Универзитет у Београду

Математички факултет

Рачунарска анализа Франклове хипотезе

Мастер рад

Аутор: Бојан Вучковић

Ментор: Професор др Миодраг Живковић

Јул 2009

Садржај

Поглавље 1

Увод

Фамилија $\mathcal{F}$ *затворена за унију* је непразна коначна колекција скупова, таква да за свака два скупа $A, B \in \mathcal{F}$ важи $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Франклова хипотеза (1979). У фамилији $\mathcal{F}$ затвореној за унију постоји елемент који је садржан у барем половини скупова $\mathcal{F}$.

Франклова хипотеза један је од најчувенијих проблема из комбинаторике и постоји велики број радова на ову тему. Међутим, до сада није доказана нити оповргнута, а постигнути су само парцијални резултати у вези са овим проблемом.
Међу најчешћим приступима у испитивању ове хипотезе, је доказивање хипотезе за првих коначно много случајева. Постоје два начина на који је ово рађено: доказавање хипотезе за $|\mathcal{F}| \leq n$ или доказавање хипотезе за $|\cup\mathcal{F}| \leq m$. На пример, доказано је да је за $|\cup\mathcal{F}| \leq 11$ задовољена Франклова хипотеза [2].

Један од приступа проблему је да се пронађе мала фамилија $\mathcal{G}$ таква да било која фамилија $\mathcal{F}$ затворена за унију која садржи $\mathcal{G}$ задовољава Франклову хипотезу, при чему је елемент који се појављује у барем половини скупова један од елемената који припада $\cup\mathcal{G}$.

Главна техника коришћена у овом раду (додељивање тежина елементима и скуповима) примењена је у радовима Марковића [1] и Бошњака и Марковића [2], где је уведена као модификација технике приказане код Понена (Poonen)[4]. Елементи ове технике могу се прилагодити за извршавање на рачунару, што може да замени компликовану анализу могућих варијанти.

У Поглављу 2 налазе се дефиниције и теорема потребне за извођење каснијих доказа, као и леме који се односе на све фамилије затворене за унију. Већина ових лема је доказана у другим радовима. Добро конструисан рачунарски програм омогућује потврду постојећих, али и увођење нових теорема које се друкчије не би могле доказати. Таква је и Лема 2.5 код које је умањен услов да нека фамилија буде Франклова у односу на резултат Мориса(Morris)[3]. У Поглављу 3 налазе се резултати за $|\cup\mathcal{F}| = 11$ који су, уз мање измене, преузети из рада Бошњака и Марковића [2]. Рачунарском анализом је потврђен прилично обиман доказ да је свака фамилија затворена за унију, чији су скупови састављени од максимално 11 елемената, Франклова. Употреба ефикасних рачунарских алгоритама омогућава нам померање ове границе. У Поглављу 4 налази се доказ да је свака фамилија састављена од 12 елемената Франклова. То је, колико је нама познато, до сада најдаље докле се стигло по питању броја елемената од којих је састављена фамилија затворена за унију. У Поглављу 5 налазе се псеудокодови алгоритама коришћених за доказивање лема изложених у овом раду.

Поглавље 2

Општи резултати

Кроз овај рад $\mathcal{F}$ се односи на фамилију затворену за унију, а $X = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcup \mathcal{F}$ је скуп свих елемената који се појављују у $\mathcal{F}$. Фамилија $\mathcal{F}$ је *Франклова* ако је за њу задовољена Франклова хипотеза. Следећа дефиниција и теорема преузете су из [2] и основа су рачунарске анализе која је представљена у овом раду.

Дефиниција 2.1. Било коју функцију $w : X \to \{x \in R | x \geq 0\}$, такву да је $w(a) > 0$ за неко $a \in X$, зовемо *функција тежине*. Тежина $w(S)$, за $S \subseteq \cup\mathcal{F}$ је једнака $\sum\limits_{x\in S} w(x)$. Број $\frac{1}{2}w(X)$ је *циљана тежина* и означава се са $t(w)$.

Теорема 2.1. Фамилија $\mathcal{F}$ је Франклова ако и само ако постоји функција тежине $w : X \to R$, дефинисана на скупу $X = \bigcup \mathcal{F}$, таква да је

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} w(S) \geq t(w)|\mathcal{F}|$$

Доказ. Нека је $n_a(\mathcal{F})$ број појављивања елементна a у скуповима из $\mathcal{F}$. Претпоставимо да је $\mathcal{F}$ Франклова фамилија. Тада постоји елемент $a \in X$ за који је $n_a(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{2}|\mathcal{F}|$. Бирамо функцију тежине w такву да је $w(a) = 1$ и $w(x) = 0$ за $x \neq a$. Тада је $t(w) = \frac{1}{2}$ и

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} w(S) = n_a(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{2}|\mathcal{F}| = t(w)|\mathcal{F}|$$

Претпоставимо да $\mathcal{F}$ није Франклова, тј. за свако $a \in X$ је $n_a(\mathcal{F}) < \frac{1}{2}|\mathcal{F}|$. Узмимо произвољну функцију тежине w. Тада

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} w(S) = \sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{a\in S} w(a) = \sum_{a\in X} w(a) \sum_{S\in\mathcal{F},a\in S} 1 =$$
$$\sum_{a\in X} w(a)n_a(\mathcal{F}) < \sum_{a\in X} w(a)\frac{|\mathcal{F}|}{2} = t(w)|\mathcal{F}|.$$

Леме 2.1 и 2.2 се могу наћи у разним радовима, нпр. у [1].

Лема 2.1. Ако фамилија $\mathcal{F}$ садржи једноелементни скуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека $\{a\} \in \mathcal{F}$. Разматрамо скупове из $\mathcal{F}$ који не садрже a. За било који такав скуп K, скуп $K \bigcup \{a\}$ мора такође бити члан фамилије $\mathcal{F}$. На тај начин имамо инјекцију од скупова у $\mathcal{F}$ који не садрже a у скупове у $\mathcal{F}$ који садрже a, па a мора бити члан барем половине скупова из $\mathcal{F}$.

Дефиниција 2.2. Нека су $S, K \subseteq X$ и $S \cap K = \emptyset$. Интервал облика $\mathcal{C} = [K, K \cup S] = \{K \cup L | L \subseteq S\}$ зовемо *S-хиперкоцка (S-hypercube).*

За неки скуп кажемо да је на нивоу k S-хиперкоцке ако је k кардиналност његовог пресека са S. Скуп на нивоу 0 хиперкоцке (скуп K) зовемо доњи скуп хиперкоцке, док скуп $K \cup S$ зовемо горњи скуп хиперкоцке.
Ниво k хиперкоцке $\mathcal{C}$ је фамилија која се састоји од скупова који припадају $\mathcal{C}$ и кардиналност њиховог пресека са скупом S је k, односно
$\mathcal{C}_k = \{L | L \in \mathcal{C}, |L \cap S| = k\}$

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија скупова затворених за унију, w функција тежине и $L \subseteq \cup\mathcal{F}$. Разлику између тежине неког скупа и циљане тежине називамо *учешће скупа* и обележавамо са $u(L) = w(L) - t(w)$.
Учешће хиперкоцке $\mathcal{C}$ дефинишемо са
$u(\mathcal{C}) = \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}} u(L).$
Аналогно дефинишемо и $u(\mathcal{C}_k)$.
Учешће фамилије можемо представити на следећи начин:

$$u(\mathcal{F}) = \sum_{S\in\mathcal{F}} u(S) = \sum_{S\in\mathcal{F}} (w(S) - t(w)) = \sum_{S\in\mathcal{F}} w(S) - t(w)|\mathcal{F}|$$

Очигледна последица ове једначине и Теореме 2.1 је да ако за фамилију $\mathcal{F}$ постоји функција тежине w таква да је $u(\mathcal{F}) \geq 0$ тада је $\mathcal{F}$ Франклова. Посебно, ако је за сваку S-хиперкоцку $\mathcal{C}$, $u(\mathcal{C}) \geq 0$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Лема 2.2. Ако фамилија $\mathcal{F}$ садржи двоелементни скуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека $\{a, b\} \in \mathcal{F}$. Доделимо функцију тежине w члановима $X = \cup\mathcal{F}$ тако да је $w(a) = w(b) = 1$ и $w(x) = 0$ за све остале $x \in X$. Добијамо да је

$t(w) = 1$.
Узимамо произвољну хиперкоцку $\mathcal{C} = [K, K \cup \{a, b\}]$, где је $K \subseteq X \backslash \{a, b\}$. Имамо да је: $u(K) = -1$, $u(K \cup \{a\}) = u(K \cup \{b\}) = 0$ и $u(K \cup \{a, b\}) = 1$. Ако $K \in \mathcal{F}$ тада и $K \cup \{a, b\} \in \mathcal{F}$. Следи да је $u(\mathcal{C}_0) + u(\mathcal{C}_2) \geq 0$ и $u(\mathcal{C}_1) = 0$, па је $u(\mathcal{C}) \geq 0$. Пошто неједнакост важи за сваку хиперкоцку $\mathcal{C}$ биће $u(\mathcal{F}) \geq 0$, па је је $\mathcal{F}$ Франклова.

