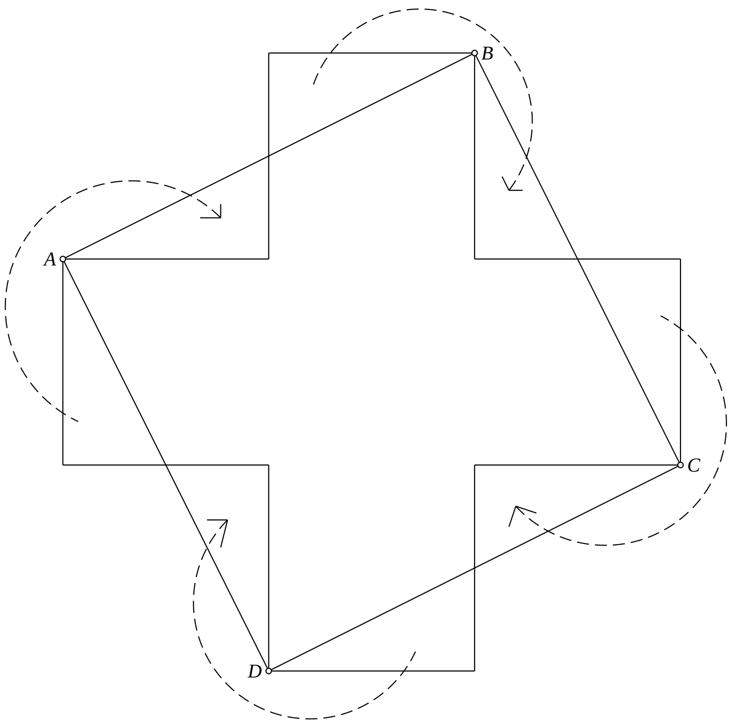
1. Pretvaranje "grčkog krsta" u kvadrat

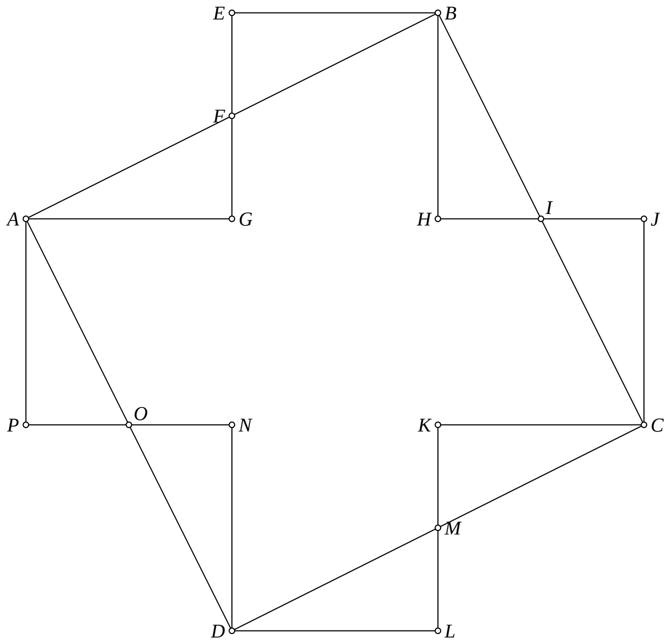
Grčki krst je figura sastavljena od pet podudarnih kvadrata, i sledeći rebus potiče navodno još iz drevne Indije.

Zadatak 1. Raseći grčki krst na delove od kojih se može sastaviti kvadrat (bez poklapanja unutrašnjih tačaka delova i bez praznina među delovima).



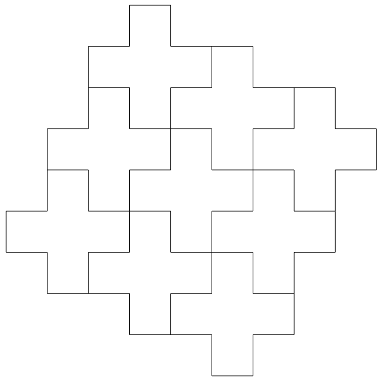
Rešenje je predstavljeno na slici, koja je očigledna, ali ipak ćemo dokazati da je četvorougao $ABCD$ kvadrat i da se može sastaviti od pet delova na koje se grčki krst raspao pri povlačenju duži AB, BC, CD, DA.



