

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Миодраг Дачић

АНАЛИЗА УТИЦАЈА ГРЕШАКА КООРДИНАТА ЗВЕЗДА  
НА РЕЗУЛТАТЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОДЕТСКЕ АСТРОНОМИЈЕ

докторска дисертација

Београд, 1998.

Као плод сарадње са професором др Владетом Миловановићем настала су истраживања и добијени резултати садржани у овој тези. Заједно смо размотрили проблем, дефинисали задатак и утврдили циљеве рада. Под његовим руководством завршен је највећи део посла везан за поновну обраду астрогеодетских одређивања са почетка овога века на територији Србије. Професору Миловановићу дугујем неизмерну захвалност за уложени труд и време које ми је посветио приликом консултација и дискусија. Његове опаске и корисни савети су помогли да артикулишем неке идеје и да на нека питања што успешније одговорим.

Ово је zgodна прилика да сарадницима Војногеографског института изразим захвалност, јер су ми омогућили приступ оригиналним редукционим листовима са забележеним положајима звезда, који су били потребни ради свођења Бошковићевих резултата опажања на систем FK5.

Колеги Бори Јовановићу захваљујем за уступљене податке JPL нумеричке теорије кретања тела Сунчевог система, без којих не би могли да се рачунају привидни положаји фундаменталних звезда за епохе Бошковићевих опажања.

Проф. др Наталији Братуљевић-Машановић упућујем посебне изразе захвалности за стрпљење и помоћ указану приликом израде ове тезе.

Колегиница Зорица Цветковић је много учинила да се рачунска обрада материјала што боље изведе и велики сам њен дужник.

Др Милану Димитријевићу сам захвалан за подршку и корисне инструкције, у нади да нећу изневерити његова очекивања.

Такође захваљујем свима који су на овај или онај начин допринели да рад успешно приведем крају.

АНАЛИЗА УТИЦАЈА ГРЕШАКА КООРДИНАТА ЗВЕЗДА  
НА РЕЗУЛТАТЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОДЕТСКЕ АСТРОНОМИЈЕ

С а д р ж а ј :

- Увод. (1)
  
- 1. Референтне основе и системи.
  - Фундаментални каталог. (4)
    - 1.1. Положај тачке у простору. (4)
      - 1.1.1. Основе и системи. (5)
      - 1.1.2. Идеална и стандардна основа. (6)
      - 1.1.3. Терестрички референтни систем. (7)
      - 1.1.4. Небески референтни систем. (9)
      - 1.1.5. Небеска референтна основа. (11)
    - 1.2. Каталогси положаја и сопствених кретања звезда. (12)
      - 1.2.1. Кратак преглед развоја звезданих каталога. (13)
      - 1.2.2. Референтна основа пројекта АГК и каталог NFK. (15)
      - 1.2.3. Фундаментални каталог FK3. (17)
      - 1.2.4. Фундаментални каталог FK4. (19)
    - 1.3. Каталог FK5 као референтна основа система FK5. (22)
      - 1.3.1. Основни каталог FK5. (24)
      - 1.3.2. Проширење FK5 каталога (FK5 Ext). (27)
    - 1.4. Грешке положаја. (30)
      - 1.4.1. Случајне грешке положаја фундаменталних звезда. (30)
      - 1.4.2. Систематске грешке положаја фундаменталних звезда. (34)

## 2. Диференцијални звездани каталози.

### Каталог геодетских звезда. (38)

#### 2.1. Апсолутна и релативна опажања. (39)

##### 2.1.1. Опажања на Меридијанском кругу у Београду. (40)

#### 2.2. Изведени каталог 2957 сјајних звезда. (42)

##### 2.2.1. Састављање каталога 1334 геодетских звезда. (43)

##### 2.2.2. Састављање каталога 2957 сјајних звезда. (46)

#### 2.3. Изведени каталог 4949 геодетских звезда. (47)

##### 2.3.1. Формирање изведеног каталога геодетских звезда. (49)

##### 2.3.2. Положаји и сопствена кретања 4949 звезда. (51)

##### 2.3.3. Редукција КГЗ на систем FK5. (54)

## 3. Промене положаја звезда.

### Фундаменталне астрономске константе. (56)

#### 3.1. Појаве које привидно мењају положаје небеских тела. (56)

##### 3.1.1. Геометријска померања. (58)

##### 3.1.2. Оптички ефекти. (61)

##### 3.1.3. Промене референтног система. (68)

#### 3.2. Фундаменталне астрономске константе. (72)

##### 3.2.1. Стари систем астрономских константи. (73)

##### 3.2.2. IAU (1964) систем астрономских константи. (76)

#### 3.3. Фундаменталне астрономске константе - нови систем. (79)

##### 3.3.1. IAU (1976) систем астрономских константи. (80)

##### 3.3.2. Резолуције које се односе на рачунање положаја. (82)

##### 3.3.3. Коментари резолуција. (84)

##### 3.3.4. IAU (1980) теорија нутације. (86)

## 4. Редукција опажања.

### Векторско рачунање положаја. (89)

#### 4.1. Геоцентрични и сопствени правац. (90)

#### 4.2. Рачунање прецесије и нутације. (93)

##### 4.2.1. Матрице елементарне ротације. (93)

##### 4.2.2. Прецесиона матрица. (97)

##### 4.2.3. Нутациона матрица. (99)

#### 4.3. Привидни правац и привидни положај. (106)

## 5. Одређивања геодетске астрономије.

### Примена диференцијалних образаца. (109)

5.1. Зениталне и азимуталне методе одређивања. (110)

5.1.1. Цингерова метода. (110)

5.1.2. Пјевцовљева метода. (114)

5.1.3. Одређивање азимута из опажања Северњаче. (117)

5.2. Случајне грешке опажања и грешка јединице тежине. (119)

5.2.1. Грешке одређивања стања часовника. (121)

5.2.2. Грешке одређивања ширине. (122)

5.2.3. Грешке одређивања азимута. (123)

5.3. Грешке координата звезда у астрогеодетским одређивањима. (124)

5.3.1. Утицај грешака координата звезда на одређивање стања часовника. (124)

5.3.2. Утицај грешака координата звезда на одређивање ширине. (125)

5.3.3. Утицај грешака координата Северњаче на одређивање азимута. (127)

## 6. Бошковићева одређивања 1900 – 1911.

### Свођење на FK5 систем. (130)

6.1. Астрогеодетска одређивања у Краљевини Србији. (130)

6.1.1. Скретање вертикале. (133)

6.1.2. Одређивање скретања вертикале. (134)

6.2. Свођење Бошковићевих опажања на FK5 систем. (137)

6.2.1. Свођење стања часовника. (138)

6.2.2. Свођење ширине. (139)

6.2.3. Свођење азимута. (140)

6.2.4. Укупни резултати свођења на FK5 систем. (141)

6.3. Анализа Бошковићевих одређивања ширине. (143)

6.3.1. Грешка јединице тежине и одбацивање погрешних контаката. (143)

6.3.2. Одступања ширине добијене из појединачних парова. (146)

6.4. Коначни резултати. (147)

**Закључак.** (155)

**Р е ф е р е н ц е .** (157)

## Увод.

Одређивања геодетске астрономије, односно, *одређивања астрономског времена, правца вертикале (природне координате) и астрономског азимута геодетских страна* изводе се инструментима високе прецизности, што омогућује да и резултати буду високе прецизности. Међутим, резултати савремених одређивања показују несагласност између прецизности и тачности (унутрашње и спољашње тачности). Један од извора ове несагласности је и значајност систематских и случајних грешака положаја звезда које се користе за одређивања.

Да би се одговорило на питање о извору поменуте несагласности, потребно је анализирати методе одређивања геодетске астрономије са гледишта учешћа грешака положаја звезда у резултатима одређивања, јер исте грешке положаја имају различит утицај на резултате одређивања у зависности од примењене методе и позиције звезде у хоризонтском систему. С друге стране, потребно је оценити систематске и случајне грешке положаја звезда коришћених за одређивања.

Одређивања геодетске астрономије изведена су у дужем временском периоду, па је за успешну употребу координата звезда неопходно да се њихови положаји сведу на јединствен систем. У овом тренутку за нас је интересантан систем FK5. Стога је потребно истражити односе система других каталога према FK5.

Основни циљ истраживања у овом раду је, с једне стране, усвајање модела за свођење положаја звезда из различитих употребљаваних каталога на јединствен систем, конкретно, на систем чију референтну основу представља каталог FK5. С друге стране, циљ истраживања је оцена тачности положаја звезда сведених на овај систем, било да су из самог каталога FK5, било да су из неког другог каталога. На овај начин би се добила солидна основа истраживања за потребе геодезије, геофизике, или геодинамике.

Имајући у виду већ постојеће резултате, може се поставити хипотеза да су грешке положаја звезда датих у пређашњим каталозима значајне за постојање несагласности између прецизности и тачности одређивања која су извођена у ранијим епохама, уз коришћење положаја звезда из тих каталога. С обзиром на високу прецизност савремених инструмената које користи геодетска астрономија, такође има места за тестирање хипотезе о значајности утицаја грешака координата звезда на савремена одређивања геодетске астрономије.

Рад се заснива на хипотези да има довољно резултата фундаменталне и ефемеридске астрономије о особинама релевантних каталога, о вредностима и тачности астрономских константи, а пре свега, о тачности сопствених кретања, тако да се може извршити поуздано оцењивање тачности положаја звезда за епохе од интереса.

У "Студији о стању досадашњих радова на астрогеодетској мрежи СФРЈ" наведени су задаци који се решавају астрогеодетским мерењима, при чему се та мерења користе било самостално, било у комбинацији са гравиметријским или сателитским мерењима. Преглед обављаних радова на простору Југославије садржи констатацију да би одређивања пре I светског рата била од извесног интереса само са резултатима одређивања латитуда. Иначе, тачност одређивања латитуда, па и азимута, је мала због тадашњег техничког нивоа. Ово се односи на одређивања која је вршио Стеван П. Бошковић у периоду од 1900. до 1911. године. Резултати су објављени под називом "Скретања вертикала у Србији" у издању Српске академије наука.

Придружујући резултате Бошковићевих одређивања савременим астрогеодетским одређивањима, јасно је да би требало посебно водити рачуна о њиховој недовољној тачности у односу на данашње потребе и могућности. Међутим, ако се утврди *колико је учешће грешака координата звезда* у укупном буџету грешака астрогеодетских одређивања, тај део би могао да се искључи. Другим речима, свођењем положаја звезда на неки од савремених система као што је, на пример, FK5, повећава се тачност управо у оном делу који зависи од координата опажаних звезда.

После свега што је напред речено, намеће се неколико основних питања на која треба дати одговоре у овом истраживању. Најпре имамо питање: шта је то положај звезде и шта је грешка положаја? Следи питање: од чега зависи промена положаја? Затим: како грешке положаја утичу на резултате астрогеодетских одређивања и како умањити њихов утицај? Напокон стижемо и до предмета нашег посебног интересовања: како Бошковићева астрогеодетска одређивања од пре девет деценија свести на FK5 систем? Та и још нека питања обрађена су у овом раду који је подељен на шест поглавља.

У првом поглављу се бавимо референтним основама и референтним системима. Наведени су многи подаци о каталозима положаја и сопствених кретања звезда, са посебним акцентом на фундаменталном каталогу FK5, који представља основу *референтног система FK5*. Подаци којима располажемо и који се односе на каталоге NFK, FK3, FK4 и FK5, омогућавају да израчунамо просечне средње квадратне грешке координата фундаменталних звезда за 1906.0, као и систематске разлике FK5 – NFK. Добијене разлике ће послужити за процену вредности свођења резултата Бошковићевих одређивања на систем FK5. Иначе, епоха 1906.0 је средња епоха Бошковићевих опажанја.

Велики значај за савремена астрогеодетска одређивања има *Каталог 4949 геодетских звезда* који је дат у систему FK5. Због тога у другом поглављу дајемо низ података у вези историјата и начина формирања овог каталога. Уз објашњење о релативним и апсолутним астрометријским опажањима, као и о изведеним каталозима, на почетку поглавља су укратко описани опажачки радови на Меридијанском кругу Београдске опсерваторије.

Треће поглавље је посвећено појавама које изазивају привидне промене положаја небеских тела, пре свега звезда. Посебно су приказани IAU (1976) систем астрономских константи и IAU (1980) теорија нутације.

Векторско рачунање и процедура добијања привидних положаја звезда са допунским објашњењима дати су у четвртом поглављу.

У петом поглављу је детаљно размотрена Цингерова метода за одређивање стања часовника, Пјевцовљева метода за одређивање ширине и метода одређивања азимута из опажања Северњаче. Утврђени су најповољнији услови опажања и изведене формуле за рачунање утицаја грешака координата звезда на резултате ових одређивања. У ту сврху су коришћени диференцијални обрасци сферне тригонометрије. За сваку методу је израчуната а ргог грешка јединице тежине која зависи од прецизности регистрације времена при опажањима звезда. Такође је рачуната а ргог грешка резултата одређивања као последица грешака координата звезда у фиктивним паровима који репрезентују Бошковићева опажања.

Коначни резултати Бошковићевих астрогеодетских одређивања сведени на систем FK5 садржани су у шестом поглављу. Уз то је дат и посебан осврт на прецизност регистрације времена у Бошковићевим одређивањима ширине.