Због начина избора скупа S, за све S-хиперкоцке које разматрамо биће $S \in \mathcal{F}$. Последица тога је да за хиперкоцку која има непразан пресек са $\mathcal{F}$ горњи скуп те хиперкоцке је у $\mathcal{F}$.
Следећа формулација налази се у раду [5], а прихваћена је и код [3].

Нека је $\mathcal{B}$ фамилија скупова затворена за унију, за коју је $|\cup \mathcal{B}| = n$. За фамилију $\mathcal{B}$ која има особину, да за било коју фамилију затворену за унију $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, неки од n елемената из $\mathcal{B}$ се налази у барем половини скупова фамилије $\mathcal{A}$ кажемо да је $FC(n)$-фамилија. Кажемо да је фамилија FC ако је $FC(n)$ за неко n.
Дакле, једноелементни скуп је $FC(1)$-фамилија, док је двоелементни скуп $FC(2)$-фамилија.

Следећа теорема је формулисана у раду Мориса [3], док се поједини делови доказа налазе у [2],[4] и [5].

Лема 2.3. Нека $\mathcal{F}$ садржи три различита троелементна скупа који су сви подскупови истог петоелементног скупа. Тада је $\mathcal{F}$ Франклова фамилија.
Доказ. Рашчлањујемо доказ на случајеве који нису аналогни. Можемо поделити фамилије на класе које садрже три троелементна скупа од пет елемената, такве да се пермутацијом елемената фамилија различитих класа не може добити иста фамилија. За налажење таквих случајева примењујемо алгоритам $familije$ чији се псеудо-код налази у поглављу Програмска реализација. Алгоритам проналази и штампа представнике сваке од класа.
Добијамо четири неаналогне фамилије скупова:
1) $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ и $\{a, c, d\}$.
2) $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ и $\{a, b, e\}$.
3) $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ и $\{a, c, e\}$.
4) $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ и $\{c, d, e\}$.
На првом делу доказа приказујемо принцип рада алгоритма који користимо за доказивање, док остале делове доказа проверавамо уз помоћ рачунара применом алгоритма чији је опис дат у Поглављу 5.
Доказ 1) Бирамо функцију тежине w, тако да $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = 1$ и $w(x) = 0$ за $x \in X - \{a, b, c, d, e\}$, па је $t(w) = 2$.
Разматрамо произвољну $\{a, b, c, d\}$-хиперкоцку $\mathcal{C} = [K, K \bigcup \{a, b, c, d\}]$. Имамо да је $u(K) = -2$, $u(K \bigcup \{a, b, c, d\}) = 2$. Учешће скупова са нивоа 1 хиперкоцке је -1, са нивоа 2 је 0, а са нивоа 3 је 1. Уколико је било који скуп из $\mathcal{C}$ у $\mathcal{F}$, онда је и горњи скуп такође у $\mathcal{F}$.

Ако $K \in \mathcal{F}$, онда три скупа са нивоа 3 припадају $\mathcal{F}$ и тада је $u(\mathcal{C}) = 3$. Да би смо постигли да учешће хиперкоцке $\mathcal{C}$ буде негативно сва четири скупа са нивоа 1 морају бити у $\mathcal{F}$. Али, тада су и сва четири скупа са нивоа 3 у $\mathcal{F}$ и опет имамо да је $u(\mathcal{C}) \geq 0$.
Ако $K \notin \mathcal{F}$, онда су једини скупови који имају негативно учешће на нивоу 1, и да би било $u(\mathcal{C}) < 0$ мора их бити барем три у $\mathcal{F}$. Тада су у $\mathcal{F}$ барем три скупа са нивоа 3, као и горњи скуп хиперкоцке, па је опет $u(\mathcal{C}) \geq 0$.
2) бирамо тежине $w(a) = w(b) = 3$, $w(c) = w(d) = w(e) = 2$ и $w(x) = 0$ за $x \in X - \{a, b, c, d, e\}$.
3) бирамо тежине $w(a) = 6$, $w(b) = w(c) = 5$, $w(d) = w(e) = 3$ и $w(x) = 0$ за $x \in X - \{a, b, c, d, e\}$.
4) бирамо тежине $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = 2$, $w(e) = 1$ и $w(x) = 0$ за $x \in X - \{a, b, c, d, e\}$.
Примењујемо Алгоритам 1 на случајеве 2), 3) и 4) и рачунар потврђује да је $u(\mathcal{F}) \geq 0$, односно фамилија $\mathcal{F}$ је Франклова.
Следећа лема преузета је из [3].

Лема 2.4. Нека $\mathcal{F}$ садржи четири различита троелементна скупа који су сви подскупови истог шестоелементног скупа. Тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Примењујемо алгоритам за одређивање неаналогних комбинација од четири троелементна скупа. При том одбацујемо фамилије које садрже $FC(5)$-фамилије. Добијамо две суштински различите фамилије:
1) $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{c, e, f\}$ и $\{d, e, f\}$.
2) $\{a, b, c\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, d, f\}$ и $\{c, e, f\}$.
У обе варијанте додељујемо тежине $w(x) = 1$ за $x \in \{a, b, c, d, e, f\}$ и $w(x) = 0$ иначе. Рачунарски програм примењује Алгоритам 1 и за све фамилије које садрже неку од ове две комбинације троелементних скупова важи $u(\mathcal{F}) \geq 0$, односно фамилија је Франклова.

Следећа лема представља умањен услов да нека фамилија буде Франклова, у односу на Теорему 3 у раду [3]. Тамо је доказано, као последица Леме 2.4, да је довољно да фамилија садржи шест троелементних скупова који су подскупови истог седмоелементог скупа да би била Франклова. Рачунарска анализа нам омогућује да докажемо да су довољна четири таква скупа.

Лема 2.5. Нека $\mathcal{F}$ садржи четири различита троелементна скупа који су сви подскупови истог седмоелементног скупа. Тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Помоћу рачунарског програма правимо све комбинације од четири троелементна скупа чија је унија седмоелементни скуп. Притом, одбацујемо познате FC-фамилије, као и фамилије које се могу добити пермутацијом већ пронађених случајева. Постоји укупно осам различитих могућности и оне су табеларно приказане заједно са тежинама које додељујемо елементима фамилије. Применом Алгоритма 1, за сваки од ових случајева добијамо да је учешће фамилије увек веће или једнако 0, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

Скупови	$w(a)$	$w(b)$	$w(c)$	$w(d)$	$w(e)$	$w(f)$	$w(g)$	$t(w)$
$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,e,f\}\{a,e,g\}$	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0
$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,e,f\}\{b,e,g\}$	2.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	4.5
$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,e,f\}\{c,e,g\}$	3.0	2.0	3.0	1.0	3.0	2.0	2.0	8.0
$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,e,f\}\{e,f,g\}$	6.0	4.0	3.0	3.0	4.0	4.0	2.0	13.0
$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{c,e,f\}\{d,e,g\}$	3.0	3.0	3.0	3.0	2.0	1.0	1.0	8.0
$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{c,e,f\}\{e,f,g\}$	3.0	3.0	4.0	2.0	3.0	3.0	2.0	10.0
$\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{a,f,g\}\{b,d,f\}$	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0
$\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{b,d,f\}\{c,e,g\}$	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.0	1.0	6.0

У следећој табели дат је преглед довољних услова да фамилија $\mathcal{F}$ буде Франклова.

Лема	Скупови који припадају $\mathcal{F}$	FC-фамилије
2.1.	$\|A\| = 1$	$FC(1)$
2.2.	$\|A\| = 2$	$FC(2)$
2.3.	$\|A_i\| = 3, i = \{1,2,3\}, \|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\| \leq 5$	$FC(5)$
2.4.	$\|A_i\| = 3, i = \{1,2,3,4\}, \|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\| = 6$	$FC(6)$
2.5.	$\|A_i\| = 3, i = \{1,2,3,4\}, \|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\| = 7$	$FC(7)$

Поглавље 3

Резултати за $|X| = 11$

Теорема и леме које које се налазе у овом поглављу, углавном су преузете из [2] где се налази и њихов обиман доказ. При доказивању лема ћемо користити алгоритме који су описани у поглављу Програмска реализација.
Докази прате веома сличан шаблон: нека одређени скупови A_i, $i = \{1, 2, ..., n\}$ припадају $\mathcal{F}$. Доделимо тежине свим елементима фамилије. Специјално, елементима из $\cup\mathcal{F}\backslash\cup A_i$ додељујемо тежине 1 (за разлику од доказа у претходном поглављу, где су њихове тежине 0). У оквиру произвољне хиперкоцке испитујемо фамилије затворене за унију и одређујемо минималну вредност учешћа. При том из разматрања одбацујемо фамилије које садрже подфамилије за које смо већ доказали да је фамилија која их садржи Франклова. Испитујемо да ли се од овако одређених хиперкоцки може добити фамилија са негативним учешћем, и ако то није могуће закључујемо да је фамилија која садржи дате скупове Франклова.
Дакле, хиперкоцке које испитујемо у леми не садрже FC-фамилије, као ни фамилије за које смо доказали, у лемама које јој претходе, да је фамилија која их садржи Франклова.