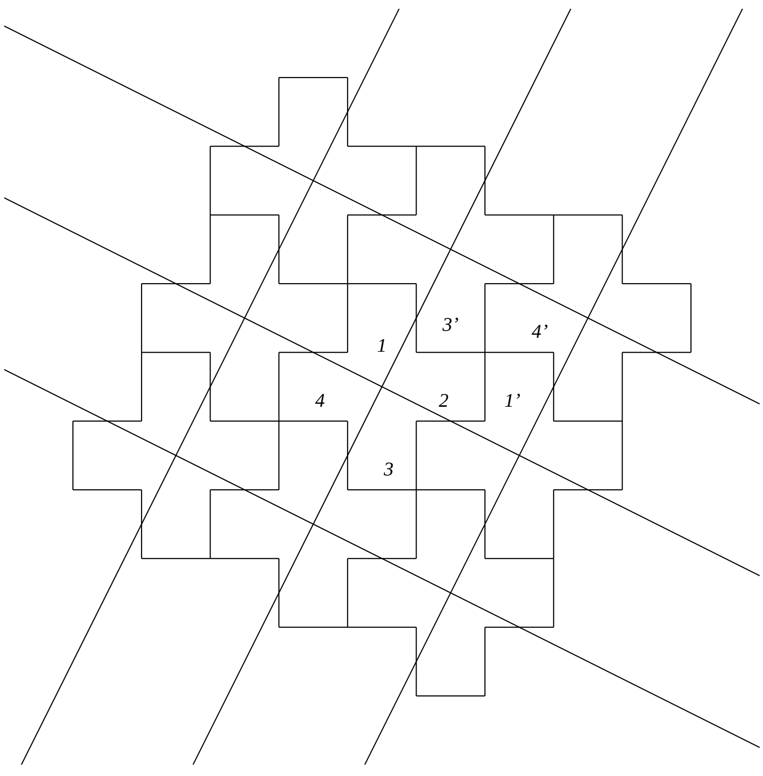


Neka je $GH{=}a$. Tako je
$AB^2 = (2a)^2 + a^2$ tj.
$AB^2 = 5a^2$, a tako i $BC^2 = 5a^2$, $CD^2 = 5a^2$ i $DA^2 = 5a^2$.
Odatle sledi da je $AB = BC = CD = DA = a\sqrt{5}$.
Kako je AB dijagonala nekog pravougaonika čije su stranice $2a$ i a onda sledi da AB seče EG u F, pa je F središte duži EG, i odatle je $EF = HI = KM = ON$.
Kada posmatramo trouglove $\triangle EFB$ i $\triangle HIB$ uočavamo da je $EB = BH = a$, $\angle FEB = \angle BHI = 90^\circ$, kao i $FE = HI = a/2$, pa iz podudarnosti trouglova sledi da su trouglovi $\triangle EFB$ i $\triangle HIB$ podudarni, kao i da su trouglovi $\triangle CMK, \triangle LDM, \triangle OND, \triangle OPA, \triangle AGF$ svi između sebe podudarni.
Iz te podudarnosti sledi da su $\angle EFB = \angle HBI$, a odatle opet sledi:
$90^\circ = \angle EBH = \angle EBF + \angle ABH = \angle HBI + \angle ABH = \angle ABI = \angle ABC$
Takođe su i ostali uglovi četvorougla jednaki 90°, pa je dokazano da je četvorougao $ABCD$ kvadrat, kao i da se četvorougao $ABCD$ može sastaviti od tih pet delova na koje se grčki krst raspao povlačenjem duži AB, BC, CD, DA.

Zadatak 2. Raseći grčki krst na manje od pet delova, tako da se od njih može sastaviti kvadrat.
Rešenje ćemo izložiti primenom parketa sastavljenog od podudarnih kopija datog grčkog krsta, kao na slici.

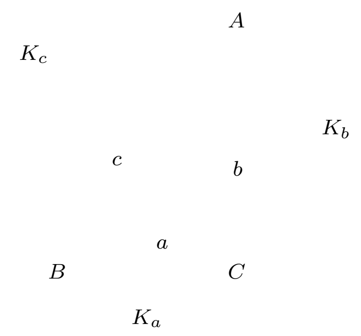


Centri grčkih krstova su ravnomerno raspoređeni u ravni, i kroz njih se povuku prave tako da dobijemo rešetku, i to kvadratnu rešetku.
Kvadratnu jer je razmak između centara grčkih krstova podjednak, a sve povučene prave su paralelne ili se seku pod pravim uglom.



Linijama rešetke svaki od grčkih krstova je rastavljen na četiri dela: $1, 2, 3, 4$. Rubovi grčkih krstova rastavljaju svaki kvadrat rešetke na četiri dela: $1', 2', 3', 4'$.Pa nije teško uvideti da su delovi $1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'$ podudarni. Ovim smo grčki krst podelili na samo četiri dela od kojih je sastavljen kvadrat i time je zadatak rešen.

Zadatak 3. Trougao ABC je pravougli sa katetama BC i CA redom dužina a i b i hipotenuzom AB dužine c. Kvadrati K_a, K_b i K_c su konstruisani redom nad katetama BC, CA i nad hipotenuzom AB. Dokazati da je zbir površina kvadrata K_a i K_b jednak površini kvadrata K_c.

