ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

PAUL APPELL

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

TOME I

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

JULES DRACH,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIÈRE PARTIE :

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

de l'Analyse des Travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même.

I. — Généralités.

64. Sur les propriétés des fonctions définies par des équations aux différences partielles (*Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars, 1879).

78. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e Cahier, 1878, p. 13-26).

83. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies (*American Journal of Mathematics*, vol. VII, n° 3, 1885, 56 pages).

57. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 9 et 16 novembre 1885).

73. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. VIII, 1786, p. 295-344).

182. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (réponse à M. Thomé) (*Acta mathematica*, t. 10).

278. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, chap. II (Paris, Gauthier-Villars, 1892).

II. — Fonctions fuchsiennes.

6. Sur les fonctions fuchsiennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 14 et 21 février 1881).

9. Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 4 avril 1881).

11. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 18 avril 1881).

13. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 23 et 30 mai 1881).

15. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 27 juin 1881).

16. Sur les groupes kleinéens (*Ibid.*, 11 juillet 1881).

17. Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires (*Ibid.*, 18 juillet 1881).

18. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 8 août 1881).

19. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 17 octobre 1881).

22. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 23 janvier 1882).

25. Sur les groupes discontinus (*Ibid.*, 27 mars 1882).

26. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 10 avril 1882).

27. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 24 avril 1882).

28. Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires (*Ibid.*, 22 mai 1882).

30. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 9 octobre 1882).

34. Sur les groupes des équations linéaires (*Ibid.*, 12 mars 1883).

36. Sur les groupes des équations linéaires (*Ibid.*, 30 avril 1883).

37. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 21 mai 1883).

59. Sur la transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes (*Ibid.*, 4 janvier 1886).

61. Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéfinies (*Ibid.*, 29 mars 1886).

65. Théorie des groupes fuchsiens (*Acta mathematica*, t. I, 1882, p. 1-62).

66. Mémoire sur les fonctions fuchsiennes (*Acta mathematica*, t. I, 1883, p. 193-294).

68. Mémoire sur les groupes kleinéens (*Acta mathematica*, t. III, 1883, p. 49-92),

69. Sur les groupes des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. IV, 1884, p. 201-312).

70. Mémoire sur les fonctions zêtafuchsiennes (*Acta mathematica*, t. V, 1884, p. 209-278).

101. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires (*Mathematische Annalen*, Bd XXX, 1882, p. 553-564; Bd XX, 1882, p. 52-53).

104. Mémoire pour le concours du Grand Prix des Sciences mathématiques, 1880.

« Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. »

Ce Mémoire, qui a obtenu une mention très honorable, n'a pas été publié sous sa forme primitive.

174. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 76, 1898, p. 627).

191. Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* [Journal de Liouville], 4e série, 1887).

197. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IV, 1898).

III. — Équations non linéaires.

24. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27 février 1882).

48. Sur un théorème de M. Fuchs (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 15 juillet 1884).

71. Sur un théorème de M. Fuchs (*Acta mathematica*, t. VII, 1885, p. 1-32).

IV. — Intégration des équations par les fonctions algébriques et abéliennes.

7. Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 21 mars 1881).

10. Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 avril 1881).

40. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 et 26 novembre 1883).

124. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 avril 1891).

219. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 5).

221. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 11).

V. — Courbes définies par les équations différentielles.

3. Sur les courbes définies par une équation différentielle (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 mars 1880).

20. Sur les courbes définies par les équations différentielles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 décembre 1881).

23. Sur les points singuliers des équations différentielles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 février 1882).

74. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (première Partie) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VII, p. 375-422, novembre et décembre 1881).

75. Id. (deuxième Partie) (même recueil, 3e série, t. VIII, août 1882, p. 251-296).

76. Id. (troisième Partie) (même recueil, 4e série, t. I, 1885, p. 167-244).

77. Id. (quatrième Partie) (même recueil, 4e série, t. II, 1886, p. 151-217).

NOTE

SUR

LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, 45e Cahier, 1878, p. 13-26)

MM. Briot et Bouquet ont étudié les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Ils ont démontré que, quand le coefficient différentiel est fonction holomorphe de y et de x, l'équation admet une intégrale y fonction holomorphe de x. Ils ont examiné ensuite ce qui se passe quand le coefficient différentiel cesse d'être fonction holomorphe de x et de y, et ils ont fait voir qu'il pouvait se présenter deux cas :

1° y est fonction holomorphe de x ou de $x^{\frac{1}{n}}$, n étant un nombre entier quelconque;

2° y est une fonction présentant des singularités plus complexes. Dans ce cas, l'équation différentielle peut se ramener à l'une des trois formes

$$\begin{array}{lllll}
x\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & \dfrac{df}{dy}\gtrless 0, & \text{pour} & x=0, & y=0,\\
x\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & \dfrac{df}{dy}=0, & \text{»} & x=0, & y=0,\\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots, & \text{»} & \dots\dots, & \dots\dots,\\
x^m\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & & & &
\end{array}$$

où $f(x, y)$ est holomorphe en x et en y. C'est la première de ces formes qui se présentera si l'équation différentielle donnée, étant algébrique, est la plus générale *de son degré*.

C'est celle aussi que MM. Briot et Bouquet ont étudiée plus particulièrement, et c'est à elle que se bornera la présente étude.

MM. Briot et Bouquet ont démontré que :

1° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, n'est pas entier positif, l'équation admet une intégrale holomorphe s'évanouissant avec x;

2° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, est commensurable et positif, mais non entier, l'équation admet une infinité d'intégrales holomorphes en $x^{\frac{1}{m}}$, m étant le dénominateur de $\frac{df}{dy}$;

3° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, a sa partie réelle négative, l'équation n'admet pas d'autre intégrale s'évanouissant avec x que l'intégrale holomorphe;

4° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, a sa partie réelle positive, l'équation admet, outre l'intégrale holomorphe, une infinité d'intégrales non holomorphes s'évanouissant avec x.

Mais ces géomètres ont laissé de côté l'étude de ces intégrales non holomorphes; nous démontrons, au sujet de ces intégrales :

1° Que, si $\frac{df}{dy}=\lambda$ pour $x=y=0$, elles sont holomorphes en x et x^λ si λ n'est pas entier positif et a sa partie réelle positive;

2° Que, si $\frac{df}{dy}$ pour $x=y=0$, est entier positif, elles sont holomorphes en x et $x\mathrm{L}x$.

Dans quels cas une fonction y, définie par une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dx}=f(x,\ y),$$

où f est une fonction holomorphe de x et de y dans les environs de $x=0$, $y=0$, peut-elle se représenter dans les environs de $x=0$ par une série à double entrée convergente, suivant les puissances croissantes de x et de x^λ, où λ est un nombre quelconque réel ou imaginaire?

Supposons que cela soit possible, et voyons quels devront être les coefficients de la série. On aura

$$y=\varphi(x,\ z), \qquad z=x^\lambda,$$

où y est une fonction holomorphe de x et de z dans les environs de $x=0$ et $z=0$.

Remplaçons, dans l'équation (1), y par sa valeur $\varphi(x, z)$ et $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dz}{dx}\frac{d\varphi}{dz}$ ou $\frac{d\varphi}{dx}+\lambda x^{\lambda-1}\frac{d\varphi}{dz}$,

$$x\frac{dy}{dx}=x\frac{d\varphi}{dx}+\lambda z\frac{d\varphi}{dz}.$$

Différentions ensuite l'équation (1) ainsi transformée un nombre quelconque de fois par rapport à x, un nombre quelconque de fois par rapport à z; nous aurons la série d'équations

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda z\frac{d^2y}{dx\,dz}+\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$x\frac{d^2y}{dx\,dz}+\lambda z\frac{d^2y}{dz^2}+\lambda\frac{dy}{dz}=\frac{df}{dy}\frac{dy}{dz},$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3}+\lambda z\frac{d^3y}{dx^2\,dz}+2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\frac{d^2f}{dy\,dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{df}{dy},$$

. . . .

Voyons la composition de l'équation obtenue par m différentiations par rapport à x et n par rapport à z :

1° Je dis que le premier membre sera

$$x\frac{d^{m+n+1}y}{d^{m+1}x\,d^nz}+\lambda z\frac{d^{m+n+1}y}{d^mx\,d^{n+1}z}+(m+n\lambda)\frac{d^{m+n}y}{d^mx\,d^nz}.$$

En effet, si cela est vrai pour les entiers m, n, ce sera vrai aussi pour les entiers $m+1$, n, ou pour $n+1$, m. Différentions en effet l'expression précédente successivement par rapport à x et par rapport à z; nous aurons

$$x\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+2}x\,d^nz}+\lambda z\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+1}x\,d^{n+1}z}+(m+1+n\lambda)\frac{d^{m+n+1}y}{d^{m+1}x\,d^nz},$$

$$x\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+1}x\,d^{n+1}z}+\lambda z\frac{d^{m+n+2}y}{d^mx\,d^{n+2}z}+(m+\lambda+n\lambda)\frac{d^{m+n+1}y}{d^mx\,d^{n+1}z}.$$

2° Je dis que le second membre sera formé d'une somme de produits ayant pour facteurs : 1° un coefficient constant positif; 2° une dérivée partielle de f par rapport à x et à y; 3° différents facteurs de la forme $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\,d^\beta z}$, où $\alpha\leq m$, $\beta\leq n$. De plus, $\frac{d^{m+n}y}{d^mx\,d^nz}$ n'entre que dans un terme où il est multiplié par $\frac{df}{dy}$.

En effet, il est facile de faire voir, par une simple différentiation par rapport à x, que, si cela est vrai pour les entiers m, n, cela est vrai encore pour les entiers $m+1$, n et m, $n+1$.

Cela posé, voyons comment nous pourrons déterminer les coefficients successifs $\frac{1}{1.2\ldots m\,1.2\ldots n}\,\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$.

Remarquons que x et z sont nuls; le premier membre de chaque équation se réduira à $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}(m+n\lambda)$; la seconde équation deviendra $\lambda=\frac{df}{dy}$, $\frac{dy}{dz}$ pouvant d'ailleurs prendre une valeur quelconque.

Si l'on fait passer le terme $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}\,\frac{df}{dy}$ dans le premier membre, celui-ci devient $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}[m+(n-1)\lambda]$, et le second ne contient plus que des termes en $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta y}$, où $\alpha<m$, $\beta<n$. On peut donc calculer successivement chacune des dérivées partielles de y.

1° $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$ est égal à une somme de produits ayant pour facteurs : 1° un coefficient positif; 2° diverses dérivées partielles de f; 3° un produit de termes de la forme $\frac{1}{\alpha+\beta\lambda}$, où $\alpha=0, 1, 2, \ldots, m$, $\beta=-1, 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

En effet, on voit facilement que, si cela est vrai pour toutes les valeurs de $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta z}$, où $\alpha\leqq m$, $\beta\leqq n$, sauf pour $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$, en remplaçant dans l'équation qui donne cette dérivée toutes les dérivées connues par leurs valeurs, on obtiendra une expression de même forme.

2° Le facteur $\frac{1}{a-\lambda}$ ne peut entrer dans aucun des produits à une puissance supérieure à $\frac{m}{a}$.

En effet, nous avons vu que le second membre de ces équations se réduit à

$$\Sigma\mathrm{KP}\left(\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta z}\right)\frac{d^{\gamma+\delta}f}{d^\gamma x\, d^\delta y},$$

où P représente un produit de plusieurs facteurs de même forme.

Si l'on différentie cette expression par rapport à x, on obtiendra différents termes. Dans chacun d'eux, ou bien l'un des α sera augmenté d'une unité, ou bien γ sera augmenté d'une unité, ou bien δ augmentera d'une unité, et l'on multipliera par $\frac{dy}{dx}$. Si l'on différentie par rapport à z, aucun des α ne variera. Donc l'expression $\gamma + \Sigma\alpha$ augmentera d'une unité quand on différentiera par rapport à x, ne changera pas dans les différentiations par rapport à z. Donc

$$\gamma + \Sigma\alpha = m, \qquad \Sigma\alpha < m.$$

Supposons que la puissance à laquelle entre le facteur $\frac{1}{a-\lambda}$ soit plus petite que $\frac{\alpha}{a}$ pour toutes les valeurs de α plus petites que m, et remplaçons ces dérivées connues par leurs valeurs dans l'expression de $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$, comme nous l'avons dit plus haut. Le terme $\frac{1}{a-\lambda}$ sera à une puissance plus petite que $\frac{\Sigma\alpha}{a}$ et, *a fortiori*, plus petite que $\frac{m}{a}$. C. Q. F. D.

Voyons maintenant dans quels cas la série est convergente, et, pour cela, remarquons que chaque terme de la série est formé d'une somme de produits. Considérons chacun de ces produits comme formant un terme de la série, et démontrons que le tableau des modules de la série ainsi constituée est convergent.

Premier cas. — Soit l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + \beta_0 y + \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)},$$

où α_0 et β_0 sont choisis de telle sorte que, pour $x = y = 0$, le second membre s'annule et que $\lambda = \frac{df}{dy} = \frac{1}{p}$, p étant un nombre entier.

Les dérivées partielles du second membre sont toutes positives. Il en est de même des termes $\frac{1}{\alpha + \beta\lambda}$, où α est nul ou positif et $\beta > -1$.

Donc tous les termes de la série sont positifs. Si donc on démontre que les termes arrangés d'une certaine manière forment une série convergente, il en sera de même du tableau des modules des termes de la série.

Or, comme $\lambda = \frac{1}{p}$, en posant $x = z^p$, on a une équation de même forme, où $\lambda = 1$ et où, par conséquent, comme l'ont fait voir MM. Briot et Bouquet, y est développable en série convergente suivant les puissances de z, c'est-à-dire de $x^{\frac{1}{p}}$.

Donc, dans ce cas, la série est toujours convergente, car elle l'est lorsqu'on range les termes de façon que $m + n\lambda$ aille toujours en croissant.

Deuxième cas. — Supposons le cas général; seulement la partie réelle de λ est positive,

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

On peut toujours choisir $\lambda' = \frac{1}{p}$ de façon que la partie réelle de λ soit plus grande que λ'.

Considérons maintenant une équation de la forme examinée dans le cas précédent, où λ soit égal à la valeur de λ', que nous venons de choisir, où M est le plus grand module que puisse acquérir f quand le module de x reste plus petit que R et celui de y plus petit que R'. La série relative à cette seconde équation aura son tableau des modules convergent.

Pour passer de cette série à celle qui est relative à l'équation donnée, il suffit de multiplier chaque terme :

1° Par le rapport des dérivées partielles de f à celles du second membre de la seconde équation, rapport toujours plus petit que 1, puisque chaque dérivée de f est plus petite que la dérivée correspondante de $\dfrac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)}$;

2° Par le rapport $\dfrac{x^m x^{n\lambda}}{x'^m x'^{n\lambda'}}$;

3° Par le rapport $\dfrac{\text{produit des } \alpha+\beta\lambda'}{\text{produit des } \alpha+\beta\lambda}$, où nous ne considérons, pour le moment, que les termes où β est positif. La partie réelle de $\alpha + \beta\lambda'$ est plus petite que celle de $\alpha + \beta\lambda$ par hypothèse; de plus, $\alpha + \beta\lambda'$ est réel; donc

$$\text{mod.}\,\alpha + \beta\lambda' < \text{mod.}\,\alpha + \beta\lambda.$$

Donc le rapport considéré est plus petit que 1.

4° Par le rapport $\dfrac{\text{produit des } \alpha-\lambda'}{\text{produit des } \alpha-\lambda}$.

D'abord, comme $\alpha - \lambda'$ est réel et que sa partie réelle est plus grande que celle de $\alpha - \lambda$, on peut toujours prendre α assez grand pour que le module de $\dfrac{\alpha-\lambda'}{\alpha-\lambda}$ soit plus grand que 1.

Par conséquent, le rapport considéré peut être représenté, à moins que λ ne soit un nombre entier positif, par

$$\theta^m \frac{(1-\lambda')^m}{(1-\lambda)^m} \frac{(2-\lambda')^{\frac{m}{2}}}{(2-\lambda)^{\frac{m}{2}}} \cdots \frac{(\alpha-\lambda')^{\frac{m}{\alpha}}}{(\alpha-\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}} \cdots,$$

en faisant varier α depuis 1 jusqu'à ∞, θ ne pouvant devenir plus grand qu'une certaine quantité K, pourvu que je démontre que le produit infini en question est convergent.

Considérons sa racine $m^{\text{ième}}$,

$$\frac{1-\lambda'}{1-\lambda} \frac{(2-\lambda')^{\frac{1}{2}}}{(2-\lambda)^{\frac{1}{2}}} \cdots;$$

son logarithme sera la série

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left[\frac{1}{\alpha} \mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda'}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\right].$$

Multiplions le terme général par α^2; il vient

$$\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda'}{\alpha}\right)^\alpha - \mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha,$$

dont la limite, pour $\alpha = \infty$, est

$$\mathrm{L}e^{\lambda'} - \mathrm{L}e^{\lambda} \quad \text{ou} \quad \lambda' - \lambda,$$

qui est fini. Donc la série est convergente, soit μ sa valeur. La valeur du produit qui multiplie θ^m est $e^{m\mu}$.

Donc, pour passer de la série dont nous avons démontré la convergence en étudiant le premier cas à la série que nous avons à examiner maintenant, il suffit de multiplier par un terme qui est toujours plus petit que

$$\mathrm{K}^m e^{m\mu} \left(\frac{x}{x'}\right)^m \frac{x^{n\lambda}}{x'^{n\lambda'}}.$$

Or on peut toujours prendre le module de $\frac{x}{x'}$ assez petit pour que le module de $\mathrm{K}e^{\mu} \frac{x}{x'} < 1$.

Soient $x = \rho e^{i\varphi}$, $x' = \rho' e^{i\varphi'}$;

$$\frac{x^\lambda}{x'^{\lambda'}} = \left(\frac{\rho^\lambda}{\rho'^{\lambda'}} \frac{e^{i\varphi\lambda}}{e^{i\varphi'\lambda'}}\right).$$

Soient $\lambda = \alpha + i\beta$, $\rho = e^r$; il vient

$$\frac{x^\lambda}{x'^{\lambda'}} = \frac{\rho^\alpha e^{-\varphi\beta}}{\rho'^{\lambda'}} e^{i(\varphi\alpha - \varphi'\lambda' + z\beta)},$$

dont le module est $\rho^\alpha e^{-\varphi\beta} \rho'^{-\lambda'}$.

Or on peut toujours, si α est positif, prendre ρ assez petit (quel que soit φ) pour que ce module soit plus petit que 1. Tous les termes de la première série sont donc multipliés par un facteur plus petit que 1; la série reste donc convergente.

Donc :

Toute fonction définie par une équation différentielle de la forme

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $\frac{df}{dy} = \lambda$ *et où* λ *a sa partie réelle positive et n'est pas entier positif, est développable dans les environs de* $x = 0$, *suivant les puissances croissantes de* x *et de* x^λ.

Limites de convergence. — Les deux conditions

$$\mathrm{K}e^\mu \frac{x}{x'} < 1, \qquad \rho^\alpha e^{-\varphi\beta} \rho'^{-\lambda'} < 1$$

montrent que la région de convergence est limitée à la fois par un cercle et par une spirale logarithmique; on voit en même temps que la série peut être convergente pour une des valeurs que x^λ peut prendre pour une même valeur de x, sans l'être en même temps pour d'autres valeurs de x^λ. Lorsqu'on franchit la spirale logarithmique en allant vers l'origine, le nombre des valeurs de x^λ pour lesquelles la convergence a lieu s'augmente d'une unité.

Du paramètre arbitraire. — Le paramètre arbitraire est ici la valeur de $\frac{dy}{dz}$ que nous avons pu prendre quelconque. Remarquons que tous les termes de la série sont des polynomes entiers par rapport à ce paramètre, d'où il résulte que la fonction y peut être ordonnée suivant les puissances croissantes de x, de x^λ et de ce paramètre.

Équations d'ordre supérieur. — Cette démonstration s'étendrait sans difficulté au cas des équations d'ordre supérieur. En effet, ces équations peuvent, dans les cas où z et y ne sont pas fonctions holomorphes de $x^{\frac{1}{n}}$, s'écrire sous l'une des formes

$$x\frac{dy}{dx} = \lambda y + \varphi(x, y, z),$$

$$x\frac{dz}{dx} = \mu z + \psi(x, y, z),$$

où φ et ψ ne contiennent ni terme constant ni termes du premier degré en x, y, z, ou

$$x^m\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$x^m\frac{dz}{dx} = f_1(x, y).$$

Dans le premier cas, si λ et μ ne sont ni entiers positifs ni à partie réelle négative, y et z sont holomorphes en x, x^λ, x^μ. En effet, reprenons la démonstration précédente, il suffira de remplacer λ par μ dans un certain nombre de facteurs des produits en $m + n\lambda$.

La discussion précédente s'appliquera évidemment sans y rien changer.

Cas où $\lambda = 1$.

Nous avons laissé de côté, dans le résultat que nous venons d'obtenir, deux cas :

1° Celui où la partie réelle de λ est négative; or, dans ce cas, MM. Briot et Bouquet ont démontré qu'il n'existait pas de fonction définie par l'équation et s'annulant pour $x = 0$ (1);

2° Celui où λ est entier positif; ce dernier se ramène facilement à celui où $\lambda = 1$ par une transformation très simple, due aussi à MM. Briot et Bouquet. Nous nous réduirons donc à l'étude du cas où $\lambda = 1$.

Soient

(1) $$x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad \frac{df}{dy} = 1.$$

Considérons l'équation auxiliaire

(2) $$x\frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y), \qquad \alpha + \frac{df}{dy} = \lambda.$$

Toutes les dérivées partielles du second membre de l'équation (2) sont les

(1) On sait que ceci suppose certaines restrictions sur la manière dont y tend vers zéro; *voir* aux Notes. (J. D.)

mêmes que pour l'équation (1), sauf la dérivée première par rapport à y. De plus, pour l'équation (2), nous avons vu que y était développable suivant les puissances croissantes de x et x^λ, que le coefficient de chaque terme était une somme de monomes, et que le tableau des modules des termes formés par chacun de ces monomes était convergent.

Soit

$$A\, x^m\, x^{n\lambda} \tag{3}$$

l'un de ces monomes; soit, pour simplifier, λ réel. La série des monomes

$$\text{mod.}\,A(\text{mod.}\,x)^m(\text{mod.}\,x)^{n\lambda} \tag{4}$$

est aussi convergente.

Posons

$$x^\lambda = t + x.$$

Nous pouvons développer l'expression (3) suivant la formule du binome; on obtient une suite de termes de la forme

$$AK\, x^{m+p}\, t^{n-p}. \tag{5}$$

Remplaçons un instant, dans la série, x^λ par z, qui sera indépendant de x; la série est alors convergente quand x et z prennent des valeurs d'un module inférieur à certaines limites ρ et ρ_1. Supposons t et x positifs et tels que ces conditions soient remplies; la série (4) aura son tableau des modules convergent; il en sera de même de la série

$$K\,\text{mod.}\,A\, x^{m+p}\, t^{n-p},$$

puisque les termes de cette seconde série sont positifs et que, groupés d'une certaine manière, ils reproduisent la série (4). Il en sera de même encore de la série (5), dont les termes ont même module que ceux de la série précédente, et il en sera de même encore quand on remplacera t et x par des quantités imaginaires de même module.

Les limites de convergence sont données par les inégalités

$$\text{mod.}\,x < \rho, \qquad \text{mod.}\,x + \text{mod.}(x^\lambda - x) < \rho_1.$$

Un terme quelconque a la forme

$$K\frac{A}{P(m+n\lambda)}\, x^{m+p}\, t^{n-p},$$

où A est un polynome entier par rapport au paramètre arbitraire $\frac{dy}{dz}$, que nous représenterons par α.

Les facteurs de la forme $\frac{1}{\beta-\lambda}$ ne peuvent entrer à une puissance supérieure à la puissance $\frac{m}{\beta}$ ou, *a fortiori*, à la puissance $\frac{(m+p)}{\beta}$.

Considérons la série obtenue directement

$$t = x^\lambda - x,$$
$$\frac{dt}{dx} = \lambda x^{\lambda-1} - 1,$$
$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + (\lambda t - x)\frac{dy}{dt}.$$

Égalons au second membre de l'équation (2), il vient

$$x\frac{dy}{dx} + (\lambda t - x)\frac{dy}{dt} = \alpha y + f(x, y);$$

d'où, par différentiations successives et remarquant qu'à l'origine

$$x = y = t = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} + \left(\alpha + \frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx},$$
$$\lambda\frac{dy}{dt} = \left(\alpha + \frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dt},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Il est facile de voir qu'en déduisant de ces équations les valeurs des dérivées partielles de y, on les obtient sous la forme de somme de monomes $\sum \frac{A_1}{P(m+n\lambda)}$; que l'un quelconque de ces monomes, multiplié par $x^{m+p}t^{n-p}$, par $\frac{1}{1.2\dots(m+p)}$ et par $\frac{1}{1.2\dots(n-p)}$, est la somme d'un certain nombre de termes de la série que nous venons de considérer.

Donc la série $\sum \frac{A_1}{1.2\dots(m+p)\,1.2\dots(n-p)} \frac{1}{P(m+n\lambda)} x^{m+p}t^{n-p}$ a son tableau des modules convergent.

De plus il est facile de voir que les deux équations écrites en premier lieu donnent toujours

$$\alpha + \frac{df}{dy} = \lambda, \quad \frac{dy}{dt} \text{ demeurant arbitraire},$$

et si l'on prend

$$\frac{dy}{dt} = \alpha,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + \frac{df}{dx}}{1 - \lambda}.$$

Donc, comme le facteur $\frac{1}{1-\lambda}$ ne peut s'introduire dans l'un des monomes que s'il contient à une certaine puissance $\frac{dy}{dx}$, si l'un de ces monomes contient le facteur $\frac{1}{1-\lambda}$, le numérateur A_1 contiendra à la même puissance le facteur $\alpha + \frac{df}{dx}$.

Revenons maintenant à l'équation (1) et cherchons de même les coefficients de la série. Rien ne sera changé dans le calcul précédent, sinon que λ devra être remplacé par 1.

Des deux équations écrites en premier lieu, la première donne

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx},$$

et la seconde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

est vérifiée identiquement. C'est donc $\frac{dy}{dx}$ qui deviendra le paramètre arbitraire, puisqu'on peut lui donner une valeur arbitraire β.

Rien ne sera changé dans la série, sinon que chaquet erme sera multiplié par

$$\frac{\beta^q (1-\lambda)^q}{\left(\alpha + \frac{df}{dx}\right)^q} \frac{P(m+n\lambda)}{P(m+n)} \frac{x'^r t'^s}{x^r t^s}. \tag{7}$$

où $r = m + p$, $s = n - p$.

Or nous savons que, si l'on suppose $\lambda < 1$, la seconde fraction est toujours plus petite que K^r, K étant une quantité finie.

Comme $q < r$, il en sera de même du premier facteur.

On peut donc toujours prendre les modules de x et de t assez petits pour que le module de l'expression (7) soit plus petit que 1.

Donc la nouvelle série est convergente.

Toute fonction définie par une équation différentielle de la forme

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $\frac{df}{dy} = 1$, *est développable suivant les puissances croissantes de* x *et d'une variable* t *définie par* $x \frac{dt}{dx} = t - x$, *ou de* $x\,\mathrm{L}\,x$, *dans le voisinage de* $x = 0$, $y = 0$.

Les limites de convergence sont données par

$$\text{mod.}\, x < \rho. \qquad \text{mod.}(x\,\mathrm{L}x) < \rho_1.$$

Le paramètre arbitraire est $\frac{dy}{dx}$, et la fonction y peut encore se développer suivant les puissances croissantes de x, de t et de ce paramètre.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES ET AUX DIFFÉRENCES FINIES

American Journal of Mathematics, vol. VII, p. 1-56, (1885).

I. — Étude sommaire des intégrales irrégulières.

Les résultats que je vais chercher à démontrer dans le présent Mémoire et qui se rapportent tant à certaines équations différentielles linéaires qu'à des équations analognes, mais à différences finies, ont déjà été énoncés les uns dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences pour le concours du Grand Prix des Sciences mathématiques le 1er juin 1880 et qui est resté inédit, les autres dans une communication verbale faite à la Société mathématique de France en novembre 1882 et dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le 5 mars 1883.

Soit

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire où les coefficients P seront des polynomes en x que je supposerai tous de même degré, à savoir de degré p. J'appellerai A_i le coefficient de x^p dans le polynome P_i.

Nous allons étudier la façon dont se comportent les intégrales de l'équation (1) quand x croît indéfiniment d'une certaine manière, par exemple par valeurs réelles positives. Il reste donc convenu jusqu'à nouvel ordre que x est réel et positif, tandis que les intégrales y et les coefficients des polynomes P peuvent être imaginaires.

Nous allons avoir à considérer l'équation algébrique

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0. \tag{2}$$

Nous supposerons d'abord que cette équation n'a pas de racines multiples, et même qu'elle n'a pas deux racines ayant même partie réelle.

Les méthodes de M. Fuchs ne sont pas applicables au problème qui nous occupe, parce que les intégrales de l'équation (1) sont *irrégulières* dans le voisinage du point $x = \infty$. Il faut donc employer des procédés particuliers.

Nous poserons

$$\frac{P_i}{P_n} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_n} = B_i$$

et, supposant d'abord l'équation (1) du deuxième ordre, nous l'écrirons

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0.$$

Posons

$$y = e^{\int u\,dx},$$

l'équation différentielle deviendra

$$\frac{du}{dx} + u^2 + Q_1 u + Q_0 = 0.$$

Je dis que quand x croîtra indéfiniment, u tendra vers une des racines de l'équation (2). Soient en effet α et β les deux racines de cette équation, de telle sorte que

$$(z-\alpha)(z-\beta) = z^2 + B_1 z + B_0$$

et que la partie réelle de α soit plus grande que celle de β.

Soit

$$V = v + iv' = \log(u-\alpha) - \log(u-\beta).$$

Il viendra

$$\frac{dV}{dx} = (\beta-\alpha)\frac{u^2 + Q_1 u + Q_0}{u^2 + B_1 u + B_0}.$$

Nous allons étudier le signe de la partie réelle de $\frac{dV}{dx}$, c'est-à-dire de $\frac{dv}{dx}$. Si l'on donne à x une valeur très grande, les différences $Q_1 - B_1$ et $Q_0 - B_0$ sont très petites de l'ordre de $\frac{1}{x}$. Cela posé, on peut démontrer successivement les résultats suivants.

Supposons que $Q_1 - B_1$ et $Q_0 - B_0$ aient des valeurs *données* suffisamment petites, et soit K un nombre donné positif. On peut trouver deux nombres ε et ε_1 tels que toutes les fois que

$$|u-\alpha| > \varepsilon, \quad |u-\beta| > \varepsilon_1$$

on ait également

$$(3) \qquad \left| \frac{u(Q_1 - B_1) + (Q_0 - B_0)}{u^2 + B_1 u + B_0} \right| < K.$$

De plus lorsque $Q_1 - B_1$ et $Q_0 - B_0$ tendront simultanément vers zéro, K ne variant pas, ε et ε_1 tendront aussi simultanément vers zéro.

En second lieu, on peut toujours trouver un nombre K assez petit pour que $\frac{dv}{dx}$ soit négatif comme la partie réelle de $(\beta - \alpha)$, lorsque l'inégalité (3) a lieu. Il suffit pour cela que l'on ait

$$K < \cos[\arg(\alpha - \beta)].$$

Enfin on peut trouver deux nombres k et k_1 tels que les inégalités

$$|u - \alpha| < \varepsilon, \qquad |u - \beta| < \varepsilon_1$$

aient lieu toutes les fois que v est compris entre k et $-k_1$.

On conclut de tout cela que si x est suffisamment grand, il existe deux nombres k et k_1 tels que $\frac{dv}{dx}$ soit négatif toutes les fois que v est compris entre k et $-k_1$; de plus lorsque x croît constamment et indéfiniment, k et k_1 croissent aussi constamment et indéfiniment.

Supposons que pour une valeur donnée de x, v ait une certaine valeur initiale comprise entre k et $-k_1$, on est certain que v va décroître tant qu'il sera supérieur à $-k_1$, et que, si après avoir décru, il arrive qu'il croisse de nouveau, il ne pourra jamais en tout cas redevenir supérieur à $-k_1$.

Soit $M(h)$ la plus grande valeur que puisse prendre v quand x varie de h à $+\infty$. Lorsque h croîtra, $M(h)$ décroîtra ou du moins ne pourra jamais croître. Donc quand h grandira indéfiniment, $M(h)$ tendra vers une limite, *finie ou infinie*, que j'appellerai M. Si $M = -\infty$, on est certain que v tend vers $-\infty$; tandis que si M était fini, il pourrait arriver ou bien que v tendît vers la limite M, ou que v ne tendît vers aucune limite. Dans le cas qui nous occupe on vient de voir qu'on peut prendre h assez grand pour que l'on ait

$$M(h) < -k_1,$$

d'où

$$M < -k_1.$$

Mais nous pouvons prendre x assez grand pour que k_1 soit aussi grand que l'on veut. On a donc

$$M = -\infty$$

ou

$$\lim v = -\infty, \qquad \lim u = \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le raisonnement précédent n'est en défaut que si la valeur initiale de v n'est pas comprise entre k et $-k_1$. Mais nous avons choisi arbitrairement la valeur initiale de x, nous aurions pu prendre tout aussi bien une valeur quelconque de cette variable. Pour que le raisonnement soit en défaut, il faut donc que, quel que soit x, v soit plus grand que k ou plus petit que $-k_1$. Or quand x tend vers l'infini, il en est de même de k et de k_1. Donc v tend aussi vers $\pm\infty$. Donc u tend vers β ou vers α. En résumé, la limite de u est en général α, mais pour une intégrale particulière, elle peut être égale à β.

Faisons encore le raisonnement pour les équations du troisième ordre. L'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3}+Q_2\frac{d^2y}{dx^2}+Q_1\frac{dy}{dx}+Q_0y=0$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}(3u+Q_2)+u^3+Q_2u^2+Q_1u+Q_0=0. \tag{4}$$

Soient α, β, γ les trois racines de l'équation (2) rangées par ordre de parties réelles décroissantes. Nous considérerons à côté de l'équation (4) l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}(3v+B_2)+v^3+B_2v^2+B_1v+B_0=0, \tag{4^{bis}}$$

dont l'intégrale générale est

$$v=\frac{\lambda\alpha\, e^{\alpha x}+\mu\beta\, e^{\beta x}+\nu\gamma\, e^{\gamma x}}{\lambda\, e^{\alpha x}+\mu\, e^{\beta x}+\nu\, e^{\gamma x}},$$

λ, μ, ν étant les constantes introduites par l'intégration. Nous allons chercher une fonction réelle des parties réelles et imaginaires de v et de $\frac{dv}{dx}$ choisie de telle sorte que sa dérivée soit toujours négative. Nous considérerons ensuite une fonction formée de la même manière avec les parties réelles et imaginaires de u et de $\frac{du}{dx}$, et nous reconnaîtrons que la dérivée de cette nouvelle fonction sera aussi toujours négative pourvu que la fonction elle-même soit comprise entre deux limites données, lesquelles limites tendent respectivement vers $\pm\infty$, quand x tend vers $+\infty$. La méthode que nous suivrons sera donc de tout point semblable à celle que nous avons employée pour le cas du deuxième ordre.

La fonction que nous cherchons à former dépend de u et de $\frac{du}{dx}$ et par conséquent de y, de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Il y a avantage à introduire directement ces éléments.

Employons, pour abréger, la notation de Lagrange de façon que y' désigne

$\dfrac{dy}{dx}$ et que y'' désigne $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ et posons

$$\begin{aligned} y &= X + Y + Z, \\ y' &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y'' &= \alpha^2 X + \beta^2 Y + \gamma^2 Z. \end{aligned}$$

La différenciation nous donnera

$$\begin{aligned} y' &= X' + Y' + Z', \\ y'' &= \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z', \\ -Q_2 y'' - Q_1 y' - Q_0 y &= \alpha^2 X' + \beta^2 Y' + \gamma^2 Z'. \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} \alpha^3 + Q_2\alpha^2 + Q_1\alpha + Q_0 &= A(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma), \\ \beta^3 + Q_2\beta^2 + Q_1\beta + Q_0 &= B(\beta-\alpha)(\beta-\gamma), \\ \gamma^3 + Q_2\gamma^2 + Q_1\gamma + Q_0 &= C(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta), \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} X' &= \alpha X - (AX + BY + CZ), \\ Y' &= \beta Y - (AX + BY + CZ), \\ Z' &= \gamma Z - (AX + BY + CZ). \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{d}{dx}\log\frac{Y}{X} = \beta - \alpha + A - B - A\frac{X}{Y} + B\frac{Y}{X} + C\left(\frac{Z}{X} - \frac{Z}{Y}\right) = \beta - \alpha + \Delta$$

avec des expressions analogues pour les dérivées logarithmiques de $\dfrac{Z}{X}$ et de $\dfrac{Z}{Y}$.

Lorsque x croît indéfiniment, A, B et C et par conséquent le terme complémentaire Δ tendent vers zéro. La variable x ayant une valeur donnée suffisamment grande, on peut trouver un nombre positif ε tel que l'expression

$$(|A| + |B| + |C|)\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

soit plus petite que la partie réelle de $\alpha - \beta$ et que celle de $\beta - \gamma$. Si alors les valeurs absolues

$$\left|\frac{X}{Y}\right|, \quad \left|\frac{Y}{X}\right|, \quad \left|\frac{X}{Z}\right|, \quad \left|\frac{Z}{X}\right|, \quad \left|\frac{Y}{Z}\right|, \quad \left|\frac{Z}{Y}\right|$$

sont simultanément plus grandes que ε, on aura

$$|\Delta| < (|A| + |B| + |C|)\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

et par conséquent, les dérivées logarithmiques de $\dfrac{Y}{X}$, de $\dfrac{Z}{Y}$ et de $\dfrac{Z}{X}$ auront leurs parties réelles négatives, de sorte que

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Y}{X}\right| < 0, \qquad \frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{X}\right| < 0, \qquad \frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{Y}\right| < 0.$$

De plus lorsque x croîtra indéfiniment, ε tendra vers zéro. Ajoutons d'ailleurs que la dérivée logarithmique de $\left|\frac{Y}{X}\right|$ reste négative quand même $\left|\frac{Z}{X}\right|$ ou $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ seraient plus petits que ε. De même on aura

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{X}\right| < 0, \qquad \text{même si } \left|\frac{Y}{Z}\right| \text{ ou } \left|\frac{Y}{X}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{Y}\right| < 0, \qquad \text{même si } \left|\frac{X}{Z}\right| \text{ ou } \left|\frac{X}{Y}\right| < \varepsilon.$$

Soit maintenant H la plus grande des deux quantités $\left|\frac{Y}{X}\right|$ et $\left|\frac{Z}{X}\right|$. Quelle est la condition pour que H soit une fonction décroissante de x? Je dis qu'il suffit que H soit compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, ε étant bien entendu supposé plus petit que 1. En effet nous pouvons faire deux hypothèses:

1°
$$H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \left|\frac{Z}{X}\right|;$$

on a alors

$$\left|\frac{Y}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{X}{Z}\right| > \left|\frac{X}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > 1 > \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left|\frac{Y}{X}\right| < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2°
$$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \left|\frac{Y}{X}\right|;$$

on a

$$\left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > 1 > \varepsilon, \qquad \left|\frac{X}{Y}\right| > \left|\frac{X}{Z}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left|\frac{Z}{X}\right| < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi H décroît toutes les fois qu'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$.

Or pour $x = \infty$ on a

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Donc on a aussi

$$\lim H = 0, \qquad \lim \frac{Y}{X} = 0, \qquad \lim \frac{Z}{X} = 0,$$

d'où l'on déduit aisément

$$\lim u = \lim \frac{y'}{y} = \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'y aurait d'exception que si H restait constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, auquel cas sa limite serait infinie. Dans ce cas, on a toujours

$$\left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{X}\right| > \varepsilon,$$

toutes les fois que $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. En effet il vient, ou bien

$$H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

d'où

$$\left|\frac{Z}{X}\right| = \left|\frac{Z}{Y}\right|\left|\frac{Y}{X}\right| > 1 > \varepsilon,$$

ou bien

$$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

d'où

$$\left|\frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{Y}{Z}\right|\left|\frac{Z}{X}\right| > 1 > \varepsilon.$$

D'où l'on doit conclure que la fonction $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ est décroissante toutes les fois qu'elle est comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$; il en résulte, comme nous l'avons fait voir plusieurs fois, que cette fonction tend *en général* vers zéro, et qu'elle peut aussi, *mais exceptionnellement*, tendre vers l'infini. Dans le premier cas on a

$$\lim u = \beta,$$

dans le second

$$\lim u = \gamma. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'est pas besoin d'insister pour faire comprendre que ce raisonnement est applicable à une équation d'ordre quelconque. Dans tous les cas la limite de la dérivée logarithmique de y est une des racines de l'équation (2).

De ce que la limite de $\frac{y'}{y}$ est égale à un nombre fini et déterminé α, il ne s'ensuit pas forcément que $\frac{y}{e^{\alpha x}}$ tende vers une limite finie et déterminée; car si l'on avait par exemple $y = xe^{\alpha x}$ il viendrait

$$\lim \frac{y'}{y} = \alpha, \qquad \lim \frac{y}{e^{\alpha x}} = \infty.$$

Ce n'est que dans un paragraphe ultérieur que nous démontrerons que la limite $\frac{y}{x^m e^{\alpha x}}$ est en général finie et déterminée.

Pour le moment supposons que x tende vers l'infini de façon que l'on ait

$$x = \rho\lambda, \qquad \lambda = e^{i\omega},$$

ρ croissant indéfiniment par valeurs réelles positives et λ étant une quantité constante d'argument ω, et de module 1. Il est facile de ramener ce cas au précédent.