Лема 3.1. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи два троелементна скупа са двоелементним пресеком, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a, b, c\}$ и $\{a, b, d\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, тако да је $w(a) = w(b) = 8$, $w(c) = w(d) = 6$ и $w(x) = 1$ за $x \in X - \{a, b, c, d\}$. Имамо да је $t(w) = 17.5$. Тежине елемената које се овде користе примењене су и у доказима у [2], а узете су тако да скупови који у старту припадају $\mathcal{F}$ имају позитивно учешће. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a, b, c, d\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Скуп K сачињавају неки од преосталих елемената и за тај скуп нам је битан само број елемената (може их бити од 0 до 7 у овом случају). Коришћењем Алгоритма 2, добијамо следеће минималне вредности учешћа хиперкоцки. За сваки од случајева исписана је и једна од хиперкоцки које имају то минимално учешће:

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	2.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.5	$\{a,b,c,d\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-8.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}$ $\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.5	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\{a,b,c,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.5	$\{\}\{c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	$\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	8.5	$\{\}\{c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.0	$\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
6	$\in \mathcal{F}$	15.5	$\{\}\{c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.5	$\{a,b,c,d\}$
7	$\in \mathcal{F}$	22.5	$\{\}\{c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	17.5	$\{a,b,c,d\}$

Скупови $\{a,b,c\}$ и $\{a,b,d\}$, као и скуп $X = \bigcup \mathcal{F}$ припадају фамилији $\mathcal{F}$, па она има непразан пресек са хиперкоцкама за које је $|K| = 0$ и $|K| = 7$ (у даљем тексту: са првом и последњом хиперкоцком). Оне заједно имају учешће барем $2 + 17.5 = 19.5$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K|K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 2 - 2*8 + 17.5 = 3.5$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 2 - 3*8 + 15.5 + 17.5 = 11$.

  3. $|\cup \mathcal{G}| = 7$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 2 - 3*8 + 22.5 = 0.5$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Лема 2.4 и 2.5).

Лема 3.2. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи три четвороелементна подскупа петоелементног скупа, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$ и $\{a,b,d,e\}$ та три скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = w(e) = 4$, и $w(x) = 1$ за $x \in X - \{a,b,c,d,e\}$. Тада је $t(w) = 13$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо следеће

резултате:

$\lvert K \rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	1.0	$\{\}\{a,c,d\}\{a,b,c,d\}\{a,b,e\}$ $\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{c,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{a,b,c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}$ $\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\{a,b,c,d\}$ $\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-10.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$ $\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\{a,b,c,d\}$ $\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}$ $\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	$\{a,b,c,d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	20.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d\}$ $\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	$\{a,b,c,d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	28.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d\}$ $\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	$\{a,b,c,d,e\}$

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $1+13=14$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 2$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 1 - 10 + 13 = 4$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 2$ и нека је

    1. $|\cup \mathcal{G}| = 4$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 3.1)

    2. $|\cup \mathcal{G}| = 5$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 1 - 2 * 10 + 20 + 13 = 14$.

    3. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 1 - 2 * 10 + 28 = 9$.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

2. $|\cup\mathcal{G}| = 6$, тада у $\mathcal{G}$ постоје два скупа чија је унија четвороелементни или петоелементни скуп и тада је $u(\mathcal{F}) \geq 1-3*10+8+28 = 7$, односно $u(\mathcal{F}) \geq 1-3*10+20+28 = 19$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 3.3. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи три четвороелементна скупа који сви садрже иста три елемента, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$ и $\{a,b,c,f\}$ та три скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(x) = 3$ за $x \in \{a,b,c,d,e,f\}$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 11.5$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e,f\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Добијамо следеће резултате:

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-0.5	$\{\}\{b,c,d\}\{a,b,c,d\}\{a,c,e\}\{a,b,c,e\}$ $\{a,b,c,d,e\}\{a,b,f\}\{a,b,c,f\}$ $\{a,b,c,d,f\}\{a,b,c,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.5	$\{d\}\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}\{a,b,c,d,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}$ $\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}$ $\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{a,b,c,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}$ $\{a,b,d,e\}\{c,d,e\}\{a,c,d,e\}\{b,c,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$ $\{a,b,c,f\}\{a,b,c,d,f\}\{a,b,c,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.5	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}$ $\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}$ $\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{a,b,c,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}$ $\{a,b,d,e\}\{c,d,e\}\{a,c,d,e\}\{b,c,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$ $\{a,b,c,f\}\{a,b,c,d,f\}\{a,b,c,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	18.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}$ $\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}\{a,b,c,f\}$ $\{a,b,c,d,f\}\{a,b,c,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.5	$\{a,b,c,d,e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	37.5	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}$ $\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}\{a,b,c,f\}$ $\{a,b,c,d,f\}\{a,b,c,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.5	$\{a,b,c,d,e,f\}$

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $-0.5 + 11.5 = 11$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a, b, c, d, e, f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 2$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq -0.5 - 6 + 11.5 = 5$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 2$ и нека је

    1. $|\cup \mathcal{G}| = 4$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 3.1).

    2. $|\cup \mathcal{G}| = 5$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq -0.5 - 2 * 6 + 37.5 = 25$.

- $|\mathcal{G}| > 2$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

Лема 3.4. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи два четвороелементна подскупа петоелементног скупа, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a, b, c, d\}$ и $\{a, b, c, e\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(x) = 4$ за $x \in \{a, b, c, d, e\}$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 13$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a, b, c, d, e\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-2.0	$\{\}\{a,c,d\}\{a,b,c,d\}\{a,b,e\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{d\}\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-4.0	$\{\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}$ $\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}$ $\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}$ $\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}$ $\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	$\{a,b,c,d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	19.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	$\{a,b,c,d,e\}$

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $-2+13 = 11$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K|K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e\}, |K| = 3\}$. Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq -2-2*4+13 = 3$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup\mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup\mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq -2-3*4+19 = 5$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 3.5. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи два троелементна скупа који имају један заједнички елемент, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a,b,c\}$ и $\{a,d,e\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = 8$, $w(x) = 4$ за $x \in \{b,c,d,e\}$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 15$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-4.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a,b,c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{a,b,c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{a\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,c,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	$\{a,b,c,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	$\{a,b,c,d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.0	$\{a,b,c,d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	18.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.0	$\{a,b,c,d,e\}$

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће веће или једнако 0. Пошто остале хиперкоцке имају ненегативно учешће биће $u(\mathcal{F}) \geq 0$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.
У случајевима као што је овај, убудуће нећемо експлицитно наглашавати

да је тачност леме директна последица резултата приказаних у табели.

Лема 3.6. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи два дисјунктна троелементна скупа, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a,b,c\}$ и $\{d,e,f\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(x) = 2.5$ за $x \in \{a,b,c,d,e,f\}$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 10$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e,f\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-10.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	0.5	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{a\}\{a,b,c\}\{a,d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a,b,c,d,e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	10.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{a,b,c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{a,b,c,d,e,f\}$

Лема 3.7. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи четвороелементни скуп и његов троелементни подскуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a,b,c\}$ и $\{a,b,c,d\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = 3$, $w(d) = 2$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 9$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-7.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b,c,d\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b,c,d\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,d\}\{a,b,c,d\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{d\}\{a,d\}\{a,b,c,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{d\}\{a,b,c,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{d\}\{a,b,c,d\}$
6	$\in \mathcal{F}$	10.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{d\}\{a,b,c,d\}$
7	$\in \mathcal{F}$	14.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a,b,c,d\}$

Лема 3.8. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи петоелементни скуп и његов троелементни подскуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Доказ. Нека су $\{a,b,c\}$ и $\{a,b,c,d,e\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = 3$, $w(d) = w(e) = 1.5$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 9$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b,c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{d,e\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	1.5	$\{d\}\{a,d\}\{a,b,c,d\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{d,e\}\{a,b,c,d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a,b,c,d,e\}$

Лема 3.9. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи петоелементни скуп и његов четвороелементни подскуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека су $\{a,b,c,d\}$ и $\{a,b,c,d,e\}$ та два скупа у $\mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = w(e) = 2$, и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 8$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b,c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a,e\}\{a,b,c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{e\}\{a,b,c,d,e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{e\}\{a,e\}\{a,b,c,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	2.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{e\}\{a,b,c,d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{e\}\{a,b,c,d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{a,b,c,d,e\}$

Лема 3.10. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи троелементни скуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Нека је $\{a,b,c\} \in \mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = 4$ и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 10$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-8.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b,c\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b,c\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a,b,c\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a\}\{a,b,c\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a\}\{a,b,c\}$
5	$\in \mathcal{F}$	1.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{a,b,c\}$
6	$\in \mathcal{F}$	4.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{a,b,c\}$
7	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a,b,c\}$
8	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{a,b,c\}$

Лема 3.11. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи четвороелементни скуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Доказ. Нека је $\{a,b,c,d\} \in \mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = 2.5$ и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 8.5$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-7.0	$\{\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.5	$\{a,b,c,d\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	2.5	$\{a,b,c,d\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.5	$\{b,c\}\{a,d\}\{a,b,c,d\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	1.5	$\{a\}\{a,b,c,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.0	$\{\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	2.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.5	$\{a\}\{a,b,c,d\}$
6	$\in \mathcal{F}$	5.0	$\{\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.5	$\{a,b,c,d\}$
7	$\in \mathcal{F}$	7.0	$\{\}\{a,b,c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.5	$\{a,b,c,d\}$

Лема 3.12. Ако је $|X| = 11$ и $\mathcal{F}$ садржи петоелементни скуп, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Доказ. Нека је $\{a,b,c,d,e\} \in \mathcal{F}$. Разматрамо функцију тежине w, са $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = w(e) = 2$ и $w(x) = 1$ за све остале $x \in X$. Тада је $t(w) = 8$. Нека је $\mathcal{C}$ $\{a,b,c,d,e\}$-хиперкоцка са доњим скупом K. Применом Алгоритма 2 добијамо:

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b,c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b,c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a,b,c,d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d,e\}$
4	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c,d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{a,b,c,d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b,c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{a,b,c,d,e\}$

Теорема 3.1. Ако је $|X| = 11$ тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

Доказ. Доказано је за $|X| = 11$ да је фамилија која садржи непразан скуп са мање од шест елемената Франклова. Нека фамилија $\mathcal{F}$ садржи само скупове (поред празног скупа) који имају барем шест елемената. Бирамо функцију тежине $w(x) = 1$ за свако $x \in X$ и тада имамо $t(w) = 5.5$. Имамо да је $u(\emptyset) + u(X) = 0$ док је учешће било ког трећег скупа веће од 0. То значи да је и $u(\mathcal{F}) \geq 0$, односно фамилија $\mathcal{F}$ за коју је $|\bigcup \mathcal{F}| = 11$ је Франклова.