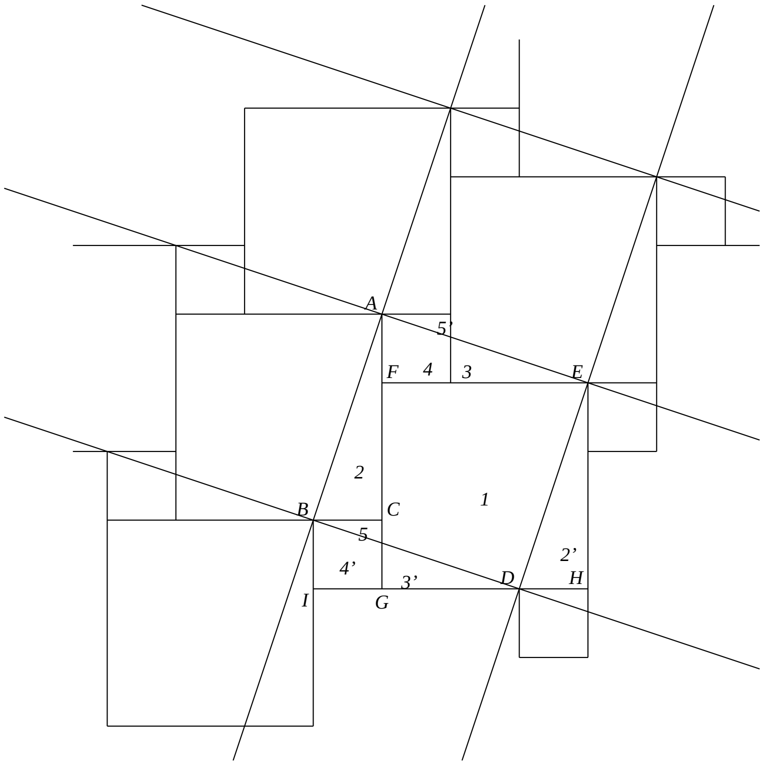


Rešenje se svodi na upotrebu parketa načinjenog od podudarnih kopija kvadrata K_a i K_b, kao što je prikazano na slici.

K_b

K_a

Na sledećoj slici je skicirana rešetka nad tim parketom. Rešetka se sastoji od pravih paralelnih pravama AB i AC i raspoređenih ravnomerno u ravni crteža. Kvadrati rešetke su podudarni sa kvadratom K_c. Kvadrat $ABDE$ rešetke je linijama parketa rastavljen na pet delova: 1, 2, 3, 4 i 5. Kvadrat $EFGH$ je rastavljen na delove: 1, $2'$ i $3'$, a kvadrat $CBIG$ na delove $4'$ i 5, tako da su delovi 2 i $2'$, 3 i $3'$, 4, $4'$ i 5 i $5'$ podudarni. Na osnovu prethodnog je dokazano da od delova kvadrata K_a i K_b moguće je sastaviti kvardat K_c.



7.4 Grafik funkcije

I ovde je kao i kod Pitagorine teoreme zgodno prisetiti se istorije, iako im te informacije nisu neophodne u osnovnoj školi. Iz same neke interesantne priče mogli bi lakše upamtiti i ono što im treba. Grafik funkcije je u tesnoj vezi s pojmom koordinatnog sistema.

Dekartov koordinatni sistem je izuzetan po tom pitanju jer se u toku učenja koordinata može napomenuti da je Rene Dekart 1623. godine boravio u Novom Sadu u vojnom logoru sa odajam za oficire, i da je on na tom Dunavu, tačnije na Petrovaradinu boravio i više nego što treba i tu završio svoje poznato delo "Knjiga o muzici", u čijem predgovoru Dekart ukazuje na svoj boravak u ovim krajevima [13]. Taj podatak da je Dekart boravio u Novom Sadu ne mogu saznati drugačije, jer bez obzira na odlazak učenika na ekskurzije nemaju to gde pročitati.

7.5 Sličnost

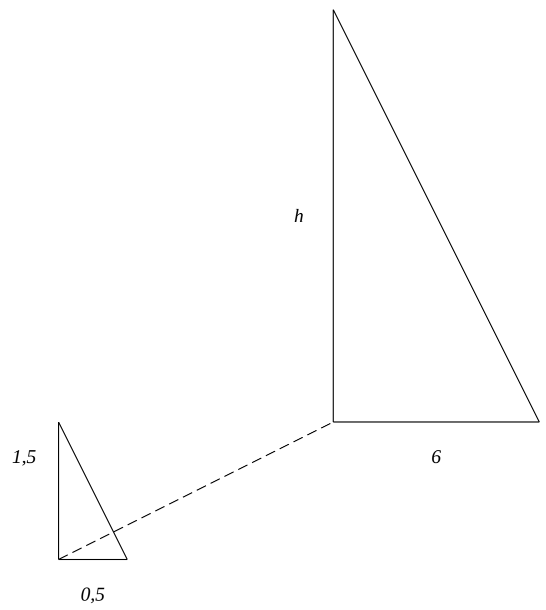
Sličnost je za učenike veoma konfuzna oblast koju teško savladaju, a i kada je savladaju veoma brzo je zaborave pa iz tog razloga im treba davati što više poznatih primera da što bolje upamte osobine sličnosti.

Navest ćemo par primera koji pomažu učenicima da što bolje savladaju ovu oblast, a da su njima bliski.