Овде ћу бити слободан да изнесем једну констатацију која је имала своје потпуно важење *пре селидбе* астрометријских радова у космос: *на задацима геодетске астрономије геодезија и астрометрија иду једна другој у сусрет*. Полазећи од средњих положаја звезда за стандардну епоху рачунају се њихови привидни положаји, који у геодезији служе за *одређивање координата тачака на Земљи*. Опажањем звезда са датих тачака на Земљиној површини астрометристи добијају привидне положаје звезда, који се, ради даљег третмана, редукују на средње положаје за стандардну епоху, уз *обавезно обрачунавање резултата до којих је дошла геодетска наука*.

Нагласимо, такође, да за једну исту научну област, поред термина *"геодетска астрономија"*, може да се користи и термин *"астрономска геодезија"*. Суштина остаје неизмењена – *са тачака на Земљиној површини опажамо објекте у васионском простору*.



## 1. Референтне основе и системи.

### Фундаментални каталог.

Да би се разматрале грешке координата, односно, грешке положаја, треба најпре рећи шта је то положај и како се он одређује. Затим треба видети како се долази до некаквог система у коме су дати положаји звезда и других небеских тела. Пошто каталози положаја и сопствених кретања звезда служе као носиоци система у коме се одређују положаји небеских тела, овде се дају многи подаци о фундаменталним каталозима из серије FK и приказују се њихове основне карактеристике. Посебна пажња је посвећена актуелном FK5 каталогу. У коначном резултату ових разматрања могу се израчунати, за одређену епоху, случајне и систематске грешке положаја звезда фундаменталних каталога, што је на крају првог поглавља и урађено.

### 1.1. Положај тачке у простору.

Положај тачке у простору није неко њено апсолутно својство, већ квантитативна карактеристика. Положај може да се одреди *само у односу на нешто*: у односу на друге тачке или, још боље, у односу на систем координата. Овакав приступ не решава проблем на задовољавајући начин, јер у природи не постоје три осе или друге линије које могу да се користе као основни правци. Због тога се посредним путем дефинише некакав "референтни систем", при чему се извесне материјалне тачке узимају као главни ослонац. Ова посредност објашњава тешкоћу дефинисања и реализације основних праваца за позиционирање тачке. Једини начин за решавање проблема је поступно приближавање, наизменичним побољшањем положаја тачака и строжијим дефинисањем координатног система. Тако се долази до "референтне основе" која представља физичку реализацију референтног система.

Дакле, помоћу референтне основе се обезбеђују услови за материјализацију референтног система потребног за квантитативну дескрипцију положаја и кретања на Земљи (терестричка основа), или положаја и кретања небеских тела у простору (небеска основа), укључујући и Земљу (Kovalevsky и Mueller 1989).

Управо у геодезији долазе до изражаја ова два типа координата: Терестричке координате – зваћемо их *терестричка референтна основа* – повезане су са неким одабраним

тачкама на Земљиној површини. Ако се, уз то, координатне осе изаберу на такав начин да је њихов почетак у центру Земљине масе, оне се могу представити као осе тела код динамичког проучавања планете Земље.

С друге стране, код неких геодетских радова користи се *небеска референтна основа*, тј. координатни систем чији правци треба да су фиксни у простору, а који није тако једноставан за дефинисање. Ова референтна основа потребна је за описивање кретања Земље у простору, а нарочито, различитих компоненти Земљине ротације. Поред тога, небеска референтна основа је неопходна ради *квантитативне дескрипције* положаја звезда у астрогеодетским одређивањима.

#### 1.1.1. Основе и системи.

Да не би долазило до забуна и недоследности, корисно је нагласити разлику између следећих појмова:

координатна основа,

координатни систем;

референтна основа,

референтни систем .

При томе се може усвојити Њутново схватање простора и времена. Такве исте разлике могу се правити и када користимо релативистичка схватања.

Овде су предложене неке дефиниције као најприкладније (Wilkins 1990), мада се, ипак, мора утврдити када оне не одговарају.

*Координатна основа* може бити тријада управних координатних оса, или друга нека геометријска конструкција, у односу на коју се скупом координата означава правац или положај неке тачке.

*Координатни систем* подразумева начин означавања положаја неке тачке у односу на конкретну координатну основу. Уобичајени системи су правоугле координате и сферне поларне координате. Као пример могу се узети и геодетске координате одређене у односу на сфероид.

*Референтна основа* је каталог у коме се дају координате скупа референтних објеката који служе да се одреди, односно, да се реализује конкретна координатна основа. Често је неопходно да се усвоје изрази који приказују координате као функцију времена, па онда *временска скала чини саставни део референтне основе*. Референтна основа може бити намењена општој употреби, или да има специјалну намену. У случају динамичких референтних основа каталози положаја су замењени ефемеридама планета, геодетских сателита,

или других објеката који служе за реализацију референтне основе.

*Референтни систем* је збир свих поступака, модела и константи потребних за коришћење једне или више референтних основа. Овоме је еквивалентан исказ да референтни систем представља комбинацију референтне основе (каталог положаја референтних објеката) и скупа теорија и параметара који могу да се користе за добијање положаја других објеката из конкретног опажања и уз мерење времена.

### 1.1.2. Идеална и стандардна основа.

У вези са наведеним дефиницијама треба уочити разлику између *идеалне-координатне основе*, која је погодна за објашњавање и за коришћење у теоријским проучавањима, и *стандардне референтне основе*, која је погодна за практичну употребу. Идеална основа је описана појмовима, али често не можемо те појмове употребити непосредно у практичним ситуацијама. Насупрот овоме, стандардна основа је намењена да обезбеди тачан и недвосмислен ослонац за одређивање положаја. Због тога се положаји репера обично бирају тако да стандардна основа што боље одговара идеалној, али репери могу бити одабрани и тако да задовоље неке друге услове.

Што се тиче *идеалне терестричке координатне основе*, може се сматрати да она има координатни почетак у центру Земљине масе и да је фиксирана за Земљу. Овде се  $Z$ - оса и  $X, Y$ - раван могу описати преко оса фигуре и Гриничког меридијана. Међутим, пошто Земља није чврсто тело, стандардна референтна основа неће бити фиксирана за Земљу. На пример, због тектонских покрета би могао да се промени правац осе фигуре, а исто тако и положај Гринича у односу на унутрашњост Земље.

*Стандардна референтна основа* коју користи IERS (International Earth Rotation Service) базирана је на усвојеним координатама низа станица на којима се регуларно врше астрогеодетска мерења високе тачности. Ове координате и степен њихове промене су изабрани тако да у њима није видљива чиста ротација Земљине коре у односу на основу, па  $Z$ - оса и  $X, Y$ - раван остају и даље у првенственој употреби. На тај начин пол IERS одговара полу СИО (Conventional International Origin); према томе, одговара и полу изведеном из средњих координата станица Међународне службе ширине. Овај пол се битно разликује од средњег пола ротације и зависи од тренутног положаја осе фигуре. Почетни меридијан IERS се не подударе са меридијаном изведеним из опажања на пасажном инструменту Гринича и може се померати много даље од њега. Референтна временска скала за IERS терестричку основу је међународно атомско време TAI (Temps Atomique International).

За *идеалну небеску координатну основу* често се узима да је њен почетак у центру маса Сунчевог система и зато се ова основа означава као "барицентрична". Сем тога, за њу

важи да је "инерцијална" или "неротирајућа". За многе потребе таква основа се сматра фиксном у простору и може се оријентисати преко равни Галаксије и правца ка центру Галаксије. У астрономији (и геодезији) се користи *стандардна небеска референтна основа* IAU (International Astronomical Union), где се обично као *Z*-оса узима правац средњег пола Земљине ротације за неку договорену епоху. Тада је *X*-оса одређена правцем средње тачке пролећне равнодневице за исту епоху. Усвојено је, такође, да време може бити мерено у "униформној" временској скали.

У пракси се, дакле, стандардна референтна основа IAU формира према дефинисаној идеалној координатној основи. У том смислу правци ка вангалактичким радио-изворима треба да буду, до нивоа тачности мерења, непроменљиви у односу на идеалну координатну основу. Да би звездани каталог задовољавао овај услов и представљао оптичку стандардну референтну основу у којој вангалактички радио-извори не мењају положај, он мора, уз положаје звезда, да укључи и њихова сопствена кретања, паралаксе и радијалне брзине.

### 1.1.3. Терестрички референтни систем.

Сада важећи *терестрички референтни систем* је прихваћен 1979. године на XVII конгресу Међународне уније за геодезију и геофизику (The International Union of Geodesy and Geophysics). У Резолуцији број 7 <sup>(КАМБЕРА)</sup> се констатује да Геодетски систем 1969, усвојен на XIV конгресу у Луцерну 1967. године, више не представља са довољном тачношћу димензије и облик Земље, као ни поље убрзања силе теже, за многе задатке у геодезији, геофизици, астрономији и хидрографији (Moritz 1980), па, пошто постоје погодније вредности, Међународна унија за геодезију и геофизику

" препоручује:

а) да се Геодетски систем 1967 замени новим геодетским системом GRS80 (Geodetic Reference System 1980), који се темељи на теорији геоцентричног еквипотенцијалног елипсоида, дефинисаног следећим конвенционалним константама:

– екваторским радијусом Земље:

$$a = 6\,378\,137\text{m},$$

– геоцентричном гравитационом константом:

$$GM = 3\,986\,005 \times 10^8 \text{m}^3 \text{s}^{-2},$$

– динамичким коефицијентом Земљиног облика:

$$J_2 = 108\,263 \times 10^{-8},$$

– угаоном брзином Земљине ротације:

$$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{rads}^{-1};$$

b) да се користе рачунске формуле као и за Геодетски референтни систем 1967 које су усвојене на XV конгресу IUGG у Москви 1971. године, а које је објавила Међународна асоцијација за геодезију (IAG); и

с) да раније дефинисана мала оса референтног елипсоида мора бити паралелна правцу који пролази кроз Конвенционални међународни почетак (CIO – Conventional International Origin) и да је почетни меридијан паралелан нултом меридијану за одређивање географских дужина BIH (Bureau International de l'Heure).”

Геодетски систем GRS80 се заснива на теорији еквипотенцијалног елипсоида. Та теорија је била основа и за GRS67.

Еквипотенцијални елипсоид, или ниво елипсоид, је елипсоид који дефинише еквипотенцијалну површину. Ако је познат обртни елипсоид са великом полуосом  $a$  и малом полуосом  $b$ , он може представљати еквипотенцијалну површину

$$U = U_0 = \text{const.}$$

извесне потенцијалне функције  $U$ , која се назива *нормални гравитациони потенцијал*. Овде се функција  $U$  једнозначно дефинише параметрима елипсоида (полуосе  $a$  и  $b$ ), масом елипсоида  $M$  и његовом угаоном брзином  $\omega$ , у складу са теоремом Стокса – Поенкареа, потпуно независно од расподеле густине унутар елипсоида. Уместо поменуте четири константе може да се користи и неки други систем четири независна параметра.

Еквипотенцијални елипсоид даје једноставан, постојан и једнозначан референтни систем за све геодетске потребе: елипсоид као референтну површину за геометријска одређивања и нормално гравитационо поље на Земљиној површини и у космосу, у виду формула затвореног типа, за рачунања у гравиметрији и сателитској геодезији.

Референтни елипсоид је дефинисан тако да обухвата укупну масу Земље, укључујући атмосферу. Визуелно се може представити као да је сва атмосфера кондензована у један површински слој елипсоида. Нормално гравитационо поље на површини Земље и у космосу може се рачунати за све потребе узимајући у обзир варијације атмосферске густине.

У мају 1990. године EUREF је одлучио да подржи Европски терестрички референтни систем ETRS89 (the European Terrestrial Reference System 1989.0) као будући фундаментални Европски систем за научне потребе и извођење. И поред таквог свог имена, ETRS89 је предвиђен као систем за глобалну оријентацију. Систем је геоцентричан и упира се на положај чврстог дела Европске плоче за 1989.0. За многе практичне операције премера може се сматрати да ETRS89 коинцидира са системом WGS84 на метарском нивоу.

ETRS89 је у принципу дефинисан тродимензионалним Декартовим координатама, али у геодетској пракси су потребни још многи елементи за рачунање. Насупрот овоме, GRS80

је комплетно дефинисани систем који садржи и геометријска и физичка својства елипсоида, укључујући геоцентрични почетак и оријентацију преко нултог меридијана. Међународна астрономска унија такође се ослања на овај референтни систем за своје потребе. Због тога је препоручено да се успостави веза између ETRS89 и GRS80 елипсоида.

Систем WGS84, а самим тим и ETRS89, користи елипсоид који се сасвим мало разликује од референтног елипсоида GRS80. Три основне константе: екваторски радијус Земље  $a$ , геоцентрична гравитациона константа  $GM$  и угаона брзина Земљине ротације  $\omega$  истоветне су за оба елипсоида. Ниже су наведене константе (Poder 1991) у GRS80 систему (ознака  $G$ ) и у WGS84 систему (ознака  $W$ ) које се разликују:

коэффициент динамичке спљоштености	$G:$	$J_2 = 1.082630000000 \times 10^{-3}$
	$W:$	$J_2 = 1.082629989052 \times 10^{-3}$
спљоштеност	$G:$	$f = 3.352810681184 \times 10^{-3}$
	$W:$	$f = 3.352810664743 \times 10^{-3}$
реципрочна вредност спљоштености	$G:$	$f^{-1} = 298.25722210088378$
	$W:$	$f^{-1} = 298.25722356340697$
нормални потенцијал елипсоида	$G:$	$U_0 = 6.263686085005 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
	$W:$	$U_0 = 6.263686084970 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
нормално убрзање на екватору	$G:$	$\gamma_e = 9.780326771535 \text{ m s}^{-2}$
	$W:$	$\gamma_e = 9.780326771373 \text{ m s}^{-2}$
коэффициент у формули за убрзање	$G:$	$k = 1.931851353261 \times 10^{-3}$
	$W:$	$k = 1.931851386386 \times 10^{-3}$
дужина меридијанског квадранта	$G:$	$Q = 10001965.729230458 \text{ m}$
	$W:$	$Q = 10001965.729312748 \text{ m}$

#### 1.1.4. Небески референтни систем.

Добијање небеског референтног система и одговарајуће небеске референтне основе је дуг и сложен посао који се одвија у четири фазе (Kovalevsky 1988). У пракси те фазе могу бити одвојене, а овде ће бити изложене по редоследу остваривања.