У следећој табели дат је преглед доказаних лема.

Лема	Скупови који припадају $\mathcal{F}$
3.1.	$\|A\| = 3, \|B\| = 3, \|A \bigcap B\| = 2$
3.2.	$\|A\| = 4, \|B\| = 4, \|C\| = 4, \|A \bigcup B \bigcup C\| = 5$
3.3.	$\|A\| = 4, \|B\| = 4, \|C\| = 4, \|A \bigcap B \bigcap C\| = 3$
3.4.	$\|A\| = 4, \|B\| = 4, \|A \bigcap B\| = 3$
3.5.	$\|A\| = 3, \|B\| = 3, \|A \bigcap B\| = 1$
3.6.	$\|A\| = 3, \|B\| = 3, \|A \bigcap B\| = 0$
3.7.	$\|A\| = 3, \|B\| = 4, A \subset B$
3.8.	$\|A\| = 3, \|B\| = 5, A \subset B$
3.9.	$\|A\| = 4, \|B\| = 5, A \subset B$
3.10.	$\|A\| = 3$
3.11.	$\|A\| = 4$
3.12.	$\|A\| = 5$

Поглавље 4

Резултати за $|X| = 12$

У овом поглављу налазе се леме потребне за доказ да је фамилија затворена за унију, чији се скупови састоје од максимално 12 елемената, Франклова. Уз сваку од лема дате су вредности функције тежине, а табеларно је приказано минимално учешће хиперкоцки, као и скупови са негативним учешћем, који припадају фамилији. Ради прегледности, нису исписани остали скупови који припадају фамилији, а који се добијају затварањем фамилије за унију. На крају поглавља налази се теорема за $|X| = 12$, као и табеларни приказ лема.

Лема 4.1. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a, b, c, d, e\}$	$t(w)$
Тежина	12.0	12.0	9.0	9.0	6.0	1.0	27.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	30.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	17.0	$\{c, d, e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	19.0	$\{c, d, e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	7.5	$\{d\}\{c, d\}\{e\}\{c, e\}\{d, e\}\{c, d, e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-18.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a, b\}\{c\}\{a, c\}\{b, c\}\{d\}$ $\{a, d\}\{b, d\}\{c, d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.5	$\{a\}\{b\}\{a, b\}\{c\}\{a, c\}\{b, c\}\{d\}\{a, d\}$ $\{b, d\}\{c, d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{c\}\{a, c\}\{b, c\}\{d\}\{a, d\}$ $\{b, d\}\{c, d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	21.5	$\{e\}\{c, e\}\{d, e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	15.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c, d\}\{e\}\{c, e\}\{d, e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	25.5	
6	$\in \mathcal{F}$	29.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c, d\}\{e\}\{c, e\}\{d, e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	26.5	
7	$\in \mathcal{F}$	43.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c, d\}\{e\}\{c, e\}\{d, e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	27.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $17 + 27.5 = 44.5$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a, b, c, d, e\}, |K| = 3\}$. Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 17 - 2 * 18 + 27.5 = 8.5$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.
- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је
  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).
  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 17 - 3 * 18 + 29 + 27.5 = 19.5$.
  3. $|\cup \mathcal{G}| = 7$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 17 - 3 * 18 + 43 = 6$.
- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Лема 2.4 и 2.5).

Лема 4.2. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, c, f\}$, $\{d, e, f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a, b, c, d, e, f\}$	$t(w)$
Тежина	5.0	5.0	5.0	12.0	12.0	12.0	1.0	28.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	15.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	22.5	
1	$\notin \mathcal{F}$	23.5	
2	$\notin \mathcal{F}$	22.5	$\{a\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{a,d\}\{a,e\}\{b,c,e\}\{a,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-20.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$ $\{a,b,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{b,f\}\{a,b,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.5	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$ $\{a,b,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{b,f\}\{a,b,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	4.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$ $\{f\}\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	26.5	
5	$\in \mathcal{F}$	28.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{f\}$ $\{a,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	27.5	
6	$\in \mathcal{F}$	48.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d\}\{e\}\{f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	28.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $15+28.5=43.5$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f\}, |K|=3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 15 - 2*20 + 28.5 = 3.5$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 15 - 3*20 + 48 = 3$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.3. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	6.0	6.0	6.0	9.0	9.0	6.0	1.0	24.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	18.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	19.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	12.0	$\{f\}\{a,f\}\{d,f\}\{a,d,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-15.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$ $\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$ $\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$ $\{f\}\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	20.0	$\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$ $\{f\}\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	15.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	23.0	
6	$\in \mathcal{F}$	30.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	24.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $6 + 24 = 30$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 2 * 15 + 24 = 0$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада унија нека два од та три скупа мора бити петоелементни скуп: а)Нека два скупа имају двоелементни пресек; трећи скуп садржи преостала два елемента од шест елемената и мора имати једноелементни пресек са барем једним од ова два скупа. б)Нека два скупа немају заједничких елемената; трећи скуп ће са једним од ова два скупа имати једноелементни пресек.
     Имамо да је $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 3 * 15 + 15 + 30 = 6$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.4. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,d,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	11.0	7.0	7.0	7.0	7.0	1.0	23.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-3.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	12.0	$\{b,c\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{b\}\{a,b\}\{b,c\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{b\}\{c\}\{b,c\}\{d\}\{b,d\}\{c,d\}\{e\}\{b,e\}$ $\{c,e\}\{d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	19.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}$
5	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	21.0	
6	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	22.0	
7	$\in \mathcal{F}$	18.0	$\{\}\{a\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	23.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $-3+18=15$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e\}, |K| = 3\}$. Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq -3-2*6+18 = 3$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq -3-3*6+12+18 = 9$.

  3. $|\cup \mathcal{G}| = 7$, тада постоје два скупа из $\mathcal{G}$ чија је унија петоелементни или шестоелементни скуп (ако је унија два скупа четвороелементни скуп, унија трећег скупа са једним од ова два није четвороелементни скуп). Дакле, имамо да је $u(\mathcal{F}) \geq -3-3*6+6+18 = 3$ или $u(\mathcal{F}) \geq -3-3*6+12+18 = 9$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Лема 2.3 и 2.4).

Лема 4.5. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	6.0	6.0	4.0	1.0	17.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	2.0	$\{\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	12.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{b,e\}\{a,b,e\}$ $\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{a,f\}\{b,f\}\{a,b,f\}$ $\{c,f\}\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{b,e,f\}$ $\{c,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-2.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}$ $\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}\{f\}\{a,f\}\{b,f\}\{a,b,f\}$ $\{c,f\}\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}$ $\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}\{f\}\{a,f\}\{b,f\}$ $\{a,b,f\}\{c,f\}\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	5.0	$\{\}\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.0	
5	$\in \mathcal{F}$	20.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.0	
6	$\in \mathcal{F}$	29.0	$\{\}\{d\}\{e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	17.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $2 + 17 = 19$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| \leq 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 2 - 3*2 + 17 = 13$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.6. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,c,g\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	g	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f,g\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	1.0	16.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	30.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{a,b,c,f\}$ $\{d,e,f\}\{a,b,c,g\}\{d,e,g\}\{d,e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	$\{d,e,f,g\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	12.5	
2	$\notin \mathcal{F}$	0.5	$\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{a,f\}$ $\{d,f\}\{a,d,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{d,e,f\}\{a,g\}$ $\{d,g\}\{a,d,g\}\{e,g\}\{a,e,g\}\{d,e,g\}\{f,g\}$ $\{a,f,g\}\{d,f,g\}\{e,f,g\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-9.0	$\{\}\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\{e\}$ $\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}$ $\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}\{c,d,e\}\{f\}\{a,f\}$ $\{b,f\}\{a,b,f\}\{c,f\}\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{d,f\}$ $\{a,d,f\}\{b,d,f\}\{c,d,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{b,e,f\}$ $\{c,e,f\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.5	$\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\{e\}$ $\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}$ $\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}\{c,d,e\}\{f\}\{a,f\}$ $\{b,f\}\{a,b,f\}\{c,f\}\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{d,f\}$ $\{a,d,f\}\{b,d,f\}\{c,d,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{b,e,f\}$ $\{c,e,f\}\{d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	26.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}$ $\{d\}\{a,d\}\{b,d\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}$ $\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}\{c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.5	
5	$\in \mathcal{F}$	70.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{d\}$ $\{a,d\}\{b,d\}\{c,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}$ $\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $11+16.5=27.5$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f,g\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| \leq 2$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 11 - 2*9 + 16.5 = 9.5$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 2$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