Zadatak 1. Marko je visok 1,5 m i stoji pored jarbola koji je ortogonalan na vodoravnom pločniku. U jednom trenutku, dužine senki Marka i jarbola su

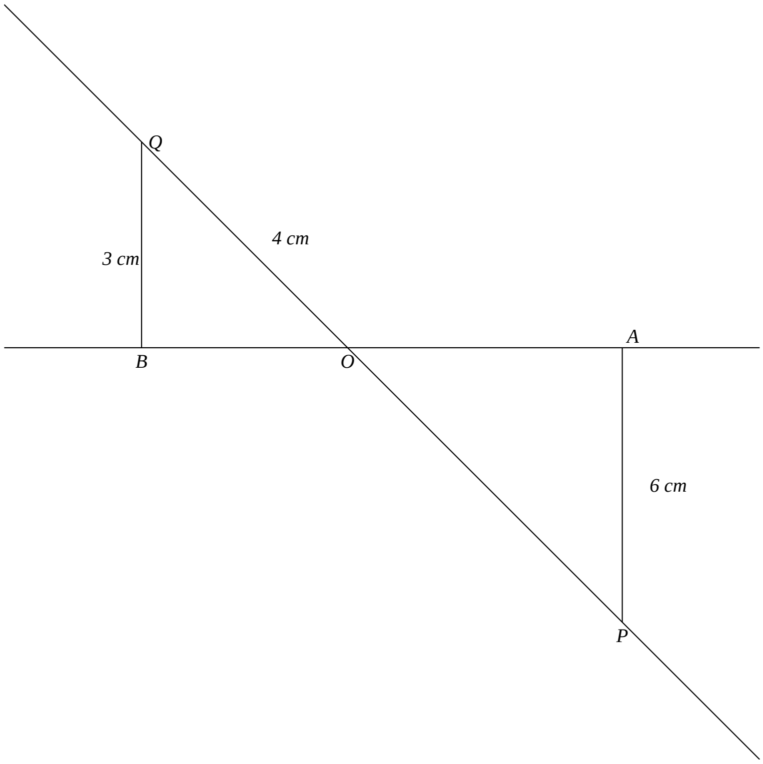
0,5 m i 6 m. Odrediti visinu tog jarbola.[7]

Rešenje: Marko i njegova senka određuju jedan pravougli trougao sa katetama a=1,5 m i b=0,5 m. Takođe jarbol i njegova senka određuju pravougli trougao sa katetama a'=h i b'=6 m, gde je h visina tog jarbola. Odgovarajuće stranice ta dva trougla su paralelne pa oni imaju iste uglove. Dakle ti trouglovi su slični, pa su njihove odgovarajuće stranice proporcionalne. Odatle je:
$a' : a = b' : b$
$h : 1,5 = 6 : 0,5$
$0,5h = 6 * 1,5$
$0,5h = 9$
$h = 18m;$
pa je tražena visina jarbola 18 m.



Sledeći zadatak povezuje znanje koje su učenici stekli iz prvog polugodišta sa novo stečenim znanjem.

Zadatak 2. Ako su oznake kao na priloženom crtežu, odrediti dužine duži OP i OA. (Uglovi kod temena B i A su pravi)[7]



*Rešenje:*Primenom Pitagorine teoreme može se odrediti stranica OB pravouglog trougla OQB:
$OB^2 = OQ^2 - QB^2$,
$OB^2 = 16 - 9$,
$OB^2 = 7$,
$OB = \sqrt{7}$.

Trouglovi OBQ i OPA su slični, pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne:
$QB : PA = OQ : OP = OB : OA$,
$3 : 6 = 4 : OP = \sqrt{7} : OA$,
$OP = 8cm$,
$OA = 2\sqrt{7}cm$.

Poglavlje 8

Geometrija: Osmi razred

Program geometrije osmog razreda obuhvata tačku, pravu i ravan, prizmu, piramidu, valjak, kupu i loptu.

8.1 Tačka, prava i ravan

Tačka, prava i ravan su pojmovi već poznati đacima u petom razredu. Pristup ovoj temi se svodi u većini situacija na uočavanje međusobnih veza između ovih pojmova. Posebnu pažnju bih posvetila objašnjavanju pojma diedra, a i podsećanjem na pojam normalnosti.

U shvatanju ove oblasti se ogleda učeničko razumevanje okoline i odnosa objekata koji se nalaze oko njega kao i koliko je sposoban da sagleda tu okolinu u matematičkom smislu, tj. uviđajući da se nalazi u okolini gde se svuda u prostoru mogu videti geometrijski oblici kakvi se u ovoj oblasti uče.

8.2 Prizma

Odmah bih krenula sa jednim primerom tj. zadatkom koji je Judita Cofman [4] zadavala učenicima.

