UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Danijela Vasiljević

RAČUNARSKA HOMOLOGIJA SIMPLICIJALNIH KOMPLEKSA

- master rad -

mentor: Dr Siniša Vrećica

Sadržaj

Uvod

Fiksne tačke više dimenzionih nelinearnih funkcija, algebarski varijeteti, razlikovanje topoloških prostora bili su neki od glavnih problema kojima su se bavili matematičari s kraja XIX veka. u potrazi za odgovorima na ova pitanja nastalo je jedno od najvećih matematičkih dostignuća XX-tog veka- algebarska topologija, čiji je fundamentalan deo homološka teorija. Njene korene nalazimo još u XVIII veku u poznatoj Ojlerovoj formuli za konveksne poliedre $F - E + V = 2$, a kasnije i u radovima Henri Poincaré-a.

Moć algebarske topologije leži u njenoj "grubosti"- oslanjajući se samo na informacije o lokalnim svojstvima prostora, možemo odrediti neke od osobina globalne strukture. Kao ilustraciju ove tvrdnje posmatrajmo poliedar sa k rupa. Ojlerova formula u tom slučaju glasi: $F - E + V = 2 - 2k$. Sada postaje jasno da brojeći ivice, strane i temena poliedra (lokalna svojstva), možemo jednostavno doći do broja rupa k, što je svakako globalno svojstvo poliedra.

Potencijal ideje da se globalno dobije iz lokalnog brzo je prepoznat i dovodi do razvoja veoma moćne algebarske mašinerije - algebarske topologije.

Na početku XXI veka sve više je problema koje izlaze van područja matematike, a ipak imaju topološki karakter. Ovde imamo na umu probleme iz oblasti računarske grafike, biologije, fizike,... koje karakteriše postojanost sistema pri malim preturbacijama. Algebarska topologija predstavlja idealan okvir za ovakva razmatranja. Praktični problemi algebarske topologije posmatrani sa računarskog aspekta, što je svakako neophodno u primenama, dovode nas do definisanja novog koncepta u topologiji, geometriji i računarstvu : računarske homologije.

Osnovna ideja ovog rada je da istaknemo značaj računarske homologije u analizi i razumevanju aktuelnih kompleksnih geometrijskih problema, sa akcentom na kompleksnim mrežama. U Poglavlju 1. i 2. definišemo osnovne pojmove topologije i homologije, zadržavamo se na analizi reprezentacija topoloških prostora simplicijalnim kompleksima, koji su zbog kombinatornih osobina njihove strukture idealni za implementaciju u proračunima.

U Poglavlju 3. navodimo nove rezultate iz oblasti homologije- Perzistentnu homologiju i mogućnosti primene u kompleksnim sistemima.
Poglavlje 4. sadrži metode za implementaciju. Algoritme za računanje topoloških invarijanti relevantnih za temu ovog rada.
U Poglavlju 5. opisujemo primenu računarske homologije na kompleksne mreže.

POGLAVLJE PRVO

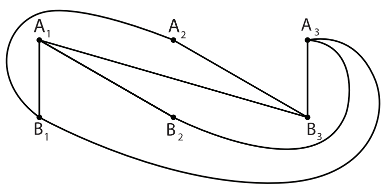
TOPOLOGIJA

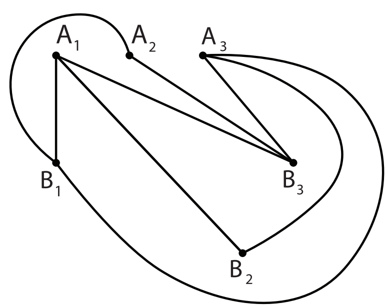
Topološka teorija, u odnosu na druge fundamentalne matematičke teorije, je formalizovana relativno kasno, tek u XVII veku. Međutim, zbog sveprisutnosti kako u matematici tako i u ostalim oblastima nauke, razvija se veoma brzo.
Danas se mnogi aktuelni problemi razmatraju sa aspekta topologije, što ovu matematičku disciplinu čini živom i dinamičnom.

Motivacija leži u tome što nam nekada nisu bitne metričke osobine prostora ili objekta već znanje o povezanosti. Da bismo ovo malo približili intuiciji, razmotrimo sledeći problem:

U ravni su date tačke A_1, A_2, A_3 *i* B_1, B_2, B_3*. Povezati* A_i *i* B_j *(* $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$*) tako da su* A_iB_j *i* A_kB_l *nepresacujaće.*

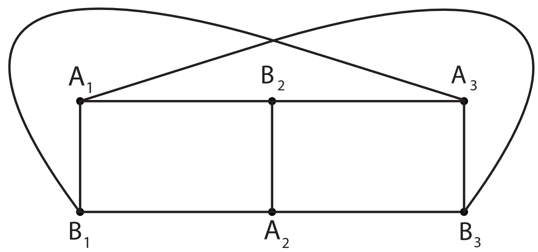
Ovaj problem poznat je još i pod nazivom ”problem o tri kuće”(svaku od tri kuće treba spojiti sa izvorima struje, gasa i vode tako da među vezama nema presecanja) i ima mnogo toga zajedničkog sa Ojlerovih 7 mostova.
Primetimo da su situacije na Slici 1.2. potpuno ekvivalentne. Udaljenost među tačkama





Slika 1.1: Dva metrički različita objekta, ali ista grafa

ni na koji način ne utice na razrešenje problema. Sitauciju ne olakšava ni menjanje rasporeda tacaka.



Slika 1.2: Problem “tri kuće” ili graf $K_{3,3}$

Pošto postaje očigledno da nam geometrija sistema nece biti od pomoći, postavlja se pitanje koja osobina sadrži relevantnu informaciju koja ce nas dovesti do resenja problema? Da li je to povezanost, orijentacija, ili pak nešto drugo? Uz malo znanja topologije i teorije grafova dolazimo do zaključka da ne postoji način da se ove tačke povežu , a da pritom sve linije budu nepresecajuće (što smo mogli i naslutiti iz prethodnog razmatranja).

Dokaz:

Uobičajeni naziv za ovaj graf je $K_{3,3}$. Dokaz koristi Ojer-Poenkareovu formulu za planarne grafove:

$$F - E + V = 2,$$

gde V označava broj temena grafa (6 u ovom slučaju), E je broj ivica ili linkova (9), a F je broj regiona u ravni ograničenih ivicama koje formiraju zatvorenu stazu, bez tačaka u unutrašnjosti.

Neka je F_i broj regiona ograničenih sa tačno i ivica ($F = \sum_i F_i$).

S obzirom da svaka dva regiona imaju jednu zajedničku ivicu, sledi:

$$2E = F_1 + 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots$$

Vrednosti F_i za posmatrani su:

- $F_1 = 0$, jer ne postoji tačka povezna sama sa sobom
- $F_2 = 0$, jer nikoje dve tačke nisu povezane sa dve ivice.
- $F_3 = 0$, jer za region ograničen sa tri ivice moramo imati ivicu koja će povezivati dve tačke iste trojke tačaka (A ili B), što je u kontradikciji sa polaznim pretpostavkama. Iz istog razloga svi F_{2k+1} će biti nule.

Sledi:

$$2E = 4F_4 + 6F_6 + 8F_8 + \ldots$$

Iz Ojler-Poenkareove formule imamo $F = 2 - V + E = 5$, t.j. $4F_4 + 6F_6 + \ldots \geq 20$. Kontradikcija sledi iz nejednakosti:

$$18 = 2E = 4F_4 + 6F_6 + 8F_8 + \ldots \geq 20$$

■

Ovim smo dokazali da je nemoguće spojiti tačke u ravni, na traženi način, tako da nema presecanja među linkovima. Ali, ukoliko isti problem posmatramo na torusu, rešenje postoji! Lokalne osobine objekta zavise od njegovog ambijentalnog prostora.
Sve pomenuto do sada: povezanost, ambijentalni prostor i mnogo više od toga je tema topologije.

1.1 Osnovne definicije

Iako je metrički prostor više struktuiran od topološkog i možemo ga smatrati evolutivno korak ispred topološkog, istorijski stvari su se razvijale malo drugačije. Čovek se bavio nekom vrstom merenja još od pećinskog doba i u skladu sa tim razvijao svoju intuiciju. Zbog toga su nam metrički prostori prirodni baš kao i znanje o trodimenzionalnosti sveta u kom živimo. Da bi došli do istog razumevanja topologije potrebno je da učinimo korak "unazad", da ekstrahujemo samo neke od mnoštva informacija koje nam daje metrika jednog prostora i da sve ponovo složimo u drugu, novu i svežu teoriju koja će nam svojom transparentnošću omogućiti da brže i lakše rešavamo čitavu jednu lepezu problema.

Definicija 1.1. ***Topologija*** *na skupu X je familija skupova $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ takva da važi:*

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- *Ako $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, tada $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$*
- *Ako $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, tada $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$*

Skup X zajedno sa topologijom $\mathcal{T}$ definiše topološki prostor (X, $\mathcal{T}$)

Definicija 1.2. *Skup $U \subset \mathcal{P}(X)$ je:*

- ***otvoren*** *ako je $U \in \mathcal{T}$*
- ***zatvoren*** *ako $U^c \in \mathcal{T}$*[1]

[1] familiju zatvorenih skupova obelevažavamo $\mathcal{F}$

- ***ni otvoren ni zatvoren*** *ako* $U \notin \mathcal{T}$ *i* $U^c \notin \mathcal{T}$

Topologiju možemo shvatiti i kao kolekciju otvorenih skupova na nekom prostoru.

Primer 1.1. (Topološki prostori)

1. Prostor $X = \{a, b\}$ sa topologijom $\mathcal{T}$=$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

2. Ako je (X, d) metrički prostor, tada $\mathcal{T}$=$\{B(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}\}$, gde je $B(x, r)$ otvorena kugla sa centrom u x i poluprečnikom r, definiše jednu topologiju na X. Pa sledi da je svaki metrički prostor istovremeno i topološki. Obrnuto ne važi.

3. Skup $\triangle = \{\sum_{i=1}^{3} t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{3} t_i = 1\}$, gde su a_i proizvoljne tačke prostora $\mathbb{R}^d$, nazivamo *dvodimezioni simpleks*. Sa topologijom $\mathcal{T}$=$\{U \cap \triangle \mid U \subset \mathbb{R}^d, U$ otvoren u $\mathbb{R}^d\}$ čini topološki prostor.
   Generalno, za svaki topološki prostor X možemo indukovati topologiju na bilo kom njegovom podskupu i to na sledeći način:

Definicija 1.3. *Ako je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $A \subset X$, *tada je* $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ *topologija na* A, *pa je (A,* $\mathcal{T}_A$*) takođe jedan topološki prostor i nazivamo ga* ***potprostor prostora (**X**,** $\mathcal{T}$**)**, *a topologiju* $\mathcal{T}_A$*) indukovanom topologijm na* A *iz topologije* $\mathcal{T}$.

Definicija 1.4. *(Aksiome separacije)*

Prostor $(X,\mathcal{T})$ *je* ***Kolmogorovljev*** *ili* $\mathbf{T_0}$ *ako:* $(\forall x, y \in X)(\exists U \in\mathcal{T})(x \in U \wedge y \notin U) \veebar (x \notin U \wedge y \in U)$

Prostor $(X,\mathcal{T})$ *je* $\mathbf{T_1}$ *ako:* $\forall(x, y \in X)(\exists U, V \in\mathcal{T})(x \in U \wedge x \notin V y \in V \wedge y \notin U$

Prostor $(X,\mathcal{T})$ *je* ***Hausdorffov*** *ili* $\mathbf{T_2}$ *ako:* $(\forall x, y \in X)(\exists U, V \in\mathcal{T}) x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

U klasu topoloških prostora spada širok spektar prostora, mnogi od njih su krajnje siromašni u strukturi i iz tog razloga neće biti predmet izučavanja u ovom radu. Radije ćemo se ograničiti samo T_2 prostore, t.j. prostore u kojima je moguće “razdvojiti” tačke. To nam omogućava da izbegnemo slučajeve trivijalnih prostora kao što je $(X, \{\emptyset, X\})$, *svezane dvotačke*(Primer 1.1) i sličnih.

Definicija neprekidne funkcije na topološkim prostorima je u direktnoj analogiji sa karakterizacijom neprekidnosti u metričkim prosotirima otvorenim skupovima:
Neka su X *i* Y *proizvoljni metrički prostori i* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija, tada je inverzna slika svakog otvorenog skupa iz* Y *otvoren skup u* X.
Slično:

Definicija 1.5. *Funkcija* $f : X_1 \to X_2$ *na topološkim prostorima (*X_1*,* $\mathcal{T}_1$*) i (*X_2*,* $\mathcal{T}_2$*) je* ***neprekidna*** *ukoliko je* $f^{-1}(U) \in\mathcal{T}_1$ *za svaki skup* $U \in\mathcal{T}_2$

Zbog raznolikosti topologija pojam neprekidnosti neće uvek biti transparentan i intuitivan kao što smo navikli do sada. Naime, čak i identička funkcija, na istom prostoru, ali sa različitim topologijama može biti prekidna. Razmotrimo sledeće primere:

Primer 1.2. (Neprekidne funkcije)
Neka je $X = \{a, b\}$ i neka su $\mathcal{T}_1$=$\{\emptyset, X\}$ i $\mathcal{T}_2$=$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ dve topologije na njemu.

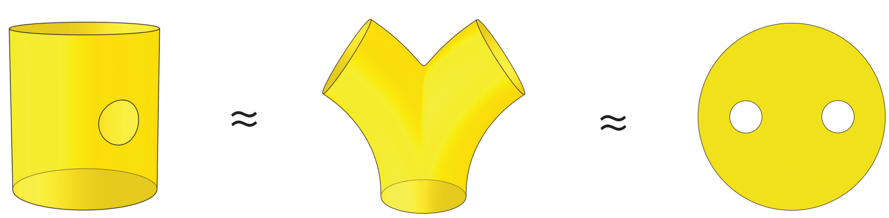
- Funkcija $id : (X,\mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, *nije neprekidna* jer je $id^{-1}(\{a\}) = \{a\}$, a taj skup ne pripada topologiji $\mathcal{T}_1$

- Dok je preslikavanje $id : (X,\mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ *neprekidno*!

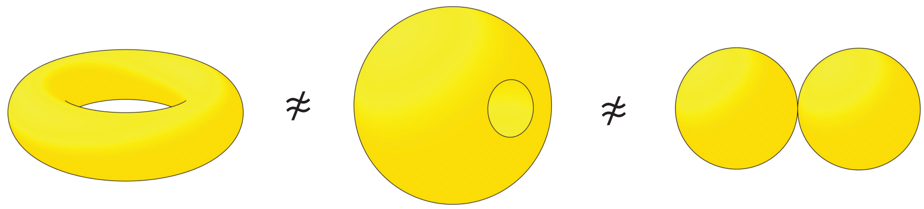
Međutim, s obzirom da u ovom radu korisitmo samo T_2 prostore, "čudnih" slučajeva neprekidnosti neće biti. Sada već posedujemo dovoljno znanja da definišemo analog izometrijskoj transformasciji:topološku ekvivalenciju ili homeomorfizam.

Definicija 1.6. *Neka su* $(X_1, \mathcal{T}_1)$ *i* $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *topološki prostori. Funkcija* $f : X_1 \to X_2$ *je* ***homeomorfizam*** *ukoliko je bijekcija i* f *i* f^{-1} *su neprekidne. Za prostore* X_1 *i* X_2 *kažemo da su* ***homeomorfni***, *i pišemo* $X_1 \approx X_2$

Homeomorfizam je relacija ekvivalencije (dokaz je elementaran), pa deli topološke prostore na klase. On, baš kao i izometrija u metričkim prostorima zadržava osnovne osobine topoloških prostora. Fundamentalni zadatak topologije jeste karakterizacija klasa ekvivalencije relacije homemorfnosti.



Slika 1.3: Homemorfni topološki prostori



Slika 1.4: Prostori koji nisu homeomorfni

1.2 Topološke invarijante

Dakle, glavni zadatak topologije je klasifikacija topoloških prostora. T.j. potrebno je utvrditi koji prostori su homemorfni, a koji ne. Najprirodniji način bi bio pronaći preslikavanje koje je homeomorfizam za svaka dva prostora ili dokazati da takvo preslikavanje ne postoji. Međutim, u većini slučajeva ovaj zadatak se moze pokazati kao jako težak, a ponekad i nerešiv. Zbog toga pristupamo drugoj metodi. Uočavamo osobine prostora koje ostaju nepromenjene pri homeomorfizmimima, i onda njihovim ispitivanjem zaključujemo da li dva prostora pripadaju istoj klasi ili ne. Ove osobine se nazivaju topološke invarijante.
Ovde ćemo pomenuti samo osnovne:

Definicija 1.7. *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je **povezan** ukoliko ne postoje dva otvorena, neprazna skupa U i V takva da je njihova unija ceo prostor X, a presek prazan skup.*

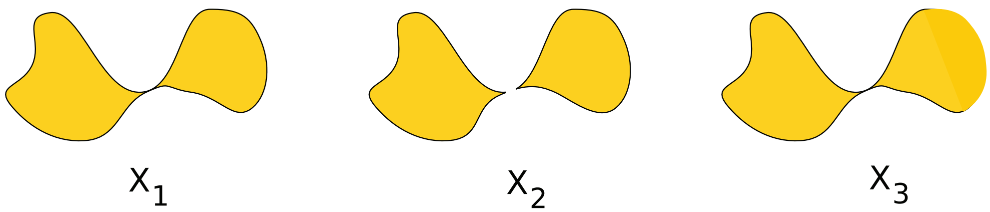
Primetimo da je definicija povezanosti u topološkim prostorima ekvivalentna definiciji u metričkim. Slično važi i za kompaktnost.

Definicija 1.8. *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je **kompaktan** ukoliko se iz svakog njegov otvorenog pokrivača $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ može izdvojiti konačan potpokrivač.*

Familija skupova $\mathcal{U}$ je pokrivač prostora X ukoliko $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

Primer 1.3. Razmotrimo zašto prostori sa slike nisu homemorfni:
Prostor X_2 nije povezan, dok prostori X_1 i X_3 jesu. Stoga X_1 nije homemorfan sa X_2 i X_3 nije homeomorfan sa X_2. Prostor X_3 nije kompaktan, a X_1 i X_2 jesu. Sledi da ni X_1, ni X_2, nisu homeomorfni sa X_3. T.j. među prostorima X_1, X_2 i X_3 nema homemomorfnih.

Ojlerova karakteristika, betijevi brojevi, homotopski tip još su neke od invarijanti kojima ćemo se pozabaviti kasnije u radu.



Slika 1.5: nehomeomorfni prosotri

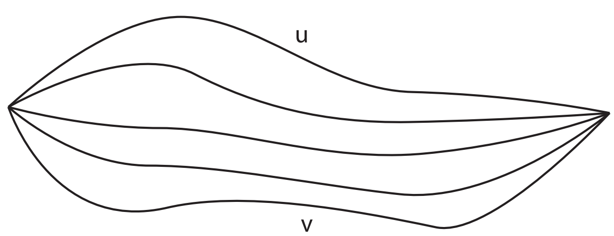
Globalan utisak jeste da topoloških invarijanti ima srazmerno mnogo i postaje jasno da njihovo ispitivanje samo u cilju da se proveri homemorfnost prostora jeste težak i mukotrpan posao. Umesto toga, polazimo lakšim putem i uvodimo pojam homotopije, koji sem što nam olakšava ispitivanje homemorfnosti, donosi niz novih i lepih rezultata.

Definicija 1.9. *Neka su X i Y topološki prostori i $f, g : X \to Y$ neprekidne funkcije. Kažemo da su f i g* **homotopne** *ukoliko postoji neprekidna funkcija $H : X \times [0,1] \to Y$ takva:*

- $(\forall x \in X) H(x,0) = f(x)$
- $(\forall x \in X) H(x,1) = g(x)$

u oznaci $f \simeq g$

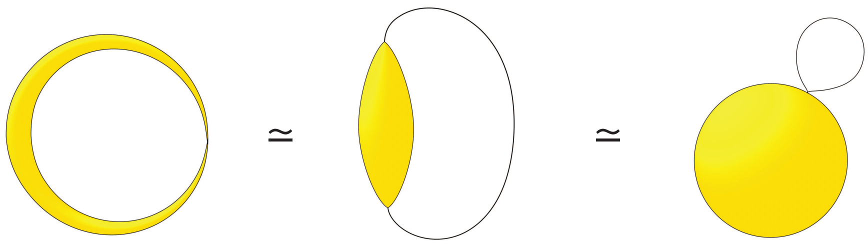
Malo slobodnije posmatrano, funkcije su homotpne ako neprekidno mogu "preći" jedna u drugu.



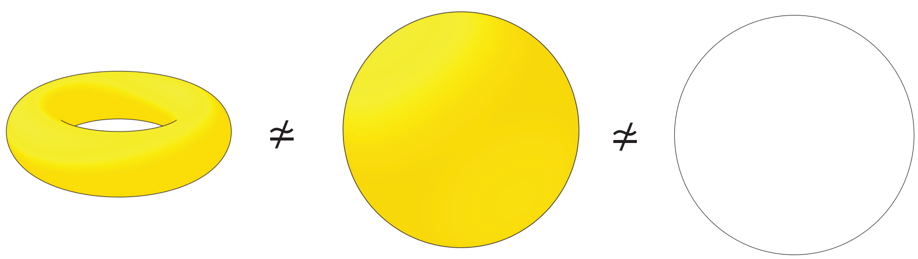
Slika 1.6: $u \simeq v$

Definicija 1.10. *Topološki prostori X i Y su* **homotopski ekvivalentni** *($X \simeq Y$) ukoliko postoje f-je $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takve:*
$g \circ f \simeq id_X$ i
$f \circ g \simeq id_Y$

Homotopska ekvivalentnost prostora može se interpretirati slično homotopiji funkcija: prostori su homotpni ukoliko postoji neka neprekidna transformacija koja prevodi jedan u drugi.



Slika 1.7: Homotopni topološki prostori



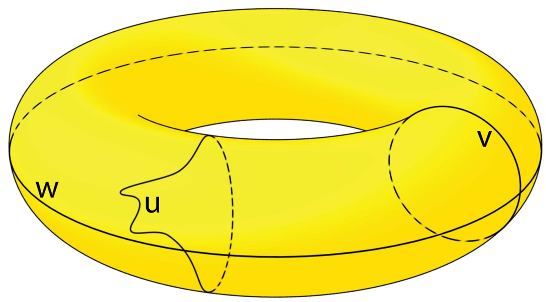
Slika 1.8: Prostori nisu homotopni

Homotpija je relacija ekvivalencije na skupu topoloških prostora, ali nema difernciacionu snagu homeomorfizma. Dva homotopski ekvivalentna prostora ne moraju biti topološki ekvivalentni, dok su svaka dva homeomorfna prostora homotopna.
Pokažimo i formalno ovu tvrdnju:

Primer 1.4. Neka su X i Y dva homeomorfna topološka prostora, tada su oni i homotopni.
Dokaz:
S obzirom na $X \approx Y$ postoji funkcija $f : X \to Y$ takva da je neprekidna i bijekcija. Tada $f^{-1} : Y \to X$ i važi $f \circ f^{-1} = id_Y$, a samim tim i $f \circ f^{-1} \simeq id_Y$. Takođe je i $f^{-1} \circ f = id_X$, pa $f^{-1} \circ f \simeq id_X$, čime je tvrđenje dokazano.■

Pojam homotopije i homotopskih grupa uveo je Poincaré, i prvi počeo da klasifikuje topološke prostore na ovaj način. Prva homotopska grupa ili Fundamentalna grupa, je svakako najviše izučavana homotopska grupa, a odredjena je homotopnim klasama zatvorenih petlji.

Definicija 1.11. *Neka je X topološki prostor i $x, y \in X$. Neprekidna funkcija ϕ : $[0,1] \to X$, takva $\phi(0) = x$ i $\phi(1) = y$ naziva se **put** između tačaka x i y. Ukoliko je $\phi(0) = \phi(1)$ put nazivamo **petlja**.*



Slika 1.9: Petlje na torusu

Na slici su prikazane tri petlje u, v i w. u i v pripadaju istoj klasi, kojoj w ne pripada
.
Sama fundamentalna grupa ”broji” koliko različitih klasa na jednom prostoru imamo.

Definicija 1.12. *Neka je X topološki prostor i $x \in X$. **Fundamentalna grupa**, $\pi_1(X, x)$ je grupa generisana klasama ekvivalencije petlji sa početkom u x.*

Ukoliko je prostor X povezan, fundamentalna grupa ne zavisi od izbora tačke x (vidi [2]), stoga možemo pisati $\pi_1(X)$.
Pomenimo još da homotopni prostori imaju istu fundamentalnu grupu i da se u većim dimenzijama homotopske grupe konstruišu na sličan način kao za dimenziju 1. Preciznije, posmatramo klase ekvivalencije n-dimenzionih petlji, t.j. slike n-dimenzionih kocki na dati topološki prostor.
Homotopske grupe su bile proučavane od strane različitih autora uglavnom za dvodimenzione i trodimenzione objekte. Međutim ove grupe ne predstavljaju najlakši način za klasifikaciju topoloških prostora, teskoća je povezana sa algebarskom prezentacijom ovih grupa i njihovim poređenjem (poznati group word problem). Čak i za jednostavne prostore, kao što je sfera S^n vrlo teško je naći homotopske grupe $\pi_k(S^n)$.