Лема 4.7. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,d,f\}$, $\{a,b,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	5.0	5.0	4.0	4.0	4.0	4.0	1.0	16.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	22.0	$\{\}\{c,d,e\}\{c,d,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	11.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{a,b\}\{c\}\{a,d\}\{b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{d,e\}$ $\{a,d,e\}\{b,d,e\}\{c,d,e\}\{a,f\}\{b,f\}\{c,f\}$ $\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{d,f\}\{a,d,f\}\{b,d,f\}\{c,d,f\}$ $\{e,f\}\{a,e,f\}\{b,e,f\}\{c,e,f\}\{d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	7.0	$\{\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$ $\{c,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}\{d,e\}\{c,d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{c,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}\{d,e\}$ $\{c,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	26.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{c,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.0	
5	$\in \mathcal{F}$	53.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{c,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.0	
6	$\in \mathcal{F}$	80.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће веће или једнако 0. Пошто остале хиперкоцке имају ненегативно учешће биће $u(\mathcal{F}) \geq 0$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.
У случајевима као што је овај, убудуће нећемо експлицитно наглашавати да је тачност леме директна последица резултата приказаних у табели.

Лема 4.8. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,c,g\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	g	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f,g\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	14.5

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	29.0	$\{\}\{d,e,f\}\{d,e,g\}\{a,d,f,g\}\{a,e,f,g\}\{d,e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{d,e,f,g\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{d,e,f,g\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.5	$\{d\}\{a,d\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{a,f\}\{d,f\}\{a,d,f\}$ $\{e,f\}\{a,e,f\}\{d,e,f\}\{a,g\}\{a,d,g\}\{e,g\}$ $\{a,e,g\}\{d,e,g\}\{f,g\}\{a,f,g\}\{d,f,g\}\{e,f,g\}$ $\{d,e,f,g\}$
3	$\in \mathcal{F}$	7.5	$\{\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{d,f\}\{a,d,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{d,e,f\}$ $\{a,g\}\{d,g\}\{a,d,g\}\{e,g\}\{a,e,g\}\{d,e,g\}$ $\{f,g\}\{a,f,g\}\{d,f,g\}\{e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{b\}\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}$ $\{f\}\{b,f\}\{d,f\}\{b,d,f\}\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$ $\{g\}\{b,g\}\{d,g\}\{b,d,g\}\{e,g\}\{b,e,g\}\{d,e,g\}$ $\{f,g\}\{b,f,g\}\{d,f,g\}\{e,f,g\}$
4	$\in \mathcal{F}$	38.5	$\{\}\{b\}\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}$ $\{f\}\{b,f\}\{d,f\}\{b,d,f\}\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$ $\{g\}\{b,g\}\{d,g\}\{b,d,g\}\{e,g\}\{b,e,g\}\{d,e,g\}$ $\{f,g\}\{b,f,g\}\{d,f,g\}\{e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.5	
5	$\in \mathcal{F}$	77.5	$\{\}\{d\}\{e\}\{d,e\}\{f\}\{d,f\}\{e,f\}\{d,e,f\}$ $\{g\}\{d,g\}\{e,g\}\{d,e,g\}\{f,g\}\{d,f,g\}\{e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.5	

Лема 4.9. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	5.0	5.0	5.0	4.0	4.0	4.0	1.0	16.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	15.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{d,e\}\{b,d,e\}\{d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	1.5	$\{d\}\{b,d\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}\{d,f\}\{b,d,f\}$ $\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-11.5	$\{\}\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}\{f\}$ $\{b,f\}\{d,f\}\{b,d,f\}\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.5	$\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}\{f\}$ $\{b,f\}\{d,f\}\{b,d,f\}\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	4.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.0	$\{d,e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	28.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.5	
6	$\in \mathcal{F}$	48.0	$\{\}\{d\}\{e\}\{d,e\}\{f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $6 + 16.5 = 22.5$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 2$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 11.5 + 16.5 = 11$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 2$, тада је и унија та два скупа у $\mathcal{F}$, па је $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 2 * 11.5 + 4 + 16.5 = 3.5$ или $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 2 * 11.5 + 28 + 16.5 = 27.5$ или $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 2 * 11.5 + 48 = 31$, па је фамилија Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq 6 - 3 * 11.5 + 48 = 19.5$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.10. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{e,f,g\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	g	$x \in X - \{a, b, c, d, e, f, g\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	13.0

$\lvert K \rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-9.0	$\{\}\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{e,f,g\}\{a,e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a,b,c\}\{a,b,c,d\}\{a,b,c,e\}\{e,f,g\}\{a,e,f,g\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a,c\}\{a,b,c\}\{a,b,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{e,f,g\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}\{e,f,g\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-4.0	$\{\}\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{e\}\{a,e\}$ $\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a\}\{a,b,c\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$ $\{a,d,e\}\{e,f,g\}$
4	$\in \mathcal{F}$	9.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{e\}$ $\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	
5	$\in \mathcal{F}$	24.0	$\{\}\{a\}\{e\}\{a,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $-9+13=4$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f,g\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 2$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq -9 - 4 + 13 = 0$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 2$, тада је и унија та два скупа у $\mathcal{F}$, па је $u(\mathcal{C}) \geq -9-2*4+9+13 = 5$ или $u(\mathcal{C}) \geq -9 - 2*4 + 24 = 7$, па је фамилија Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 2$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

Лема 4.11. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a, b, c, d, e, f\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	7.0	3.0	3.0	1.0	15.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-8.5	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.5	$\{a,e,f\}\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{e,f\}\{d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{e,f\}\{d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-2.5	$\{\}\{c\}\{a,b,c\}\{c,d\}\{e,f\}\{c,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.5	$\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\{e\}\{a,e\}$ $\{b,e\}\{a,b,e\}\{c,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{a,f\}$ $\{b,f\}\{a,b,f\}\{c,f\}\{a,c,f\}\{b,c,f\}\{e,f\}$ $\{a,e,f\}\{b,e,f\}\{c,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	4.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e,f\}\{c,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.5	
5	$\in \mathcal{F}$	13.0	$\{\}\{d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.5	
6	$\in \mathcal{F}$	19.0	$\{\}\{d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $-8.5 + 15.5 = 7$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq -8.5 - 2 * 2.5 + 15.5 = 2$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq -8.5 - 3 * 2.5 + 19 = 3$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.12. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	5.0	5.0	5.0	4.0	4.0	4.0	1.0	16.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	13.5	$\{\}\{b,d,e\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{d,e\}\{b,d,e\}\{d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{d\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}\{b,f\}\{d,f\}\{b,d,f\}$ $\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-3.5	$\{\}\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}\{b,f\}$ $\{d,f\}\{b,d,f\}\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.5	$\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}\{b,d,e\}\{f\}$ $\{b,f\}\{d,f\}\{b,d,f\}\{e,f\}\{b,e,f\}\{d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.5	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.0	$\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{f\}\{a,f\}$ $\{d,f\}\{e,f\}\{d,e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	24.5	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.5	
6	$\in \mathcal{F}$	43.5	$\{\}\{d\}\{e\}\{d,e\}\{f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $6 + 16.5 = 22.5$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| \leq 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 6 - 3 * 3.5 + 16.5 = 12$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.13. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{c,d,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	6.0	6.0	6.0	1.0	16.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	1.5	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.5	
1	$\notin \mathcal{F}$	9.5	$\{d, e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	9.0	$\{a\}\{b\}\{a, b\}\{a, b, c\}\{a, b, e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-0.5	$\{\}\{a\}\{b\}\{a, b\}\{a, c\}\{b, c\}\{a, d\}\{b, d\}$ $\{c, d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{a\}\{b\}\{a, b\}\{a, c\}\{b, c\}\{a, d\}\{b, d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.5	$\{\}\{c\}\{d\}\{c, d\}\{e\}\{c, e\}\{d, e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	$\{c\}\{d\}\{c, d\}\{e\}\{c, e\}\{d, e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	11.5	$\{\}\{c\}\{d\}\{e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.5	
6	$\in \mathcal{F}$	22.5	$\{\}\{c\}\{d\}\{e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	15.5	
7	$\in \mathcal{F}$	32.0	$\{\}\{c\}\{d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	16.5	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $1.5 + 16.5 = 18$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a, b, c, d, e\}, |K| = 3\}$. Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| \leq 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 1.5 - 3 * 0.5 + 16.5 = 16.5$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Лема 2.4 и 2.5).