En effet l'équation (1) devient

$$(1^{bis}) \qquad \frac{P_n}{\lambda^n}\frac{d^n y}{d\rho^n} + \frac{P_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\frac{d^{n-1} y}{d\rho^{n-1}} + \ldots + \frac{P_1}{\lambda}\frac{dy}{d\rho} + P_0 y = 0,$$

où la nouvelle variable ρ croît indéfiniment par valeurs réelles positives.

L'équation (2) relative à la nouvelle variable et à la nouvelle équation (1^{bis}) s'écrit

$$(2^{bis}) \qquad A_n z^n + A_{n-1}\lambda z^{n-1} + \ldots + A_1\lambda^{n-1} z + A_0\lambda^n = 0,$$

et si les racines de l'équation (2) étaient

$$(5) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

celles de l'équation (2^{bis}) sont

$$\alpha_1\lambda, \quad \alpha_2\lambda, \quad \ldots, \quad \alpha_n\lambda.$$

Lorsque x croissait par valeurs positives, nous avions

$$(6) \qquad \frac{dy}{y\,dx} = \alpha_i,$$

α_i étant l'une des racines de (5). De même ici nous aurons

$$\frac{dy}{y\,d\rho} = \alpha_k\lambda,$$

α_k étant encore une des racines (5); d'où

$$(6^{bis}) \qquad \frac{dy}{y\,dx} = \alpha_k.$$

Mais il y a toutefois une différence entre le cas de l'équation (6) et celui de l'équation (6^{bis}). Lorsque x varie par valeurs positives, la limite α_i de $\frac{dy}{ydx}$ est, *en général*, et en laissant de côté les cas exceptionnels dont il a été question plus haut, celle des racines de l'équation (5) dont la partie réelle est la plus grande. Si au contraire $x = \rho\lambda$ la limite α_k de $\frac{dy}{ydx}$ sera, en *général*, celle des racines de l'équation (5) qui est telle que la partie réelle de $\alpha_k\lambda$ soit aussi grande que possible.

Nous avons supposé au début de ce paragraphe que l'équation (2) n'a pas de racines multiples et qu'elle n'a pas non plus deux racines ayant même partie réelle. Voyons cependant ce qui arriverait si cette équation avait deux racines ayant même partie réelle.

En premier lieu supposons que ces deux racines ne soient pas celles dont la partie réelle est la plus grande. En particulier, dans le cas du troisième ordre, où nous avons appelé les trois racines en question α, β, et γ, supposons que la partie réelle de α soit plus grande que celle de β et γ, la partie réelle de β étant égale à celle de γ. En se reportant au raisonnement qui précède, on verrait que y étant l'intégrale *générale* de l'équation (1), le rapport

$$u = \frac{dy}{y\,dx}$$

a encore pour limite α et que le raisonnement ne se trouve en défaut que dans les cas exceptionnels dont il a été question plus haut $\left(\text{quand la valeur initiale de H est plus grande que } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ et par conséquent pour certaines intégrales particulières de l'équation (1).

En second lieu, si l'équation (2) n'a pas de racines multiples, l'équation (2^{bis}) n'aura deux racines ayant même partie réelle que pour certaines valeurs particulières de λ et par conséquent la difficulté dont nous parlons ici ne se présentera que pour certaines valeurs *exceptionnelles* de l'argument ω de x.

Reste le cas où l'équation (2) a des racines multiples. Reprenons le cas du troisième ordre où les racines sont α, β et γ, et supposons $\alpha = \beta$. Si l'on voulait répéter le raisonnement que nous avons fait en supposant les trois racines distinctes, on poserait

$$\begin{aligned}
y &= \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z},\\
y' &= \alpha\,\mathrm{X} + \mathrm{Y}\left(\alpha + \frac{1}{x}\right) + \gamma\,\mathrm{Z},\\
y'' &= \alpha^2\mathrm{X} + \mathrm{Y}\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{x}\right) + \gamma^2\mathrm{Z},
\end{aligned}$$

et l'on reconnaîtrait que la limite de $\frac{y'}{y}$ est égale à α en général, et, pour une certaine intégrale particulière, à γ.

Nous pouvons d'ailleurs embrasser tous ces cas particuliers dans le résultat suivant qui ne comporte aucune exception et dont nous ferons usage plus tard.

Supposons que x tende vers l'infini par valeurs réelles positives. Soit a un nombre dont la partie réelle soit supérieure à celles de toutes les racines de l'équation (2). On aura

$$\lim y\, e^{-ax} = 0.$$

y étant une quelconque des intégrales de l'équation (1).

On peut alors trouver deux nombres b et c tels que la partie réelle de b soit plus petite que celle de a et plus grande que celle de c, et que la partie réelle de c soit supérieure à celles de toutes les racines de l'équation (2).

Cela posé, considérons l'équation différentielle d'ordre $n+1$

$$(1^{ter}) \qquad \Sigma c\, P_k \frac{d^k y}{dx^k} - \Sigma P_k \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = 0.$$

Cette équation admet toutes les intégrales de l'équation (1) et en outre l'intégrale e^{cx} de sorte que son intégrale générale s'écrit

$$\lambda\, e^{cx} + y_1,$$

λ étant une constante arbitraire et y_1 l'intégrale générale de l'équation (1).

L'équation (2) relative à l'équation (1^{ter}) s'écrit

$$(2^{ter}) \qquad (z - c)\Sigma A_k z^k = 0,$$

et admet les même racines que l'équation (2), plus la racine c dont la partie réelle est plus grande que celle de toutes les autres.

Il en résulte que l'expression $\frac{y'}{y}$ a pour limite c, lorsque y est l'intégrale générale de l'équation (1^{ter}).

Il y a exception toutefois pour certaines intégrales particulières de cette équation. Ces intégrales exceptionnelles ne sont autres d'ailleurs que les intégrales de l'équation (1) elle-même.

De là on peut conclure qu'à partir d'une certaine valeur x_0 de x on a

$$\text{partie réelle de } \frac{y'}{y} < b,$$

on déduit de là

$$|y| < |y_0\, e^{b(x-x_0)}|,$$

y_0 étant la valeur de y pour $x = x_0$, ou bien

$$|y\, e^{-ax}| < |y_0\, e^{-bx_0}|\, |e^{(b-a)x}|,$$

la partie réelle de $(b - a)$ étant négative, la limite du second membre est nulle, on a donc

$$\lim y\, e^{-ax} = 0.$$

Ce résultat ne paraît d'abord s'appliquer qu'aux intégrales qui sont telles que $\frac{y'}{y}$ tend vers c, et ne pas subsister pour les intégrales exceptionnelles de l'équation (1^{ter}), à savoir les intégrales de l'équation (1). Mais une pareille intégrale peut toujours être regardée comme la différence de deux intégrales non exceptionnelles. Le résultat subsiste donc pour une intégrale quelconque de l'équation (1). C. Q. F. D.

Si

$$x = \rho\lambda$$

et que ρ tende vers l'infini par valeurs réelles positives; si a est un nombre tel que la partie réelle de $a\lambda$ soit plus grande que la partie réelle d'une racine quelconque de l'équation (2) multipliée par λ, on a encore

$$\lim y\, e^{-ax} = 0.$$

Il est à remarquer que dans tout ce qui précède nous ne nous sommes nullement appuyés sur ce que les coefficients P de l'équation (1) sont des polynomes en x. Les résultats énoncés plus haut subsistent donc pourvu que les rapports

$$\frac{P_{n-1}}{P_n}, \quad \frac{P_{n-2}}{P_n}, \quad \ldots, \quad \frac{P_1}{P_n}, \quad \frac{P_0}{P_n}$$

tendent vers des valeurs finies et déterminées quand x croît indéfiniment.

Nous avons supposé d'autre part que les polynomes P étaient tous de même degré. Les résultats subsisteraient encore si un ou plusieurs des polynomes

$$P_{n-1}, \quad P_{n-2}, \quad \ldots, \quad P_1, \quad P_0$$

étaient de degré inférieur à p, P_n restant de degré p. Mais il n'en serait plus de même si le degré de P_n était inférieur à celui d'un quelconque des autres polynomes. Dans ce cas, l'équation (1) rentrerait dans un autre type d'équations linéaires que nous étudierons plus loin.

II. — Équations aux différences finies.

Avant de poursuivre les conséquences des résultats précédents, nous allons étendre ces résultats aux équations à différences finies de la forme suivante :

$$(1) \qquad P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0,$$

les coefficients P étant des polynomes d'ordre p par rapport au rang n de la fonction u_n. Il est aisé de voir l'analogie de cette équation avec les équations linéaires que nous avons envisagées dans le paragraphe précédent; car si l'on pose

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n, \qquad \Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n, \qquad \ldots,$$

l'équation (1) s'écrira

$$R_k \Delta^k u_n + R_{k-1} \Delta^{k-1} u_n + \ldots + R_1 \Delta u_n + R_0 u_n = 0,$$

les coefficients R étant des polynomes entiers en n.

Nous appellerons A_i le coefficient de n^p dans le polynome P_i et nous envisagerons l'équation

$$(2) \qquad A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Posons de plus

$$\frac{P_i}{P_k} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_k} = B_i.$$

Laissant d'abord de côté le cas exceptionnel où l'équation (2) aurait deux racines égales ou deux racines de même module, je vais démontrer le résultat suivant :

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une des racines de l'équation (2) et en général vers celle dont le module est le plus grand.

Supposons l'équation du troisième ordre pour fixer les idées, elle s'écrira

$$u_{n+3} + Q_2 u_{n+2} + Q_1 u_{n+1} + Q_0 u_n = 0.$$

Soient α, β, γ les trois racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant. Posons

$$\begin{aligned} u_n &= X_n + Y_n + Z_n, \\ u_{n+1} &= \alpha X_n + \beta Y_n + \gamma Z_n, \\ u_{n+2} &= \alpha^2 X_n + \beta^2 Y_n + \gamma^2 Z_n, \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1}, \\ u_{n+2} &= \alpha X_{n+1} + \beta Y_{n+1} + \gamma Z_{n+1}, \\ u_{n+3} &= \alpha^2 X_{n+1} + \beta^2 Y_{n+1} + \gamma^2 Z_{n+1}. \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} \alpha^3 + Q_2 \alpha^2 + Q_1 \alpha + Q_0 &= A(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), \\ \beta^3 + Q_2 \beta^2 + Q_1 \beta + Q_0 &= B(\beta - \alpha)(\beta - \gamma), \\ \gamma^3 + Q_2 \gamma^2 + Q_1 \gamma + Q_0 &= C(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

Il viendra

$$X_{n+1} = \alpha X_n - (A X_n + B Y_n + C Z_n),$$
$$Y_{n+1} = \beta Y_n - (A X_n + B Y_n + C Z_n),$$
$$Z_{n+1} = \gamma Z_n - (A X_n + B Y_n + C Z_n).$$

On tire de là

$$\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \frac{X_n}{Y_n} = \frac{\beta - \left(A \frac{X_n}{Y_n} + B + C \frac{Z_n}{Y_n}\right)}{\alpha - \left(A + B \frac{Y_n}{X_n} + C \frac{Z_n}{X_n}\right)},$$

avec des formules analogues pour

$$\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} \frac{X_n}{Z_n} \quad \text{et} \quad \frac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}} \frac{Y_n}{Z_n}.$$

Il résulte de là que l'on peut trouver un nombre ε tel que

$$\text{si} \quad \left|\frac{X_n}{Y_n}\right|, \quad \left|\frac{Y_n}{X_n}\right|, \quad \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon, \quad \text{on ait} \quad \left|\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \frac{X_n}{Y_n}\right| < 1$$
$$\text{si} \quad \left|\frac{X_n}{Z_n}\right|, \quad \left|\frac{Z_n}{X_n}\right|, \quad \left|\frac{X_n}{Y_n}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \quad \text{on ait} \quad \left|\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} \frac{X_n}{Z_n}\right| < 1;$$
$$\text{si} \quad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right|, \quad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|, \quad \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \varepsilon, \quad \text{on ait} \quad \left|\frac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}} \frac{Y_n}{Z_n}\right| < 1.$$

D'ailleurs quand n croît indéfiniment, A, B et C tendent vers zéro; il en est de même de ε.

Soit H la plus grande des deux quantités $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ et $\left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$. Je dis que H sera une fonction de n qui sera décroissante toutes les fois qu'elle sera comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$.

En effet deux cas peuvent se présenter :

1°
$$H = \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \left|\frac{Z_n}{X_n}\right|,$$
$$\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| = \frac{1}{H} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \varepsilon; \qquad \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| > \left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > 1 > .$$

Donc $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ et par conséquent H est décroissant.

2°
$$H = \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \left|\frac{Y_n}{X_n}\right|,$$
$$\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Donc $\left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$ et par conséquent H est décroissant.

Il résulte de là que H tend vers zéro comme nous l'avons fait voir dans le paragraphe précédent, à moins qu'il ne reste constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si H est constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, je dis que $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ est une fonction constamment décroissante si elle est comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On a alors, en effet :

1° ou bien

$$H = \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| = \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

2° ou bien

$$H = \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| = \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right|\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Dans l'un et l'autre cas la fonction $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ est décroissante. On en conclut, en répétant le raisonnement que nous avons déjà fait bien des fois, que $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ tend vers zéro en général et exceptionnellement vers l'infini.

Il y a donc trois cas possibles :

Premier cas, *général :*

$$\lim H = 0, \qquad \lim\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| = \lim\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| = 0, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Deuxième cas, *exceptionnel :*

$$\lim H = \infty, \qquad \lim\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| = \lim\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| = 0, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta.$$

Troisième cas, plus exceptionnel encore :

$$\lim H = \lim\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| = \infty, \qquad \lim\left|\frac{X_n}{Z_n}\right| = \lim\left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| = 0, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma.$$

Le même raisonnement s'applique sans difficulté au cas des équations d'ordre supérieur au troisième. Je me bornerai à indiquer ici la marche du raisonnement dans le cas du quatrième ordre.

Soient α, β, γ, δ les racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant. Nous poserons

$$u_{n+i} = \alpha^i X_n + \beta^i Y_n + \gamma^i Z_n + \delta^i T_n \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Nous démontrerons ensuite qu'il existe un nombre ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ et jouissant des propriétés suivantes :

1° La fonction $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ ou $\left|\frac{Y}{X}\right|$, en supprimant l'indice n pour abréger, est décroissante toutes les fois que $\left|\frac{Y}{X}\right|$, $\left|\frac{X}{Y}\right|$, $\left|\frac{X}{Z}\right|$, $\left|\frac{X}{T}\right|$, $\left|\frac{Y}{Z}\right|$, $\left|\frac{Y}{T}\right|$ sont plus grands que ε.

2° Il en est de même de $\left|\frac{Z}{X}\right|$ toutes les fois que $\left|\frac{Z}{X}\right|$, $\left|\frac{X}{Z}\right|$, $\left|\frac{X}{Y}\right|$, $\left|\frac{X}{T}\right|$, $\left|\frac{Z}{Y}\right|$, $\left|\frac{Z}{T}\right|$ sont plus grands que ε, et ainsi de suite en considérant successivement les fonctions $\left|\frac{T}{X}\right|$, $\left|\frac{Z}{Y}\right|$, $\left|\frac{T}{Y}\right|$, $\left|\frac{T}{Z}\right|$, qui sont décroissantes à des conditions analogues, faciles à former par des permutations des lettres.

Cela posé, soient H la plus grande des quantités

$$\left|\frac{Y}{X}\right|,\quad \left|\frac{Z}{X}\right|,\quad \left|\frac{T}{X}\right|$$

et H_1 la plus grande des quantités

$$\left|\frac{Z}{Y}\right|,\quad \left|\frac{T}{Y}\right|.$$

On démontre que H est décroissant quand il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général H tend vers zéro, et par conséquent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers α.

Il y a exception quand H est toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, mais alors on démontre que H_1 est toujours décroissant s'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général H_1 tend vers zéro et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers β.

Il y a encore exception quand H_1 est toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, mais alors on démontre que $\left|\frac{T}{Z}\right|$ est toujours décroissant s'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général $\left|\frac{T}{Z}\right|$ tend vers zéro, et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers γ.

Enfin, il reste un dernier cas plus exceptionnel encore que les deux précédents, et où $\left|\frac{T}{Z}\right|$ reste toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers δ.

Il me reste à examiner les cas où l'équation (2) a deux racines égales, ou deux racines de même module.

Supposons d'abord trois racines α, β, γ dont deux égales, par exemple,

$$\alpha = \beta, \qquad |\alpha| = |\beta| > |\gamma|.$$

Nous poserons

$$
\begin{aligned}
u &= X_n + Y_n + Z_n,\\
u_{n+1} &= \alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)X_n + \alpha\, Y_n + \gamma\, Z_n,\\
u_{n+2} &= \alpha^2\left(1+\frac{2}{n}\right)X_n + \alpha^2 Y_n + \gamma^2 Z_n,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1},\\
u_{n+2} &= \alpha\left(1+\frac{1}{n+1}\right)X_{n+1} + \alpha\, Y_{n+1} + \gamma Z_{n+1},\\
u_{n+3} &= \alpha^2\left(1+\frac{2}{n+1}\right)X_{n+1} + \alpha^2 Y_{n+1} + \gamma^2 Z_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Posons maintenant

$$
\begin{aligned}
\alpha^3 + Q_2\alpha^2 + Q_1\alpha + Q_0 &= A,\\
3\alpha^2 + 2Q_2\alpha + Q_1 &= B,\\
\gamma^3 + Q_2\gamma^2 + Q_1\gamma + Q_0 &= C,
\end{aligned}
$$

il vient

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha X_n + A',\\
Y_{n+1} &= \alpha Y_n + B',\\
Z_{n+1} &= \gamma Z_n + C',
\end{aligned}
$$

A', B' et C' étant des fonctions linéaires en A, B et C, ayant des coefficients dépendant de X_n, Y_n, Z_n. A, B et C tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, et l'on verrait comme précédemment qu'il en est de même, en général, de A', B' et C'. Il en résulte que, *en général*,

$$\lim\frac{Y_n}{X_n} = \lim\frac{Z_n}{Y_n} = 0, \qquad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Voici maintenant une propriété qui subsiste alors même que l'équation (2) admet des racines de même module et qui, par conséquent, ne souffre aucune exception.

Soit a une quantité de module plus grand que toutes les racines de l'équation (2); l'expression $\frac{u_n}{a^n}$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

La démonstration serait la même que pour la propriété correspondante des équations différentielles démontrée à la fin du paragraphe précédent.

III. — Transformation de Laplace.

Revenons maintenant aux équations différentielles. Nous avons vu dans le paragraphe I que si l'on envisage l'intégrale générale y de l'équation

$$\Sigma P_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{1}$$

étudiée dans ce paragraphe, la dérivée logarithmique

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

tend vers une certaine limite α, mais qu'on n'en pouvait pas conclure *immédiatement* que $ye^{-\alpha x}$ tend vers une limite finie et déterminée. C'est pourtant ce qui a lieu *en général;* mais pour le démontrer, nous serons forcés d'employer la transformation de Laplace.

Voici en quoi consiste cette transformation. On pose

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz,$$

v étant une fonction de z qu'il reste à déterminer, et l'intégrale étant prise le long d'un chemin imaginaire convenablement choisi. L'intégration par parties donne

$$xy = \int vx\, e^{zx}\, dz = [v\, e^{zx}] - \int \frac{dv}{dz} e^{zx}\, dz.$$

Le chemin d'intégration devra être choisi de telle façon que le terme tout connu de cette intégration par parties soit nul, sans cependant que l'intégrale y le soit elle-même.

On aura ensuite

$$x^2 y = -\int \frac{dv}{dz} x\, e^{zx}\, dz = -\left[\frac{dv}{dz} e^{zx}\right] + \int \frac{d^2 v}{dz^2} e^{zx}\, dz,$$

ou, si le terme tout connu est supposé nul,

$$x^2 y = \int \frac{d^2 v}{dz^2} e^{zx}\, dz.$$

Et ainsi de suite ; on aura

$$x^i y = (-1)^i \int \frac{d^i v}{dz^i} e^{zx}\, dz \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

pourvu que le chemin d'intégration ait été choisi de telle sorte que les termes tout connus des intégrations successives par parties s'annulent, c'est-à-dire que :

$$\left[\frac{d^i v}{dz^i} e^{zx}\right] = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

De même, on aura

$$x^i \frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^i \int \frac{d^i (v z^k)}{dz^i} e^{zx}\, dz,$$

pourvu que les termes tout connus

$$\left[\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx}\right]$$

soient nuls aux deux limites d'intégration.

Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme

$$\Sigma C_{ik} x^i \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, p \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

l'équation transformée s'écrira

$$\Sigma C_{ik} (-1)^i \frac{d^i (v z^k)}{dz^i} = 0. \tag{3}$$

Pour trouver les points singuliers de cette équation (3), il suffit d'égaler à zéro le coefficient de $\frac{d^p v}{dz^p}$. On trouve ainsi l'équation

$$\Sigma C_{pk} z^k = 0,$$

ou, en reprenant les notations du paragraphe I,

$$\Sigma A_k z^k = 0, \tag{2}$$

ce qui est l'équation (2) du dit paragraphe.

Il faudrait ajouter à ces points singuliers le point ∞ où les intégrales sont *irrégulières* pour l'équation (3) comme pour l'équation (1). Si l'équation (2) n'a pas de racine multiple, ce que nous supposerons d'abord, le coefficient de $\frac{d^p v}{dz^p}$ ne s'annule que du premier ordre en chacun des points singuliers, d'où il résulte que pour chacun de ces points l'équation déterminante a $(p-1)$ racines respectivement égales à $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ième}}$ étant quelconque. Ce sont donc des points singuliers *réguliers*.

Il faut maintenant choisir le chemin d'intégration de façon à satisfaire aux conditions que nous nous sommes imposées. Nous devons choisir les deux limites de ce chemin de façon qu'en chacune d'elles on ait

$$\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, p-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Si l'une de ces limites est à distance finie, on devra avoir

$$\frac{d^i v}{dz^i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

sans que l'intégrale v soit identiquement nulle. *Cette limite devra donc être un point singulier.* Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante. Il faut encore qu'en ce point singulier, où comme nous l'avons vu, $(p-1)$ des racines de l'équation déterminante ont pour valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ième}}$ racine de cette équation soit plus grande que $(p-1)$ et de plus que l'intégrale v soit convenablement choisie.

Supposons maintenant une limite à distance infinie. On devra avoir

$$\lim \frac{d^i v}{dz^i} e^{zx} = 0,$$

et d'abord

$$\lim v e^{zx} = 0.$$

C'est le moment de recourir à la proposition établie à la fin du paragraphe I. Formons l'équation qui joue par rapport à l'équation (3) le même rôle que l'équation (2) par rapport à l'équation (1). Elle s'écrira

$$\Sigma C_{in}(-1)^i x^i = 0, \tag{4}$$

en appelant x l'indéterminée qui entre dans cette équation.

L'équation qui donne les points singuliers de l'équation (1) s'écrit, d'autre part,

$$\Sigma C_{in} x^i = 0.$$

Si donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sont les points singuliers distincts de l'équation (1), les q racines distinctes de l'équation (4) sont $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_q$. D'où, en appliquant les principes du paragraphe I, on verra que

$$\lim v e^{zx} = 0,$$

si z est réel positif, et si en désignant par $R(u)$ la partie réelle d'une quantité imaginaire u, on a

$$R(x) < R(\alpha_1), \qquad R(x) < R(\alpha_2), \qquad \ldots, \qquad R(x) < R(\alpha_q).$$

Si maintenant z est imaginaire, et si l'on a

$$\arg z = \lambda,$$

$$R(x e^{-i\lambda}) < R(\alpha_1 e^{-i\lambda}), \qquad R(x e^{-i\lambda}) < R(\alpha_2 e^{-i\lambda}), \qquad \ldots, \qquad R(x e^{-i\lambda}) < R(\alpha_q e^{-i\lambda}),$$

le produit ve^{zx} tendra vers zéro quand z croîtra indéfiniment avec l'argument λ. Il est clair d'ailleurs qu'il en sera de même des diverses expressions

$$\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx}.$$

Les hypothèses (5) sont donc suffisantes pour que le chemin d'intégration satisfasse aux conditions que nous nous sommes imposées.

On peut d'ailleurs remarquer que, si le point x est extérieur au polygone convexe qui, ayant pour sommets certains des points a, laisse tous les autres à son intérieur, on pourra toujours trouver une valeur de λ satisfaisant aux inégalités (5).

Supposons donc le point x extérieur à ce polygone que j'appellerai P. Voici quel chemin d'intégration nous ferons suivre au point z. Nous partirons de l'infini avec un argument satisfaisant aux inégalités (5), et après avoir décrit un certain chemin, nous reviendrons à l'infini, soit avec le même argument, soit avec un autre argument satisfaisant également à ces mêmes inégalités. Il faudra naturellement que le chemin ainsi décrit enveloppe un certain nombre de points singuliers [c'est-à-dire de racines de l'équation (2)]; car sans cela, l'intégrale

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz$$

serait identiquement nulle.

Nous pourrons supposer que ce chemin enveloppe *un seul* point singulier. En effet, un contour enveloppant, par exemple, les points singuliers a_1 et a_2 peut toujours se décomposer en deux autres, enveloppant, le premier seulement le point a_1, et le second seulement le point a_2. Donc les intégrales qu'on obtiendrait par la considération des contours enveloppant plusieurs points singuliers ne seraient que des combinaisons linéaires de celles que nous allons considérer et qui sont engendrées par des contours enveloppant un seul point singulier.

Soit a le point singulier enveloppé que nous supposerons d'abord être une racine *simple* de l'équation (2). Son équation déterminante, qui est de degré p, a, comme nous l'avons vu, $(p-1)$ racines égales à $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ième}}$ étant égale à μ et différente de $(p-1)$.

Il résulte de là que le point *a n'est pas un point singulier* pour $p-1$ intégrales de l'équation (3) *linéairement indépendantes* et que la $p^{\text{ième}}$ intégrale s'écrit

$$v_p = (z-a)^{\mu}\,\Phi(z),$$

$\Phi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a, l'intégrale générale s'écrit donc

$$v = \mathrm{A}(z-a)^{\mu}\Phi(z) + \psi(z) = \mathrm{A}\,v_p + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a. On a alors

$$\int \psi(z)\, e^{zx}\, dz = 0,$$

d'où

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz = \mathrm{A} \int v_p\, e^{zx}\, dz.$$

Ainsi, si l'on fait abstraction du facteur constant A, l'intégrale y ne dépend pas du choix de l'intégrale v.

Qu'arrive-t-il maintenant si a est une racine double de l'équation (2)?

Alors l'intégrale générale s'écrira

$$v = \mathrm{A} v_p + \mathrm{B} v_{p-1} + \psi(z),$$

A et B étant deux constantes arbitraires, $\Phi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a, et v_p et v_{p-1} étant deux intégrales particulières. Il vient alors

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz = \mathrm{A} \int v_p\, e^{zx}\, dz + \mathrm{B} \int v_{p-1}\, e^{zx}\, dz.$$

Ainsi, quelle que soit l'intégrale v choisie, on ne pourra jamais obtenir pour y plus de deux intégrales linéairement indépendantes.

De même si a est une racine multiple d'ordre plus élevé.

Ainsi, à chaque racine simple de l'équation (2), correspond une intégrale de l'équation (1), à chaque racine multiple d'ordre m, correspondent m intégrales de cette même équation. On obtient donc en tout de la sorte n intégrales de l'équation (1), et comme cette équation est d'ordre n, on en a l'intégrale générale. Il resterait, il est vrai, à démontrer que ces n intégrales sont linéairement indépendantes, mais c'est ce qui ressortira de diverses propositions que nous établirons plus loin.

Nous n'avons examiné jusqu'ici que le cas où les deux limites d'intégration sont infinies; il est aisé de prévoir, d'après ce qui précède, que les intégrales obtenues, en supposant qu'une ou deux des limites soient finies, ne seront que des combinaisons linéaires de celles que nous connaissons déjà.

Considérons de nouveau un point a qui soit une racine simple de (2) et soient

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-2, \quad \mu,$$

les racines de l'équation déterminante correspondante. Soit

$$v_p = (z-a)^{\mu}\, \Phi(z),$$

une intégrale de (3), où $\Phi(z)$ est holomorphe dans le domaine du point a. Soit

$$y_1 = \int v_p \, e^{zx} \, dz$$

l'intégrale correspondante de (1), la quadrature s'effectuant le long du contour défini plus haut, qui enveloppe le point singulier $z = a$.

Envisageons maintenant l'intégrale

$$y_2 = \int_a^\infty v_p \, e^{zx} \, dz.$$

Nous supposerons, ce qui est toujours possible, que le chemin d'intégration reste constamment intérieur au contour le long duquel a été prise l'intégrale y. Si

$$\mu > p - 1,$$

l'intégrale y_2 sera finie et sera une des intégrales de l'équation (1), d'après ce qu'on a vu plus haut. Mais on voit aisément qu'on aura

$$y_1 = y_2(1 - e^{2i\pi\mu}).$$

Les deux intégrales y_1 et y_2 ne diffèrent donc que par un facteur constant. Il résulte en même temps de là que l'intégrale y_2 est une intégrale de l'équation (1) toutes les fois qu'elle est finie, c'est-à-dire toutes les fois que

$$\mu > -1.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de l'équation (2) que nous supposerons toutes simples. Soient

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-2, \quad \mu_i$$

les racines de l'équation déterminante relative au point singulier a_i. Il existera toujours une intégrale de la forme

$$V_i = (z - a_i)^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

$\Phi_i(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a_i, et l'on en conclura l'existence d'une intégrale de l'équation (1),

$$Y_i = \int_{a_i}^\infty V_i \, e^{zx} \, dz,$$

pourvu que

$$\mu_i > -1.$$

Supposons donc d'abord que tous les μ sont plus grands que -1, de façon que les p intégrales Y_i existent, ou mieux encore, supposons d'abord que tous les μ sont plus grands que $(p-1)$.

Joignons un point quelconque b à chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par des chemins l_1, l_2, ..., l_n. Soit c_{ik} la valeur que prend au point b la dérivée $k^{\text{ième}}$ de V_i quand la variable va du point a_i au point b par le chemin l_i.

Posons maintenant

$$T_i = \int_{a_i}^{b} V_i\, e^{zx}\, dz,$$

l'intégrale étant prise bien entendu le long de l_i.

Il viendra, en appliquant à l'intégrale T_i la méthode d'intégration par parties,

$$(6)\quad x^m T_i = x^{m-1} e^{bx} c_{i0} - x^{m-2} e^{bx} c_{i1} + x^{m-3} e^{bx} c_{i2} \pm \ldots \pm e^{bx} c_{i,m-1} \mp \int \frac{d^m V_i}{dz^m} e^{zx}\, dz.$$

Soit maintenant $d_{i.k.q}$ la valeur que prend au point b la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $V_i z_q$; il viendra de même

$$(7)\qquad x^m \frac{d^q T_i}{dz^q} = x^{m-1} e^{bx} d_{i.0.q} - x^{m-2} e^{bx} d_{i.1.q} + \ldots \mp \int \frac{d^m (V_i z^q)}{dz^m} e^{zx}\, dz.$$

D'ailleurs, il est clair que les $d_{i.k.q}$ s'expriment très simplement à l'aide de b et des $c_{i,k}$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on substitue T_i à la place de y dans l'équation (1), le résultat de cette substitution s'écrira

$$(8)\qquad \Delta(T_i) = g_{i.p-1} x^{p-1} e^{bx} + g_{i.p-2} x^{p-2} e^{bx} + \ldots + g_{i.0} e^{bx},$$

les coefficients $g_{i.k}$ étant faciles à calculer en fonction des $c_{i.k}$. Si n est plus grand que p, on pourra trouver n nombres

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_n$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(9)\qquad \sum_1^n {}_i\, h_i g_{i,k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Le nombre des solutions linéairement indépendantes des équations (9) sera donc de $(n-p)$.

On aura alors

$$\Delta(\Sigma h_i T_i) = 0,$$

ce qui veut dire que $\Sigma h_i T_i$ est une intégrale de l'équation (1). C'est une intégrale prise le long d'un chemin complexe, mais restant toujours à distance finie.

Il existe toujours $(n-p)$ pareilles intégrales linéairement indépendantes. Ces intégrales diffèrent essentiellement de celles dont une limite est infinie. Ces dernières ne sont valables que si le point x est extérieur au polygone P, d'après ce que nous avons vu plus haut; au contraire, les intégrales telles que $\Sigma h_i T_i$, c'est-à-dire les intégrales prises le long d'un contour à distance finie, sont valables *quel que soit* x. De plus, elles sont holomorphes dans toute l'étendue du plan.

Posons

$$U_i = \int_b^\infty V_i e^{zx} dz,$$

d'où

$$Y_i = T_i + U_i.$$

Les équations (9) peuvent d'ailleurs se remplacer par les équations plus simples qui suivent

$$\Sigma h_i c_{ik} = 0.$$

Il suffit pour s'en convaincre de rechercher quelle est l'expression des coefficients g_{ik} en fonctions des c_{ik}. Mais des équations ainsi transformées, on déduit aisément l'identité suivante :

$$\Sigma h_i V_i = 0,$$

qui subsiste quel que soit z. On a, par conséquent,

$$\Sigma h_i U_i = 0, \qquad \Sigma h_i T_i = \Sigma h_i Y_i.$$

Ces relations montrent d'abord que la nouvelle intégrale $\Sigma h_i T_i$ n'est pas linéairement indépendante des intégrales déjà connues Y_i; elles font voir ensuite que, lors même que tous les μ ne sont pas plus grands que $(p-1)$, l'expression $\Sigma h_i T_i$ reste une intégrale de l'équation (1) pourvu que les T_i et les Y_i soient finis, c'est-à-dire pourvu que tous les μ soient plus grands que -1.

Qu'arrive-t-il enfin si tous les μ ne sont pas plus grands que -1 ? La difficulté est aisée à tourner. Décrivons du point b, comme point initial, un contour fermé revenant au point b après avoir enveloppé le point singulier a_i. Opérons de même pour chacun des points singuliers. Nous aurons ainsi n contours fermés l_1 l_2, ..., l_n. Appelons T_i l'intégrale

$$\int V_i e^{zx} dz,$$

prise le long du contour l_i, ou ce qui revient au même, l'intégrale

$$\int v\, e^{zx}\, dz$$

le long du même contour, v désignant une intégrale *quelconque* de l'équation (3). Appelons c_{ik} la valeur dont s'accroît la dérivée $k^{\text{ième}}$ de V_i quand on décrit le contour l_i, en parlant du point b comme valeur initiale et revenant au point b comme valeur finale; appelons de même $d_{i.k.q}$ la valeur dont s'accroît la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $V_i z^q$ dans les mêmes circonstances.

Si l'on emploie ces notations, les équations (6), (7) et (8) subsisteront. Par conséquent, si l'on a n nombres h_i satisfaisant aux équations

$$\Sigma h_i c_{i,k} = 0, \tag{10}$$

l'expression $\Sigma h_i T_i$ sera une intégrale de l'équation (1). Cette expression jouit d'ailleurs de la propriété remarquable d'être holomorphe dans tout le plan.

Or, les équations (10) admettent $(n-p)$ solutions linéairement indépendantes.

Donc, *si $n > p$, l'équation* (1) *aura* $(n-p)$ *intégrales holomorphes dans tout le plan.*

Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer directement.

Je n'insisterai pas davantage sur cette transformation de Laplace qui permet, comme on le sait, d'intégrer l'équation (1) lorsque $p = 1$.

IV. — Étude approfondie des intégrales irrégulières.

Nous allons maintenant nous servir des expressions précédentes des intégrales de l'équation (1) pour étudier la façon dont elles se comportent quand x croît indéfiniment, d'une manière plus précise et plus approfondie que nous n'avons pu le faire dans le paragraphe I.

Démontrons d'abord le résultat suivant. L'intégrale

$$J = \int v e^{zx}\, dz$$

(si x est positif et très grand, si $|v|$ reste constamment inférieur à une certaine quantité M, et si le chemin d'intégration reste constamment à gauche de l'axe des parties imaginaires) tendra vers zéro quand x croîtra indéfiniment.

Soient, en effet, L la longueur totale du chemin d'intégration, et $-\xi$ la plus grande valeur de la partie réelle de z, de telle façon que le long du chemin d'intégration on ait

$$R(z) \leqq -\xi.$$

Il vient alors

$$\int |dz| = L, \qquad |e^{zx}| \leqq e^{-\xi x},$$

d'où enfin

$$|J| \leqq ML\, e^{-\xi x},$$

et

$$\lim J = 0 \qquad \text{pour } x = \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons maintenant au cas où le chemin d'intégration restant toujours à gauche de la droite

$$R(z) = -\xi$$

s'étend à l'infini par l'une de ses extrémités. Nous supposerons de plus que, quand z croît indéfiniment en suivant le chemin d'intégration, on peut trouver un nombre λ tel que

$$\lim v e^{\lambda z} = 0.$$

Cela est toujours possible comme le prouve le paragraphe I, avec les fonctions v que nous avons à considérer.

Faisons encore une hypothèse sur le chemin d'intégration. Nous supposerons qu'il se compose d'un certain arc de courbe situé à distance finie, suivi d'une portion de ligne droite s'étendant à l'infini; pour tous les cas que nous avons déjà considérés ou que nous aurons à considérer dans la suite, rien ne s'oppose à cette hypothèse. Dans ces conditions, on peut trouver un nombre μ tel que l'intégrale

$$\int |e^{\mu z}\, dz|$$

soit égale à une quantité finie L. On pourra également trouver un nombre M, tel que l'on ait constamment

$$|v\, e^{\lambda z}| < M.$$

Nous pourrons toujours supposer λ et μ réels. On aura alors

$$J = \int v\, e^{\lambda z}.\, e^{z(x-\lambda-\mu)}.\, e^{\mu z}\, dz,$$

d'où

$$|J| < LM\, e^{-\xi(x-\lambda-\mu)},$$

quand x croît indéfiniment; on a donc

$$\lim J = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même on verrait aisément que x^mJ tend encore vers zéro, quelque grand que soit l'exposant m.

Nous allons maintenant étudier l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^a v\, e^{zx}\, dz.$$

La limite supérieure d'intégration peut être une quantité finie a, ou bien être infinie, mais le chemin d'intégration restera toujours à gauche de l'axe des parties imaginaires. La fonction v sera assujettie aux mêmes conditions que plus haut; je supposerai de plus que dans le domaine du point zéro, la fonction v peut se développer en série de la forme suivante :

$$(1) \qquad A_0 z^\alpha + A_1 z^{\alpha+1} + A_2 z^{\alpha+2} + \ldots,$$

α étant quelconque.

Je dis que dans ces conditions,

$$x^{\alpha+1} J \quad \text{tend vers} \quad -\Gamma(\alpha+1) A_0$$

quand x croît indéfiniment.

En effet, nous pouvons toujours supposer

$$|A_n| < \mu\rho^n,$$

μ et ρ étant deux quantités convenablement choisies de telle façon que le rayon du cercle de convergence de la série (1) soit égal à $\frac{1}{\rho}$.

Nous pourrons décomposer le chemin d'intégration en deux parties : la première, intérieure à un cercle décrit du point zéro comme centre avec r pour rayon ($r\rho < 1$); la deuxième, extérieure à ce cercle. Nous aurons alors

$$J = K + H,$$

K et H étant les deux parties de l'intégrale correspondant à ces deux parties du chemin d'intégration. D'après ce qui précède, il vient

$$\lim x^{\alpha+1} H = 0.$$

Il reste à chercher la limite de $x^{\alpha+1}$K.

Nous pouvons écrire

$$v = A_0 z^\alpha + A_1 z^{\alpha+1} + \ldots + A_m z^{\alpha+m} + R_m,$$

R_m étant le reste de la série (1). Il vient alors

$$(2) \quad K = A_0 \int z^\alpha e^{zx}\, dz + A_1 \int z^{\alpha+1} e^{zx}\, dz + \ldots + A_m \int z^{\alpha+m} e^{zx}\, dz + \int R_m e^{zx}\, dz,$$

les intégrales étant prises le long de la première partie du chemin d'intégration. On aura

$$|R_m| < \frac{\mu(r\rho)^{m+1} r^\alpha}{1 - r\rho} |e^{zx}| < 1.$$

Si donc l est la longueur de la première partie du chemin d'intégration, il viendra

$$\left|\int R_m e^{zx} dz\right| < \frac{l\mu(r\rho)^{m+1} r^\alpha}{1 - r\rho}.$$

On peut toujours prendre m assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on voudra. Mais on peut aller plus loin encore. Supposons, ce qui est toujours possible, que la première partie du chemin d'intégration soit rectiligne, et pour fixer les idées davantage encore, qu'elle se réduit au segment de droite $0, -r$. Il viendra alors

$$\left|x^{\alpha+1}\int_0^{-r} z^\alpha e^{zx} dz\right| < \left|x^{\alpha+1}\int_0^{-\infty} z^\alpha e^{zx} dz\right| = \Gamma(\alpha+1),$$

ou

$$x^{\alpha+1}\int_0^{-r} |z^\alpha e^{zx} dz| < \Gamma(\alpha+1),$$

ou enfin

$$\left|x^{\alpha+1}\int R_m e^{zx} dz\right| < \frac{\Gamma(\alpha+1)\mu(r\rho)^{m+1}}{1 - r\rho}.$$

Comme $r\rho$ est plus petit que 1, on pourra prendre m assez grand, quel que soit x, pour que le second membre de cette inégalité soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{r}$, r étant indépendant de x.