1.3 Simplicijalni kompleksi

1.3.1 Geometrijski simplicijalni kompleksi

Definicija 1.13. *Neka je $S = \{a_0, a_1 \dots a_k\}$ skup afino nezavisnih tačaka u $\mathbb{R}^n$. Najmanji konveksni skup koji sadrži te tačke naziva se* ***k-simpleks****. Tačke skupa S su* ***temena*** *simpleksa.*

Ako je σ k-simpleks iz prethodne definicije, tada svaki podskup $T \subset S$ takođe defiše jedan simpleks τ koji nazivamo *lice* simpleksa σ, oznaka $\tau \prec \sigma$. U tom slučaju σ je *ko-lice* simpleksa τ ($\sigma \succ \tau$)
k-simpleks posmatramo kao topološki potprostor prostora $\mathbb{R}^n$, ali možemo ga videti i kao kombinatorni objekat.
Jedan k-simpleks ima $\binom{k+1}{l+1}$ lica dimenzije l, a ukupno $\sum_{l=-1}^{k} \binom{k+1}{l+1} = 2^{k+1}$ lica.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}
$$

Dakle, simpleks je vrlo veliki, ali uniforman kombinatorni objekat. Jedan k simpleks sastoji se od ukupno 2^k manjih simpleksa. S obzirom na veličinu, nepraktično je simplekse koristiti za računje ukoliko se operacije vrše "ručno". S druge strane, zbog njihove uniformnosti i jednostavnosti u strukturi, predstavljaju idealnu reprezentaciju za korišćenje u računarstvu.

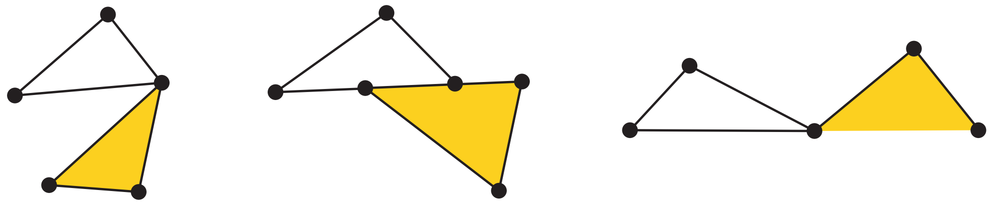
Definicija 1.14. ***Geometrijski simplicijani kompleks*** *K u $\mathbb{R}^n$ je konačna familija simpleksa takva da:*

- *ako je σ simpleks iz K, tada je svako lice simpleksa σ takođe iz K*

- *ako su σ_1 i σ_2 simpleksi iz K, tada je i $\sigma_1 \cap \sigma_2$ takodje iz K*

Unija svih simpleksa kompleksa K $\bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ naziva se ***poliedar kompleksa K*** *i označava* $|K|$.

Pod dimenzijom simplicijalnog kompleksa K podrazumevamo dimenziju njegovog maksimalnog simpleksa. t.j. dim$K$ =max$\{\sigma \mid \sigma \in K\}$.
U praksi, da bi izučavali topološki prostor, počinjemo sa njegovom trijangulacijom.

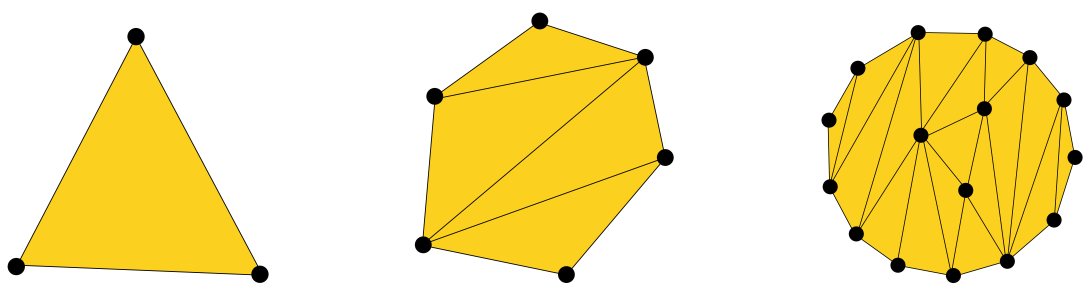


Slika 1.10: Prva figura je simplicijalni kompleks, dok ostale dve nisu

Definicija 1.15. ***Triangulacija*** *topološkog prostora X je par* (K, ϕ)*, gde je* K *simplicijalni kompleks, a* $\phi : K \to X$ *homeomorfizam.*

Napomena: Ukoliko takvo ϕ postoji tada $|K| \approx X$ i jasno je da prostor iz primera 1.1 (svezana dvotačka) ne može biti triangulisan jer je svaki simplicijalni kompleks Hausdorfov topološki prostor, dok svežana dvotačka to nije.
Čak iako posmatramo topološki prostor koji jeste Hausdorfov, a pri tom i mnogostrukost ne možemo tvrditi da postoji njegova triangulacija. Michael Freedman je 1982. godine pronašao četvorodimenzionu topološku mnogostrukost E_8 koja nije triangubilna, dok je pitanje triangulacije za mnogostrukosti dimenzije veće od 4 otvoren problem (vidi Andrew Ranicki (ed.) The Hauptvermutung Book)

Figure na sledećoj slici predstavljaju triangulaciju diska.



Slika 1.11: tri moguće triangulacije diska

Zainteresovani smo za topološka svojstva podeljenih (triangulisanih) prostora a, ne za njihov geometrijski oblik. Zbog toga je značajno napraviti razliku među osobinama koje dolaze iz kombinatorne strukture objekta i onih koji dolaze iz geometrije. U cilju dobijanja kombinatorne definicije objekta apstrahujemo simplicijalni kompleks.

1.3.2 Apstraktni simplicijalni kompleksi

Definicija simplicijalnog kompleksa u prethodnom koristi pojam konveksnosti i ne daje nam jasnu diferencijaciju topologije i geometrije objekta.

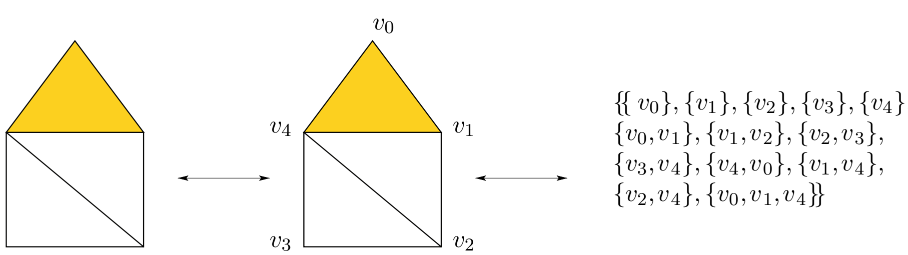
Definicija 1.16. ***Apstraktni simplicijalni kompleks*** *je uređeni par* (V, K) *gde je V konačan skup, a K familija njewgovih podskupova sa svojstvima:*

- *svaki element iz V je i element K*
- *ukoliko je* $\sigma \in K$ *i* $\tau \subset \sigma$ *tada* $\tau \in K$

Primer 1.5. Familije skupova K i K' su apstraktni simplicijalni kompleksi
$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_0, v_1\}\}$
$K' = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}\}$
dok, familije T i T' nisu.
$T = \{\{v_0\}, \{v_0, v_1\}\}$ i
$T' = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$

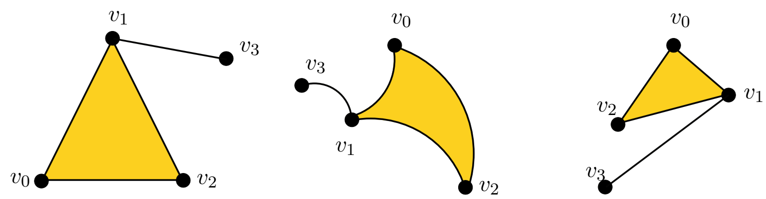
Svaki geometrijski simplicijalni kompleks može se apstrahovati. Ukoliko je K geometrijski simplicijalni kompleks i V skup njegovih temena, a Σ familija skupova temena svih simpleksa iz S tada je (V, Σ) apstraktni simplicijalni kompleks koji odgovara kompleksu K.

Teorema 1.1. Za svaki apstraktni simplicijalni kompleks $\mathcal{K} = (V, \Sigma)$ postoji geometrijski kompleks K, čija je apstrahizacija izomorfna sa $\mathcal{K}$



Slika 1.12: Apstrahizacija jednog geometrijskog simplicijalnog kompleksa

I obrnuto, svaki apstraktni simplicijalni kompleks ima geometrijsku realizaciju i važi:



Slika 1.13: Homeomorfne geometrijske realizacije apstraktnog simplicijalnog kompleksa $K = \{\emptyset, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$

Teorema 1.2. Neka su K' i K'' dve realizacije apstraktnog simplicijalnog kompleksa $\mathcal{K}$, tada su pol, koji ima strukturu Paskalovog trouglaiedri $|K'|$ i $|K''|$ homeomorfni.

Apstraktni simplicijalni kompleksi su u osnovi kombinatorni objekti.

1.4 Ojler-Poenkareova karakteristika

Formula za poliedre nezavisno uvedena od strane Ojlera i Dekarta daje vezu između broja temena T, ivica I i lica S konveksnog poliedra

$$\chi = T - I + S = 2$$

generalizaciju ove formule na CW komplekse, a zatim i simplicijalne komplekse dao je Poenkare:
Ako je K konačno generisan simplicijalni kompleks, tada je Ojlerova karakteristika data formulom:

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i n_i$$

gde je n_i broj simpleksa dimenzije i, a d dimenzija kompleksa K.

Napomenimo još da Ojlerova karakteristika ne zavisi od truangulacije objekta t.j. svi homeomorfni objekti imaju jednako χ, drugim rečima Ojlerova karakteristika je *topološka invarijanta*.

Na slici 1.14.? date su tri različite triangulacije diska. Ojlerova karakteristika simplicijalnog kompleksa prvog diska je 1, potpuno ista kao i za ostale dve. Prirodno, postavlja se pitanje da li Ojlerovu karakteristiku možemo definisati nezavisno od triangulacije, t.j. u terminima veličina različitih od broja simpleksa.
Odgovor je naravno da i to koristeći betijeve brojeve prostora, ali o tom će biti reči kasnije.

POGLAVLJE DRUGO

OSNOVE HOMOLOŠKE TEORIJE

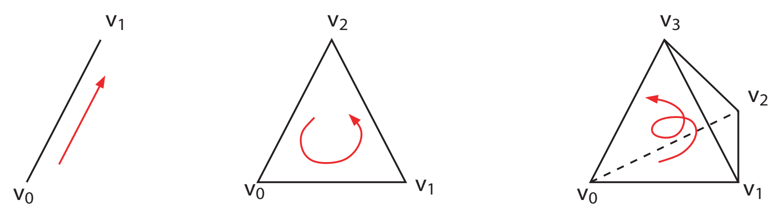
Homološka teorija daje vezu između algebarskih i topoloških koncepata prostora, i to asociranjem prostora sa nizom grupa i asociranjem neprekidnih preslikavanja među prostorima sa homomorfizmima među grupama.
Poincaré, Veblen i njihovi savremenici su homologiju videli u terminima numeričkih invarijanti: Beti brojeva i torzionih koeficijenta. Tek 10 godina kasnije, zahvaljujući radu Emmy Noether homotopija, a s njom i homologija, dobijaju reprezentaciju u terminima Abelovih grupa. Aksiomatsku konstrukciju (uključujući i precizna ograničenja ovog koncepta, koja su bila neodređena dugo vremena) uvode S.Eilenberg I N.Steenrod sredinom XX veka.
Homološka teorija koristi osobine grupa i homomorfizama da razjasni svojsta prostora i preslikavanja medju njima. Takva svostva uključuju , na primer, veze izmedju različitih "dimenzionalnosti", izučavanje koje je zasnovano na konceptu isecanja. Drugi deo algebarske topologije, homotopija, koristi deformacije za istu svrhu.
Jedna od glavnih prednosti homološke nad homotopskom teorijom je neuporeidvo lakše izračunavanje ovih grupa.
Prva izučavana homološka teorija je simplicijalna homologija,kojom ćemo se mi baviti u ovom radu. Zatim su predstavljene druge vrste homologije: singularna, CW, Alexandrov-Čech homologija…koje se takođe baziraju na konceptu kompleksa, ali mogu se definisati na proizvoljnim topološkim prostorima za razliku od simplicijalne koja je definisana samo na simplicijalnim kompleksima i njima homeomorfnim topološkim prostorima.

2.1 Orijentacija

Definicija 2.1. *Neka je K simplicijalni kompleks i σ simpleks iz K dimenzije n sa temenima $V = \{v_0, v_1, \dots v_n\}$ i τ permutacija skupa $\{0, 1, \dots n\}$.*
***Orijentacija simpleksa** je klasa ekvivalencije relacije $\sim$*

$$\{v_0, v_1, \dots v_n\} \sim \{v_{\tau(0)}, v_{\tau(1)}, \dots v_{\tau(n)}\} \qquad akko \quad je \quad permutacija \quad \tau \quad parna.$$

.



Slika 2.1: Jedan izbor orijentacije simpleksa

Relacija $\sim$ deli prostor na dve klase ekvivalencije, stoga u skladu sa intuicijom, imamo pozitivno i negativno orijentisane simplekse.
Orijentisan simpleks σ označavamo $[\sigma]$, a njemu suprotno orijentisan simplex $-[\sigma]$.

Koristeći pojam orijentisanih simpleksa možemo definisati i pojam orijentabilnosti triangubilnih d-dimenzionih mnogostrukosti.

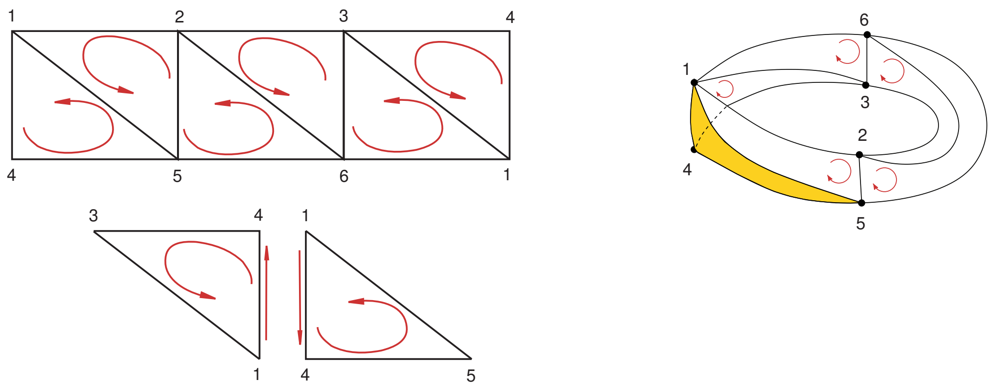
Definicija 2.2. *Dva d-simpleksa koja dele jedno $d-1$ lice σ su* ***"skladno" orijentisana*** *ukoliko indukuju različite orijentacije na σ. Triangubilna mnogostrukost dimenzije d je* ***orijentabilna*** *ukoliko se svi d-dimenzioni simpleksi mogu "skladno" orijentisati, u suprotnom mnogostrukost je neorijentabilna.*

Orijentabilnost mnogostrukosti je takođe topološka invarijanta.[1]

Primer 2.1. Mebijusova traka je neorijentabilna mnogostrukost.
Dokaz:
posmatrajmo triangulaciju na Slici 2.2. Pretpostavimo suprotno i pokusajmo da sve 2-simplekse "skladno" orijentišemo. Primetimo da u tom slučaju orijentacija prvog simpleksa jednoznačno određuje orijentaciju ostalih simpleksa u mnogostrukosti. Neslaganje orijentacije se vidi već kod trouglova 143 i 145 što svakako dovodi do kontradikcije.

Projektivna ravan, Klajnova flaša su takođe neorijentabilne mnogostrukosti.
Sfera, disk, torus su orijentabilne.

[1] za formalan dokaz ove tvrdnje potrebno je uvesti orijentabilnost koristeći osobinu diferencijabilnosti mnogostrukosti



Slika 2.2: Pokušaj orijentacije mebijusove trake

2.2 Granice, lanci, ciklovi

Definicija 2.3. *Neka je K simplicijalni kompleks i* $\sigma = [v_0, v_1 \dots v_k]$ *njegov orijentisani k-dimenzioni simpleks . **Granica simpleksa*** σ *je:*

$$\partial_k(\sigma) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] & \textit{ako je } k > 0 \\ 0 & \textit{u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

gde $\hat{v}_i$ *označava da je tačka* v_i *izbačena.*
Granicu 0-simpleksa (tačke) definisemo kao 0 (nulu).

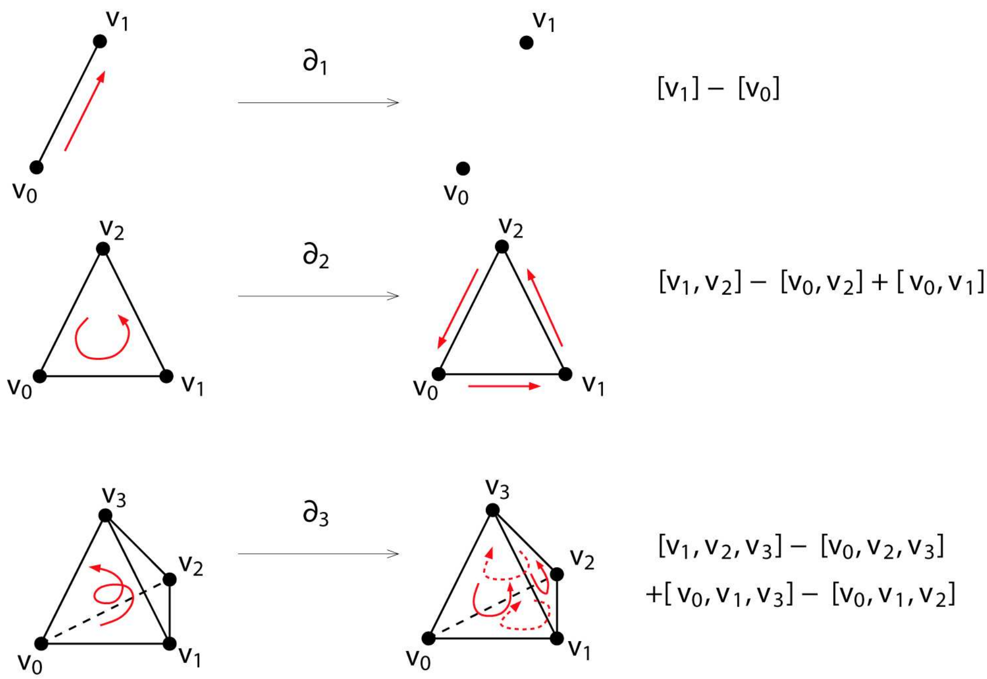
Lance i ciklove definisemo na simplicijalnim kompleksima, analogno, mogu se definisati i na CW, singularnim strukturama.

Definicija 2.4. ***p-lanac*** *je formalna suma p-dimenzionih simpleksa sa koeficijentima iz neke grupe* G.

Radi jednostavnosti, za početak posmatramo koeficijente iz grupe $\mathbb{Z}$.
Na sledećoj slici prikazan je jedan dvodimenzioni simplicijalni kompleks.

Primer 2.2. Neki od 0-dimenzionih lanca na slici 2.4 su $v_2, -v_5$,$v_1 - 3v_6$, generalno svi mogući 0-dimenzioni lanci kompleksa sa slike dati su formulom $\sum_{i=1}^{i=7} \alpha_i v_i$, gde su $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Slično 1-dimenzioni lanci dati su formulom $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i a_i$, a 2-dimenzioni formulom $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i f_i$.

Pojam lanca je čisto formalan i u većini slučajeva nema geometrijsku interpretaciju. (na primer: lanac $2a_1 + 7a_4 - 3a_6$)
Skup svih p-lanaca nekog simplicijalnog kompleksa K sa operacijom "+" formira slobodnu Abelovu grupu, kojoj je neutralni element "0 lanac". Takvu grupu obeležavamo $C_p(K)$.



Slika 2.3: Granice simpleksa dimenzije 1,2 i 3

Definicija 2.5. ***Slobodni lančasti kompleks*** *je* $C = (C_p, \partial_p)$*:*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

gde su C_p *slobodne Abelove grupe generisane p-dimenzionim simpleksima,a* $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ *homomorfizmi:*

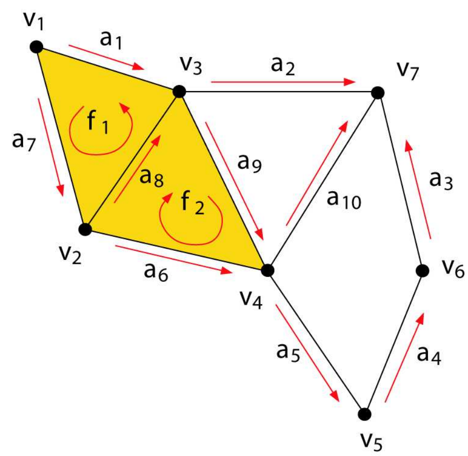
$$\partial_p(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sigma_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \partial_p(\sigma_i)$$

gde je $\partial_p(\sigma_i)$ *granica simpleksa* σ_i
Preslikavanje ∂_0 *definišemo kao nul-preslikavanje.*

Dokažimo sada jednu trivijalnu, ali važnu osobinu graničnog homomorfizma .

Teorema 2.1. $\partial_{p-1}\partial_p = 0$, za svako $k \geq 1$

Dokaz:



Slika 2.4: Orijentacije simpleksa označene su strelicama

$$\begin{aligned}
\partial_{p-1}\partial_p([v_0, v_1, \ldots, v_p]) &= \partial_{p-1}\sum_i (-1)^i [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k] \\
&= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k] \\
&+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_k] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pošto se kompozicija $\partial_{p-1}\partial_p$ anulira na svakom p-simpleksu, anuliraće se i na linearnoj kombinaciji p-simpleksa(t.j. bilo kom p-lancu)■

Ciklovi i granice

Definicija 2.6. *Jedan p-lanac, se naziva p-**cikl** ukoliko je njegova granica nula.*
Lanac c je cikl akko $\partial(c) = 0$

Primer 2.3. na slici 2.4 $(a_9 + a_{10} - a_2)$ je cikl, dok lanac $a_7 + a_6 + a_5$ to nije.
f_1 i f_2 nisu ciklovi, niti je to bilo koja njihova linearna kombinacija.
Generalno, k-ciklovi su:

0-ciklovi	svi 0-lanci
1-ciklovi	zatvoreni 1-lanci i njihove linearne kombinacije
2-ciklovi	2-lanci koji ograničavaju neku zatvorenu oblast i njihove linearne kombinacije
3-ciklovi	3-lanci koji ograničavaju neku zatvorenu 4-dimenzionu oblast i linearne kombinacije
$\vdots$	$\vdots$

Skup svih p-ciklova u odnosu na sabiranje formira Abelovu grupu, koja je podgrupa grupe p-lanaca. Obeležavamo je Z_p, a možemo je videti i kao jezgro graničnog homomorfizma. To jest.

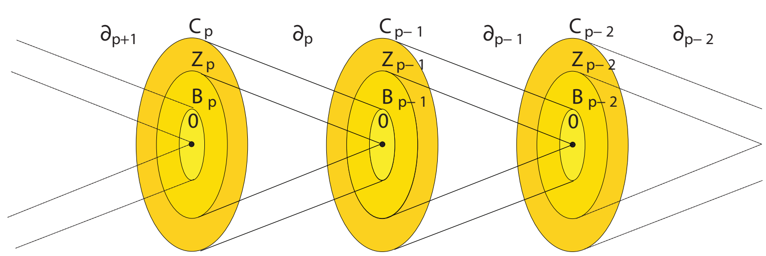
$$Z_p = Ker\partial_p$$

Definicija 2.7. *p-lanac,c, je p-**granica** ukoliko postoji jedan $p+1$ lanac iz grupe C_{p+1} čija je on granica.*
p-lanac c je granica akko postoji c' iz C_{p+1} takav $\partial_{p+1}(c') = c$

Primer 2.4. Na slici 2.4. $a_7 + a_8 - a_1$ je granica (lanca f_1), ali $(a_9 + a_{10} - a_2)$ nije. Da bi k-lanac bio k-granica potrebno je da ograničava neki $k+1$-dimenzioni simpleks ili da je linearna kombinacija takvih granica.

Sve p-granice formiraju podgrupu grupe p-ciklova, oznaka B_p i mogu se videti i kao:

$$B_p = Im\partial_{p+1}$$



Slika 2.5: Grupe lanaca, ciklova i granica: $B_p \subset Z_p \subset C_p$

Teorema 2.2. Za grupe cikova, lanaca i granica važi sledeća inkluzija:

$$B_p \subset Z_p \subset C_p$$

Dokaz: S obzirom da je $B_p = Im(\partial_{p+1})$ i $Z_p = Ker(\partial_p)$, očigledno je da: $B_p \subset C_p$(jer: $\partial_{p+1} : C_{p+1} \to C_p$) i $Z_p \subset C_p$(jer $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$).
Ostaje još da pokažemo $B_p \subset Z_p$:
Iz teoreme 2.1 sledi da $\partial_p\partial_{p+1} = 0$, t.j.

$$\begin{aligned} \forall c \in C_{p+1} \quad \partial_p\partial_{p+1}(c) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial_p\partial_{p+1}(C_{p+1}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \partial_p(Im\partial_{p+1}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad Im\partial_{p+1} \subset Ker\partial_p \\ &\Leftrightarrow \quad B_p \subset Z_p \quad \square \end{aligned}$$

Slika 2.5. ilustruje odnos između grupa granica, ciklova i lanaca.