У првој фази се креће од интуитивне идеје да осе небеског координатног система треба да буду фиксне у простору, што није лако за остваривање преко физичких својстава чланова наше Васионе. Такав општи прилаз одговарао би идеалном референтном систему. При том постоје две класе небеског референтног система; једна одговара динамичкој, а друга кинематичкој концепцији представљања система.

а) У првом случају, идеални динамички небески референтни систем садржи једначине кретања небеских тела које немају присутан центрифугални или линеарни члан убрзања.

У Њутновиј механици ова дефиниција је конзистентна и указује на инерцијални систем. У Општој теорији релативности, она има само локално значење у тангенцијалном еуклидском простору, када је гравитационо поље мало. То је разлог због кога израз "инерцијални референтни систем" није подесан за ову дефиницију. Радије се користити израз "динамички референтни систем", али такође може да се користи израз "квази-инерцијални идеални небески референтни систем".

б) Други начин дефинисања идеалног небеског система је да он постоји у Вациони, а његови правци су фиксни у простору. У овом случају ради се о "идеалном кинематичком небеском референтном систему", јер динамички концепт није унесен у дефиницију.

У другој фази нису изабрана само начела по којима је дефинисан референтни систем, већ је одређена и физичка структура на коју се примењује дефиниција. У садашње време, најподеснији избор је следећи:

а) Сунчев систем који садржи низ физичких тела у динамичкој интеракцији, врло подесан за примену квази-инерцијалног дефинисања небеског динамичког референтног система.

б) Квазари и други удаљени објекти који могу да материјализују фиксне правце у простору. Док звезде имају велика и донекле систематска сопствена кретања у свом кретању кроз Галаксију, ово није случај са удаљеним екстрагалактичким објектима. Чак и ако би их имали, њихова сопствена кретања не прелазе стохиљадити део лучне секунде за годину, што је сасвим занемарљиво у поређењу са садашњом тачношћу опажања.

У трећој фази се стиже до конвенционалног референтног система, где се развија математичка теорија према дефиницији идеалног система и додељују бројеви за неке физичке величине. Како опажања и мерења не омогућавају да се ове величине познају са перфектним тачношћу, у овој фази је присутна извесна произвољност. Зато реч "конвенционалан" боље одговара овако добијеном референтном систему.

а) Конвенционалан динамички небески референтни систем је дефинисан преко вредности које се дају у IAU систему астрономских константи. Оне се односе на масе планета, на вредности гравитационе константе и астрономске јединице, на неке параметре за описивање прецесије, нутације итд. Почетак система је дат за пресек еклиптике и средњег екватора у тренутку J2000.0. Посебно су изведене формуле које омогућавају да се одреде положаји у неком другом моменту.

б) Конвенционални кинематички небески референтни систем не захтева тако сложену параметризацију, јер је узето да су положаји екстрагалактичких извора фиксни и потребни су само ради дефинисања положаја координатног система. Овакав систем може, на пример, да буде одређен двома координатама једаног квазара и једном координатом другог.

Астрономске константе које служе за дефинисање динамичког небеског референтног система приказане су у трећем поглављу.

### 1.1.5. Небеска референтна основа.

Претходне три фазе у суштини се баве теоријским разматрањима. У четвртој фази референтни систем се реализује, односно, материјализује преко актуелног система координата приступачног за опажања. Ова материјализација названа је динамичка или кинематичка основа (frame). Реч "frame" означава практично остварење основних праваца и више одговара него реч "систем". У суштини, материјализација референтног система представља основу, потку, за одређивање положаја. Због тога се овде опредељујемо за нашу реч *основа*, мада може да се користи и неки други превод енглеске речи frame. Према томе, у даљем тексту ће се користити појмови *референтна основа* и *референтни систем*.

У тексту ће се, такође, појављивати термини *систем* каталога, *систем* ректасцензија, *систем* деклинација, *систем* сопствених кретања и слично. Овим ће се означавати својства која се односе, између осталог, на систематску грешку. Другим речима, под термином *систем* подразумеваће се скуп некаквих вредности у којима је садржана величина која се може идентификовати као систематска грешка (у односу на неки репер). На пример, *систем инструмента* означава положаје звезда добијене из опажања на датом инструменту, при чему ће разлике положаја "инструмент минус фундаментални каталог" показивати систематски ход, односно, имаће систематску грешку по деклинацији.

Материјализација небеског референтног система остварена је преко координата одређених за неки број небеских објеката и у сагласности са дефиницијом конвенционалног референтног система. Координате овог скупа поузданих тачака основних праваца морају да се користе да би се интерполацијом одредили положаји неких других тачака на небу. У овом смислу дате тачке формирају референтну основу.

Назначимо да може бити неколико реализација датог конвенционалног референтног система које се разликују по координатама фидуцијалних тачака и (или) по избору ових тачака. Међутим, само једна од њих се признаје као актуелна *стандардна референтна основа*. На пример, фундаментални каталози FK3 и FK4 су две различите реализације истог динамичког конвенционалног референтног система који је дефинисан у посебној Њукомбовој теорији кретања Земље и са Њукомбовом константом прецесије и нутације.

Јединствено усвојен *конвенционални небески референтни систем* који је до сада важио био је FK5 систем. Каталог положаја и сопствених кретања звезда FK5 представљао је одговарајућу *стандардну референтну основу*, у којој је, пошто се ради о динамичкој основи, коришћена нумеричка теорија кретања планета. У ову референтну основу су укључене и неке кинематичке информације које се тичу ротације наше Галаксије. Положаји звезда у овом каталогу су одређивани у односу на положаје планета, а посебно у односу на положај Сунца (апсолутни звездани каталози). После тога су додавани положаји одређивани релативном методом. Тако је створена референтна основа која прекрива цело небо



преко координата 1535 фундаменталних звезда FK5. Додато је још и проширење FK5 од 3117 звезда како би се добила што већа густина реперних тачака.

Иначе, дужи низ година увелико се радило на формирању кинематичког референтног система уз помоћ дугобазичне радио-интерферометрије. Замишљено је да нови систем, пре свега, буде у континуитету са FK5 системом. Резолуцијом B5 која је усвојена на XXII конгресу Међународне астрономске уније (Information Bulletin 1995, стр. 3 – 18) одређен је списак вангалактичких објеката које је требало размотрити као кандидате за укључење у нову референтну основу. Радна група за референтне основе је у току 1995. године финализовала положаје ових вангалактичких објеката и сложила их у једну референтну основу која се поклапа са каталогом FK5 у границама његових грешака. Сем тога, 1996. године завршен је Hipparcos (HIGH Precision PARallax COLlecting Satellit) каталог који је везан за поменуте вангалактичке објекте са одступањем положаја  $\pm 0''.0006$  за епоху 1991.25 и грешком  $\pm 0''.00025$  годишње у ротацији.

Полазећи од овога, на XXIII конгресу Међународне астрономске уније, резолуцијом B2 (Information Bulletin 1998, стр. 30 – 31) одлучено је да се од 1. јануара 1998. године усвоји ICRS (International Celestial Reference System) као небески референтни систем Међународне астрономске уније, како је то дефинисала Међународна служба за Земљину ротацију IERS. Одговарајућа референтна основа биће ICRF (International Celestial Reference Frame) коју је саставила Радна група за референтне основе. При томе ће каталог Hipparcos бити примарна реализација ICRS у подручју оптичких таласних дужина.

На овај начин се повезују оптичка и радио-интерферометријска опажања и успоставља веза између динамичког и кинематичког референтног система. ICRS представља, у одређеном смислу, проширење FK5 система на изворе зрачења који нису доступни класичним астрономским опажањима. Нови референтни систем обезбеђује, у дужем временском интервалу, повећану тачност положаја васионских објеката, а самим тим и објеката (звезде и тела Сунчевог система) које покрива каталог FK5.

## 1.2. Каталогси положаја и сопствених кретања звезда.

У астрономији се каталогом назива списак извесног броја звезда, у коме су за сваку звезду посебно наведени подаци који је на неки начин карактеришу. Такви подаци, или карактеристике, могу бити положаји звезда на небеској сфери (њихове координате), радијалне брзине, сопствена кретања, звездане величине, паралаксе, спектрални типови и томе слично. За идентификацију звезде најпогоднија карактеристика је њен положај. Зато се координате звезда наводе готово у свим каталозима. Обично се под називом "звездани каталози", или само "каталози", подразумевају пре свега они који, поред координата

звезда, садрже и њихова сопствена кретања као главне карактеристике. Отуда назив *каталози положаја и сопствених кретања звезда* (Бакулин 1980, стр. 11).

Референтни систем остварен преко положаја и сопствених кретања звезда фундаменталног каталога служи као основа при одређивању тачног месног звезданог времена, географских координата, азимута праваца на Земљиној површини, положаја и кретања планета и комета, а такође и за одређивање положаја и сопствених кретања што је могуће већег броја других звезда. Зато није необично што су опажања звезда, у циљу одређивања њиховог положаја на небу и састављања звезданих каталога, започета још у далекој прошлости, а доцније се јављају као један од основних задатака астрономије, који ни данас не губи актуелност.

Следи кратак историјат радова на формирању звезданих каталога и опис првих фундаменталних каталога из немачке серије FK. Приказ је дат на основи текстова у књигама "Фундаментална астрометрија" (Подобед 1968, стр. 408 – 415), "Фундаментални звездани каталози" (Бакулин 1980, стр. 51 – 105) и "Астрономија звезданих положаја" (Eichhorn 1974, стр. 165 – 189).

### 1.2.1. Кратак преглед развоја звезданих каталога.

У почетку се задатак астрометрије сводио на добијање појединачних каталога из опажања, а затим, с потребом повишења тачности референтног система, прешло се на комплексније радове. Савремени каталози високе тачности заснивају се на опажањима која се раде на многим опсерваторијама и многим инструментима. На самом крају прошле и почетком ове деценије укључена су и сателитска мерења.

Прве каталоге који су допрли до наших времена направили су Кинези. Познат је каталог Хан Хуна и Ши Шена, са 800 звезда, при чему су за 120 звезда дате довољно тачне еклиптичке координате добијене из опажања која су вршена око 360 – 350. године пре наше ере.

Древни Грци су се много и са успехом бавили одређивањем координата звезда, и то еклиптичком ширином и дужином. Познат је већи број каталога које су они добили. У првој половини III века пре наше ере Аристил и Тимохарис су предузели мерења растојања звезда од неких тачака на небеској сфери за извођење положаја звезда. Независни каталог 1022 звезде добио је Хипарх (123. године пре наше ере). Упоредивање координата овог каталога са опажањима Аристила и Тимохариса довело је до открића појаве "предњачења равнодневице", прецесије.

Најпознатији каталог старог света је Птолемејев каталог који садржи координате 1025 сјајних звезда за равнодневицу 138. г. наше ере. Птолемеј је у њему објединио сопствена

опажања и опажања својих претходника. Тачност каталога ове епохе, опажаних углавном на армиларним сферама, не превазилази  $\pm 15'$ . Птолемајев каталог је употребљаван у астрономској пракси неколико векова, а затим је много пута поново издаван и свођен на друге равнодневице (964. г. каталог Ал-Сухија, 1252.4 г. Алфонсове таблице). Касније су звезде Птолемајевог каталога вишеструко опажане ради повишења тачности координата, па је добијен низ каталога, на пример, Улуг-Беков каталог са 1017 звезда за епоху 1437.5, Ротманов каталог са 1004 звезде за епоху 1594.0, Тихо Брахеов са 1005 звезда за епоху 1601.0.

Појавили су се чувени Хевелијусови каталози (1564 звезде за епохе 1661. и 1701.) који су имали граничну тачност за опажања са диоптерима од  $\pm 2'$ . У њима су по први пут дате ректасцензије и деклинације звезда. С развојем меридијанских принципа опажања екваторске координате су коначно потиснуле из праксе еклиптички координатни систем.

Увођење нових принципа и инструмената, а посебно замена диоптера астрономским дурбином, довело је до радикалног повишења тачности добијених каталога. Гриничка опсерваторија, организована још крајем XVII века, постаје главни центар позиционе астрометрије тога времена. Водећу улогу Гриничка опсерваторија задржава до четрдесетих година XIX века, када су се развили радови Пулковске опсерваторије. Гринички астрономи Флемстид, Маскелајн и посебно Бредли својим радовима приближавају тачност одређивања координата савременом нивоу. Грешке Бредлијевих каталога (епоха 1755.) износе  $\pm 0^{\circ}16'$  за ректасцензију и  $\pm 1''3$  за деклинацију.

Због своје ниске тачности сви звездани каталози до Бредлија за фундаменталну астрометрију имају само историјски значај. Каталози 3268 звезда, добијени из Бредлијевим опажања сачували су своју вредност и до наших дана. Њих су прерадили са новим вредностима астрономских константи, најпре Бесел, а затим Ауверс, па су примењивани за извођење сопствених кретања звезда при образовању већег броја референтних основа. С истим циљем касније је прерађен Пјацијев каталог 7646 звезда за епоху 1800.0 и Грумбрицов каталог 4243 звезде око пола за епоху 1810.0.