Le nombre m est désormais déterminé, et nous allons faire varier x. Le $q^{\text{ième}}$ terme du second membre de l'expression (2) s'écrit

$$T_q = A_q \int_0^{-r} z^{\alpha+q} e^{zx} dz.$$

Cherchons la limite de $T_q x^{\alpha+1}$; pour cela posons

$$U_q = A_q \int_{-r}^{+\infty} z^{\alpha+q} e^{zx} dz;$$

on aura

$$\lim x^{\alpha+1} U_q = 0,$$

d'où

$$\lim x^{\alpha+1} T_q = \lim x^{\alpha+1} A_1 \int_0^{-\infty} z^{\alpha+q} e^{zx} dz = \lim \frac{-\Gamma(\alpha+q+1) A_q}{x^q}.$$

Cette limite est égale à zéro si q est positif et à $-\Gamma(\alpha+1) A_0$ si q est nul. Donc si l'on multiplie par $x^{\alpha+1}$ chacun des m premiers termes du second membre de (2), le premier des produits ainsi obtenus aura pour limite $-A_0\Gamma(\alpha+1)$, et les autres zéro. Or, nous pourrons toujours prendre x assez grand pour que chacun de ces produits diffère de sa limite d'une quantité moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2m}.$$

On aura alors

$$|x^{\alpha+1}K + A_0\Gamma(\alpha+1)| < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim x^{\alpha+1}J = \lim x^{\alpha+1}K = -A_0\Gamma(\alpha+1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous allons enfin considérer l'intégrale suivante :

$$J = \int v\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long d'un contour enveloppant le point zéro.

Je supposerai qu'à l'intérieur de ce contour la fonction v soit partout holomorphe excepté au point zéro, et que dans le voisinage de ce point cette même fonction puisse se mettre sous la forme (1). On peut remarquer que, dans cette expression (1), il n'est plus nécessaire de supposer $\alpha > -1$, comme nous avions dû le faire dans l'exemple précédent.

Nous allons faire croître x indéfiniment par valeurs réelles positives. Nous pouvons donc supposer que le contour d'intégration est formé comme il suit :

1° Une portion de ligne droite AB venant de l'infini et se terminant à un certain point B.

2° Un arc de courbe quelconque BC allant du point B au point $C = -r$, r étant une quantité positive très petite. Ces deux premières portions du contour seront tout entières à gauche de l'axe des parties imaginaires.

3° Un cercle décrit du point zéro comme centre avec r pour rayon, commençant au point C pour finir au point C.

4° et 5° L'arc CB et la droite BA parcourus en sens inverse.

Nous poserons alors

$$J = H + K + H',$$

H se rapportant à la portion ABC du contour, H' à la portion CBA, et K au petit cercle de rayon r.

Il vient alors, d'après ce qui précède,

$$\lim x^{\alpha+1}J = \lim x^{\alpha+1}K.$$

On a, d'autre part,

$$x^{\alpha+1}\mathrm{K} = \mathrm{A}_0 x^{\alpha+1}\int z^\alpha e^{zx}\,dz + \ldots + \mathrm{A}_m x^{\alpha+1}\int z^{\alpha+m} e^{zx}\,dz + \int \mathrm{R}_m x^{\alpha+1} e^{zx}\,dz.$$

On peut toujours supposer que m est assez grand pour que $\alpha + m$ soit positif. Dans ce cas l'intégrale

$$\int \mathrm{R}_m x^{\alpha+1} e^{zx}\,dz,$$

prise le long du cercle de rayon r, est égale à

$$(1 - e^{2i\pi\alpha})\int_0^{-r} \mathrm{R}_m x^{\alpha+1} e^{zx}\,dz.$$

Elle est donc plus petite en valeur absolue que

$$|1 - e^{2i\pi\alpha}|\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\mu(r\rho)^{m+1}}{1 - r\rho},$$

et elle tend uniformément vers zéro quand m croît indéfiniment, et cela quel que soit x.

De même on a

$$\lim x^{\alpha+1}\int z^{\alpha+q} e^{zx}\,dz = 0 \qquad (q > 0),$$

$$\lim x^{\alpha+1}\int z^{\alpha} e^{zx}\,dz = -(1 - e^{2i\pi\alpha})\,\Gamma(\alpha+1).$$

On déduit de là, par le même raisonnement que plus haut,

$$\lim x^{\alpha+1}\mathrm{J} = \lim x^{\alpha+1}\mathrm{K} = (e^{2i\pi\alpha} - 1)\,\mathrm{A}_0\,\Gamma(\alpha+1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le second membre prend la forme illusoire $0 \times \infty$ lorsque α est entier négatif. Mais dans ce cas il est aisé de voir que la fonction sous le signe $\int$ est méromorphe à l'intérieur du contour d'intégration. On a donc

$$\mathrm{J} = 2i\pi\left[\mathrm{A}_0\frac{x^{-\alpha-1}}{(-\alpha-1)!} + \mathrm{A}_1\frac{x^{-\alpha-2}}{(-\alpha-2)!} + \ldots + \mathrm{A}_{-\alpha-2}\,x + \mathrm{A}_{-\alpha-1}\right].$$

Pour passer au cas où le point singulier enveloppé par le contour d'intégration n'est pas zéro, mais un point quelconque a, il suffit de changer z en $z + a$. Pour passer au cas où x croît indéfiniment, non plus par valeurs réelles positives, mais avec l'argument λ, il suffit de changer x en $xe^{i\lambda}$ en même temps que z en $ze^{-i\lambda}$. Les résultats se déduisent immédiatement de ceux qui ont été énoncés plus haut.

Il est aisé de voir comment ce qui précède peut s'appliquer aux intégrales de l'équation (1). Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

les n racines de l'équation déterminante relative au point singulier a_i et v_i l'intégrale qui peut se mettre sous la forme

$$(z - a_i)^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

Φ_i étant holomorphe dans le voisinage du point a_i.

Nous allons faire tendre x vers ∞ avec l'argument λ. Soit maintenant l_i un chemin d'intégration dont les deux limites sont rejetées à l'infini et enveloppant le point singulier a_i. Nous supposerons que quand z tend vers l'infini le long de ce contour, son argument tend vers une limite λ' telle que

$$\frac{\pi}{2} < \lambda + \lambda' < \frac{3\pi}{2},$$

par exemple vers $\pi - \lambda$.

Soit enfin

$$y_i = \int v_i e^{zx} dz,$$

l'intégrale étant prise le long du chemin l_i.

Pour achever de préciser le contour l_i, nous le formerons : 1° de la droite $a_i + Re^{i(\pi-\lambda)}$, $a_i + \varepsilon e^{i(\pi-\lambda)}$, R et ε étant des quantités, la première infiniment grande, la seconde infiniment petite ; 2° d'un cercle complet décrit du point a_i comme centre avec ε pour rayon ; 3° de la droite $a_i + \varepsilon e^{i(\pi-\lambda)}$, $a_i + Re^{i(\pi-\alpha)}$ parcourue en sens contraire. Ce contour pourra d'ailleurs être remplacé par tout autre contour équivalent.

Dans ces conditions, lorsque x croîtra indéfiniment avec l'argument λ, l'intégrale y_i se comportera comme

$$e^{a_i x} x^{-\mu_i - 1},$$

c'est-à-dire que le rapport

$$y_i e^{-a_i x} x^{\mu_i + 1}$$

tendra vers une limite finie et déterminée.

Tel est le résultat, plus complet que celui que nous avions obtenu au paragraphe I, que nous permet d'atteindre la transformation de Laplace.

On remarquera d'abord le rôle important que joue dans ce résultat l'argument λ avec lequel x croît indéfiniment. On en conclura que les intégrales de l'équation (1) ne se comportent pas de la même manière quelle que soit la façon dont x tend vers l'infini.

Une autre conséquence importante, c'est que les n intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_n$$

sont linéairement indépendantes.

Faisons croître, en effet, x par valeurs réelles positives, et supposons que les n quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n$$

soient rangées par ordre de parties réelles croissantes. (On peut toujours supposer qu'il n'y a pas deux de ces quantités qui aient même partie réelle, sans quoi on ferait croître x indéfiniment avec un argument différent de zéro.)

Soit

$$A_i = \lim e^{-a_i x} x^{\mu_i+1} y_i \qquad (A_i \text{ différent de zéro}).$$

Supposons qu'il existe une identité linéaire entre nos n intégrales

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0. \tag{3}$$

Multiplions l'identité par

$$e^{-a_n x} x^{\mu_n+1},$$

et faisons croître x indéfiniment. L'identité devient à la limite

$$C_n A_n = 0, \qquad \text{d'où} \qquad C_n = 0.$$

Effaçons le dernier terme de l'identité (3), multiplions-la par

$$e^{-a_{n-1} x} x^{\mu_{n-1}+1},$$

et faisons $x = \infty$. Il vient encore

$$C_{n-1} A_{n-1} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad C_{n-1} = 0.$$

En continuant de la sorte, on démontrerait successivement que tous les coefficients C sont nuls, ce qui montre que nos n intégrales sont linéairement indépendantes. La transformation de Laplace conduit donc à l'intégrale générale de l'équation (1).

Il est aisé d'étendre ce raisonnement au cas où l'équation (2) a des racines multiples.

Dans le paragraphe I, nous avons vu que si

$$R(a_n) > R(a_{n-1}) > R(a_{n-2}) > \ldots > R(a_1),$$

il *peut* y avoir certaines intégrales particulières dont la dérivée logarithmique tend non pas vers a_n, comme cela a lieu pour l'intégrale générale, mais vers a_{n-1}, vers a_{n-2}, ... ou vers a_1. Toutefois les principes de ce premier paragraphe ne nous permettaient pas d'affirmer que ces intégrales particulières existaient réellement. Ce que nous venons de dire démontre l'existence de ces intégrales particulières.

Comme application de ce qui précède, posons-nous le problème suivant :

Reconnaître si l'équation (1) *admet comme intégrale un polynome entier.*

Pour cela il faut d'abord que l'une des racines de l'équation (2) soit nulle. Supposons qu'elle soit simple; soit par exemple :

$$a_i = 0.$$

Il faudra ensuite que la quantité que nous avons appelée μ_i soit entière négative. Quand μ_i est entier, il n'existe pas en général d'intégrale de l'équation (3) de la forme

$$v_i = (z - a_i)^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

car le point singulier a_i est en général un point singulier *logarithmique*. Si l'intégrale v contient des logarithmes, l'intégrale

$$y_i = \int v e^{zx}\, dz,$$

prise le long d'un contour l_i enveloppant le point zéro, ne peut se réduire à un polynome entier.

Mais dans certains cas particuliers, le point sngulier zéro n'est pas logarithmique, il existe une intégrale de la forme

$$v_i = z^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

Φ_i étant holomorphe dans le voisinage du point zéro. La fonction ve^{zx} est alors méromorphe à l'intérieur du contour l_i, d'où il résulte que l'intégrale y_i se réduit à un polynome entier.

Ainsi pour que l'équation (1) admette pour intégrale un polynome entier, il faut et il suffit :

1° que l'équation (2) ait une racine nulle;

2° que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point singulier correspondant de l'équation (3) soit entière négative;

3° que ce point singulier ne soit pas logarithmique.

Cela peut d'ailleurs se vérifier directement.

V. — Étude du groupe de l'équation (1).

Chacun sait ce qu'on entend par *groupe d'une équation linéaire*. Lorsque la variable indépendante décrit un contour fermé autour d'un point singulier, les intégrales de l'équation subissent une substitution linéaire et c'est la combinaison de ces substitutions qui engendre le groupe de l'équation.

On sait également qu'une substitution linéaire est caractérisée principalement par ses multiplicateurs et que les multiplicateurs de la substitution relative à un point singulier s'obtiennent immédiatement, lorsque les intégrales sont régulières dans le voisinage de ce point. En effet on les déduit aisément de l'équation déterminante relative à ce point.

Il n'en est plus de même quand le point singulier est irrégulier, c'est-à-dire quand les intégrales ne sont pas régulières dans le voisinage de ce point. On n'a alors pour le calcul des multiplicateurs que des méthodes d'approximation plus ou moins rapides.

C'est ce qui arrive pour l'un des points singuliers de l'équation (1), à savoir pour le point $x = \infty$. Ce point sera en effet *irrégulier* en général. Pour qu'il fût régulier, il faudrait que, le polynome P_n étant de degré p, le polynome P_{n-1} fût de degré $(p-1)$ au plus, le polynome P_{n-2} de degré $(p-2)$ au plus, etc. Dans ce cas l'équation (2) aurait toutes ses racines nulles. Si on laisse de côté ce cas très particulier, on n'a pas de méthode rapide pour trouver les multiplicateurs de la substitution S que subissent les intégrales de l'équation (1) quand le point x décrit un cercle de rayon très grand.

Le groupe de l'équation (3) est dérivé de n substitutions fondamentales correspondant aux différents points singuliers de cette équation, c'est-à-dire aux différentes racines de l'équation (2). Si ces racines sont simples, les points singuliers correspondants sont réguliers. On peut donc trouver aisément les multiplicateurs de ces substitutions fondamentales, mais pour calculer les coefficients du groupe lui-même, il faut employer des méthodes d'approximation.

Il y a toutefois entre le groupe de l'équation (3) et la substitution S, un lien que je désirerais faire ressortir. Si nous supposons connu le groupe de l'équation (3), je dis que nous connaîtrons aussi la substitution S.

Voici sous quelle forme nous nous donnerons les coefficients du groupe de l'équation (3). Considérons un point singulier quelconque a_i de cette équation; soient

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-2, \quad \mu_i$$

les racines de son équation déterminante et

$$v_{i,1},\quad v_{i,2},\quad \ldots,\quad v_{i,p}$$

les intégrales correspondantes de telle façon que

$$\begin{aligned} v_{ik} &= (z-a_i)^{k-1}\,\Phi(z) \qquad (k=1,2,\ldots,p-1),\\ v_{ip} &= (z-a_i)^{\mu_i}\ \ \Phi(z), \end{aligned}$$

$\Phi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage du point a_i. Soit b_i un point très voisin du point a_i. Opérons de même pour chacun des points singuliers; joignons $b_i b_j$; quand la variable z ira de b_i en b_j en suivant la droite $b_i b_j$, les intégrales v_{ik} prendront certaines valeurs qui pourront s'exprimer linéairement à l'aide des intégrales $v_{j,k}$.

En d'autres termes, il y aura une substitution linéaire S_{ij} qui changera les intégrales v_{ik} dans les intégrales v_{jk}, de telle façon qu'on puisse écrire avec la notation symbolique ordinairement employée :

$$v_{jk} = v_{ik}.S_{ij}.$$

La connaissance des substitutions S_{ij} suffit pour déterminer le groupe de l'équation (3). Ce sont en effet les substitutions que j'ai appelées *auxiliaires* dans mon Mémoire sur les groupes des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. 4, p. 207; 1884) [1]. Il est à remarquer que ces substitutions ne sont pas indépendantes les unes des autres.

On voit aisément que si l'on connaît $(n-1)$ des substitutions S_{ij} (convenablement choisies) on connaîtra toutes les autres (*loc. cit.*, p. 207). Nous conserverons néanmoins, pour plus de symétrie dans les notations, les $n(n-1)$ substitutions S_{ij} et S_{ji}.

Nous achèverons de définir les intégrales v_{ik} grâce à la convention suivante :

1° si $k=p$, $\Phi(z)$ se réduit à 1 pour $z=a_i$;

2° si $k<p$, $\Phi(z)$ se réduit à 1 et ses $(p-1-k)$ premières dérivées s'annulent pour $z=a_i$.

Cela posé, supposons d'abord x réel positif et très grand. Supposons que les droites $a_i b_i$ qui sont très petites soient parallèles à l'axe des parties réelles et de telle façon que :

$$R(b_i) < R(a_i).$$

Soit D_i une demi-droite parallèle à cet axe, partant du point b_i et s'étendant à l'infini du côté des parties réelles négatives. Soit C_i un cercle décrit du

(1) *Œuvres*, t. II, p. 300.

point a_i comme centre, avec $a_i b_i$ pour rayon. Soit l_i un contour formé de la droite D_i, du cercle C_i et de la droite D_i prise en sens contraire. Soit :

$$y_i = \int v_{ip}\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long du contour l_i.

Supposons maintenant un chemin quelconque E_i partant du point b_i et s'étendant à l'infini de telle façon que l'argument de z tende vers la limite π. Soit L_i un contour formé du chemin E_i, du cercle C_i et du chemin E_i pris en sens contraire. Cherchons à évaluer l'intégrale

$$J = \int v_{ip}\, e^{zx}\, dz,$$

le long du contour L_i.

Je puis toujours supposer que le chemin E_i ait été remplacé par un contour E'_i équivalent, c'est-à-dire tel que l'on puisse transformer, par une déformation continue, E_i en E'_i sans franchir aucun point singulier. La valeur de l'intégrale J n'en sera pas changée.

Or on pourra toujours trouver un chemin E'_i équivalent à E_i et formé de la façon suivante : ce chemin se réduira à une ligne brisée dont les sommets seront des points c_j, infiniment voisins de divers points singuliers a_j. Le premier de ces sommets sera $b_i = c_i$. Le sommet suivant sera c_j, infiniment voisin d'un point singulier a_j, mais pouvant être différent de b_j. Puis viendra c_k infiniment voisin d'un point singulier a_k, et ainsi de suite. Enfin la ligne brisée E'_i se terminera par une demi-droite partant du dernier sommet, parallèle à l'axe des parties réelles et dirigée du côté des parties réelles négatives.

Nous pourrons supposer que le contour formé de la ligne brisée E'_i et de la demi-droite D_i ne contient pas à son intérieur d'autre point singulier que ceux qui sont infiniment voisins d'un des sommets de E'_i. Il est évidemment possible de déformer d'une manière continue ce contour, jusqu'à ce qu'il aille passer infiniment près de chacun des points singuliers qu'il contient à son intérieur (et cela sans lui faire franchir aucun point singulier).

Supposons maintenant que l'on étudie ce que devient l'intégrale v_{ip} lorsque la variable z partant du point b_i décrit la ligne brisée E'_i. Au moment où nous arriverons en un sommet c_j de cette ligne brisée, infiniment voisin d'un point singulier a_j, et que nous serons par conséquent dans le domaine de ce point singulier, l'intégrale v_{ip} pourra s'exprimer linéairement à l'aide des p intégrales

$$v_{j,1},\quad v_{j,2},\quad \ldots,\quad v_{j,p},$$

de telle façon qu'on aura

$$v_{i.p} = A^i_{j.1} v_{j.1} + A^i_{j.2} v_{j.2} + \ldots + A^i_{j.p} v_{j.p}. \tag{4}$$

Les coefficients $A^i_{j.k}$ peuvent être regardés comme connus, car leur valeur découle immédiatement de la connaissance des substitutions S_{ij}, c'est-à-dire de la connaissance du groupe de l'équation (3).

Cela posé, nous pouvons décomposer le contour L_i de la manière suivante : soit λ_i le contour formé de la ligne brisée E'_i et de la demi-droite D_i. Nous remplacerons L_i par le contour λ_i, par le contour l_i et par le contour C_i pris en sens contraire. Le contour total ainsi obtenu est évidemment équivalent à L_i.

L'intégrale

$$\int v_{ip}\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long de l_i, n'est autre que y_i.

Si l'on appelle K la même intégrale prise le long de λ_i, on aura

$$J = K(1 - e^{2i\pi\mu_i}) + y_i.$$

Maintenant si le contour λ_i contient un certain nombre de points singuliers

$$a_j,\quad a_{j'},\quad a_{j''},\quad \ldots,$$

on pourra le remplacer par les contours correspondants

$$l_j,\quad l_{j'},\quad l_{j''},\quad \ldots.$$

L'intégrale

$$\int v_{ip}\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long de l_j, se réduit, en vertu de la relation (4), à

$$y_i A^i_{jp},$$

il vient donc enfin

$$J = (1 - e^{2i\pi\mu_i}) \Sigma_j A^i_{jp} y_j + y_i. \tag{5}$$

On voit que si μ_i est entier négatif et si le point a_i n'est pas logarithmique, il reste

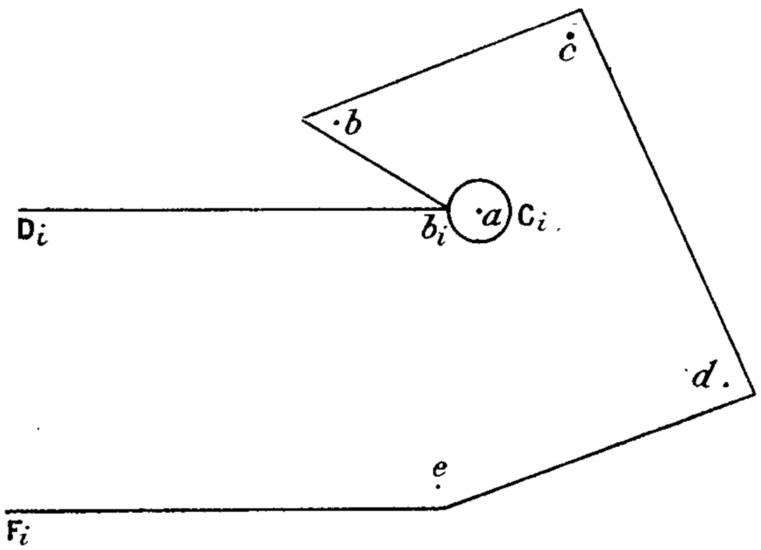
$$J = y_i,$$

quel que soit le chemin L_i.

Cela posé, voyons ce que deviendra l'intégrale y_i lorsque x, partant d'une valeur réelle positive très grande, reviendra à cette valeur après avoir décrit un cercle de rayon très grand. Pendant que x variera de la sorte, nous serons obligés de déformer le contour l_i le long duquel est prise l'intégrale y_i; car si l'on ne changeait pas ce contour, quand l'argument de x serait devenu plus grand que $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale aurait cessé d'être finie car la valeur absolue de e^{xz} aurait pu devenir plus grande que toute quantité donnée.

Voici maintenant comment il faut déformer le contour l_i; nous conserverons le cercle C_i mais nous remplacerons la demi-droite D_i parcourue deux fois en sens inverse, par une ligne quelconque E_i qui partira du point l_i et s'étendra à l'infini et qui devra être également parcourue deux fois en sens contraire.

Fig. 1.



Nous nous arrangerons toujours pour que l'argument de x soit à chaque instant égal à π moins l'argument que prend z en s'éloignant indéfiniment sur la ligne E_i. De plus il faudra que la ligne E_i dérive de la demi-droite D_i par déformation continue et cela sans jamais franchir aucun point singulier.

Quand l'argument de x sera revenu à la valeur zéro, après un cercle complet, la ligne E_i (que d'ailleurs on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer réduite à une ligne brisée E'_i) prendra une forme définitive F_i et l'argument de z à l'infini sur F_i sera égal à π.

Ainsi dans la figure 1, on a supposé 5 points singuliers a, b, c, d, e et l'on a figuré le cercle C_i, la droite D_i et la ligne F_i.

L'intégrale prise le long du contour formé de la ligne F_i, du cercle C_i et de la ligne F_i prise en sens inverse, peut se calculer par le procédé que nous avons exposé un peu plus haut; elle aura pour valeur

$$(1 - e^{2i\pi\mu_i}) \Sigma A^i_{j.p} y_j + y_i,$$

en conservant les mêmes notations qu'au commencement de ce paragraphe.

Mais cette intégrale n'est autre chose que ce que devient y_i quand x a décrit un cercle très grand.

Nous avons donc la valeur finale de y_i exprimée linéairement à l'aide des valeurs initiales des n intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$. En d'autres termes, quand nous connaissons le groupe de l'équation (3), nous connaissons aussi la substitution linéaire que subissent les intégrales de l'équation (1), lorsque la variable x décrit un cercle de rayon très grand. C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs faire la remarque suivante. Si μ_i est entier négatif et que le point a_i ne soit pas logarithmique, la valeur finale de y_i ne diffère pas de la valeur initiale; cette intégrale n'est pas altérée par la substitution linéaire que nous envisageons. On devait le prévoir puisque nous avons vu que cette intégrale se réduit alors à un polynome entier.

VI. — Généralisation des paragraphes I et II.

Dans le paragraphe II nous avons considéré l'équation aux différences finies

$$P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0, \tag{1}$$

où les coefficients sont des polynomes d'ordre p en n. Nous avons vu que la limite du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

était en général celle des racines de l'équation

$$A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0, \tag{2}$$

dont le module est le plus grand; A_i désignant le coefficient de n^p dans P_i.

Nous avons posé ensuite

$$\frac{P_i}{P_k} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_k} = B_i,$$

d'où

$$B_i = \lim Q_i \qquad (n = \infty)$$

et nous avons vu qu'on peut remplacer les équations (1) et (2) par les suivantes

$$u_{n+k} + Q_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + Q_0 u_n = 0. \tag{1 bis}$$

$$z^k + B_{k-1} z^{k-1} + \ldots + B_0 = 0. \tag{2 bis}$$

Nous avons vu également que le résultat subsiste encore, lorsque Q_i au lieu d'être le quotient de deux polynomes entiers de degré p en n, est une fonction *quelconque* de n, tendant vers la limite B_i quand n croît indéfiniment.

Si l'une des quantités B_i est infinie, on en conclut que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ croît indéfiniment avec n. C'est ce qui arrive en particulier quand le polynome P_k est de degré inférieur à celui des polynomes suivants P_i.

Il est nécessaire alors d'employer l'artifice suivant :

Posons

$$u_n = (n!)^\mu v_n,$$

μ étant une constante réelle positive qu'il s'agit de déterminer de telle façon que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tende vers une limite finie.

L'équation (1 *bis*) devient

$$v_{n+k} + \frac{Q_{k-1}}{(n+k)^\mu} v_{n+k-1} + \frac{Q_{k-2}}{[(n+k)(n+k-1)]^\mu} v_{n+k-2} + \ldots = 0,$$

et il s'agit de déterminer μ de telle façon que, pour $n = \infty$, les expressions

$$\frac{[(n+i)!]^\mu Q_i}{[(n+k)!]^\mu} \tag{3}$$

soient toutes finies sans être toutes nulles. Pour cela, il suffit d'envisager le degré en n de chacune de ces expressions, c'est-à-dire l'exposant de la puissance de n par laquelle il faut la diviser pour que le quotient tende vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Supposons que le coefficient P_i de l'équation (1) soit un polynome entier de degré p_i en n; Q_i sera alors de degré $(p_i - p_k)$. Or

$$\frac{(n+k)!}{(n+i)!}$$

est un polynome d'ordre $k - i$ en n. Donc le degré en n de l'expression (3) est

$$p_i - p_k - \mu(k-i).$$

Il faut donc donner à μ la plus petite valeur qui satisfasse aux inégalités

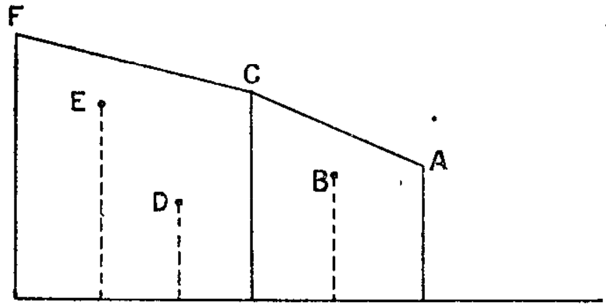
$$p_k + \mu k \geqq p_i + \mu i. \tag{4}$$

Si l'on choisit justement pour μ cette plus petite valeur, toutes ces inégalités seront satisfaites, de telle sorte que toutes les expressions (3) tendront vers une limite finie et une d'elles au moins se réduira à une égalité, de telle sorte que toutes les expressions (3) ne tendront pas vers zéro.

On peut trouver graphiquement cette plus petite valeur de μ de la manière suivante; on marquera tous les points qui ont pour abscisse i et pour ordonnée p_i; on construira le polygone convexe qui enveloppe tous ces points, et celui des côtés de ce polygone qui aboutira au point (k, p_k) nous donnera μ par son coefficient angulaire. On trouvera dans la figure 2 un exemple de cette détermination de μ, en supposant

$$k = 5, \qquad p_5 = p_4 = p_2 = 2, \qquad p_3 = p_1 = 3, \qquad p_0 = 4.$$

Fig. 2.



Les points A, B, C, D, E, F correspondent respectivement aux polynomes $P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0$ et c'est le côté AC du polygone ACFD dont le coefficient angulaire donne la valeur de μ.

Soit alors C_i la limite de l'expression (3) pour $n = \infty$, on formera l'équation

$$(2^{ter}) \qquad z^k + C_{k-1} z^{k-1} + \ldots + C_1 z + C_0 = 0.$$

Soit α celle des racines de cette équation qui a le module le plus grand, nous aurons

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)^{-\mu} = \alpha \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

Supposons maintenant que tous les B_i soient nuls, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendra vers zéro. Pour se rendre compte de la façon dont ce rapport tend vers zéro, on cherchera encore la plus petite valeur de μ qui satisfasse aux inégalités (4); cette valeur sera cette fois négative. On posera encore

$$u_n = (n!)^\mu v_n,$$

et l'équation (1^{bis}) deviendra

$$(1^{ter}) \qquad v_{n+k} + \sum \left[\frac{(n+i)!}{(n+k)!}\right]^\mu Q_i v_{n+i} = 0;$$

on formera l'équation

$$(2^{ter}) \qquad y^k + \Sigma C_i z^i = 0,$$

en appelant C_i la limite pour n infini, du coefficient de v_{n+i} dans l'équation (1^{ter}).

Si l'on désigne ensuite par α celle des racines de (2^{ter}) dont le module est le plus grand on aura

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)^{-\mu} = \alpha \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

La même méthode peut s'appliquer aux équations

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$(2) \qquad A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

$$(1^{bis}) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + Q_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0,$$

$$(2^{bis}) \qquad z^n + B_{n-1} z^{n-1} + \ldots + B_1 z + B_0 = 0,$$

envisagées dans le paragraphe II.

Supposons que quelques-uns des B deviennent infinis ou que tous les B deviennent nuls. Dans le premier cas la dérivée logarithmique de y tendra vers l'infini, dans le second cas vers zéro.

On pourra toujours trouver deux nombres C_i et μ_i tels que

$$\lim \frac{Q_i}{C_i x^{\mu_i}} = 1 \qquad (\text{pour } x = \infty).$$

$$\text{Si } \mu_i = 0,\quad B_i = C_i; \qquad \text{si } \mu_i > 0,\quad B_i = \infty; \qquad \text{si } \mu_i < 0,\quad B_i = 0.$$

On considérera alors l'équation

$$(2^{ter}) \qquad z^n + C_{n-1} x^{\mu_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + C_1 x^{\mu_1} z + C_0 x^{\mu_0} = 0.$$

Si dans cette équation on pose $z = tx^\lambda$, elle devient

$$t^n + \Sigma\, C_i x^{\mu_i - \lambda(n-i)} t^i = 0.$$

On donnera à λ une valeur telle que tous les exposants $\lambda_i - \lambda(n-i)$ soient tous nuls ou négatifs, sans être tous négatifs; et faisant $x = \infty$ dans l'équation précédente, il viendra

$$(2^{quater}) \qquad t^n + \Sigma\, C'_i t^i = 0,$$

où

$$C'_i = C_i \qquad \text{si } \mu_i = \lambda(n-i),$$
$$C'_i = 0 \qquad \text{si } \mu_i < \lambda(n-i).$$

L'équation (2^{quater}) en t aura alors toutes ses racines finies, sans qu'elles soient toutes nulles. J'appellerai α celle de ces racines dont la partie réelle est la plus grande. Je dis qu'on aura en général

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dy}{y\,dx} = \alpha.$$

Pour le démontrer, changeons de variable en posant

$$\xi = x^\rho,$$

ρ étant un exposant qu'il reste à déterminer; il viendra

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \Sigma_i D_{ik} x^{i\rho-k} \frac{d^i y}{d\xi^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

les D étant des coefficients numériques.

L'équation (1^{bis}) devient alors

$$(1^a) \qquad \Sigma Q_k D_{ik} x^{i\rho-k} \frac{d^i y}{d\xi^i} = 0.$$

Dans cette équation le coefficient de $\frac{d^n y}{d\xi^n}$ s'écrit

$$D_{nn} x^{n\rho-n}.$$

Posons

$$R_n = 1, \qquad R_i = \frac{\Sigma Q_k D_{ik} x^{i\rho-k}}{D_{nn} x^{n\rho-n}}.$$

Remplaçons dans R_i la lettre x par sa valeur $\xi^{\frac{1}{\rho}}$, et l'équation (1^a) deviendra

$$(1^b) \qquad \Sigma R_i \frac{d^i y}{d\xi^i} = 0.$$

Quel est le degré du coefficient R_i en ξ? Le degré de Q_k est égal à $\frac{\mu_k}{\rho}$; posons

$$\nu_k = \frac{\mu_k}{\rho} + \frac{n-k}{\rho}.$$

Le degré de R_i en ξ sera la plus grande des $(n - i + 1)$ quantités

$$\nu_k + i - n \qquad (k = i, i+1, i+2, \ldots, n).$$

Nous voulons que les degrés de tous les R_i soient tous nuls ou négatifs sans être tous négatifs. Nous choisirons donc ρ de manière à satisfaire aux inégalités

$$\frac{\mu_k + n - k}{\rho} + i - n \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Le degré de R_0 est d'ailleurs égal à $\frac{\mu_0 + n}{\rho} - n$. Donc les inégalités précédentes peuvent se ramener aux suivantes :

$$\frac{\mu_k + n - k}{\rho} + k - n \leqq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ou bien

$$\rho \geqq \frac{\mu_k + n - k}{n-k}.$$

On prendra pour ρ la plus petite valeur qui satisfasse à ces inégalités. Comparons ρ à la quantité que nous avons appelée plus haut λ. Celle-ci était définie par les inégalités

$$\mu_k - \lambda(n-k) \leqq 0$$

ou

$$\lambda \geqq \frac{\mu_k}{n-k}.$$

On a donc

$$\rho = \lambda + 1.$$

Si l'on donne à ρ cette valeur, les coefficients R_i tendent vers des limites finies, quand x croît indéfiniment. Les conclusions du paragraphe II sont donc applicables à l'équation (1^{bis}). Formons donc l'équation (2^{bis}) qui joue par rapport à (1^{bis}) le même rôle que (2) par rapport à (1). Si nous posons

$$\lim R_i = E_i \qquad (x = \infty),$$

cette équation s'écrira

$$(2^b) \qquad \Sigma E_i z^i = 0,$$

et si β est celle des racines de cette équation dont la partie réelle est la plus grande, on aura en général

$$\lim \frac{dy}{y\, d\xi} = \lim \frac{x^{-\lambda}}{\rho} \frac{dy}{y\, dx} = \beta.$$

Il reste à déterminer E_i.

Pour cela reprenons l'expression

$$R_i = \Sigma Q_k \frac{D_{ik}}{D_{nn}} x^{(i-n)\rho-k+n}.$$

Parmi les termes du second membre, il pourra y en avoir dont le degré en x est négatif et d'autres dont le degré en x est nul. Nous n'avons pas à tenir compte des premiers dont la limite est évidemment nulle pour x infini.

Or si $k > i$, les inégalités (5) montrent que le degré en x de

$$Q_k x^{(i-n)\rho-k+n}$$

est toujours négatif. Il reste donc

$$E_i = \lim Q_i \frac{D_{ii}}{D_{nn}} x^{(i-n)(\rho-1)}.$$

Or il est aisé de voir que

$$D_{ii} = \rho^i,$$

il reste donc

$$E_i = C_i \rho^{i-n}, \qquad \text{si } \mu_i = \lambda(n-i),$$

et

$$E_i = 0, \qquad \text{si } \mu_i < \lambda(n-i).$$

Donc pour passer de l'équation (2^{bis}) à l'équation (2^{quater}), il suffit de poser

$$z = \frac{t}{\rho},$$

il vient donc

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho}$$

et

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dy}{y\,dx} = \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut tirer de là une conclusion importante. Soit γ un nombre réel positif plus grand que la partie réelle de $\frac{\alpha}{\rho}$. Je dis que

$$v = y\,e^{-\gamma x^\rho}$$

tendra vers zéro quand x croîtra indéfiniment par valeurs réelles positives. Il viendra en effet

$$\frac{dv}{v\,dx} = \frac{dy}{y\,dx} - \gamma\rho\,x^\lambda,$$

d'où

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dv}{v\,dx} = \alpha - \gamma\rho,$$

ou

$$\lim \mathrm{R}\left(x^{-\lambda} \frac{dv}{v\,dx}\right) = \mathrm{R}(\alpha - \gamma\rho) < 0,$$

$\mathrm{R}(u)$ désignant toujours la partie réelle de u. Soit maintenant δ un nombre positif tel que

$$\mathrm{R}(\alpha - \gamma\rho) < -\delta < 0.$$

Donc, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on aura

$$\mathrm{R}\left(\frac{dv}{v\,dx}\right) < -\delta x^\lambda,$$

d'où

$$|v| < |v_0|\,e^{-\frac{\delta x^\rho}{\rho}},$$

v_0 désignant la valeur de v pour $x = x_0$,

et par suite

$$\lim v = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette proposition, comme le résultat analogue démontré à la fin du paragraphe I ne souffre aucune exception.

Une dernière remarque : comme ρ est essentiellement réel positif, la méthode précédente se trouve en défaut quand on a pour tous les μ_k

$$\frac{\mu_k}{n-k} + 1 \leqq 0$$

ou

$$\mu_k \leqq -(n-k).$$

Mais on n'a pas à s'inquiéter de ce cas d'exception, car les intégrales de l'équation (1) sont alors *régulières* pour x très grand.

VII. — Des séries de polynomes.

Les conclusions des paragraphes II et VI sont susceptibles d'une application importante. Elles permettent en effet de résoudre le problème suivant.

Soient

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \quad \ldots, \quad P_n(x), \quad \ldots$$

une infinité de polynomes entiers en x, liés entre eux par une relation de récurrence de la forme suivante :

$$Q_k P_{n+k} + Q_{k-1} P_{n+k-1} + \ldots + Q_1 P_{n+1} + Q_0 P_n = 0, \tag{1}$$

où les Q sont des polynomes entiers en n et en x. Formons maintenant la série

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots, \tag{2}$$

où les α sont des coefficients constants quelconques. Cette série sera convergente tant que le point x restera intérieur à une certaine région du plan, et divergera quand le point x sortira de cette région. On demande quelle est la courbe qui limite cette région de convergence.

J'avais donné une solution de ce problème dans une communication que j'ai faite à la Société mathématique de France en novembre 1882 et dans une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 5 mars 1883 ([1]).

Voici quelle est la méthode que j'employais. J'envisageais la série suivante :

$$y = P_0 + z P_1 + \ldots + z^n P_n + \ldots \tag{3}$$

qui représente une fonction de z et de x. On voit aisément que cette fonction satisfait à une équation différentielle de la forme suivante :

$$R_p \frac{d^p y}{dz^p} + R_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \ldots + R_1 \frac{dy}{dz} + R_0 y = S, \tag{4}$$

où les coefficients R et le terme tout connu S sont des polynomes entiers en x

([1]) Ce Tome, p. 223.

et en z [1]. On obtiendra les points singuliers des intégrales de cette équation (en regardant un instant x comme une constante et z comme la seule variable) en égalant à zéro le coefficient R_p. Soit

$$z = \alpha$$

celle des racines de l'équation $R_p = 0$ (qui est une équation algébrique en z) dont le module est le plus petit. La condition nécessaire et suffisante pour que la série (3) converge (en laissant de côté certains cas exceptionnels) c'est que

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \alpha.$$

Or α est évidemment une fonction de x. Donc pour une valeur quelconque supposée donnée de z, la courbe qui limitera la région de convergence de la série (3) dans le plan des x aura pour équation

$$\operatorname{mod} \alpha = \operatorname{mod} z.$$

On en conclut aisément que, si les coefficients de la série (2) sont tels que $\sqrt[n]{\alpha_n}$ tende vers une limite finie et déterminée quand n croît indéfiniment, la courbe qui limitera la région de convergence de la série (2) aura pour équation

$$\operatorname{mod} \alpha = \text{const}.$$

Cette méthode a, on le voit, l'inconvénient d'être sujette à objection lorsque $\sqrt[n]{\alpha_n}$ ne tend pas vers une limite déterminée.

Depuis M. Pincherle a publié dans les *Annali di Matematica* un Mémoire où il traite par la même méthode des questions analogues. (*Sui sistemi di functioni analitiche* ..., 2^e série, t. 12.)

M. Pincherle envisage une fonction quelconque $\Phi(x, z)$, la développe en série selon les puissances croissantes de x et de z; il ordonne ensuite cette série suivant les puissances de z de telle façon que l'on ait

$$(5) \qquad \Phi(x, z) = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \ldots + \Phi_n z^n + \ldots,$$

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ étant des fonctions de x. Si l'on connaît les points singuliers de $\Phi(x, z)$ considérée comme fonction de z, on trouvera aisément, comme nous venons de le voir, les conditions de convergence de la série (5). Considérant ensuite la série plus générale

$$(5^{bis}) \qquad \alpha_0 \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1 + \ldots + \alpha_n \Phi_n + \ldots,$$

(1) L'entier p est le degré le plus élevé des Q_i en n, le coefficient R_{p-i} est le produit de z^{p-i} par un polynome en z de degré k; la démonstration en sera donnée plus loin. (J. D.)

où les α sont des coefficients quelconques, M. Pincherle en détermine les conditions de convergence en recherchant un nombre tel que

$$\lim \alpha_n (R+\varepsilon)^{-n} = 0, \qquad \lim \alpha_n (R-\varepsilon)^{-n} = \infty \qquad (\text{pour } n=\infty).$$

quelque petite que soit la quantité positive ε. Il est clair alors que la série (5^{bis}) sera convergente ou divergente en même temps que

$$\Phi_0 + \Phi_1 R + \Phi_2 R^2 + \ldots + \Phi_n R^n + \ldots.$$

Cette méthode, employée presque simultanément par M. Pincherle et par moi, est sujette à l'inconvénient que j'ai signalé plus haut. C'est ce qui m'a décidé à l'abandonner et à employer de préférence les résultats des paragraphes II et VI du présent Mémoire.