Primer 2.5. Posmatrajmo sada prizvoljan simplicijalni kompleks K dimenzije n. I njemu asociran slobodni lančasti kompleks:

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Dužina ovog lanca je $n + 1$ zbog toga što ne postoje simpleksi dimenzije $n + 1$ da bi generisali grupu ciklova C_{n+1}.
Iz istih razloga (nepostojanja grupe C_{n+1}) n-ta grupa granica B_n je elementarna (nula).
Primetimo još da je $C_0 = Z_0$ jer je ∂_0 nul preslikavanje.

2.3 Homološke grupe

Na prirodan način uvodimo relaciju ekvivalencije u grupi Z_p $(0 \leq p \leq n)$

Definicija 2.8. *Dva p-cikla z_1 i z_2 su* ***homološki ekvivalentni (homologna)*** *akko postoji granični cikl $b \in B_p$ takav:*

$$z_1 = z_2 + b$$

Specijalno, svaka p-granica je homologna nuli.
Klase ekvivalencije grupe Z_p možemo videti i kao kvocijentnu grupu Z_p/B_p koju nazivamo *homološka grupa*.

Definicija 2.9. *p-ta homološka grupa slobodnog lančastog kompleksa (C_p, ∂_p) je:*

$$H_p = Z_p/B_p$$

gde je $Z_p = Ker\partial_p$, a $B_p = Im\partial_{p+1}$

S obzirom da su grupe C_i konačno generisane Abelove grupe, to su i Zi i B_i, pa samim tim i njihova kvocijentna grupa Hi.
Jedan od osnovnih rezultata klasične algebre je:

Teorema 2.3. Svaka konačno generisana Abelova grupa G izomorfna je grupi oblika:

(dekompozicija grupe invarijantnim faktorima)

$$\mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \mathbb{Z}/t_k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \mathbb{Z}$$

gde su t_i celi brojevi veći od 1,za koje važi $t_i|t_{i+1}$. Rang grupe G je broj Z sumanada u izrazu, dok $\mathbb{Z}/t_i\mathbb{Z}$ čine torziju grupe G, ili

(dekompozicija prostim faktorima)

$$\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \mathbb{Z}_{p_n} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \mathbb{Z}$$

, gde su p_i prosti brojevi ili stepeni prostih brojeva,a broj $\mathbb{Z}$ sumanada je rang grupe G[2].

Kada govorimo o homološkim grupama, rang grupe H_n nazivamo $n - ti$ Betijev broj i obeležavamo β_n,a koeficijente $t_1, \ldots t_k, p_1, \ldots, p_n$ torzioni koeficijenti.

2.4 Invarijantnost

Homologiju smo definisali koristeći simplicijalne komplekse i nadamo se da bilo koja dva simplicijalna kompleksa K i L sa homeomorfnim geometrijskim reprezentacijama $|K| \approx |L|$ imaju iste homološke grupe.
Ako pretpostavimo da se svake dve triangulacije različitih topoloških prostora koji su homemorfni mogu dalje "triangulisati" dok ne dobijemo iste simplicijalne komplekse, naći ćemo se na istom mestu gde je bio Poincaré 1904. godine kada je izneo tvrđenje:

Tvrđenje 2.1. Svake dve triangulacije istog topološkog prostora mogu se dalje podeliti do istog kompleksa.

Ovo tvrđenje, kao Fermaova poslednja lema, deluje jednostavno. Papakyriakopoulos je potvrdio pretpostavku za poliedre dimenzije dva 1943. godine,a Moyse je 1953. dokazao za trodimenzione mnogostrukosti. Na žalost pretpostavka pada u većim dimenzijama za proizvoljne prostore. Milnor je konstruisao kontraprimer 1961.godine za dimenzije šest i veće koristeći lećaste prostore, a Kirby and Siebenmann su konstruisali

[2]u ovom slučaju pojmovi direktna suma ($\oplus$) i Dekartov proizvod ($\times$) su ekvivalentni

kontraprimere mnogostrukosti 1969. Očigledno pretpostavka ne važi za topološke mnogostrukosti, samim tim ne važi ni za topološke prostore uopšte! Jasno, ovo nije način da se pokaže invarijantnost simplicijalne homologije!
Da bi se rešilo pitanje invarijantnosti uvodi se nova homološka teorija : singularna homologija, koja je generalnija i za razliku od simplicijalne definisana je na svim topološkim prostorima, jer je definisana koristeći preslikavanja na proizvoljnim prostorima, pa eliminiše diskusiju o reprezentaciji prostora.
Iako singularna homologija deluje opštije od simplicijalne, činjenica je da su one u većini slučajeva ekvivalentne.

2.5 Ojler-Poincaréova formula

U ovom odeljku pokazaćemo invarijantnost Ojlerove karakteristike koristeći invarijantnost homologije.
Podsetimo se da proizvoljan simplicijalni kompleks K uvek ima konačan lančasti kompleks. Obeležavamo ga C_*.
Takođe, Ojlerova karakteristika simplicijalnog kompleksa K dimenzije n definisana je:

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i n_i$$

gde je n_i broj i-dimenzionih simpleksa.
U skladu sa prethodnim definišemo Ojlerovu karakteristuku lančastog kompleksa.

Definicija 2.10. $\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i rang(C_i)$

Ova definicija je trivijalno ekvivalentna sa definicijom za simplicijalne komplekse, jer su grupe C_i generisane i-dimenzionim simpleksima, pa je $rang(C_i)$ jednak baš n_i , i $\chi(K) = \chi(C_*(K))$[3].
Posmatrajmo lanac $H_*(C_*)$

$$0 \longrightarrow H_n \longrightarrow H_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_0 \longrightarrow 0$$

Preslikavanja među homološkim grupama su indukovana graničnim homomorfizmima: preslikavamo homološku klasu ($[z_i]$)u klasu granice jedne od njenih članova($[\partial(z_i)]$).
Ojlerova karakteristika $H_*(C_*)$ je, prema novoj definiciji, $\sum_i (-1)^i rang(H_i)$. Pošto je rang slobodnog dela homološke grupe njegov Betijev broj, to je :$\chi(H_*(C_*)) = \sum_i (-1)^i \beta_i$.
Homološki funktor čuva Ojlerovu karakteristiku lančastog kompleksa.

[3]Ukoliko posmatrana grupa nije slobodna, njen rang definišemo kao rang slobodnog dela (bez torzije)

Teorema 2.4. (Euler-Poincare)

$$\chi(C_*) = \chi(H_*(C_*))$$

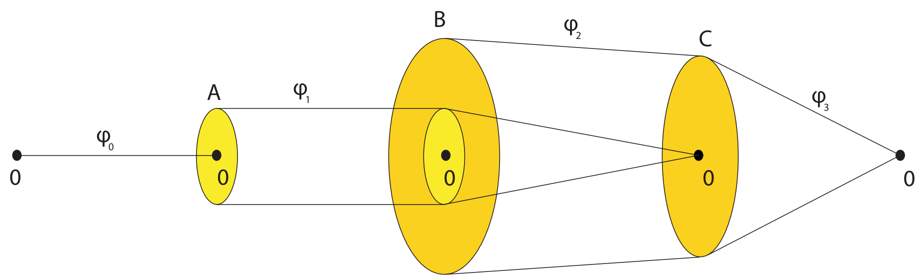
Teorema ustvari tvrdi da $\sum_i (-1)^i n_i = \sum_i (-1)^i \beta_i$, za proizvoljan simplicijalni kompleks K.
Da bi dokazali teoremu, potrebna nam je sledeća lema:

Lema 2.1. Neka su A, B, C konačno generisane Abelove grupe.

$$0 \xrightarrow{\varphi_0} A \xrightarrow{\varphi_1} B \xrightarrow{\varphi_2} C \xrightarrow{\varphi_3} 0$$

gde je $Im\varphi_i = Ker\varphi_{i+1}$. Tada je $rangB = rangA + rangC$

Dokaz: Primetimo:



Slika 2.6: Kratak tačan niz

(i) φ_1 je injektivno preslikavanje: $0 = Im\varphi_0 = Ker\varphi_1$

(ii) φ_2 je surjektivno preslikavanje: $C = Ker\varphi_3 = Im\varphi_2$

Osnovna terorema o homomorfizmima daje $(B/Ker\varphi_2) \cong Im\varphi_2$. Iz (ii) sledi $(B/Ker\varphi_2) \cong C$, pa je $rang(B/Ker\varphi_2) = rangB - rang(Ker\varphi_2)$,a $rangC = rangB - rang(Ker\varphi_2)$.
Iz (i) imamo $A \cong Im(\varphi_1)$ i $rangA = rang(Im\varphi_1)$. Ali, $Im\varphi_1 = Ker\varphi_2$, pa je $rangA = rang(Ker\varphi_2)$. Oduzimanjem dobijamo željeni rezultat $rangB = rangA + rangC$. $\square$
Niz iz ove leme se često koristi u algebarskoj topologiji, stoga ima i ime.

Definicija 2.11. *Niz iz* Leme 2.1. *naziva se* ***kratak tačan niz****.*

Dokaz**(Euler-Poincare)**:Posmatrajmo sledeće nizove:

$$0 \xrightarrow{0} Z_k \xrightarrow{i} C_k \xrightarrow{\partial_k} B_{k-1} \xrightarrow{0} 0$$
$$0 \xrightarrow{0} B_k \xrightarrow{i} Z_k \xrightarrow{\varphi} H_k \xrightarrow{0} 0$$

gde je 0 nul-preslikavanje, i inkluzija, φ preslikavanje koje ciklu $z \in Z_k$ njegovu homološku klasu $[z] \in H_k$. Oba niza su kratka tačna. Primenjujći Lemu 2.1. dobijamo:

$$rangC_k = rangZ_k + rangB_{k-1}$$
$$rangZ_k = rangB_k + rangH_k$$

Uvršćivanjem druge j-ne u prvu i množeci sa $(-1)^k$:

$$(-1)^k rangC_k = (-1)^k rangB_k + (-1)^k rangB_{k-1} + (-1)^k rangH_k$$

I sumiranjem po k[4]:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k rangC_k = (-1)^n rangB_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k rangH_k$$

B_n je trivijalna grupa jer je $C_{n+1} = 0$, pa sledi:

$$\chi(C_*) = \chi(H_*(C_*))$$

□

2.6 Homologija sa koeficijentima

U dosadšnjem radu smo posmatrali homološke grupe sa koeficijentima u $\mathbb{Z}$, međutim postoji vrlo jednostavna generalizacija homološke teorije gde koeficijente uzimamo iz proizvoljne Abelove grupe G. Većina rezultata koje smo do sada naveli važi i u homologiji sa koeficijentima iz G. Jedina , ali za nas jako bitna, razlika je kada počnemo izračunavanje.

Definicija 2.12. *k-ta homološka grupa topološkog prostora K sa koeficijentima u grupi G je:*$H_k(K;G) = Z_k(K;G)/B_k(K;G)$

Koeficijente u lancima $\sum_i n_i \sigma_i$ uzimamo iz grupe G.
Ukoliko G izaberemo tako da je $(G, +, *)$ polje, homološke grupe postaju vektorski prostori bez torzije: $H_k(K;G) = G^r$, gde je r rang(dimenzija) vektorskog prostora H_k. Postavlja se pitanje da li postoji način povezivanja homoloških grupa sa koeficijentima iz $\mathbb{Z}$ i koeficijentima iz G i ako postoji koji je najefektivniji način za taj prelaz. Teroema o univerzalnim koeficijentima daje nam odgovor na ovo pitanje. Ali, pre nego što je formulišemo, potrebno je da uvedemo dva nova funktora koje koristi ova teorema. Mi

[4] Za B_{-1} uzimamo trivijalnu grupu $\{0\}$

ovde nećemo formalno definisati ove funktore, jer oni zasebno predstavljaju obimnu i vrlo interenstantnu oblast, radije ćemo navesti osobine funktora koji će nam omogućiti da razumemo teoremu i iskoristimo je za neophodna izračunavanja.

	tenzor $\otimes$	torzija $*$
G	$\mathbb{Z} \otimes G \cong G$	$\mathbb{Z} * G \cong \{0\}$
G	$\mathbb{Z}_n \otimes G \cong G/nG$	$\mathbb{Z}_n * G \cong Ker(G \xrightarrow{n} G)$
$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_m \cong \{0\}$
$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $d = nzd(m, n)$	$\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $d = nzd(m, n)$
F	$\mathbb{Z} \otimes F \cong F$	$\mathbb{Z} * F \cong \{0\}$
F	$\mathbb{Z}_n \otimes F \cong \{0\}$	$\mathbb{Z}_n * F \cong \{0\}$

Tabela 2.1. Pravila za računanje tenzorskog i torzionog proizvoda za proizvoljne Abelove grupe G, ciklične Z_m i polja F beskonačne karakteristike.

Prvi funktor koji posmatramo je tenzorski proizvod koji slika dve Abelove grupe u Abelovu grupu. Tenzorski proizvod dve grupe A i B, u oznaci $A \otimes B$ je kao Dekartov proizvod sem što su sve funkcije na $A \otimes B$ bilinearne. Tenzorski proizvod je komutativna, asocijativna operacija i distributivna u odnosu na direktan proizvod (sumu) grupa. $((\bigoplus_i A_i) \otimes B = \bigoplus_i (A_i \otimes B))$. Distributivna svojstva je lakše shvatiti ako "direktan proizvod" zamenimo sa "direktna suma", kao što je i slučaj kada su grupe Abelove. Teorema o univerzalnim koeficijentima koristi tenzorski proizvod da preimenuje faktore proizvoda.
Drugi funktor koji nam je potreban je torzioni proizvod, koji takođe slika dve Abelove grupe u Abelovu grupu. Intuitivno, torzioni proizvod grupa A i B, u oznaci $A * B$ daje torzione osobine grupe A u odnosu na B.[5] Torzioni funktor je komutativan i ima distributivna svojstva. Ako je neka od grupa A ili B slobodna, tada je $A * B = \{0\}$, t.j. trivijalna grupa.
U tabeli 2.1. data su pravila za računanje torzionog i tenzorskog proizvoda.

Teorema 2.5. (**o univerzalnim koeficijentima**) Neka je G Abelova grupa. Sledeći niz je kratak tačan:

$$0 \longrightarrow H_k(K) \otimes G \longrightarrow H_k(K; G) \longrightarrow H_{k-1}(K) * G \longrightarrow 0$$

Po teoremi 2.3. k-tu homološku grupu sa koeficijentima u $\mathbb{Z}$ možemo pretstaviti kao $\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}_{p_n} \otimes \mathbb{Z}^{\beta_k}$, gde je β_k k-ti Betijev broj, a p_i stepeni prostih brojeva. Koristeći rezultate iz tabele 2.1. i teoremu o univerzalnim koeficijentima izračunajmo homološke grupe sa koeficijentima u Z_p i F(p je prost broj, F je polje beskonačne karakteristike.)

[5]uobičajena notacija za funktor * je $Tor(A, B)$

1. Slučaj $H_k(K;\mathbb{Z}_p)$.

$$\begin{aligned} H_k(K)\otimes\mathbb{Z}_p &\cong (\mathbb{Z}_{p_1}\otimes\mathbb{Z}_p)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}_{p_n}\otimes\mathbb{Z}_p)\oplus(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_p)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_p)\\ &\cong (\mathbb{Z}_{p_1}\otimes\mathbb{Z}_p)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}_{p_n}\otimes\mathbb{Z}_p)\oplus\mathbb{Z}^{\beta_k}\\ &\cong \mathbb{Z}_{p'_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{p'_n}\oplus\mathbb{Z}_p^{\beta_k}\end{aligned}$$

gde je $p'_i = nzd(p_i,p)$, pa je $p'_i = 1$ ukoliko p_i nije stepen broja p, a $p'_i = p$ ako je p_i stepen p.
Sledi:

$$H_k(K)\otimes\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p^{n'}\oplus\mathbb{Z}_p^{\beta_k}$$

gde je n' broj torzionih koeficijenta koji su stepen broja p. Sa druge strane torzioni funktor eliminiše članove $\mathbb{Z}$ iz proizvoda pa dobijamo:

$$\begin{aligned} H_{k-1}(K)*Z_p &\cong (Z_{q_1}*\mathbb{Z}_p)\oplus\ldots(\mathbb{Z}_{q_l}*\mathbb{Z}_p)\\ &\cong \mathbb{Z}_p^{l'}\end{aligned}$$

gde je l' broj faktora među $q_1,\ldots,q_l$ koji su stepeni broja p
Konačno, iz osobina kratkog tačnog niza imamo:

$$\begin{aligned} H_k(K;\mathbb{Z}_p) &\cong (H_k(K)\otimes\mathbb{Z}_p)\oplus(H_{k-1}(K)*\mathbb{Z}_p)\\ &\cong \mathbb{Z}_p^{l'}\oplus\mathbb{Z}_p^{n'}\oplus\mathbb{Z}_p^{\beta_k}\\ &\cong \mathbb{Z}_p^{l'+n'+\beta_k}\end{aligned}$$

Računajući homologiju sa koeficijentima u $\mathbb{Z}_p$ dobijamo k-tu homološku grupu čija je dimenzija[6] $l'+n'+\beta_k$, što je u opštem slučaju različito od β_k, te zaključujemo da Betijevi brojevi nisu invarijantni pri promeni grupe koeficijenata. Primetimo još da u ovom slučaju nemamo torzioni deo grupe.

2. Slučaj $H_k(K;F)$

$$\begin{aligned} H_k(K)\otimes F &\cong (\mathbb{Z}_{p_1}\otimes F)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}_{p_n}\otimes F)\oplus(\mathbb{Z}\otimes F)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}\otimes F)\\ &\cong F^{\beta_k}\end{aligned}$$

dok je:

$$\begin{aligned} H_k(K)*F &\cong (\mathbb{Z}_{p_1}*F)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}_{p_n}*F)\oplus(\mathbb{Z}*F)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{Z}*F)\\ &\cong \{0\}\end{aligned}$$

Kratak tačan niz iz teoreme o univerzalnim koeficijentima postaje:

$$0\longrightarrow H_k(K)\otimes F\longrightarrow H_k(K;F)\longrightarrow 0\longrightarrow 0$$

[6] H_i računamo sa koeficijentima u polju, samim tim H_n postaje vektorski prostor

pa, je

$$H_k(K;F) \quad \cong \quad H_k(K) \otimes F \cong F^{\beta_k}$$

Očigledno, Betijevi brojevi u slučaju koeficijenata u polju beskonačne karakteristike ostaju isti kao u $\mathbb{Z}$, ali torzioni deo grupe H_k nestaje.

Time smo dokazali sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.2. Ako su $H_i(K;Z)$ konačno generisane Abelove grupe tada:

(a) $H_n(K;\mathbb{Q}) \cong H_n(K;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$, dimenzija $H_n(K;\mathbb{Q})$, kao vektorskog prostora nad $\mathbb{Q}$ je jednaka rangu $H_n(K;\mathbb{Z})$

(b) za prost broj p grupa $H_n(K;\mathbb{Z}_p)$ se sastoji iz

  (i) $\mathbb{Z}_p$ sumanda za svako $\mathbb{Z}$ u $H_k(K;\mathbb{Z})$

  (ii) $\mathbb{Z}_p$ sumanda za svako $\mathbb{Z}_{p^n}$ u $H_k(K;\mathbb{Z})$, $n \geq 1$

  (iii) $\mathbb{Z}_p$ sumanda za svako $\mathbb{Z}_{p^n}$ u $H_{k-1}(K;\mathbb{Z})$, $n \geq 1$

U opštem slučaju homologija sa koeficijentima u polju daje manje informacija od homologije sa koeficijentima u $\mathbb{Z}$, ali su neke od osnovnih osobina zadržane. Homologija sa koeficijentima u Z_2 je jedna od najviše korišćenih, zbog jednostavnosti proračuna i kompatibillnosti sa binarnim sistemom. Mnogi programi za računanje homoloških grupa koriste baš ovo polje za koeficijente[7]. Napomenimo da takvi programi rade sa prostorima bez torzije (orijentabilnim) pa se u tom slučaju zadržava informacija i o Beti brojevima.
Primedba:Ojlerova karakteristika lanca $H_*(C_*)$ ostaje nepromenjena

$$\chi(K) = \sum_i (-1)^i rang H_i(K;\mathbb{Z}) = \sum_i (-1)^i dim H_i(K;F)$$

, za proizvoljno polje F

[7]koeficijenti su 0 ili 1 tako da nema potrebe ni za orijentacijom simpleksa, svaki simpleks je sam sebi inverz $1 = -1$

POGLAVLJE TRECE

PERZISTENTNA HOMOLOGIJA

Kao direktna posledica široke primene i značaja računarske homologije javlja se nova homološka teorija - **perzistentna homologija**.
Prvi put se u literaturi pominje pre 15 godina. Uvedena je nezavisno od strane Ferri-ja i Edelsbrunner-a, a do sada je na njenom razvijanju radilo više istraživačkih grupa (A. Zomorodian, G. Carlsson, J. Harper…).
Perzistentna homologija je našla primenu u biologiji, računarskoj grafici, kartografiji. Trenutno nekoliko projekata koristi baš perzistentnu homologiju kao alat za dobijanje kvalitativnih informacija o ponašanju proteina (proteine docking) i novi rezultati o korisnosti i efikasnosti ovakvog pristupa se tek očekuju.
Treba takođe napomenuti da efektivni algoritmi za izračunavanje perzistentne homologije postoje samo do dimenzije 3, što je u skladu sa postojećim primenama.
Pokušaji generalizacije na veće dimenzije su do sada bili retki i neuspešni (u terminima efektivnosti algoritama za izračunavanje), ipak ovde dajemo teorijski pristup koji važi za sve dimenzije.

3.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju definišemo ključne koncepte koji su potrebni da bi zasnovali teoriju perzistentne homologije.

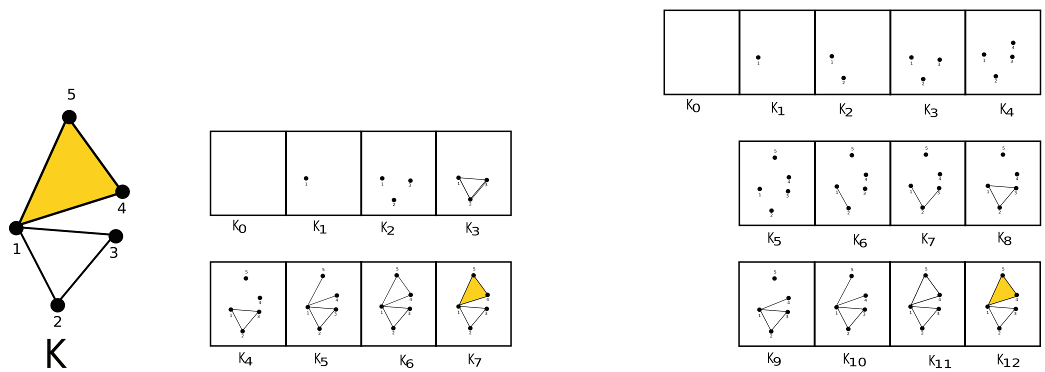
Definicija 3.1. ***Filtracija*** *simplicijalnog kompleksa K je niz kompleksa K_i, takav da:*

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K$$

Proizvoljna filtracija kompleksa K definiše parcijalno uređenje na skupu simpleksa koji čine K. Za nas su od interesa samo one filtracije koje vode do totalnog uređenja. Ovde navodimo dva načina za ovakvu konstrukciju:

(i) simpleks σ_i dodajemo u filtraciju (recimo u kompleks K_j) kada su sva njegova lica već članovi nekog K_i ($i \leqslant j$).

(ii) filtraciju formiramo tako da se K_i/K_{i-1} sastoji iz tačno jednog simpleksa σ_i, za svako i. Drugačije rečeno simpleksi iz K:$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ su poređani tako da je $K_i = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$ za svako $0 \leqslant i \leqslant n$. Ovaj pristup se razlikuje od prethodnog samo po tome što zahtevamo da u filtraciju pri svakom koraku dodamo *samo jedan simpleks*, što slučaj (i) ne zahteva.



Slika 3.1: Kompleks K, primer filracije K opisan u (i) i filtracija opisana u (ii)

Filtraciju možemo videti i kao metodu građenja kompleksa K iz praznog skupa dodavanjem simpleksa.

Jedna od prednosti ovakvog načina predstavljanja simplicijalnog kompleksa je što će nam to omogućiti da pratimo menjanja topoloških invarijanti u skladu sa evolucijom kompleksa. Takođe ćemo imati uvid kada se određena osobina pojavljuje, koliko traje i kada nestaje.
Ispostavlja se da je to vrlo bitno u primenama kada smo primorani da neke informacije klasifikujemo kao nebitne (“noise”). Pored toga, filtraciju je pogodno koristiti ukoliko je posmatrani sistem (objekat) dinamički (promenljiv u vremenu).