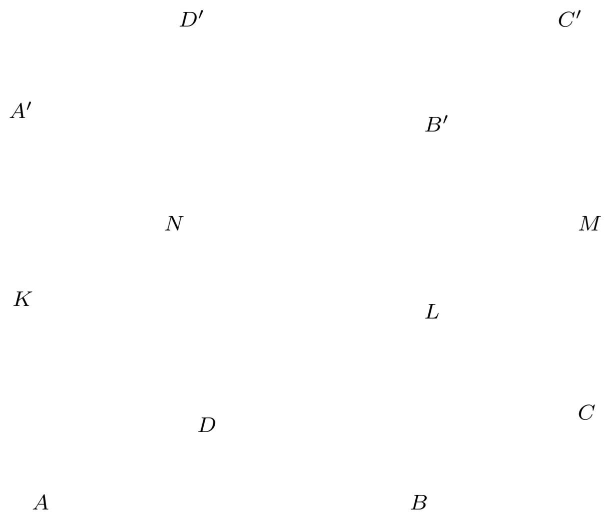
Zadatak 1. Preseći datu kocku jednom ravni na dva podudarna dela tako da presek bude:

a) kvadrat,

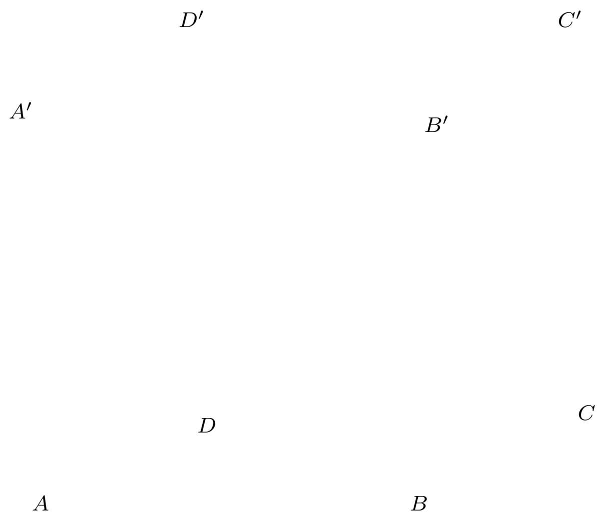
b) pravougaonik,

c) romb različit od kvadrata i

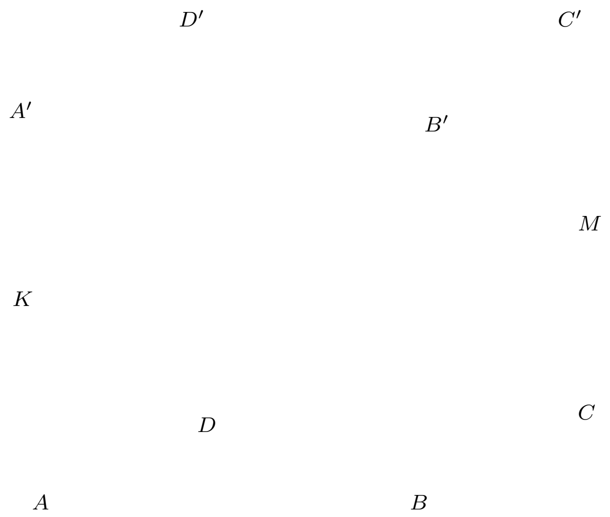
d) šestougao.



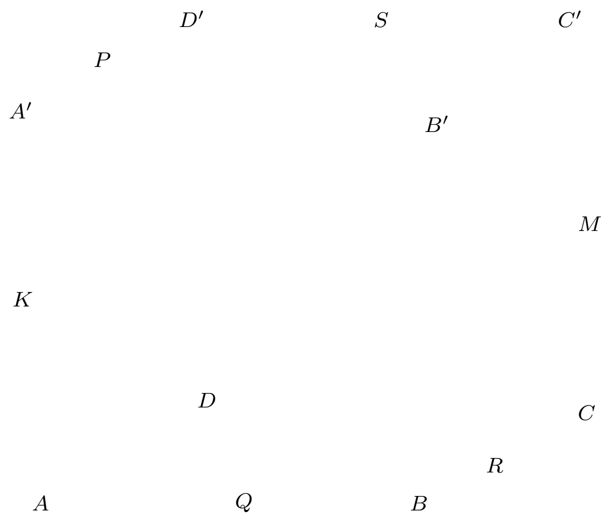
$a)$



$b)$



c)



d)

Ona je sa ovim zadatkom napravila eksperiment tako da je jednoj grupi učenika postavila zadatak u tom obliku. Odgovori učenika su bili sledeći: svi učenici se rešili delove a) i b) zadatka, bez puno razmišljanja. Rešenje dela c) zahtevalo je više vremena, a deo d) nisu svi uspeli rešiti. Niko od učenika nije dao više od jednog rešenja za b), c), i d).

Drugu grupu učenika ispitivala je s nizom zadataka inspirisanih zahtevima prethodnog zadatka:

1. Konstruiši ravan koja datu kocku $ABCDA'B'C'D'$ seče tako da su zadovoljeni sledeći uslovi: presek kocke i ravni je kvadrat, ravan deli kocku na dva podudarna dela.

2. Odgovori na sledeća pitanja: Kako treba pomerati ravan, konstruisanu pri rešenju zadatka tako da presek ravni s kockom prilikom pomeranja ostaje kvadrat i šta se dešava pri tome kada ravan deli kocku na dva podudarna dela.