Са оснивањем Пулковске опсерваторије Русија полако преузима примат у области фундаменталне астрометрије. Пулковски каталози, заједно са каталозима Гриничке, Вашингтонске и других опсерваторија, представљају базу савремених фундаменталних каталога. У формирању референтне основе за јужну хемисферу велику улогу су имали каталози Капске опсерваторије.

Може се сматрати да је први фундаментални каталог, који настаје обједињавањем независних опажања, Беселов каталог на основи кога су публиковане такозване "Кенигсбершке таблице", скраћено означаване са TR (Tabulae Regiomontanae). Оне садрже средње и привидне координате 36 екваторских Маскелајнових звезда и двеју поларних звезда за

период времена од 1750.0 до 1850.0. Положаје и сопствена кретања звезда извео је Бесел по својим (каталози 1815. и 1825. године) и Бредлијевим опажањима. Ова последња је у том циљу Бесел специјално прерадио. Фундаментални каталог који је извео Бесел користио се до 1861. године у својству референтне основе при публиковању података Берлинског годишњака.

Побољшање система "Кенигсбершких таблица" урадио је Волферс, који је додао, осим каталога које користи Бесел, пет нових каталога по ректасцензији и седам по деклинацији. При образовању новог система обрачунате су само средње систематске разлике каталога. Као резултат добијена је референтна основа од 47 звезда, публикована под називом "Таблице за редуције астрономских опажања од 1860. до 1880. године". Ове таблице су примењиване у Берлинском годишњаку до 1883. године.

Референтна основа Берлинског годишњака, који се постојано одржавао у току дугог времена, видно је издвајала овај годишњак од енглеског и француског. У енглеском се основа мењала с појавом сваког новог гриничког каталога, а основа француског годишњака била је далеко од савршенства, чак и у то време када се није много захтевало.

Седамдесетих година XIX столећа Њукомб, Ауверс и Бос почели су своје обимне радове чији је коначни резултат формирање савремених референтних основа и система, као и развијање метода за испитивања случајних и систематских грешака каталога.

### 1.2.2. Референтна основа пројекта AGK и каталог NFK.

Године 1863. Аргеландер је саставио на Бонској опсерваторији атлас и фотометријски преглед 324188 звезда до 9.5 привидне величине за северну хемисферу од  $+90^\circ$  до  $-2^\circ$  деклинације. Бројеви звезда у каталогу приближних положаја за епоху 1855.0 који је био приложен атласу "Бонског прегледа" до данашњег доба остали су стандардна ознака ових звезда. Ознака садржи слова BD (почетна слова назива "Bonner Durchmusterung"), број деклинацијске зоне у степенима и број звезде у зони. На пример, Северњача има ознаку BD  $+88^\circ 8$ .

Немачко астрономско друштво, основано у Хајделбергу 1863. године, које је обједињавало и многе астрономе из других земаља, организовало је први међународни кооперативни пројект за одређивање тачних положаја свих звезда до 9.0 привидне величине из BD списка. Циљ овог рада, који је започео 1869. године, било је добијање такозваних Каталога Астрономског друштва – AGK (Astronomischer Gesellschaft Katalog). Програм Астрономског друштва укључивао је звезде од  $-2^\circ$  до  $+90^\circ$  деклинације. Посао је подељен на 12 опсерваторија из шест држава, при чему се свака опсерваторија обавезала да опажа звезде у одређеним деклинацијским зонама. По договору, положаји звезда би се одређи-

вали релативном методом из најмање два опажања.

Ради хомогености добијених зонских каталога неопходно је било да се састави фундаментални каталог упоришних звезда. Овај каталог са ознаком FC (Auwers 1879) представља први Ауверсов фундаментални каталог. Његов систем је означаван са  $A_1$ . У њега улази 539 звезда до  $-10^\circ$  деклинације чији су положаји добијени на основи осам каталога. Велики део су чинила опажања Пулковске (Pu 1845, Pu 1865 и Pu 1871) и Гриничке опсерваторије (Gr 1861 и Gr 1872). Сви каталози су били сведени на систем Pu 1865, после проучавања систематских разлика свих облика уз коришћење Струвеове константе прецесије. На тај начин, систем  $A_1$  је идентичан систему Pu 1865, који се у ректасцензији по грешкама вида  $\Delta\alpha_0$  и  $\Delta\alpha_\alpha$  поклапао са Њукомбовим системом  $N_1$ , док је по грешкама вида  $\Delta\alpha_\delta$  и у деклинацији то био самосталан систем. Сопствена кретања су добијена сравњењем само једног каталога Gr 1861 са прерађеним Бредлијевим каталогом и услед тога су недовољно поуздана. Крајем прошлог столећа систем  $A_1$  је исправљен нађеним индивидуалним поправкама координата звезда и после тога је добио ознаку  $A_2$ . Систем каталога FC употребљаван је у Берлинском годишњаку од 1883. до 1906. године.

Крајем осамдесетих година фотометријски преглед BD био је продужен на јужно небо до деклинације  $-23^\circ$  (133659 звезда од  $-2^\circ$  до  $-23^\circ$  по деклинацији). На опсерваторији у Кордоби састављен је преглед CD (Cordoba Durchmusterung) од  $-23^\circ$  до  $-90^\circ$ . Такође је добијен и Капски фотографски преглед CPD, који је укључивао 454875 звезда од  $-19^\circ$  до  $-90^\circ$  деклинације. Ознаке CD и CPD широко се користе за обележавања звезда јужне хемисфере.

Због распрострањања зонских опажања на јужно небо Ауверс је саставио фундаменталне каталоге са звездама јужне хемисфере  $A_{303}$  и  $A_s$ . Каталог  $A_{303}$  (Auwers 1889) садржи 303 звезде са деклинацијама од  $-2^\circ$  до  $-23^\circ$ , а каталог  $A_s$  (Auwers 1897) има 499 звезда у границама од  $-20^\circ$  до  $-82.6^\circ$ . Значајну улогу у њиховој припреми имали су каталози Капске и Кордобске опсерваторије. Систематске разлике ректасцензија ових фундаменталних каталога по грешкама  $\Delta\alpha_0$  и  $\Delta\alpha_\alpha$  поклапали су се са  $A_1$ , а по грешкама  $\Delta\alpha_\delta$  и по грешкама деклинација били су самостални системи. Сем тога, каталог  $A_{303}$  побољшаван је два пута ради смањења случајне грешке.

Каталози FC,  $A_{303}$  и  $A_s$  представљају прелиминарне фундаменталне каталоге, чијим се обједињавањем и смањењем систематских грешака (осим поправке равнодневице) добија каталог означен са NFK (Peters 1907), што је скраћеница његовог назива на немачком Neue Fundamentalkatalog. Побољшање је урађено на основи 90 каталога са епохама опажања од 1745. до 1900. године. Да би се добила нова референтна основа у виду фундаменталног каталога, било је потребно да се додају добијене поправке положаја и сопствених кретања. Каталог NFK је заснован на Њукомбовој вредности константе прецесије. Овај каталог

садржи положаје 925 звезда за епоху 1870.0 и 1900.0. Каталожки систем NFK може да се окарактерише као општа аритметичка средина свих инструментских система апсолутних каталога од XVIII до XX века.

Каталог NFK је коришћен за састављање Берлинског годишњака све до 1940. године, када га је заменио Трећи фундаментални каталог – FK3.

Пројекат AGK завршен је издавањем петнаест каталога положаја звезда за период од 1890. до 1910. године. Каталози су садржали координате 144212 звезда за епоху 1875.0. Продужење опажања на јужно небо до деклинације  $-23^\circ$  дало је још пет каталога за епоху 1900.0, који су завршени до 1924. године и садржали још 43830 звезда. Много касније завршени су зонски каталози за остале делове јужног неба на основи опажања у Кордоби и Ла Плати. Како је показало упоређивање са каснијим радовима, каталози AGK су оптерећени великим систематским грешкама, а тачност каталога различитих зона је различита.

### 1.2.3. Фундаментални каталог FK3.

Ревидирање система NFK било је предузето по решењу Астрономског друштва 1924. године у вези са предлогом поновних фотографских опажања зонских каталога. За спровођење овог посла био је неопходан каталог упоришних слабих звезда, па је и поникао проблем образовања новог референтног система и добијање упоришног каталога слабих звезда у том систему. Нови фундаментални каталог, који је добио ознаку FK3, извео је Корф почетком тридесетих година. Први део каталога (Korff 1937) садржи звезде NFK, док други део (Korff 1938) представља његово проширење.

За извођење система ректасцензија и деклинација FK3 узета су опажања 873 звезде списка NFK, које су добиле назив основне звезде FK3 или Ауверсове звезде. Остале 52 звезде NFK, пошто су биле двојне, искључене су из даљих анализа због нетачности њихових координата.

Првобитно је урађено побољшање индивидуалних положаја и сопствених кретања основних звезда у каталогу NFK. Поправке координата и сопствених кретања у смислу смањења случајних грешака изведене су за северну хемисферу на основи двадесетак каталога, а за јужну на основи каталога Капске опсерваторије и каталога Кордобе и Сент-Луиса. У већини случајева добијене поправке су се показале као мале.

Смањење систематских грешака положаја NFK звезда изведено је на основи 77 каталога, који су већином публиковани у периоду између 1900. и 1930. године. За систематске поправке облика  $\Delta\alpha$  коришћено је 20 каталога. Добијена је добра сагласност систематских разлика свих каталога са NFK у зони од  $+70^\circ$  до  $-70^\circ$  деклинације. За поларне зоне

поправка  $\Delta\alpha_\delta$  била је посебно испитивана с додавањем других опажања. Поправка вида  $\Delta\alpha_\alpha$  анализирана је по зонама. Установљен је сложени карактер њене промене, који је показивао велико повећање амплитуде с повећањем деклинације зоне. Утврђено је постојање једначине сјаја  $\Delta\alpha_m$  и израчуната је вредност одговарајућих параметара на основи 15 каталога екваторијалне зоне.

Поправка равнодневице NFK има вредност  $\Delta\alpha_0 = -0^{\circ}050$ , што је усвојено према опажањима Сунца и великих планета на Пулковској, Гриничкој, Вашингтонској и Капској опсерваторији.

За извођење систематских поправака  $\Delta\delta_\delta$ , поред звезданих каталога, употребљена су, такође, опажања Сунца и великих планета ради поправљања деклинација појединих каталога у екваторским зонама. Општа поправка система деклинација NFK показало се да је једнака  $\Delta D = +0''20$ . Даље побољшање система деклинација извођено је комбинацијом сваког северног каталога са групом јужних и обратно. Поправка  $\Delta\delta_\alpha$  изведена је из 14 каталога северног неба и из 6 каталога јужног. Приликом образовања FK3 употребљавано је графичко представљање систематских разлика путем изравњања кривих, добијених из непосредног упоређивања каталога.

За побољшање система сопствених кретања узимани су каталози са епохама које нису биле раније од 1845–1850. године, при чему су се користили само дуги нивози опажања на једним те истим инструментима (Пулковски, Гринички, Капски и неки други). Сем тога, за побољшање сопствених кретања по деклинацији, коришћена су још и опажања Сунца и планета.

Ради увеличања броја звезда у каталогу FK3 с циљем равномернијег њиховог распореда по целој небеској сфери, додате су још 662 звезде, такозване допунске. Случајне грешке њихових положаја и сопствених кретања, узетих из каталога PGC (Boss 1910), биле су смањене коришћењем истих каталога који су употребљени за формирање система FK3. На тај начин, коначни каталог FK3 садржи по целом небу 873 основне (мада су публиковани и положаји 52 искључене двојне звезде) и 662 допунске звезде за равнодневицу 1950.0. У основне звезде FK3 спада и 20 поларних, а допунске звезде садрже и 32 поларне. Допунске звезде носе бројеве од 1001 па надаље.

Каталог FK3 се појављује као првокласни каталог и у погледу случајних и у погледу систематских грешака. О томе видно сведоче поређења с новим серијама опажања. По препоруци Париског конгреса Међународне астрономске уније 1935. године сви годишњаци су прешли на овај каталог почев од 1940. године. Тако је FK3 постао главна референтна основа за астрометријске и геодетске радове целог света и служио је све до 1964. године. Привидни положаји звезда FK3, такозвани Apparent Places, издавани су годишње у Лондону, а од 1960. године у Хајделбергу.

#### 1.2.4. Фундаментални каталог FK4.

Године 1952. на конгресу Међународне астрономске уније у Риму одобрен је почетак радова на састављању новог фундаменталног каталога FK4. Требало је да то буде упоришни каталог за фотографска опажања зонских каталога AGK3, а такође и референтна основа за ширинска и дужинска одређивања у време Међународне геофизичке године (МГГ 1957 – 1958.). Сем тога, покренута је иницијатива да се повећа број звезда фундаменталног каталога. Радови на формирању FK4 почели су под руководством Копфа, а после његове смрти посао је водио Фрике (Fricke и Корф 1963). Активности су се састојале практично из три дела:

- а) побољшање положаја и сопствених кретања звезда FK3 смањењем случајних грешака;
- б) извођење новог фундаменталног система FK4;
- в) повећање броја звезда које дефинишу фундаментални систем.