3.2 Perzistentne homološke grupe

Posmtaramo simplicijalni kompleks K dimenzije k sa filtracijom kao u slučaju (ii). Među kompleksima $K_i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ postoji inkluzija, dakle, možemo definisati preslikavanje:

$$\emptyset = K_0 \xrightarrow{i_0} K_1 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} K_n = K$$

Svakom od kompleksa K_i asociramo slobodni lančasti kompleks $C_*^{K_i}$, a preslikavanja i_j linearno produžimo na Abelove grupe lančastog kompleksa. U sledećem dijagramu ova zapažanja su prikazana grafički, gde horizontalne strelice predstavljaju granične homomorfizme među grupama u $C_*^{K_i}$, a vertikalne produženje inkluzije među odgovarajućim kompleksima filtracije[1].

$$
\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
C_k^{K_i} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_0^{K_i} & \xrightarrow{\partial} & 0 \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
C_k^{K_{i+1}} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_0^{K_{i+1}} & \xrightarrow{\partial} & 0 \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
C_k^{K_n} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_0^{K_n} & \xrightarrow{\partial} & 0
\end{array}
$$

Za svako $0 \leqslant i \leqslant k$ inkluzija $i : K_{i-1} \hookrightarrow K_i$ indukuje inkluziju na lančastim kompleksima $i_* : C_*^{K_{i-1}} \hookrightarrow C_*^{K_i}$. I važi:

$$i(Z_p^{K_{i-1}}) \subset Z_p^{K_i} \qquad i(B_p^{K_{i-1}}) \subset B_p^{K_i}$$

Teorema 3.1. Preslikavanje $f_p^{i-1} : H_p^{K_{i-1}} \to H_p^{K_i}$ (indukovano inkluzijom $i_* : C_*^{K_{i-1}} \to C_*^{K_i}$) koje proizvoljnu klasu $[\sigma]$ grupe $H_p^{K_{i-1}}$ slika u klasu iz grupe $H_p^{K_i}$ generisanu istim cikom $[\sigma]$, je dobro definisano i homomorfizam je.

Dokaz:
Neka je $[\sigma] = \sigma + B_p^{K_{i-1}}$, tada $f_p^{i-1}([\sigma]) = [\sigma] = \sigma + B_p^{K_i}$.
Pošto je $B_p^{K_{i-1}} \subset B_p^{K_i}$, preslikavanje je dobro definisano.
Proverimo još da li je homomorfizam:
$f_p^{i-1}(\lambda[\sigma]) = f_p^{i-1}([\lambda\sigma]) = [\lambda\sigma] = \lambda\sigma + B_p^{K_i} = \lambda(\sigma + B_p^{K_i}) = \lambda[\sigma]$, gde je $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
f_p^{i-1}(\lambda[\sigma] + \eta[\tau]) &= f_p^{i-1}([\lambda\sigma + \eta\tau]) \\
&= [\lambda\sigma + \eta\tau] \\
&= \lambda\sigma + \eta\tau + B_p^{K_i} \\
&= \lambda\sigma + B_p^{K_i} + \eta\tau + B_p^{K_i} \\
&= [\lambda\sigma] + [\eta\tau] \\
&= \lambda[\sigma] + \eta[\tau]
\end{aligned}
$$

[1]Slobodni lančasti kompleks pridružen K_i je $C_{\hat{k}} \to \dots \to C_0 \to 0$, gde je $\hat{k}$=dimK_i. Zbog preglednosti svakom lancu $C_*^{K_i}$ ćemo s leva dodati dim$K$-dimK_i=$k-$dimK_i praznih skupova. Time ne menjamo ništa u samoj strukturi.

za $\eta, \lambda \in \mathbb{Z}$ i $[\sigma], [\tau] \in H_p^{K_{i-1}}$ ■
Za proizvoljno $[\sigma] \in H_p^{K_{i-1}}$ važi:

$$f_p^{i-1}([\sigma]) = \begin{cases} [0] & \text{,ukoliko je } \sigma \text{ granica nekog lanca u } C_{p+1}^{K_i} \\ \\ [\sigma] & \text{,inače} \end{cases}$$

Na ovaj način možemo pratiti pojavljivanje novih homoloških klasa kroz filtraciju i uočiti njihovo eventualno nestajanje, što i jeste osnovna ideja perzistentne homologije. Definišimo još preslikavanje $f_p^{i,j} : H_p^i \rightarrow H_p^j$ kao kompoziciju indukovanih inkluzija:$f_p^{i,j} = f_p^{j-1} \circ \ldots \circ f_p^i$. Sada imamo sve potrebne elemente da uvedemo pojam perzistentnih homoloških grupa:

Definicija 3.2. *Za svako $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, p-**perzistentna homološka grupa** je:*

$$H_p^{i,j} = \mathit{Im} f_p^{i,j}$$

Primetimo da za Im$f_p^{i,j}$ važi: Im$f_p^{i,j} = Z_p^i / (B_p^j \cap Z_p^i)$, gde su Z_p^i i B_p^i grupa ciklova i granica respektivno kompleksa K_i filtracije K.[2]
Grupe $H_p^{i,j}$ su konačno generisane Abelove grupe za koeficijente iz prstena, a konačno generisani vektorski prostori za koeficijente iz polja(trivijalno sledi iz definicije).
Teorija perzistentne homologije, dozvoljava definisanje betijevih brojeva i torzionih koeficijenata, potpuno analogno definicijama tih veličina u simplicijalnoj, CW, singularnoj homologiji.

Definicija 3.3. *p- **perzistentni betijev** broj kompleksa K sa filtracijom $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K$ je:*

$$\beta_p^{i,j} = \mathit{rang} H_p^{i,j}$$

$\beta_p^{i,j}$ broji homološke klase iz $H_p^{K_i}$ koje postoje i nezavisne su i u grupi $H_p^{K_j}$. Drugačije rečeno, perzistentni betijevi brojevi, broje homološke klase u kompleksu K_j koje su nastale u filtraciji u kompleksu K_i ili ranije.
Takav jedan betijev broj imamo za svaku dimenziju p i za svaki par indeksa (i, j) $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
Da bi vizuelizovali šta se ustvari dešava uvedimo novu veličinu koja će brojati homološke klase koje se rađaju tačno sa kompleksom K_i i umiru sa kompleksom K_j u filtraciji.

$$\mu_p^{i,j} = (\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j})$$

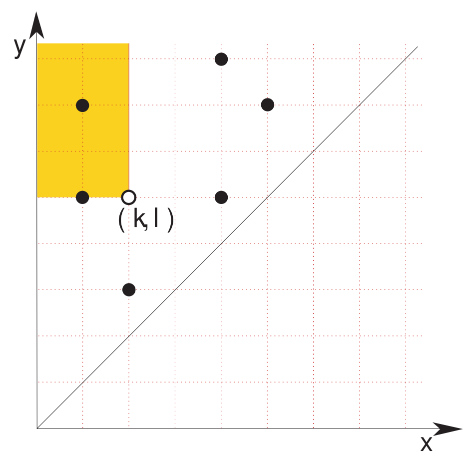
[2] U nekim izvorima perzistentne homološke grupe su definisane na ovaj način: koristeći grupe ciklova i granica, a ne preslikavnje $f_p^{i,j}$. Ove dve definicije su ekvivalentne

$\mu_p^{i,n+1}$ broji homološke klase koje se “rađaju” u K_i, a ne nestaju tokom filtracije. Prva razlika u ovom izrazu daje nam broj klasa homologije nastalih u K_i ili ranije koje postoje i nezavisne su u K_{j-1}, ali nestaju u K_j. Druga razlika broji klase nastale u K_{i-1} ili ranije, koje postoje i nezavisne su u K_{j-1}, ali umiru u K_j. Sledi da $\mu_p^{i,j}$ broji p-dimenzione homološke klase koje nastaju u K_i, a nestaju u K_j.
Jednostavno se proverava da je $\mu_p^{i,i} = 0$. Generalno $\mu_p^{i,j}$ uzima vrednosti 0 ili 1, jer se K_i i K_{i+1} razlikuju tačno u jednom simpleksu,što znači da najviše jedna klasa može biti “rođena” u K_i, t.j. najviše jedna klasa može i da umre dalje tokom filtracije.

Sada je jednostavno povezati $\mu_p^{i,j}$ i $\beta_p^{k,l}$:

$$\beta_p^{k,l} = \sum_{i \leqslant k, l < j} \mu_p^{i,j}$$

Grafički, u xy-ravni ove veličine predstavljamo p-*perzistentnim dijagramom*:



Slika 3.2: Primer p-perzitentnog dijagrama

Svaki par (i, j) za koji važi $\mu_p^{i,j} = 1$ obeležimo tačkom. Zbog nejednakosti $i \leqslant j$ sve tačke će biti iznad dijagonale $y = x$. Iz ovog dijagrama možemo pročitati i vrednosti za $\beta_p^{k,l}$, to jest, dovoljno je izbrojati sve tačke koje se nalaze unutar obeleženog pravougaonika da bi dobili traženi betijev broj,a s obzirom da posmatramo homologiju sa koeficijentima u polju, ovaj dijagram enkodira sve informacije o p-dim perzistentnim homološkim grupama. Za različite vrednosti p imamo različite perzistentne dijagrame.
Napomenimo još da je veličina μ vrlo bitna u sledećem smislu:

Znajući $\mu_p^{i,j}$ tačno možemo odrediti momenat “rođenja” nekog cikla u grupi i vreme njegovog nestajanja u filtraciji. T.j. tačno znamo dodavanjem kojih simpleksa kreiramo nove klase, a kojim uništavamo klase.

Pored kompaktne definicije koristeći dijagrame i činjenice da se perzistentna homologija takođe može efikasno izračunati u $\mathbb{Z}^2$ poglavlje 4.3. U istom poglavlju ističe se značaj perzistentnih dijagrama i veličine μ. Drugi, sveobuhvatniji, način predstavljanja perzistentnih homoloških grupe daju G. Carlsson i A. Zomorodian u [5]. Ovde ćemo izložiti samo osnovnu ideju i nagovestiti mogućnosti koje ovakva teorija nosi.

3.3 Modul-struktura u perzistentnoj homologiji

Podsetimo se par činjenica iz osnovnog kursa algebre na početku.

Definicija 3.4. *Neka je $\mathbf{R} = (R, +, \cdot\quad)$ prsten koji može biti predstavljen kao direktna suma nekih njegovih aditivnih podgrupa, t.j. $\mathbf{R} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{R}_i$[3], gde je I skup indeksa, koji ima strukturu grupoida (u odnosu na operaciju $+$). Prsten $\mathbb{R}$ je **graduisan** ukoliko za svako $i, j \in I$ važi:*

$$\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j \subseteq \mathbf{R}_{i+j}$$

*Elementi $\mathbf{R}_i$ se nazivaju **homogeni** i imaju stepen i, deg $r = i$ za sve $r \in R_i$.*

Jedan od prvih primera koji ilustruje strukturu graduisanog prstena je prsten polinoma:

$$\mathbb{F}[t] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{F}_i[t]$$

gde grupe $\mathbb{F}_i[t]$ predstavljaju polinome promenjive t, stepena i. Očigledno je: $\mathbb{F}_i[t]\mathbb{F}_j[t] \subseteq \mathbb{F}_{i+j}[t]$, šta više, važi $\mathbb{F}_i[t]\mathbb{F}_j[t] = \mathbb{F}_{i+j}[t]$.

Definicija 3.5. *Neka je $\mathbf{M}$ modul nad graduisanim prstenom $\mathbf{R} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{R}_i$. Ukoliko postoje Abelove podgrupe $\mathbf{M}_i \subset \mathbf{M}$, takve da $\mathbf{M} = \bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_j$ i $\mathbf{R}_i\mathbf{M}_j \subseteq \mathbf{M}_{i+j}$, za svako i, j tada je modul $\mathbf{M}$ graduisan.*

U poglavlju "Homologija" smo naveli strukturnu teoremu za konačno generisane module nad PID. Slično tvrđenje važi i za konačno generisane graduisane module.

Teorema 3.2. Svaki konačno generisan graduisan modul $\mathbf{M}$ nad graduisanim PID prstenom $\mathbf{R}$ se jedinstveno može predstaviti u obliku:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \sum^{\alpha_i} \mathbf{R}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \sum^{\gamma_j} \mathbf{R}/d_j\mathbf{R}\right),$$

gde su $d_j \in R$ homogeni elementi, takvi $d_j | d_{j+1}$ i $\alpha_i, \gamma_j \in \mathbf{Z}$ i $\sum^{\alpha}$ je oznaka za α -pomeraj udesno u grading-u.

[3] za svako $r \in \mathbf{R}$, postoje jedinstveni $r_i \in \mathbb{R}_i$ takvi da je $r = \sum_{i\in I} r_i$

I u ovom slučaju, kao i ranije, teorema nam daje dekompoziciju strukture na slobodni i torzioni deo.
Neka je:

$$\mathbf{M} = H_p(K_0) \oplus H_p(K_1) \oplus \ldots \oplus H_p(K_n)$$

Pokažimo da je M jedan graduisani modul nad graduisanim prstenom $\mathbb{F}[t]$[4].

Tvrđenje 3.1. M je graduisan modul nad gradusianim prstenom $\mathbb{F}[t]$.

Dokaz:
Neka je $[\sigma]$ proizvoljna klasa iz $H_p(K_i)$, i preslikavanje $f_p^{i,j} : H_p(K_i) \to H_p(K_j)$ prethodno definisano preslikavanje indukovano inkluzijom među perzistentnim lančastim kompleksima. Tada je sa $t^k[\sigma] = f_p^{i,k+i}([\sigma])$ definisano dejstvo $\mathbb{F}[t]$ na $\mathbf{M}$. t.j.

- $\mathbf{M}$ je modul nad $\mathbb{F}[t]$
  $(M, +)$ je Abelova grupa.
  Za $t^k \in \mathbb{F}[t]$ i $([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]), ([\tau_0], \ldots, [\tau_n]) \in \mathbf{M}$ važi:

  $$\begin{aligned} t^k \cdot (([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]) + ([\tau_0], \ldots, [\tau_n])) &= t^k \cdot ([\sigma_0] + [\tau_0], \ldots, [\sigma_n] + [\tau_n]) \\ &= t^k \cdot ([\sigma_0 + \tau_0], \ldots, [\sigma_n + \tau_n]) \\ &= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, f_p^k([\sigma_0 + \tau_0]), \ldots, f_p^n([\sigma_{n-k} + \tau_{n-k}])) \\ &= (0, \ldots, 0, f_p^k[\sigma_0], \ldots, f_p^n([\sigma_{n-k}])) \\ &+ (0, \ldots, 0, f_p^k([\tau_0]), \ldots, f_p^n([\tau_{n-k}]) \\ &= t^k \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]) + t^k \cdot ([\tau_0], \ldots, [\tau_n]) \end{aligned}$$

  Slično proveravamo i ostale uslove:

  $$(t^k + t^l) \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]) = t^k \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]) + t^l \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n])$$
  $$(t^k t^l) \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]) = t^k (t^l \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]))$$
  $$1 \cdot ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n]) = ([\sigma_0], \ldots, [\sigma_n])$$

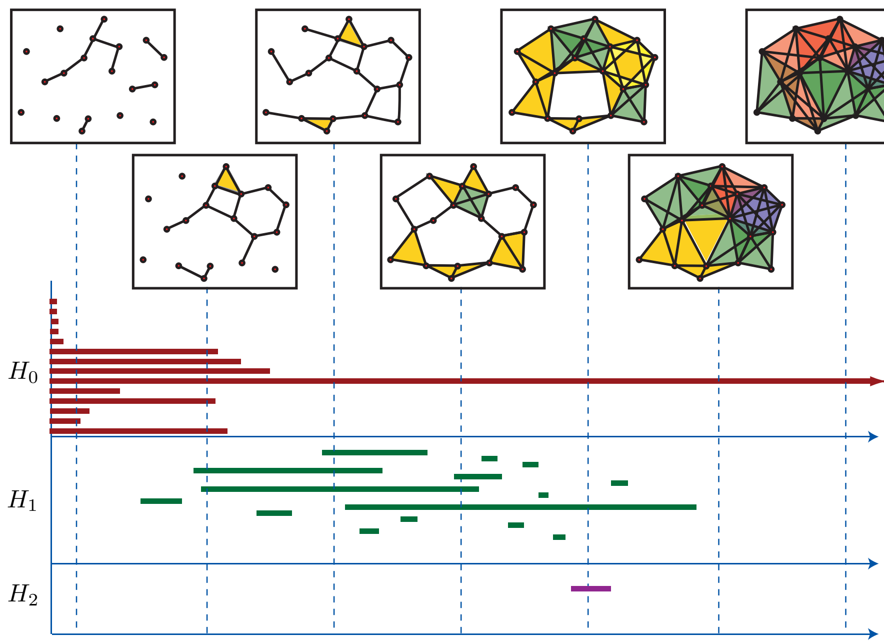
  Sledi da je $\mathbf{M}$ modul nad $\mathbf{F}[t]$

- treba još pokazati da je $\mathbb{F}_i[t] H_p(K_j) \subseteq H_p(K_{i+j})$, a to trivijalno sledi iz definicije dejstva $\mathbb{F}[t]$ na $\mathbf{M}$ i osobina preslikavanja $f_p^{i,j}$

[4]ovde je vrlo važno napomenuti da je $\mathbb{F}$ polje! Za slučaj prstena (kao što je $\mathbb{Z}$) tvrđenje ne važi, t.j. ne postoji prosta klasifikacija perzistentnog modula nad $\mathbb{Z}[t]$, a malo je verovatno da će ikada postojati (vidi [8])

■

Stoga, direktna suma p- homoloških grupa filtracije je jedan graduisani modul nad prstenom $\mathbf{F}[t]$ i ima dekompoziciju na slobodni i torzioni deo (Teorema 3.1.). Ako je klasa $[\sigma]$ "rođena" u K_i i ne "umire" tokom filtracije, ona generiše slobodni deo dekompozicije modula oblika $\sum^i \mathbb{F}[t]$, a ukoliko "umire" u kompleksu K_j generiše torzioni deo modula $\sum^i \mathbb{F}[t][\sigma]/(t^{i-j})$. Sledi da modul-struktura sadrži sve informacije o perzistentnim homološkim grupama! Zomorodian i Carlsson pokazuju da postoji bijekcija između konačno generisanih graduisanih modula nad $\mathbb{F}[t]$ i konačnim skupom uređenih parova $(i, j) \in (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^2$ $(i \leq j)$ (detaljnije u [5]), što inspiriše i vizuelnu reprezentaciju perzistentnih homoloških grupa u formi **barkoda**.



Slika 3.3: Primer barkoda za jednu filtraciju. Rang grupe $H_k(K_i)$ jednak je broju intervala u pojasu H_k koji seku isprekidanu liniju i. Perzisteni Beti broj $\beta_k^{i,j}$ jednak je broju linija u pojasu H_k koje seku obe isprekidane linije i i j.

3.4 Primene

Uprkos svojoj kratkoj istoriji perzistentna homologija je već našla široku primenu i dovela do mnogih zanimljivih rezultata. Jedan od razloga jeste što se perzistentni kompleksi[5] prirodno pojavljuju, u praksi, skoro uvek kada je potrebno da numerički

[5]kompleksi posmatrane filtracije prostora zajedno sa graničnim homorfizmima

(proračunski) odrediti karakteristike posmatranog sistema.
Jedan ilustrativan primer koji će nam odgovoriti na pitanje primena može se naći u radu [6]. Ovde ćemo dajemo kratak opis.

3.4.1 Voronoi kompleks proteinske strukture

Esencijalno pitanje za molekularne biologe koji se bave istraživanjem osobina i funkcija proteina je proces savijanja proteina. Lanci delova amino-kiselina koji se nalaze u amorfnom obliku se u ovom procesu transformišu u "savijeno" stanje, gde su oblik i geometrija odlučujući faktori za funkciju proteina.

> "*What role a protein takes in the grand biological opera*
> *depends on exactly one thing:* ***its shape****.*
> *For a protein molecule, function follows form.*"
> G. D. Rose - [7]

Prirodno, javlja se potreba da se taj proces kompjuterski simulira.
Prvo pitanje je: *Kako, geometrijski, definisati strukturu koja je rezultat ovog procesa?* Čak iako pretpostavimo da je protein samo (statički) skup svojih atoma, nije jasno koji deo prostora protein tačno zauzima. Šta je njegova unutrašnjost, a šta granica?
Jedna od pragmatičnih metoda za rešavanje ovog problema potiče od geometrijske realizacije atoma kao lopte: jezgro posmatramo kao centar i uzimamo da se elektroni nalaze unutar lopte. Dve presecajuće lopte predtsavljaju dva hemijski vezana atoma. Protein je unija takvih lopti.

Model proteina ima dual koji je simplicijalni kompleks (Voronoi kompleks).
Neka je $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i = (x_i, r_i)$ konačna unija lopti koje pretstavljaju model nekog proteina. "Težinska" udaljenost proizvoljne tačke $x \in \mathbf{R}^3$ od lopte B_i je $\pi_{B_i}(x) = \|x - x_i\|^2 - r_i^2$. Ukoliko je $\pi_{B_i}(x) < 0$, tačka x pripada unutrašnjosti lopte B_i, granici ako je $\pi_{B_i}(x) = 0$, a spoljašnjosti ako $\pi_{B_i}(x) > 0$. Voronoi region proizvoljne lopte iz pomenute unije je skup tačaka $\mathbf{R}^3$ za koje je "težinska" udaljenost najmanja:

$$V_{B_i} = \{x \in \mathbf{R}^3 | \quad \pi_{B_i}(x) < \pi_{B_j}(x), \quad \forall 1 \leq j \leq n, \quad j \neq i\}$$

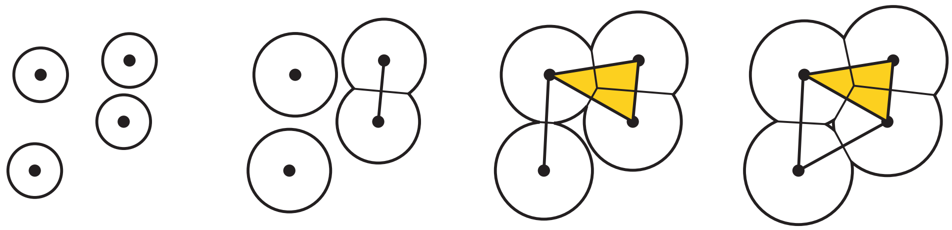
Voronoi regioni razbijaju uniju lopti na konveksne ćelije: $V_{B_i} \cap B_i$.

Pretpostavka je da su lopte u opštem položaju, pa mogu imati najviše četiri (u ravni tri) zajedničke stranice preseka.
Dualni kompleks Voronoi dijagrama je simplicijalni kompleks i definisan je:

$$K = \{\sigma_T | T \subset S, \bigcap_{x_i \in T} (B_i \cap V_{B_i}) \neq \emptyset\}$$

, gde je $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, a σ_T kompleks definisan temnima iz T.

Svaka dva simpleksa u K ili imaju zajedničko lice kao presek ili nemaju presek. Štaviše, ako je $\sigma \in K$, tada su i sva lica σ elementi K, t.j. K jeste simplicijalni kompleks. Na sledećoj slici prikazani su Voronoi kompleksi, gde je skup S isti, dok se r_i razlikuju.



Slika 3.4: Voronoi kompleksi istog rasporeda tačaka u $\mathbb{R}^2$ za različite vrednosti prečnika

Ovo je ništa drugo do filtracija. Već ovde je očigledno koliko je neophodno znati “životni vek” jednog cikla u kompleksu, da bismo razdvojili noseće elemente strukture od onih koje klasifikujemo kao “noise” (smetnje).

Ovo je samo jedan od mnogobrojnih primera gde se primenjuju rezultati ove grane matematike. Pomenimo još i primenu koju je našla u Morsovoj teoriji (bazira na definisanju perzistentnosti za neprekidne funkcije) kao i praktične primene: u vremenskim serijama, računarskoj grafici, pokrivanju senzorskih mreža, ...

Poglavlje Četvrto

Algoritmi

Ranije smo obrazložili koliko je u ispitivanju jedne strukture, značajno i neophodno imati informacije o njenim topološkim invarijantama. U primenama, najveća pažnja posvećena je homološkim grupama i Beti brojevima, iz razloga što se do ovih invarijanti dolazi relativno jednostavno, a one ipak enkodiraju jako bitne osobine prostora.
Za reprezentaciju topološkog prostora u računarstvu, koristi se apstraktni simplicijalni kompleks, i to iz dva razloga:

- apstraktni simplicijalni kompleks je kombinatorni objekat
- granični homomorfizmi imaju reprezentaciju matricama čiji su elementi -1, 0 i 1

Naravno, CW kompleksi imaju daleko jednostavniju kombinatornu strukturu od simplicijalnih, samim tim, na prvi pogled deluju kao mnogo kompaktnije rešenje za predstavljanje topološkog prostora. Uzmimo na primer sferu S^n. Za njen CW kompleks dovoljno je uzeti samo dve ćelije: e^0 i e^n, dok je kao simplicijalni kompleks opisujemo sa jednim n- dimenzionim simpleksom, što znači: $n+1$- simpleks dimenzije 0, $\binom{n+1}{2}$ simpleksa dimenzije 1,... Ukupno 2^{n+1} objekata, što je moramo priznati daleko više od 2 koje nam nudi CW struktura. Ali, pitanje je kako opisati granična preslikavanja CW kompleksa? Još uvek nije pronađeno efikasno rešenje za prevazilaženje ovog problema, tako da dosadašnji algoritmi i njihove implementacije rade isključivo sa simplicijalnim i kubnim[1] kompleksima.