Лема 4.14. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, f\}$, $\{a, b, c, d, g\}$, $\{e, f, g\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	g	$x \in X - \{a, b, c, d, e, f, g\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	13.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b,c,d\}\{a,e,f\}\{e,f,g\}\{a,e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{e,f,g\}\{a,e,f,g\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{e,f\}\{a,e,f\}\{e,f,g\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,e\}\{a,b,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}$ $\{b,e,f\}\{a,b,g\}\{a,e,g\}\{b,e,g\}\{a,f,g\}$ $\{b,f,g\}\{e,f,g\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-9.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{a,f\}$ $\{b,f\}\{a,b,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{b,e,f\}\{a,g\}$ $\{b,g\}\{a,b,g\}\{e,g\}\{a,e,g\}\{b,e,g\}\{f,g\}$ $\{a,f,g\}\{b,f,g\}\{e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,e\}\{b,e\}\{a,b,e\}\{a,f\}$ $\{b,f\}\{a,b,f\}\{e,f\}\{a,e,f\}\{b,e,f\}\{a,g\}$ $\{b,g\}\{a,b,g\}\{e,g\}\{a,e,g\}\{b,e,g\}\{f,g\}$ $\{a,f,g\}\{b,f,g\}\{e,f,g\}$
4	$\in \mathcal{F}$	9.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{f\}$ $\{a,f\}\{b,f\}\{e,f\}\{g\}\{a,g\}\{b,g\}\{e,g\}$ $\{f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	
5	$\in \mathcal{F}$	32.0	$\{\}\{a\}\{e\}\{a,e\}\{f\}\{a,f\}\{e,f\}\{g\}$ $\{a,g\}\{e,g\}\{f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $3+13=16$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e,f,g\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 2$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 3-9+13 = 7$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 2$, тада је и унија та два скупа у $\mathcal{F}$, па је $u(\mathcal{C}) \geq 3-2*9+9+13 = 7$ или $u(\mathcal{C}) \geq 3-2*9+32 = 17$, па је фамилија Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 2$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

Лема 4.15. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d,e\}$, $\{d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	7.0	7.0	4.0	1.0	18.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{e, f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	11.0	$\{e, f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-5.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{a,b,c\}\{a,d\}\{b,d\}\{a,f\}$ $\{b,f\}\{a,b,f\}\{d,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{a\}\{a,d\}\{f\}\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{e\}\{a,e\}\{f\}\{a,f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	$\{f\}\{d,f\}\{e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	14.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{f\}\{a,f\}$ $\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	17.0	
6	$\in \mathcal{F}$	24.0	$\{\}\{d\}\{e\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	18.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $3 + 18 = 21$. Само хиперкоцке за које је $|K| = 3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки:
$\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a, b, c, d, e, f\}, |K| = 3\}$.
Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| \leq 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq 3 - 3 * 5 + 18 = 6$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.4).

Лема 4.16. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a, b, c, d, e\}$	$t(w)$
Тежина	4.5	4.5	4.0	4.0	4.0	1.0	14.0

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-1.0	$\{\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{c,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{c,d\}\{c,e\}\{c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b\}\{c\}\{c,d\}\{c,e\}\{d,e\}$
3	$\in \mathcal{F}$	-5.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{c,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{c\}\{d\}\{c,d\}\{c,e\}\{d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	
6	$\in \mathcal{F}$	24.0	$\{\}\{c\}\{d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.0	
7	$\in \mathcal{F}$	32.0	$\{\}\{c\}\{d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	14.0	

Фамилија $\mathcal{F}$ има непразан пресек са првом и последњом хиперкоцком, и оне заједно имају учешће барем $-1+14=13$. Само хиперкоцке за које је $|K|=3$ и $K \in \mathcal{F}$ могу имати негативно учешће. Нека је $\mathcal{G}$ фамилија доњих скупова таквих хиперкоцки: $\mathcal{G} = \{K | K \in \mathcal{F}, K \subseteq X - \{a,b,c,d,e\}, |K| = 3\}$. Имамо следеће случајеве:

- $|\mathcal{G}| < 3$, тада је $u(\mathcal{C}) \geq -1-2*5+14 = 3$, па је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.

- $|\mathcal{G}| = 3$ и нека је

  1. $|\cup \mathcal{G}| < 6$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Леме 2.3).

  2. $|\cup \mathcal{G}| = 6$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq -1-3*5+24+14 = 22$.

  3. $|\cup \mathcal{G}| = 7$, тада је $u(\mathcal{F}) \geq -1-3*5+32 = 16$.

- $|\mathcal{G}| > 3$, тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова (последица Лема 2.4 и 2.5).

Лема 4.17. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	12.0

$\lvert K \rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-12.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b\}\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a,b\}\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{d,e,f\}$
3	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a\}\{d\}\{a,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{a\}\{d\}\{a,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	
6	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	

Лема 4.18. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	$x \in X - \{a,b,c,d\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	4.0	1.0	12.0

$\lvert K \rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-8.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a,b\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{c,d\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a,b\}\{c\}\{d\}\{c,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	
5	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	
6	$\in \mathcal{F}$	14.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	
7	$\in \mathcal{F}$	19.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	
8	$\in \mathcal{F}$	24.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	

Лема 4.19. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$, $\{d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	4.0	4.0	4.0	1.0	13.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-0.5	$\{\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	6.5	$\{e,f\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{a\}\{d\}\{a,d\}\{a,e\}\{e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,f\}$ $\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.5	$\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,f\}\{d,f\}$ $\{e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	9.5	$\{\}\{d\}\{e\}\{d,e\}\{f\}\{d,f\}\{e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.5	
6	$\in \mathcal{F}$	20.5	$\{\}\{d\}\{e\}\{f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.5	

Лема 4.20. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{c,d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	2.0	2.0	2.0	1.0	10.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-9.0	$\{\}\{a,b,c\}\{c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a,b,e\}\{c,d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}\{c,d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.5	$\{c,e\}\{d,e\}\{c,d,e\}\{d,f\}\{c,d,f\}\{d,e,f\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}\{c,d,e\}\{d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.5	$\{\}\{c\}\{d\}\{c,d\}\{d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{c\}\{d\}\{c,d\}\{d,e,f\}$
5	$\in \mathcal{F}$	8.5	$\{\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.5	
6	$\in \mathcal{F}$	13.5	$\{\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.5	

Лема 4.21. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	11.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-7.0	$\{\}\{a,b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	5.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	9.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	
6	$\in \mathcal{F}$	20.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	
7	$\in \mathcal{F}$	27.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	

Лема 4.22. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{b,c,d,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	5.0	5.0	3.0	3.0	1.0	13.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-4.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,d,e\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	7.5	
2	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{d,e\}\{a,d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.5	$\{\}\{a\}\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.5	$\{a\}\{a,b\}\{a,c\}$
5	$\in \mathcal{F}$	7.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.5	
6	$\in \mathcal{F}$	15.5	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.5	
7	$\in \mathcal{F}$	21.5	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	13.5	

Лема 4.23. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	4.0	4.0	4.0	2.0	2.0	2.0	1.0	12.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-4.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{d,e,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{d,e,f\}\{a,d,e,f\}\{b,d,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{d,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}\{d,f\}\{a,d,f\}\{d,e,f\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{d\}\{a,d\}\{b,d\}\{e\}\{a,e\}\{b,e\}\{d,e\}$ $\{a,d,e\}\{b,d,e\}\{d,e,f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	2.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{d\}\{a,d\}\{b,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	
5	$\in \mathcal{F}$	10.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	
6	$\in \mathcal{F}$	18.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	

Лема 4.24. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c\}$, $\{d,e,f,g\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	g	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f,g\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.0	11.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-10.0	$\{\}\{a,b,c\}\{d,e,f,g\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f,g\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a,b,c\}\{d,e,f,g\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{d,f\}\{a,d,f\}\{e,g\}\{a,e,g\}\{d,e,f,g\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{d\}\{a,d\}\{e\}\{a,e\}\{d,e\}\{a,d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}\{b\}\{d\}\{b,d\}\{e\}\{b,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	
5	$\in \mathcal{F}$	10.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	

Лема 4.25. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скуп $\{a,b,c\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	$x \in X - \{a,b,c\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	1.0	9.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-9.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	1.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	2.0	
3	$\notin \mathcal{F}$	3.0	
4	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a\}\{b\}$
5	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a\}$
6	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	
7	$\in \mathcal{F}$	5.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	
8	$\in \mathcal{F}$	7.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	
9	$\notin \mathcal{F}$	9.0	

Лема 4.26. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, c, d, f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a, b, c, d, e, f\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.0	1.0	11.5

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a, c, d, f\}\{b, d, e, f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{a, d, e, f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{d, e, f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	2.5	$\{b, c\}\{a, b, c\}\{a, e\}\{a, b, e\}\{c, e\}\{a, c, e\}$ $\{b, c, e\}\{a, f\}\{b, f\}\{a, b, f\}\{a, c, f\}\{b, c, f\}$ $\{a, e, f\}\{b, e, f\}\{c, e, f\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{b\}\{a, b\}\{a, c\}\{b, c\}\{a, d\}\{b, d\}\{c, d\}$ $\{f\}\{a, f\}\{b, f\}\{a, b, f\}\{c, f\}\{a, c, f\}\{b, c, f\}$ $\{d, f\}\{a, d, f\}\{b, d, f\}\{c, d, f\}$
4	$\in \mathcal{F}$	4.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a, b\}\{c\}\{a, c\}\{b, c\}\{d\}$ $\{a, d\}\{b, d\}\{c, d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.5	
5	$\in \mathcal{F}$	21.5	$\{\}\{b\}\{c\}\{b, c\}\{d\}\{b, d\}\{c, d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.5	
6	$\in \mathcal{F}$	32.5	$\{\}\{b\}\{c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.5	