За одређивање индивидуалних поправака положаја и сопствених кретања звезда употребљено је 72 каталога добијених после састављања FK3. Они су преведени на једну исту епоху, уз коришћење Њукомбове константе прецесије и са сопственим кретањима из FK3. После искључења изравнатих систематских разлика K – FK3, разлике положаја сваке звезде у датом каталогу и у FK3 коришћени су за извођење индивидуалних поправака положаја и сопствених кретања. Тежина за поједине звезде означавања је на основи случајних разлика датог каталога и FK3 и јако је зависила од броја опажања. После решавања система једначина за сваку дату звезду, израчунате су такође средње квадратне грешке поправака координата и сопствених кретања.

Каталог FK3, побољшан индивидуалним поправкама координата звезда и њихових сопствених кретања добио је ознаку FK3R. Од 1957. године постало је могуће да се ови побољшани положаји звезда до  $-30^\circ$  деклинације користе за ширинска и дужинска одређивања по програмима Међународне геофизичке године.

За извођење система деклинација FK4 узети су сви апсолутни каталози из периода 1845–1956. година, укључујући и оне који су коришћени при образовању система FK3. Одређивање поправке екватора изведено је из 42 каталога чија је израда била праћена опажањима Сунца и планета. Поправка екваторских деклинација датог каталога,  $\Delta D_i = \Delta \delta_0$ , изведена по опажањима тела Сунчевог система, у комбинацији са систематском разликом "каталог – FK3" за екватор, давала је поправку екватора FK3 по датом каталогу, одакле је вршено изравњање по времену, узимајући у обзир и поправку система сопствених кретања. Одвојена обрада, најпре по свим каталозима, а затим само по савременим, дала је добру сагласност. Треба истаћи да многобројна фотографска опажања малих планета нису била коришћена, јер њихови положаји нису могли да се сведу на систем FK3. Ово ће постати могуће тек после проширења система FK4 на слабе звезде.



*Систем деклинација* ( $\Delta\delta$ ,  $\Delta\delta_\alpha$ ) био је изведен на основи каталога опажних после 1900. године, а систем сопствених кретања по деклинацији на основи апсолутних каталога од 1846. до 1955. године. Резултати су добијени раздвајањем по зонама, чиме је олакшана примена тежина које су биле, како се испоставило, различите за разне зоне. Сумарна тежина у зони састојала се из три компоненте у зависности од броја звезда у зони, од унутрашње тачности у зони и од апсолутизације каталога у целини.

Грешка екуатора датог каталога добијана је укључујући у разлику  $K - FK3$  поправку  $\Delta D(T)$  каталога  $FK3$ . Претпостављајући, по Њукомбу, да се систематска грешка деклинације  $\Delta\delta$  мења линеарно од величине на екуатору до теоријске нуле у полу, она је искључивана из систематске разлике "каталог минус  $FK3$ ". Преостали део је служио за добијање поправака  $\Delta\delta$  и  $\Delta\mu'_\delta$  каталога  $FK3$  на уобичајени начин. После искључивања грешака које зависе од деклинације, нађене су поправке  $\Delta\delta_\alpha$  и  $\Delta\mu'_\alpha$ .

У каталогу  $FK3$ , као што је поменуто, усвојена је Њукомбова равнодневица исправљена за  $\Delta A = -0^{\circ}050$ . Ова поправка не зависи од времена, јер промене добијене приликом њеног извођења добро се слажу са променом метода регистрације пролаза. Поновна обрада опажања са додавањем нових података показала је да равнодневица  $FK3$  не тражи поправљање. Наиме, поправка Њукомбове равнодневице у зависности од комбинације тежина добијана је од  $-0^{\circ}040$  (ова вредност поправке усвојена је за  $GC$  и  $N_{30}$ ) до  $-0^{\circ}050$ . Зависност од времена појављивала се само при неким комбинацијама тежина. Из овога се види да би промена равнодневице  $FK3$  била нецелисходна.

*Систем ректасцензија* је добијен на основи 48 апсолутних каталога из периода 1918 – 1956. година и има средњу епоху опажања око 1935. године. Систем сопствених кретања по ректасцензији изведен је на основи серија апсолутних опажања почев од 1897. па до 1956. године. Прелиминарно испитивање систематских разлика вида  $\Delta\alpha_\delta$  и  $\Delta\alpha_\alpha$ , које су добијене из упоређења старих и нових каталога са  $FK3$ , показало је да укључивање каталога урађених до 1900. године не даје повишење тачности система. Сем тога, примећено је да се систематске разлике мењају на сложен начин. Зато се систематске разлике нису представљале на уобичајени начин, већ су одређиване непосредно за поједине сегменте неба. У поларној зони систематске поправке су добијане за сваку звезду појединачно. При анализи ректасцензија је, за различите "инструментске" групе, назначавана тежина од 1 до 4 у зависности од броја каталога унутар групе, методе опажања и њихове обраде, укључивања опажања у обе кулминације и одступања система  $\Delta\alpha_\delta$  и  $\Delta\alpha_\alpha$  датог каталога од средњег у серији.

Систем сопствених кретања по ректасцензији у каталогу  $FK4$  заснован је на инструментским системима Вашингтонске, Пулковске и Капске опсерваторије. Константне поправке  $\Delta\mu =$  "средњи систем" –  $FK4$  били су добијени са различитим тежинама за ра-

зличите зоне. За звезде јужније од  $-20^\circ$  коришћена су само Капска опажања.

Положаји и сопствена кретања каталога FK4 образовани су путем сумирања индивидуалних и систематских поправака са подацима каталога FK3. Сравнивање добијеног каталога са савременим серијама опажања издвојило је систематску разлику, малу по вредности, али поуздано добијену, која зависи од привидне величине за ректасцензију и за сопствено кретање по ректасцензији. Пошто је каталог  $N_{30}$  слободан од такве грешке, то је у FK4 уведена допунска поправка вида  $\Delta\alpha_m$  и  $\Delta\mu_m$  у смислу ( $N_{30} - FK3R$ ).

Каталог FK4 био је публикован 1963. године. Он садржи податке за 1535 звезда, који се односе на равнодневицу и епоху 1950.0 ии 1975.0. Нумерација звезда до  $\pm 80^\circ$  задржана је из FK3 и продужена на поларне. За седам двојних звезда положаји и сопствена кретања дати су за тежиште система. Промена вредности сопственог кретања са временом обрачунато је у 31 случају. Од 1964. године *Argent Places* се издаје у систему FK4.

Поред уобичајених података, у каталогу FK4 су наведене средње квадратне грешке координата и сопствених кретања за средњу епоху опажања дате звезде, која карактерише тачност у случајном смислу унутар система FK4. У средњем се ове величине крећу за звезде северног неба у границама:  $\epsilon_\alpha \cos \delta$  од  $\pm 0^{\circ}001$  до  $\pm 0^{\circ}002$  за ректасцензију и  $\epsilon_\mu \cos \delta$  од  $\pm 0^{\circ}005$  до  $\pm 0^{\circ}012$ , док је  $\epsilon_\delta$  од  $\pm 0''02$  до  $\pm 0''03$  и  $\epsilon_{\mu'}$  од  $\pm 0''10$  до  $\pm 0''15$  за деклинацију. Јужне звезде имају знатно мању тачност. Тачност каталога FK4 карактерише се вредностима срадњих квадратних грешака система FK4 израчунатим по одступањима система апсолутних каталога од система FK4.

Каталог FK4 је тачнији од каталога FK3, али није лишен низа недостатака: мало повећање тачности за јужну хемисферу; недовољно исправљене систематске грешке, посебно  $\Delta\alpha_\alpha$ ; систем каталога се заснива на истом броју звезда као и систем FK3, итд. У почетку ревидирања FK3 Копф је покренуо иницијативу да се прошири списак звезда FK3 и саставио је два допунска списка FK3 Sup; један који је садржао 1142 звезде за северно и други са 845 звезда за јужно небо. Координате и сопствена кретања ових звезда узета су из каталога  $N_{30}$  и делимично из GC и дата су у систему FK3. Међутим, у време израде FK4 број опажања ових допунских звезда био је сасвим недовољан за њихово коришћење при формирању новог система. Због тога су подаци за звезде FK3 Sup преведени на систем FK4 простим додавањем систематских разлика (FK4 - FK3).

Каталог FK4 Sup садржи координате и сопствена кретања 1987 сјајних звезда до седме привидне величине у систему FK4 за равнодневицу и епоху 1950.0. Звезде FK4 Sup добиле су бројеве почев од 2001 па надаље. Поларне звезде унешене су у посебан списак. Премда подаци за звезде FK4 Sup нису били коришћени приликом образовања система FK4, њихове координате и сопствена кретања тесно су везани за тај систем, па се каталог FK4 Sup може разматрати као репродукција система FK4 и може се користити у свим оним случајевима

када није потребна највиша тачност, а потребно је задржати систем. Звезде каталога FK4, а посебно списка FK4 Sup, интензивно су иза тога опажане на многим опсерваторијама света.

### 1.3. Каталог FK5 као референтна основа система FK5.

Фундаментали каталог садржи положаје одабраних звезда и његов главни циљ је остварење небеског референтног система у коме се мере положаји других објеката на небу. Фундаментална сопствена кретања, такође, имају посебан значај у случају истраживања везаних за кинематику Галаксије, или за одређивања растојања до звезданих јата. При томе, фундаментални систем треба да је у што већој могућој мери близак инерцијалном систему. Да би се испунили ови захтеви фундаментални систем треба с времена на време побољшавати укључивањем све новијих и новијих опажања. Тако се појавио Пети Фундаментални Каталог (FK5) као резултат ревидирања и проширења FK4.

Одмах по публикавању FK4 било је јасно да он садржи значајне недостатке, па је покренута иницијатива за формирање новог фундаменталног каталога. Посебно су се издвајале следећи недостаци: 1) велике систематске грешке ректасцензија откривене су најпре из опажања у Чилеу од 1962. па надаље; 2) грубе грешке средњих положаја и сопствених кретања за јужне звезде FK4 биле су знатне у поређењу са тачношћу савремених меридијанских опажања: просечна средња грешка FK4 положаја јужније од  $-30^\circ$ , на пример, износи око  $\pm 0''.18$  за епоху 1975; 3) густина звезда у FK4 је доста ниска (једна звезда на око 25 квадратних степени) и звезде су прилично сјајне (само двестотинак звезда су слабије од шесте привидне величине); 4) откривена је грешка (која се мења са временом) у положају равнодневице одређене ректасцензијама FK4 звезда; 5) поправљена вредност за изражавање опште прецесије почела је да се употребљава и требало је њу увести у нови фундаментални каталог.

Мада су неке од поменутих мањкавости уочене још при формирању FK4, нису одмах сви захтеви испуњени. На пример, није замењена прецесиона вредност, није примењена корекција равнодневице и нису придодате нове звезде на FK3. Елиминација набројаних недостатака у FK4 представљала је суштинске задатке при формирању FK5. Ови задаци су практично независни један од другог и зато су решавани одвојено.

Слика 1.1. даје изглед парне странице у каталогу FK5. Први стубац садржи број звезде, други њен назив, а трећи и четврти стубац привидну величину и спектрални тип. У петом и шестом ступцу је ректасцензија и сопствено кретање по ректасцензији, а у седмом и осмом деклинација и сопствено кретање по деклинацији. У деветом ступцу је број по Босовом каталогу GC и у десетом број по каталогу Хенри Дрејнера (HD).