U ovom poglavlju opisaćemo osnovne metode za računanje homoloških grupa sa koeficijentima u $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Q}$. Iako Teorema o Univerzalnim Koeficijentima omogućava prelaz iz prstena $\mathbb{Z}$ u bilo koje polje, postojanje algoritama za homologiju u $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Q}$ opravdava:

- jednostavnost algoritma

[1]Kubni kompleksi su po definiciji iste strukture kao simplicijalni, sem što je, u ovom slučaju, osnovna gradivna ćelija n-dimenziona kocka

- prostori sa kojima radimo su uglavnom bez torzije, stoga je svejedno da li računamo u $\mathbb{Z}$ ili u proizvoljnom polju
- u $\mathbb{Z}_2$ je onemogućen rast koeficijanata do “overflow”-a zbog činjenice da je $1+1=0$

Takođe, daćemo prikaz algoritama koji su već implementirani u neke programske pakete, uporediti ih po efikasnosti, kompleksnosti i mogućnosti da pokriju širok spektar problema.
Još jednom napominjemo da su sva razmatranja koja slede vezana za reprezentaciju topoloških prostora apstraktnim simplicijalnim kompleksima.

4.1 Matrice graničnih homomorfizama

Podsetimo se da je $H_n = Z_n/B_n$, gde je H_n homologija koja se dobija iz lančastog kompleksa:

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Svaka od grupa C_p je konačno generisana simpleksima dimenzije p posmatranog kompleksa, pa neizostavno sledi da granični homorfizam ∂_p možemo definisati na generatorima tih grupa, jer su homomorfizmi. Iz linearne algebre, poznato je da takva preslikavanja možemo interpertirati kao matrice.t.j. za $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ postoji $D_p \in \mathbf{M}_{n\times m}$, gde dim $C_p = m$ i dim $C_{p-1} = n$, takvo da je za proizvoljno $c \in C_p$: $\partial_p(c) = D_pC$
Neka je su generatori grupe C_p: $L^p = \{e_1^p, \dots, e_{n_p}^p\}$ (t.j. $C_p =< e_1^p, \dots, e_{n_p}^p | - >$) i genearatori grupe C_{p-1}: $L^{p-1} = \{e_1^{p-1} \dots, e_{n_{p-1}}^{p-1}\}$ (t.j.$C_{p-1} =< e_1^{p-1}, \dots, e_{n_{p-1}}^{p-1} | - >$).
Tada ∂_p definišemo na baznim elementima (generatorima) i to:

$$\partial_p(e_j^p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \widehat{e_{jn_i}}^{p-1},$$

gde je simpleks $\widehat{e_{jn_i}}^{p-1}$ dobijen izbacivanjem i-tog temena iz e_j^p Pa, je:

$$\mathbf{D_p} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n_i} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_{i-1}1} & x_{n_{i-1}2} & \dots & x_{n_{i-1}n_i} \end{pmatrix}$$

matrica preslikavanja graničnog homomorfizma dimenzije $n_p \times n_{p-1}$,gde su kolone generatori C_p , vrste generatori C_{p-1}, x_{mn} je 0, 1 ili -1.

Pri tom, važi sledeće:

$$x_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{ako } e_m^{p-1} \text{ ne pripada granici simpleksa } e_n^p \\ 1 & \text{ako } e_m^{p-1} \text{ pripada granici simpleksa } e_n^p \\ -1 & \text{ako } -e_m^{p-1} \text{ pripada granici simpleksa } e_n^p \end{cases}$$

Klasičan rezultat linearne algebre kaže sledeće:
Postoje generatori grupa C_p i C_{p-1} za koje je matrica preslikavanja ∂_p dijagonalna. Poznato je da nad skupom generatora možemo izvrštiti konačno mnogo elementarnih operacija, i da kao rezultat, takođe, dobijamo generatorski skup. Elementarne operacije nad L_p i L_{p-1} indukuju elemntarne operacije nad matricom D_p, i obrnuto.

elementarne operacije u L^p	operacije nad kolonama matrice D_p
$e_i^p \to -e_i^p$	$\text{kol}_i \to -\text{kol}_i$
$e_i^p \to e_i^p + ke_j^p$	$\text{kol}_i \to \text{kol}_i + k\text{kol}_j$

Tabela 3.1. kol_i je oznaka za i-tu kolonu matrice D_p,a $\to$ interpretiramo kao *"zameniti sa"*

Slično, definišemo i ementarne operacije nad vrstama (t.j. u skupu generatora L^{p-1})

elementarne operacije u L^{p-1}	operacije nad vrstama matrice D_p
$e_i^{p-1} \to -e_i^{p-1}$	$\text{red}_i \to -\text{red}_i$
$e_i^{p-1} \to e_i^{p-1} + ke_j^{p-1}$	$\text{red}_i \to \text{red}_i + k\text{red}_j$

Tabela 3.2. red_i je oznaka za i-tu vrstu matrice D_p,a $\to$ interpretiramo kao *"zameniti sa"*

Teorema 4.1. Neka su G i G' dve slobodne Abelove grupe i preslikavanje $f : G \to G'$ homomrfizam. Tada postoje generatori grupa G i G' takvi da matrica preslikavanja f ima oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

gde su koeficijenti $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ i važi: $\lambda_i | \lambda_{i+1}$. Nazivamo je *dijagonalna matrica* homomorfizma f ili *Smitova normalna forma* matrice preslikavanja f.

Teorema 4.2. Ako je D_p^* dijagonalna matrica graničnog homomorfizma ∂_p i odgovarajući generatori grupa C_p i C_{p-1} respektivno $\{c_1^p, \dots, c_{n_p}^p\}$ i $\{c_1^{p-1}, \dots, c_{n_{p-1}}^{p-1}\}$.

$$D_p^* = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

Tada su:

(i) $\{c_{k+1}^p, \dots, c_{n_p}^p\}$ generatori grupe Z_p, a

(ii) $\{\lambda_1 c_1^{p-1}, \dots, \lambda_k c_k^{p-1}\}$ generatori grupe B_{p-1}

Napomena 1. Ukoliko posmatramo homologiju u polju $\mathbb{F}$, karakteristike nula, grupe C_i postaju vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, pa je skup generatora $\{\lambda_1 c_1^{p-1}, \dots, \lambda_k c_k^{p-1}\}$ ekvivalentan $\{c_1^{p-1}, \dots, c_k^{p-1}\}$

Dokaz: (Skica)
Pošto je D_p^* matrica linearnog preslikavanja ∂_p za proizvoljan p-lanac $c \in C_p$, sledi:

$$\partial_p(c) = D_p^* C,$$

gde je $C = (c_1, \dots, c_{n_p})^T$ za $c = \sum_{k=1}^{n_p} c_k e_k^p$.
Tada je Ker ∂_p generisan baznim vektorima koji odgovaraju nula-kolonama u D_p^* (elementarno se pokazuje uz osnovno poznavanje linearne algebre).
Slično razmatranje važi i za Im ∂_p. ■

Dakle, za poznavanje homoloških invarijanti simplicijalnog kompleksa dovoljno je znati dijagonalnu formu matrice graničnih homomorfizama, što nas dovodi do novog pitanja: *kako najefikasnije izračunati dijagonalnu formu matrice*?
U zavisnosti da li računamo homologiju u polju ili prstenu $\mathbb{Z}$ pristupi ovom problemu se razlikuju.

Pre nego što nastavimo, dajemo kratak rezime sličnosti i razlika ovih homologija:

- Homologija u $\mathbb{Z}$ potpuno je određena Smithovom normalnom formom, Beti brojevi, torzioni koeficijenti i generatori[2] su enkodirani u toj strukturi.

[2]prilikom procesa transformacije matrice u SNF možemo pratiti i transformacije baze

- Homologije u $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_2$ potpuno su određene gornje dijagonalnom matricom koja se dobija prilikom procesa Gausove eliminacije (takođe imamo informaciju o generatorima homoloških grupa prateći transformaciju generatora C_i tokom eliminacije). $H_k = \mathbb{Q}^{n_p - \text{rang} D_p - \text{rang} D_{p+1}}$ ($H_k = {\mathbb{Z}_2}^{n_p - \text{rang} D_p - \text{rang} D_{p+1}}$) [3].

- Za proizvoljan simplicijalni kompleks K, važi sledeće:

$$\beta_k(K, \mathbb{Z}) = \beta_k(K, \mathbb{Q}) \neq \beta_k(K, \mathbb{Z}_2)$$

- Torzioni koeficijenti postoje samo u $\mathbb{Z}$.

4.1.1 Smithova Normalna Forma

Na konceptualnom nivou izračunavanje homologije sa koeficijentima u $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ se razlikuje vrlo malo, i to uglavnom iz dva razloga: prvo, $\mathbb{Q}$ je kvocijentno polje od $\mathbb{Z}$ i drugo $\mathbb{Z}$ je Euklidski domen. Poslednje svostvo nam govori da su transformacije baze pri Gausovoj eliminaciji nad $\mathbb{Z}$ potpuno iste kao i transformacije u odgovarajućoj bazi nad $\mathbb{Q}$. Standardan način za izračunavanje Smitove normalne forme matrice je Gausov eliminacioni algoritam. Ako razmatramo kompleksnost, postoji fundamentalna razlika između Gausove eliminacije nad $\mathbb{Q}$ i standardne Euklid-Gausove eliminacije nad $\mathbb{Z}$. U racionalnom slučaju izračunavanje je polinomijalno u zavisnosti od dimenzija matrice, jer možemo kontrolisati rast koeficijanata (vidi [16]). U slučaju anolognih operacija nad $\mathbb{Z}$ ni rast koeficijenata ni broj aritmetičkih operacija se ne može polinomijalno ograničiti. Koristeći modularne strukture Kannan i Bachem [17] daju prvi polinomijalni algoritam za izračunavanje Smithove normalne forme, kasnije modifikovan i unapređen od strane mnogih autora [18].

Modularni pristup koji je Kannan dao važi za matrice sa proizvoljnim koeficijentima iz $\mathbb{Z}$. S obzirom na činjenicu da su matrice graničnih homomorfizama "sparse" sa elemntima -1, 0 i 1, uvek je moguće izvršiti bar nekoliko Gausovih eliminacionih koraka i u većini slučajeva moguće kontrolisati rast koeficijenata.

Zbog toga, u postojeće programske pakete, implementirani su algoritmi koji rade na sličnoj osnovi kao Gausov eliminacioni, ali sa modifikacijama. U najgorem slučaju algoritam radi u vremenu $O(n^3)$.

Odličan prikaz tri efikasna algoritma za računanje SNF može se naći u [10].

Metod Smitove normalne forme omogućava izračunavanje homoloških grupa u prstenu $\mathbb{Z}$, što pored informacija o Beti brojevima, daje i torzione koeficijente, ali i mogućnost nalaženja generatora homoloških grupa.

[3] oznake su u skladu sa prethodnim u ovom poglavlju

Samim tim, ovim metodom dobijamo informacije koje u potpunosti opisuju homološke grupe simplicijalnih kompleksa.

4.2 Kombinatorni laplasijan

4.2.1 Dualni vektorski prostori i dualni homomorfizmi

Za proizvoljni vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{F}$, definišemo dual V^* kao prostor svih linearnih funkcionala iz V u $\mathbb{F}$, t.j.

Definicija 4.1. *Vektorski prostor*

$$V^* = \{\varphi : V \to \mathbb{F} \quad | \quad \varphi \textit{ je linearno preslikavanje}\},$$

je ***dual vektorskog prostora*** V.

S obzirom da se u ovom radu bavimo konačnim simplicijalnim kompleksima, odakle proizilaze konačno generisane Abelove grupe slobodnog lančastog kompleksa u homologiji[4], zadržaćemo se samo na razmatranjima osobina konačno dimenzionih vektorskih prostora.

Tvrđenje 4.1.

$$V^* \cong V$$

Dokaz:
Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V. Za bazu vektorskog prostora V^* možemo uzeti skup $\mathcal{L} = \{e^1, \ldots, e^n\}$, gde su $e^i : V \to \mathbb{F}$ linearna preslikavanja:

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq j \\ 1, & \text{za } i = j \end{cases}$$

Jednostavno se pokazuje da je $\mathcal{L}$ jedna baza vektorskog prostora V^*, odakle sledi i izomorfizam prostora V i V^*. ■

Tvrđenje 4.2. Ukoliko je V konačno generisan vektorski prostor sa bazom $\mathcal{L} = \{e^1, \ldots, e^n\}$, tada je bilinearnom formom:

$$<,>: V \times V \to \mathbb{F}$$

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq j \\ 1, & \text{za } i = j \end{cases}$$

zadat skalarni proizvod na V.

[4] ukoliko radimo sa koeficijentima u polju C_i su konačno generisani vektorski prostori

Tvrđenje 4.3. Za proizvoljan linearni funkcional $\varphi : V \to \mathbb{F}$ postoji jedinstven vektor $v \in V$, takav da je:

$$\varphi(u) =< u, v >,$$

za svako $u \in V$, gde je $<, >$ skalarni proizvod u V.

Dualnost definišemo i na linearnim preslikavanjima vektorskih prostora. Linearnoj transformaciji (homomorfizmu) $T : V \to W$ asociramo $T^* : W^* \to V^*$, tako da T^* proizvoljan funkcional $f \in W^*$ preslikava u $f \circ T$, t.j.

$$T^* : \quad f \longmapsto f \circ T, \qquad f \in W^* \quad (f : W \to \mathbb{F})$$

za svako $v \in V$, važi: $T^*(f)(v) = f(T(v))$.
Pošto su f i $T^*(f)$ funkcionali, iz tvrđenja 4.3. sledi:

- postoji jedinstveno $\hat{w} \in W$, takvo da je $f(w) =< \hat{w}, w >$ za svako $w \in W$
- postoji jedinstveno $\hat{v} \in V$, takvo da je $T^*(f)(v) =< \hat{v}, v >$

t.j. jednakost $T^*(f)(v) = f(T(v))$ se može zapisati $< \hat{v}, v >= T^*(f)(v) = f(T(v)) =< \hat{w}, T(v) >$, za svako $v \in V$. U literaturi se može naći i ovakva definicija dualnog homomorfizma:

Definicija 4.2. *Neka je $T : V \to W$, tada je dualni operator $\widehat{T}^* : W \to V$ preslikavanje za koje važi:*

$$< Tv, w >=< v, \widehat{T}^* w >,$$

za svako $v \in V$

Jednostavno se proverava da je $\widehat{T}^*$ linearno. A, $\widehat{T}^* w$ je ništa drugo do $\hat{v}$ iz prethodnog razmatranja.

Stoga, zaključujemo da je T^* jedinstveno određeno sa $\widehat{T}^*$, i obrnuto. Matrice tih preslikavanja su jednake.

4.2.2 Kombinatorni Laplasijan

Podsetimo se da je slobodni lančasti kompleks triangulacije proizvoljnog topološkog prostora K niz konačno generisanih Abelovih grupa C_i sa homomorfizmima ∂_i:

$$\ldots \to C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ukoliko posmatramo homologiju sa koeficijentima u polju $\mathbb{F}$ karakteristike nula, grupe C_i postaju vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, a homomorfizmi linearna preslikavanja.

Neka je $E_i = \{e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i\}$ skup svih simpleksa dimenzije i kompleksa K. Tada je E_i jedna baza vektorskog prostora C_i. Elementarno se proverava da je sa:

$$< \sigma, \tau >=< \sum_{k=1}^{n_i} x_k e_k^i, \sum_{k=1}^{n_i} y_k e_k^i >= \sum_{k=1}^{n_i} x_k y_k$$

zadat skalarni proizvod u C_i.
Operator $\partial_i^* \in \mathcal{L}(C_{i-1}, C_i)$, dualan operatoru $\partial_i \in \mathcal{L}(C_i, C_{i-1})$, definišemo tako da za svako $\alpha \in C_i$ i $\beta \in C_{i-1}$ važi jednakost:

$$< \partial_i \alpha, \beta >=< \alpha, \partial_i^* \beta >,$$

Za dalja razmatranja u ovom poglavlju biće neophodno da se podsetimo nekih rezultata elementarne linearne algebre:

Lema 4.1. Za proizvoljan konačno dimenzioni vektorski prostor V i linearno preslikavanje $T \in \mathcal{L}(V, V)$ važi:

$$V \cong \text{Ker}T \oplus \text{Im}T$$

uopšte, ako je U proizvoljan potprostor prostora V važi:

$$V \cong U \oplus U^\perp,$$

gde oznaka $U^\perp$ stoji za ortogonalni komplement vektorskog prostora $U \subset V$.[5]

U daljem tekstu, radi jednostavnosti zapisa, operator $\widehat{T}^*$, definisan u prethodnom delu, označavamo T^*.

Lema 4.2. Ako je $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tada:

(i) $\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\perp$

(ii) $\text{Im}T^* = (\text{Ker}T)^\perp$

(iii) $\text{Ker}T = (\text{Im}T^*)^\perp$

(iv) $\text{Im}T = (\text{Ker}T^*)^\perp$

Dokaz dajemo samo za tvrđenje (i), ostalo se slično pokazuje.
Dokaz:
Neka je $w \in W$

$$\begin{aligned} w \in \text{Ker } T^* &\iff T^* w = 0 \\ &\iff < v, T^* w >= 0 \text{ za svako } v \in V \\ &\iff < Tv, w >= 0 \text{ za svako } v \in V \\ &\iff w \in (\text{Im } T)^\perp. \blacksquare \end{aligned}$$

[5] $U^\perp = \{v \in V | < u, v >= 0, \quad \forall u \in U\}$

Lema 4.3. Za proizvoljno linearno preslikavanje $T \in \mathcal{L}(V, W)$ konačno generisanih vektorskih prostora U i W važi:

$$\text{Im } T = \text{Im } (T \circ T^*)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \text{Im } (T \circ T^*) &= \text{Im } (T(\text{Im } T^*)) \\ &= \text{Im } (T(\text{Ker } T)^{\perp}) \\ &= \text{Im } T. \blacksquare \end{aligned}$$

Pošto smo upoznati sa neophodnim metodama, sada možemo i definisati kombinatorni Laplasijan:

Definicija 4.3. ***Kombinatorni Laplasijan*** *je homomorfizam $\triangle_i : C_i \to C_i$ definisan sa:*

$$\triangle_i = \partial_{i+1}\partial^*_{i+1} + \partial^*_i\partial_i$$

Pošto je $C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial^*_i} C_i$ i $C_i \xrightarrow{\partial^*_{i+1}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i$ preslikavanje $\triangle$ je dobro definisano, a homomorfnost sledi iz osobina ∂ i ∂^*.

Tvrđenje 4.4. (Hodžova teorija) Za svako $0 \leq i \leq n$ važi: $\mathcal{H}_i = \{c \in C_i | \triangle_i c = 0\} \cong H_i$(svakom elementu $\mathcal{H}_i$ odgovara tačno jedna klasa H_i i obrnuto).
Pri tom važi:

$$C_i = \mathcal{H}_i \oplus \text{Im}(\partial_{i+1}) \oplus \text{Im}(\partial^*_i)$$

Dokaz:
S obzirom da je $\triangle_i \in \mathcal{L}(C_i, C_i)$, na osnovu Leme 4.1. sledi

$$C_i \cong \text{Ker } \triangle_i \oplus \text{Im } \triangle_i$$

Koristeći Lemu 4.3. i činjenicu da su $T_1 = \partial^*_i\partial_i$ i $T_2 = \partial_{i+1}\partial^*_{i+1}$ važi $T_1T_2 = T_2T_1 = 0$[6] sledi:

$$\begin{aligned} \text{Im } \triangle_i &\cong \text{Im } (\partial_{i+1}\partial^*_{i+1} + \partial^*_i\partial_i) \\ &\cong \text{Im } (\partial_{i+1}\partial^*_{i+1}) \oplus \text{Im } (\partial^*_i\partial_i) \\ &\cong \text{Im } \partial_{i+1} \oplus \text{Im } \partial^*_i \end{aligned}$$

Dok za C_i važi po Lemi 4.1.:

$$C_i \cong \text{Ker } \partial_i \oplus (\text{Ker } \partial_i)^{\perp},$$

[6] sledi Im$T_1 \subset$ KerT_2 i Im$T_2 \subset$ KerT_1, pa je: $C_i =$Im$T_1 \oplus$Im$T_2 \oplus A$, gde je $A \subset$ Ker$T_1 \cap$ KerT_2, sledi Im$(T_1 + T_2) =$Im$T_1 \oplus$ImT_2

Pa, sledi:

$$\begin{aligned}\text{Ker } \partial_i \oplus (\text{Ker } \partial_i)^{\perp} \cong C_i &\cong \text{Ker } \triangle_i \oplus \text{Im } \triangle_i \\ &\cong \text{Ker } \triangle_i \oplus \text{Im } \partial_{i+1} \oplus \text{Im } \partial_i^* \\ &\cong \text{Ker } \triangle_i \oplus \text{Im } \partial_{i+1} \oplus (\text{Ker } \partial_i)^{\perp}\end{aligned}$$

T.j. važi:

$$C_i \cong \text{Ker } \partial_i \oplus (\text{Ker } \partial_i)^{\perp} \cong \text{Ker } \triangle_i \oplus \text{Im } \partial_{i+1} \oplus (\text{Ker } \partial_i)^{\perp}$$

Dakle,

$$\text{Ker } \partial_i \cong \text{Ker } \triangle_i \oplus \text{Im } \partial_{i+1}$$

A, iz poslednje jednakosti dobijamo:

$$\text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1} \cong \text{Ker } \triangle_i$$

što tvrdi teorema.■

4.2.3 Kogranična preslikavanja

Sa aspekta kohomološke teorije, preslikavanje ∂^*, koje je osnovni pojam u definisanju kombinatornog Laplasijana, ima dodatna zanimljiva svojstva. Naime, $\partial^* : C_i \to C_{i+1}$, u skladu sa razmatranjem u 4.2.1. jedinstveno je određeno dulanim preslikavanjem: $\partial^* : C_i^* \to C_{i+1}^*$.
Posmatrajmo slobodni lančasti kompleks:

$$\ldots \longleftarrow C_{n+1}^* \xleftarrow{\delta} C_n^* \xleftarrow{\delta} C_{n-1}^* \longleftarrow \ldots$$

,gde su grupe C_i^* =Hom $(C_i, G) = \{\varphi : C_i \to G \quad | \quad \varphi$ je homomorfizam$\}$ Abelove, a preslikavanja δ : Hom $(C_n, G) \to$ Hom (C_{n-1}, G) definisana sa:

$$\delta\varphi([v_0, \ldots, v_{n+1}]) = \sum_j (-1)^j \varphi([v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_{n+1}])$$

Poslednja suma je ništa drugo do: $\varphi(\partial[v_0, \ldots, v_{n+1}])$. Pa, imamo: $\delta\varphi = \varphi\partial$, za svako $\varphi \in C_i^*$.
Operator δ je dualno preslikavanje graničnog homomorfizma ∂.
To jest $\delta = \partial^*$. Šta više, ako posmatramo homologiju konačno dimenzionog simplicijalnog kompleksa sa koeficijentima u polju, imamo izomorfizam među homološkim i kohomološkim grupama.
Interpretacija kombinatronog Laplasijana koristeći ko-granična preslikavanja, nam omugućava da dublje shvatimo pojam i funkciju ovog operatora, i rasvetlimo analogiju sa klasičnom definicijom Laplasovog operatora.
Za uvod u kohomološku teoriju čitaoca upućujemo na [2].

4.2.4 Algoritmi

Ono što čini kombinatorni Laplasijan posebno pogodnim za računanje homologije sa koeficijentima u polju jeste činjenica da kompletne informacije o homologiji(u $\mathbb{F}$) možemo dobiti iz matrice preslikavanja $\triangle_i$, koja je , u skladu sa razmatranjima u prethodnom poglavlju: $D_{i+1}D_{i+1}^T + D_i^T D_i$, gde je D_i matrica graničnog homomorfizma ∂_i.
Pokažimo i formalno ovo tvrdjenje:

Tvrđenje 4.5. Matrica preslikavanja ∂_i^* je transponat matrice preslikavanja ∂_i.

Dokaz:
Neka je $\alpha = \sum_{k=1}^{n_i} a_k e_k^i = (a_1, \ldots, a_{n_i})^T \cdot (e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i) = A^T \cdot E_i$, a $\beta = \sum_{k=1}^{n_{i-1}} b_k e_k^{i-1} = (b_1, \ldots, b_{n_{i-1}})^T \cdot (e_1^{i-1}, \ldots, e_{n_{i-1}}^i) = B^T \cdot E_{i-1}$, gde je E_i baza vektrorskog prostora C_i.
Tada:

$$
\begin{aligned}
< \partial_i^*(\alpha), \beta > = < \alpha, \partial_i(\beta) > \quad &\Longleftrightarrow \quad (D_i^* \cdot A)^T \cdot B = A^T \cdot D_i \cdot B \\
&\Longleftrightarrow \quad (D_i^* \cdot A)^T = A^T \cdot D_i \\
&\Longleftrightarrow \quad A^T \cdot (D_i^*)^T = A^T \cdot D_i \\
&\Longleftrightarrow \quad (D_i^*)^T = D_i \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Sada je jasno da Beti-broj β_i dobijamo kao rang$\triangle_i$. Programski paket za MATLAB "Plex" koristi ovaj metod za dobijanje Beti brojeva simplicijalnog kompleksa.
Takođe, baza vektorskog prostora H_i može se jednostavno dobiti kao baza jezgra operatora $\triangle_i$.
Algoritam za izračunavanje ranga matrice se zasniva na sličnim principima kao za računanje SNF, stoga je kompleksnost, kao i ranije, $O(n^3)$. Jedina prednost ovakvog pristupa je što matrica preslikavanja $\triangle_i$ enkodira sve informacije o H_i, dok je kod SNF pristupa potrebno izračunati SNF dve granične matrice.