Лема 4.27. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a, b, c, d, e, f\}$	$t(w)$
Тежина	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.0	9.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-7.0	$\{\}\{a,b,c,d\}\{a,b,e,f\}\{c,d,e,f\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a,b,c,e\}\{b,c,d,e\}\{a,b,d,f\}\{a,c,d,f\}$
1	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{c,d,e\}\{c,d,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a,b\}\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$ $\{a,b,e\}\{a,c,e\}\{b,c,e\}\{a,d,e\}\{b,d,e\}$ $\{c,d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,d\}\{b,d\}\{c,d\}$ $\{a,e\}\{b,e\}\{c,e\}\{d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{d\}$ $\{a,d\}\{b,d\}\{c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{c,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	16.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	
6	$\in \mathcal{F}$	24.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	

Лема 4.28. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	2.0	2.0	1.0	10.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-5.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{a,d,e\}\{b,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{c,d\}\{d,e\}\{c,d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	1.0	$\{d\}\{e\}\{d,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	4.0	$\{\}\{d\}\{c,d\}\{c,e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{c\}\{d\}\{c,d\}\{e\}\{c,e\}\{d,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}\{d\}\{e\}\{d,e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{d,e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	15.0	$\{\}\{d\}\{e\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	
7	$\in \mathcal{F}$	22.0	$\{\}\{d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	

Лема 4.29. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	12.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	5.0	$\{a,e,f\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{e,f\}\{a,e,f\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{a,b\}\{b,c\}\{b,d\}\{c,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a\}\{a,b\}\{a,d\}\{b,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}\{d\}\{a,d\}$ $\{b,d\}\{c,d\}$
5	$\in \mathcal{F}$	7.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\{c\}\{a,c\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{e,f\}$
6	$\in \mathcal{F}$	18.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	

Лема 4.30. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	11.0

$\|K\|$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{a,b,e\}\{c,d,e\}$
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{b,c\}\{a,d\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	0.0	$\{e\}\{a,e\}$
4	$\in \mathcal{F}$	1.0	$\{\}\{a\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}$
	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{e\}\{a,e\}$
5	$\in \mathcal{F}$	3.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{e\}$
6	$\in \mathcal{F}$	9.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	$\{e\}$
7	$\in \mathcal{F}$	14.0	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	$\{e\}$

Лема 4.31. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скупове $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,e,f\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	f	$x \in X - \{a,b,c,d,e,f\}$	$t(w)$
Тежина	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	12.0

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-6.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	7.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	2.0	$\{a,b\}\{c,d\}\{e,f\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	6.0	$\{a\}\{c,d\}$
4	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}\{a,b\}\{c,d\}$
	$\notin \mathcal{F}$	10.0	
5	$\in \mathcal{F}$	5.0	$\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	11.0	
6	$\in \mathcal{F}$	12.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	12.0	

Лема 4.32. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скуп $\{a,b,c,d\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	$x \in X - \{a,b,c,d\}$	$t(w)$
Тежина	2.5	2.5	2.5	2.5	1.0	9.0

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-8.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.0	
1	$\notin \mathcal{F}$	2.0	
2	$\notin \mathcal{F}$	3.0	
3	$\notin \mathcal{F}$	0.5	$\{a\}$
4	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	2.5	$\{a\}$
5	$\in \mathcal{F}$	0.0	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a\}\{b\}$
6	$\in \mathcal{F}$	3.5	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	6.5	$\{a\}$
7	$\in \mathcal{F}$	6.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.0	
8	$\in \mathcal{F}$	8.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	9.0	

Лема 4.33. Ако је $|X| = 12$ и фамилија $\mathcal{F}$ садржи скуп $\{a,b,c,d,e\}$, тада је $\mathcal{F}$ Франклова.

Елемент	a	b	c	d	e	$x \in X - \{a,b,c,d,e\}$	$t(w)$
Тежина	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.0	8.5

$\lvert K\rvert$	K	$min(u(\mathcal{C}))$	Скупови хиперкоцке за $min(u(\mathcal{C}))$
0	$\in \mathcal{F}$	-7.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	1.5	
1	$\notin \mathcal{F}$	2.5	
2	$\notin \mathcal{F}$	2.5	$\{a,b,c\}\{a,d,e\}$
3	$\notin \mathcal{F}$	3.0	$\{b,c\}$
4	$\notin \mathcal{F}$	2.5	$\{a\}\{a,b\}$
5	$\in \mathcal{F}$	0.5	$\{\}\{a\}\{b\}$
	$\notin \mathcal{F}$	4.0	$\{a\}\{b\}$
6	$\in \mathcal{F}$	4.5	$\{\}\{a\}$
	$\notin \mathcal{F}$	7.0	$\{a\}$
7	$\in \mathcal{F}$	7.0	$\{\}$
	$\notin \mathcal{F}$	8.5	

Теорема 4.1. Ако је $|X| = 12$ тада је фамилија $\mathcal{F}$ Франклова.
Доказ. Доказано је за $|X| = 12$ да је фамилија која садржи непразан скуп са мање од шест елемената Франклова. Нека фамилија $\mathcal{F}$ садржи само скупове (поред празног скупа) који имају барем шест елемената. Бирамо функцију тежине $w(x) = 1$ за свако $x \in X$ и тада имамо $t(w) = 6$. Имамо да је $u(\emptyset) + u(X) = 0$, док је учешће било ког трећег скупа веће или једнако 0. То значи да је и $u(\mathcal{F}) \geq 0$, односно фамилија $\mathcal{F}$ за коју је $|\bigcup \mathcal{F}| = 12$ је Франклова.

У следећој табели дат је преглед доказаних лема.

4.1.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c,e\}$
4.2.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{d,e,f\}$
4.3.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{d,e,f\}$
4.4.	$\{a,b,c\}$, $\{a,d,e\}$
4.5.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{d,e,f\}$
4.6.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,c,g\}$
4.7.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,d,f\}$, $\{a,b,e,f\}$
4.8.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,c,g\}$
4.9.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$
4.10.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{e,f,g\}$
4.11.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{d,e,f\}$
4.12.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$
4.13.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{c,d,e\}$
4.14.	$\{a,b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$, $\{a,b,c,d,g\}$, $\{e,f,g\}$
4.15.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d,e\}$, $\{d,e,f\}$
4.16.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,d,e\}$
4.17.	$\{a,b,c\}$, $\{d,e,f\}$
4.18.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$
4.19.	$\{a,b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$, $\{d,e,f\}$
4.20.	$\{a,b,c\}$, $\{c,d,e,f\}$
4.21.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$
4.22.	$\{a,b,c\}$, $\{b,c,d,e\}$
4.23.	$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d,e,f\}$
4.24.	$\{a,b,c\}$, $\{d,e,f,g\}$
4.25.	$\{a,b,c\}$
4.26.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$
4.27.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$
4.28.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$
4.29.	$\{a,b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,f\}$
4.30.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d,e\}$
4.31.	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,e,f\}$
4.32.	$\{a,b,c,d\}$
4.33.	$\{a,b,c,d,e\}$

Поглавље 5

Програмска реализација

Рачунар је у доказима коришћен у три ситуације:

- Проналажење суштински различитих фамилија датог типа - проналажење представника класа фамилија које се састоје од одређеног броја скупова са истим бројем елемената. Од представника различитих класа не може се пермутацијом елемената добити иста фамилија скупова.
- Провера да ли је дата фамилија FC-фамилија - за задату подфамилију скупова и дате тежине елемената проналази минимално учешће фамилије која садржи ту подфамилију. Уколико је минимално учешће једнако нули (такво увек постоји, пошто је учешће партитивног скупа једнако 0), подфамилија је FC-фамилија.
- Проналажење минималне вредности учешћа хиперкоцки - за задату подфамилију скупова и дате тежине елемената проналази минимално учешће свих хиперкоцки које имају непразан пресек са фамилијом која садржи задату подфамилију.

5.1 Проналажење суштински различитих фамилија датог типа

Следећи алгоритам служи за проналажење представника класа фамилија које се састоје од одређеног броја скупова са истим бројем елемената. Од представника различитих класа не може се пермутацијом елемената добити иста фамилија скупова.

Алгоритам ***familije***
Улаз:
- n - број елемената од којих су сачињени скупови
- k - величина сваког од скупова ($k \leq n$)
- m - број скупова у фамилији

Излаз:
- За дате бројеве n, k и m штампа све суштински различите фамилије од m k-чланих скупова, који су сви подскупови скупа $[n] = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

L је листа свих k-чланих подскупова скупа $[n]$.
$\mathcal{F} = (A_1, A_2, ..., A_m)$ је фамилија састављена од m различитих k-чланих скупова са елеменатима из $[n]$ и нека су $A_i = L[p_i]$ поређани тако да је $p_1 < p_2 < ... < p_m$.
Фамилији $\mathcal{F}$ придружује се број $h(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{m} p_{i-1}\binom{n}{m}^{i-1}$.
$\mathcal{M}$ је низ који садржи све фамилије $\mathcal{F}$.
P је матрица димензија $n! \times n$, где је низ $P[i]$ i-та пермутација елемената из $[n]$.