La relation de récurrence (1) est tout à fait analogue à l'équation (1) du paragraphe II. Les polynomes P_n y jouent le même rôle que jouaient dans ce paragraphe les quantités inconnues u_n et les coefficients Q sont des polynomes entiers en n, pourvu qne nous regardions un instant x comme une constante.

La règle du paragraphe cité nous permettra donc de déterminer la limite du rapport

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \qquad (\text{pour } n=\infty).$$

Supposons en effet que les polynomes Q soient d'ordre p en n, et soit A_i le coefficient de n^p dans Q_i. Formons l'équation

$$(6) \qquad A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Elle sera analogue à l'équation (2) du paragraphe II.

Il est à remarquer qne les coefficients A sont des fonctions de x.

Imaginons que α soit celle des racines de l'équation (6) dont le module est le plus grand, α sera aussi une fonction de x et l'on aura, en général,

$$(7) \qquad \lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = |\alpha|.$$

Cela posé, quelles sont les conditions de convergence de la série (2)?

Formons la série de puissances

$$(9) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots.$$

Elle aura un certain rayon de convergence ρ, c'est-à-dire qu'elle convergera pourvu que

$$|t| < \rho.$$

Je dis que, si nous laissons de côté certains cas exceptionnels, sur lesquels nous reviendrons plus loin, la condition nécessaire et suffisante pour que la série (2) converge s'écrira

$$|\alpha| < \rho.$$

En effet considérons une valeur de x pour laquelle cette condition soit remplie. On trouvera toujours un nombre t tel que

$$|\alpha| < |t| < \rho.$$

Pour cette valeur de t la série (9) convergera; de plus on aura, à partir d'un certain rang,

$$|P_n| < t^n,$$
$$|\alpha_n P_n| < |\alpha_n t^n|.$$

Donc tous les termes de la série (2) seront plus petits en valeur absolue que les termes correspondants d'une série convergente. Donc la série (2) convergera. C. Q. F. D.

Supposons au contraire

$$|\alpha| > \rho.$$

Nous choisirons t de telle façon que

$$|\alpha| > |t| > \rho.$$

Il en résultera que la série (9) sera divergente et que la série (2), dont chaque terme est plus grand en valeur absolue que le terme correspondant de la série (9), divergera également. C. Q. F. D.

Il résulte de là que les *courbes de convergence* des séries de la forme (2), c'est-à-dire les courbes qui limitent les régions du plan où les séries de cette forme convergent, ont pour équation générale

$$|\alpha| = \text{const.}$$

Voici quelques exemples : Soit d'abord

$$(n^2+1)P_{n+2} - 2n^2 x P_{n+1} + (n^2+x^2)P_n = 0$$

la relation de récurrence qui lie trois polynomes P consécutifs.

Formons l'équation (6), elle s'écrira

$$z^2 - 2zx + 1 = 0,$$

et aura pour solutions

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

on en conclura que les courbes de convergence ont pour équations

$$\left| x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right| = \text{const.}$$

si l'on a soin de choisir le signe $+$ ou le signe $-$ de telle façon que le premier membre soit aussi grand que possible.

Posons

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

il viendra

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)^2,$$

d'où

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \xi \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\xi}.$$

A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de ξ dont le produit est égal à 1. L'une d'elles aura donc son module plus grand que 1, l'autre son module plus petit que 1. Nous choisirons celle dont le module est plus grand que 1. On aura alors

$$|\xi| > \left|\frac{1}{\xi}\right|$$

et par conséquent les courbes de convergence auront pour équation

$$|\xi| = \text{const.}$$

Soit

$$|\xi| = t, \qquad \xi = te^{i\Phi},$$

il viendra

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\Phi + \frac{i}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\Phi.$$

Les coordonnées du point x auront pour expression

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\Phi \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\Phi.$$

Pour avoir les courbes de convergence, il faudra donner à t une valeur constante et faire varier Φ de 0 à 2π. On obtiendra ainsi une ellipse ayant pour foyers les points ± 1. Ce sont donc ces ellipses qui sont les courbes de convergence des séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots.$$

Comme deuxième exemple, supposons que la relation de récurrence (1) s'écrive

$$(n^2+1)P_{n+2} - 2n^2 x P_{n+1} + (n^2 x^2 - n^2) P_n = 0.$$

L'équation (6) s'écrira

$$z^2 - 2zx + x^2 - 1 = 0,$$

et aura pour racines

$$z = x \pm 1.$$

Si donc ρ est le rayon de convergence de la série $\Sigma \alpha_n t^n$, les conditions de convergence de la série $\Sigma \alpha_n P_n$ s'écriront

$$|x+1| < \rho, \qquad |x-1| < \rho.$$

La région de convergence se composera donc de la partie commune à deux cercles décrits avec ρ pour rayon, des points $+1$ et -1 comme centres. Les courbes de convergence seront donc formées de deux arcs de cercle de même rayon, ayant pour centres ces deux points et limités en leurs points d'intersection sur l'axe des parties imaginaires.

Il est à remarquer que ces deux cercles ne se coupent que si leur rayon est plus grand que 1. La série $\Sigma \alpha_n P_n$ ne converge donc pour aucune valeur de x si la série $\Sigma \alpha_n$ n'est point convergente.

Passons maintenant aux cas d'exception dont j'ai parlé plus haut et que nous avions provisoirement laissés de côté. Le premier de ces cas se présente quand l'équation (6) a deux racines qui, sans être égales, ont même module et un module plus grand que celui de toutes les autres. Ce cas ne se présentera en général que pour des valeurs particulières de x, à moins que l'équation (6) ne soit de la forme

$$[z - \varphi(x)][z - e^{i\alpha}\varphi(x)]\Phi(z, x) = 0,$$

α désignant une constante, $\varphi(x)$ une fonction de x et Φ un polynome entier en z. Il arrive alors que le cas exceptionnel dont nous parlons se présentera pour toutes les valeurs de x ou pour toute une région du plan. Mais on pourrait voir que les résultats qui ont été exposés dans ce paragraphe n'en subsistent pas moins. Nous n'avons donc pas à nous inquiéter de ce premier cas exceptionnel.

Le second cas est plus important. Nous avons vu dans le paragraphe II que si u_n est l'intégrale générale de l'équation (1) de ce paragraphe, et si $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont les racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant, on a *en général*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha,$$

mais que pour *certaines intégrales particulières* ou peut avoir

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta, \gamma, \ldots \quad \text{ou} \quad \lambda.$$

Appliquons cela au cas qui nous occupe. Nous pouvons choisir arbitrairement nos k premiers polynomes $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, les polynomes suivants $P_k, P_{k+1}, \ldots$ étant déterminés successivement par la relation de récurrence (1).

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation (6) rangées par ordre de module décroissant. On aura *en général*

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha.$$

c'est-à-dire que si l'on choisit d'une manière quelconque les k premiers polynomes P_i ce n'est que pour certains choix particuliers que cette relation pourra cesser d'être vraie et qu'on pourra avoir

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \beta, \gamma, \ldots \quad \text{ou} \quad \lambda.$$

Ainsi pour certains choix particuliers des premiers polynomes, il pourra y avoir exception. A quelle condition un pareil cas exceptionnel pourra-t-il se présenter ?

Pour nous en rendre compte cherchons à former l'équation (4). Écrivons le coefficient Q_i de la relation (1) sous la forme suivante :

$$Q_i = A_{i\cdot p}(n+i)_p + A_{i\cdot p-1}(n+i)_{p-1} + \ldots + A_{1\cdot 2}(n+i)_2 + A_{i\cdot 1}(n+i)_1 + A_{1\cdot 0}(n+i)_0,$$

où les A sont des polynomes entiers en x et où

$$n_q = n(n-1)\ldots(n-q+1), \qquad n_1 = n, \qquad n_0 = 1.$$

Il est aisé maintenant d'écrire l'équation (4). Soit en effet, avec

$$R_q = \sum_{m=0}^{k} C_{qm}\, z^m . z^q, \qquad \sum C_{qm}\, z^m . z^q \frac{d^q y}{dz^q},$$

le premier membre d'une équation de la forme (4). Substituons à la place de y la série $\Sigma P_n z^n$ et observons que $z^q \dfrac{d^q y}{dz^q} = \Sigma n_q z^n P_n$, ce premier membre deviendra

$$\sum_n z^{n+k} \sum_{q=0}^{q=p} [n_q C_{qk} P_n + (n+1)_q C_{q,k-1} P_{n+1} + \ldots + (n+k)_0 C_{q,0} P_{n+k}].$$

Nous devons nous arranger de telle sorte que tous les termes où l'exposant de z

dépasse une certaine limite disparaissent. On remarquera que le coefficient de z^{n+k} ne dépend que de $P_n, \ldots, P_{n+k}$ et peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_{n+i}[(n+i)_p C_{p,k-i} + (n+i)_{p-1} C_{p-1,k-i} + \ldots + (n+i)_0 C_{0,k-i}].$$

Pour qu'il soit nul en vertu de la relation (1), et de l'expression des Q_i, il suffira de prendre $C_{q,k-i} = A_{i,q}$, q variant de o à p et i de o à k [1].

Le premier membre de l'équation (4) s'écrit donc

$$\sum_{q=0}^{q=p}\left(\sum_{m=0}^{m=k} A_{k-m,q} z^m\right) . z^q \frac{d^q y}{dz^q}$$

ou encore, en remplaçant l'indice m par l'indice $i = k - m$, qui varie aussi entre o et k,

$$\sum A_{iq}\, z^{q+k-i} \frac{d^q y}{dz^q};$$

quant au second membre, on le trouvera aussi aisément : Le polynome P_n n'est défini que pour les valeurs positives de n ; convenons, par définition, d'écrire

$$P_{-1} = P_{-2} = \ldots = P_{-n} = \ \ . = 0.$$

Quand, dans le premier membre de la relation (4), on calculera le coefficient de z^{n+k} pour $n = -1, -2, \ldots, -k$, le résultat de ce calcul ne sera pas nul; appelons $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ ces résultats.

On verra alors que le résultat de la substitution de $y = \Sigma P_n z^n$ dans le premier membre de l'équation (4) s'écrit

$$\Pi_1 z^{k-1} + \Pi_2 z^{k-2} + \ldots + \Pi_k.$$

L'équation (4) s'écrira donc

$$(4) \qquad \sum A_{i,k} z^{k-i+q} \frac{d^q y}{dz^q} = \sum \Pi_m z^{k-m}.$$

Ainsi dans le premier des exemples cités plus haut, le premier membre (4) s'écrira

$$\frac{d^2 y}{dz^2}(z^4 - 2xz^3 + z^2) + \frac{dy}{dz}(z^3 + 2xz^2 - 3z) + y(x^2 z^2 - 2xz + 5).$$

---

[1] On a modifié légèrement ici l'exposition de H. Poincaré, qui avait introduit sans nécessité le développement des A_{iq} suivant les puissances de x : $A_{iq} = \Sigma B_{iqh} x^h$. Le résultat est donc valable dans le cas où les A_{iq} ne sont plus des polynomes en x [et par suite les P_n non plus].
(J. D.)

En général une équation de la forme

$$\sum R_i \frac{d^i y}{dx^i} = S$$

(les R et S étant des polynomes entiers en z) présentera dans le voisinage du point $z = 0$ (et par conséquent dans le voisinage d'un point z quelconque) au moins une intégrale particulière holomorphe.

Il n'y aurait d'exception que si tous les polynomes R s'annulaient à la fois pour $z = 0$, ou si le point $z = 0$ était un point singulier logarithmique, ou plus généralement un point singulier dont l'équation déterminante admet des racines entières.

Il résulte de là que si l'équation privée de second membre

$$\sum R_i \frac{d^i y}{dz^i} = 0$$

admet p intégrales holomorphes linéairement indépendantes, l'équation à second membre en admettra $(p+1)$ (ou n'en admettra aucune, dans les cas exceptionnels dont il vient d'être question).

Ainsi, si nous revenons à l'équation (4) qui nous occupe ici, le point $z = 0$ est pour l'équation sans second membre un point singulier ordinaire dont l'équation déterminante n'a pas en général de racines entières. Donc en général, l'équation à second membre admettra une intégrale holomorphe et une seule, c'est l'intégrale

$$\Sigma P_n z^n.$$

Égalons maintenant à zéro le coefficient de $\frac{d^p y}{dz^p}$, ce qui donne

$$z^p \Sigma A_{k-m,p} z^m = 0 \tag{9}$$

et, considérant dans cette équation x comme une constante, envisageons les diverses valeurs de z qui annulent le premier membre ([1]). Soit α celle de ces valeurs dont le module est le plus petit (à part $z = 0$, bien entendu). Dans le voisinage du point $z = \alpha$ [si α est une racine simple de l'équation (9)], l'équation à second membre (4) admettra en général p intégrales holomorphes linéairement indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et une $(p+1)^{\text{ième}}$ non holomorphe y_{p+1} dont il sera aisé de trouver le développement.

Ces développements seront valables à l'intérieur d'un certain cercle ayant le

---

([1]) Cette équation (9) se réduit à (6) quand on remplace z par $\frac{1}{z}$. (J. D.)

point α pour centre, et c'est ce cercle que l'on peut appeler le *domaine* du point α, de même que le cercle qui a le point zéro comme centre et $|\alpha|$ comme rayon, et à l'intérieur duquel la série $\Sigma P_n z^n$ est certainement convergente, s'appellera le domaine du point zéro.

Ces deux domaines ont une partie commune. Si dans cette partie commune, $\Sigma P_n z^n$ s'exprime linéairement à l'aide de $j_1, j_2, \ldots, j_p$, la série $\Sigma P_n z^n$ sera convergente pour des modules de z supérieurs à $|\alpha|$ et l'on aura

$$\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| > \left|\frac{1}{\alpha}\right|.$$

Mais cela n'arrivera pas en général.

Je n'en dirai pas plus long sur ce second cas exceptionnel, qui demanderait une étude plus approfondie, et je passerai à un troisième cas exceptionnel non moins important que les deux premiers.

Reprenons la relation de récurrence (1) et supposons que dans cette relation les coefficients Q_i, regardés comme des polynomes entiers en n, soient tous de degré inférieur au premier d'entre eux Q_k, ou bien que l'un des coefficients Q_i soit de degré supérieur à Q_k. Il arrivera alors que l'équation (6) aura toutes ses racines nulles, ou bien aura une racine infinie. Nous avons appelé α celle des racines de cette équation (6) dont le module est le plus grand. Nous aurons ici

$$|\alpha| = 0 \quad \text{ou} \quad \text{bien } \infty$$

et, par conséquent,

$$\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = 0 \quad \text{ou} \quad \text{bien } \infty.$$

La méthode exposée plus haut pour trouver les courbes de convergence des séries $\Sigma \alpha_n P_n$ se trouve donc en défaut, et c'est le cas d'appliquer les principes du paragraphe VI. Posons

$$P_n = P'_n (n!)^\mu.$$

Les séries $\Sigma \alpha_n P_n$ deviennent

$$\Sigma \alpha_n (n!)^\mu P'_n$$

et sont ordonnées suivant les polynomes P'_n au lieu de l'être suivant les polynomes P_n. Les courbes de convergence des séries de la forme $\Sigma \alpha_n P'_n$ seront donc les mêmes que celles des séries de la forme $\Sigma \alpha_n P_n$.

La relation de récurrence

$$(1) \qquad \Sigma Q_i P_{n+i} = 0$$

devient

$$\Sigma Q'_i P'_{n+i} = 0,$$

où

$$Q'_i = Q_i \left[\frac{(n+i)!}{n!}\right]^{\mu}.$$

Nous avons vu dans le paragraphe VI qu'on peut toujours trouver une valeur de μ positive ou négative, telle qu'aucune des fonctions Q'_i (considérées comme fonctions de n) ne soit d'ordre supérieur à Q'_k et qu'une d'elles au moins ne soit pas d'ordre inférieur.

Soit alors q le degré de Q'_k de telle sorte que

$$\lim \frac{Q'_k}{n^q} = A'_k \qquad (n = \infty)$$

et soit

$$\lim \frac{Q'_i}{n^q} = A'_i \qquad (n = \infty).$$

Nous formerons l'équation

$$(6^{bis}) \qquad \Sigma A'_i z^i = 0$$

dont les racines seront toutes finies sans être toutes nulles. Nous appellerons α celle d'entre elles dont le module est le plus grand; $|\alpha'|$ sera en général une fonction de x, et les courbes de convergence cherchées auront pour équation générale

$$|\alpha'| = \text{const.}$$

Je prendrai pour exemple les polynomes de Legendre ([1]) qui sont liés entre eux par la relation de récurrence bien connue,

$$(1) \qquad P_{n+2} - 2x(2n+3)P_{n+1} + 4(n+1)^2 P_n = 0.$$

Dans ce cas l'équation (6) s'écrit

$$4 = 0,$$

et l'on voit aisément alors qu'elle a deux racines infinies et que, par conséquent, la méthode générale est en défaut. Posons alors

$$P_n = P'_n (n!)^{\mu}.$$

La relation (1) deviendra

$$P'_{n+2}(n+2)^{\mu}(n+1)^{\mu} - 2x(2n+3)(n+1)^{\mu} P'_{n+1} + 4(n+1)^2 P'_n = 0$$

et si l'on prend $\mu = 1$, elle s'écrira

$$(1^{bis}) \qquad (n^2+3n+2)P'_{n+2} - 2x(2n+3)(n+1)P'_{n+1} + 4(n+1)^2 P'_n = 0,$$

([1]) H. Poincaré adopte ici la définition : $P_n = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, c'est-à-dire $P_n = 2^n n! X_n$ où X_n est la désignation courante. (J. D.)

d'où l'on déduit l'équation

$$(6^{bis}) \qquad z^2 - 4xz + 4 = 0.$$

Cette équation ayant pour racines

$$\frac{1}{2} z = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

on en déduit comme plus haut que les courbes de convergence sont des ellipses ayant les points ± 1 pour foyers, ce qui est un résultat bien connu.

Un autre cas exceptionnel, que M. Gourier a bien voulu me signaler, est celui où les racines de l'équation (6) ou de l'équation (6 *bis*) sont indépendantes de x.

Prenons pour exemple les polynomes P_n définis par la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = P_n e^{-x^2},$$

et liés entre eux par la loi de récurrence

$$(1) \qquad P_{n+2} + 2x P_{n+1} + 2(n+1) P_n = 0.$$

L'équation

$$(6) \qquad 2 = 0$$

ayant ses racines infinies, nous poserons

$$P_n = P'_n (n!)^{\frac{1}{2}},$$

d'où résulteront les équations

$$(1^{bis}) \qquad \sqrt{(n+1)(n+2)}\, P'_{n+2} + 2x\sqrt{n+1}\, P'_{n+1} + 2(n+1) P'_n = 0,$$

$$(6^{bis}) \qquad z^2 + 2 = 0.$$

Les racines de l'équation (6^{bis}) sont $\pm\sqrt{-2}$ et sont par conséquent indépendantes de x, de sorte que les règles précédentes se trouvent encore en défaut.

Pour traiter ce cas exceptionnel, imaginons d'abord une relation de récurrence

$$(1) \qquad \Sigma Q_i P_{n+i} = 0,$$

où les coefficients Q_i sont des polynomes entiers en n et en x [ce qui, comme on le voit, n'est pas le cas de la relation (1^{bis})] et formons les équations (4) et (6) correspondantes

$$\sum R_q \frac{d^q y}{dz^q} = S, \tag{4}$$

$$\Sigma A_i z^i = 0. \tag{6}$$

Soit α celle des racines de (6) dont le module est le plus grand; supposons que cette racine soit indépendante de x.

Que dire alors de la série $\Sigma \alpha_n P_n$? Si le rayon de convergence de la série $\Sigma \alpha_n t^n$ est plus grand que $|\alpha|$, la série $\Sigma \alpha_n P_n$ est *toujours* convergente; si ce rayon est plus petit que $|\alpha|$, la série $\Sigma \alpha_n P_n$ n'est jamais convergente; enfin si ce rayon est égal à $|\alpha|$, nous ne pouvons rien dire, ou plutôt le critérium fondé sur la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se trouve en défaut. On doit donc recourir à d'autres critères de convergence des séries; par exemple à celui-ci.

On pose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

et l'on cherche la limite de β_n pour $n = \infty$. Si cette limite a sa partie réelle plus grande que 1, la série est convergente; si elle a sa partie réelle plus petite que 1, la série est divergente.

Appliquons ce principe au problème qui nous occupe.

Écrivons la relation (1) sous la forme suivante, en ordonnant selon les puissances décroissantes de n :

$$n^p \Sigma A_i P_{n+i} + n^{p-1} \Sigma B_i P_{n+i} + \ldots = 0,$$

les A_i et les B_i étant des polynomes en x indépendants de n. Nous savons que l'équation

$$\Sigma A_i z^i = 0 \tag{6}$$

a une racine indépendante de x. Nous pouvons supposer que cette racine est égale à 1, car si elle était égale à α, nous poserions

$$P_n = \alpha^n P'_n,$$

et nous remplacerions les polynomes P_n par les polynomes P'_n, ce qui ne changerait pas les courbes de convergence.

On aura donc

$$\Sigma A_i = 0.$$

J'appelle $F(z)$ le premier membre de l'équation (6), on aura

$$F(1) = 0.$$

Soit donc

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right), \qquad P_{n+2} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right)\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{n+1}\right)\cdots$$

Écrivons maintenant la relation de récurrence (1) en remplaçant les P par ces valeurs et en ordonnant suivant les puissances décroissantes de n. Nous aurons en divisant par P_n

$$n^p \Sigma A_i - n^{p-1}\Sigma A_i \gamma_{n.i} + n^{p-1}\Sigma B_i + \text{des termes en } n^{p-2}, n^{p-3}, \ldots = 0.$$

Dans cette formule, on a posé

$$\gamma_{n.i} = \beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+i-1}.$$

Si $\lim \beta_n = \beta$, on aura

$$\lim \gamma_{n.i} = i\beta.$$

Si l'on remarque que $\Sigma A_i = 0$, on verra que le terme en n^{p-1} qui est le premier terme s'écrit

$$n^{p-1}(\Sigma B_i - \Sigma A_i \gamma_{n.i}).$$

A la limite ce terme doit s'annuler, ce qui donne

$$\beta \Sigma i A_i = \Sigma B_i$$

ou

$$\beta = \frac{\Sigma B_i}{\Sigma i A_i} = \frac{\Sigma B_i}{F'(1)}.$$

Considérons alors une série

$$\Sigma \alpha_n P_n,$$

où

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{n}, \qquad \lim \gamma_n = \gamma.$$

La condition de convergence s'écrira

$$R(\beta + \gamma) > 1.$$

Il résulte de là que les courbes de convergence ont pour équation générale

$$R(\beta) = \text{const.}$$

ou

$$R\left[\frac{\Sigma B_i}{F'(1)}\right] = \text{const.}$$

Ce résultat peut se rattacher à l'étude de l'équation (4) de la manière suivante. Pour cette équation le point $z = \frac{1}{\alpha}$ est un point singulier, mais nous avons montré plus haut comment on peut toujours supposer $\alpha = 1$. Le point singulier que nous avons à considérer est donc $z = 1$. On a alors

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1,$$

et la série $\Sigma P_n z^n$ qui est une intégrale de l'équation (4) est convergente dans le cercle de rayon 1. Nous supposerons que le point $z = 1$ est une racine simple de l'équation (6), alors les racines de l'équation déterminante correspondante seront

$$0, \quad 1, \quad 2. \quad \ldots, \quad p-2, \quad \mu.$$

Cherchons la valeur de μ. Le premier membre de l'équation (4) s'écrit, en reprenant des notations employées un peu plus haut,

$$\sum A_{iq} \frac{d^q y}{dx^q} z^{k+q-i}.$$

Or si l'on remarque que ces notations donnent

$$A_i = A_{ip},$$
$$B_i = A_{i,p-1} + A_{ip}\left[pi - \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right],$$

on verra que les deux premiers termes du premier membre de l'équation (4) seront

$$\Sigma A_i z^{k+p-i} \frac{d^p y}{dz^p} - p\,\Sigma\, i A_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$$
$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{2} \Sigma A_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \Sigma B_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}},$$

pour $z = 1$, le coefficient de $\frac{d^p y}{dz^p}$ s'annule et si l'on divise par $z - 1$, le quotient se réduit à $-F'(1)$; quant au coefficient de $\frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$ il se réduit à

$$\Sigma B_i - p\,F'(1).$$

L'équation déterminante s'écrit alors

$$-F'(1)\rho(\rho-1)\ldots(\rho-p+1) + [\Sigma B_i - p\,F'(1)]\,\rho(\rho-1)\ldots(\rho-p+2) = 0.$$

On tire de là

$$\mu = \frac{\Sigma B_i}{F'(1)} - 1$$

ou

$$\mu = \beta - 1.$$

Il est aisé d'apercevoir le défaut de ce raisonnement. Il *suppose* l'existence de la limite β; je crois qu'il n'y aurait pas de difficulté à *démontrer* cette existence mais cela m'entraînerait trop loin.

Parlons maintenant des cas où la méthode précédente ne s'applique pas, et d'abord revenons sur l'exemple dont nous avons parlé plus haut et considérons les polynomes

$$P_n = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

L'équation (1^{bis}) ordonnée suivant les puissances décroissantes de n s'écrira

$$n(P'_{n+2} + 2P'_n) + \sqrt{n}.2xP'_{n+1} + \left(\frac{3}{2}P'_{n+2} + P'_{n+1}\right) + \ldots = 0.$$

La présence du terme en $\sqrt{n}$ empêche que la méthode précédente puisse s'appliquer. De plus une autre difficulté, spéciale également au cas qui nous occupe, vient encore s'ajouter à la première. En effet, l'équation

$$(6^{bis}) \qquad z^2 + 2 = 0$$

a deux racines de même module. On en conclut que l'on peut poser

$$P'_n = Q_n + R_n,$$

Q_n et R_n étant des fonctions de x telles que

$$\lim \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = +i\sqrt{2}, \qquad \lim \frac{R_{n+1}}{R_n} = -i\sqrt{2},$$

tandis qu'en général $\frac{P'_{n+1}}{P'_n}$ ne tend vers aucune limite.

De plus Q_n et R_n satisfont à la même relation de récurrence que P'_n. Posons alors

$$Q_n = Q'_n i^n 2^{\frac{n}{2}}, \qquad R_n = R'_n(-i)^n.2^{\frac{n}{2}},$$

il viendra

$$(1^{ter}) \qquad n(-Q'_{n+2} + Q'_n) + \sqrt{2n}\, 2ixQ'_{n+1} + \ldots = 0,$$

$$(1^{quater}) \qquad n(-R'_{n+2} + R'_n) - \sqrt{2n}.2ixR'_{n+1} + \ldots = 0.$$

Posons ensuite

$$Q'_{n+1} = Q'_n\left(1 - \frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right); \qquad Q_{n+2} = Q'_{n+1}\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right).$$

La relation (1^{ter}) ordonnée suivant les puissances décroissantes de n s'écrira

$$\sqrt{n}(\beta_n + \beta_{n+1}) + \sqrt{2n}\, 2ixQ'_{n+1} + \ldots = 0,$$

d'où

$$\lim \beta_n = -ix\sqrt{2}, \qquad \text{pour} \qquad (n = \infty).$$

Si de même on pose

$$R'_{n+1} = R'_n\left(1 - \frac{\beta'_n}{\sqrt{n}}\right),$$

on trouvera

$$\lim \beta'_n = 2ix\sqrt{2}.$$

Soit maintenant la série

$$\Sigma \alpha_n Q'_n$$

et

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}, \qquad \lim \gamma_n = \gamma = \gamma_0 + i\gamma_1.$$

La condition de convergence sera

$$\text{partie réelle de } (\gamma + 2ix\sqrt{2}) > 0.$$

En conséquence les conditions de convergence de la série

$$\Sigma \alpha_n P'_n$$

s'écriront

$$(\text{partie imaginaire de } x)^2 < \frac{1}{8}\gamma_0^2.$$

Les régions de convergence sont donc limitées par deux droites parallèles à l'axe des quantités réelles et situées, de part et d'autre, à égale distance de cet axe. L'ensemble de deux de ces droites forme une courbe de convergence.

De même, en supposant que les coefficients de la relation (1) soient des polynomes entiers en n, auquel cas la difficulté précédente serait écartée, la méthode exposée plus haut serait encore en défaut, si $F'(1)$ était nul. Voici comment il faudrait opérer dans ce cas :

1° Supposons que $F'(1)$ soit nul sans que ΣB_i le soit. On posera

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right).$$

Supposons, pour fixer les idées, $k = 2$; la relation (1) s'écrira

$$Q_2\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right) + Q_1\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right) + Q_0 = 0.$$

Il vient en ordonnant suivant les puissances décroissantes de n et en posant

$$Q_i = A_i n^p + B_i n^{p-1} + \ldots,$$

$$n^p(A_2 + A_1 + A_0) - \beta n^{p-\frac{1}{2}}(2A_2 + A_1) + n^{p-1}(B_2 + B_1 + B_0)$$
$$+ A_2 n^{p-1}\beta^2 + n^{p-1}(\gamma_{n+1}A_2 + \gamma_n A_2 + \gamma_n A_1) + \ldots = 0.$$

Soit

$$\lim \gamma_n = \gamma,$$

d'où

$$\lim(\gamma_{n+1}A_2 + \gamma_n A_2 + \gamma_n A_1) = \gamma\, F'(1);$$

il viendra, en tenant compte de

$$\begin{aligned} F(1) &= A_2 + A_1 + A_0 = 0, \\ F'(1) &= 2A_2 + A_1 \quad = 0, \end{aligned}$$

et en divisant par n^{p-1}

$$A_2\beta^2 + B_2 + B_1 + B_0 + H = 0,$$

H représentant des termes qui s'annulent avec $\frac{1}{n}\cdot$ On tire donc de là

$$\beta^2 = \frac{-\Sigma B_i}{A_2}.$$

Les courbes de convergence ont pour équation générale

$$\text{partie réelle de } \beta = \text{const.}$$

2° Supposons maintenant que $F'(1)$ et ΣB_i soient nuls à la fois; dans ce cas le point $z=1$ est un point singulier pour l'équation (4) dans le voisinage duquel les intégrales sont régulières. (Elles sont irrégulières lorsque $F'(1)$ est nul sans que ΣB_i le soit). Les racines de l'équation déterminante seront

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad p-3,\quad \mu' \quad \text{et} \quad \mu''.$$

Si l'on pose

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right),$$

on aura

$$\lim \beta_n = \mu + 1,$$

μ étant celle des racines μ' et μ'' dont la partie réelle est la plus petite.

VIII. — Résumé.

Dans ce travail je me suis proposé plusieurs buts, mais le premier et le plus important d'entre eux était de contribuer à l'étude des intégrales des équations linéaires dans le voisinage d'un point donné. Si en effet nos connaissances sont assez complètes à ce sujet lorsque le point donné est un point singulier à intégrales régulières, nous ne savons presque rien sur les intégrales irrégulières. J'ai cru qu'il ne serait pas inutile de montrer comment on peut trouver une fonction simple dont le rapport à l'intégrale étudiée tende vers l'unité quand on se rapproche du point singulier. C'était un premier pas dans l'étude de ces intégrales irrégulières.

Pour atteindre ce but, j'ai dû employer comme auxiliaire la transformation de Laplace, et j'ai été amené en passant, à compléter la théorie de cette transformation, comme nous le permettent les progrès récents de nos connaissances sur les variables imaginaires. J'ai rencontré ainsi deux théorèmes qui peuvent d'ailleurs se démontrer aisément sans l'aide de la transformation de Laplace.

En premier lieu, si une équation linéaire d'ordre n a pour coefficients des polynomes de degré p en x, elle admettra $(n-p)$ intégrales indépendantes holomorphes dans tout le plan.

Le second théorème peut faciliter la recherche des cas où une équation linéaire admet comme intégrale un polynome entier.

Les équations différentielles linéaires présentent la plus étroite analogie avec les équations aux différences finies de forme linéaire, ou en d'autres termes, avec les relations linéaires de récurrence entre $(k+1)$ quantités consécutives

$$u_{n+k},\quad u_{n+k-1},\quad \ldots,\quad u_{n+1},\quad u_n.$$

Cette analogie se poursuit dans les résultats, et la même méthode qui permet d'étudier les intégrales irrégulières des équations différentielles, nous donne, dans le cas des relations de récurrence, la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour n infini.

Ce résultat a une application immédiate dans la recherche des courbes de convergence des séries ordonnées suivant des polynomes [récurrents], c'est-à-dire des séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots,$$

lorsque les P sont des polynomes entiers en x et qu'il y a une relation de récurrence entre $k+1$ polynomes consécutifs.

Ces considérations font comprendre comment j'ai été conduit à réunir dans un même travail des recherches en apparence très différentes et expliquent un défaut d'unité que je prie le lecteur de vouloir bien excuser.

Paris, 10 novembre 1884.

SUR
LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES
DES
ÉQUATIONS LINÉAIRES

Acta mathematica, t. 8, p. 295-344 (1886).

I. — Séries asymptotiques.

Tous les géomètres connaissent les curieuses propriétés de la série de Stirling. Cette série :

$$\log\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^3} - \ldots,$$

est toujours divergente. Cependant, on peut en faire légitimement usage pour les valeurs très grandes de x. En effet, les termes après avoir décru avec une très grande rapidité, croissent ensuite au delà de toute limite. Mais si l'on s'arrête au plus petit terme, l'erreur commise sur la valeur de $\log\Gamma(x+1)$ est très petite.

En d'autres termes, la série de Stirling représente asymptotiquement la fonction $\log\Gamma(x+1)$; c'est-à-dire que si S_n est la somme des premiers termes de cette série jusques et y compris le terme

$$\pm\frac{B_n}{2n(2n-1)}\frac{1}{x^n},$$

l'expression

$$x^{n+1}[\log\Gamma(x+1) - S_n]$$

tendra vers zéro quand x croîtra indéfiniment.

Il existe évidemment une infinité de séries dont les termes après avoir décru très rapidement croissent au delà de toute limite. Si, par exemple,

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots$$

sont une série de nombres tous plus petits que 1, mais ne tendant pas vers zéro, la série

$$\frac{A_1}{x}.1 + \frac{A_2}{x^2}.1.2 + \ldots + \frac{A_n}{x^n}.1.2.3\ldots n + \ldots$$

sera divergente, et l'on y trouvera des termes aussi grands qu'on voudra. Mais cependant si x est très grand, les premiers termes décroissent très rapidement. Ainsi, si $x = n$ et que n soit très grand, le $n^{\text{ième}}$ terme

$$\frac{A_n}{n^n} 1.2\ldots n < 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < n\,e^{-n}$$

est extrêmement petit.

Je dirai qu'une série divergente

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots, \tag{1}$$

où la somme des $(n+1)$ premiers termes est S_n, représente *asymptotiquement* une fonction $J(x)$ si l'expression

$$x^n(J - S_n)$$

tend vers zéro quand x croît indéfiniment. En effet, si x est suffisamment grand, on aura

$$x^n(J - S_n) < \varepsilon,$$

ε étant très petit ; l'erreur

$$J - S_n = \frac{\varepsilon}{x^n}$$

commise sur la fonction J, en prenant les $n+1$ premiers termes de la série, est alors extrêmement petite. De plus, elle est beaucoup plus petite que l'erreur commise en prenant seulement n termes, et qui est égale à

$$J - S_{n-1} = \frac{A_n + \varepsilon}{x^n},$$

ε étant très petit et A_n fini.

Il résulte donc de là que la série (1) se comportera tout à fait comme la série de Stirling ; que, si x est très grand, ses termes décroîtront d'abord rapidement pour croître ensuite au delà de toute limite, et que malgré sa divergence, il sera légitime de s'en servir dans le calcul de J. Je dirai aussi quelquefois pour abréger que la série (1) est une *série asymptotique*.

On peut multiplier l'une par l'autre deux séries asymptotiques d'après les mêmes règles que les séries ordinaires. Soit en effet, asymptotiquement,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} J(x) &= A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots, \\ J'(x) &= A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \frac{A'_2}{x^2} + \ldots + \frac{A'_n}{x^n} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

en définissant S_n et S'_n comme plus haut,

$$S_n = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_n}{x^n},$$

$$S'_n = A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \ldots + \frac{A'_n}{x^n}.$$

Les deux équations (2) signifient que

$$(3)\qquad \lim_{x=\infty} x^n(J - S_n) = \lim_{x=\infty} x^n(J' - S'_n) = 0.$$

Faisons le produit de nos deux séries d'après la même règle que si elles étaient convergentes ; soient

$$\Sigma = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots + \frac{B_n}{x^n} + \ldots$$

et Σ_n la somme de ses n premiers termes.

Comme S_n, S'_n et Σ_n sont simplement des polynomes en $\frac{1}{x}$, on aura évidemment.

$$\lim x^n(S_n S'_n - \Sigma_n) = 0.$$

On a, de plus,

$$\lim \frac{J}{S_n} = \lim \frac{J'}{S'_n} = 1, \qquad \lim \frac{J}{A_0} = \lim \frac{J'}{A'_0} = 1.$$

C'est une conséquence immédiate des équations (3).

Il vient alors

$$J = S_n + \frac{\varepsilon}{x^n}, \qquad J' = S'_n + \frac{\varepsilon'}{x^n},$$

$$\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0,$$

d'où

$$JJ' = S_n S'_n + \frac{S'_n \varepsilon + S_n \varepsilon' + \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{x^n}}{x^n};$$

S'_n tend vers A'_0 et ε vers zéro ; donc $S'_n \varepsilon$ tend vers zéro. De même $S_n \varepsilon'$ et $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{x^n}$ tendent vers zéro. Donc

$$\lim x^n(JJ' - S_n S'_n) = 0$$

et, par conséquent,

$$\lim x^n(JJ' - \Sigma_n) = 0,$$

ce qui veut dire que l'on a, asymptotiquement,

$$JJ' = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, il est permis d'élever une série asymptotique au carré ou à une puissance quelconque. Soit maintenant

$$(4) \qquad F(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_n z^n + \ldots$$

une fonction holomorphe de z dans le voisinage de $z = 0$; la série du second membre sera cette fois convergente. Soit

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots$$

une série divergente représentant asymptotiquement une fonction J. Si l'on élève la série $S - A_0$ à la puissance n d'après la même règle que si elle était convergente, on obtiendra une série $(S - A_0)^n$ ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et représentant asymptotiquement $(J - A_0)^n$.

Formons ensuite la série divergente

$$B_0 + B_1(S - A_0) + \ldots + B_n(S - A_0)^n + \ldots$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous obtiendrons une série divergente

$$\Sigma = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots,$$

dont la somme des $(n+1)$ premiers termes sera Σ_n. Je dis qu'elle représentera asymptotiquement la fonction $F(J - A_0)$.

En effet Σ_n et

$$\Sigma'_n = B_0 + B_1(S_n - A_0) + B_2(S_n - A_0)^2 + \ldots + B_n(S_n - A_0)^n$$

sont deux polynomes entiers en $\frac{1}{x}$ dont les termes de degré inférieur à $(n+1)$ ne diffèrent pas. On aura donc

$$\lim_{x=\infty} x^n(\Sigma_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Je dis maintenant que

$$\lim x^n[F(J - A_0) - \Sigma'_n] = 0.$$

En effet, on aura évidemment

$$\lim x^n[B_k(J - A_0)^k - B_k(S_n - A_0)^k] = 0,$$

puisque $(S - A_0)^k$ représente asymptotiquement $(J - A_0)^k$. Posons

$$T_n = B_0 + B_1(J - A_0) + \ldots + B_n(J - A_0)^n,$$

il viendra

$$\lim x^n(T_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Il reste à démontrer que

$$\lim x^n(F - T_n) = 0.$$

Or, il vient

$$F - T_n = B_{n+1}(J - A_0)^{n+1} + B_{n+2}(J - A_0)^{n+2} + \ldots$$

ou, puisque la série (4) est convergente,

$$|F - T_n| < M|J - A_0|^{n+1} < M|x(J - A_0)|^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}},$$

M étant une constante positive assignable. Or, on a

$$\lim x(J - A_0) = A_1, \qquad \lim x^n \frac{1}{x^{n+1}} = 0,$$

d'où

$$\lim x^n |F - T_n| = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, il est permis de substituer une série asymptotique dans le développement d'une fonction holomorphe comme s'il s'agissait d'une série convergente.

Soit, par exemple,

$$S = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots$$

une série représentant asymptotiquement une fonction J. Élevons-la au carré, au cube, etc., et appelons S^2, S^3, ... les séries divergentes ainsi obtenues.

Formons la série

$$1 + S + S^2 + S^3 + \ldots + S^n + \ldots,$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous obtiendrons ainsi une série Σ qui représentera asymptotiquement la fonction

$$\frac{1}{1 - J}.$$

Cela montre que l'on peut diviser l'une par l'autre deux séries asymptotiques pourvu que le premier terme A_0 de la série diviseur ne soit pas nul.

En effet, si l'on a par exemple

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots = J,$$

$$S' = A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \ldots = J',$$

la série $\frac{J'}{J}$ sera représentée asymptotiquement par la série divergente

$$\frac{S'}{A_0}+\frac{S'}{A_0^2}(A_0-S)+\frac{S'}{A_0^3}(A_0-S)^2+\ldots$$

qui est facile à former.