## EQUINOX AND EPOCH J2000.0

No.	Name	Mag.	Sp.	$\alpha_{2000}$	$\mu_{2000}$	$\delta_{2000}$	$\mu'_{2000}$	GC	HD
612	$\eta$ UMI	4.95	F0	16 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup> .323	- 2.293	+75° 45' 18".94	+ 25".24	21999	148048
605	$\epsilon$ Oph	3.24	K0	16 18 19.290	+ 0.566	- 4 41 32.99	+ 4.10	21920	146791
1426	55 G. Sco sq	5.49	F2	16 19 32.749	+ 0.659	-30 54 24.34	+ 2.30	21941	146836
608	$\tau$ Her	3.89	B5	16 19 44.440	- 0.109	+46 18 48.21	+ 4.00	21987	147394
604	$\gamma^2$ Nor	4.02	K0	16 19 50.443	- 1.614	-50 9 19.98	- 5.32	21933	146686
1424	$\delta^1$ Aps	4.68	M3	16 20 20.764	- 0.474	-78 41 44.68	- 3.51	21862	145366
607	$\sigma$ Sco	2.89	B1	16 21 11.317	- 0.076	-25 35 34.17	- 2.07	21982	147165
609	$\gamma$ Her	3.75	F0	16 21 55.216	- 0.330	+19 9 11.20	+ 4.32	22012	147547
1427	$\sigma$ Ser	4.82	F0	16 22 4.354	- 1.036	+ 1 1 44.52	+ 5.00	22007	147449
1428	23 Her.	6.39	A2	16 22 56.505	+ 0.182	+32 19 58.83	- 0.74	22040	147835
1429	21 Her	5.85	A0	16 24 10.831	+ 0.019	+ 6 56 53.45	+ 1.41	22058	147869
614	Grb 2343 Dra	5.74	A2	16 24 25.337	+ 0.140	+55 12 18.42	+ 2.25	22102	148330
613	$\omega$ Her	4.57	A0p	16 25 24.962	+ 0.302	+14 1 59.75	- 5.94	22090	148112
619	A Dra	5.00	B8p	16 27 59.003	- 0.455	+68 46 5.31	+ 3.57	22194	149212
610	$\zeta$ TrA	4.91	G0	16 28 28.123	+ 3.837	-70 5 3.98	+ 10.83	22089	147584
616	$\alpha$ Sco cg	(8)	M0+A3	16 29 24.439	- 0.071	-26 25 55.15	- 2.03	22157	148478
1430	22 G. Oph	5.68	G0	16 29 46.932	+ 0.253	-14 33 3.00	+ 1.44	22171	148604
618	$\beta$ Her	2.77	K0	16 30 13.201	- 0.702	+21 29 22.56	- 1.46	22193	148856
623	Grb 2373 UMI	6.34	G5	16 30 38.788	- 3.191	+77 26 47.50	+ 27.61	22301	150275
1431	N Sco	4.23	B3	16 31 22.941	- 0.075	-34 42 15.61	- 1.68	22195	148703
1432	Pi 16 <sup>h</sup> 140 Dra	5.94	A0	16 32 25.660	+ 0.298	+60 49 24.00	- 0.96	22281	149650
611	$\gamma$ Aps	3.89	K0	16 33 27.043	- 4.527	-78 53 49.66	- 7.56	22142	147675
621	$\sigma$ Her	4.20	A0	16 34 6.189	- 0.096	+42 26 13.31	+ 4.55	22296	149630
620	$\tau$ Sco	2.82	B0	16 35 52.960	- 0.064	-28 12 57.72	- 2.21	22303	149438
1433	12 Oph	5.75	K0	16 36 21.455	+ 3.055	- 2 19 28.60	- 30.98	22321	149661
622	$\zeta$ Oph	2.56	B0	16 37 9.542	+ 0.092	-10 34 1.56	+ 2.63	22332	149757
1434	42 Her	4.90	M0	16 38 44.851	- 0.475	+48 55 42.20	+ 3.11	22412	150450
624	Br 2114 Oph	4.96	K0	16 41 34.390	- 0.140	-17 44 31.85	- 0.08	22449	150416
626	$\eta$ Her	3.53	K0	16 42 53.772	+ 0.318	+38 55 20.30	- 8.25	22502	150997
627	Grb 2377 Dra	4.85	F0	16 45 17.802	+ 0.225	+56 46 54.79	+ 6.56	22584	151613
1436	19 Oph	6.10	A2	16 47 9.752	- 0.070	+ 2 3 52.30	- 1.42	22592	151431
625	$\alpha$ TrA	1.92	K2	16 48 39.869	+ 0.260	-69 1 39.82	- 3.40	22558	150798
1437	-21°4422 Oph	7.42	M0	16 49 35.002	- 0.102	-21 51 8.54	- 1.56	22629	151658
1435	$\eta$ Ara	3.76	K5	16 49 47.147	+ 0.487	-59 2 29.13	- 2.85	22606	151249
1438	20 Oph	4.65	F5	16 49 50.035	+ 0.652	-10 46 58.91	- 9.27	22643	151769
628	$\epsilon$ Sco	2.29	K0	16 50 9.820	- 4.930	-34 17 35.72	- 25.54	22640	151680
1440	51 Her	5.04	K0	16 51 45.266	+ 0.079	+24 39 23.12	+ 0.56	22708	152326
1439	$\mu^1$ Sco	3.08v	B3p	16 51 52.235	- 0.091	-38 2 50.74	- 2.45	22677	151890
629	49 Her	6.53	A0p	16 52 4.851	+ 0.115	+14 58 27.09	+ 0.44	22714	152308
1441	53 Her	5.32	F0	16 52 58.057	- 0.711	+31 42 6.03	- 1.70	22752	152598
1442	$\iota$ Oph	4.38	B8	16 54 0.482	- 0.343	+10 9 55.16	- 3.58	22775	152614
633	$\kappa$ Oph	3.20	K0	16 57 40.102	- 1.969	+ 9 22 30.09	- 1.05	22862	153210
1444	24 G. Ara	5.54	B9	16 58 17.950	- 0.090	-50 38 28.44	- 4.12	22841	152824
631	$\zeta$ Ara	3.13	K5	16 58 37.208	- 0.232	-55 59 24.51	- 3.61	22845	152786
632	$\epsilon^1$ Ara	4.06	K2	16 59 35.066	+ 0.045	-53 9 37.82	+ 1.68	22869	152980
634	$\epsilon$ Her	3.92	A0	17 0 17.380	- 0.362	+30 55 35.10	+ 2.76	22935	153808
1443	51 G. Aps	6.91	F8	17 0 54.600	- 1.087	-76 13 7.51	- 15.87	22832	152260
1445	30 Oph	4.82	K0	17 1 3.598	- 0.272	- 4 13 21.43	- 7.49	22937	153687
1446	59 Her	5.29	A2	17 1 36.362	+ 0.024	+33 34 5.83	+ 0.18	22975	154029
1448	Pi 16 <sup>h</sup> 307 Her	6.43	A0	17 5 4.952	+ 0.054	+43 48 44.12	+ 0.02	23073	154713

(8) : 0.9-1.8 + 5.4

Слика 1.1. Изглед парне странице у каталогу FK5.

Иначе, на непарним страницама се налазе положаји за равnodневицу и епоху B1950.0, затим, средње епохе опажања, средње квадратне грешке положаја и сопствених кретања, као и ознаке звезда по Бонском прегледу.

Пети Фундаментални каталог састоји се из два дела који су дати у посебним публикацијама. Основни каталог FK5, који је резултат ревидирања FK4, садржи средње положаје и сопствена кретања 1535 класичних фундаменталних звезда које су такође укључене у FK4 и у FK3. Формирање овог дела FK5 детаљно је приказано у уводу каталога (Fricke и др. 1988), на чему ћемо се посебно задржати.

Други део FK5 садржи средње положаје и сопствена кретања нових фундаменталних звезда са магнитудама реда 5.5 до око 9.5. Нове фундаменталне звезде су изабране из FK4 Sup и из листе Међународних Референтних Звезда (IRS), углавном према историјату њихових опажања. Послови у вези овог дела FK5 (који може скраћено да се означи као "FK5 Ext") урађени су у сарадњи са Вашингтонском Навал опсерваторијом. Нове фундаменталне звезде објављене су у посебној публикацији, углавном због тачности њихових положаја и сопствених кретања која је знатно нижа од тачности основних фундаменталних звезда. Нове фундаменталне звезде репрезентују FK5 у највећој могућој мери, мада нису имале учешћа у формирању овог каталошког система. Детаљи који се односе на формирање каталога FK5 Ext дати су у његовом уводу (Fricke и др. 1991).

Успут треба споменути да су објављени изведени положаји и сопствена кретања за 995 FK4 Sup звезда (Schwan и др. 1993) које нису укључене у FK5 Ext. Подаци се односе на равnodневицу и епоху J2000.0 и B1950.0, а привидне величине звезда се крећу од 3.6 до 7.7. Ове звезде не треба сматрати саставним делом FK5.

### 1.3.1. Основни каталог FK5.

*Равnodневица и екватор FK5* су дати положајима и сопственим кретањима звезда фундаменталног каталога, чиме је имплицитно дефинисана нулта тачка ректасцензија и деклинација каталога. Ова нулта тачка ће се у највећој могућој мери поклапати са средњим екватором који су дефинисани динамиком планетарног система. На основи анализе апсолутних опажања Сунца, планета и малих планета, из дискусије Месечевих окултација и из студије самих FK4 сопствених кретања, одређена је корекцију  $E(T)$  за нулту тачку FK4 ректасцензија (Fricke 1980). Како је показано (Fricke 1982), за FK4 ова нулта тачка ректасцензија знатно одступа од динамичког екваторског. У FK5 је уведена поправка положаја равnodневице FK4 каталога за епоху 1950.0, дефинисана формулом

$$E(T) = +0^{\circ} 035 + 0^{\circ} 085(T - 1950),$$

где је  $T$  дато у вековима. Дакле, ако се полази од епохе 1950.0, ректасцензије у FK4 треба повећати за  $+0^{\circ}035$ , а вековна сопствена кретања по ректасцензији за  $+0^{\circ}085$ .

Иначе, из најновијих опажања није уочена потреба да се уведе корекција положаја екватора FK4.

Изрази за општу прецесију користе се за рачунање положаја у било ком тренутку. Сопствена кретања која су дата у фундаменталном каталогу суштински зависе од вредности прецесије која је усвојена при формирању каталога. Прецесиона величина на којој се базира FK5 дефинисана је у IAU (1976) систему астрономских константи. Корекција за општу прецесију у лонгитуди усвојена је у новом систему на основи поправке  $\Delta p_1 = +1''.10/cy$  Њукомбове вредности за луни-соларну прецесију. Ово је, дакле, поправка по stoleћу. Такође је узета у обзир и мања поправка  $\Delta q_1 = -0''.029/cy$  (по stoleћу) за планетску прецесију, која је резултат исправљања маса планета. Финални извештај о одређивању нове вредности за изразе прецесије дао је Лиске са групом аутора (Lieske и др. 1977).

Одређивање систематских и индивидуалних разлика FK5 – FK4 урађено је са средњим еквинокцијем и екватором за B1950.0, уз уобичајено коришћење Њукомбове константе прецесије. Нова вредност прецесионе величине уведена је за трансформацију средњих положаја и сопствених кретања са епохе B1950.0 на J2000.0.

Систем FK5 заснован је на апсолутним и квази-апсолутним каталозима који имају епоху после 1900. године; укупно око 85 каталога урађених од 1900. до приближно 1980. године. Опажања представљена у овим каталозима вршена су на меридијанским круговима, вертикалним круговима, пасажним инструментима и астролабима. Каталогски који су већ компилирани од стране аутора (тј. каталози који резултирају из опажања на астролабима или из опажања у оквиру службе времена) коришћени су без поновне анализе каталога који су ушли у компилацију.

Систем FK5 изведен је из одређивања систематских поправака FK4. Систематска разлика Cat – FK4 одређивана је из око 85 одговарајућих апсолутних и квази-апсолутних каталога и изведена коришћењем нове аналитичке методе (Bien и др. 1977). Релација Cat – FK4, која је садржала средњу епоху каталога, свођена је на нул-пункт FK4. Одређивање корекција еквинокција и екватора FK4 разматрано је као посебан задатак

На основи ових редукованих релација Cat – FK4 одређиване су систематске поправке FK4 положаја и сопствених кретања уз примену нове аналитичке методе (Schwan 1983). Од 85 релевантних каталога нису сви садржали обе координате, ректасцензију и деклинацију; употребљено је 70 каталога за добијање систематских корекција ректасцензије FK5 – FK4 и више од 50 каталога за деклинацију.

Средња грешка система  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\mu$  и  $\mu'$  каталога FK5 процењена је из дисперзија си-

стема појединачних апсолутних и квази-апсолутних каталога у односу на средњи систем. Приложена Таблица 1.4. садржи средњу епоху опажања ректасцензија и деклинација као и одговарајуће просечне средње грешке система положаја и сопствених кретања за одређену деклинацијску зону. У ову вредност није укључена средња грешка добијена као резултат појединачних поправака (штампана за сваку фундаменталну звезду у каталогу), као ни средње грешке екваторске и екватора. Треба напоменути да подаци ове таблице показују највишу астрометријску тачност која је до сада постигнута из терестричких оптичких мерења.

*Индивидуалне поправке положаја и сопствених кретања фундаменталних звезда* одређене су из свих опажања која су постала доступна после комплетирања FK4.

За одређивање индивидуалних поправака на располагању је било око 90 каталога. Сви ови каталози су редуковани на систем FK4 одређивањем и елиминацијом систематских разлика  $Cat - FK4$ . Остаци који су добијени после овакве редукције чинили су основни материјал за извођење индивидуалних корекција FK4 положаја и сопствених кретања. Тежине за сваку звезду у каталогу при одређивању поправака ректасцензија (и деклинација) означавају се у сагласности са формулом

$$w = \epsilon_0^2 (a^2 + b^2/n)^{-1},$$

где  $\epsilon_0$  представља Ауверсову вредност средње грешке јединице тежине ( $0^{\circ}0381$  за  $\alpha$  и  $0''396$  за  $\delta$ ) а  $n$  је број опажања звезде. Параметри  $a$  и  $b$  су типични за сваки каталог (и посебно за координату  $\alpha$  или  $\delta$  у каталогу). Зато су посебно одређивани за сваки каталог (и посебно за ректасцензију и деклинацију у датом каталогу) на основи анализе остатака  $Cat - FK4$  (редукованих на FK4 систем).

У FK5 је средња грешка индивидуалних положаја и сопствених кретања као и средња епоха положаја добијена као резултат решавања нормалних једначина. Мада се ове грешке држе доста слично за сваку звезду, уочено је да се њихова просечна вредност повећава за звезде јужније од  $-30^{\circ}$ . Пошто су нам интересантне само звезде које видимо са наших ширина, у последњем реду Таблице 1.5. даје се просечна вредност средње грешке положаја и сопствених кретања звезда чије су деклинације изнад  $-30^{\circ}$ .

*Систематске разлике FK5 - FK4* положаја и сопствених кретања су представљене, прво, преко коефицијената функција за представљање аналитичким методом, а затим су дате табулиране вредности за средњу епоху и равнодневицу B1950.0. Ова равнодневица је изабрана понајвише због тога што је до сада најчешће коришћена у редукцијама. Између осталог, средња епоха FK5 система је, за велики део неба, довољно блиска 1950 - ој години, тако да систематске поправке положаја за ову епоху садрже врло мали део поправака сопствених кретања.

Систематске разлике FK5 – FK4 дате у овом каталогу представљају само регионалне грешке у FK4. У ове вредности нису укључене корекције његовог екваторског и његово фиктивно кретање, као ни измене које су уведене у FK5 са новим IAU (1976) системом астрономских константи. (Те измене се односе на елиминацију чланова елиптичке аберације из средњих положаја звезда и на корекцију сопствених кретања у сагласности са увођењем нових прецесионих вредности.)