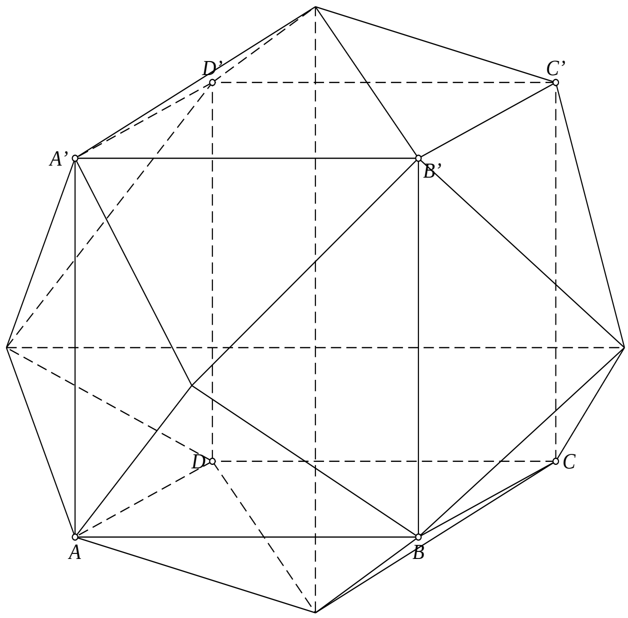
3. Ravan, konstruisanu u zadatku, rotiraj oko jedne dijagonale kvadrata po kome preseca kocku. Šta se dešava pri tome: s oblikom preseka ravni i kocke, i s podudarnošcu delova na koje ravan deli kocku?

Druga grupa učenika je za rešavanje tih zadataka mogla da koristi modele: skelete kocki, koji su se sastojali samo od temena i ivica kocke i parče kartona, koje je predstavljalo deo ravni, i koje se moglo pomerati u unutrašnjosti skeleta. Radeći u manjim grupama učenici su uspešno rešili sva tri zadatka, prateći neprekidni položaj ravni i analizirajući posledice pomeranja ravni.

Najvažniji dobitak pri tom radu je po njenom mišljenju bilo to što se đacima ukazala prilika da učvrste pojam transformacije, pojam neprekidne promene i pojam invarijante pri transformacijama. Može im se obratiti pažnja na to da su na primer dužine strana, površina, oblik preseka funkcije položaja ravni, i da se tom prilikom učvrsti i pojam funkcije.

Sada bih se vratila na zadatak koji su učenici znali da reše, a koji je Judita Cofman postavljala učenicima i posle njega zadavala sledeći zadatak: Ispitaj da li se konstrukcija u zadatku iz šestog razreda (6.3 oblast) može uopštiti na kocku, tako da se time data kocka udvostruči.

Uopštenje konstrukcije se u slučaju kocke $ABCDA'B'C'D'$ sa centrom O sastoji od konstrukcije tačaka, simetričnih u odnosu na svih šest strana kocke i od spajanja svake od novih tačaka s četiri temena kocke koja su toj tački najbliža. Tako se dobija novo telo T.



Odnos zapremine tela T i kocke $ABCDA'B'C'D'$ je isti kao i odnos površina figure F i kvadrata $ABCD$ tj. 2:1. Ali telo T nije kocka nego rombični dodekaedar-poliedar ograničen s 12 rombova.

8.3 Piramida

Ovde je zanimljivo da se prisetimo piramida u Egiptu, a i vezano za Keopsovu, piramidu postoje zadaci koji se po planu rade.

Sledeći zadatak je veoma interesantan i glasi [2]:

Neka je $OABC$ piramida čije se stranice OA, OB i OC seku u tački O pod pravim uglom. Dokaži da je $\mathrm{P}^2_{AOB} + \mathrm{P}^2_{BOC} + \mathrm{P}^2_{COA} = \mathrm{P}^2_{ABC}$

Rešenje:

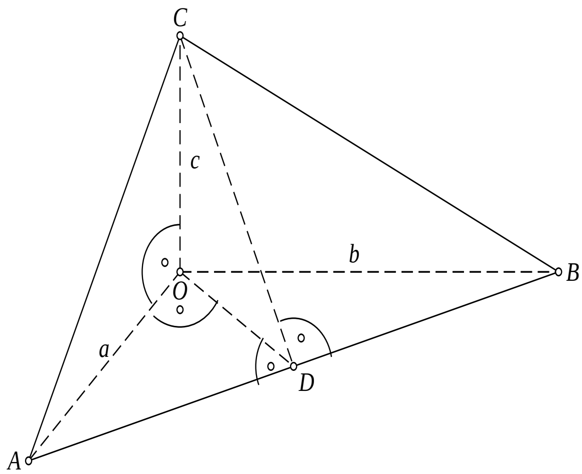
Obeležimo OA, OB i OC redom sa a, b i c. Kako su trouglovi AOB, BOC i COA pravougli odatle je:

$$\mathrm{P}_{AOB} = \frac{1}{2}ab,$$

$$\mathrm{P}_{BOC} = \frac{1}{2}bc,$$

$$\mathrm{P}_{COA} = \frac{1}{2}ac.$$

Površina trougla ABC je $\frac{1}{2}AB \cdot CD$, gde je CD visina trougla ABC na stranicu AB.