Il est permis d'intégrer [terme à terme] une série asymptotique. Ainsi, si l'on a asymptotiquement

$$J=\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\ldots+\frac{A_n}{x^n}+\ldots=S,$$

je dis qu'on aura asymptotiquement

$$\int_x^\infty J\,dx=\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{2x^2}+\ldots+\frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}}+\ldots=S'.$$

En effet, la première équation signifie que l'on peut prendre x assez grand pour que

$$|J-S_n|<\frac{\varepsilon}{x^n}$$

quelque petit que soit ε.

On en déduit

$$\left|\int_x^\infty J\,dx-\int_x^\infty S_n\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}},$$

ce qui veut dire que S′ représente asymptotiquement $\int J\,dx$.

C. Q. F. D.

Il ne serait pas permis, au contraire, de différentier [terme à terme] une série asymptotique.

Nous dirons aussi quelquefois, si F, Φ et J sont trois fonctions de x, que J est représenté asymptotiquement par la série

$$\Phi+FA_0+\frac{FA_1}{x}+\frac{FA_2}{x^2}+\ldots$$

quand la série

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots$$

représentera asymptotiquement la fonction $\frac{J-\Phi}{F}$

Il résulte, par exemple, de l'analyse qui précède, que si l'on pose

$$F=e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x},$$

on aura asymptotiquement

$$\Gamma(x+1) = F + \frac{C_1 F}{x} + \frac{C_2 F}{x^2} + \ldots,$$

les C étant des coefficients faciles à calculer ; les premiers ont pour valeur

$$C_1 = \frac{B_1}{1.2}, \qquad C_2 = -\frac{B_2}{3.4} + \frac{B_1^2}{8}, \qquad \ldots.$$

Nous avons dit jusqu'ici que x croissait indéfiniment, sans dire de quelle manière ; mais il a été sous-entendu que cette variable croissait par valeurs réelles positives. Il est toutefois évident que la théorie n'est pas changée quand on suppose que x tend vers l'infini avec un argument déterminé différent de zéro.

Voici maintenant une remarque très importante pour ce qui va suivre : Une série divergente ne peut pas représenter une même fonction J quel que soit l'argument avec lequel x tend vers l'infini.

Je dis, en effet, que

$$x^2\left(J - A_0 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2}\right)$$

ne peut pas tendre vers zéro pour tous les arguments de x (ou du moins ne peut pas tendre uniformément vers zéro), sans quoi J serait une fonction holomorphe de $\frac{1}{x}$, et la série serait convergente.

On peut se demander si, pour un même argument de x, une même série peut représenter asymptotiquement plusieurs fonctions différentes. La réponse doit être affirmative.

Il suffit, pour s'en assurer, de vérifier qu'il y a des fonctions J qui sont représentées asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, c'est-à-dire des fonctions telles que

$$\lim J x^n = 0$$

quel que soit n, quand x croît indéfiniment par valeurs positives.

Tel est, en effet, le cas de la fonction

$$J = e^{-x}.$$

En revanche, pour un même argument de x, une même fonction ne peut être représentée asymptotiquement que par une seule série.

II. — Séries normales.

Je vais maintenant rappeler succinctement les principaux résultats obtenus par MM. Fuchs et Thomé au sujet des équations linéaires.

Soit

$$\text{(1)} \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

une équation où les coefficients P sont des polynomes entiers en x. Je me propose d'étudier les intégrales pour les valeurs très grandes de $|x|$.

Si le degré des polynomes P_n, P_{n-1}, ..., P_0 va constamment en décroissant, il y a n séries de la forme suivante :

$$\text{(2)} \qquad x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right),$$

qui satisfont formellement à l'équation et qui, de plus, convergent si $|x|$ est assez grand. En d'autres termes, il y a n intégrales régulières.

Les valeurs de α sont données par une certaine équation déterminante ; il y a exception dans le cas où la différence de deux racines de cette équation devient un entier ; le $\log x$ peut alors s'introduire dans les séries.

Si le degré des polynomes P ne va jamais en croissant, mais ne va pas toujours en décroissant, et si le degré de P_0 est plus petit que celui de P_n, il y a dans certains cas m séries de la forme (2) $(m < n)$ qui satisfont formellement à l'équation, mais elles ne convergent pas toujours.

Enfin, si on laisse de côté certains cas limités et exceptionnels dont je parlerai plus loin, on démontre qu'il y a n séries de la forme suivante :

$$\text{(3)} \qquad e^Q x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right)$$

qui satisfont formellement à l'équation ; Q est un polynome entier en x. Une pareille série s'appellera une série *normale*, et elle sera d'*ordre* p si le polynome Q est d'ordre p.

Malheureusement ces séries normales ne sont pas toujours convergentes. Si l'une d'elles converge, on dira que l'équation admet une *intégrale normale*. Mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement.

Passons maintenant à l'examen de divers cas exceptionnels.

Le polynome Q étant supposé connu, α nous sera donné par une équation déterminante. Dans le cas où cette équation a deux ou plusieurs racines différant entre elles d'un entier, il peut y avoir exception, et l'on peut trouver au lieu d'une série normale proprement dite une série de la forme suivante :

$$e^{Q} x^{\alpha}[\psi_0 + \log x . \psi_1 + \log^2 x . \psi_2 + \ldots + \log^q x . \psi_q],$$

les ψ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Nous appellerons une pareille série, *série normale logarithmique* d'ordre p.

Soit a le coefficient de x^p dans Q, et supposons qu'aucune des séries normales qui satisfont à l'équation (1) ne soit d'ordre supérieur à p. Il arrivera alors que a nous sera donné par une certaine équation facile à former.

Dans le cas où cette équation a des racines multiples, il peut arriver que le procédé qui permet de former les séries normales devienne illusoire. M. Fabry, dans une thèse récemment soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, a fait voir que l'on peut former alors des séries de la forme suivante :

$$e^{Q} x^{\alpha} \psi,$$

où Q est un polynome entier de degré $> (p-1)n$ et $\leq pn$ en $x^{\frac{1}{n}}$ et où ψ est ordonné suivant les puissances croissantes de $x^{-\frac{1}{n}}$. Ces séries, généralement divergentes, satisfont formellement à l'équation (1).

J'appellerai une pareille série, *série anormale* d'ordre p.

Voyons comment l'ordre des séries normales se rattache au degré des polynomes P. Soit M_i le degré de P_i. Soit

$$N_i = \frac{M_i - M_n}{n - i}.$$

Soit h la plus grande des n quantités N_i. Soit p l'entier qui est égal ou immédiatement supérieur à h. On trouve que toutes les séries normales ou anormales qui satisfont formellement à l'équation (1) sont d'ordre p au plus.

Je vais démontrer la réciproque.

J'appellerai le nombre h le *rang* de l'équation (1). Je vais faire voir que si n séries normales d'ordre égal ou inférieur à p satisfont formellement à une équation linéaire de la forme (1), cette équation est au plus de rang p.

En effet, l'équation peut s'écrire, en la divisant par P_n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + F_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + F_1 \frac{dy}{dx} + F_0 y = 0,$$

les F étant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de x. La série F_i commencera par un terme $x^{M_i - M_n}$ et l'une au moins des séries F_i commencera par un terme $x^{h(n-i)}$.

Cela posé, soient

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

n séries normales d'ordre p satisfaisant formellement à l'équation. Appelons S_i^k la dérivée $k^{\text{ième}}$ de S_i formée d'après les règles ordinaires du calcul, en différentiant chaque terme comme si la série était convergente, puis en ordonnant. Formons un tableau de n lignes et de $(n+1)$ colonnes où le $i^{\text{ème}}$ terme de la première colonne est S_i, et où le $i^{\text{ième}}$ terme de la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne est S_i^k. Soit Δ_k le déterminant formé en supprimant dans le tableau la $k^{\text{ième}}$ colonne. On calculera ce déterminant par les règles ordinaires du calcul, et l'on obtiendra une série divergente que l'on ordonnera de la même manière que les séries S.

Quant au quotient

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{n+1}},$$

si on l'effectue, d'après la règle ordinaire de la division des séries, on obtient une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x qui doit être identique à $\pm F_i$, et qui, par conséquent, est convergente.

Mais on voit sans peine, d'après la loi même de sa formation, qu'elle ne peut commencer que par un terme d'ordre $p(n-i)$ en x au plus.

On a donc

$$h \leqq p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'ailleurs, supposons que l'on ait une équation de rang $(p+1)$, et que l'on forme l'équation qui donne le coefficient de x^{p+1} dans les polynomes Q. Si toutes les séries normales étaient d'ordre p ou au-dessous, toutes les racines de cette équation devraient être nulles, et il est aisé de voir alors que le rang de l'équation différentielle s'abaisserait.

III. — Cas du premier ordre.

Nous commencerons par nous restreindre au cas où toutes les séries normales sont de premier ordre, c'est-à-dire où dans l'équation

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

le degré d'aucun des polynomes P ne surpasse le degré m de P_n. Soit alors A_t

le coefficient de x^m dans P_i; nous formerons l'équation

$$A_n a^n + A_{n-1} a^{n-1} + \ldots + A_1 a + A_0 = 0.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de cette équation que je supposerai d'abord toutes distinctes. L'équation (1) sera satisfaite alors par n séries normales du premier ordre de la forme suivante

$$e^{a_1 x} x^{\alpha_1} \varphi_1, \quad e^{a_2 x} x^{\alpha_2} \varphi_2, \quad \ldots, \quad e^{a_n x} x^{\alpha_n} \varphi_n;$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes convenablement choisies, et où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Considérons la transformée de Laplace de notre équation (1) pour laquelle je renverrai à mon Mémoire *sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*, inséré au Tome 7 de l'*American Journal of Mathematics* [1]. Cette transformée pourra s'écrire

$$(3) \qquad Q_m \frac{d^m v}{dx^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dv}{dz} + Q_0 v = 0.$$

Les Q sont des polynomes de degré n au plus en z, et l'on a

$$Q_m = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n).$$

L'équation (3) admet alors n points singuliers simples,

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad \ldots, \quad z = a_n.$$

Formons l'équation déterminante relative au point singulier $z = a_i$. Les racines de cette équation seront

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-2, \quad \beta_i.$$

Je supposerai d'abord que β_i n'est pas entier positif ou négatif. Il existera alors $(m-1)$ intégrales de l'équation (3) qui seront holomorphes dans le voisinage du point $z = a_i$ et une $m^{\text{ième}}$ que j'appellerai v_i et qui sera de la forme suivante :

$$(4) \qquad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1 (z - a_i)^{\beta_i + 1} + C_2 (z - a_i)^{\beta_i + 2} + \ldots.$$

Construisons maintenant un contour fermé k_i de la façon suivante. Du point a_i comme centre avec un rayon très petit, décrivons un cercle. Par le point a_i

---

(1) Ce Tome, p. 226.

menons une droite parallèle à l'axe des quantités réelles, et prolongeons-la indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives; elle coupera notre petit cercle en un certain point b_i. Cela posé, le contour k_i sera formé comme il suit; on suivra d'abord la droite que je viens de définir depuis l'infini jusqu'au point b_i, puis on fera le tour du petit cercle pour revenir au point b_i, et enfin on retournera du point b_i à l'infini en suivant la droite.

Si l'on se reporte au Mémoire cité (*American Journal of Mathematics*, t. 7), on verra que l'intégrale suivante

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz$$

prise le long du contour k_i est une intégrale de l'équation (1) pourvu que la partie réelle de x soit suffisamment grande, et en particulier si x est positif et très grand.

Nous décomposerons cette intégrale J_i en trois autres

$$J_i = J_i' + J_i'' + J_i''',$$

la première J_i' étant prise le long de notre droite de l'infini à b_i; la seconde J_i'' étant prise le long du petit cercle qui a pour centre le point a_i et qui passe par le point b_i; et la troisième J_i''' étant prise le long de la droite suivie en retour depuis b_i jusqu'à l'infini.

J'ai montré dans le Mémoire cité qu'on peut trouver deux quantités D et D' telles que

$$\lim \frac{J_i'}{x^{-1} e^{b_i x}} = D, \qquad \lim \frac{J_i'''}{x^{-1} e^{b_i x}} = D',$$

lorsque x tend vers l'infini par valeurs réelles positives.

Comme, par construction, la partie réelle de b_i est plus petite que celle de a_i, on peut en conclure qu'on aura

$$\lim x^q e^{-a_i x}(J_i' + J_i''') = 0,$$

quel que soit q.

Écrivons

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - \alpha_i)^{\beta_i+1} + \ldots + C_k(z - a_i)^{\beta_i+k} + R_k,$$

R_k étant le reste de la série (4). Je puis prendre le rayon de notre petit cercle assez petit pour que cette série soit convergente.

On a alors

$$J_i'' = \int (z - a_i)^{\beta_i} e^{zx} dz + \ldots + C_k \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zx} dz + \int R_k e^{zx} dz,$$

les intégrales étant prises le long du petit cercle.

J'ai montré dans le Mémoire cité que l'expression suivante

$$x^q e^{-a_i x} \int \mathrm{R}_k e^{zx} \, dz$$

tend *uniformément* vers zéro pour toutes les valeurs de x quand k croît indéfiniment.

Cela est vrai d'ailleurs, quel que soit q.

D'autre part, l'expression suivante

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} \, dz$$

est représentée asymptotiquement par l'expression

$$(e^{2i\pi h} - 1)\Gamma(h+1)x^{-h-1} e^{a_i x}.$$

Je veux dire que la différence de ces deux expressions multipliée par $x^q e^{-a_i x}$ tend vers zéro quand x grandit indéfiniment.

Il résulte de là que J_i'', et par conséquent J_i, est représenté asymptotiquement par la série suivante :

$$\frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i+1}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 1) + \mathrm{C}_1 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i+2}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 2)$$
$$+ \mathrm{C}_2 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i+3}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 3) + \ldots$$

Or, il est aisé de vérifier que cette série n'est autre chose que la série normale

$$e^{a_i x} x^{\alpha_i} \varphi_i$$

que nous avons définie plus haut. (On a $\alpha_i = -\beta_i - 1$.)

Ainsi, *une série normale du premier ordre, alors même qu'elle est divergente, représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation à laquelle elle satisfait formellement.*

Cette série normale pourra s'écrire, à un facteur constant près,

$$\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+1}} + \mathrm{C}_1(\beta_i + 1)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+2}} + \mathrm{C}_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+3}} + \ldots.$$

Ainsi, à chaque point singulier simple de l'équation (3) correspondra une intégrale de l'équation (1) et une série normale qui la représente asymptotiquement. J'ai supposé jusqu'ici que x tendait vers l'infini par valeurs réelles positives ; mais cela reste vrai quand x tend vers l'infini avec un argument donné, différent de zéro.

Il faut toutefois faire attention à une chose. A chaque point singulier a_i correspond une intégrale de (1), quel que soit l'argument de x; mais quand cet argument varie, cette intégrale ne reste pas la même; pour certaines valeurs de cet argument, cette intégrale se change brusquement en une autre qui n'en est pas la continuation analytique. C'est ce que j'ai exposé en détail dans le paragraphe V du Mémoire cité.

Comme à un point singulier correspond toujours la même série normale, il en résulte que la même série normale ne représentera pas asymptotiquement la même intégrale quand l'argument x variera, si ce n'est dans des cas exceptionnels.

Passons maintenant aux cas particuliers.

Nous supposerons d'abord que β_i étant entier, l'intégrale v_i contienne un logarithme. Soit

$$v_i = \varphi + \log(z - a_i)\psi,$$

φ et ψ étant holomorphes dans le voisinage de $z = a_i$. On aura alors

$$J_i = \int e^{zx}[\varphi + \psi \log(z - a_i)]\, dz = \int e^{zx}\psi\, dz \log(z - a_i),$$

les intégrales étant prises le long de k_i. Ici encore nous aurons

$$J_i = J'_i + J''_i + J'''_i,$$

en divisant le contour k_i en trois parties comme il a été dit plus haut, et de plus,

$$\lim x^q e^{-a_i x}(J'_i + J'''_i) = 0.$$

Soit

$$\psi = C_0(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + \ldots$$

une série que nous supposerons convergente tout le long du petit cercle.

Nous aurons alors

$$x^q e^{-a_i x} J''_i = \Sigma C_k \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zx} \log(z - a_i) e^{-a_i x} x^q\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du petit cercle. La série du second membre sera uniformément convergente quel que soit x, ainsi qu'il a été dit plus haut. Il reste donc à trouver la valeur asymptotique de l'intégrale

$$j_{i,k} = \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zx} \log(z - a_i)\, dz$$

prise le long du petit cercle. D'autre part, appelons j_{ik} la même intégrale prise le long du contour k_i tout entier et décomposons-là en trois parties :

$$j_{ik} = j'_{ik} + j''_{ik} + j'''_{ik}$$

comme l'intégrale J_i elle-même. Nous aurons encore

$$\lim x^q e^{-a_i x}(j'_{ik}+j'''_{ik}) = 0,$$

et, par conséquent, la valeur asymptotique de j''_{ik} sera la même que celle de j_{ik}.

Calculons donc j_{ik}. Il vient

$$\int (z-a_i)^h e^{zx}\,dz = (e^{2i\pi h}-1)\,\Gamma(h+1)x^{-h-1}e^{a_i x},$$

lorsque l'intégrale est prise le long du contour k_i. En différentiant par rapport à h, il vient

$$\int (z-a_i)^h e^{zx}\log(z-a_i)\,dz = 2i\pi\, e^{2i\pi h}\,\Gamma(h+1)x^{-h-1}e^{a_i x} + (e^{2i\pi h}-1)D,$$

D désignant la dérivée de $\Gamma(h+1)x^{-h-1}e^{a_i x}$ par rapport à h. Si l'on fait $h=\beta_i+k$, et si l'on tient compte de ce fait que β_i est entier, il viendra

$$j_{ik} = 2i\pi\,\Gamma(\beta_i+k+1)x^{-\beta_i-k-1}e^{a_i x}.$$

Il résulte de là que J_i est représenté asymptotiquement par la série

$$\Sigma\, C_k j_{ik} = 2i\pi\,\Sigma\, C_k\,\Gamma(\beta_i+k+1)x^{-\beta_i-k-1}e^{a_i x},$$

qui est précisément la série normale

$$e^{a_i x}x^{\alpha_i}\varphi_i.$$

Le théorème démontré plus haut subsiste donc encore dans ce cas.

La formule qui donne J_i quand on connaît v_i devient illusoire quand β_i est entier positif et qu'il n'y a pas de logarithme dans l'intégrale v_i; car alors l'intégrale

$$\int v_i e^{zx}\,dz$$

prise le long du contour k_i est nulle. Il convient alors de remplacer le contour k_i par un chemin d'intégration différent. On prendra pour ce chemin une droite menée à partir de a_i parallèlement à l'axe des quantités réelles et prolongée indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives. On verra ainsi que le théorème subsiste encore. Je dois ajouter que si β_i est entier positif sans que v_i contienne le logarithme, β_i devra être supérieur à $(m-1)$.

Considérons, par exemple, l'équation suivante :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = (\alpha^2x^2+2)y$$

qui admet pour intégrales

$$e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x}-\alpha\right) \quad \text{et} \quad e^{-\alpha x}\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)$$

et dont la transformée de Laplace est

$$(z^2-\alpha^2)\frac{d^2 v}{dz^2}+4z\frac{dv}{dz}=0,$$

qui admet pour intégrales

$$v_0=1 \qquad \text{et} \qquad v_1=\int\frac{dz}{(z^2-\alpha^2)^2}=\mathrm{F}+\mathrm{C}\log\frac{z-\alpha}{z+\alpha},$$

C étant une constante et F une fonction rationnelle.

Nous considérerons deux contours fermés k et k', formés comme le contour k_1 défini plus haut, et enveloppant, le premier le point α, le second le point $-\alpha$. Nous prendrons alors les intégrales

$$\int_k v_1 e^{zx}\,dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_1 e^{zx}\,dz,$$

et nous obtiendrons ainsi deux intégrales de l'équation en y. Or, nous avons, à un facteur constant près, $-4\alpha^3$,

$$v_1=\log(z-\alpha)+\frac{\alpha}{z-\alpha}+\Phi,$$

Φ étant holomorphe dans le voisinage du point $z=\alpha$. On aura donc

$$\int_k v_1 e^{zx}\,dz=\int_k e^{zx}\,dz\left[\log(z-\alpha)+\frac{\alpha}{z-\alpha}\right]=2i\pi e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x}-\alpha\right).$$

La seconde intégrale nous donnerait de même

$$2i\pi e^{-\alpha x}\left(\frac{1}{x}+\alpha\right).$$

Nous avons ainsi intégré l'équation en y, en nous servant seulement de l'intégrale v_1 et sans employer l'intégrale v_0. Il importe cependant pour notre objet de montrer que l'on pourrait tirer quelque chose de cette dernière intégrale.

Traçons à partir du point α une droite et prolongeons-la indéfiniment dans un sens. Si v_0 s'annulait ainsi que sa dérivée au point α, l'intégrale

$$\int v_0 e^{zx}\,dz$$

prise le long de cette droite serait une intégrale de l'équation en y et il n'y aurait rien à ajouter. Mais v_0 ne s'annule pas.

Voici donc ce que nous ferons; posons

$$y' = e^{\alpha x} \frac{d^2}{dx^2}(y\, e^{-\alpha x});$$

y' satisfera comme y à une équation du deuxième ordre facile à former. Pour obtenir la transformée de Laplace de cette équation, il suffira de poser dans la transformée de l'équation en y

$$v' = v(z-\alpha)^2.$$

L'une des intégrales sera donc

$$v'_0 = v_0(z-\alpha)^2 = (z-\alpha)^2.$$

Comme cette intégrale s'annule au point α ainsi que sa dérivée, l'intégrale

$$\int v'_0\, e^{zx}\, dz = \int (z-\alpha)^2\, e^{zx}\, dz$$

prise le long de la droite qui aboutit au point α satisfera à l'équation en y'; on aura donc

$$y' = \int (z-\alpha)^2\, e^{zx}\, dz = C\frac{e^{\alpha x}}{x^3},$$

C étant un facteur constant. On en tire

$$y = C\, e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x} + \beta + \gamma x\right),$$

β et γ étant deux constantes d'intégration. On voit qu'il faut prendre

$$\beta = -\alpha, \qquad \gamma = 0.$$

Si maintenant β_i est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, l'intégrale J_i se réduit d'elle-même à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynome entier en x.

Il reste à examiner le cas où deux des racines de l'équation (2) deviennent égales entre elles. L'équation (3) admet alors un point singulier double que j'appellerai a_i. Il peut arriver alors que dans le voisinage de ce point les intégrales de (3) soient irrégulières. C'était impossible au contraire dans le cas des points singuliers simples.

Je reviendrai plus tard sur ce cas, en me bornant pour le moment à faire remarquer que c'est celui où l'équation (1) n'admet pas de séries normales, mais seulement de ces séries anormales dont il a été question plus haut.

Mais, à certaines conditions, les intégrales de l'équation (3) pourront être régulières dans le voisinage du point $z = a_i$. Il y aura alors une équation déterminante dont les racines seront

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-3, \quad \beta_i, \quad \beta'_i.$$

Il existera alors deux intégrales v_i et v'_i qui seront de la forme

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i}\varphi_i,$$
$$v'_i = (z - a_i)^{\beta'_i}\varphi'_i,$$

φ_i et φ'_i étant holomorphes dans le voisinage de $z = a_i$. Alors les intégrales

$$J_i = \int v_i e^{zx}\, dz, \qquad J'_i = \int v'_i e^{zx}\, dz$$

prises le long du contour k_i seront deux intégrales de l'équation (1), qui seront représentées asymptotiquement par deux séries normales faciles à former.

Dans le cas particulier où β_i et β'_i diffèrent d'un entier, l'une des deux intégrales v_i et v'_i contient un logarithme et par conséquent l'une des deux séries normales qui représentent asymptotiquement J_i et J'_i devient logarithmique.

En résumé lorsque toutes les séries normales sont du premier ordre, une quelconque d'entre elles représente asymptotiquement l'une des intégrales de l'équation (1). Mais l'intégrale ainsi représentée par une même série normale ne restera pas la même, en général, quel que soit l'argument avec lequel x croit indéfiniment.

IV. — Intégrales normales.

Quand une série normale est convergente, elle représente une intégrale de l'équation (1) et on l'appelle intégrale normale.

Nous nous restreindrons, comme dans le paragraphe précédent, au cas où toutes les séries normales sont du premier ordre. Soit alors

$$(2) \qquad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + C_2(z - a_i)^{\beta_i+2} + \ldots$$

une intégrale de l'équation (3), transformée de Laplace de l'équation (1). A cette intégrale correspondra une intégrale J_i de l'équation (1)

$$J_i = A\int v_i e^{zx}\, dz$$

(A étant un facteur constant) qui sera représentée asymptotiquement comme nous l'avons vu par la série normale

$$(4) \qquad \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+1}} + C_1(\beta_i + 1)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+2}} + C_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+3}} + \ldots.$$

Pour que cette série normale converge pour les valeurs suffisamment grandes de x, il faut et il suffit que l'expression

$$\sqrt[n]{C_n(\beta_i+1)(\beta_i+2)\ldots(\beta_i+n)}$$

tende vers une limite finie pour n infini. Mais d'autre part on a

$$\lim \sqrt[n]{(\beta_i+1)(\beta_i+2)\ldots(\beta_i+n)} = \infty \qquad \text{pour } x = \infty.$$

Donc pour que la série (4) converge, il faut que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0,$$

et que par conséquent la série (2) converge dans toute l'étendue du plan.

Il faut donc que v_i soit de la forme suivante

$$(z - a_i)^{\beta_i} \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Je dis que cette condition est suffisante.

Si elle est remplie et si l'on se reporte au Mémoire cité, on verra que l'on peut toujours trouver trois nombres positifs b, c et h tels que

$$|v_i| < b\, e^{c|z-a_i|}$$

si

$$|z - a_i| > h.$$

Envisageons ensuite l'intégrale suivante

$$J_i = \int v_i e^{zx}\, dz,$$

cette intégrale étant prise le long d'une droite menée à partir du point a_i et prolongée indéfiniment avec un argument $\omega + \pi$, ω étant l'argument de x. Cette intégrale sera toujours finie et ce sera une fonction de x qui sera holomorphe pour toutes les valeurs très grandes de x. De plus $J_i x^{\beta_i}$ sera uniforme et se reproduira quand on fera décrire à x un contour fermé infiniment grand,

Je décomposerai cette intégrale en deux parties : J'_i prise le long d'une partie de la droite définie plus haut depuis le point $z = a_i$ jusqu'au point

$$z = a_i - h\, e^{i\omega}$$

et J''_i prise le long de la seconde partie de cette droite depuis ce dernier point jusqu'à l'infini.

Il vient alors, en posant $z = a_i + t$,

$$|J''_i e^{-a_i x}| < \int^{\infty} b\, e^{(c-|x|)t}\, dt$$

d'où l'on déduit aisément que, *quel que soit l'argument de* x, l'expression

$$x^{\beta_i+2} J_i'' e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers zéro.

Quant à J_i', il est aisé de l'évaluer; soit

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + w_i,$$

w_i désignant une suite de termes dont le premier est $C_2(z - a_i)^{\beta_i+2}$.

On a

$$J_i' = \int [(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1}] e^{zx} dz + \int w_i e^{zx} dz$$

On démontre que

$$x^{\beta_i+2} J_i' e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers zéro. De même en posant

$$J_i''' = \int [(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1}] e^{zx} dz$$

et si les deux premiers termes de la série normale qui représente asymptotiquement J_i sont

$$A e^{a_i x} x^{-\beta_i-1} + B e^{a_i x} x^{-\beta_i-2} = H,$$

on verrait que

$$x^{\beta_i+3} e^{-a_i x}(J_i''' - H)$$

tend uniformément vers zéro.

Posons donc

$$x = \frac{1}{t}; \qquad L_i = J_i e^{-a_i x} x^{\beta_i+1},$$

on trouvera, en regardant L_i comme une fonction de t,

$$L_i = A + (B + \varepsilon)t,$$

où ε tend vers zéro quand t tend vers zéro et cela uniformément quel que soit l'argument de t. De plus, ce sera une fonction uniforme de t. Ce sera donc une fonction holomorphe de t dans le voisinage de $t = 0$. Donc L_i pourra se développer en série convergente suivant les puissances de t. C. Q. F. D.

Ce raisonnement suppose implicitement que β_i est positif et plus grand que n, puisque ce n'est que dans ce cas que l'intégrale J_i est finie et appartient à l'équation (1) quand on la prend le long de la droite dont nous nous sommes servis et qui aboutit au point a_i. Si cela n'avait pas lieu, on remplacerait cette droite par un contour fermé, analogue au contour k_i du paragraphe précédent et formé d'un petit cercle et d'une droite parcourue deux fois en sens contraire.

Cette droite devra avoir l'argument $\omega + \pi$, ω étant celui de x. Le raisonnement serait du reste absolument le même.

Il faut observer encore que dans le raisonnement qui précède nous n'avons pas été obligés de nous appuyer sur ce fait que v_i était une intégrale d'une équation linéaire, ou plutôt nous ne nous en sommes servis que pour établir l'existence des trois nombres positifs b, c et h tels que

$$|v_i| < b\, e^{c|z-a_i|} \quad \text{si} \quad |z - a_i| > h.$$

En d'autres termes nous avons eu seulement à supposer que la dérivée logarithmique de v_i tend uniformément vers une limite finie quand z croît indéfiniment avec un argument donné.

Soit donc une fonction entière quelconque $\varphi(z)$ jouissant de cette propriété. Soit

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots.$$

Nous supposons que quand z croît indéfiniment avec un argument donné, la dérivée logarithmique de φ tend vers une limite finie et déterminée, qui peut d'ailleurs varier quand l'argument de z varie.

Formons l'intégrale

$$J = \int \varphi(z)\, e^{zx}\, dz$$

prise le long d'une droite partant du point zéro et s'étendant indéfiniment avec l'argument $\omega + \pi$, ω étant l'argument de x.

J sera représenté asymptotiquement par la série

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{2\,C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_n \lfloor n}{x^n} + \ldots.$$

D'après le raisonnement précédent, cette série devra converger pour les grandes valeurs de x. Donc

$$\sqrt[n]{\lfloor n\, C_n}$$

tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Cette propriété appartient à toutes les fonctions entières $\varphi(z)$ qui satisfont à la condition énoncée plus haut.

Ce résultat doit être rapproché de celui que j'ai obtenu dans une Note intitulée : *Sur les fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **11**, 1883, n° 4, p. 136-144).

De cette analyse, il suit que pour qu'une série normale converge, il faut et il suffit que l'intégrale v_i qui lui correspond dans la transformée de Laplace, soit égale à une fonction holomorphe multipliée par une puissance de $(z - a_i)$.

Mais il convient d'ajouter que nous avons laissé de côté le cas où v_i contient des logarithmes et où β_i est entier.

Soit donc

$$v_i = v'_i + w'_i \log(z - a_i);$$

v'_i sera holomorphe ou méromorphe dans le voisinage du point $z = a_i$. S'il est méromorphe, nous écrirons

$$v'_i = v''_i + w''_i = v''_i + \frac{G_1}{z - a_i} + \frac{G_2}{(z - a_i)^2} + \ldots + \frac{G_r}{(z - a_i)^r}.$$

Quant à w'_i nous l'écrirons

$$w'_i = C_0 + C_1(z - a_i) + C_2(z - a_i)^2 + \ldots.$$

Nous aurons alors

$$J_i = \int v''_i e^{zx}\, dz + \int w''_i e^{zx}\, dz + \int w'_i \log(z - a_i) e^{zx}\, dz.$$

La première intégrale est nulle; la seconde est égale à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynome entier de degré $(r - 1)$ en x; quant à la troisième elle est représentée asymptotiquement par la série

$$e^{a_i x}\, 2i\pi[C_0 \Gamma(1) x^{-1} + C_1 \Gamma(2) x^{-2} + C_2 \Gamma(3) x^{-3} + \ldots].$$

Pour que cette série soit convergente, il faut évidemment que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$$

et par conséquent que w'_i soit une fonction holomorphe dans tout le plan, v'_i pouvant d'ailleurs être quelconque.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; on a en effet, quel que soit l'argument de x,

$$J_i = \int v''_i e^{zx}\, dz + \int w'_i \log(z - a_i)\, e^{zx}\, dz.$$

La première intégrale étant égale à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynome entier en x, nous n'avons pas à nous en occuper. Quant à la seconde, si w'_i est holomorphe dans tout le plan, elle sera toujours représentée asymptotiquement par la même série normale, et si l'on fait varier l'argument de x, elle représentera une même fonction de x, uniforme et continue. En raisonnant encore comme plus haut, on verrait donc que la série normale correspondante doit être convergente.

C. Q. F. D.

Si β_i est entier positif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, ce qui exige que

$$\beta_i > m - 1,$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que la série normale correspondante converge, c'est que v_i soit holomorphe dans tout le plan.

Si enfin β_i est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, la série normale correspondante convergera toujours, car elle se réduira à un polynome entier multiplié par une exponentielle.

J'ai peu de chose à ajouter sur le cas où deux points singuliers simples a_i et a_j se confondent en un seul point singulier double a_i. Si les intégrales sont irrégulières, il n'y a pas de série normale et nous devons laisser ce cas de côté. Si les intégrales sont régulières, il y a une équation déterminante qui aura pour racines

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-3, \quad \beta_i, \quad \beta'_i.$$

Si β_i et β'_i ne diffèrent pas d'un entier, il n'y a rien à changer à ce qui précède; si β_i et β'_i diffèrent d'un entier, il arrivera en général qu'une intégrale v_i sera de la forme suivante

$$(z - a_i)^{\beta_i}[\varphi + \varphi' \log(z - a_i)],$$

φ et φ' étant holomorphes dans le voisinage du point $z = a_i$. Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que φ et φ' soient holomorphes dans tout le plan.

Considérons maintenant une équation (1) et sa transformée (3); supposons que cette dernière n'ait que des points singuliers simples et qu'aucun des β_i ne soit entier. Alors nous aurons n séries normales à chacune desquelles correspondra une fonction

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} \varphi_i,$$

φ_i holomorphe pour $z = a_i$.

Une série normale sera convergente si la fonction φ_i correspondante est une fonction entière; l'équation (1) aura précisément autant d'intégrales normales que l'équation (3) aura d'intégrales égales à une fonction entière multipliée par une puissance de $(z - a)$.

A une même intégrale de (3) ne pourront pas correspondre plusieurs intégrales normales de (1). Il n'en sera plus de même si plusieurs des β_i sont entiers et s'il y a des logarithmes. Supposons par exemple que l'on ait pour une intégrale de (3)

$$v_i = \varphi + \psi \log(z - a) + \theta \log(z - b),$$

φ et θ étant holomorphes dans tout le plan et φ étant holomorphe dans le voisinage des points a et b, mais d'ailleurs quelconques.

Les deux intégrales

$$\int_k v_i e^{zx}\,dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_i e^{zx}\,dz$$

(k et k' étant deux contours analogues à k_i et enveloppant le premier le point a le second le point b) seront deux intégrales normales de l'équation (1).

Envisageons par exemple l'équation suivante

$$(1') \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 + \beta) y,$$

dont la transformée de Laplace sera

$$(3') \qquad (z^2 - \alpha^2)\frac{d^2 v}{dx^2} + 4z\frac{dv}{dz} + (2 - \beta) v = 0.$$

C'est une équation hypergéométrique, dont les points singuliers sont

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad \infty$$

avec des équations déterminantes, dont les racines sont respectivement

$$0, \quad -1; \quad 0, \quad -1; \quad -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}.$$

Pour que dans le voisinage du point singulier α par exemple, une intégrale prenne la forme

$$\psi + \varphi \log(z - \alpha),$$

φ étant holomorphe dans tout le plan, il faut que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point $z = \infty$ soit entière. Cela n'arrive que si

$$\beta = n(n+1),$$

n étant entier. Supposons donc $\beta = n(n+1)$. Alors l'équation (3′) admet pour intégrale un polynome entier P en z. Une seconde intégrale sera de la forme

$$v = \mathrm{P} \log \frac{z - a}{z + a} + \mathrm{Q},$$

Q étant méromorphe dans le voisinage des points $z = \alpha$, $z = -\alpha$. Donc l'intégrale

$$\int v e^{zx}\,dz$$

prise successivement le long de deux contours analogues à k_i et enveloppant respectivement le point $z=\alpha$ et le point $z=-\alpha$, nous donnera deux intégrales normales de l'équation (1). Nous retrouvons ainsi un résultat donné autrefois par Liouville et qui, depuis les travaux de M. Halphen, n'est plus qu'un cas particulier d'une théorie plus générale.

Comme second exemple, nous choisirons l'équation suivante considérée par M. Halphen (*Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, p. 180)

$$(1'') \qquad x^3\frac{d^3y}{dx^3}+(1-n^2)x\frac{dy}{dx}-\left(1-n^2+\frac{1}{2}mx^3\right)y=0.$$

Formons la transformée de Laplace, il viendra

$$(3'') \qquad \left(z^3-\frac{1}{2}m\right)\frac{d^3v}{dz^3}+9z^2\frac{d^2v}{dz^2}+(19-n^2)z\frac{dv}{dz}+v(8-2n^2)=0.$$

Posons

$$\frac{1}{2}m=+\alpha^3$$

et soit j une racine cubique de l'unité.

Les points singuliers seront

$$\alpha,\quad \alpha j,\quad \alpha j^2 \quad\text{et}\quad \infty.$$

Les racines de l'équation déterminante seront pour les points singuliers à distance finie

$$1,\quad 0\quad\text{et}\quad -1.$$

Pour le point singulier ∞ elles seront données par

$$\rho(\rho-1)(\rho-2)+9\rho(\rho-1)+(19-n^2)\rho+8-2n^2=0$$

ou

$$\rho^3+6\rho^2+(12-n^2)\rho+8-2n^2=0.$$

Cette équation admet la racine -2; en la faisant disparaître, il reste

$$\rho^2+4\rho+4-n^2=0$$

dont les racines sont $-2\pm n$.

Dans le voisinage du point $z=\alpha$, l'intégrale logarithmique v peut se mettre sous la forme

$$\varphi+\psi\log(z-\alpha),$$

φ étant méromorphe et ψ holomorphe dans le domaine de ce point.

Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que ψ soit holomorphe dans tout le plan. Alors ψ doit correspondre à la racine $(-2+n)$

de la troisième équation déterminante et être un polynome entier de degré $(n-2)$. Il faut alors que n soit entier. De plus ψ doit être une intégrale de l'équation (3).

D'ailleurs tout se passe de même dans le voisinage des points $z=\alpha j$, $z=\alpha j^2$, de sorte que, pour que l'équation (1) admette une intégrale normale, il faut que l'équation (3) admette comme intégrale un polynome entier.

Posons donc

$$\psi = \Sigma \mathrm{A}_i z^i,$$

il viendra

$$(i+2)(i+n+2)(i-n+2)\mathrm{A}_i = \alpha^3(i+3)(i+2)(i+1)\mathrm{A}_{i+3}.$$

Nous prendrons le polynome de degré $(n-2)$; nous prendrons

$$i \equiv n-2 \pmod 3,$$

et cette équation nous permettra de calculer par récurrence tous les coefficients du polynome ψ, à moins que l'un des facteurs

$$i+2,\quad i+n+2,\quad i-n+2$$

ne s'annule, ce qui ne pourra avoir lieu puisque

$$i>0,\qquad i<n-4.$$

Donc il existera toujours, si n est entier et plus grand que 4, un polynome entier satisfaisant à l'équation (3).

Pour aller plus loin, posons $z^3=t$; l'équation (3) deviendra

$$\begin{aligned}27(t-\alpha^3)t^2\frac{d^3 v}{dt^3} &+ 54t(t-\alpha^3)\frac{d^2 v}{dt^2} + 6(t-\alpha^3)\frac{dv}{dt}\\ &+ 81t^2\frac{d^2 v}{dt^2} + 54t\frac{dv}{dt} + 3t(19-n^2)\frac{dv}{dt} + (8-2n^2)v = 0.\end{aligned}$$

Il n'y a plus que trois points singuliers

$$0,\quad 1 \quad \text{et} \quad \infty$$

et les racines des équations déterminantes sont respectivement

$$\begin{array}{ccc} 0, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}; \\ 0, & 1, & -1; \\ -\frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}+\frac{n}{3}, & -\frac{2}{3}-\frac{n}{3}. \end{array}$$

Supposons que n ne soit pas divisihle par 3 et pour fixer davantage les idées soit

$$n \equiv 1 \pmod 3.$$

Soient X, Y, Z trois intégrales de l'équation en t, la seconde se réduisant à ψ. Je choisirai ces trois intégrales de telle façon que, quand le point t tournera autour du point o, elles subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{vmatrix}.$$

Quand on tournera autour du point 1, nos intégrales subiront la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Les racines de l'équation déterminante étant o, 1 et -1, on devra avoir identiquement par rapport à S

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ 0 & 1-S & 0 \\ a' & b' & c'-S \end{vmatrix} = (1-S)^3.$$

De plus, comme une seule intégrale est logarithmique, il faut que

$$ab' - ba' = b'; \qquad cb' - c'b = -b.$$

Quand le point t décrira un contour de rayon très grand, les trois intégrales subiront la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} a & bj & cj \\ 0 & j & 0 \\ a' & b'j & c'j^2 \end{vmatrix}.$$

Mais en ce qui concerne le point $t = \infty$, les racines de l'équation déterminante sont $-\frac{2}{3}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{-n-2}{3}$ et par conséquent sont égales, *à des entiers près*, à o, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il en résulte que l'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} a-S & bj & cj^2 \\ 0 & j-S & 0 \\ a' & b'j & c'j^2-S \end{vmatrix} = 1 - S^3.$$

Ces conditions suffisant pour montrer que

$$a = c = 1, \qquad a'c = 0,$$

ceci nous conduirait aux hypothèses suivantes :

1° $a' = c = 0$;

2° $a' = 1, \quad c = 0, \quad b = 0$;

2° $c = 1, \quad a' = 0, \quad b' = 0$.