*Трансформисање положаја и сопствених кретања са FK4 на систем FK5* и прелазак на J2000.0 разматран је последњих година у различитим чланцима и од стране разних аутора. Како ствари за сада стоје, ипак нема опште усвојене процедуре која би се примењивала за разне типове опажања дате у постојећим каталозима. У сваком случају, потребна је детаљна анализа података датих у неком каталогу да би се одредила најприхватљивија процедура за сваки каталог посебно; у случају опажања VLBI (Very Long Baseline Interferometry), на пример, најпре треба испитати колико је нул-пункт ректасцензија фиксиран. Следећа процедура може да се примени за трансформацију опажачких каталога који имају положаје за средњу епоху опажања и у систему FK4:

- 1) Сваку звезду треба превести (користећи вредност прецесије усвојену у том каталогу) са екваторског каталога на средњи екваторски који се поклапа са средњом епохом звезде; резултујући положај је практично независан од било које прецесионе вредности.
- 2) Средњи положаји звезда у каталозима објављеним пре 1984. године садрже чланове елиптичке аберације. Ове чланове треба елиминисати из средњих положаја звезда.
- 3) Затим треба применити поправку екваторског рачунату за средњу епоху звезде и систематску поправку FK5 – FK4.
- 4) Поправљени положај треба превести на нови стандардни екваторски J2000.0 користећи прецесионе величине које су усвојене у IAU (1976) систему астрономских константи.

### 1.3.2. Проширење FK5 каталога (FK5 Ext).

*Увођење нових звезда у FK5 систем* било је потребно, јер је један од недостатака FK4 његово ограничење на звезде сјајније од привидне величине 7.5, при чему је свега око 200 звезда слабије од шесте величине. Основна намена другог дела Петог фундаменталног каталога је да се FK5 систем прошири до приближно 9.5 привидне величине. Ово проширење, FK5 Ext, садржи средње положаје и сопствена кретања 3117 нових фундаменталних звезда углавном од 4.5 до 9.5 привидне величине. Средња привидна величина у FK5 Ext износи 7.2 и она је у просеку за 2.5 магнитуде слабија од оне у основном FK5, чија је средња привидна величина 4.7.

Додавањем нових звезда повећава се густина фундаменталних звезда на небу, па



имамо приближно, уместо једне звезде на 25 квадратних степени у FK4, три звезде на 25 квадратних степени у новом фундаменталном каталогу (FK5 + FK5 Ext).

Разумљиво да је тачност средњих положаја и сопствених кретања у FK5 Ext знатно нижа него тачност података у основном FK5. Ово је последица доста мањег броја опажања нових фундаменталних звезда.

*Опажачки материјал* нових фундаменталних звезда коришћен је према листи Међународних референтних звезда (IRS) која садржи звезде AGK3R и SRS каталога. Због тога што је само мали број звезда из ове листе сјајнији од седме привидне величине, било је потребно укључити и звезде из FK4 Sup, у коме већина звезда има привидну величину између 4.5 и 7.0, да би се постигла што равномернија расподела између IRS и основног FK5.

Сви релевантни опажачки каталози урађени у току последњих стотину година су прегледани и идентификоване су звезде које се налазе у IRS и FK4 Sup како би се добио довољан број нових фундаменталних звезда. За ове потребе коришћено је 78 каталога.

*Редукција опажања* је урађена тако што су положаји и сопствена кретања звезда FK5 Ext прво изведени у систему FK4, усвајајући еквинокциј B1950.0. При томе је, ипак, коришћена Њукомбова вредност константе опште прецесије. Сви каталожки положаји прво су редуковани на ту епоху.

Ова редуција била је релативно лака у случају звезда FK4 Sup, чије су магнитуде поређане углавном унутар магнитуда FK4 звезда. Систематске разлике Cat – FK4 које су одређене на основи FK4 звезда у каталогу могле су се зато директно користити за редуцију опажаних положаја на FK4 систем.

Највише звезда у IRS листи, свакако, налази се ван граница магнитуда FK4 и директна редуција на FK4 систем зато није могућа. За те звезде одговарајући *основни систем* прво је формиран коришћењем каталога који су опажани са застором. Ови каталози су усвојени без једначине сјаја, па су сјајне и слабе звезде једног каталога у истом систему. Систематска разлика Cat – FK4 одређена је по звездама FK4 које су коришћене за трансформацију на FK4 систем. За северно небо опажано је десет каталога са застором и они су редуковани на FK4 систем. Из тог материјала средњи положаји и сопствена кретања за 5590 звезда AGK3R су изведени проширивањем FK4 система на слабије звезде. Ове звезде су дефинисале *северни основни систем*, који је коришћен за редуцију других каталога (који нису опажани са застором) на FK4 систем.

За јужно небо био је потребан додатни корак, јер су од  $-30^\circ$  према југу опажана само три каталога са застором, што је био недовољан број за извођење средњег положаја и сопствених кретања. Послови око формирања северног основног система заснивали су се на каталозима који су опажани безличним микрометром, па се једначина сјаја углавном није

мењала са деклинацијом. Мали број звезда у јужним каталозима опажаних безличним микрометром редукован је на FK4 систем одређивањем њиховог систематског односа према северном основном систему (који је углавном био дефинисан за деклинације северно од око  $-30^\circ$ ) и екстраполацијом једначине сјаја, одређене за звезде северно од  $-30^\circ$ , на јужне деклинације. Седам јужних каталога су додатно редуковани таквим путем на FK4 систем, па су изведени средњи положаји и сопствена кретања за 4708 звезда. Овај *јужни основни систем* репродукује FK4 систем на слабе звезде и коришћен је у комбинацији са FK4 и побољшаним FK4 Sup за свођење још око 75 каталога на FK4 систем.

*Метод најмањих квадрата* је примењен за добијање положаја и сопствених кретања нових фундаменталних звезда. Сви каталози који су употребљени за формирање FK5 Ext редуковани су на FK4 систем, како је горе описано, и односе се на средњи еквинокцијум и екватор B1950.0. Ова опажана су основни материјал за положаје и сопствена кретања публиковане у овом каталогу. Методом најмањих квадрата уз увођење тежина изведени су средњи положаји и сопствена кретања за све звезде из FK4 Sup и IRS листе.

Расподела средњих грешака положаја и, делимично, сопствених кретања прилично је хомогена, зависно углавном од историјата опажана звезда из FK4 Sup и са IRS листе. Ту је такође и значајна разлика у тачности за звезде северно и јужно од  $-30^\circ$  деклинације. Вредности дате у следећој табlici су средње вредности преко целог неба, а фактор  $\cos \delta$  је укључен у грешке средњих положаја (важећи за средњу епоху опажана) и сопствених кретања по ректасцензији:

$(T_s)_\alpha$	$(T_s)_\delta$	$m_\alpha \cos \delta$	$m_\mu \cos \delta / \text{cy}$	$m_\delta$	$m_\mu' / \text{cy}$
1946	1942	$\pm 0^{\circ}0034$	$\pm 0^{\circ}0162$	$\pm 0''.059$	$\pm 0''.267$

Треба уочити да је тачност положаја и сопствених кретања нових фундаменталних звезда знатно мања од тачности класичних фундаменталних звезда.

*Избор нових фундаменталних звезда* је извршен у складу са њиховим средњим грешкама положаја и сопствених кретања, као и по распореду на небу у складу са привидним величинама. На крају се испоставило да су укључене 992 звезде из FK4 Sup и 2125 звезда са IRS листе, што у FK5 Ext чини 3117 нових фундаменталних звезда.

*Систем каталога FK5 Ext* је изведен тако што су положаји и сопствена кретања најпре добијени у систему FK4 базирани на Њукомбовој вредности опште прецесије. Ови положаји и сопствена кретања су трансформисани са новим IAU стандардима који укључују увођење нових вредности за општу прецесију, корекцију за грешку еквинокција FK4 и њено фиктивно кретање, прелазак на FK5 систем користећи разлике FK5 – FK4 које су дате у Основном FK5 каталогу, као и елиминацију елиптичке аберације из средњих положаја. Сопствена кретања су дата за јулијанско столеће.

#### 1.4. Грешке положаја.

У каталогу се обично уз сваку звезду, поред података о положају, сопственом кретању, броју опажања и средњој епохи, бележе подаци о средњим грешкама положаја и сопствених кретања звезда. Ове индивидуалне средње грешке заједно са средњим грешкама система каталога дају представу о тачности положаја звезда. (Као што је раније речено, овде термин "систем каталога" указује на свеукупност података који дефинишу звездане положаје оптерећене и систематским грешкама. У том смислу треба правити разлику између *система каталога* и *референтног система*.) Пошто се систем каталога добија из многобројних опажања звезда у току дужег временског интервала, уобичајено је да се средње грешке система каталога дају у посебним таблицама преко средњих квадратних грешака система ректасцензија, деклинација и сопствених кретања, са податком о средњој епохи опажања.

Систематске грешке се добијају уз помоћ заједничких звезда у датим каталозима и изражавају се преко разлика њихових положаја, које су усредњене по зонама. Ове разлике се могу употребити за прелазак са система једног каталога на систем другог, односно, за свођење на систем изабраног каталога. На пример, користећи систематске разлике (FK5 – FK4), (FK4 – FK3) и (FK3 – NFK), могу се на посредан начин израчунати разлике (FK5 – NFK). Ове последње треба сматрати поправкама NFK каталога и оне представљају свођење положаја звезда NFK на систем каталога FK5.

Предмет нашег интересовања у овом раду су одређивања скретања вертикала у Србији, која је почетком века радио С.П. Бошковић. У Бошковићевом опажачком програму налазиле су се само сјајне звезде, које припадају групи такозваних Ауверсових звезда. То су звезде које се налазе у каталогу NFK и означене су у FK5 бројевима од 1 до 925. Због тога следи разматрање случајних и систематских грешака положаја ових звезда.

##### 1.4.1. Случајне грешке положаја фундаменталних звезда.

У односу на неки идеални систем, средња грешка положаја звезде ће садржати део који представља средњу грешку самог система фундаменталног каталога и део који представља индивидуалну средњу грешку положаја у датом систему (Mueller 1969)

$$E^2 = m^2 + M^2 . \quad (1.1)$$

При томе, средња грешка система  $m$  за епоху  $T$  израчунава се по формулама

$$(m_{\alpha} \cos \delta)_T^2 = (m_{\alpha} \cos \delta)_{T_0}^2 + \left(\frac{T - T_{s\alpha}}{100}\right)^2 (m_{\mu} \cos \delta)^2, \quad (1.2)$$

$$(m_{\delta})_T^2 = (m_{\delta})_{T_0}^2 + \left(\frac{T - T_{s\delta}}{100}\right)^2 (m'_{\mu})^2, \quad (1.3)$$

а индивидуална средња грешка положаја звезде у том систему  $M$  за исту епоху по формулама

$$(M_{\alpha} \cos \delta)_T^2 = (M_{\alpha} \cos \delta)_{T_0}^2 + \left(\frac{T - T_{0\alpha}}{100}\right)^2 (M_{\mu} \cos \delta)^2, \quad (1.4)$$

$$(M_{\delta})_T^2 = (M_{\delta})_{T_0}^2 + \left(\frac{T - T_{0\delta}}{100}\right)^2 (M'_{\mu})^2. \quad (1.5)$$

Средње грешке FK4 и FK5 система наведене су у предговорима ових каталога. Како је овде грешка система нумерички приближна просечној вредности индивидуалне грешке положаја звезде у каталогу, можемо претпоставити да исто важи за NFK и FK3 систем, с обзиром на начин формирања система. Што се тиче NFK, вредности су израчунате полазећи од чињенице да су грешке положаја његових звезда 1.5 пута веће од оних у FK3, док су грешке сопствених кретања веће 1.8 пута. Ови подаци се налазе уз таблицу која приказује средње грешке координата и вековних сопствених кретања звезда у каталогу FK3 (Зверев 1950, стр. 78). (Иначе, вредности у Таблици 1.1. и 1.2. изведене су на основи ове таблице.)

У наредне четири таблице дате су грешке система NFK, FK3, FK4 и FK5 са одговарајућим средњим епохама опажања. Ове епохе се односе на звезде чији су положаји коришћени за формирање система каталога.

Вредности у Таблици 1.3. преузете су из Увода за каталог FK4 (стр. 8), а вредности у Таблици 1.4. из Увода за каталог FK5 (стр. 7).

У првој колони је ознака деклинацијске зоне. Друга и трећа садрже податке који се односе на епоху система. У четвртој и шестој колони су грешке система положаја, а у петој и седмој грешке система сопствених кретања.