Joel Friedman u [12] koristi kombinatorni Laplasijan i inkrementalni metod za sopstvene vrednosti matrice i predlaže algoritam za izračunavanje Beti brojeva. Osnovna prednost ove metode je velika ušteda memorijskog prostora.
Okosnica njegove metode je u efikasnom računanju ranga matrice $A = \triangle_i$ zasnovana na poznavanju sopstvenih vrednosti matrice- "the power method".
Za proizvoljan vektor $v = v_0 \in C_i$, formira niz $v_r = A^r v$ i posmatra:

$$
T(v_r) = \frac{< Av_r, Av_r >}{< v_r, v_r >} = \frac{< v_{r+1}, v_{r+1} >}{< v_r, v_r >},
$$

gde je λ_1 najveću sopstvena vrednost matrice A. Niz $T(v_r)$ konvergira ka λ_1^2. Za dovoljno veliko r, $T(v_r)$ će biti proizvoljno blizu λ_1^2.

U istom maniru nastavlja, i kao rezultat ima niz približnih sopstvenih vrednosti matrice $\triangle_i$.
Nakon toga, procenjuje sa veravotnoćom δ, koja je input argument, verodostojnost rezultata.
Jedan od glavnih nedostataka ove metode je mogućnost greške.
Napomenimo još da je Friedman-ovim algoritmom daleko jednostavnije proveriti da li je neki Beti broj nula nego ustvari izračunati ga!

Kompleksnost algoritma je $O(n_i(n_0 - i)(i+1)logN)$, gde je n_i broj i- dimenzionih simpleksa,a N =max$\{n_{i-1}, n_i, n_{i+1}\}$.

4.3 Algoritmi Perzitentne homologije

4.3.1 Algoritam za računanje perzistenthih homoloških grupa u $\mathbb{Z}_2$

Algoritam koji ćemo prezentirati radi sa koeficijentima u $\mathbb{Z}_2$. S obzirom na činjencu da Betijevi brojevi zavise od koeficijenata, kao i homološke grupe, ovo izračunavanje ima ograničenu primenu.T.j. samo ukoliko radimo sa prostorima bez 2-torzije Betijevi brojevi u $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ su isti.
Algoritam koji opisujemo je verzija redukcije matrice graničnog homomorfizma.
Neka je D granična matrica koja kombinuje sve dimenzije u jednoj. D je kvadratna i dimenzije $n \times n$, gde j-ta kolona predstavlja simpleks σ_j i i-ti red predstavlja simpleks σ_i:

$$D[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{, ako } \sigma_i \prec \sigma_j \text{ i dim}\sigma_i = \text{dim}\sigma_j - 1 \\ 0 & \text{, inače} \end{cases}$$

Algoritam koristi operacije nad kolonoma da transformiše matricu D u drugu $0-1$ matricu R.
Posmatrajmo j-tu kolonu matrice D-$\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{nj} \end{pmatrix}^T$, gde su a_{ij} nule ili jedinice i uočimo jedinicu sa najvećim indeksom reda (ukoliko je kolona ne-nula). Obeležimo ga $low(j)$ (od "lowest one in column"). Ako su svi elementi uočene kolone nule, tada $low(j) = 0$.
Redukovanu matricu R dobijamo koristeći sledeći algoritam čiji *pseudo-kod* sledi:

```
for j=1 to n
  while postoji j' < j takvo da low(j) = low(j') ≠ 0
    dodaj kolonu j' koloni j
  endwhile
endfor.
```

Ako je $low(j') = low(j)$, dodavanjem kolone j' koloni j elimišemo jedinicu sa na-

jvećim indeksom vrste u koloni j.[7]
Sada iz matrice R možemo jednostavno pročitati Betijeve brojeve. I to na sledeći način: Neka je $\#Zero_p(R)$ broj nula-kolona koje odgovaraju p-simpleksima u matrici R, a $\#Low_p(R)$ broj najnižih jedinica u vrstama koje odgovaraju p-simpleksima. Rang matrice R, broj ne-nula kolona, isti je kao i rang matrice D, pa je rangB_{p-1} = rangD_p= $\#Low_{p-1}(R)$, a rang$Z_p = n_p-$ rang$D_p = \#Zero_p(R)$, gde su B_p, Z_p, D_p matrice granica, ciklova i graničnog homomorfizma , respektivno.
Tada:

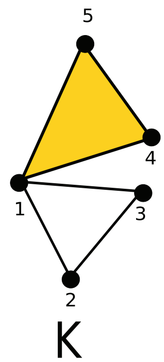
$$\text{rang}H_p(K) = \#Zero_p(R) - \#Low_p(R)$$

U pozadini ovog razmatranja stoji nekoliko činjenica koje potvrđuju ispravnost zaključivanja:

- sve ne-nula kolone matrice R su linearno nezavisne
- $\#Zero_p(R)$ je broj elemenata baze grupe Z_p, šta više kolone matrice D koje odgovaraju p-simpleksima, a koje se redukcijom matrice transformišu u nulu predstavljaju bazu grupe Z_p
- $\#Low_{p-1}(R)$ je broj elemenata baze grupe B_p, broj najnižih jednica u vrstama koje odgovaraju p-simpleksima, predstavlja ustvari broj linearno nezavisnih kolona koje odgovaraju $p+1$-simpleksima.

Bitna karakteristika matrice R jeste da u sebi sadrži informacije o perzistentnim Betijevim brojevima, a samim tim i o perzistentnim homološkim grupama.
Naime, posmatrajmo proizvoljnu kolonu i matrice R koja odgovara p-dimenzionom simpleksu, i pretpostavimo da nije nula. Obeležimo indeks vrste gde se nalazi najniža jedinica sa j. Tada je $\mu_p^{i,j} = 1$.
Koristeči se formulom $\beta_p^{k,l} = \sum_{i\leq k, l<j} \mu_p^{i,j}$, $\beta_p^{k,l}$ dobijamo sumiranjem svih najnižih jedinica u pravougaoniku koji određuje k-ta vrsta i l-ta kolona, bez člana na mestu (k,l).

[7] podsetimo se da radimo u polju $\mathbf{Z}_2$. 1+1=0



Slika 4.1: Simplicijalni kompleks

Graničnu matricu D dobijamo na već opisani način. Element na mestu (i, j), matrice je 1 ako je simpleks koji odgovara i-toj vrsti lice simpleksa koji odgovara j-toj koloni.

$D=$

	1	2	3	4	5	12	13	23	34	35	45	123
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$R=$

	1	2	3	4	5	12	13	23	34	35	45	123
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Iz redukovane matrice R možemo pročitati vrednosti za $\mu_p^{i,j}$, kao i vrednosti perzistentnih Betijevih brojeva:
$\mu_0^{2,6} = 1$, $\mu_0^{3,7} = 1$, $\mu_0^{4,9} = 1$, $\mu_0^{5,10} = 1$ $\mu_1^{8,12} = 1$
Za $\beta_p^{k,l}$, potrebno je samo da izbrojima uokvirene jednice u pravougaoniku sa temenima (k, l) i $(1, n)$ ne računajući moguće jednince u koloni j.

Pri sabiranju treba biti oprezan i ne zaboraviti da nas za $\beta_p^{k,l}$ interusuju samo koeficijenti μ sa indeksom p. U ovom primeru je:
$\beta_0^{1,6} = 0$, $\beta_0^{4,5} = 3$, $\beta_0^{5,11} = 0, \ldots$
$\beta_1^{3,12} = 0$, $\beta_1^{6,7} = 0$, $\beta_1^{8,11} = 1, \ldots$

Algoritam se završava posle najviše n^2 koraka (operacija nad kolonama).Vreme potrebno za izvršavanje programa je najviše $O(n^3)$

4.4 Dinamički algoritam za izračunavanje Betijevih brojeva

4.4.1 Algoritam

Za razliku od prethodne metode, za koju je potrebno izgraditi ceo filtrirani kompleks i sve dobijene podatke pohraniti u jednu matricu, pa tek onda pristupiti računanju, ova metoda daje mnogo efikasniji pristup problemu, u terminima potrebnog memorijskog prostora.
Osnovna ideja je da se sa dodavanjem simpleksa u filtraciju ažuriraju Beti brojevi kompleksa. Na ovaj način u svakom trenutku imamo informacije o svim Beti brojevima, što nam neposredno daje i vrednosti perzistentnih homoloških grupa.
Metoda važi samo za simplicijalne komplekse koji su potprostori S^d, za neko $d \in \mathbb{R}$. Neka je $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ jedan takav simplicijalni kompleks. Za svako $0 \leq i \leq k$ definišemo $K_i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_i\}$, kao jedan član filtracije kompleksa K konstruisane kao u $2.$ sa početka ovog poglavlja.
Maksimalna dimenzija svakog simpleksa iz K je d, pa računamo Beti brojeve u intervalu od 0 do d.
Pseudo kod:

```
for l=0 to d dodeli β_l := 0 endfor;
for i=1 to m
   k=dim σ_i;
   if σ_i pripada k-ciklu kompleksa K_i
      then β_k := β_k + 1
      else β_{k-1} := β_{k-1} - 1
   endif
endfor.
```

Da bi pokazali tačnost ovog algoritma iskoristićemo klasični rezultat algebarske topologije: Mayer-Vietoris -ov niz.

Iz posmatrane filtracije kompleksa K sledi: $K_i = K_{i-1} \cup \sigma_i$.Neka je $L = K_{i-1} \cap \sigma_i$, tada je Mayer-Vietoris -ov niz za K_i:

$$\dots \to H_k(L) \xrightarrow{f_k} H_k(K_{i-1}) \oplus H_k(\sigma_i) \to H_k(K_i) \to H_{k-1}(L) \xrightarrow{f_{k-1}} H_{k-1}(K_{i-1}) \oplus H_{k-1}(\sigma_i) \to \dots$$

Preslikavanja f_i su homomorfizmi,a niz je tačan.
Za proizvoljan niz

$$A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \to A_3 \to A_4 \xrightarrow{\lambda_4} \to A_5$$

koji je deo dugog tačnog niza imamo da je sledeći niz kratak tačan:

$$0 \to A_2/\mathrm{Im}\lambda_1 \to A_3 \to \mathrm{Ker}\lambda_4 \to 0 \qquad (1)$$

sledi: $A_3 = A_2/\mathrm{Im}\lambda_1 \oplus \mathrm{Ker}\lambda_4$ (2).
Primenjeno na naš slučaj, niz (1) postaje:

$$0 \to H_k(K_{i-1}) \oplus H_k(\sigma_i)/\mathrm{Im}f_k \to H_k(K_i) \to \mathrm{Ker}f_{k-1} \to 0$$

Koristeći se analogom jednakosti (2) imamo:

$$\begin{aligned} H_k(K_i) &= H_k(K_{i-1}) \oplus H_k(\sigma_i)/\mathrm{Im}f_k \oplus \mathrm{Ker}f_{k-1} \\ &= H_k(K_{i-1}) \oplus H_k(\sigma_i)/(H_k(L)/\mathrm{Ker}f_k) \oplus \mathrm{Ker}f_{k-1} \end{aligned}$$

pa je:

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}(H_k(K_i)) &= \mathrm{rang}(H_k(K_{i-1}) \oplus H_k(\sigma_i)/(H_k/\mathrm{Ker}f_k)) + \mathrm{rang}(\mathrm{Ker}f_{k-1}) \\ &= \mathrm{rang}(H_k(K_{i-1}) + \mathrm{rang}(H_k(\sigma_i)) - \mathrm{rang}(H_k(L) + \mathrm{rang}(\mathrm{Ker}f_k) + \mathrm{rang}(\mathrm{Ker}f_{k-1}) \end{aligned}$$

Koristeći oznaku N_k =Kerf_k i činjenicu da je rang$(H_k(K)) = \beta_k(K)$, poslednja jednačinu možemo zapisati u obliku:

$$\beta_k(K_i) = \beta_k(K_{i-1}) + \beta_k(\sigma_i) - \beta_k(L) + \mathrm{rang}(N_k) + \mathrm{rang}(N_{k-1})$$

Na osnovu ove jednačine i razmatranjem svih vrednosti mogućih vrednosti za funkcije β_k i rang, na posmatranim grupama, (za detalje videti [13]), potpunom matematičkom indukcijom dokazujemo tvrđenje.■

Jedno vrlo bitno, a još nerazjašnjeno pitanje je: *kako utvrditi da li proizvoljan simpleks pripada nekom ciklu?* Temena, trivijalno, pripadaju 0-ciklovima, ali šta se dešava sa više dimenzionim simpleksima?
Edelsbrunner u svom radu [13] daje odgovor na ovo pitanje za 1 -simplekse i $d-1$ -simplekse.

Očigledno, ova metoda se može primeniti samo na simplicijane komplekse dimenzije dim≤ 3. Jer, za računanje n -te homološke grupe neophodno je da znamo n -ciklove i $n+1$ -ciklove. Tako da, već u dimenziji 4 ne možemo dobiti ni informaciju o prvom Beti broju ovom metodom.

Vreme i memorija

Sam algoritam, ako već imamo informaciju da li je neki simpleks deo cikla ili ne, radi u vremenu $O(n)$. Proces markiranja simpleksa u odnosu na osobinu da li su delovi cikla ili ne zahteva potpuno drugačiji pristup i ovde nije razmatran(videti [13]).
Kompleksnost celog algoritma procenjuje se na $O(n\alpha(n))$, gde je α inverz Akermanove funkcije[8],a n broj simpleksa u triangulaciji sfere $\mathbf{S}^3$ koja je okruženje za posmatrani simpleks.
Stoga, sam algoritam ima optimalno vreme rada, (imajući u vidu da je vreme rada standardnog algoritma za računanje Smithove Normalne forme $O(n^3)$).

Naravno, pitanje implementacije donosi još mnogo pitanja, posebno: "Koliko memorijskog prostora zahteva ovaj algoritam i koje tipove podataka koristiti?"
Neki delovi ovog algoritma implementirani su kao deo programskog paketa za računanje perzistentne homologije: PLEX.

4.4.2 Sparivanje klasa

Najefikasniji,po svim kategorijama, pristup za računanje perzistentne homologije je svakako metoda "sparivanja po klasama" koja u sebi sadrži delove dva gore opisana algoritma. Metod je u potpunosti implementiran u programski paket PLEX, radi u vremenu $O(n^3)$, gde je n broj simpleksa, ali za uzvrat imamo informacije o svim perzistentnim homološkim grupama,a memorijski problemi su delom rešeni korišćenjem struktura kao što je "hash" tabela[9] za čuvanje podataka (vidi [14]).

Napomenimo da su eksperimenti prikazani u ovom radu, da bi dokazali efikasnost algoritma i programa, rađeni na kompleksima dimenzije 2, pa je ovakav rezultat očigledan zbog dinamičkog algoritma za Beti brojeve.

4.5 Rezime

Svi navedeni algoritmi sa manjim odstupanjima imaju polinomijalnu vremensku kompleksnost $O(n^3)$, u generalnom slučaju.
Međutim ako dotaknemo pitanje memorijske kompleksnosti, uočavamo drastične razlike, što direktno dovodi do ograničenosti primene nekih od ovih algoritama.
Praktične razlike se javljaju i pri implementaciji algoritama kao deo nekog programskog paketa. Naime, pristupi memorisanju istih tipova podataka mogu se bitno razlikovati u zavisnosti od software-a.

[8] Inverzna Akermanova funkcija je sporo-rastuća. Čak i za velike vrednosti argumenta, vrednost funkcije je mala: npr. $\alpha(9876!) = 5$ (detaljniji opis same f-je i njene primene mogu se pronaći na http://yucs.org/ gnivasch/alpha/index.html)

[9] lista pokazivača

Do sada je razvijeno više software-a za izračunavanje homologije, pomenimo samo neke od njih:

- paket programa za APL, napisan od strane J.O. Shallit-a [19], za računanje simplicijalne homologije sa koeficijentima u $\mathbb{Z}$, zasnovan je na metodi SNF. Ne podržava "velike" simplicijalne komplekse.
- CHomP- softverski paket razvijen od strane "Computational Homology Project" na univerzitetu Georgia Tech. CHomP radi u Windows okruženju, izračunava homologiju simplicijalnog i kubnog kompleksa sa koeficijentima u $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$. Detaljan opis svih algotritama može se naći u [20].
- PLEX programski paket napisan za MATLAB, razvijen od strane Vin De Silve i Gunnara Carlson-a na Stanford Univerzitetu. Računa homologiju simplicijalnog kompleksa sa koeficijentima u $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_2$. Sadrži i programski paket Afre Zomorodiana za izračunavanje perzistentnih homoloških grupa.
- ”Simplicial Homology” paket napisan za GAP, razvijen pre svega za računanje homologije velikih simplicijalnih kompleksa u prstenu $\mathbb{Z}$. Zasnovan je na metodi SNF.
- Fermat - software dizajniran za rad sa proizvoljno velikim celim brojevima i razlomcima, matricama nad polinomijalnim prstenima. Izvršava simboličke proračune i druge numeričke kalkulacije. Implementirani algortam za SNF efikasno prevazilazi probleme memorije i vremena. Posredno, može se koristiti za izračunavanje homologije.

Za kraj, uporedićemo dva najviše korišćena software-a u svrhe računanja homologije:

- Programski paket za GAP "Simplicial Homology" baziran je na SNF algoritmu
  - daje kompletne informacije o homološkim grupama: Beti-brojeve, torzione koeficijente, generatore.
  - maksimalna dimenzija kompleksa čije je homološke grupe moguće izračunati ograničena je raspoloživim memorijskim prostorom računara[10]
- Programski paket za MATLAB "Plex"
  - računa homološke grupe i generatore u polju $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_2$
  - maksimalna dimenzija kompleksa čije je homološke grupe moguće izračunati ne prelazi 16 i direktno je ograničena performansama funkcije "rank" implementirane u MATLAB

[10] u eksperimentima se pokazalo da bez problema računa homološke grupe kompleksa dimenzije 50

– ima kompaktnu metodu za računanje perzistentnih homoloških grupa za zadatu filtraciju

Posmatrajući sve pomenute metode za izračunavanje homoloških invarijanti: SNF, Kombinatorni Laplasijan, Dinamički Algoritam (koji koristi Mayer-Viteorisov niz) vidimo da su razlike u kompleksnosti algoritama male, dok je količina dobijenih informacija i spektar problema na koje se algoritmi mogu primeniti velika. Ispostavlja se da je eliminacioni metod SNF, u većini slučajeva, superioran nad ostalim, više sofisticiranim metodama.
Vezano za optimizaciju algoritama "izračunljivih funkcija"[11] Leonid A. Levin dokazuje teoremu u [21] o donjoj granici kompleksnosti tih funkcija, koja tvrdi da svaka izračunljiva funkcija ima donju granicu kompleksnosti.
Evidentno, naša funkcija- n-ta homološka grupa konačno dimenzionog simplicijalnog kompleksa je izračunljiva.
Pitanje je da li je njena donja granica, u opštem slučaju, baš ona koju nam daje SNF - $O(n^3)$?
U slobodnoj interpretaciji, ovo se može shvatiti i kao pitanje o matematičkim metodama koje se ne mogu unaprediti (*"Methods from THE BOOK"*). Da li postoji efikasniji način za računanje hipotenuze pravouglog trougla od Pitagorine teoreme i da li postoji alat za računanje homologije koji će nadmašiti SNF?

[11] izračunljiva funkcija je ona funkcija koja se može tačno izračunati koristeći mehanički računarski sistem sa neograničenim memorijskim prostorim i u neograničenom vremenu. Ekvivalentno, sve funkcije za koje postoji algoritam su izračunljive.

POGLAVLJE PETO

MREŽE

5.1 Grafovi, mreže i kompleksne mreže

Definicija 5.1. *Neka je* $V = \{A_i, \ldots, A_n\}$ *proizvoljan skup čije članove nazivamo* ***temena****.*
Struktura određena sa V *i* E*, u oznaci* $G = (V, E)$*, naziva se:*

Neusmeren graf *ukoliko je* E *podskup svih dvočlanih podskupova skupa* V*. Elemente skupa* E *nazivamo* ***ivice****.*

Usmeren graf *ukoliko je* E *podskup skupa svih uređenih parova skupa* V*. Članove skupa* E *nazivamo* ***lukovi****.*

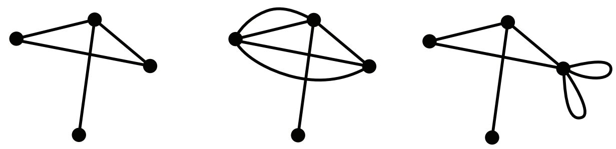
Multigraf *je graf u kome je dozvoljeno postojanje više lukova ili ivica, između dva temena.*

Pseudograf *je graf u kome je dozvoljeno postojanje ivica (lukova) oblika* $\{(A_i, A_i\}$ *(*(A_i, A_i)*).*

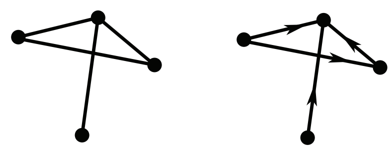
Prost graf *je graf koji nije ni multigraf ni pseudograf, t.j. dozvoljeno je postojanje samo jedne ivice (luka) između proizvoljna dva temena i nema ivica (lukova) oblika* $\{(A_i, A_i\}$ *(*(A_i, A_i)*).*

Ono što nas u ovom radu interesuje su neusmereni prosti grafovi, stoga ih dalje u tekstu nazivamo kratko grafovi ili mreže. Radi konciznosti, uvodimo i sledeću konvenciju u označavanju:
Pod proizvoljnim grafom $G = (V, E)$, podrazumevamo graf čija su temena $V = \{A_1, \ldots, A_n\}$, a skup ivica, E podskup skupa svih dvočlanih podskupova V.

Slede definicije nekoliko osnovnih veličina i pojmova na grafovima koje će nam biti potrebne u nastavku.



Slika 5.1: klasifikacija grafova po broju linkova između proizvoljne dve tačke



Slika 5.2: klasifikacija mreža po usmerenosti

Definicija 5.2. *Za dva temena grafa G, A_i i A_j kažemo da su **susedna** ako je $\{A_i, A_j\} \in E$*

Definicija 5.3. ***Stepen** temena $A_i \in V$ definišemo kao broj ivica grafa G incidentnih sa A_i.*

$$deg(A_i) = |\{e \in E \mid A_i \in e\}|$$

Definicija 5.4. ***Put** u grafu G koji povezuje A_i i A_j je niz ivica $(e)_{i=1}^{m}$ iz E, takav da:*

- $e_1 = \{A_i, A_{k_1}\}$
- $e_i = \{A_{k_{i-1}}, A_{k_i}\}$, *za* $1 < i < m$
- $e_m = \{A_{k_{m-1}}, A_j\}$.

*Kažemo da je m **dužina** puta određenog nizom $(e)_{i=1}^{m}$.*
*Ukoliko su svi A_i ražličiti put nazivamo **prost put**.*

Definicija 5.5. ***Udaljenost**, l, tačaka A_i i A_j je:*

$$l(A_i, A_j) = min\{d \in \mathbb{N} : \text{ postoji put koji povezuje } A_i \text{ i } A_j \text{ dužine } d\}$$

***Srednja udaljenost** ili **srednji put** grafa G je aritmetička sredina udaljenosti svih parova temena grafa.*

Pod terminom udaljenost, podrazumevamo dužinu najkraćeg puta između posmatranih tačaka.

Definicija 5.6. ***Koeficijent klasterovanja*** *temena A_i grafa G je:*

$$C_i = \frac{E_i}{\binom{k_i}{2}}$$

gde je E_i broj ivica među susednim temenima temena A_i, a $k_i = deg(A_i)$. ***Koeficijent klasterovanja grafa****, C_s je aritmetička sredina koeficijenata klasterovanja svih temena grafa.*

Zbog jednostavnosti zapisa dalje u radu koristimo oznaku k_i za stepen temena A_i. Koeficijent klasterovanja je odnos broja postojećih veza među susedima posmatrane tačke i broja mogućih veza. Ova veličina je posebno značajna pri ispitivanju strukture kompleksnih mreža, ali o tome će biti reči kasnije.

5.1.1 Matrična reprezentacija grafa

Svakom prostom neusmerenom grafu G (zadržavamo oznake iz prethodnog odeljka) možemo asocirati kvadratnu matricu dimenzija $n \times n$, kojoj je element na mestu (i, j), 1 ukoliko postoji ivica između temena A_i i A_j, a 0 u suprotnom[1]. Matrica je simetrična.

Važno je primetiti da je da su u matrici grafa enkodirane osnovne karakteristike grafa.