Les deux dernières hypothèses sont inacceptables, car elles conduiraient à admettre que l'équation (3″) a une seconde intégrale holomorphe dans tout le plan et qui ne pourrait être qu'un polynome entier. Or cela est manifestement impossible.

Nous devons donc adopter la première hypothèse, et nous pouvons conclure que l'équation (3″) a une intégrale de la forme

$$v = \psi \log(z^3 - \alpha^3) + \mathrm{M},$$

ψ étant le polynome défini plus haut et M étant méromorphe dans tout le plan.

On arriverait au même résultat si l'on avait

$$n \equiv 2 \pmod 3.$$

On conclut de là que l'intégrale

$$\int v\, e^{zx}\, dz$$

prise successivement le long de trois contours analogues à k_i et enveloppant respectivement le point α, le point αj et le point αj^2, nous fournira trois intégrales normales de l'équation (1).

Si β_i est entier négatif et si l'intégrale v_i correspondante n'est pas logarithmique, l'intégrale J_i correspondante sera toujours normale. Reprenons par exemple les équations (1″) et (3″) et faisons-y $n = 1$. La théorie précédente semble alors en défaut, car l'équation (3″) n'admet plus comme intégrale un polynome entier. L'intégrale générale de l'équation (3″) est alors

$$v = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2}{z^3 - \alpha^3},$$

A, B et C étant des constantes arbitraires. Nous n'avons plus alors ni intégrale entière, ni intégrale logarithmique, mais les intégrales sont méromorphes dans le voisinage des trois points singuliers. L'équation (1″) doit donc encore admettre trois intégrales normales, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

Dans le cas où β_i est entier positif, et où l'intégrale v_i n'est pas logarithmique, une même intégrale de (3), holomorphe dans tout le plan, peut fournir plusieurs intégrales normales de (1). Ainsi si l'équation (3) admet une intégrale holomorphe dans tout le plan et s'annulant, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées en k points différents (qui doivent être alors des points à apparence singulière), l'équation (1) admettra k intégrales normales.

Dans les exemples que nous avons considérés plus haut [équations (1′) et (1″)], les transformées de Laplace (3′) et (3″) avaient toutes leurs intégrales régulières. Cela arrivera toutes les fois que P_n sera de degré n et divisible par x^n, P_{n-1} divisible par x^{n-1}, P_{n-2} divisible par x^{n-2}, ..., P_1 divisible par x.

Supposons que l'équation (1) satisfasse à ces conditions. Alors l'équation (3) aura toutes ses intégrales régulières tant à distance finie que dans le domaine du point $z=\infty$. Si donc elle admet une intégrale égale à une fonction entière multipliée par une puissance de $z-a_i$, cette fonction entière ne pourra être qu'un polynome.

D'où, cette conclusion, que si l'équation (1) satisfait aux conditions énoncées, une série normale ne pourra converger qu'à la condition d'être limitée.

Il est aisé de former des équations admettant un nombre déterminé d'intégrales normales.

Soit une équation linéaire

$$Q_n \frac{d^n u}{dz^n} + Q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + Q_1 \frac{du}{dz} + Q_0 u = 0,$$

où les polynomes Q sont de degré $m < n$. Cette équation admettra $(n-m)$ intégrales holomorphes dans tout le plan. Posons ensuite

$$u = v(z-a)^n.$$

Alors v satisfera aussi à une équation linéaire (3‴) facile à former. La transformée de Laplace de (3‴) aura alors évidemment $(n-m)$ intégrales normales.

V. — Cas du second ordre.

Nous allons chercher maintenant à étendre au cas général les résultats qui n'ont été jusqu'ici obtenus qu'en supposant que toutes les séries normales sont du premier ordre et par conséquent que tous les polynomes P sont de degré égal ou inférieur à celui de P_n.

Considérons une équation

$$(1)\qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

où les degrés des polynomes P_n vont en croissant, mais de la manière suivante : P_n sera par exemple de degré m; P_{n-1} sera de degré $(m+1)$ au plus; P_{n-2} de degré $(m+2)$ au plus, etc.; P_1 de degré $(m+n-1)$ au plus, et P_0 de degré $(m+n)$ au plus. Il arrivera alors en général que l'équation (1) admettra n séries normales du deuxième ordre

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x).$$

On aura d'ailleurs

$$\varphi_i(x) = e^{a_i x^2 + b_i x} x^{\alpha_i} \psi_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, mais généralement divergente.

Soit $y = f(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons

$$u = f(x) f(-x).$$

Il est aisé de voir que u satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2

$$Q_{n^2} \frac{d^{n^2} u}{dx^{n^2}} + Q_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}} + \ldots + Q_1 \frac{du}{dx} + Q_0 u = 0, \tag{2}$$

où les coefficients Q sont des polynomes entiers en x.

Cette équation admettra les n^2 séries normales suivantes

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(x)\varphi_1(-x), & \varphi_2(x)\varphi_1(-x), & \ldots, & \varphi_n(x)\varphi_1(-x); \\
\varphi_1(x)\varphi_2(-x), & \varphi_2(x)\varphi_2(-x), & \ldots, & \varphi_n(x)\varphi_2(-x); \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots; \\
\varphi_1(x)\varphi_n(-x), & \varphi_2(x)\varphi_n(-x), & \ldots, & \varphi_n(x)\varphi_n(-x),
\end{array}$$

qui sont toutes du deuxième ordre. Donc les degrés des polynomes Q iront en croissant de telle façon que le degré de Q_{n^2-h} ne puisse dépasser celui de Q_{n^2} de plus de h unités.

De plus cette équation (2), d'après son mode de formation, ne devra pas changer quand on changera x en $-x$; d'où il résulte qu'un même polynome R ne pourra contenir que des puissances de x d'une même parité. Chacun des polynomes Q sera ou une fonction paire ou une fonction impaire; si Q_{n^2} est pair, Q_{n^2-1} sera impair, Q_{n^2-2} sera pair et ainsi de suite; ce sera le contraire si Q_{n^2} est impair.

Posons maintenant

$$x^2 = t,$$

nous aurons

$$\frac{d^p u}{dx^p} = \sum \frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \, \lfloor 2q-p} (2x)^{2q-p} \frac{d^q u}{dt^q} \qquad (q \leq p;\ p \leq 2q).$$

L'équation (2), qu'on peut écrire

$$\sum Q_p \frac{d^p u}{dx^p} = 0 \qquad (p \geqq 0;\ p \leqq n^2),$$

deviendra donc

$$\sum\sum Q_p (2x)^{2q-p} \frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \lfloor 2q-p} \frac{d^q u}{dt^q} = 0,$$

ou bien

$$\sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0,$$

les R_q sont des polynomes définis de la manière suivante :

$$R_q = \sum Q_p (2x)^{2q-p} \frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \lfloor 2q-p} \qquad (p \geqq q;\ p \leqq 2q;\ p \leqq n^2).$$

Nous aurons en particulier

$$R_{n^2} = Q_{n^2}(2x)^{n^2}.$$

Soit m le degré de Q_{n^2}; celui de Q_p sera au plus égal à $(m+n^2-p)$. Le degré de R_{n^2} (en x) sera égal à $(m+n^2)$. Le degré de $Q_p(2x)_{2q-p}$ sera au plus égal à $(m+n^2+2q-2p)$; mais l'on observe que $(q-p)$ est au plus égal à zéro, on verra que le degré de $Q_p(2x)^{2q-p}$ et par conséquent celui de R_q est au plus égal à $(m+n^2)$.

Donc le degré d'un quelconque des polynomes R_q est au plus égal au degré de R_{n^2}.

Nous pouvons toujours supposer que $(m+n^2)$ est pair. Car si cela n'était pas, nous multiplierions l'équation (2) par x, augmentant ainsi m d'une unité. Alors Q_{n^2} sera une fonction paire ou impaire selon que m sera pair ou impair. De plus les polynomes Q_p devront être alternativement des fonctions paires ou impaires, d'où il suit que $Q_p(2x)^{2q-p}$ et par conséquent R_q est toujours pair.

Si donc on remplace x^2 par t, R_q est un polynome entier en t.

L'équation (3) est alors une équation de même forme que (1), mais qui sera de rang 1 et non plus de rang 2, pour employer l'expression du paragraphe 2.

Soit par exemple l'équation

$$(1') \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} - (x^3+1)y = 0.$$

Soit y_1 ce qu'on obtient en changeant x en $-x$ dans y; on aura

$$x\frac{d^2y_1}{dx^2} - (x^3-1)y_1 = 0.$$

Soit $u = yy_1$; nous désignerons par y', y'_1, u', y'', etc. les dérivées successives de y, y_1 et u. On obtiendra en tenant compte des équations différentielles

$$(5')\quad \begin{cases} u = yy_1, \\ u' = y'y_1 + yy'_1; \\ u'' = 2x^2 yy_1 + 2y'y'_1, \\ u''' = 4xyy_1 + \left(4x^2 + \dfrac{2}{x}\right)yy'_1 + \left(4x^2 - \dfrac{2}{x}\right)y'y_1, \\ u^{\text{IV}} = \left(8x^4 + 4 - \dfrac{4}{x^2}\right)yy_1 + \left(12x - \dfrac{2}{x^2}\right)yy'_1 + \left(12 + \dfrac{2}{x^2}\right)y'y_1 + 8x^2y'y'_1. \end{cases}$$

En éliminant entre ces cinq équations (5′) les quatre quantités yy_1, $y'y_1$, yy'_1, $y'y'_1$, on arrive à l'équation

$$(2')\qquad x^2\frac{d^4u}{dx^4} + x\frac{d^3u}{dx^3} - 4x^4\frac{d^2u}{dx^2} - 16x^3\frac{du}{dx} - (8x^2 - 4)u = 0.$$

Il est aisé de vérifier que cette équation est de rang 2.

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} R_4 &= Q_4(2x)^4 = 16x^6, \\ R_3 &= Q_4(2x)^2.12 + Q_3(2x)^3 = 56x^4, \\ R_2 &= Q_4.12 + Q_3(2x).6 + Q_2(2x)^2 = -16x^6 + 24x^2, \\ R_1 &= Q_2.2 + Q_1(2x) = -40x^4, \\ R_0 &= Q_0 = -8x^2 + 4; \end{aligned}$$

d'où enfin l'équation

$$(3')\qquad 4t^3\frac{d^4u}{dt^4} + 14t^2\frac{d^3u}{dt^3} - (4t^3 + 6t)\frac{d^2u}{dt^2} - 10t^2\frac{du}{dt} - (2t - 1)u = 0$$

qui, comme on le voit, est de rang 1.

L'intégration de l'équation (1) est ainsi ràmenée à celle de l'équattion (3) qui est de rang 1. On formera donc la transformée de Laplace (4) de cette équation (3) et l'on obtiendra ainsi u sous la forme d'une intégrale définie.

Comment, lorsque l'on connaîtra u, pourra-t-on obtenir y ?

Appelons y_1 ce que devient y quand on y change x en $-x$. On trouvera n^2+1 équations de la forme suivante :

$$(5)\qquad \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \sum_{\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma}\frac{d^\beta y}{dx^\beta}\frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n^2 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Dans ces équations, $F_{\alpha\beta\gamma}$ désigne une série de fonctions rationnelles en x.

D'ailleurs naturellement $\dfrac{d^0u}{dx_0}$ représente u. Ces équations sont analogues aux équations (5′) écrites plus haut.

Si l'on élimine par un déterminant, entre ces (n^2+1) équations, les n^2 produits

$$\frac{d^\beta y}{dx^\beta}\frac{d^\gamma y}{dx^\gamma}, \tag{6}$$

on obtiendra l'équation (2). Ne retenons plus maintenant que les n^2 premières équations (5), celles où l'on a pour α successivement les valeurs

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n^2-1.$$

On pourra alors résoudre les n^2 équations par rapport aux n^2 produits (6) (comme si ces n^2 produits étaient des variables indépendantes) pourvu toutefois que le déterminant correspondant ne soit pas nul, ce que nous supposerons. Nous nous réservons d'ailleurs de revenir plus loin sur le cas particulier où ce déterminant est nul.

On tirera en particulier

$$yy_1 \quad \text{et} \quad y_1\frac{dy}{dx}$$

sous la forme suivante :

$$yy_1 = \Phi_0 u + \Phi_1 \frac{du}{dx} + \Phi_2\frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + \Phi_{n^2-1}\frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}},$$

$$y_1\frac{dy}{dx} = \Phi'_0 u + \Phi'_1 \frac{du}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Phi'_{n^2-1}\frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}},$$

ce qui donnera enfin

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_p \frac{d^p u}{dx^p}}{\sum \Phi_p \frac{d^p u}{dx^p}}.$$

Si u est connu, cette équation donnera y par une simple quadrature.

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat d'une infinité de manières; en calculant

$$y\frac{d^\alpha y_1}{dx^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}\frac{d^\alpha y_1}{dx^\alpha}.$$

Il n'arrivera pas que toutes ces quantités soient nulles à la fois.

Voyons maintenant ce qu'il faudrait faire si le déterminant était nul et si par conséquent on ne pouvait pas résoudre les équations (5) par rapport aux n^2 produits (6).

Pour le voir, faisons $n=2$ et écrivons les équations (5) en reprenant la notation de Lagrange

$$(5'')\quad \begin{cases} u = yy_1, \\ u' = y'y_1 + yy'_1, \\ u'' = A\,yy_1 + B\,yy'_1 + C\,y'y_1 + D\,y'y'_1, \\ u''' = A'yy_1 + B'yy'_1 + C'y'y_1 + D'y'y'_1\,; \end{cases}$$

A, B, C, D, A', B', C', D' seront des fonctions rationnelles de x telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix}$$

soit nul. Nous supposerons toutefois que les mineurs du premier ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Nous pourrons alors écrire

$$\begin{aligned} yy' &= u, \\ yy'_1 &= \alpha\, u + \beta\, u' + \gamma\, u'' + \delta\, u''' + \varepsilon\, y'y'_1, \\ y'y_1 &= \alpha' u + \beta' u' + \gamma' u'' + \delta' u''' + \varepsilon' y'y'_1, \end{aligned}$$

α, β, γ, etc. étant rationnels en x. En faisant le produit des deux dernières équations et en y remplaçant yy_1 par u, on obtient une équation du second degré en $y'y'_1$. Il en résulte que $y'y'_1$ et par conséquent yy_1, yy'_1, $y'y_1$ et enfin $\frac{y'}{y}$ sont des fonctions algébriques de x, u, u', u'' et u'''.

Toutes les fois donc que le déterminant

$$\Sigma \pm F_{\alpha\beta\gamma} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n^2 - 1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \end{pmatrix}$$

sera nul, l'expression

$$\frac{dy}{y\,dx}$$

sera non plus une fonction rationnelle mais une fonction algébrique de x, de u et de ses dérivées. Donc quand on connaîtra u, on en déduira y par une simple quadrature.

Il est facile maintenant d'étendre au cas général ce que nous venons de dire des équations de rang 2. Supposons que (1) soit une équation de rang p et soit satisfaite par n séries normales d'ordre p. Soit

$$y = f(x)$$

une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons

$$u = f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x)\dots f(\alpha^{p-1} x),$$

α étant une des racines $p^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité.

Il arrivera alors que u satisfera à une équation différentielle linéaire (2) de rang p et d'ordre n^p dont les coefficients seront des polynomes en x. L'équation ne devra pas changer si l'on change x en αx. Il en résulte que si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\sum Q_n \frac{d^h u}{dx^h} - \sum A_{hk} x^k \frac{d^h u}{dx^h}, \tag{2}$$

on devra avoir

$$k - h \equiv \text{une constante} \pmod p.$$

En multipliant l'équation par une puissance convenablement choisie de x, on aura alors

$$k \equiv h \pmod p.$$

Faisons maintenant

$$x^p = t.$$

L'équation (2) deviendra par ce changement de variable

$$\sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0, \tag{3}$$

les R_q étant des polynomes entiers en t. Cette équation (3) sera de rang 1.

Supposons qu'on en tire u; comment obtiendra-t-on y? On obtiendra $n^p + 1$ équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \sum F_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda} \dfrac{d^\beta y}{dx^\beta} \dfrac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma} \dots \dfrac{d^\lambda y_{n-1}}{dx^\lambda} \\ (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n^p;\ \beta, \gamma, \dots, \lambda = 0, 1, 2, \dots, n-1). \end{array}\right. \tag{5}$$

Dans ces équations, les F sont des fonctions rationnelles de x, et y_q désigne la fonction $f(\alpha^q x)$.

Des n^p premières équations (5) on tirera les n^p produits :

$$\frac{d^\beta y}{dx^\beta}, \quad \frac{d^\gamma y}{dx^\gamma}, \quad \dots, \quad \frac{d^\lambda y_{p-1}}{dx^\lambda}.$$

Si l'on considère en effet ces n^p produits comme des variables indépendantes, les n^p premières équations (5) seront linéaires par rapport à ces n^p variables. On pourra donc les résoudre, pourvu que leur déterminant ne soit pas nul.

On obtiendra ainsi

$$\begin{aligned} y y_1 y_2 \ldots y_{p-1} &= \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q} \\ \frac{dy}{dx} y_1 y_2 \ldots y_{p-1} &= \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \end{aligned} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, n^p - \;),$$

les Φ étant rationnelles en x. On en tirera

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}},$$

de sorte que la dérivée logarithmique de y est une fonction rationnelle de x, de u et de ses dérivées.

Si le déterminant des équations (5) était nul, cette dérivée logarithmique ne serait plus fonction rationnelle, mais serait fonction algébrique de x, de u et de ses dérivées.

Dans tous les cas, si l'on suppose u connu, y s'obtiendra par une simple quadrature.

VI. — Généralisation des paragraphes III et IV.

Quelle est la condition pour que l'équation (1) envisagée dans le paragraphe précédent ait une intégrale normale, c'est-à-dire pour que l'une des séries normales qui y satisfont converge?

Supposons pour fixer les idées que cette équation

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_0 y = 0$$

soit de rang 2 et soit

$$e^{ax^2+bx} \varphi(x)$$

une série normale qui y satisfasse; nous allons chercher la condition pour que cette série converge. Si elle converge, il en sera de même de

$$e^{ax^2-bx} \varphi(x)$$

ou encore du produit

$$S = e^{2at} \varphi(\sqrt{t}) \varphi(-\sqrt{t}),$$

où l'on a posé

$$t = x^2.$$

Mais cette série normale S, qui est du premier ordre, satisfera formellement à l'équation

$$\sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0, \tag{3}$$

que l'on formera comme dans le paragraphe précédent, en appelant y_1 ce que devient y quand on change x en $-x$, et en faisant $u = yy_1$ et $t = x^2$.

Mais cette équation (3) est de rang 1; pour qu'elle admette une intégrale normale, il faut donc et il suffit que sa transformée de Laplace (4) admette une intégrale de la forme suivante :

$$v = (z-a)^\alpha G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière de z.

Cette condition est donc aussi nécessaire pour que l'équation (1) ait une intégrale normale.

Je dis qu'elle est également suffisante. Supposons en effet qu'elle soit remplie; alors on pourra trouver une intégrale de l'équation (3) qui soit de la forme

$$u = e^{2at} t^\lambda \varphi(t) = e^{2ax^2} x^{2\lambda} \varphi(x^2), \tag{6}$$

φ désignant une fonction holomorphe en $\frac{1}{t}$ pour $t = \infty$.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'en supposant que le déterminant des équations (5) ne soit pas nul, on aura

$$yy_1 = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q},$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q},$$

les Φ et les Φ' étant rationnels en x. Si dans ces équations nous remplaçons u par sa valeur (6), puis que nous les divisions l'une par l'autre, il vient

$$\frac{dy}{y\,dx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3} + \ldots$$

Car on voit aisément que

$$\frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

peut se développer en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

On en déduit aisément

$$y = e^{ax^2+bx}\psi(x)x^c,$$

ψ étant une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. La condition énoncée plus haut comme nécessaire est donc aussi suffisante.

Elle l'est encore si le déterminant des équations (5) est nul. Il arrive alors que l'on a

$$\frac{dy}{y\,dx} = F\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}\right),$$

F étant l'algorithme d'une fonction algébrique. De plus, la fonction F est homogène et de degré zéro par rapport à u, $\frac{du}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}$.

Si donc on y remplace u par son expression (6) l'exponentielle e^{2ax^2} qui entre dans cette expression disparaîtra, ce qui montre qu'après cette substitution le point $x = \infty$ sera pour la fonction F (qui ne dépend plus maintenant que de x puisqu'on a remplacé u par une fonction connue de x) un point singulier algébrique.

On pourra donc développer F suivant les puissances décroissantes (entières ou fractionnaires) de x. Si l'on n'a que des puissances entières, il viendra

$$\frac{dy}{y\,dx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \ldots,$$

et l'on retombera sur le cas précédent. Si au contraire on avait des puissances fractionnaires, on trouverait

$$y = e^{\varphi\left(x^{\frac{1}{p}}\right)}x^c\,\psi\left(x^{-\frac{1}{p}}\right),$$

φ étant l'algorithme d'un polynome entier et ψ celui d'une fonction holomorphe.

L'équation (1) devrait donc être satisfaite par une série anormale, ce que nous n'avons pas supposé.

On doit donc en conclure que la condition énoncée est dans tous les cas nécessaire et suffisante pour qu'une équation de rang 2 ait une intégrale normale et l'on verrait de la même manière qu'il en est de même pour une équation de rang quelconque.

Supposons maintenant que la série normale que nous envisageons et qui satisfait à l'équation (1) ne soit pas convergente. Soit

$$S = e^{ax^2+bx}x^\lambda\,\varphi(x)$$

cette série normale divergente; formons la série

$$S_1 = e^{ax^2-bx}x^\lambda\,\varphi(-x).$$

et multiplions ces deux séries membre à membre, nous trouverons

$$S' = SS_1 = e^{2\alpha t} t^{\lambda} \varphi(\sqrt{t}) \varphi(-\sqrt{t}) \qquad (t = x^2)$$

et S' sera une série normale du premier ordre en t et qui satisfera formellement à l'équation (3) qui est de rang 1. Cette série S' représentera alors asymptotiquement une certaine intégrale u de cette équation d'après ce que nous avons démontré au paragraphe III.

Si l'on pose ensuite

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

(les Φ et les Φ' ayant même signification que plus haut) y sera une intégrale de l'équation (1).

Je dis que y sera représenté asymptotiquement par la série S.

En effet, on pourra former, d'après les règles ordinaires du calcul, les séries suivantes :

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q},$$

On obtiendra ainsi deux séries divergentes qui représenteront asymptotiquement

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}.$$

Cela demande un mot d'explication; pour établir les égalités asymptotiques

$$(7) \qquad \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}; \qquad \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q},$$

il faut admettre que $\frac{d^q u}{dx^q}$ est représenté asymptotiquement par $\frac{d^q S'}{dx^q}$, de la même manière que u est représenté par S'. Or les principes du paragraphe I ne permettent pas en général de différentier une égalité asymptotique comme une égalité ordinaire.

Mais ici cette difficulté ne peut nous arrêter. En effet u satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2 et de rang 1, qui est l'équation (3). Il en résulte immédiatement que $\frac{d^q u}{dt^q}$ doit satisfaire à une équation linéaire (8) qui sera comme l'équation (3) d'ordre n^2 et de rang 1. En raisonnant sur l'équation (8) comme sur l'équation (3), on verrait que cette équation est satisfaite formellement par une série normale et que cette série réprésente asymptotiquement une des intégrales de l'équation. On vérifierait ensuite sans peine que cette intégrale est $\frac{d^q u}{dt^q}$ et que cette série est $\frac{d^q S'}{dt^q}$. On a donc asymptotiquement

$$\frac{d^q u}{dt^q} = \frac{d^q S'}{dt^q}$$

et par conséquent

$$\frac{d^q u}{dx^q} = \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On a donc aussi asymptotiquement

$$yy_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2}(\alpha_0 x^\lambda + \alpha_1 x^{\lambda-1} + \alpha_2 x^{\lambda-2} + \ldots),$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2}(\beta_0 x^{\lambda+1} + \beta_1 x^\lambda + \beta_2 x^{\lambda-1} + \ldots)$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que

$$\beta_0 = a\alpha_0.$$

On aura donc asymptotiquement

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x^{-1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} x^{-2} + \ldots = 1 + \Sigma_1,$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy_1}{dx} = ax + \frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{\beta_2}{\beta_0} x^{-1} + \ldots = \Sigma_2.$$

Si donc nous posons

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \omega_1,$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = \omega_2,$$

les fonctions ω_1 et ω_2 seront représentées asymptotiquement par les séries Σ_1 et Σ_2, et l'on aura

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{\omega_2}{1 + \omega_1}.$$

Mais

$$\frac{1}{1 + \omega_1} = 1 - \omega_1 + \omega_1^2 - \ldots$$

est une fonction holomorphe de ω_1 pour $\omega_1 = 0$. On peut donc, d'après les principes du paragraphe I, y substituer son expression asymptotique Σ_1 d'après les règles ordinaires du calcul; on obtiendra une série divergente Σ_3 qui représentera asymptotiquement $\frac{1}{1 + \omega_1}$.

Mais d'après les principes du même paragraphe, nous avons le droit de multiplier les deux égalités asymptotiques

$$\omega_2 = \Sigma_2,$$
$$\frac{1}{1+\omega_1} = \Sigma_3,$$

d'après les règles ordinaires du calcul, ce qui nous donne asymptotiquement

$$\frac{dy}{y} = dx\,\Sigma_3\,\Sigma_2.$$

Si je rappelle en outre que les principes du paragraphe I nous permettent d'intégrer les égalités asymptotiques comme les égalités ordinaires, j'écrirai

$$\log y = \int dx\,\Sigma_3\,\Sigma_2.$$

ce qui montre que $\log y$ peut être représenté asymptotiquement par une certaine série que l'on peut former aisément et que nous écrirons

$$ax^2 + bx + \lambda \log x + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots = ax^2 + bx + \lambda \log x + \Sigma_1.$$

Posons alors

$$y = e^{ax^2+bx}\,x^\lambda\,e^\eta,$$

η sera représenté asymptotiquement par Σ_4. Mais e^η est une fonction holomorphe de η pour $\eta = 0$; j'y puis donc substituer à la place de η son expression asymptotique Σ_4, ce qui donne asymptotiquement

$$y = e^{ax^2+bx}\,x^\lambda\,e^{\Sigma_4}.$$

Il en résulte que y est représenté asymptotiquement par une série de forme normale qui ne peut être différente de S.

L'égalité asymptotique

$$y = S$$

est donc démontrée.

Mais il convient d'observer que toutes les intégrales de l'équation linéaire (2) ne peuvent pas être regardées comme le produit d'une intégrale y de l'équation (1) par ce que devient cette même intégrale lorsqu'on change x en $-x$, ni même comme le produit d'une intégrale y de l'équation (1) par une intégrale y_1 de l'équation (1′) obtenue en changeant x en $-x$ dans l'équation (1). Cette propriété n'appartient qu'à certaines intégrales particulières de l'équation (2).

Il résulte de là que si l'on tire y de l'égalité

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}} \tag{8}$$

la valeur de y ainsi obtenue ne sera une intégrale de l'équation (1) que si l'on a choisi pour u certaines intégrales particulières de l'équation (2). Parmi ces intégrales particulières, on peut toutefois en trouver n^2 qui sont linéairement indépendantes.

Il est aisé de voir que parmi les intégrales de l'équation (2) il y en a une (que j'appellerai u_1) qui est représentée asymptotiquement par une série normale S_1 (en supposant par exemple, pour fixer les idées, que x croisse indéfiniment par valeurs réelles positives) et qui est telle que l'on en puisse trouver (n^2-1) autres dont le rapport à u_1 tende vers zéro quand x croît indéfiniment.

En appelant $u_2, u_3, \ldots, u_{n^2}$ ces (n^2-1) intégrales, on aura

$$\lim \frac{u_2}{u_1} = 0, \qquad \lim \frac{u_3}{u_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \lim \frac{u_{n^2}}{u_1} = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) sera alors de la forme

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{n^2} u_{n^2},$$

et elle sera représentée asymptotiquement par la série $A_1 S_1$ pourvu que A_1 ne soit pas nul. Ainsi l'intégrale la plus générale de l'équation (2) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

Considérons maintenant, non plus l'intégrale la plus générale de l'équation (2), mais la plus générale parmi celles qui, substituées à u dans l'équation (8), donnent pour y une intégrale de l'équation (1). Si l'on veut qu'il en soit ainsi, on ne peut pas choisir les constantes d'intégration $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ d'une façon arbitraire; il faut qu'il y ait entre elles certaines relations quadratiques (9). Mais quand même on suppose que ces équations quadratiques (9) sont satisfaites, A_1 ne sera pas nul en général. Donc l'intégrale de l'équation (2) la plus générale parmi celles qui satisfont aux relations (9) est encore représentée asymptotiquement par une série normale.

Il suit de là et des raisonnements développés plus haut que l'intégrale *la plus générale* de l'équation (1) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

C'est dans ce sens que les résultats du paragraphe III peuvent être regardés comme généralisés.

Le raisonnement qui précède s'applique comme si le déterminant des équations (5) étant nul, l'expression $\frac{dy}{y\,dx}$ n'est plus une fonction rationnelle mais algébrique de x, de u et de ses dérivées. Ce raisonnement est fondé en effet sur ce principe, démontré au paragraphe I, que toutes les opérations du calcul sont applicables aux égalités asymptotiques, si l'on excepte la différentiation. Il n'est pas permis en général de différentier une égalité asymptotique. Mais d'après ce que nous avons vu plus haut, dans le cas particulier où u est une intégrale d'une équation linéaire, il est permis de différentier l'égalité asymptotique

$$u = S'.$$

Il ne se présente donc aucune difficulté.

Il n'y aurait rien à changer aux développements qui précèdent, si l'équation (1) au lieu d'être de rang 2 était de rang quelconque.

Les résultats des paragraphes III et IV peuvent donc s'étendre au cas le plus général, avec les restrictions énoncées plus haut.

Je puis donc énoncer le résultat suivant qui sera la conclusion de ce Mémoire :

L'intégrale la plus générale d'une équation de rang quelconque est représentée asymptotiquement par une des séries normales qui satisfont formellement à cette même équation.

Il peut y avoir exception si l'équation admet des séries anormales.

Paris, le 7 février 1886.

REMARQUES

SUR

LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

(RÉPONSE A M. THOMÉ)

Acta mathematica, t. 10, p. 310-312 (1887).

J'ai publié deux Mémoires sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, le premier *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* dans l'*American Journal of mathematics* (t. 7, 1885, p. 203-258), le second *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* dans les *Acta mathematica* (t. 8, 1886, p. 295-344). Ces deux Mémoires ont inspiré à M. Thomé une *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* qu'il a fait imprimer dans le *Journal de Crelle* (t. 101, 1887) et que je ne puis laisser sans réponse.

Soit une équation linéaire de la forme suivante :

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

où les P sont des polynomes entiers en x d'un même degré m.

On démontre que, pour x très grand, cette équation admet n intégrales de la forme suivante :

$$x^{\rho_i} \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les ψ étant des séries convergentes doublement infinies procédant suivant les puissances positives et négatives de x. Mais on n'a aucun moyen de déterminer les exposants ρ et les coefficients des séries ψ.

D'autre part, on trouve n séries que j'appellerai *séries normales* et qui satisfont *formellement* à l'équation (1). Ces séries, qui sont généralement divergentes, sont de la forme

$$e^{a_i x} x^{r_i} \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ étant des séries ordonnées suivant les puissances négatives de x. J'ai démontré à ce sujet deux théorèmes :

1° Pour qu'une série normale soit convergente, il faut et il suffit que la transformée de Laplace de l'équation (1) admette une intégrale holomorphe dans tout le plan ;

2° Alors même qu'une série normale diverge, elle représente *asymptotiquement* une des intégrales de l'équation (1), quand x croît indéfiniment avec un argument déterminé.

M. Thomé attaque ces deux théorèmes, mais à deux points de vue différents. Quant au premier, il n'en conteste pas l'exactitude, mais il le déclare dénué d'intérêt. C'est là un point sur lequel il est malaisé de discuter.

D'après M. Thomé, il est aussi difficile de distinguer si l'équation transformée a une intégrale holomorphe, que de reconnaître si la série normale converge. J'en conviens volontiers, mais j'estime qu'il n'est pas inutile, quand on est en présence de deux problèmes également insolubles, de montrer qu'ils se ramènent l'un à l'autre.

On croirait que M. Thomé attendait de moi l'énoncé sous forme explicite des conditions de convergence des séries normales. Il ne dépendait pas de moi de le lui donner; ces conditions s'expriment évidemment par des relations entre les $(n+1)(m+1)$ coefficients des polynomes P; mais ces relations ne sont pas algébriques. Tout ce que l'on peut faire, c'est étudier les transcendantes qui y entrent. En établissant que la convergence se rattache à une propriété du groupe de l'équation transformée, je montrais en même temps que ces transcendantes sont intimement liées à d'autres fonctions que j'ai étudiées dans mon Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, 1884, p. 201-311) [1]. Les résultats que j'ai donnés au sujet de ces deux classes de transcendantes sont, il est vrai, fort incomplets; mais il est probable que l'on n'en trouvera pas d'autres d'ici à quelque temps; c'est ce qui

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, t. II, p. 300.

m'a déterminé à les publier, tout en partageant les regrets de M. Thomé au sujet des lacunes qui y subsistent encore.

Quant au second théorème, M. Thomé le regarde comme faux, et cela parce qu'il l'interprète de la façon suivante :

Ce serait toujours la même intégrale qui serait représentée asymptotiquement par la même série normale, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment; d'où il résulterait que les exposants r_i devraient être égaux aux exposants ρ_i.

Je n'ai jamais dit une pareille bêtise et M. Thomé me la prête gratuitement. Le paragraphe V du Mémoire de l'*American Journal* est tout entier destiné à démontrer le contraire et j'ai encore répété le contraire à plusieurs reprises dans le Mémoire des *Acta mathematica*, et en particulier dans les deux dernières lignes de la page 309 et les huit premières lignes de la page 310.

En ce qui concerne ces dix lignes, je reconnais que j'aurais mieux fait de les souligner; mais, quant au paragraphe V, je ne pouvais imaginer qu'un paragraphe tout entier échappât au lecteur le plus inattentif.

Je prévois la réponse de M. Thomé : mais, dira-t-il, si vous ne pouvez nous donner explicitement la valeur des exposants ρ, votre travail est dénué d'intérêt. J'en suis fâché, mais cette détermination explicite est impossible; on est obligé de se contenter de procédés d'approximation indéfinie et c'est ce que j'ai fait en définitive, dans le paragraphe V, en ramenant le problème à la détermination du groupe d'une équation linéaire, question que j'avais traitée, quoique d'une façon incomplète, dans le Mémoire cité des *Acta mathematica* (t. 4).

Paris, le 24 juillet 1887.

EXTRAIT

D'UN

MÉMOIRE INÉDIT DE HENRI POINCARÉ [1]

Acta mathematica, t. 39, p. 58-93 (1923).

Dans la dernière livraison du Journal de Borchardt [2], M. Fuchs a publié un Mémoire dont le résumé se trouve dans une lettre à M. Hermite insérée

---

[1] Ce Mémoire a été publié pour la première fois par M. Mittag-Leffler dans le Tome 39 des *Acta mathematica*. On sait que le Tome 38 du même Recueil a été consacré, par l'éminent mathématicien suédois, à un exposé d'ensemble de l'Œuvre magistrale de H. Poincaré — sous ses multiples aspects — exposé dont nous avons déjà utilisé, dans ce Volume, l' « Analyse des travaux scientifiques de H. Poincaré faite par lui-même ». Le Tome 39 groupe Karl Weierstrass, Henri Poincaré et Sonja Kowalewsky dans un même sentiment de gratitude et comprend, avec une Conférence sur la vie de Weierstrass, une correspondance étendue de ces divers savants et le Mémoire inédit en question. Nous saisissons cette occasion de remercier publiquement M. Mittag-Leffler pour l'important service qu'il a ainsi rendu à la Science.

M. N.-E. Nörlund, qui présente le Mémoire inédit de H. Poincaré, l'accompagne de remarques auxquelles nous empruntons l'essentiel des lignes qui suivent :

L'Académie des Sciences de Paris avait proposé pour sujet de concours, pour le Grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante : « Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. »

Le Mémoire n° 5 — dont H. Poincaré s'est déclaré l'auteur — se compose de deux parties distinctes. La première contient les recherches sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires, développées dans deux Mémoires insérés respectivement, *American Journal of mathematics* (t. 7, 1885, p. 203-258), et *Acta mathematica* (t. 8, 1886, p. 295-344).

(Ces deux Mémoires précèdent, dans ce Volume des *Œuvres*, le Mémoire actuel.)

C'est la deuxième Partie, qui contient les réflexions inspirées à Poincaré par la lecture d'un Mémoire de L. Fuchs, que nous reproduisons maintenant.

Le Mémoire de L. Fuchs a été reçu par H. Poincaré au début de mai 1880 et le Mémoire présenté au Concours est parvenu à l'Académie le 1er juin 1880.

Nous avons ici la première ébauche des recherches de H. Poincaré sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels par l'emploi des transcendantes *uniformes* obtenues en regardant la variable indépendante comme fonction du quotient de deux solutions d'une équation du second ordre. Le Tome II de ces *Œuvres*, tout entier, peut être regardé comme un développement, exceptionnel par son étendue et sa profondeur, des remarques faites dans ce premier travail. (J. D.)

[2] T. 89, 1880, p. 151-169.

aux *Comptes rendus* (¹). Ce Mémoire se rapporte aux équations du second ordre. Je supposerai que l'équation différentielle considérée est ramenée à la forme canonique

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Qy.$$

M. Fuchs démontre que, *à certaines conditions*, si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux intégrales [linéairement distinctes] de l'équation proposée :

1° Si l'on pose

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z,$$

x est fonction méromorphe de z;

2° Si l'on pose

$$\int_0^x f(x)\,dx + \int_0^{x_1} f(x_1)\,dx_1 = u_1,$$
$$\int_0^x \varphi(x)\,dx + \int_0^{x_1} \varphi(x_1)\,dx_1 = u_2,$$

toute fonction rationnelle symétrique de x et de x_1 est fonction méromorphe de u_1 et de u_2.

Ce dernier résultat lui permet de définir des fonctions analogues aux fonctions abéliennes; mais je ne m'occuperai ici que du premier qui permet de définir des fonctions analogues aux fonctions doublement périodiques.

Pour que ce premier résultat soit vrai, *les conditions de M. Fuchs ne sont pas nécessaires et suffisantes.*

Il faut, pour que x soit fonction méromorphe, que pour tous les points singuliers, y compris le point ∞, la différence des racines de l'équation déterminante soit une partie aliquote de l'unité.

En effet, soit une valeur quelconque de z,

$$z = a,$$

ne correspondant pas à un point singulier de l'équation proposée. On a

$$f(x) - z\,\varphi(x) = 0,$$

d'où l'on tire x ordonné suivant les puissances de $z - a$, à moins que les deux expressions

$$f(x) - a\,\varphi(x),$$
$$f'(x) - a\,\varphi'(x)$$

(¹) T. 90, 1880, p. 678-680.

ne s'annulent à la fois. Mais comme nous avons supposé que la valeur $z = a$ correspondait à une valeur de x qui n'est pas un point singulier de l'équation proposée, ces deux expressions ne pourraient s'annuler pour cette valeur de x, qu'à la condition que

$$f(x) - a\varphi(x)$$

fût identiquement nul, c'est-à-dire que $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne fussent pas linéairement indépendants, ce qui a été exclu.

Supposons maintenant que a corresponde à un point singulier $x = b$ situé à distance finie : on a alors $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant des fonctions de x, holomorphes et $\gtrless 0$ pour $x = b$; α, β, γ, δ étant des constantes; ρ_1 et ρ_2 étant les racines de l'équation déterminante,

$$\alpha(x-b)^{\rho_1}f_1(x) + \beta(x-b)^{\rho_2}f_2(x) + z[\gamma(x-b)^{\rho_1}f_1(x) + \delta(x-b)^{\rho_2}f_2(x)] = 0,$$

ou si : partie réelle de $\rho_1 >$ partie réelle de ρ_2

$$(x-b)^{\rho_1-\rho_2}f_1(x)(\alpha+\gamma z) + f_2(x)(\beta+\delta z) = 0.$$

Pour $z = a$, on doit avoir $x = b$, c'est-à-dire que

$$\beta + \delta a = 0.$$

D'ailleurs on a

$$\alpha + \gamma a \gtrless 0,$$

sans quoi l'on aurait

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

ce que nous n'avons pas supposé; on a donc

$$(x-b)^{\rho_1-\rho_2} = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\frac{\delta(z-a)}{\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)},$$

ou

$$(\rho_1-\rho_2)\,\mathrm{L}(x-b) = \mathrm{L}(z-a) + \mathrm{L}\frac{-\delta f_2(x)}{f_1(x)[\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)]},$$

ou

$$\frac{\mathrm{L}(z-a)}{\mathrm{L}(x-b)} = \rho_1-\rho_2 - \frac{\mathrm{L}\dfrac{-\delta f_2(x)}{f_1(x)[\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)]}}{\mathrm{L}(x-b)},$$

ou, pour $z = a$, $x = b$,

$$\lim\frac{\mathrm{L}(z-a)}{\mathrm{L}(x-b)} = \rho_1-\rho_2;$$

or si x est fonction holomorphe de z pour $z = a$, on a

$$x - b = \mathrm{A}_n(z-a)^n + \mathrm{A}_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots,$$

ou

$$\lim \frac{L(z-a)}{L(x-b)} = \frac{1}{n},$$

et par suite

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{n}.$$

Donc *il faut que la différence des racines de l'équation déterminante soit une partie aliquote de l'unité.*

Réciproquement, si

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{n},$$

il vient

$$F(x, z) = (x-b) f_1^n(x)(\alpha + \gamma z)^n + (-1)^{n-1} f_2^n(x)(\beta + \delta z)^n = 0,$$

et l'on en tirera x en fonction holomorphe de z; car pour $z = a$,

$$\frac{dF}{dx} = f_1^n(x)(\alpha + \gamma a)^n$$

n'est pas nulle.