$for(i = 0; i < \binom{n}{m}^m; i++)$
    $I[i] = false$
$for(i = 0; i < \mathcal{M}.length; i++)$
    $\mathcal{F} = \mathcal{M}[i]$
    $if(!I[h(\mathcal{F})])$
        $print\ \mathcal{F}$
        $I[h(\mathcal{F})] = true$
        $for(j = 0; j < P.length; j++)$
            $I[h(permutovanje(\mathcal{F}, P[j]))] = true$

Алгоритам ***permutovanje***
Улаз:
- $\mathcal{F}$ - фамилија скупова чији се елементи пермутују
- $permutacije$ - низ који показује како вршити пермутацију
    елемент i мењамо елементом $permutacije[i]$

Излаз:
- $\mathcal{G}$ - фамилија пермутованих скупова фамилије $\mathcal{F}$.

$for(k = 0; k < \mathcal{F}.length; k++)$
    $\mathcal{G}[k] = \mathcal{F}[k]$
    Сваки елемент i из $\mathcal{G}[k]$ замени елементом $permutacije[i]$
$return\ \mathcal{G}$

5.2 Провера да ли је дата фамилија FC-фамилија

Алгоритам 1 за задату подфамилију скупова и дате тежине елемената проналази минимално учешће фамилије која садржи ту подфамилију. Уколико је минимално учешће једнако нули (такво увек постоји, пошто је учешће партитивног скупа једнако 0), подфамилија је FC-фамилија.

Алгоритам 1
Улаз:
- $A_1, A_2, ..., A_m$ - скупови који по претпоставци припадају фамилији
- $tezine$ - низ тежина елемената из $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$
Излаз:
- min - глобална промењива која представља минималну вредност учешћа фамилије која садржи скупове $A_1, A_2, ..., A_m$

$S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$
$n = |S|$.
[Без смањења општости, рецимо да је $S = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.]
[Нека је $\mathcal{P}$ партитивни скуп S, $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|} = 2^n$.
Сваком $X \in \mathcal{P}$ одговара број $h(X) = (x_{n-1}x_{n-2}...x_0)_2$, при чему је $x_i = 0$ ако $i \notin X$, односно $x_i = 1$ ако $i \in X$. Обрнуто, сваком броју $i \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ одговара скуп X_i за који је $h(X_i) = i$.]

$w(X) = \sum_{i=0}^{n-1} tezine[i] * x_i$ за $h(X) = (x_{n-1}x_{n-2}...x_0)_2$.

$t(w) = \frac{1}{2}\sum_{x \in S} w(x) = \frac{1}{2}w(S)$

$for(i = 0; i < 2^n; i++)$
    $u[i] = w(X_i) - t(w)$

$L = \emptyset$ [L је низ у који смештамо скупове са негативним учешћем.]

$for(i = 0; i < 2^n; i++)$
    $if(u[i] < 0)$
        додати i у L
$\mathcal{C} = \{S\}$
$min = u[h(S)]$
$rekurzija1(\mathcal{C}, 0)$
$print(min)$

Алгоритам **rekurzija1**
Улаз:
- $\mathcal{C}$ - хиперкоцка за коју вршимо проверу
- g - дубина претраге до које се дошло
- L - низ скупова са негативним учешћем
- min - минимална вредност учешћа хиперкоцки које су проверене
Излаз:
- min ће садржати минимално учешће фамилије

$if(g < |L|)$

$$\quad if(u(\mathcal{C}) + \sum_{i \geq g}^{|L|-1} u(L[i]) < min)$$

$\qquad if(L[g] \notin \mathcal{C})$

$\qquad\qquad \mathcal{C}_1 = \mathcal{Z}(\mathcal{C} \cup L[g])$ [$\mathcal{Z}(\mathcal{G})$ означава затворење фамилије $\mathcal{G}$ за унију.]

$\qquad\qquad if(u(\mathcal{C}_1) < min)$

$\qquad\qquad\qquad min = u(\mathcal{C}_1)$

$\qquad\qquad rekurzija1(\mathcal{C}_1, g + 1)$

$\qquad rekurzija1(\mathcal{C}, g + 1)$

5.3 Проналажење минималне вредности учешћа хиперкоцки

Алгоритам 2 за задату подфамилију скупова и дате тежине елемената проналази минимално учешће свих хиперкоцки које имају непразан пресек са фамилијом која садржи задату подфамилију.

Алгоритам 2
Улаз:
- $A_1, A_2, ..., A_m$ - скупови који по претпоставци припадају фамилији
- $tezine$ - низ тежина елемената из $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$
- $brojElemenata$ - укупан број елемената фамилије, тј. 11 или 12
- $brojLeme$ - редни број леме

Излаз:
- min - глобална промењива која представља минималну вредност учешћа хиперкоцке која садржи скупове $A_1, A_2, ..., A_m$

$S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$
$n = |S|$.
[Без смањења општости, рецимо да је $S = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.]
[Нека је $\mathcal{P}$ партитивни скуп S, $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|} = 2^n$.
Сваком $X \in \mathcal{P}$ одговара број $h(X) = (x_{n-1}x_{n-2}...x_0)_2$, при чему је $x_i = 0$ ако $i \notin X$, односно $x_i = 1$ ако $i \in X$. Обрнуто, сваком броју $i \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ одговара скуп X_i за који је $h(X_i) = i$.]
[Нека је k број елемената основе K хиперкоцке $[K, K \cup S]$.
У свим случајевима које разматрамо тежина сваког од елемената из K ће бити једнака 1, односно $w(K) = k$.]
$w(X) = \sum_{i=0}^{n-1} tezine[i] * x_i$ за $h(X) = (x_{n-1}x_{n-2}...x_0)_2$.

$t(w) = \frac{1}{2}\sum_{x \in S} w(x) = \frac{1}{2}w(S)$

$for(k = 0; k < brojElemenata - n; k++)$
  $for(i = 0; i < 2^n; i++)$
    $u[i] = w(X_i) - t(w) + k$
  $L = \emptyset$ [L је низ у који смештамо скупове са негативним учешћем.]
  $for(i = 0; i < 2^n; i++)$
    $if(u[i] < 0 \; and \; X_i \neq \emptyset)$
      додати i у L
  $\mathcal{C} = \{\emptyset, S\}$ [Рачунамо минимално учешће хиперкоцке за коју $K \in \mathcal{F}$.]
  $min = u[h(C)]$
  $rekurzija2(\mathcal{C}, 0)$
  $print(min)$
  $\mathcal{C} = \{S\}$ [Рачунамо минимално учешће хиперкоцке за коју $K \notin \mathcal{F}$.]
  $min = u[h(C)]$
  $rekurzija2(\mathcal{C}, 0)$
  $print(min)$

Алгоритам **rekurzija2**
Улаз:
- $\mathcal{C}$ - хиперкоцка за коју вршимо проверу
- g - дубина претраге до које се дошло
- k - број елемената основе K хиперкоцке
- L - низ скупова са негативним учешћем, $\emptyset \notin L$
- min - минимална вредност учешћа хиперкоцки које су проверене
Излаз:
- min ће садржати минимално учешће хиперкоцке

$if(g < |L|)$
    $if(u(\mathcal{C}) + \sum_{i \geq g}^{|L|-1} u(L[i]) < min)$
        $if(L[g] \notin \mathcal{C})$
            $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Z}(\mathcal{C} \cup L[g])$ [$\mathcal{Z}(\mathcal{G})$ је затворење фамилије $\mathcal{G}$ за унију.]
            $if(provera(\mathcal{C}_1))$
                $if(u(\mathcal{C}_1) < min)$
                    $min = u(\mathcal{C}_1)$
                $rekurzija2(\mathcal{C}_1, g+1)$
        $rekurzija2(\mathcal{C}, g+1)$

Алгоритам ***provera***
Улаз:
- $\mathcal{C}$ - хиперкоцка за коју вршимо проверу
- k - вредност $|K|$
- $brojLeme$ - број леме
Излаз:
- $false$ - ако је за неку подфамилију хиперкоцке $\mathcal{C}$ доказано
да је фамилија која их садржи Франклова
- $true$ - иначе
$v[A] = l + k,\ A \in \mathcal{C}_l$
[Низ v садржи ниво хиперкоцке коме припада скуп, увећано за k.]
$forall(A_i \in \mathcal{C})$
    $if(v[A_i] == 1\ or\ v[A_i] == 2)$
        $return false$
$forall(A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{C})$
    $if(v[A_1] == 3\ and\ v[A_2] == 3$
        $and\ v[A_3] == 3\ and\ v[A_1 \cup A_2 \cup A_3] < 6)$
        $return false$
$for(i = brojLeme; i > 0; i--)$
    $if(!\ provera\_i(\mathcal{C}))$ [Проверава да ли $\mathcal{C}$ задовољава услове Леме i.]
        $return\ false$
$return\ true$

Литература

[1] Petar Markovic, *An Attempt at Frankl's Conjecture. Publ. Math. Inst. 81(95) (2007), pp. 29-43.*

[2] Ivica Bosnjak and Petar Markovic, 2008. *The 11-element case of Frankl's conjecture. The Electronic J. Combin. 15(2008)*

[3] Robert Morris, 2004. *FC-families and improved bounds for Frankl's conjecture. European J. Combin. 27(2006), no. 2, pp. 269-282.*

[4] B. Poonen, *Union-Closed Families. J. Combin. Theory Ser. A 59 (1992), no. 2, pp. 253-268.*

[5] T. P. Vaughan, *A Note on the Union-Closed Sets Conjecture. J. Combin. Math. Combin. Comput. 45 (2003), pp. 95-108.*