Za proizvoljan graf $G = (V, E)$ i njemu asociranu matricu $M_{n\times n}$ važi:

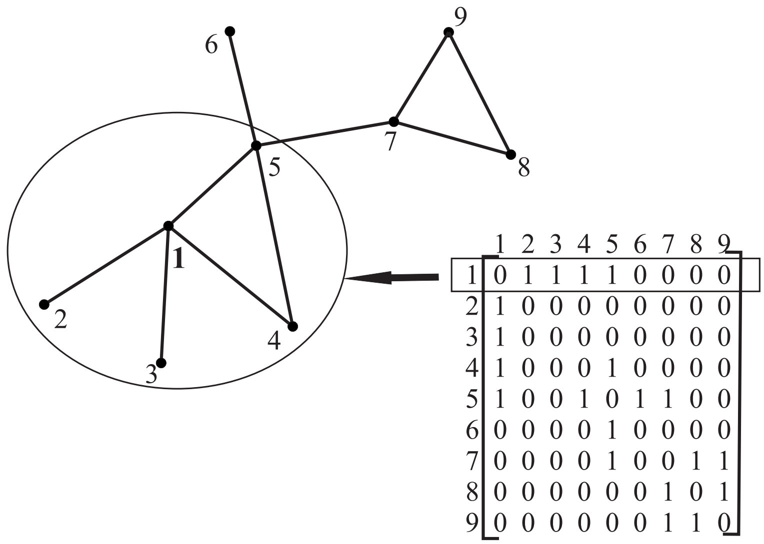
- $deg(A_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \sum_j M_{ij}$.

- $l(A_i, A_j) = \min\{d \mid M_{ij}^d \neq 0\}$

- $C_i = \frac{\sum_{j,m} M_{ij} M_{jm} M_{mi}}{deg(A_i)(deg(A_i)-1)}$

Matrica grafa je nezaobilazan alat kada proučavamo grafove sa velikim brojem temena, koji nemaju regularnu strukturu, jer je na ovaj način osnovne karakteristike grafa moguće dobiti kompjuterskim proračunima.

[1]matricu je moguće asocirati i prostom usmerenom grafu, s tim što će njeni elementi biti $-1, 1$ ili 0



Slika 5.3: Simplicijalni kompleks

5.1.2 Motivacija

Mnoge procese u realnom svetu (biologiji, genetici, sociologiji, računarstvu, ...) možemo opisati strukturama kao što su grafovi.

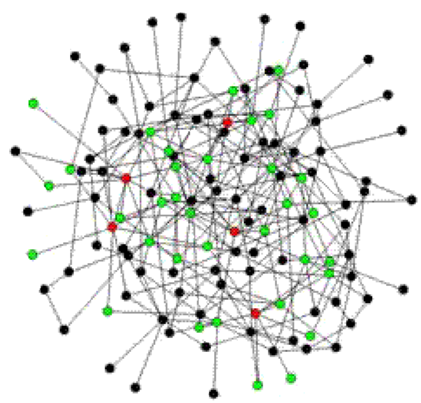
- autonomni nervni sistem viših organizama- mreža neurona povezanih sinapsama
- regulacija gena - mreža gena povezana regulativnim principima
- proteinske mreže - mreža proteina povezanih hemijskim reakcijama
- mreža poznanika - osobe povezane poznanstvom
- World Wide Web - mreža web stranica povezanih hiperlinkovima

Da bi u potpunosti razumeli ove procese, neophodno je da spoznamo njihovu strukturu. Međutim teorija grafova je dug period posle nastanka bila fokusirana na grafove pravilnih, regularnih struktura (kompletni grafovi, bipartitni grafovi, stabla, latice,...). U praksi se obično javljaju sistemi sa velikim brojem elemenata, čija je struktura neregularna, kompleksna i dinamički evoluira u toku vremena, gde su elementi međusobno povezani, a priroda veza nije uvek poznata - kompleksne mreže. Očigledno, na njih se nisu mogli adekvatno primeniti postojeći matematički modeli.
Zbog toga se moralo pristupiti traženju načina da se takvi sistemi formalno matematički ispitaju, kako bi se rasvetlile njihove esencijalne osobine.

Sredinom prošlog veka, dva mađarska matematičara Paul Erdös i Alfred Rényi uvode pojam slučajnog grafa i time otvaraju vrata širokoj primeni u grafova u različitim oblastima nauke.

5.2 Osnovni tipovi kompleksnih mreža

5.2.1 Slučajne (eng. random) mreže



Slika 5.4: slučajna mreža

Erdös i Rényi baziraju teorijsku analizu osobina slučajnih grafova na primeni metoda iz oblasti teorije verovatnoće.
Sledi kratak opis najznačajnijih rezultata teorije slučajnih grafova.

Definicija 5.7. *Graf $G = (V, E)$ koji se sastoji od N temena ($|V| = N$) povezanih sa n ivica ($|E| = n$), koje su slučajno izabrane od $\binom{N}{2}$ mogućih ivica, naziva se **slučajni graf**.*

Ukupno postoji $\binom{\frac{N(N-1)}{2}}{n}$ grafova sa N temena i n ivica, a to je prostor verovatnoće u kome je svaka realizacija jednako verovatna.

Aternativno, slučajne grafove opisujemo binomnim modelom:
Pretpostavimo da imamo graf sa N temena ($V = \{A_1, \dots, A_N\}$). Svaka dva temena povezujemo sa unapred zadatom verovatnoćom p. Broj ivica ovako konstruisanog grafa je slučajna promenjiva, n, čije je matematičko očekivanje $E(n) = p\binom{N}{2}$.
Ako je k_i broj ivica čija je jedna od krajnjih tačaka A_i ($k_i = deg(A_i)$), tada: $P(k_i =$

$k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$. T.j. verovatnoća događaja $k_i = k$, ima binomnu raspodelu, odakle potiče i samo ime ovog modela. Primetimo da je raspodela k_i Poussanova, ako $N \to \infty$. T.j. verovatnoća da slučajno izabrano teme ima stepen k je $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, gde je λ srednji stepen grafa[2]. Raspodela stepena temena jeste jedna od glavnih karakteristika u klasifikaciji mreža.

Teorija slučajnih grafova izučava osobine verovatnosnog prostora grafova sa N temena, kad $N \to \infty$.

Poznato je da skoro svaki graf iz posmatranog verovatnosnog prostora ima osobinu Q, ako se verovatnoća za Q približava jednici kad N teži beskonačnosti.
Erdös i Rényi dolaze do otkrića da: ili skoro svaki graf ima osobinu Q ili je skoro svi grafovi nemaju, kad $N \to \infty$. Znači, prelaz sa stanja: vrlo verovatna, u stanje: malo verovatna osobina je obično jako brz. Za većinu takvih svojstava definišemo kritičnu verovatnoću: $p_c(N)$.

Teorema 5.1. Neka je $G = (V, E)$, slučajni graf sa N temena i Q neko svojstvo tog grafa. Ako je $p(N)$ verovatnoća da G ima svostvo Q i $p_c(N)$ kritična verovatnoća, tada

$$\lim_{N\to\infty} P_{N,p}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{za } \frac{p(N)}{p_c(N)} \to 0 \\ 1 & \text{za } \frac{p(N)}{p_c(N)} \to \infty \end{cases}$$

Kao što vidimo, u teoriji slučajnih grafova, verovatnoća nekog događaja zavisi od broja temena grafa, N. Posmatrajmo dva slučajna grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, koji imaju istu verovatnoću postojanja linka između dva proizvoljna temena: $\frac{|E_1|}{\binom{|V_1|}{2}} = \frac{|E_2|}{\binom{|V_2|}{2}} = p$, i pretpostavimo da je $|V_1| \ll |V_2|$. Tada je i $|E_1| \ll |E_2|$, što može dovesti do pojave mnogih osobina u G_2, koje ne postoje u G_1 (npr. pojava ciklova). Ovo znači da za mnoga svostva grafa Q, ne postoji kritična verovatnoća p_c koja je nezavisna od veličine grafa. Stoga, funkciju p_c, obično definišemo kao $p_c(N \to \infty)$.

Model slučajnih grafova je decenijama bio vodeća ideja u proučavanju kompleksnih mreža. Ali, rastuće interesovanje za proučavanja u ovom polju, je navelo mnoge naučnike da još jednom razmotre da li slučajni grafovi predstavljaju dobar model za opisivanje realnih kompleksnih sistema. Da li su realne mreže koje predstavljaju kompleksne sisteme kao što je ćelija ili internet, fundamentalno slučajne? Intuicija nam govori da realni kompleksni sistemi moraju imati neki princip samoorganizacije, koji će se svakako odraziti i na matematički model koji ga opisuje.

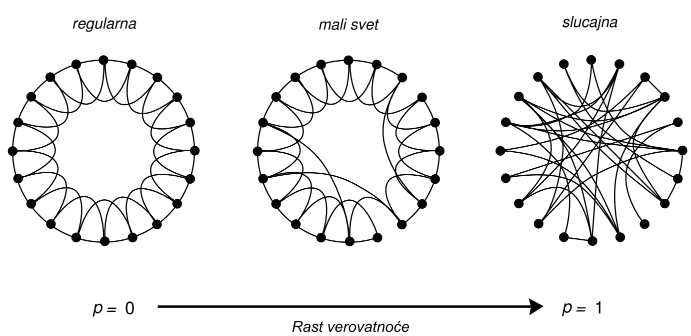
[2] aritmetčka sredina stepena svih temena koji pripadaju grafu

5.2.2 Small-World mreže

Činjenica je da bez obzira na veličinu, većina mreža ima osobinu da je najkraći put između bilo koja dva temena relativno mali. Udaljenost, ili put, između bilo koje dve tačke $A_i, A_j \in V$ (u skladu sa prethodnom notacijom) je minimalan broj ivica potreban da bi povezali A_i i A_j. Jedna od popularnih manifestacija efekta malog sveta je koncept: "šest stepeni separacije", otkriven od strane sociologa Stanley Milgrama, koji je zaključio da postoji niz od prosečno 6 poznanika, između bilo kog para ljudi u US. Efekat malog sveta karakteriše mnoge realne kompleksne mreže, međutim, iako na prvi pogled izgleda, on nije posledica nekog organizacionog principa. Erdos i Reny su pokazali da je prosečna udaljenost između bilo koja dva temena u slučajnom grafu log(N), gde je $N = |V|$.
Koeficijent klasterovanja, veličina koja daje odnos između linkova među susedima posmatranog temena i mogućih linkova, pravi razliku među mrežama koju nije mogla udaljenost.

Slučajne mreže imaju mali klastering koeficijent, dok realne mreže imaju neuobičajeno veliki klastering koeficijent.
Posmatrajmo graf $G = (V, E)$, u kome sva temena imaju tačno K suseda (k-dimenziona regularna rešetka). Grafički ga možemo pretstaviti kao prsten tačaka gde je svaka tačka povezana sa K "najbližih".

Koeficijent klasterovanja je $C_i = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}$, za svako $0 \leq i \leq N$. Za veliko K, C



Slika 5.5: Small-World model

konvergira ka $\frac{3}{4}$. Međutim, takve strukture nemaju mali srednji put: za posmatrani graf srednji put je približno $N^{1/K}$, što za veliko N, raste mnogo brže od log$N$. Prvi uspešan pokušaj da se napravi model grafa koji će imati dovoljno veliko C, a malo l dali su Watz i Strogatz (1998)[**?**]. Sledi algoritam za konstrukciju WS modela:

- Počinjemo sa N tačaka jdenako raspoređenih na kružnici, i svaku povezujemo sa njenih K najbližih suseda. Da bi izbegli gustu mrežu, uzimamo $N \gg K \gg$

$\ln(N) > 1$.

- Slučajno biramo $pNK/2$ ivica, gde je $0 \leq p \leq 1$, i izabrane (A_i, A_j) zamenimo sa (A_i, A_k), gde je A_k teme koje nije sused temenu A_i u početnom grafu. Na ovaj način smo dobili $pNK/2$ ivica koje su "premrežene" i smanjuju srednji put među temenima. Variranjem p možemo pažljivo pratiti prelaz između potpune uređenosti ($p = 0$) i potpune neuređenosti $p = 1$ mreže.

Small-world mreže karakteriše [**?**]:

- mala srednja udaljenost: $l(N,p) \sim \frac{N}{K} f(pKN^d)$, gde je d dimenzija regularne rešetke, a funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

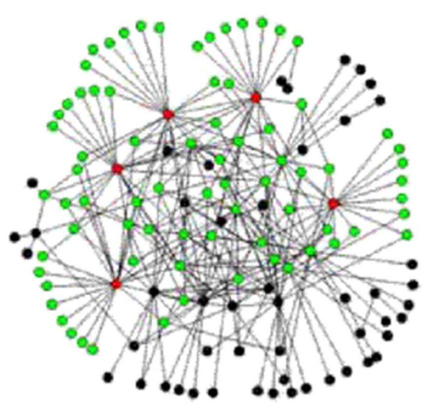
$$f(u) = \begin{cases} \text{konstanta} & \text{za } u \ll 1 \\ \frac{\ln(u)}{u} & \text{za } u \gg 1 \end{cases}$$

- veliki klastering koeficijent:

$$C(p) \sim \frac{3(K/2-1)}{2(K-1)}(1-p)^3$$

a, iste osobine pokazuju i realne mreže. Međutim, stepen temena u realnim mrežama ima eksponencijalnu raspodelu,što se pokazuje da ne važi za SW model.

5.2.3 Scale- Free model



Slika 5.6: Scale Free model mreže

Kao što smo istakli ranije, najjednostavniji način da klasifikujemo mreže je posmatrajući distribuciju stepena. Kod slučajnih mreža ona je data Poisson-ovom raspodelom, ali čim primenimo malo komplikovanija pravila za konstrukciju, javlja se novi koncept mreža, naizgled jednostavan. U mnogim slučajevima raspodelu stepena realne mreže možemo opisati stepenom funkcijom, što dovodi do analogije sa kritičnim fenomenima u kompleksnim sistemima. Zbog toga se, ovaj tip mreža i naziva **kompleksna**. Pored toga, kompleksne mreže su dinamički sistemi, promenljivi u vremenu, a sva njihova moguća stanja nisu jednako verovatna.

Slučajne i small-world mreža su matematički modeli statičkih mreža, t.j. mreža koje ne evoluiraju tokom vremena, pri tom se pretpostavlja da je verovatnoća postojanja ivice između bilo koje dve tačke konstantna. Model mreže koji u odnosu na prethodna dva najviše odgovara realnim mrežama - *scale-free (SF)* enkodira rast i dinamiku realnih mreža. Algoritam za konstrukciju SF modela [24]:

- rast mreže: počinjemo sa malim brojem (m_0) tačaka i u svakom vremenskom koraku dodajemo novu tačku sa m $(\leq m_0)$ linkova koje je povezuju sa m različitih tačaka koje su već prisutne u sistemu.

- preferencijalno dodavanje (“rich get richer”): verovatnoća da će nova tačka u sistemu biti povezana sa temenom A_i, čiji je stepen k_i je:

$$\mathrm{P}(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

  t.j. direktno je proporcionalna broju već postojećih ivica koje sadrže A_i

Posle t vremenskih koraka ovaj algoritam rezultuje mrežom sa $N = t + m_0$ temena i mt ivica. Numeričke simulacije ukazuju na to da ova mreža evoluira u stanje gde stepen temena ima eksponencijalnu raspodelu sa eksponentom $\lambda_{SF} = 3$. Eksponent skaliranja je nezavisan od m, koji je jedini parametar modela.
Teorijski pristupi ispitivanja scale-free modela koji vode do eksonencijalne raspodele stepena koriste teoriju kontinuuma i jednačina rasta [25].
S obzirom da stepen temena ima eksponencijalnu raspodelu, u SF modelu postoji mali broj tačaka sa mnogo suseda (habovi), i veliki broj tačaka sa malo suseda.

Scale-free mreža ima mali srednji put (osobinu “malog sveta”) i veliki koeficijent klasterovanja, koji su karakteristični za realne mreže. Međutim ove vrednosti nisu dobijene analitičkim putem već numeričkim simulacijama.
Još jedna mana modela je konstantnost eksponenta λ i zavisnost koeficijenta klasterovanja od veličine mreže. Realne mreže imaju različite vrednosti eksponenata λ, a koeficijent klasterovanja ne zavisi od veličine mreže.
Dosadašnji pokušaji da se SF model unapredi i približi realnim mrežama, rezultirali su uvođenjem mnoštva novih konstrukcionih pravila (pored postojeća dve: rast i preferencijalno povezivanje). Neka od njih su: fitnes, formiranje triada, hijerarhijska organizacija mreže.

5.3 Simplicijalni kompleksi grafova

Kao što smo videli u prethodnom odeljku informacije dobijene o kompleksnim sistemima, koristeći grafove kao modele, su brojne. Postavlja se pitanje da li su i dovoljne za preciznu klasifikaciju tih sistema?
Scale- Free model ima neslaganja sa realnim mrežama koje su delimično prevaziđene uvođenjem mnoštva novih restriktivnih uslova u njegovoj konstrukciji, što nas navodi na sumnju da mozda postoji kompaktniji način opisivanja kompleksnih mreža.
Značajan broj matematičkih problema je elegantno rešen tako što smo se odlučili da ih posmatramo u nekom više dimenzionom prostoru, od onog u kome su inicijalno zadati. Uzmimo za primer teoriju V. Vassiliev-a, u kojoj je jedna od esencijalnih ideja bila iskoristiti rezolventu topološkog prostora.

Vodeći se istim razmišljanjem, kompleksne sisteme ćemo sagledati sa aspekta simplicijalnih kompleksa. Preciznije, asociramo simplicijalni kompleks grafu koji opisuje neki kompleksni sistem, a zatim posmatramo topološke invarijante kompleksa. Na ovaj način smo problem "podigli" u veću dimenziju i nadamo se da će taj pristup rešiti neke od problema uobičajenih za planarne interpretacije.

5.3.1 Graf kompleksi

Uobičajen način asociranja simplicijalnog kompleksa grafu ne odnosi se na jedan izdvojeni slučaj, već na celu familiju grafova koja poseduje određenu osobinu.
Posmatramo familiju grafova $\mathcal{G}$ sa $V = [n]$ temena koji imaju neku osobinu Q , i tom skupu asociramo simplicijalni kompleks $\triangle$, tako što svaki graf iz $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ identifikujemo sa skupom njegovih ivica E, i uzmemo da E definiše jedan simpleks kompleksa $\triangle$ [22].
Neki od ovako konstruisanih kompleksa su:

- Matching kompleksi M_n- kompleks opisuje sve grafove sa n temena koji ne sadrže ivice koje imaju zajedničko teme.
- Forest kompleksi F_n- kompleks opisuje sve grafove sa n temena koji ne sadrže ciklove
- Kompleksi bipartitnih grafova B_n-kompleks opisuje sve grafove sa n temena koji ne sadrže ciklove neparne dužine.

Ovaj pristup bi teorijski mogao da se iskoristi i u predstavljanju kompleksnih mreža, ukoliko uočimo osobinu koja će jednoznačno odrediti takve mreže. Rezultat koji bi dobili opisivao bi celu klasu tih mreža, što bi svakako bio vredan rezultat. Ali, trenutno postoji nekoliko nepremostivih prepreka da se ovaj pristup realizuje:

- Koju osobinu mreže uzeti za generatorsku?
- Kako izračunati homologiju kompleksa napravljenog od simpleksa koji opisuju grafove sa više desetina hiljada temena i više stotina hiljada ivica?

Stoga se ograničavamo na posmatranje simplicijalnog kompleksa konstruisanog od samo jedne, konkretne mreže.

5.3.2 Klika kompleks

Jedna od prvih ideja za konstrukciju simplicijalnog kompleksa asociranom grafu je bila uočiti sve potpune podgrafove u posmatranom grafu i simplekse definisati tako što potpunom grafu reda n asociramo $n-1$ dimenzioni simpleks.

5.3.3 Kompleks susedstva grafa

László Lovász je 1978. dokazao Kneser-ovu pretpostavku [23]:
Ako su n -podskupovi skupa od $(2n+k)$- elemenata podeljeni u $k+1$ klasu, tada bar jedna klasa sadrži dva n- skupa koji imaju prazan presek. On je tvrđenje je preveo na jezik grafova - definisanjem Kneser-ovih grafova[3], a zatim konstruisao simplicijalni kompleks - *kompleks susedstva* $\mathcal{N}(G)$ asociran grafu G.

Definicija 5.8. *Neka je $G=(V,E)$ neusmereni graf. Kompleks čiji su simpleksi definisani temenima grafa G koja imaju zajedničkog suseda, naziva se* ***kompleks susedsta grafa*** G.

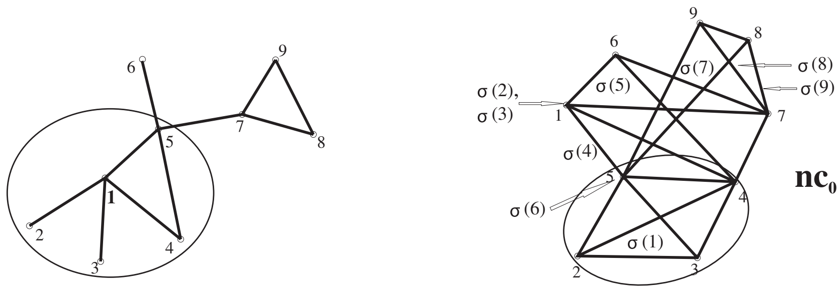
S obzirom da se kompleksi susedstva mogu asocirati bilo kojoj mreži, a kao struktura enkodiraju vrlo bitne karakteristike grafa, njihova upotreba se brzo proširila. Specijalno, u našem slučaju, svakoj kompleksnoj mreži asociraćemo kompleks susedstva.

Kompleks susedstva ima i matričnu reprezentaciju, naime ako je graf zadat matricom M, tada simplekse kompleksa susedstva možemo videti kao kolone matrice M. Vezano za implementaciju u proračunima, primetimo da matrica:

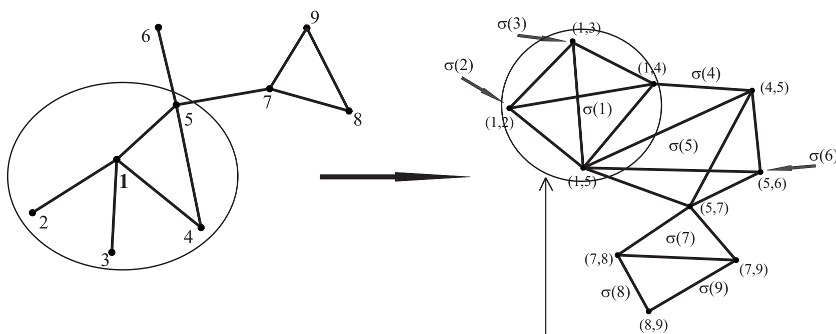
$$\Lambda = M\dot{M}^T$$

ima sledeća svojstva:

[3] $KG_{n,k}$ je graf kome su temena k- podskupovi skupa od n elemenata, a ivice su definisane parovima disjunktnih skupova. U novim terminima, problem glasi: Koliko je najmanje boja potrebno da bi se obojile sva temena tako da nikoja dva temena povezana ivicom nisu isto obojena (problem bojenja)



Slika 5.7: Kompleks susedstva mreže



	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(4,5)	(5,6)	(5,7)	(7,8)	(7,9)	(8,9)
σ(1)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
σ(2)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
σ(3)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
σ(4)	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
σ(5)	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
σ(6)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
σ(7)	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
σ(8)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
σ(9)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Slika 5.8: Matrična reprezentacija kompleksa susedstva mreže

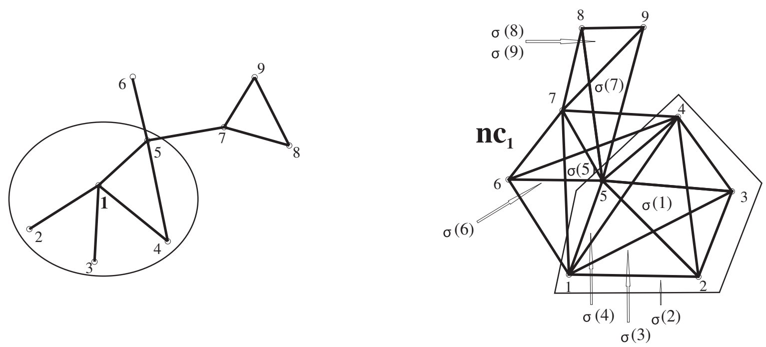
- Λ_{ii} je dimenzija simpleksa koji odgovara i-toj koloni matrice M
- Λ_{ij} je dimenzija lica koje dele simpleksi koji odgovaraju kolonama M_i i M_j.

5.3.4 Potpuni kompleks susedstva

Potpuni kompleks susedstva dobijamo modifikacijom kompleksa susedstva grafa, tako što simpleks definišemo skupom temena koja imaju zajedničkog suseda i temenom čiji su oni susedi.

Definicija 5.9. *Neka je $G = (V, E)$ neusmereni graf. Kompleks čiji su simpleksi definisani temenima grafa G i njegovim susedima, naziva se **kompleks susedsta grafa** G.*

Iako na prvi pogled izgleda da popuni kompleks susedstva u odnosu na kompleks



Slika 5.9: Potpuni kompleks susedstva

susedstva gubi na strukturi, pokazaće se da on zadržava neke osobine grafa, koje je nemoguće identifikovati u kompleksu susedstva.