Même raisonnement si, pour $z = a$, $x = \infty$.

Conséquence : Pour que x soit fonction méromorphe de z, — toutes les fois que z prendra une valeur correspondant soit à une valeur finie de x qui ne soit pas un point singulier, soit à une valeur finie de x qui soit un point singulier, soit à une valeur infinie de x —, il faut et il suffit que, pour tous les points singuliers, y compris le point ∞, $(\rho_1 - \rho_2)$ soit une partie aliquote de l'unité.

Ces conditions sont donc nécessaires pour que x soit fonction méromorphe de z dans toute l'étendue du plan.

Sont-elles suffisantes? Elles le seraient si l'on pouvait faire voir que l'on peut obtenir toutes les valeurs de z en faisant décrire à x un nombre *fini* de fois des contours *finis* sur la sphère. C'est ce que M. Fuchs semble avoir admis sans démonstration.

Si cela était, si x décrivant dans le plan un contour quelconque en ne franchissant chacune des coupures (qu'on y peut pratiquer entre les points singuliers) qu'un nombre fini de fois, z prenait toutes les valeurs possibles, alors la fonction x de z serait non seulement méromorphe dans toute l'étendue du plan, mais *dans toute l'étendue de la sphère*, et par conséquent *rationnelle*.

Il s'ensuivrait que l'équation (1) admettrait une intégrale algébrique, ce qui arrive quelquefois mais ce qui n'arrive pas toujours, M. Fuchs lui-même l'a démontré.

Donc en décrivant un certain contour donné (enveloppant plus d'un point singulier) un nombre infini de fois, on arrivera pour z à une certaine valeur singulière qu'on ne pourrait obtenir en décrivant des contours finis un nombre fini de fois.

S'il n'y a sur la sphère qu'une ou deux de ces valeurs singulières de z, il n'y a pas de difficulté.

Soient, en effet, α et β ces deux valeurs singulières; on posera

$$z = \frac{\beta e^{it} + \alpha}{e^{it} + 1}.$$

Alors z ne pourra être égal à α ou à β pour aucune valeur finie de t; donc pour toutes les valeurs finies de t, x est fonction méromorphe de z et par conséquent de t. Donc x est fonction monodrome de t dans toute l'étendue du plan et par conséquent dans toute l'étendue de la sphère. On est donc, par un changement de variables, ramené au cas où x est méromorphe dans toute l'étendue du plan; seulement, c'est de t et non de z que x est fonction méromorphe; pour qu'il le fût également de z, il faudrait que x, considéré comme fonction de t, admît la période 2π, ce qu'on ne peut prévoir *a priori*.

S'il y a sur la sphère plus de deux valeurs singulières, un pareil artifice n'est plus applicable. Quel que soit le changement de variable qu'on effectue, il restera toujours au moins un point singulier à distance finie et, pour que x soit fonction monodrome dans toute l'étendue du plan, il faudra que x soit fonction monodrome dans le voisinage de ce point singulier. Or *la démonstration de M. Fuchs ne s'applique pas à de pareils points.*

Cette objection ne se présente pas pour les démonstrations analogues qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques ou abéliennes. Soit en effet, par exemple,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = z.$$

On démontre aisément que x est méromorphe en z pour toutes les valeurs de z que l'on peut obtenir en faisant décrire à x un nombre fini de fois un contour fini sur la sphère. On peut en conclure que x est monodrome dans toute l'étendue du plan, et par conséquent dans toute l'étendue de la sphère; car, quand on fait décrire à x un contour quelconque un nombre infini de fois, z tend vers l'infini.

Rien de pareil n'a lieu dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Je crois avoir montré que la démonstration de M. Fuchs est insuffisante. Considérons cependant encore la question à un autre point de vue.

L'équation différentielle peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Qy, \tag{1}$$

Q étant fonction de x.

En posant $\frac{dy}{dx} = t$, on trouve (1) entre les fonctions x, y, z, t les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{dz} = y^2, \qquad \frac{dy}{dz} = ty^2, \qquad \frac{dt}{dz} = Qy^3.$$

Pour que x soit fonction méromorphe de z, il faut et il suffit que, *toutes les fois que z est fini*, *toutes* les relations entre x et z tirées de ces équations différentielles soient de la forme

$$x = \text{fonction monodrome de } z,$$

ou

$$z = \text{const.}$$

Or x, y, t sont méromorphes en z, sauf :

1° Quand $Q = \infty$;
2° Quand $x = \infty$;
3° Quand $y = \infty$;
4° Quand $t = \infty$.

M. Fuchs n'a examiné que les deux premières exceptions; il reste à examiner les deux autres. Soit donc $y = \infty$. Comment y peut-il devenir infini? Supposons que x décrive une infinité de fois un certain contour C; que, quand x décrit une fois ce contour, il y ait deux intégrales f et φ de l'équation (1) qui se changent respectivement en αf et en $\beta\varphi$, et soit

$$y = \lambda f + \mu\varphi.$$

Quand x décrira m fois le contour C, y se changera en

$$\lambda\alpha^m f + \mu\beta^m\varphi;$$

mais d'après la forme particulière de l'équation (1), on peut supposer

$$\alpha\beta = 1.$$

(1) [A condition de poser $z = \frac{y_1}{y}$, puisque l'on peut prendre $y\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy}{dx} = 1$.]

Donc, à moins que l'on n'ait mod $\alpha = 1$, on a

$$\text{limite de } y \text{ (pour } m = \infty) = \infty.$$

Soit donc $y = \infty$. Posons alors $y = \frac{1}{\eta}$, les équations différentielles deviennent

$$\frac{dx}{\eta} = \frac{d\eta}{-\eta^3 t} = \frac{dt}{Q} = \frac{dz}{\eta^3},$$

dont les intégrales, si $Q \gtrless 0$, $t \gtrless \infty$, se réduisent à

$$\eta = 0, \qquad x = \text{const.}, \qquad z = \text{const.}$$

La relation entre x et z se réduisant ici à $z = \text{const.}$, il n'y a pas de difficultés.

Supposons donc $Q = 0$, et posons

$$\eta = \eta_1 z^{\frac{1}{2}}, \qquad t = t_1 z^{-\frac{1}{2}},$$

il vient

$$\frac{dz}{\eta_1^3 z} = \frac{dx}{\eta_1} = \frac{d\eta_1}{-\eta_1^3 t_1 - \frac{1}{2}\eta_1^4} = \frac{dt_1}{Q + \frac{1}{2} t_1 \eta_1^3}.$$

Il reste à démontrer que x reste holomorphe en z; quand on a

$$\eta_1 = Q = 0, \qquad t_1 \gtrless \infty,$$

et c'est ce que M. Fuchs n'a pas fait.

Il faudrait ensuite examiner les cas suivants :

$$t = \infty,$$
$$y = Q = \infty, \qquad y = t = Q = \infty, \qquad y = x = \infty,$$
$$y = t = x = \infty.$$

Ces considérations montrent, je pense, l'insuffisance de la démonstration de M. Fuchs et la nécessité d'une étude plus approfondie de la question.

Envisageons d'abord un exemple cité par M. Fuchs, à savoir l'équation (1) (*Journal de Borchardt*, 2e Heft, 89e Band, p. 168) :

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[-\frac{2}{9(x-a_1)^2} + \frac{5}{18(x-a_1)(x-a_2)} - \frac{35}{144(x-a_2)^2} \right] y.$$

Cette équation admet trois points singuliers :

$$a_1, \quad a_2 \quad \text{et} \quad \infty.$$

La différence des racines de l'équation fondamentale déterminante est :

$$\text{pour } a_1, \ \tfrac{1}{3};$$
$$\text{pour } a_2, \ \tfrac{1}{6};$$
$$\text{pour } \infty, \ \tfrac{1}{5}.$$

Traçons sur la sphère représentative des x deux coupures, allant l'une de a_2 à a_1, l'autre de a_2 à l'infini.

Soit $z = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux intégrales de l'équation (1), que l'on aura toujours pu choisir de telle sorte que z se change en $-z$ quand x tourne autour de l'infini, c'est-à-dire quand il décrit un contour fermé en franchissant la seconde coupure.

Quand x franchira la première coupure de façon à tourner autour de a_1, z se changera en z', z' étant lié à z par une équation de la forme

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Donc quand x tournera autour de a_2 de façon à franchir successivement les deux coupures, z se changera en z'', où

$$(2) \qquad \frac{z''-\alpha}{z''-\beta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

Or les racines de l'équation déterminante relative à a_2 ayant pour différence $\frac{1}{6}$, z doit être lié à z'' par une équation de la forme

$$(3) \qquad \frac{z''-\gamma}{z''-\delta} = e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{z-\gamma}{z-\delta}.$$

En identifiant les équations (2) et (3) on trouve, par des calculs algébriques faciles, que $\alpha\beta$ est nul, d'où

$$\alpha \quad \text{ou} \quad \beta = 0;$$

soit par exemple

$$\alpha = 0, \qquad \text{et ensuite} \qquad \delta = 0.$$

Posons alors

$$z = \frac{1}{t},$$

x sera une fonction de t qui ne changera pas quand on changera

$$t \quad \text{en} \quad -t,$$

$$t \quad \text{en} \quad \beta' + e^{\frac{2i\pi}{3}}(t-\beta'),$$

$$t \quad \text{en} \quad \gamma' + e^{\frac{i\pi}{3}}(t-\gamma'), \qquad \text{où} \qquad \beta\beta' = \gamma\gamma' = 1;$$

d'où l'on conclut que cette fonction ne change pas quand on change

$$t \quad \text{en} \quad t + \beta'\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) + \gamma'\left(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

ou

$$t \quad \text{en} \quad t + \gamma'\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) + \beta'\left(1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\right).$$

De plus, en faisant un nombre infini de changements

$$\text{de} \quad t \quad \text{en} \quad -t,$$

ou

$$\text{de} \quad t \quad \text{en} \quad \beta' + e^{\frac{2i\pi}{3}}(t - \beta'),$$

ou

$$\text{de} \quad t \quad \text{en} \quad \gamma' + e^{\frac{i\pi}{3}}(t - \gamma'),$$

ou bien l'on fait tendre t vers l'infini, ou bien l'on tourne toujours dans un cycle formé d'un nombre fini de valeurs de t. Il en résulte qu'il n'y a qu'un seul point singulier

$$t = \infty.$$

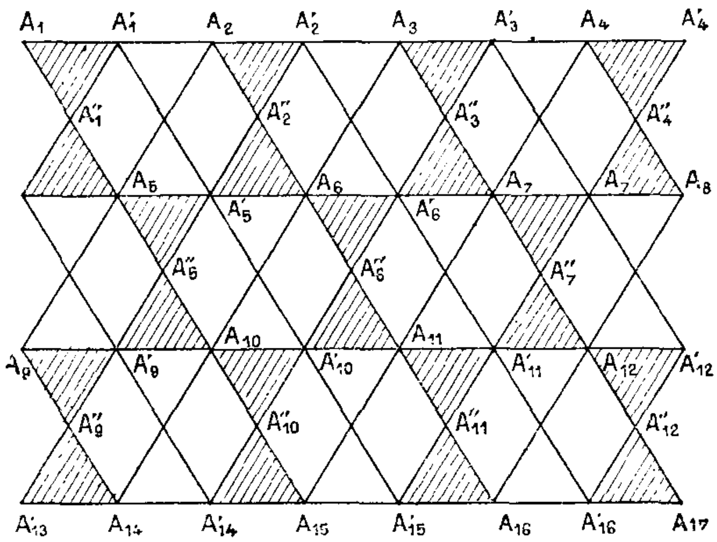
Or x ne peut cesser d'être monodrome en t que pour les valeurs de t qui correspondent à des points singuliers; x est donc monodrome pour toutes les valeurs finies de t; x est donc méromorphe dans tout le plan.

Par conséquent, x est une fonction doublement périodique de t.

La figure donnera une idée des propriétés de cette fonction. Les parallélogrammes des périodes sont

$$A_1 A_2 A_5 A_6, \quad A_2 A_3 A_6 A_7, \quad A_5 A_6 A_{10} A_{11}, \quad \ldots.$$

Fig. 1.



Ces parallélogrammes sont des losanges formés de deux triangles équilatéraux. On décompose chacun d'eux en deux triangles équilatéraux (égaux à la huitième partie de la surface du parallélogramme) que l'on couvre de hachures, et en un hexagone régulier qui reste blanc.

La fonction x ne change pas quand t tourne :

1° De 180° autour du sommet d'un des triangles couverts de hachures;

2° Ou bien de 120° autour du centre d'un de ces triangles;

3° Ou bien de 60° autour du centre d'un des hexagones réguliers restés en blanc.

Quand on connaît x en fonction de t, l'équation (1) s'intègre aisément; on a en effet pour intégrales :

$$\sqrt{\frac{dx}{dt}}, \qquad t\sqrt{\frac{dx}{dt}}.$$

Or si x est une fonction doublement périodique de t, x sera lié à $\frac{dx}{dt}$ par une équation algébrique. *L'une des intégrales sera donc algébrique en x.* Si, en effet, on forme l'équation (1), on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[-\frac{2}{9(x-a_1)^2} + \frac{5}{18(x-a_1)(x-a_2)} - \frac{35}{144(x-a_2)^2}\right]y$$

dont les intégrales sont évidemment

$$y_1 = (x-a_1)^{\frac{1}{3}}(x-a_2)^{\frac{5}{12}}$$

et

$$y_2 = (x-a_1)^{\frac{1}{3}}(x-a_2)^{\frac{5}{12}}\int(x-a_1)^{-\frac{2}{3}}(x-a_2)^{-\frac{5}{6}}\,dx.$$

On a donc

$$\frac{y_2}{y_1} = t = \int(x-a_1)^{-\frac{2}{3}}(x-a_2)^{-\frac{5}{6}}\,dx,$$

d'où l'on tire effectivement x en fonction doublement périodique de t.

Remarque. — L'équation (1) n'admet donc qu'une intégrale algébrique et en admet une; elle fait partie, en effet, d'une classe très nombreuse d'équations différentielles qui ont une intégrale algébrique et une seule.

Soit

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum\frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum\frac{2B_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)}\right].$$

Cette équation admettra une intégrale algébrique pourvu que l'on ait

$$B_{ik} = \left[\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+A_i}\right]\left[\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+A_k}\right].$$

La seconde intégrale se trouve par une simple quadrature ([1]).

L'exemple qui précède fait voir que, dans certains cas, le théorème de M. Fuchs est exact, et que x est fonction doublement périodique de z.

Cherchons comment cela peut avoir lieu; *proposons-nous de trouver dans quel cas x est une fonction de z susceptible d'être ramenée aux fonctions doublement périodiques.*

Cherchons, ce qui revient au même, dans quel cas x est une fonction de z telle qu'il n'y ait, sur la sphère représentative des z, que *un* ou que *deux* points singuliers.

Supposons que le théorème de M. Fuchs soit vrai, c'est-à-dire que x soit fonction monodrome de z; ce sera une fonction de z qui se reproduira quand on changera z en z', où

$$z' = \frac{az+b}{a'z+b'} \tag{5}$$

(et cela pour une infinité de systèmes de valeurs de a, b, a', b').

Or la relation (5) entre z et z' peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta} \tag{6}$$

ou sous la forme

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda. \tag{7}$$

Premier cas.

Supposons que x ne change pas quand on change z en z'_0, ou en z'_1, ou en z'_2, ...; et que *toutes* les quantités z'_0, z'_1, z'_2, ... soient liées à z par des relations qui peuvent se mettre sous la forme (6) et de telle façon que

$$\lambda = e^{2i\pi h},$$

([1]) Si l'on pose $\alpha_i = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_i}$, ces conditions sont suffisantes (elles ne sont nécessaires que dans le cas de trois points singuliers) pour que $y_1 = \Pi(x-a_i)^{\alpha_i}$ satisfasse à l'équation. Il faut donc en outre, pour que cette intégrale soit algébrique, après avoir fixé le signe des radicaux, que tous ces radicaux soient *commensurables*. La deuxième intégrale $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$ donne alors

$$\frac{y_2}{y_1} = t = \int \frac{dx}{y_1^2}.$$ (J. D.)

h étant commensurable. Dans ce cas, le nombre des quantités $z'_0, z'_1, z'_2, \ldots$ sera forcément limité et x sera une fonction rationnelle de z. L'équation (1) sera intégrable algébriquement.

Deuxième cas.

Supposons que x ne change pas quand on change z en z', où

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad (\operatorname{mod}\lambda \gtrless 1).$$

Posons

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = t,$$

x sera une fonction monodrome de t qui ne changera pas quand on changera t en λt.

Il y aura alors deux points singuliers :

$$t = 0, \qquad t = \infty.$$

Il ne pourrait y en avoir davantage sans qu'il y en eût une infinité, car les points $t = 0$ et $t = \infty$ sont les seuls qui se reproduisent quand on change t en λt. Quand x tourne autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se change en t', où

$$\frac{t'-a}{t'-b} = \lambda_1\frac{t-a}{t-b}; \tag{8}$$

ici

$$\lambda_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

n étant entier. Si l'on veut qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points singuliers, il faut que la substitution (8) reproduise le système des points

$$t = 0, \qquad t = \infty.$$

Or cela peut arriver de deux manières :

1° Si la substitution (8) reproduit le point $t = 0$, et reproduit également le point $t = \infty$.

Pour cela, il faut que la substitution (8) s'écrive

$$t' = t\,e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

2° Si la substitution (8) change le point $t = 0$ en $t = \infty$, et le point $t = \infty$ en $t = 0$.

Un pareil échange ne peut avoir lieu que si la substitution (8) change t en t' et t' en t, c'est-à-dire si

$$\lambda_1 = -1.$$

Si, dans l'équation (8), on fait

$$\lambda_1 = -1, \qquad t = 0, \qquad t' = \infty,$$

il vient

$$\frac{a}{b} = -1,$$

d'où

$$\frac{t'-a}{t'+a} = -\frac{t-a}{t+a},$$

ou

$$tt' - a^2 = 0,$$

ou enfin

$$t' = \frac{a^2}{t}.$$

Pour qu'on n'ait qu'un nombre fini de points singuliers il faut donc que, quand x tourne autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se change soit en $te^{\frac{2i\pi}{n}}$, soit en $\frac{a^2}{t}$.

Nous aurons donc une fonction monodrome de t qui ne changera pas quand on changera

$$t \quad \text{en} \quad \lambda t,$$

ou t en

$$te^{\frac{2i\pi}{n_1}}, \quad te^{\frac{2i\pi}{n_2}}, \quad \dots, \quad te^{\frac{2i\pi}{n_k}},$$

ou t en

$$\frac{K_1}{t}, \quad \frac{K_2}{t}, \quad \dots, \quad \frac{K_p}{t},$$

et par conséquent quand on multipliera t par $\frac{K_1}{K_2}, \frac{K_1}{K_3}, \dots, \frac{K_1}{K_p}$, ou encore par $e^{\frac{2i\pi}{m}}$, m étant le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Posons maintenant

$$t = e^u,$$

x sera une fonction monodrome de u qui ne changera pas quand on changera u en $u + L\lambda$, ou u en $u + \frac{2i\pi}{m}$, ou u en $u + LK_1 - LK_2$ ou en $u + LK_1 - LK_3, \dots$, ou en $u + LK_1 - LK_p$.

Cette fonction admet donc un certain nombre de périodes; il faut que ces périodes soient compatibles, c'est-à-dire qu'on puisse trouver des quantités commensurables

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \dots, \quad \alpha_p$$

telles que

$$\alpha_2 \mathrm{L}\lambda + \mathrm{LK}_1 - \mathrm{LK}_2, \quad \alpha_3 \mathrm{L}\lambda + \mathrm{LK}_1 - \mathrm{LK}_3, \quad \ldots, \quad \alpha_p \mathrm{L}\lambda + \mathrm{LK}_1 - \mathrm{LK}_p$$

soient commensurables avec $2i\pi$.

On peut toujours supposer

$$\lambda = \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}_2},$$

car on a pris pour λ *l'une quelconque* des quantités par lesquelles on peut multiplier t sans altérer x. Il faut alors que l'on puisse trouver des quantités commensurables $\alpha_3, \ldots, \alpha_p$ telles que

$$\alpha_3 \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_3}{\mathrm{K}_1}, \quad \alpha_4 \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_4}{\mathrm{K}_1}, \quad \ldots, \quad \alpha_p \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_p}{\mathrm{K}_1}$$

soient commensurables avec $2i\pi$. Donc :

Condition I. — 1° Les logarithmes des modules $\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1}, \frac{\mathrm{K}_3}{\mathrm{K}_1}, \cdot\cdot$ doivent être commensurables entre eux.

Condition II. — 2° Les quantités

$$-\frac{\mathrm{L}\bmod\frac{\mathrm{K}_3}{\mathrm{K}_1}}{\mathrm{L}\bmod\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1}}\mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}_3}{\mathrm{K}_1}, \quad \ldots$$

doivent être commensurables avec $2i\pi$.

Si ces conditions sont remplies, x sera une fonction doublement périodique de u.

Continuons cette discussion et tout d'abord remarquons qu'il ne peut jamais arriver que, lorsque x tourne autour d'un point singulier a de l'équation (1), t se change en

$$t e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

comme il semblait au premier abord que cela pourrait se faire.

En effet, si cela était pour $x = a$, t serait égal à zéro ou à l'infini, c'est-à-dire irait en un point singulier, *ce qui est absurde*.

Toutes les fois que x tournera autour d'un point singulier de l'équation (1), t se changera en $\frac{\mathrm{K}_1}{t}$, ou $\frac{\mathrm{K}_2}{t}$, $\ldots$, ou $\frac{\mathrm{K}_p}{t}$.

Donc, pour tous les points singuliers de l'équation (1), la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale est égale à $\frac{1}{2}$.

Problème. — *Une fonction doublement périodique peut-elle donner naissance ainsi à une équation différentielle linéaire du second ordre?*

Soient h et k les deux périodes de x considéré comme fonction doublement périodique de u; nous écrirons

$$A \equiv 0 \qquad [\bmod (h, k)]$$

quand on aura

$$A = mh + nk,$$

m et n étant des entiers réels.

On devra avoir

$$LK_1 - LK_2 \equiv LK_1 - LK_3 \equiv \ldots \equiv LK_1 - LK_p \equiv 0 \qquad [\bmod (h, k)],$$
$$2i\pi \equiv 0 \qquad [\bmod (h, k)].$$

Pour une même valeur de x, u pourra prendre une infinité de valeurs; soit u_1 l'une de ces valeurs; les autres devront satisfaire à l'une des congruences

$$u \equiv u_1, \qquad u \equiv LK_1 - u_1, \qquad u \equiv LK_2 - u_1, \qquad \ldots, \qquad u \equiv LK_p - u_1 \qquad [\bmod (h, k)],$$

c'est-à-dire à l'une des deux congruences

$$u \equiv u_1, \qquad u \equiv LK_1 - u_1 \qquad [\bmod (h, k)],$$

car on a évidemment

$$LK_1 - u_1 \equiv LK_2 - u_1 \equiv \ldots \equiv LK_p - u_1 \qquad [\bmod (h, k)].$$

Il n'y a, dans le parallélogramme des périodes, que deux valeurs satisfaisant à ces congruences. Donc x est une fonction doublement périodique de u à deux infinis; nous supposerons que ces infinis sont $-a$ et $+a$, c'est-à-dire que

$$LK_1 = 0;$$

nous pouvons toujours le faire, car si cela n'était pas on n'aurait qu'à multiplier t par un facteur convenable.

Nous poserons alors

$$x = \Lambda(u);$$

on a

$$\frac{dx}{du} = 0$$

toutes les fois que

$$u \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad u \equiv \frac{h}{2},$$

ou

$$u \equiv \frac{k}{2} \qquad \text{ou} \qquad u \equiv \frac{h+k}{2} \qquad [\bmod (h, k)].$$

Toutes les fois que $\frac{dx}{du} \gtrless 0$, u se développe suivant les puissances croissantes de $(x-a)$ si x est fini, ou de $\frac{1}{x}$ si x est infini.

Supposons au contraire $u = 0$, et soit

$$\Lambda(0) = \alpha.$$

Quand x tourne autour du point α, u se change en $-u$ et u est égal à zéro pour $x = \alpha$; enfin on a

$$x - \alpha = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots,$$

où $A_2 \gtrless 0$; d'où l'on déduit

$$u = \sqrt{x-\alpha}\,[B_0 + B_1(x-\alpha) + B_2(x-\alpha)^2 + \ldots],$$

où $B_0 \gtrless 0$.

Soit de même

$$\Lambda\left(\frac{h}{2}\right) = \beta, \qquad \Lambda\left(\frac{k}{2}\right) = \gamma, \qquad \Lambda\left(\frac{h+k}{2}\right) = \delta,$$

on aura

$$u - \frac{h}{2} = \sqrt{x-\beta}\,[B'_0 + B'_1(x-\beta) + B'_2(x-\beta)^2 + \ldots],$$

$$u - \frac{k}{2} = \sqrt{x-\gamma}\,[B''_0 + B''_1(x-\gamma) + B''_2(x-\gamma)^2 + \ldots],$$

$$u - \frac{h+k}{2} = \sqrt{x-\delta}\,[B'''_0 + B'''_1(x-\delta) + B'''_2(x-\delta)^2 + \ldots],$$

où

$$B'_0 \gtrless 0, \qquad B''_0 \gtrless 0, \qquad B'''_0 \gtrless 0.$$

Soient maintenant

$$y_1 = e^{-\frac{u}{2}} \sqrt{\frac{d\Lambda}{du}},$$

$$y_2 = e^{\frac{u}{2}} \sqrt{\frac{d\Lambda}{du}}.$$

A une même valeur de x correspondent une infinité de valeurs de u; soit u_0 l'une d'entre elles; les autres seront

$$u_0 + mh + nk,$$

$$-u_0 + mh + nk,$$

où m et n sont entiers. On aura

$$\Lambda(u_0 + mh + nk) = \Lambda(u_0),$$

$$\Lambda(-u_0 + mh + nk) = \Lambda(u_0),$$

d'où l'on tire, par différentiation,

$$\Lambda'(u_0 + mh + nk) = \Lambda'(u_0),$$

$$-\Lambda'(-u_0 + mh + nk) = \Lambda'(u_0).$$

Si l'on fait $u = u_0$ dans les formules qui donnent y_1 et y_2, on trouve pour ces fonctions des valeurs

$$y_{10} \quad \text{et} \quad y_{20}.$$

Si maintenant on fait

$$u = u_0 + mh + nk,$$

on trouve

$$y_1 = \pm y_{10}\, e^{-\frac{mh+nk}{2}},$$
$$y_2 = \pm y_{20}\, e^{+\frac{mh+nk}{2}}.$$

Faisons maintenant

$$u = -u_0 + mh + nk,$$

il viendra

$$y_1 = \pm \sqrt{-1}\, y_{20}\, e^{-\frac{mh+nk}{2}},$$
$$y_2 = \pm \sqrt{-1}\, y_{10}\, e^{\frac{mh+nk}{2}}.$$

Donc y_1 et y_2 sont des fonctions de x qui peuvent prendre une infinité de valeurs pour chaque valeur de x; mais si y_{10} et y_{20} sont un systéme de valeurs de ces fonctions, toutes les autres seront de la forme

$$y_1 = \alpha\, y_{10} + \beta\, y_{20},$$
$$y_2 = \alpha' y_{10} + \beta' y_{20},$$

et de plus le déterminant

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta$$

sera toujours égal à 1. C'est dire que y_1 et y_2 satisfont à une équatïon de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{U}y,$$

où U est une fonction de x monodrome dans tout le plan.

Pour étudier la fonction U, il faut donner à x toutes les valeurs possibles sur la sphère, et il suffit de les lui donner une seule fois; c'est ce que nous arriverons à faire en donnant à u toutes les valeurs comprises dans l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Donnons d'abord à u une valeur telle que

$$\frac{dx}{du} \gtrless 0,$$

il est clair que y_1 et y_2 sont développables suivant les puissances de $x - a$, si x est fini. De plus, ni y_1 ni y_2 ne sont nuls. C'est dire que U est holomorphe en x si x est fini.

Faisons maintenant $u = 0$; on a alors

$$u = \sqrt{x-\alpha}\,[B_0 + B_1(x-\alpha) + \ldots],$$
$$x - \alpha = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{dx}{du} = 2A_2 u + 3A_3 u^2 + \ldots,$$

ou

$$\frac{d\Lambda}{du} = \frac{dx}{du} = \sqrt{x-\alpha}\,[C_0 + C_1(x-\alpha) + \ldots]$$

avec

$$C_0 \gtrless 0,$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{d\Lambda}{du}} = \sqrt[4]{x-\alpha}\,[D_0 + D_1(x-\alpha) + \ldots]$$

avec

$$D_0 \gtrless 0.$$

De plus,

$$e^{-\frac{u}{2}} = [E_0 + E_1(x-\alpha) + \ldots] + \sqrt{x-\alpha}\,[F_0 + F_1(x-\alpha) + \ldots],$$

où

$$E_0 \gtrless 0, \quad F_0 \gtrless 0,$$

ou enfin

$$y_1 = \sqrt[4]{x-\alpha}\,[a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots] + \sqrt{x-\alpha}\,\sqrt[4]{x-\alpha}\,[b_0 + b_1(x-\alpha) + \ldots]$$

et

$$y_2 = \sqrt[4]{x-\alpha}\,[a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots] - \sqrt{x-\alpha}\,\sqrt[4]{x-\alpha}\,[b_0 + b_1(x-\alpha) + \ldots].$$

Ici

$$a_0 \gtrless 0, \qquad b_0 \gtrless 0.$$

Donc, pour $x = \alpha$, U présente un infini double; le point $x = \alpha$ est donc un point singulier de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Uy.$$

et les racines de l'équation déterminante correspondante sont

$$\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}.$$

On arrive au même résultat en faisant

$$u = \frac{h}{2}, \qquad u = \frac{k}{2}, \qquad u = \frac{h+k}{2},$$

et par conséquent

$$x = \beta, \qquad x = \gamma, \qquad x = \delta.$$

Conséquence. — U *est une fonction méromorphe de* x *dans toute l'étendue de la sphère; c'est donc une fonction rationnelle.*

L'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{U}y$$

est donc à coefficients rationnels; elle admet quatre points singuliers à distance finie, et, pour ces quatre points singuliers, les racines de l'équation déterminante sont

$$\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}.$$

On conclut de là :

On peut toujours former une équation différentielle linéaire, à coefficients rationnels, et s'intégrant à l'aide d'une fonction doublement périodique donnée à deux infinis.

Si l'on choisit cette fonction doublement périodique (avec des périodes h et k) de telle façon que

$$2i\pi \equiv 0 \quad [\bmod (h, k)],$$

x sera une fonction monodrome de u admettant la période $2i\pi$; *ce sera donc une fonction monodrome de t et par conséquent de z.*

Par conséquent, il existe des cas où le théorème de M. Fuchs est vrai.

Si, au contraire, on choisit cette fonction doublement périodique de telle façon que l'on n'ait pas

$$2i\pi \equiv 0 \quad [\bmod (h, k)]$$

x sera une fonction monodrome de u; mais, n'admettant pas la période $2i\pi$, *elle ne sera pas monodrome en t, ni par conséquent en z.*

Donc il existe des cas où le théorème de M. Fuchs est faux, bien que les conditions posées par ce géomètre soient remplies.

Cherchons à former des équations différentielles linéaires qui satisfassent aux conditions précédentes.

Ces équations s'écriront

$$\frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^2} + \frac{D_2}{(x-\delta)^2}$$
$$+ \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{D_1}{x-\delta}.$$

Pour que, relativement aux quatre points singuliers α, β, γ, δ, les racines de l'équation déterminante soient $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, il faut que

$$A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = -\frac{3}{16}. \tag{9}$$

Faisons maintenant $x = \frac{1}{z}$, et étudions l'équation dans le voisinage de $z = 0$; il vient

$$z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2 z^3 \frac{dy}{dz} = \left[\frac{A_2 z^2}{(1-\alpha z)^2} + \frac{B_2 z^2}{(1-\beta z)^2} + \frac{C_2 z^2}{(1-\gamma z)^2} + \frac{D_2 z^2}{(1-\delta z)^2} + \frac{A_1 z}{1-\alpha z} + \frac{B_1 z}{1-\beta z} + \frac{C_1 z}{1-\gamma z} + \frac{D_1 z}{1-\delta z}\right] y.$$

1° Dans le voisinage de $z = 0$, les intégrales de l'équation doivent être régulières; donc, dans le développement du second membre, le coefficient de z doit être nul; donc

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 0; \tag{10}$$

2° Les racines de l'équation déterminante doivent être égales à 0 et à -1; donc, dans le développement du second membre, le coefficient de z^2 doit être nul; d'où

$$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + A_1 \alpha + B_1 \beta + C_1 \gamma + D_1 \delta = 0; \tag{11}$$

3° Les développements des intégrales ne doivent pas contenir de logarithmes; donc le coefficient de z^3 doit encore être nul, c'est-à-dire que l'on a

$$2 A_2 \alpha + 2 B_2 \beta + 2 C_2 \gamma + 2 D_2 \delta + A_1 \alpha^2 + B_1 \beta^2 + C_1 \gamma^2 + D_1 \delta^2 = 0. \tag{12}$$

L'équation ainsi formée dépend encore de cinq paramètres. En effet, nous avions primitivement douze paramètres :

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta, \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2, \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1, \end{matrix}$$

et nous avons trouvé entre ces douze paramètres les sept équations (9), (10), (11), (12).

Considérons maintenant une fonction doublement périodique quelconque à deux infinis. Cette fonction peut s'écrire

$$A\,Z(u-a) - A\,Z(u-b) + B = \Lambda(u).$$

Cette fonction $\Lambda(u)$ dépend de six paramètres, à savoir :

1° Les deux périodes h et k;

2° Les deux infinis a et b;

3° Le résidu relatif aux deux infinis, c'est-à-dire A;

4° La constante B.

Si deux fonctions $\Lambda(u)$ ne diffèrent ni par les périodes h et k, ni par les quantités A et B, mais seulement par les infinis a et b; si de plus $(a-b)$ a la même valeur pour les deux fonctions, ces fonctions donneront naissance à une même équation différentielle.

Si, au contraire, les deux fonctions diffèrent de toute autre manière, elles ne pourront donner naissance à une même équation différentielle.

Donc la fonction $\Lambda(u)$ la plus générale donne naissance à une équation différentielle dépendant de cinq paramètres et de cinq seulement.

Donc pour que l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^3} + \frac{D_2}{(x-\delta)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{D_1}{x-\delta} \tag{13}$$

soit intégrable par des fonctions doublement périodiques, il faut et il suffit qu'il y ait entre les douze paramètres qui y entrent les relations (9), (10), (11) *et* (12).

Avec une condition de plus, on pourrait déterminer les périodes de $\Lambda(u)$ de telle façon que le théorème de M. Fuchs soit vrai. Mais cela n'a pas lieu en général.

Troisième cas.

Supposons que x soit une fonction monodrome de z qui ne change pas quand on change z en z', où

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda.$$

Faisons

$$\frac{1}{z-\alpha} = t,$$

x sera une fonction monodrome de t, admettant la période λ; il n'y aura qu'un point singulier

$$t = \infty,$$

car s'il y en avait davantage, il y en aurait une infinité.

Quand x tournera autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se changera en t' où

$$\frac{t'-\gamma}{t'-\delta} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \frac{t-\gamma}{t-\delta}. \tag{14}$$

Et cette substitution (14) devra reproduire le point singulier unique $t=\infty$; elle devra donc s'écrire

$$t'-\gamma = e^{\frac{2i\pi}{n}}(t-\gamma);$$

x sera donc une fonction de t, monodrome, et qui ne changera pas quand t se changera en

$$t+\lambda,$$

ou en

$$\gamma_1 + e^{\frac{2i\pi}{n_1}}(t-\gamma_1), \quad \gamma_2 + e^{\frac{2i\pi}{n_2}}(t-\gamma_2), \quad \ldots, \quad \gamma_p + e^{\frac{2i\pi}{n_p}}(t-\gamma_p).$$

Il est aisé de voir qu'on peut, en combinant de toutes les façons possibles ces différentes substitutions, faire voir que x admet un certain nombre de périodes différentes.

Il faut donc que ces périodes soient compatibles, et, si elles le sont, x est fonction doublement périodique de t.

On pourrait maintenant discuter la compatibilité de ces périodes. Je ne le ferai pas; car dans le cas qui nous occupe, *l'équation différentielle* (1) *admet toujours une intégrale algébrique et une autre que l'on peut trouver par quadrature*, ainsi que je vais le faire voir.

Supposons que l'on ait

$$x = \Lambda(t),$$

$\Lambda(t)$ étant une fonction doublement périodique de t; on aura alors

$$y_1 = \sqrt{\frac{d\Lambda}{dt}},$$

$$y_2 = t\sqrt{\frac{d\Lambda}{dt}},$$

pour les deux intégrales de l'équation (1). Il est clair que y_1 est lié à x par une relation algébrique, et que t, et par conséquent y_2, peut se calculer en fonction de x par quadrature.

Donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, si l'équation différentielle linéaire donnée (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{2B_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)}$$

(*voir* p. 345), on devra avoir les relations

$$B_{ik} = \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_i}\right] \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_k}\right] \tag{15}$$

[où les radicaux sont commensurables].

Remarquons que si les conditions (15) sont remplies, et s'il en est de même des conditions de M. Fuchs, le théorème de M. Fuchs sera toujours vrai.

Exemple : l'équation que nous avons étudiée plus haut, pages 342 et suivantes.

Résumé. — Résumons cette longue discussion :

Pour que l'équation (1) soit intégrable à l'aide d'une fonction doublement périodique, il faut et il suffit :

1° Ou bien qu'elle satisfasse aux conditions (15), et en outre aux conditions de M. Fuchs;

2° Ou bien qu'elle soit de la forme (13) et satisfasse aux conditions (9), (10), (11), (12); d'où il résultera par surcroît qu'elle satisfera aux conditions de M. Fuchs.

Dans le premier cas, il y a toujours une intégrale algébrique, et le théorème de M. Fuchs est toujours vrai. Dans le second cas, il n'y a pas d'intégrale algébrique, et le théorème de M. Fuchs est tantôt vrai et tantôt faux.

Cas particulier.

Nous allons maintenant faire une étude spéciale d'un cas particulier fort important, c'est celui où l'on n'a à distance finie que deux points singuliers a_1 et a_2. Alors l'équation (1) s'écrit

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{2B}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2}.$$

Soient ρ_1, ρ_2 et r les différences des racines des équations déterminantes relatives respectivement à

$$x = a_1, \qquad x = a_2 \qquad \text{et} \qquad x = \infty,$$

A_1, B et A_2 sont parfaitement déterminés en fonction de ρ_1, ρ_2 et r.

Si les conditions de M. Fuchs sont remplies, on a

$$\rho_1 = \frac{1}{n_1}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{n_2}, \qquad r = \frac{1}{p},$$

où n_1, n_2 et p sont des entiers. *Ne supposons pas pour le moment qu'elles le soient.*

Soient, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent, $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux solutions de l'équation (1) et

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z.$$

On aura toujours pu choisir $f(x)$ et $\varphi(x)$ de telle sorte que, quand x tourne autour de a_1, z se change en λz, où

$$\lambda = e^{2i\pi\rho_1}.$$

Cela posé, quand x tournera autour de a_2, z se changera en z', où

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \mu\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \qquad \mu = e^{2i\pi\rho_2}. \tag{16}$$

On aura aussi toujours pu choisir $f(x)$ et $\varphi(x)$ de façon que $\alpha = 1$ par exemple (ou $\beta = 1$ si $\alpha = 0$). Quand x tournera autour de ∞, z se changera en z'' où

$$\frac{z''-\gamma}{z''-\delta} = \nu\frac{z-\gamma}{z-\delta}, \qquad \nu = e^{2i\pi r}. \tag{17}$$

Si x tourne autour de a_1, puis autour de a_2, c'est comme s'il tournait autour de l'infini dans un certain sens; donc z se change en z''; or z se change d'abord en λz quand x tourne autour de a_1; donc quand x tourne autour de a_2, λz doit se changer en z'', c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{z''-\alpha}{z''-\beta} = \mu\frac{\lambda z-\alpha}{\lambda z-\beta}. \tag{18}$$

Identifions les équations (17) et (18). Si l'équation (17) développée s'écrit

$$a\,zz'' + bz + cz'' + d = 0,$$

on aura

$$\nu^2 - \nu\frac{b^2+c^2-2ad}{ad-bc} + 1 = 0.$$

Or l'équation (18) développée s'écrit

$$zz''\lambda(1-\mu) + z\lambda(\beta\mu-\alpha) + z''(\alpha\mu-\beta) + \alpha\beta(1-\mu) = 0.$$

On a donc

$$\frac{a}{\lambda(1-\mu)} = \frac{b}{\lambda(\beta\mu-\alpha)} = \frac{c}{\alpha\mu-\beta} = \frac{d}{\alpha\beta(1-\mu)}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}(\nu^2+1)[\alpha\beta\lambda(1-\mu)^2-\lambda(\beta\mu-\alpha)(\alpha\mu-\beta)]\\ -\nu[\lambda^2(\beta\mu-\alpha)^2+(\alpha\mu-\beta)^2-2\alpha\beta\lambda(1-\mu)^2]=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\alpha^2[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)]+\beta^2[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2\mu^2+1)]\\ -2\alpha\beta[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)]=0,\end{aligned}$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ est alors donné par une équation du second degré. Formons le discriminant de cette équation, nous aurons

$$\begin{aligned}\Lambda=[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)]^2\\ -[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)][(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2\mu^2+1)],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Lambda=\nu(\nu^2+1)\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda+4\lambda\mu-2\lambda\mu^2-2\mu\lambda^2-2\mu)\\ +2\nu^2\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda+4\lambda\mu-2\lambda\mu^2-2\mu\lambda^2-2\mu),\end{aligned}$$

ou enfin

$$\Lambda=\lambda\mu\nu(\nu+1)^2(\lambda-1)^2(\mu-1)^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\nu^2-1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)\pm(\nu+1)(\lambda-1)(\mu-1)\sqrt{\lambda\mu\nu}}{(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)}.$$

Laquelle des deux racines faut-il choisir? Cela est facile à décider. Supposons d'abord, en effet, que $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$, $\nu=\nu_0$; λ_0, μ_0 et ν_0 étant tels que l'équation (1) admette une intégrale algébrique. Alors le choix de la racine se fera sans difficulté. On fera ensuite varier d'une façon continue λ, μ, ν depuis les valeurs initiales λ_0, μ_0, ν_0 jusqu'à des valeurs quelconques, et l'on fera varier de même $\frac{\alpha}{\beta}$ d'une façon continue; nous ne serons donc jamais embarrassés pour savoir quelle est celle des deux valeurs de $\frac{\alpha}{\beta}$ qui convient.