Lako se može dokazati da je trougao COD pravougli, pa je po Pitagorinoj teoremi

$$CD = \sqrt{c^2 + OD^2}.$$

Iz

$$\tfrac{1}{2} OD \cdot AB = \mathrm{P}_{AOB} = \tfrac{1}{2} ab$$

sledi da je

$$OD = \tfrac{ab}{AB} = \tfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

i

$$CD = \sqrt{c^2 + \tfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\ .$$

Odavde sledi da je

$$\mathrm{P}_{ABC} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2 + \tfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\ .$$

Iz svega do sada sledi da je

$$\mathrm{P}^2_{AOB} + \mathrm{P}^2_{BOC} + \mathrm{P}^2_{COA} = \tfrac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2)(c^2 + \tfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}) = \mathrm{P}^2_{ABC}.$$

Ovaj zadatak će se možda činiti teškim većini učenika ali svakako one naprednije će zainteresovati.

8.4 Valjak

Površ obrazovana kretanjem prave koja ostaje stalno paralelna nekoj fiksnoj pravi naziva se cilindrična površ. Kada se prava kružna cilindrična površ preseče dvema ravnima normalnim na osu rotacije, onda obe ravni i obrtna cilindrična površ ograničavaju telo koje se naziva pravi kružni valjak ili samo pravi valjak.

Pored ove definicije za valjak dobro je napomenuti da se valjak dobija rotiranjem pravougaonika oko jedne svoje stranice. To je zanimljivo za demonstraciju i ne samo to nego je i učenicima primamljivije od spominjanja cilindrične površi.

Valjak je takvo geometrijsko telo koje učenike obavezno podseća na bure, čašu ili flašu. To jeste dobro poređenje, ali ih od samog početka rada sa valjkom treba opominjati i da od lista papira možemo napraviti omotač valjka i da je to upravo pravougaonik. Jeste da se kod mreže valjka i kasnije kod površine to ponovi, ali nije loše i do tada pa čak i na prvom času te teme to reći, da se unapred zna da kod valjka veliku ulogu igra baš taj pravougaonik.

8.5 Kupa

Slično kao kod valjka na prvom času treba odrediti kako bi najlakše svako sebi napravio neku kupu, pa samim tim posmatrati i doći do zajedničkog zaključka da je omotač kupe ustvari deo nekog većeg kruga. U sedmom razredu se rade delovi kruga tako da im nije nepoznata površina kružnog isečka.

8.6 Lopta

Lopta je najlakše i najpristupačnije telo za učenike osmog razreda. Učenici uglavnom nauče napamet formule i tako savladaju loptu. Uglavnom bolji učenici mogu biti sposobni da rade zanimljive zadatke gde se koristi Pitagorina teorema.

Poglavlje 9

WinGCLC

Sve slike iz ovog rada su rađene u WinGCLC, to je program koji služi za crtanje geometrijskih figura, i daje dobre rezultate vezane za rad u geometriji. Njegov tvorac je Predrag Janičić i dodatna objašnjenja vezana za rad sa programom kao i kvalitetni primeri mogu se videti na sajtu [14].

GCLC je alat za učenje i vizualizaciju geometrije i za pravljenje matematičkih ilustracija. GCLC obezbeđuje podršku za laku upotrebu za mnoge geometrijske konstrukcije, izometrijske transformacije, krive, razne teoreme itd.
Početna ideja GCLC je da se konstrukcija radi ustanovljenim procedurama. Ovde su matematičke ilustracije zasnovane na opisivanju figura. Figure se mogu videti i eksportovati u LaTeX-u i u drugim formatima.

Autor GCLC/WinGCLC je kako je već rečeno Predrag Janičić (sa Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu), sa saradnicima: Ivan Trajković, Pedro Quaresma, Goran Predović, Luka Tomašević, Konrad Polthier, Klaus Hildebrand, Jelena Tomašević i Milena Vujošević-Janičić.

GCLC je pogodan za demonstraciju geometrijskih figura, ilustracija pa čak i animacija za rad sa decom u školama. Time se posebno zainteresovao Bojan Radusinović koji je uradio zanimljive animacije isključivo za rad sa decom uzrasta osnovnih škola. Njegovi radovi vezani za osmi razred osnovne škole mogu se videti na sajtu [16], kao i na sajtu Predraga Janičića [14].

GCLC/WinGCLC je stvoren 1996 godine i ima na hiljade tekstova (knjiga, članaka, itd.) u produkciji digitalne ilustracije, kao i brojnih srednjoškolskih i univerzitetskih upotreba.

Glavna svrha GCLC/WinGCLC je:

1. Produkcija digitalnih matematičkih ilustracija visokog kvaliteta
2. U učenju geometrije
3. U izučavanju geometrije i istraživanju alata za rad.

Glavne osobine GCLC/WinGCLC su:

1. Koristan je za niz elementarnih i složenih konstrukcija, izometrijskih transformacija i ostalih geometrijskih potreba
2. Koristi simboličke izraze, pogodan za izradu krivih drugog reda, parametarskih krivi itd.