Matrična reprezentacija potpunog kompleksa susedstva predstavljena je incidentnom matricom grafa kojoj smo dodali jediničnu matricu, a simplekse, kao u prethodnom slučaju, vidimo kao kolone novodobijene matrice.

Za matricu $\widehat{\Lambda} = \widehat{M} \cdot \widehat{M}^T - E$, gde je $\widehat{M} = M + E$ važi:

- $\widehat{\Lambda}_{ii}$ je dimenzija simpleksa koji odgovara i-toj koloni matrice $\widehat{M}$
- $\widehat{\Lambda}_{ij}$ je dimenzija lica koje dele simpleksi koji odgovaraju kolonama $\widehat{M}_i$ i $\widehat{M}_j$.

5.4 Osnovne topološke invarijante dobijene iz simplicijalnih kompleksa

U ispitivanju kompleksnih mreža reprezentovanih simplicijalnim kompleksima, ograničićemo se na posmatranje sledećih veličina:

- strukturnih vektora
- Betijevih brojeva
- Homoloških grupa

5.4.1 Strukturni vektori

Definicija 5.10. *Za simplicijalni kompleks K dimenzije n, kažemo da je q-**povezan** ako svaka dva maksimalna simpleksa*[4] *koja imaju neprazan presek dele lice dimenzije q.*

Ukoliko je kompleks q-povezan tada su sve njegove homološke grupe $H_i(K)$, $0 < i \leq q$ trivijalne.

Tvrđenje 5.1. Relacija "q - povezani" je relacija ekvivalencije i deli simplicijalni kompleks na klase q-povezanosti.

Dokaz ovog tvrđenja je elementaran i ovde ga ne navodimo.

Definicija 5.11. *Neka je K simplicijalni kompleks dimenzije N. Uređena $N+1$- torka $Q = (Q_N, Q_{N-1}, \ldots, Q_0)$, gde je Q_i broj i-povezanih klasa, naziva se **prvi strukturni vektor**.*

Prvi strukturni vektor na izvestan način meri strukturna ograničenja u kompleksu, i ima smisao q-dimenzionog procepa u mreži.

Definicija 5.12. *Drugi strukturni vektor, ili f-vektor simplicijalnog kompleksa K, čija je dimenzija N je uređena $N+1$-torka: $f = (f_N, f_{N-1}, \ldots, f_0)$, gde je f_i broj i-dimenzionih simpleksa, kompleksa K.*

Pored ovih veličina, za analizu kompleksnih mreža koristimo: Beti brojeve i Homološke grupe.
U analizi klika kompleksa, pored navedenih metoda, primenićemo i perzistentnu homologiju.
Posmatramo filtraciju klika kompleksa, K, po dimenzijama:

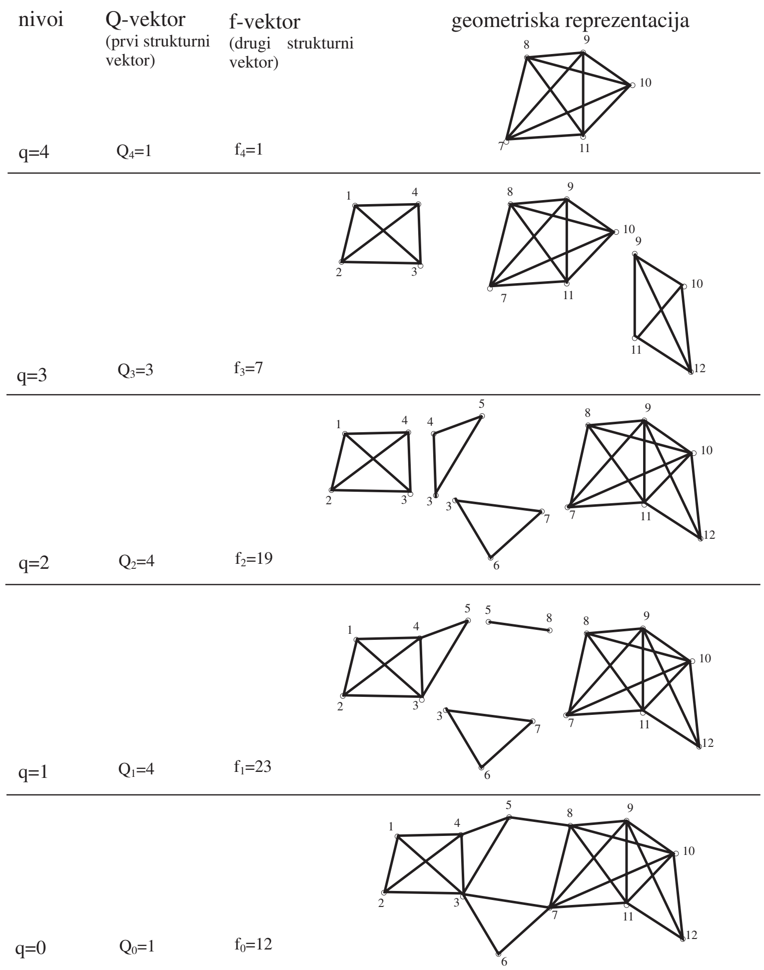
$$K_0 \to K_1 \to \ldots K_{n-1} \to K_n = K$$

, gde je K_i, i-dimenzioni skeleton kompleksa K.
Ovim procesom dobijamo grupe $H_p^{i,j}$, gde $0 \leq p \leq n$ i $i \leq j \leq p$

5.5 Statički rezultati za osnovne tipove mreža

Eksperimenti u ovom odeljku se sastoje iz ispitivanja više konkretnih kompleksnih mreža iz jedne od osnovnih do sada pomenutih klasa (slučajne i SF), upoređivanja rezultata i identifikovanjem osobina koje "vide" razlike među njima.

[4] simpleks σ je maksimalan simpleks kompleksa K ukoliko ne postoji $\tau \in K$, takav da je $\sigma \prec \tau$



Slika 5.10: Vrednosti strukturnih vektora

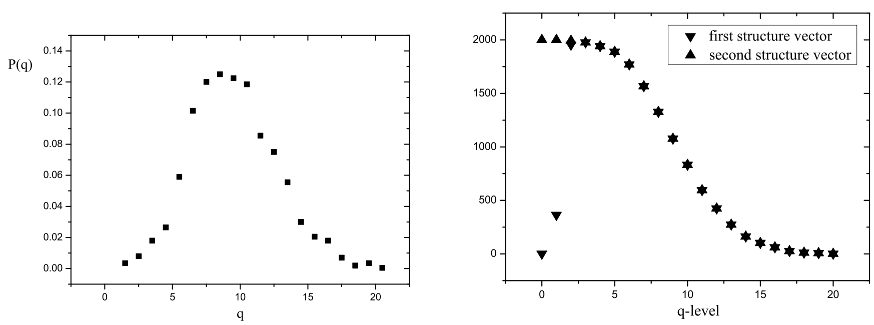
Svakoj mreži asociraćemo simplicijalni kompleks (klika kompleks i kompleks susedstva) i izračunati osnovne topološke karakteristike. Takođe ćemo kvalitativnost dobijenih rezultata uporediti sa rezultatima koje je moguće dobiti samo iz grafa.

Sve mreže posmatramo u sadašnjem trenutku, t.j. ne uzimamo u obzir njihovu dinamiku.

Homologija kompleksa susedstva izračunata je korišćenjem programskog paketa “Simplicial Homology” za software GAP, a homologija klika kompleksa uz pomoć programskog paketa za MATLAB “Plex”.

5.5.1 Slučajne mreže

Kao prvi primer, koristimo slučajnu mrežu sa 2000 temena i verovatnoćom za postojanje ivice između bilo koje dve tačke koja iznosi $p = 0.005$. Raspodela verovatnoće stepena temena data je grafikom 1 na sledećoj slici, i binomna je, baš kao što smo dobili teroijskim razmatranjem.



Slika 5.11: Distribucija po dimenzijama slučajnog simplicijalnog kompleksa (levo); Q vektor i f vektor u funkciji od dimenzije (desno)

Kao što je poznato, povezanost slučajne mreže karakteriše distribucija sa maksimumom koji odgovara broju temena sa prosečnim brojem linkova. Distribucija vrednosti prvog strukturnog vektora data je u grafiku desno i prati oblik Belove krive, dok za drugi strukturni vektor imamo potpuno istu situaciju kao i za raspodelu stepena.
Očekivano, Q- vektori imaju distribuciju sličnu Poisson-ovoj koja karakteriše slučajne mreže.

Homološke grupe i Beti brojevi

- kompleks susedstva

H_0	H_1	H_2	$\dots$	H_{21}
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{13503}$	0	0	0

β_0	β_1	β_2	$\dots$	β_{21}
1	13503	0	0	0

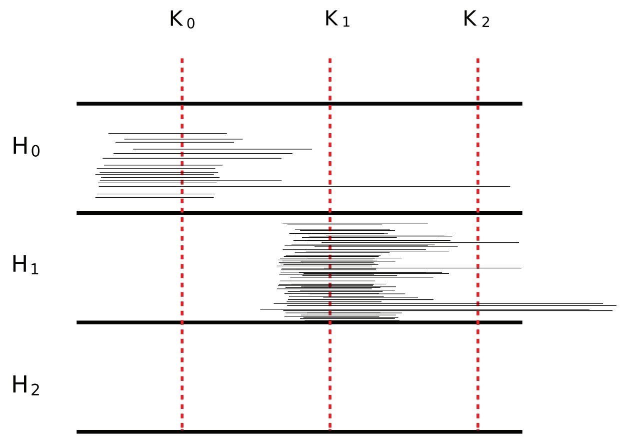
Tabela 5.1: Homološke grupe i Beti brojevi slučajne mreže sa 2000 temena i verovatnoćom $p = 0.005$

- klika kompleks

H_0	H_1	H_2
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{7847}$	0

β_0	β_1	β_2
1	7847	0

Tabela 5.2: Homološke grupe i Beti brojevi klika kompleksa slučajnih mreže sa 2000 temena i verovatnoćom $p = 0.005$



Slika 5.12: Barkod slučajne mreže

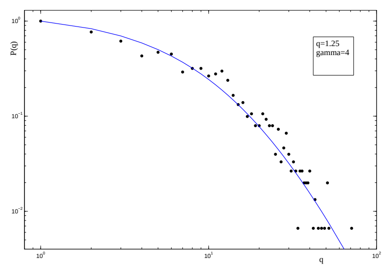
Zbog činjenice da se u slučajnim mrežama temena povezuju sa istom verovatnoćom, sledi da većina temena ima isti stepen, stoga je ovakvo ponašanje Beti brojeva očekivano.

- perzitentna homologija filtracije klika kompleksa po dimenzijama

$$\begin{array}{lll} H_0^0 = 2000 & & \\ H_0^1 = 1 & H_1^1 = 8017 & \\ H_0^2 = 1 & H_1^2 = 7847 & H_2^2 = 0 \end{array}$$

5.5.2 Scale-Free mreže

Za primer uzimamo mrežu kojom je pretsavljena razmena email-ova među univerzitetima u Španiji: Universidad Rovira i Virgili, Tarragona, sa 1133 temena. Ona, kao i većina realinih mreža pokazuje Scale-Free svojstva. Prvi rezultati dobijeni Q-analizom predstavljeni su u sledećim graficima: Primetimo da funkcija raspodele stepena temena



Slika 5.13: Raspodela stepena temena

ima q-eksponencijalan oblik.

Homološke grupe i Beti brojevi

- kompleks susedstva[5]

H_0	H_1	H_2	$\ldots$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{459}$	$\mathbb{Z}^{1650}$	$\ldots$

β_0	β_1	β_2	$\ldots$
1	459	1650	$\ldots$

Tabela 5.3: Homološke grupe i Beti brojevi kompleksa susedstva email mreže

- klika kompleks

H_0	H_1	H_2	H_3	$\ldots$	H_{11}
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{1186}$	$\mathbb{Z}^{53}$	0	$\ldots$	0

β_0	β_1	β_2	β_3	$\ldots$	β_{11}
1	1186	53	0	$\ldots$	0

Tabela 5.4: Homološke grupe i Beti brojevi klika kompleksa email mreže

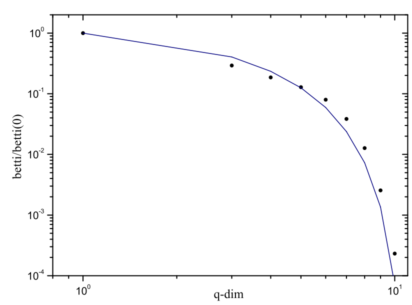
- perzitentna homologija filtracije klika kompleksa po dimenzijama

[5]kompleks susedstva email mreže je 70-to dimenzioni. Koristeći Intel Core 2 Duo, 2GB ram, rezultate za homološke grupe je bilo moguće dobiti za dimenzije $0, 1, 2$. Rezultati za više dimenzije su u pripremi.

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1133											
1	1	4319										
2	1	1186	2210									
3	1	1186	53	1262								
4	1	1186	53	0	801							
5	1	1186	53	0	0	553						
6	1	1186	53	0	0	0	345					
7	1	1186	53	0	0	0	0	166				
8	1	1186	53	0	0	0	0	0	55			
9	1	1186	53	0	0	0	0	0	0	11		
10	1	1186	53	0	0	0	0	0	0	0	1	
11	1	1186	53	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.5: perzitentne homološke grupe klika kompleksa email mreže. Element na mestu i-te vrste i j-te kolone označava rang j-te homološke grupe i-tog kompleksa filtracije t.j. rang$H^i_j = \beta^i_j$

Perzistentni Beti brojevi klika kompleksa email mreže $\beta_{i,i}$ $(0 \leq i \leq 11)$ takođe prate q- eksponencijalnu raspodelu i dati su u sledećem garfiku:



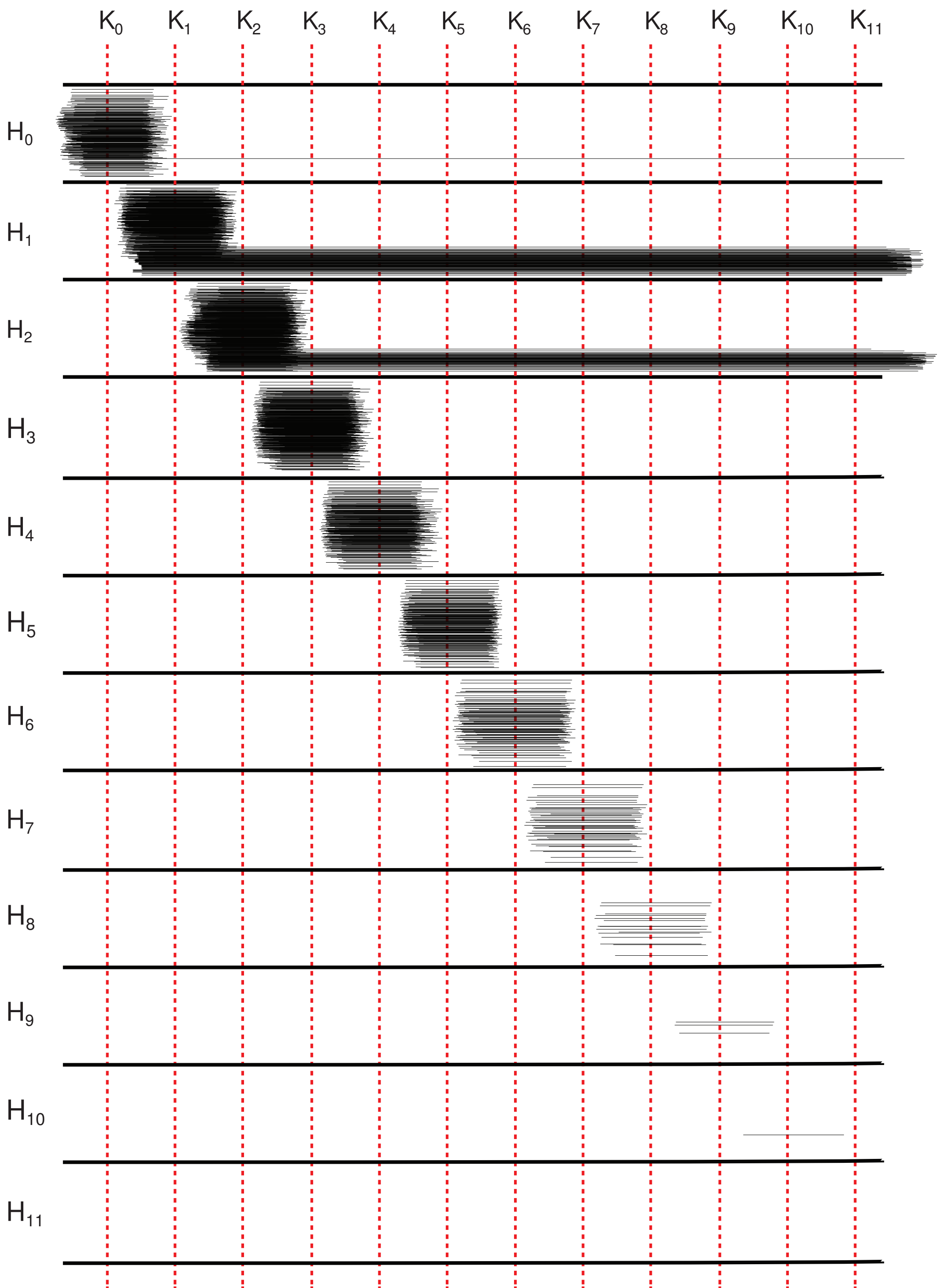
Slika 5.14: Raspodela Betijevih brojeva po dimenzijama

Barkod email perzistentne homologije dat je na Slici 1.15

5.6 Mogućnosti za dalji rad

Karakteristike kompleksnih mreža su inicijalno bile “merene” na grafovima i kao rezultat skoro uvek smo imali skalarne vrednosti, koje je nemoguće analizarati drugačije do numerički. Koristeći simplicijalne komplekse, elegantno prevazilazimo ovaj nedostatak graf-strukture. Pri tom, postoji veliki broj topoloških invarijanti koje je moguće praktično dobiti iz simplicijalnog kompleksa. Veličine kao što su Beti brojevi i homološke grupe govore mnogo o strukturi povezanosti unutar sistema. Q- vektori takođe. Pored toga nova dostignuća u oblasti računarske homologije, konkretno perzitentna homologija, tek treba da nađu svoje mesto u primenama ove vrste.

Do sada smo uspeli da pratimo evoluciju strukture statičnog kompleksnog sistema koristeći se perzitentnom homologijom. S obzirom da se broj tačaka u realnim mrežama menja u jako kratkim vremenskim intervalima, postavlja se pitanje da li isti alat možemo upotrebiti i u analiziranju dinamike kompleksnih mreža? Naravno, sam koncept perzistentnosti nas navodi na potvrdan odgovor. Međutim, tehničke teškoće u realizaciji ove ideje su brojne, što je i glavni razlog nedostatka opipljivih rezultata u ovom polju.



Slika 5.15: barkod email mreže

POGLAVLJE ŠEŠTO

ZAKLJUČAK

Za analizu topološkog prostora metodama računarske homologije koristimo reprezentaciju simplicijalnim kompleksima i to iz dva razloga : njegove kombinatorne strukture i jasne interpretacije graničnih homomorfizama.
Međutim, činjenica da simplicijalni kompleksi mogu biti jako veliki kombinatorni objekti, što se u praksi često događa, otvara novo pitanje o efikasnim metodama računanja topoloških invarijanti na ovim strukturama.
Jedna od najstarijih metoda za ove proračune je svakako Smitova normalna forma.
S obzirom na nemogućnost kontrolisanja rasta koeficijenta tokom procesa Gausove eliminacije, nemoguće je primeniti metod na velikim objektima.
Uz izvesne modifikacije Gausovog eliminacionog algoritma ti problemi se mogu prevazići. Kao rezultat dobijamo algoritam koji radi u vremenu $O(n^3)$ i zahteva razumne resurse memorijskog prostora.
Drugi pristupi ovom problemu uključuju sofisticiranije metode od običnog sabiranja i oduzimanja vrsta i kolona, ali takođe imaju kompleksnost $O(n^3)$, a pored toga ovim algoritmima ne dobijamo uvek sve potrebne informacije o homologiji.
Ispostavlja se da je eliminacioni metod SNF, ukoliko ne posmatramo neki specijalan slučaj simplicijalnog kompleksa, superioran nad ostalim, čak i u slučaju da računamo perzitentnu homologiju simpleksa dimenzije ≥ 3.

Za izračunavanje perzistentne homologije najviše trodimenzionih kompleksa postoji efikasniji algoritam, implementiran u programski paket “Plex“, što je u skladu sa postojećim primenama perzitentne homologije. Imajući u vidu nedavni nastanak, a već brojne rezultate koje je donela sa sobom, ekspanzija i razvoj perzitentne homologije tek se očekuju.
Osnovni razlog je što je ova teorija koncipirana na filtraciji simplicijalnog kompleksa (prostora), koja se skoro uvek pojavljuje kada pokušamo da ispitamo topologiju realnog objekta ili sistema. Ne treba zaboraviti ni mogućnosti u analiziranju dinamičkih sistema perzitentnom homologijom.

U poglavlju 5. primenili smo topološke metode (nove i stare) na analizu kompleksnih sistema. Interpretacija kompleksnih sistema simplicijalnim kompleksima ima brojne prednosti nad uobičajenom interpretacijom grafovima. Topološke invarijante dobijene iz simplicijalnih kompleksa nam govore o unutrašnjoj strukturi posmatranog prostora, za razliku od veličina merenih na grafovima.

Pored toga, perzistentna homologija je idealan alat za ispitivanje statičke i dinamičke evolucije u strukturi,pa smo u mogućnosti da pored statičke mehanike sagledamo i dinamičku mehaniku kompleksnog sistema.

Reference

[1] James R. Munkers, *Topology*, 2nd edition, Prentice Hall, 2000.

[2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[3] Milosav Marjanović, *Topologija*, Matematički fakultet, Beograd, 1990.

[4] H. Edelsbrunner and J. Harer. *Persistent homology — a survey* Twenty Years After, eds. J. E. Goodman, J. Pach and R. Pollack, AMS.

[5] A. Zomorodian and G. Carlsson. *Computing Persistent Homology* Discrete Computational Geometry 33 (2005), 249-274

[6] H. Edelsbrunner, D. Letcher, A. Zomorodian *Topological Persistence and Simplification.* Discrete Computational Geometry 28 (2002), 511-533.

[7] G. D. Rose. *No assembly required*. The Sciences 36 (1996), 26-31.

[8] D. Eisnebud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Theory*. Springer, New Yourk, NY, 1995

[9] A. Zomorodian, Topology For Computing, Cambridge University Press, 2007.

[10] Jean-Guillaume Dumas, Frank Heckenbach, David Saunders and Volkmar Welker: *Computing simplicial homol- ogy based on efficient smith normal form algorithms*. In Michael Joswig and Nobuki Takayma, editors, Algebra, Geometry, and Software Systems, pages 177206. Springer, 2003

[11] Samuel Peltier, Sylvie Alayrangues, Laurent Fuchs, Jacques-Olivier Lachaud: *Computation of homology groups and generators*. Computers and Graphics 30(1): 62-69 (2006)

[12] Joel Friedman: *Computing Betti Numbers via Combinatorial Laplacians*. STOC 1996:386-391

[13] Cecil Jose A. Delfinado, Herbert Edelsbrunner: *An Incremental Algorithm for Betti Numbers of Simplicial Complexes*. SoCG 1993:232-239

[14] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, Afra Zomorodian: *Topological Persistence and Simplification*. Discrete and Computational Geometry (DCG) 28(4):511-533 (2002)

[15] Jozef Dodziuk *Finite-difference approach to the Hodge theory of harmonic forms*. American Journal of Mathematics, 98: 79-104, 1976.

[16] Jack Edmonds. *Systems of distinct representatives and linear algebra*. J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 71B:241245, 1967.

[17] Ravindran Kannan and Achim Bachem. *Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms of an integer matrix*. SIAM J. Comput., 8(4):499507, 1979.

[18] A. Storjohann and G. Labahn. *A fast Las Vegas algorithm for computing the Smith normal form of a polynomial matrix*. Linear Algebra and its Applications 253 (1997), 155—173.

[19] J. O. Shallit. *Computational simplicial homology in APL*, APL 82 Conf. Proc., APL Quote Quad, 13 (1) (September 1982), 332-338.

[20] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek *Computational Homology*, Appl. Math. Sci. Vol. 157, Springer Verlag, NY 2004

[21] Leonid A. Levin *Complexity of Algorithms and Computations*, Ed. Kosmidiadi, Maslov, Petri, “Mir”, Moscow, 1974, 174-185.

[22] Jakob Jonsson *Simplicial Complexes of Graphs* Lecture Notes in Mathematics , Vol. 1928, Springer, 2008.

[23] L. Lovász, Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy, J. Comb. Th. A, 25, 319-324, 1978.

[24] R. Albert, A.-L. Barabási, ”Statistical Mechanics of Complex Networks”, Rev. Mod. Phys. 74, 2002.

[25] A.-L. Barabási, R. Albert, H.Jeong, ”Mean-field theory for scale-free random networks”, Physica A, 272, 173, 1999.

[26] M. E. J. Newman, ”The structure and function of complex networks”, SIAM Rev. 45, 167-256, 2003.