Soient deux équations E et E′ de la forme (1); supposons que, pour la première, les différences des racines des équations déterminantes relatives à a_1, a_2 et ∞ soient respectivement

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad r,$$

et que pour la seconde ces différences soient

$$\rho'_1, \quad \rho'_2, \quad r'.$$

Supposons que les quantités $\rho_1-\rho'_1$, $\rho_2-\rho'_2$, $r-r'$ soient des nombres entiers, alors λ, μ, ν auront les mêmes valeurs pour les deux équations E et E′. L'équation du second degré en $\frac{\alpha}{\beta}$ sera la même pour les deux équations différentielles E et E′. Devra-t-on choisir la même racine?

Remarquons que les deux racines de l'équation en $\frac{\alpha}{\beta}$ se permutent quand λ, μ ou ν décrit un contour simple autour du point zéro. On retombera donc d'une racine sur l'autre, ou bien on retombera sur la même racine selon que le nombre des contours simples décrits autour du point zéro soit par λ, soit par μ, soit par ν, sera impair ou pair.

Or quand λ décrit un contour simple autour du point zéro, ρ_1 se change en $\rho_1 + 1$ ou $\rho_1 - 1$; quand μ tourne autour de zéro, ρ_2 se change en $\rho_2 + 1$ ou $\rho_2 - 1$; quand ν tourne autour de zéro, r se change en $r+1$ ou $r-1$.

Donc on devra prendre pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la même valeur ou deux valeurs différentes pour les deux équations E et E', selon que

$$\rho_1 - \rho'_1 + \rho_2 - \rho'_2 + r - r' \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} 2),$$

ou

$$\rho_1 - \rho'_1 + \rho_2 - \rho'_2 + r - r' \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Si donc $\rho_1 - \rho'_1$, $\rho_2 - \rho'_2$, $r - r'$ sont entiers et si la somme de ces entiers est paire, on pourra choisir deux intégrales de l'équation E,

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad f(x),$$

et deux intégrales de l'équation E',

$$\varphi'(x) \quad \text{et} \quad f'(x),$$

telles que, quand x décrit un contour fermé quelconque, les valeurs finales de $\varphi'(x)$ et $f'(x)$ s'expriment linéairement à l'aide des valeurs initiales de ces mêmes intégrales *par la même formule* qui exprime les valeurs finales de $\varphi(x)$ et $f(x)$ en fonctions linéaires des valeurs initiales de ces mêmes intégrales.

Remarque. — D'après ce qui précède on aura toujours le moyen, quand l'équation (1) n'admet que deux points singuliers à distance finie, d'exprimer les valeurs finales des intégrales de cette équation en fonctions linéaires des valeurs initiales en supposant que x ait décrit un contour fermé quelconque, et par conséquent *de reconnaître si* ces intégrales sont algébriques.

Discussion.

Supposons que les conditions de M. Fuchs soient remplies; on a

$$\lambda = \cos 2\pi\rho_1 + i \sin 2\pi\rho_1, \qquad \mu = \cos 2\pi\rho_2 + i \sin 2\pi\rho_2, \qquad \nu = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)-\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+2\pm\left(\sqrt{\nu}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\mu}-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)}{\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)-\left(\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\mu}{\lambda}\right)}$$

ou

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\cos 2\pi r-\cos 2\pi\rho_1-\cos 2\pi\rho_2+1\mp 4\cos\pi r\sin\pi\rho_1\sin\pi\rho_2}{\cos 2\pi r-\cos 2\pi(\rho_1-\rho_2)}.$$

Dans cette formule, $\frac{\alpha}{\beta}$ s'exprime par une fonction monodrome de ρ_1, ρ_2 et r. Donc, par raison de continuité, la racine qui conviendra à la question sera ou bien *toujours* celle qui correspond au signe $+$, ou bien *toujours* celle qui correspond au signe $-$. En prenant pour exemple une équation ayant une intégrale algébrique, on déciderait aisément lequel des deux signes on doit prendre.

Soit donc, par exemple,

$$y=(x-a_1)^{\frac{1}{2}-\frac{\rho_1}{2}}(x-a_2)^{\frac{1}{2}-\frac{\rho_2}{2}}.$$

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho_1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\rho_1}{2}\right)}{(x-a_1)^2}+\frac{2\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho_2}{2}\right)}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho_2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\rho_2}{2}\right)}{(x-a_2)^2}$$

et il est clair que la différence des racines de l'équation déterminante est ici :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } a_1, & \rho_1; \\ \text{pour } a_2, & \rho_2; \\ \text{pour } \infty, & 1-\rho_1-\rho_2. \end{array}$$

Posons donc $r=1-\rho_1-\rho_2$, il viendra

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(1-\cos 2\pi\rho_1)(1-\cos 2\pi\rho_2)-\sin 2\pi\rho_1\sin 2\pi\rho_2 \\ \quad\mp[-\sin 2\pi\rho_1\sin 2\pi\rho_2+(1-\cos 2\pi\rho_1)(1-\cos 2\pi\rho_2)]\end{array}\right\}}{-2\sin 2\pi\rho_1\sin 2\pi\rho_2};$$

or il est clair que, dans le cas particulier qui nous occupe, on doit avoir $\frac{\alpha}{\beta}=0$; donc toutes les fois que

$$r=1-\rho_1-\rho_2,$$

c'est le signe $-$ qu'on doit prendre; et par raison de continuité, c'est le signe $-$ qu'on doit prendre, quels que soient r, ρ_1 et ρ_2.

Donc, quels que soient r, ρ_1 et ρ_2, on a

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\cos 2\pi r-\cos 2\pi\rho_1-\cos 2\pi\rho_2+1-4\cos\pi r\sin\pi\rho_1\sin\pi\rho_2}{\cos 2\pi r-\cos 2\pi(\rho_1-\rho_2)}.$$

Si les conditions de M. Fuchs sont remplies, cette valeur est réelle.

Supposons en particulier

$$\rho_2 = \frac{1}{2},$$

il vient

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi\rho_1 + 2 - 4\cos\pi r \sin\pi\rho_1}{\cos 2\pi r + \cos 2\pi\rho_1}.$$

Ne supposons plus

$$\rho_2 = \frac{1}{2}$$

et revenons à l'expression générale; nous verrons qu'elle peut se simplifier et se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2 - r)\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2 + r)}{\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2 + r)\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2 - r)}$$

ou bien encore

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\pi r + \cos\pi(\rho_1 + \rho_2)}{\cos\pi r + \cos\pi(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Soient en général $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux intégrales d'une équation du second ordre. Quand x décrit un certain contour fermé, les valeurs finales de ces intégrales sont données en fonctions linéaires des valeurs initiales par des formules

$$\mathrm{A}\,\varphi(x) + \mathrm{B}\,f(x),$$
$$\mathrm{C}\,\varphi(x) + \mathrm{D}\,f(x).$$

En général, on ne sait pas calculer A, B, C, D. Mais si le contour fermé ne contient qu'un seul point singulier, on saura toujours trouver les racines de l'équation en ω :

$$(\mathrm{A} - \omega)(\mathrm{D} - \omega) - \mathrm{BC} = 0.$$

On ne peut plus le faire, en général, quand le contour contient plus d'un point singulier.

Cependant, on vient de le voir, s'il n'y a que deux points singuliers à distance finie, on pourra toujours faire ce calcul, quel que soit le contour considéré; on pourra même, en faisant attention au choix des intégrales $\varphi(x)$ et $f(x)$, calculer les coefficients A, B, C, D eux-mêmes.

Cette circonstance va nous permettre de discuter plus complètement, dans ce cas particulier, le théorème de M. Fuchs.

Supposons, pour fixer les idées,

$$\rho_1 = \frac{1}{4}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}, \qquad r = \frac{1}{6};$$

x ne changera pas quand on changera

$$z \text{ en } iz,$$

ou

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} \text{ en } -\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

ou

$$\frac{z-\gamma}{z-\delta} \text{ en } e^{\frac{2i\pi}{6}} \frac{z-\gamma}{z-\delta}.$$

Le premier de ces changements nous l'appellerons l'opération L, le second l'opération M, le troisième l'opération N, et nous désignerons, par exemple, l'opération complexe qui consiste à faire l fois l'opération L, puis m fois l'opération M, puis n fois l'opération N, puis de nouveau l_1 fois l'opération L, par la notation

$$L^l M^m N^n L^{l_1}.$$

On aura

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ est donc positif; on verrait aisément que $\frac{\gamma}{\alpha}$ a pour argument $\frac{\pi}{4}$.

Je suppose maintenant que, sur le plan représentatif des x, on fasse deux coupures en ligne droite, l'une de a_1 à a_2, l'autre de a_2 à l'infini. Supposons a_1 et a_2 réels. Supposons que les intégrales $\varphi(x)$ et $f(x)$ aient été choisies de telle sorte que si

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z,$$

$z = 0$ pour $x = a_1$ et $z = 1$ pour $x = a_2$ ou $\alpha = 1$.

Toutes ces suppositions peuvent toujours être faites.

Quand x suivra la coupure de a_1 à a_2 d'un certain côté de cette coupure, du côté que nous appellerons A, $\varphi(x)$ et $f(x)$ resteront réels et par conséquent z sera réel et variera en ligne droite de 0 à α, c'est-à-dire de 0 à 1. Quand x suivra cette même coupure de l'autre côté, l'argument de

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z,$$

expression qui contient en facteur

$$(x-a_1)^{\frac{1}{4}},$$

sera constant et égal à $\frac{\pi}{2}$; z variera donc de o à $\alpha\sqrt{-1}$ ou de o à $\sqrt{-1}$. Quand x suivra la coupure de a_2 à l'infini du côté α de cette coupure, l'argument de

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

qui était zéro quand x suivait du côté A la coupure $a_1 a_2$, devient $\frac{\pi}{2}$, puisque l'expression

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

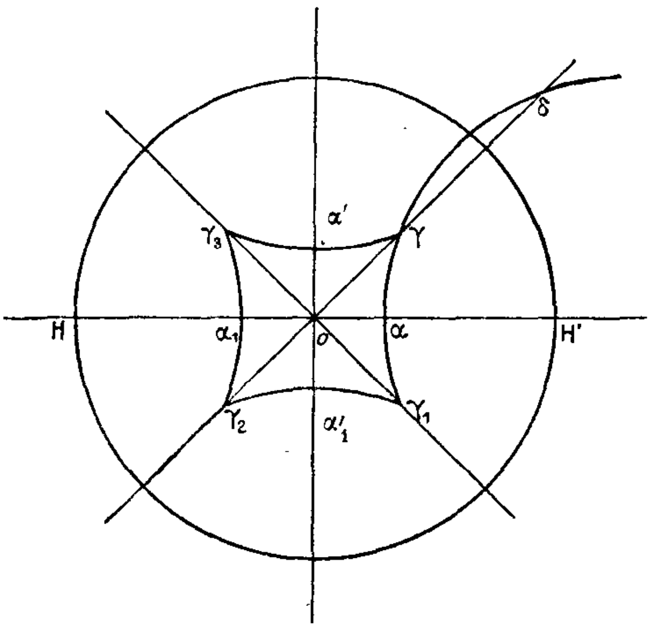
contient $(x-a_2)^{\frac{1}{2}}$ en facteur et que, quand en suivant la droite $a_1 a_2 \infty$, on dépasse le point a_2, on voit l'argument de $(x-a_2)$ augmenter de π.

Quand x décrira cette coupure $a_2 \infty$, z décrira donc dans son plan un arc du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre, arc allant de α à β.

On démontrerait de même que, quand x décrit cette même coupure de l'autre côté, z suit un arc du cercle décrit sur $\alpha\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$ comme diamètre, arc allant de $\alpha\sqrt{-1}$ à γ.

Il en résulte que, si *x décrit tout son plan sans franchir aucune coupure, z restera à l'intérieur du quadrilatère mixtiligne* $\alpha o \alpha' \gamma$.

Fig. 2.



Dans la figure 2, α représente la quantité imaginaire α; α', α_1, α'_1 représentent les quantités $\alpha\sqrt{-1}$, $-\alpha$, $-\alpha\sqrt{-1}$; γ, γ_1, γ_2, γ_3 représentent γ, $-\gamma\sqrt{-1}$, $-\gamma$, $\gamma\sqrt{-1}$.

Le cercle $\gamma_1 \alpha\gamma\delta$ est le cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Permettons maintenant à x de franchir la coupure $a_1 a_2$; alors, pour voir la région où z restera confiné, appliquons au polygone $\alpha o \alpha' \gamma$ les opérations

$$\mathrm{L}, \quad \mathrm{L}^2, \quad \mathrm{L}^3$$

et nous obtiendrons le quadrilatère curviligne

$$\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3;$$

les cercles qui le forment se coupent aux sommets du quadrilatère sous des angles de 60°.

Du point O comme centre décrivons un cercle HH′ coupant orthogonalement le cercle $\alpha\gamma\delta$.

Ce cercle n'est pas altéré par les opérations L, M, N.

Or le quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ est tout entier intérieur à ce cercle. Si x décrit dans son plan un contour quelconque, z reste dans ce quadrilatère ou dans le transformé de ce quadrilatère par une des opérations combinées à l'aide de L, M, N. Or tous ces transformés sont intérieurs au cercle HH′, puisque le transformé d'un point intérieur à ce cercle est intérieur à ce cercle. *Donc, quel que soit le contour décrit par x dans son plan, z ne pourra jamais sortir du cercle* HH′.

Une autre remarque, c'est que tous les transformés des cercles $\gamma\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, γ_2, γ_3, ... par une opération quelconque combinée à l'aide de L, M, N coupent orthogonalement le cercle HH′.

Cela posé, je suppose que l'on permette à x de franchir un plus grand nombre de coupures; alors, la région décrite par z ira en s'étendant de plus en plus. Pour s'en rendre compte, il faut ajouter au quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ un certain nombre de ces transformés obtenus par les opérations L, M, N répétées un certain nombre de fois.

Quelques définitions d'abord : J'appellerai *conjugué* d'un point a le point a_1 qui sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur la polaire du point a par rapport au cercle HH′.

J'appelle opération S par rapport au point a l'opération qui consiste à changer

$$\frac{z-a}{z-a_1} \quad \text{en} \quad e^{\frac{2i\pi}{6}} \frac{z-a}{z-a_1}.$$

Si a est le transformé de γ par une opération combinée à l'aide de L, M, N, l'opération S sera une des opérations combinées à l'aide de L, M, N.

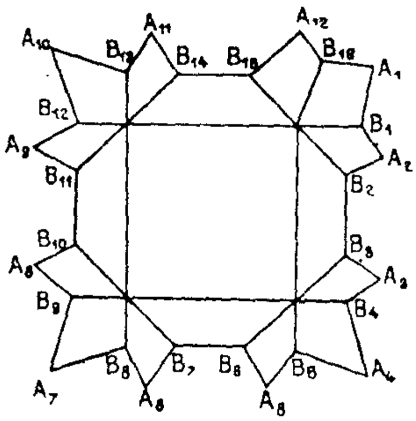
J'appelle quadrilatères Q les différents quadrilatères curvilignes qui sont les transformés du quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ par une opération combinée à l'aide de L, M, N.

Considérons un polygone curviligne P quelconque susceptible d'être décomposé en un certain nombre de quadrilatères Q. J'applique aux différents quadrilatères Q qui composent ce polygone les opérations S, S^2, S^3, S^4, S^5 par rapport à chacun de leurs sommets; sauf pour les quadrilatères qui ont un sommet sur le périmètre du polygone, ces opérations ne feront que reproduire des quadrilatères Q faisant déjà partie du polygone P. Mais, appliquées aux quadrilatères qui ont un sommet sur le périmètre du polygone, ces opérations conduisent à des quadrilatères nouveaux, que *j'annexerai* au polygone P de façon à former un polygone plus grand P'. *Cette transformation de* P *en* P' *s'appellera l'opération* T.

Cela posé, appliquons l'opération T au quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, j'obtiendrai un premier polygone P_1 ; j'applique de nouveau l'opération T à ce polygone et j'obtiens un second polygone P_2, puis un troisième P_3, etc. Les polygones P_m sont des régions que z peut parcourir sans qu'on fasse franchir à x des coupures en nombre infini.

Je dis que le polygone P_1 a ses angles égaux à 60° ou à 120°. En effet, considérons la figure 3 qui représente grossièrement la décomposition du poly-

Fig. 3.



gone P_1 en quadrilatères Q. Sur cette figure, les arcs de cercle ont été remplacés par des droites. Comme les quadrilatères Q ont tous leurs angles égaux à 60°, on voit que les angles du polygone P_1 :

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_{12}\quad \text{sont de}\quad 60^\circ$$

et

$$B_1,\quad B_2,\quad \ldots,\quad B_{16}\quad \text{sont de}\quad 120^\circ.$$ C. Q. F. D.

De plus, on n'a jamais deux angles de 60° de suite. Passons au polygone P_2.

Sur les figures 4 et 5, les angles marqués A sont de 60°, les angles marqués B de 120°.

En général, les quadrilatères *annexés* au polygone P_1 se divisent en deux catégories : 1° ceux qui n'ont qu'un sommet commun avec P_1 et trois avec P_2 ; en ces trois sommets, les angles de P_2 sont un de 60° et deux de 120° ; 2° ceux qui ont deux sommets communs avec P_1 et deux avec P_2 ; les deux angles correspondants de P_2 sont de 120°.

Sur les figures 4 et 5 les traits pleins représentent une portion du polygone P_1 partagé en quadrilatères Q, et les quadrilatères en pointillé sont ceux qu'on doit *annexer* au polygone P_1 pour former le polygone P_2. Sur la figure à gauche on envisage une portion du périmètre de P_1 où un angle de 120° succède à un angle de 60°, sur la figure à droite une portion de ce périmètre où deux angles de 120° se succèdent. On voit, à la seule inspection des figures, que les angles du polygone P_2 sont encore de 60° et de 120°.

Fig. 4.

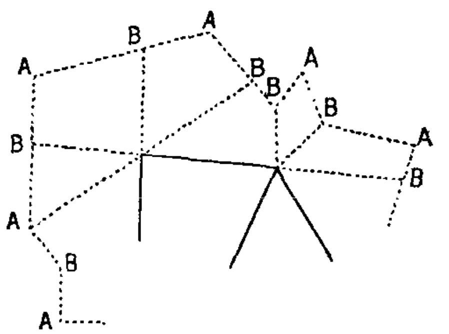
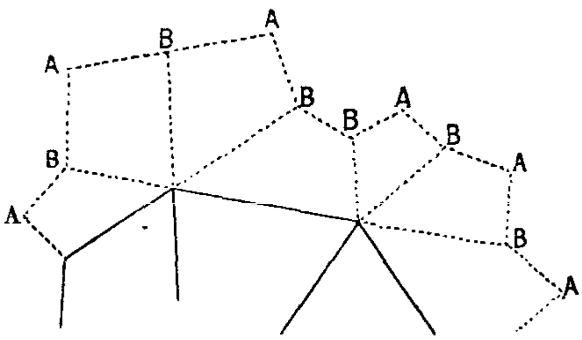


Fig. 5.



On démontrerait de la même façon qu'il en est de même des angles du polygone P_3, et en général du polygone P_m.

Conséquence. — Les polygones P_m sont des polygones curvilignes dont les côtés sont formés par les arcs de certains cercles qui coupent orthogonalement le cercle HH', et dont les angles sont tous saillants.

Ces préliminaires établis, nous pouvons nous poser maintenant la question suivante :

La fonction

$$x = \Theta(z),$$

qui, nous l'avons vu, *n'existe pas* quand le module de z est plus grand que OH, reste-t-elle méromorphe quand le module de z est plus petit que OH?

Pour résoudre cette question, reportons-nous à ce qui a été dit dans la

Note VI ([1]). On se rappelle qu'on a considéré, dans cette Note, certaines régions R_m et j'ai montré que la condition pour que x reste monodrome en z, c'est que cette région R_m n'arrive jamais à se recouvrir partiellement elle-même. Nous avons vu en outre que cette région R_m peut se recouvrir partiellement elle-même de deux manières différentes; ou bien en laissant tout le reste de la sphère d'un même côté de son contour, ou bien en formant une sorte d'anneau de telle façon que la portion de la sphère qui ne fait pas partie de R_m soit divisée en deux régions bien distinctes et qu'on ne puisse aller de l'une à l'autre sans traverser R_m.

([1]) Note VI. — On peut se rendre compte de la manière suivante de l'insuffisance de la démonstration de M. Fuchs. Je suppose que, sur la sphère représentative des x, je joigne chaque point singulier au point ∞ par une coupure. Si l'on fait décrire à x un chemin qui soit assujetti à ne pas traverser les diverses coupures plus de m fois, le point représentatif de z décrira un chemin qui sera assujetti à rester dans une certaine région R_m de la sphère. Quand m va augmenter, la région R_m va s'étendre de plus en plus.

Si, en s'étendant, la région R_m arrive à se recouvrir en partie elle-même, de telle sorte que le point représentatif de z puisse venir de deux manières différentes en un certain point de la sphère, il est clair que x ne sera pas fonction monodrome de z; si, au contraire, cela ne peut avoir lieu, x sera monodrome en z.

Or on peut concevoir de deux manières différentes que la région R_m se recouvre en partie elle-même, comme l'indiquent les figures qui suivent.

Fig. 6.

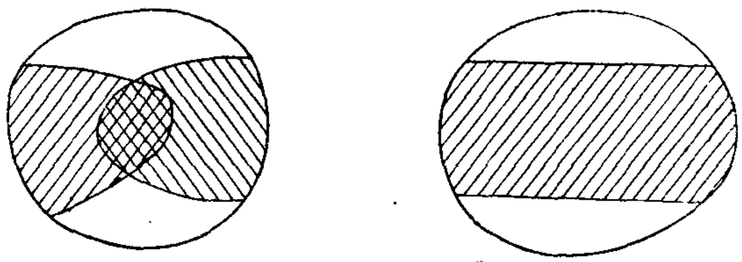
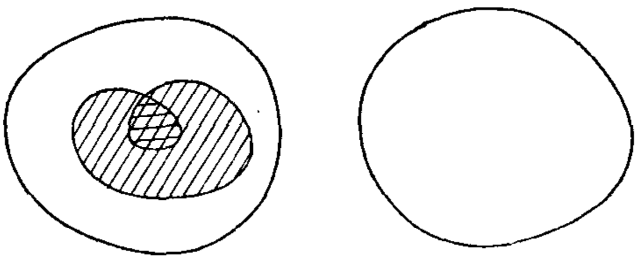


Fig. 7.



Dans ces figures, les deux cercles représentent les deux hémisphères; les parties restées en blanc sont les portions de la sphère qui ne font pas partie de la région R_m; la région R est couverte de hachures et l'on observe deux couches de hachures dans les portions de la sphère où la région R_m se recouvre elle-même.

M. Fuchs a démontré que la région R_m ne peut pas se recouvrir partiellement elle-même *de la première manière*, puisqu'il a fait voir que, quand z décrit *dans l'intérieur de la région* R_m un cercle infiniment petit, x revient à la même valeur.

Mais il n'a pas démontré que la région R_m *ne peut pas se recouvrir partiellement elle-même de la seconde manière.*

La démonstration de M. Fuchs signifie, je le rappelle, que la région R_m ne peut se recouvrir elle-même de la première manière. Cherchons donc si elle peut se recouvrir elle-même de la seconde manière.

Or ici les régions R_m sont représentées par les polygones P_m, ou du moins les polygones P_m peuvent jouer dans la démonstration identiquement le même rôle.

Considérons la sphère qui a pour grand cercle le cercle HH', projetons *stéréographiquement* la figure qui est dans le plan de ce grand cercle sur cette sphère. Les polygones P_m vont se projeter suivant des polygones curvilignes sphériques H_m dont les côtés seront des petits cercles coupant orthogonalement HH' et par conséquent situés dans des plans perpendiculaires à celui de ce grand cercle et dont les angles seront tous saillants.

Projetons encore la figure *orthogonalement* sur le plan de ce grand cercle HH'; les polygones H_m vont se projeter suivant des polygones rectilignes K_m dont les angles seront tous saillants.

Or il est clair qu'un polygone rectiligne dont tous les angles sont saillants ne peut se recouvrir partiellement de la seconde manière.

Donc ni les polygones K_m, ni par conséquent les polygones P_m, ne peuvent se recouvrir partiellement de la seconde manière.

Donc x est méromorphe en z dans l'intérieur des polygones P_m.

Mais quand m tend vers l'infini, les polygones P_m se rapprochent de plus en plus du cercle HH'. En effet, si cela n'était pas, quand m tend vers l'infini le polygone P_m tendrait vers un certain contour P qui devrait être un contour fermé sans point double et reproductible par toutes les opérations combinées à l'aide de L, M, N, ce qui n'est possible que du cercle HH'.

Donc x est méromorphe en z dans l'intérieur du cercle HH'.

La fonction x, nous l'avons vu, n'existe pas dans toute l'étendue du plan, de sorte qu'on ne peut pas dire positivement que ce soit une *fonction analytique* de z; mais c'est une *fonction parfaitement déterminée* de cette variable. C'est ainsi qu'on doit entendre *dans ce cas* le théorème de M. Fuchs, et cela d'ailleurs suffit pour les conséquences que ce géomètre en tire.

Faisons quelques remarques sur la fonction x.

D'abord elle peut être représentée par une série convergente : $\frac{1}{x-\lambda}$ est en effet, si λ est convenablement choisi, une fonction méromorphe de z qui reste finie tout le long du périmètre du quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, et par conséquent tout le long du périmètre du polygone P_m. De plus, quand m tend vers l'infini, le périmètre de ce polygone reste fini.

Donc l'intégrale [de Cauchy]

$$\int \frac{d\zeta}{(x-\lambda)(z-\zeta)}$$

prise le long du polygone P_m reste finie quand m tend vers l'infini.

Or cette intégrale est égale d'une part à une série convergente ordonnée suivant les puissances de z; d'autre part à $-f(z)$ plus une série de termes en

$$\frac{A}{z-a}$$

faciles à former. En effet, soit a l'un des infinis de la fonction $\frac{1}{x-\lambda}$; nous aurons un terme en

$$\frac{1}{z-a}.$$

Supposons que l'on sache que x ne change pas quand on change

$$z \quad \text{en} \quad \frac{hz+k}{h'z+k'},$$

alors nous aurons un autre infini

$$z = -\frac{k-ak'}{h-ah'}$$

avec le résidu

$$\frac{k'h-h'k}{(h-ah')^2},$$

ce qui nous donne le terme

$$\frac{k'h-h'k}{(h-ah')^2}\,\frac{1}{z+\dfrac{k-ak'}{h-ah'}}.$$

La somme de tous ces termes diminuée de $f(z)$ et multipliée par $2i\pi$ représente l'intégrale considérée. Bien entendu, on ne doit prendre que les termes relatifs aux infinis situés à l'intérieur de P_m.

On a alors

$$f(z) = \sum \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe en z; quand m tend vers l'infini, $\varphi(z)$ qui est égal à l'intégrale divisée par $2i\pi$ tend vers une limite finie, en même temps que $\sum \frac{A}{z-a}$ devient une série infinie. Cette série infinie est donc convergente.

Donc $f(z)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sum \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est holomorphe dans l'intérieur du cercle HH' *et où $\sum \frac{A}{z-a}$ est une série convergente dont le terme général est facile à former.*

Une autre remarque : Soit une équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{2B+2}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2}\right]$$

telle que

$$\rho_1 = 1 + \frac{1}{4}, \qquad \rho_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad r = 2 + \frac{1}{6},$$

par exemple.

Pour ne pas confondre la variable x qui entre dans cette nouvelle équation avec celle qui entrait dans l'ancienne, appelons-là x_1, mais continuons à poser

$$z = \frac{\varphi_1(x_1)}{f_1(x_1)},$$

$\varphi_1(x_1)$ et $f_1(x_1)$ étant des intégrales convenablement choisies de la nouvelle équation; z sera une fonction de x_1 qui aura une infinité de valeurs, mais on les obtiendra toutes en appliquant à l'une d'elles toutes les opérations combinées à l'aide de L, M, N (*voir* p. 364); or x est une fonction monodrome de z qui ne change pas quand on applique à cette variable l'une de ces opérations. *Donc x est monodrome en x_1; seulement, ici encore, x n'existe pas pour toutes les valeurs de x_1; cette fonction n'existe que pour les valeurs de x_1 telles que z soit à l'intérieur du cercle* HH'.

Dernières remarques.

Le mode de discussion que nous venons d'employer peut être utilisé toutes les fois que l'on n'a que deux points singuliers. La difficulté augmente avec le nombre de ces points. Voyons comment on devrait aborder la question, si l'on avait par exemple trois points singuliers.

Soient a_1 et a_2 deux de ces points singuliers; supposons qu'ils sont réels et que les coefficients de l'équation différentielle sont également réels; réunissons ces deux points par une coupure en ligne droite, et joignons de même les autres points singuliers par des coupures.

Quand x décrira d'un certain côté la coupure $a_1 a_2$, z restera réel et variera de α à β; quand on appliquera aux différents points de ce segment de droite les diverses opérations qui ne font pas varier x quand on les applique à la variable z, les transformés successifs de ce segment de droite seront une infinité d'arcs de cercle.

Pour que le théorème de M. Fuchs soit vrai, il faut et il suffit qu'aucun de ces arcs de cercle ne vienne couper le segment de droite.

NOTES ET ERRATA

Les pages 1 à 152 ont été définitivement imprimées sous la direction de G. Darboux. C'est ce qui a motivé le numérotage en chiffres romains.

1. Page XLIV, ligne 19 :

Divers travaux ont permis de compléter les résultats de Briot et Bouquet et de H. Poincaré, et de les étendre à une équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \ldots}{a'x + b'y + \ldots}, \qquad \text{où} \qquad ab' - ba' \neq 0,$$

et aussi à des cas plus généraux.

Il faut particulièrement citer :

E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, 2e édition, p. 23-30; *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **87**, 1878, p. 430, 743; *Bulletin Soc. math. France*, t. **12**, 1883-1884, p. 48.

I. BENDIXSON, *Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl.* (Stockholm), t. **51**, 1894, p. 141-151; t. **52**, 1895, p. 81.

J. HORN, *Zeit. Math. Phys.*, t. **49**, 1903, p. 246; *Arch. Math. Phys.*, 3e série, t. **8**, 1905, p. 237.

E. LINDELÖF, *Acta Soc. scient. Fennicæ*, t. **22**, 1897, Mém. n° 7, p. 1-26.

H. DULAC, *J. Éc. Polyt.*, 2e série, cah. **9**, 1904, p. 1-125; *Ann. Univ. Grenoble*, t. **17**, 1905, p. 1; *Journ. Math. pures et app.*, 6e série, t. **2**, 1906, p. 381; *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. **32**, 1908, p. 230-252.

Quand une intégrale $y(x)$ d'une équation du premier ordre est définie par une relation

$$f(x, y) = C,$$

où C est la constante d'intégration, il peut se faire que sous la seule condition : x tend vers x_0, c'est-à-dire $|x - x_0|$ tend vers zéro, la valeur correspondante y de l'une des branches $y(x)$ tende vers y_0; le point x_0 est alors un point de *détermination* pour $y(x)$. Mais il existe des cas où la limite des valeurs que prend y dépend du chemin suivi par x, c'est-à-dire des *derniers éléments* de ce chemin. La branche $y(x)$ doit être regardée comme une intégrale *prenant en x_0 la valeur y_0*, si cette valeur est la limite de y pour certains chemins L sur lesquels $|x - x_0|$ tend vers zéro. Ces chemins L balaient une aire autour de x_0; ils ne sont soumis qu'à des conditions d'inégalité. Le point x_0 est alors un point d'*indétermination* pour la fonction $y(x)$.

Considérons l'équation de Briot et Bouquet.

$$x\frac{dy}{dx} = \lambda y + \alpha x + \ldots;$$

si λ n'est ni *zéro*, ni un *entier positif*, ni une *quantité réelle négative*, il existe pour cette équation des solutions $y(x)$, non holomorphes mais développables en série suivant les puissances de x et de x^λ et convergeant lorsque $|x|$ et $|x^\lambda|$ sont assez petits; elles dépendent d'une constante arbitraire C.

Soit $\lambda = a + ib$ avec *a négatif; y* ne tend vers zéro avec x que si le chemin L suivi par $x = re^{i\theta}$ finit par rester compris entre deux spirales d'équation $r = e^{-m\theta}$, où lorsque $m > 0$, $m > \frac{-b}{a}$, θ augmente indéfiniment par valeurs positives, ou bien entre deux spirales analogues, $-\theta$ augmentant indéfiniment par valeurs positives, lorsque

$$m < 0, \qquad m > \frac{-b}{a}.$$

Ce dernier cas ne peut se présenter que pour b négatif.

Soit maintenant *a positif;* le module de x^λ, qui est $e^{a\log r - b\theta}$, tend vers zéro sur tout chemin L où r tend vers zéro et où θ demeure fini. Mais on peut prendre aussi pour chemin L tout chemin qui finit par demeurer entre deux spirales : $r = e^{-m\theta}$, pourvu que m et $am + b$ soient positifs, θ croissant indéfiniment par valeurs positives.

Si λ n'est pas un entier positif, il existe une solution $y(x)$ holomorphe en x et s'annulant avec x; il n'en existe qu'une seule.

Si λ est un *entier positif m*, il n'existe pas en général de solution holomorphe en x, s'annulant avec x. La transformation de Briot et Bouquet

$$y = x\left(z + \frac{\alpha}{1-m}\right)$$

ramène l'équation donnée à la forme

$$x\frac{dz}{dx} = (m-1)z + \alpha_1 x + \ldots,$$

où m est remplacé par $(m-1)$; son application répétée conduit donc à une équation

$$x\frac{dt}{dx} = t + \alpha_{m-1}x + \ldots$$

et la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution t holomorphe en x et nulle pour $x = 0$ [et par suite aussi d'une solution y] est que α_{m-1} soit nul.

En dehors de cette solution l'équation possède, d'après H. Poincaré, une infinité de solutions développables suivant les puissances de x et de $x\log x$, quand les modules de ces quantités sont assez petits. Les chemins L que l'on doit suivre pour que y tende vers zéro avec x sont tous ceux pour lesquels r et $r\theta$ tendent à la fois vers zéro.

Si λ est une *quantité réelle négative*, en dehors de la solution y holomorphe il n'en existe pas qui s'annule avec x de façon que $\frac{dy}{dx}$ tende vers une limite ou qui s'annule quand x tend vers zéro sur un chemin L admettant une tangente à l'origine.

Lorsque λ, négatif, est *rationnel*, H. Dulac a montré qu'il y a en général une infinité d'intégrales y tendant vers zéro avec x sur des chemins L convenables. Il donne en exemple l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y(1 + xy)$$

dont l'intégrale générale est

$$1 + xy \log x = Cxy.$$

Le cas $\lambda = 1$ a été étudié en détail par H. Poincaré, dans le domaine réel (*Théorie des centres*). *Voir* ce Tome, p. 95.

Enfin, lorsque $\lambda = 0$, E. Picard (*Traité d'Analyse*, t. III, 2ᵉ édition, 1896, p. 36) établit qu'à côté de l'intégrale holomorphe il en existe une infinité d'autres y tendant vers zéro avec x, sur des chemins L convenables.

2. Page XLVII, ligne 17 : *au lieu de* chaquet erme, *lire* chaque terme.

3. Page 1, ligne 4 : *au lieu de* 24 avril 1881, *lire* 22 mars 1880.

4. Page 1, ligne 4 à partir du bas : *au lieu de* deux points caractéristiques, *lire* deux caractéristiques.

5. Page 2, ligne 9, *au lieu de* : , *lire*

6. Page 8, ligne 9 : *au lieu de* la caractéristique, *lire* si la caractérijtique,

7. Page 8, ligne 25 : *au lieu de* hypothèse, *lire* l'hypothèse.

8. Page 8, ligne 30 : *au lieu de* qui, *lire* (qui.

9. Page 9, ligne 1 : *au lieu de* β, *lire* β_i.

10. Page 12, ligne 19 : *au lieu de* la même, *lire* de la même.

11. Page 13, note au bas de la page : *au lieu de* ce Tome, *lire* ce Tome, p. XLIX.

12. Page 20, dernière ligne : *au lieu de* $\frac{dz}{zX_1}$, *lire* $\frac{-dz}{zX_1}$.

13. Page 31, dernière ligne : *au lieu de* axe, *lire* angle.

14. Page 37, ligne 4 à partir du bas : *au lieu de* μ', μ, *lire* β', β.

15. Page 51, première ligne : *au lieu de* valeurs de, *lire* valeurs.

16. Page 69, ligne 6 : *au lieu de* trait plein, *lire* trait pointillé.

17. Page 75, ligne 11 et note (¹) : Il faut ajouter au premier membre de l'inégalité le terme

$$4\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right].$$

18. Page 75, ligne 13 : *au lieu de* $y\frac{dF_1}{dx}$, *lire* $y\frac{dF_1}{dy}$.

19. Page 87, ligne 1 : la Note en question est reproduite page 159 du présent Tome.

20. Page 92, ligne 14 : *au lieu de* occupé un temps, *lire* occupé au temps.

21. Page 98, ligne 8 : *au lieu de* $-\frac{d\rho}{d\omega}$, *lire* $-\frac{d\varphi}{d\omega}$.

22. Page 101, ligue 19 et note (1) : La valeur exacte de F_6 est

$$-\frac{x^6}{4}-\frac{3}{2}x^4y^2+\frac{3}{4}x^2y^4,$$

qui donne

$$H_8=\frac{3}{4}x^8-6x^6y^2+\frac{39}{4}x^4y^4-\frac{3}{2}x^2y^6,$$

d'où l'on déduit par la méthode indiquée

$$C_0=\frac{9}{64}.$$

23. Page 202, ligne 22 : *au lieu de* aux points, *lire* au point.

24. Page 213, ligne 14 : Dans les formules (3 *bis*) et jusqu'au bas de la page il faut remplacer partout S_2 par S_1, qui est plus grand, ce qui, de même que l'emploi des fonctions majorantes pour $-\Phi_1$ et Φ_2, tend à augmenter le module des coefficients de $\psi(x)$.

La fonction $\psi'(x)$ est alors choisie de façon que la courbe

$$y=\psi'(x)$$

demeure invariante par la transformation

$$y_1=S_1y_0-\frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)};\qquad x_1+y_1=S_1(x_0+y_0).$$

Posons

$$x_0+y_0=z_0,\qquad x_1+y_1=z_1$$

et cherchons d'abord une courbe

$$x=\Phi(z)=\gamma_1z+\gamma_2z^2+\ldots+\gamma_nz^n+\ldots$$

qui soit invariante par la transformation en x, z :

$$z_1=S_1z_0;\qquad x_1=S_1x_0+\frac{M\beta^2z_0^2}{1-\beta z_0},$$

ce qui donne la condition

$$\Phi(S_1z_0)=S_1\Phi(z_0)+\frac{M\beta^2z_0^2}{1-\beta z_0}.$$

Pour $|z_0|<\frac{1}{\beta}$ on obtient immédiatement, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z_0 dans les deux membres,

$$\gamma_1=1\qquad\text{et}\qquad\gamma_n(S_1-S_1^n)=-M\beta^n.$$

L'équation $x_0 = \Phi(z_0)$ s'écrit alors, avec les variables x_0 y_0,

$$y_0 = \frac{M\beta^2}{S_1 - S_1^2}(x_0 + y_0)^2 + \ldots + \frac{M\beta^n}{S_1 - S_1^n}(x_0 + y_0)^n + \ldots,$$

où la série du second membre est convergente, puisque $S_1 > 1$.

Comme $y_0 = \psi'(x_0)$, c'est bien là l'équation du texte; la fonction implicite y_0 est donc aussi développable en série convergente suivant les puissances de x_0.

L'étude des courbes invariantes par des transformations ponctuelles à deux variables, au voisinage d'un point double, a été poursuivie par :

T. Levi-Civita, *Sopra alcuni criteri di instabitità* (*Annali di Matematica*, 3e série, t. V, 1901).

J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. XXVI, 1901).

S. Lattès, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, 3e série, t. XIII, 1906).

25. Page 266, figure 2 : Les points E, C d'une part, D, B, A d'autre part, sont sur des parallèles à l'axe horizontal.

26. Page 281, ligne 13 : *au lieu de* α, *lire* α'.

Jules DRACH.

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.