3. Poseduje "user-friendly interface", koristan za interaktivan rad, za izradu animacija itd.
4. Lak je za korišćenje ustaljenih kalupa i grafika
5. Pogodan za rad sa teoremama
6. Vrlo jednostavan, lak za upotrebu
7. Može se eksportovati u visoko kvalitetne figure u LaTeX-u , EPS i SVG formate.
8. Koristi se u DOS/Windows i Linux verzijama
9. Importuje se iz JavaView JVX formata
10. Lako je dostupan na već pomenutom sajtu Predraga Janičića [14], kao i na sajtu EMIS [15] .

Poglavlje 10

Deset zapovesti nastavnicima

Nastavnicima matematike Đerđ Poja u svojoj poznatoj knjizi Matematičko otkriće preporučuje deset zapovesti:

1. Interesuj se za matematiku!

2. Znaj svoj predmet!

3. Znaj na koji način se može naučiti to što je neophodno! Najbolji način učenja je samootkrivanje!

4. Znaj da čitaš sa lica svojih učenika! Nastoj da spoznaš šta oni od tebe očekuju; shvati njihove teškoće; stavi sebe u njihovu poziciju!

5. Ne ograničavaj se na gole informacije; teži da kod učenika razvijaš određene navike, potreban sklad mišljenja i privikavanja na metodologiju!

6. Trudi se da ih naučiš da naslućuju!

7. Nastoj da ih naučiš da naslućeno dokazuju!

8. Naglasi šta se u konkretnom zadatku može iskoristiti za rešavanje drugih problema; potrudi se da iz date konkretne situacije otkriju opšti metod!

9. Ne otkrivaj odmah svoje tajne; pusti učenicima da pokušaju da pogode ono što želiš da im otkriješ; ustupi samim učenicima da otkriju što je moguće više!

10. Pomaži učenicima korisnim uputstvima, ali ne namećí svoje mišljenje po svaku cenu!

Poglavlje 11

Zaključak

Zašto sam izabrala ovu temu da o njoj pišem?

Kao što sam već rekla, želim da poboljšam svoj odnos prema nastavi geometrije i da je što više približim učenicima.

Kroz rad sa decom uočavam da će to biti veoma težak posao, a samim tim se moram pomiriti da velikom broju učenika neću uspeti da dočaram lepotu matematike iz prostog razloga što se uglavnom još pre početka osnovne škole usađuje strah od matematike, od strane roditelja, porodice, komšija, takođe iz njihovog ne znanja matematike.

Uočavam da je trenutna situacija u školstvu dosta loša, pod tim mislim znanje nije moderno, pa se slabo đaci i trude da nešto saznaju. Iz tog razloga želim da kroz svoj radni vek što bolje prezentujem ono što radim i ako mogu nešto promenim na bolje.

Bibliografija

[1] D. Adnadjević, D. Milić, *Matematika za osmi razred osnovne škole, Zavod za udžbenike Beograd, 2008. godina.*

[2] J. Cofman, *What to solve? Oxford University Press, Oxford, 1990.*

[3] J. Cofman, *O primeni parketa pri rešavanju zadataka, Matematički list, Godina XXXI, broj 3 (1996), Društvo matematičara Srbije, str. 1-5.*

[4] J. Cofman, *O ulozi geometrije u savremenom matematičkom obrazovanju u srednjoj školi, Metodika i istorija geometrije, Matematički institut SANU, 1996., str. 13-20.*

[5] Dj. Dugošija, V. Andrić, V. Jocković, V. Mićić, *Matematika za šesti razred osnovne škole, Zavod za udžbenike Beograd, 2007. godina.*

[6] G. D. Glejzer, *Geometrija u školi, Iz nedeljnog priloga "Matematika" novina "Prvi septembar", broj 34, septembar 1995., str. 3-4.*

[7] G. Kalajdžić, S. Ognjanović, B. Djelić, *Zbirka zadataka iz matematike za kvalifikacioni ispit za upis u srednju školu školske 2010/2011. godine, Ministarstvo prosvete Republike Srbije.*

[8] Z.Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije, Preliminarna verzija, str. 43-45.*

[9] V. Mićić, *Primenimo u osnovnoj školi stečena geometrijska znanja, Seminar za profesore osnovnih škola, Beograd, januar 2007., str. 7-8.*

[10] G. Polya, *Matematičko otkriće, Moskva, Nauka, 1976.*

[11] Pijaže, *Ou vas l'education - Denoel - Paris, 1975., str. 24-25.*

[12] M. Stojsavljević-Radovanović, Lj. Vuković, J. Rančić, *Udžbenik za peti razred osnovne škole, Beograd, Kreativni centar 2008.*

[13] D. Trifunović, *Stazama matematike u srpskom narodu, Vukovar, mart 1995. god.*

[14] http://www.matf.bg.ac.rs/∼ janicic/gclc

[15] http://www.emis.de/misc/software/gclc

[16] http://www.ivangundulic.edu.rs/doc/StereometrijaZaOsmi/index.html