**Таблица 1.1.**

*Средње епохе и просечне средње грешке NFK система.*

Decl	$(T_s)_\alpha$	$(T_s)_\delta$	$m_\alpha \cos \delta$	$m_\mu \cos \delta / \text{cy}$	$m_\delta$	$m_{\mu'} / \text{cy}$
+50°	1870	1870	±0:003	±0:022	±0".05	±0".29
0°	1870	1870	±0:003	±0:018	±0".05	±0".25

**Таблица 1.2.**

*Средње епохе и просечне средње грешке FK3 система.*

Decl	$(T_s)_\alpha$	$(T_s)_\delta$	$m_\alpha \cos \delta$	$m_\mu \cos \delta / \text{cy}$	$m_\delta$	$m_{\mu'} / \text{cy}$
+50°	1900	1900	±0:002	±0:012	±0".03	±0".16
0°	1900	1900	±0:002	±0:010	±0".03	±0".14

**Таблица 1.3.**

*Средње епохе и просечне средње грешке FK4 система.*

Decl	$(T_s)_\alpha$	$(T_s)_\delta$	$m_\alpha \cos \delta$	$m_\mu \cos \delta / \text{cy}$	$m_\delta$	$m_{\mu'} / \text{cy}$
+70°	1935	1925	±0:002	±0:008	±0".016	±0".07
+50°	1935	1925	±0:003	±0:010	±0".016	±0".05
+20°	1935	1925	±0:002	±0:008	±0".015	±0".06
0°	1935	1925	±0:001	±0:006	±0".014	±0".05
-20°	1935	1925	±0:002	±0:012	±0".020	±0".08

**Таблица 1.4.**

*Средње епохе и просечне средње грешке FK5 система.*

Decl	$(T_s)_\alpha$	$(T_s)_\delta$	$m_\alpha \cos \delta$	$m_\mu \cos \delta / \text{cy}$	$m_\delta$	$m_{\mu'} / \text{cy}$
+70°	1943	1935	$\pm 0^{\circ}001$	$\pm 0^{\circ}005$	$\pm 0''01$	$\pm 0''05$
+40°	1945	1935	$\pm 0^{\circ}001$	$\pm 0^{\circ}004$	$\pm 0''01$	$\pm 0''04$
0°	1943	1938	$\pm 0^{\circ}001$	$\pm 0^{\circ}003$	$\pm 0''01$	$\pm 0''04$
-20°	1945	1943	$\pm 0^{\circ}001$	$\pm 0^{\circ}004$	$\pm 0''01$	$\pm 0''04$

Подаци из каталога FK3, FK4 и FK5 омогућавају да се израчунају просечне вредности индивидуалних средњих грешака положаја и сопствених кретања звезда за сваки каталог посебно. За наше рачунање у обзир су узете Ауверсове звезде са деклинацијама изнад  $-20^\circ$ , јер се међу њима налазе и оне које је Бошковић користио у својим одређивањима.

Таблица 1.5. приказује резултате које смо добили. У првој колони је ознака каталога. Друга и трећа колона садрже просечне вредности средњих епоха опажања звезда  $(T_0)_\alpha$  и  $(T_0)_\delta$ . У четвртој и шестој колони су просечне индивидуалне грешке ректасцензија и деклинација  $M_\alpha \cos \delta$  и  $M_\delta$ , док су у петој и седмој колони одговарајуће грешке сопствених кретања по stoleћу  $M_\mu \cos \delta / \text{cy}$  и  $M_{\mu'} / \text{cy}$ . Треба напоменути да смо грешке у NFK процењивали на основи грешака FK3.

**Таблица 1.5.**

*Просечне вредности индивидуалних средњих грешака положаја и сопствених кретања Ауверсових звезда са деклинацијама изнад  $-20^\circ$ .*

Cat	$(T_0)_\alpha$	$(T_0)_\delta$	$M_\alpha \cos \delta$	$M_\mu \cos \delta / \text{cy}$	$M_\delta$	$M_{\mu'} / \text{cy}$
NFK	1870	1870	$\pm 0^{\circ}0030$	$\pm 0^{\circ}0200$	$\pm 0''050$	$\pm 0''270$
FK3	1901	1897	$\pm 0^{\circ}0019$	$\pm 0^{\circ}0110$	$\pm 0''031$	$\pm 0''151$
FK4	1915	1911	$\pm 0^{\circ}0014$	$\pm 0^{\circ}0063$	$\pm 0''024$	$\pm 0''097$
FK5	1950	1939	$\pm 0^{\circ}0008$	$\pm 0^{\circ}0028$	$\pm 0''017$	$\pm 0''051$

Подаци из Таблица 1.1. до 1.5. су послужили да уз помоћ формула (1.1) до (1.5) добијемо просечне средње грешке положаја звезда које Бошковић користи у својим одређивањима скретања вертикала у Србији. Грешке су рачунате за почетак XX века: управо за средњу епоху Бошковићевих радова, која приближно износи 1906.0.

У Таблици 1.6. су приказане просечне средње грешке ректасцензија ( $E_\alpha \cos \delta$ ) и деклинација ( $E_\delta$ ) у односу на идеални систем рачунате за каталоге NFK, FK3, FK4 и FK5.

**Таблица 1.6.**

*Просечне средње грешке положаја звезда које Бошковић користи у својим астрогеодетским одређивањима – епоха 1906.0.*

Cat	$E_\alpha \cos \delta$	$E_\delta$
NFK	$\pm 0^{\circ}015$	$\pm 0''20$
FK3	$\pm 0^{\circ}004$	$\pm 0''06$
FK4	$\pm 0^{\circ}004$	$\pm 0''03$
FK5	$\pm 0^{\circ}003$	$\pm 0''03$

#### 1.4.2. Систематске грешке положаја фундаменталних звезда.

Пошто су процењене случајне грешке положаја звезда које су носиоци фундаменталних система NFK, FK3, FK4 и FK5, следећи корак је одређивање систематских грешака фундаменталног каталога NFK. Узимајући FK5 као реперни каталог, ове грешке би биле представљене као систематске разлике NFK – FK5. С обзиром да је за нас интересантно свођење Бошковићевих опажања на систем каталога FK5, тражене су, заправо, поправке система NFK. Другим речима, рачунате су разлике FK5 – NFK по одговарајућим параметрима. Ово рачунање се одвијало по следећим етапама: 1) свођење FK4 на FK5; 2) свођење FK3 на FK4; 3) свођење NFK на FK3. Имајући у виду средњу епоху Бошковићевих опажања, свођење NFK на FK5 рађено је за епоху  $T = 1906.0$ .

1) Што се тиче система FK4, најпре је поправљен положај тачке пролећне равнодневице по формули

$$E(T) = +0.035 + 0.085 \left( \frac{T - 1950}{100} \right), \quad (1.6)$$

а затим је израчунато свођење FK4 на систем FK5 (разлике FK5 – FK4). При томе је екватор FK4 остао неизмењен.

Регионалне разлике каталога FK5 – FK4, утабличене на страницама 87 – 90 каталога FK5, коришћене су за налажење разлика ректасцензија и деклинација ова два система по класичним формулама:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha \cos \delta)_{1950} &= [(\Delta\alpha_\alpha + \Delta\alpha_\delta + \Delta\alpha_m) \cos \delta]_{1950} \\ \Delta\mu \cos \delta &= (\Delta\mu_\alpha + \Delta\mu_\delta + \Delta\mu_m) \cos \delta; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\delta)_{1950} &= [\Delta\delta_\alpha + \Delta\delta_\delta + \Delta\delta_m]_{1950} \\ \Delta\mu' &= (\Delta\mu'_\alpha + \Delta\mu'_\delta). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Свођење систематских разлика на епоху  $T$  рађено је без фактора  $\cos \delta$ :

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)_T &= (\Delta\alpha)_{1950} + \Delta\mu \left( \frac{T - 1950}{100} \right) \\ (\Delta\delta)_T &= (\Delta\delta)_{1950} + \Delta\mu' \left( \frac{T - 1950}{100} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

2) Приликом свођења система FK3 на систем каталога FK4 треба имати у виду да је поправљан екватор према формули

$$D(T) = -0''.017 + 0''.097 \left( \frac{T - 1928.4}{100} \right), \quad (1.10)$$

с тим што је ова поправка на половима теоријски једнака нули.

Регионалне грешке каталога FK3, односно, разлике FK4 – FK3 за 1950. годину дате су на страницама 131 – 134 каталога FK4. Рачун је, за епоху 1906.0, обављен према формулама (1.7), (1.8) и (1.9), с тим што је узето у обзир да су вредности  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\mu$  за звезде са деклинацијама већим по апсолутној вредности од  $60^\circ$  свођене на екватор (множење фактором  $\cos \delta$ ).

3) Поправке система NFK дате су директно на странама 84 – 87 каталога FK3 у Таблици 3 која садржи разлике од 1800. до 1930. године. Мада у таблицама то није експлицитно назначено, из поступка обраде материјала који је коришћен за поправљање система NFK може се закључити да су разлике  $\Delta\alpha_\delta$  за деклинације између  $-60^\circ$  и  $+60^\circ$  дате непосредно, док су за деклинације ван овог интервала сведене на екватор.



Таблица 1.7.

Систематске разлике  $\Delta\alpha$  - свођење NFK на FK5 систем за епоху 1906.0.

$\alpha \setminus \delta$	+70°	+50°	+30°	+10°	-10°
0 <sup>h</sup>	-0°196	-0°073	-0°060	-0°051	-0°043
4 <sup>h</sup>	-0°201	-0°073	-0°064	-0°057	-0°049
8 <sup>h</sup>	-0°225	-0°088	-0°080	-0°073	-0°064
12 <sup>h</sup>	-0°217	-0°084	-0°066	-0°062	-0°055
16 <sup>h</sup>	-0°217	-0°087	-0°070	-0°064	-0°059
20 <sup>h</sup>	-0°204	-0°074	-0°060	-0°051	-0°044
$\Delta\alpha_\delta$	-0°210	-0°080	-0°067	-0°060	-0°052

Таблица 1.8.

Систематске разлике  $\Delta\delta$  - свођење NFK на FK5 систем за епоху 1906.0.

$\alpha \setminus \delta$	+70°	+50°	+30°	+10°	-10°
0 <sup>h</sup>	+0''10	+0''15	+0''10	+0''25	+0''08
4 <sup>h</sup>	+0''10	+0''18	+0''09	+0''25	+0''10
8 <sup>h</sup>	-0''02	+0''04	-0''03	+0''11	-0''01
12 <sup>h</sup>	+0''05	+0''10	+0''04	+0''18	+0''03
16 <sup>h</sup>	+0''07	+0''16	+0''11	+0''24	+0''11
20 <sup>h</sup>	+0''06	+0''05	-0''02	+0''13	+0''02
$\Delta\delta_\delta$	+0''06	+0''11	+0''05	+0''19	+0''06

Дакле, подаци приложени уз фундаменталне каталоге FK5, FK4 и FK3 послужили су нам за састављање Таблица 1.7. и 1.8. у којима су приказане систематске разлике положаја FK5 – NFK за епоху 1906.0 у деклинацијским зонама од  $-20^\circ$  до  $+80^\circ$ .

У Таблицама 1.7. и 1.8. су разлике  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  раздељене по деклинацијским и ректасцензијским зонама. На тај начин се добија детаљнија слика о систематским грешкама NFK каталога, који је овде упоређен са FK5. У првом реду и једне и друге таблице означена је средина двадесетостепене деклинацијске зоне, а у првој колони средина четворочасовне зоне по ректасцензији. У последњем реду обеју таблица дају се разлике по деклинацији усредњене за свих шест ректасцензијских зона.

*Таблице 1.7. и 1.8. представљају свођење NFK на систем каталога FK5 и заједно са Таблицом 1.6. ће послужити за процењивање утицаја грешака координата звезда на резултате Бошковићевих астрогеодетских одређивања.*

## 2. Диференцијални звездани каталози.

### Каталог геодетских звезда.

За разлику од фундаменталног каталога, чијим се формирањем добија посебан, оригинални систем координата (тзв. *фундаментални систем*), изведени каталог се даје у већ познатом систему. Изведени каталог је резултат обједињавања диференцијалних каталога једног истог списка звезда. Ове звезде се опажају у јединственом фундаменталном систему на више опсерваторија и са приближно једнаким епохама опажања. Тиме се постиже повишење тачности у односу на случајне грешке и смањује се утицај систематских грешака појединих опажачких каталога који не понављају у потпуности упоришни фундаментални систем небеских координата (Подобед 1968, стр. 335 – 336). У изведеном каталогу се обично наводе сопствена кретања добијена додавањем и коришћењем других извора.

Основни циљ формирања изведених каталога је проширење постојећег фундаменталног система (*референтне основе*) на већи број звезда ради извршења неких специфичних послова.

Као пример изведеног каталога може се узети Каталог геодетских звезда (КГЗ) који репродукује FK5 фундаментални систем и садржи близу 5000 сјајних звезда до шесте привидне величине. То је основни каталог за астрогодетска одређивања, па му је у овом поглављу посвећена посебна пажња.

Највећи број звезданих каталога који су до скорашњег времена служили за формирање референтне основе добијани су из апсолутних и релативних опажања у меридијану, па ће најпре бити неколико речи о подели астрономских опажања и врстама каталога (Гуляев и Хоммик 1983, стр. 6 – 10).

Меридијански круг Астрономске опсерваторије у Београду коришћен је за добијање више каталога. Због тога ћемо направити кратак преглед опажачких радова на поменутом инструменту.

О првобитном КГЗ (Каталог 2957 сјајних звезда), у тексту који следи, дају се многи подаци узети из његовог увода (Шиммерман 1948, стр. 8 – 15).

После тога је приказан актуелни КГЗ (Каталог 4949 геодетских звезда) са детаљним описом рачунања и формирања овог изведеног каталога.

## 2.1. Апсолутна и релативна опажања.

У зависности од инструмента, астрометријска опажања са Земље могу да се обављају: *а*) у свакој тачки неба (рефрактор, рефлектор), *б*) на једнаким висинама (астролаб, циркумзенитал), *в*) у меридијану (меридијански круг, пасажни инструмент, вертикални круг, зенит-телескоп, фотографски зенит-телескоп). Уз ово треба поменути да су могућа и опажања у првом вертикалу, али су она доста ретка.

Координате звезда су у највећем броју случајева добијане из опажања на меридијанским инструментима, јер ту је положај звезде такав да се она врло једноставно прати, формуле за обраду нису компликоване, а конструкција инструмента се доста упрошћава. Ова опажања се деле на апсолутна, квази-апсолутна и релативна, односно, диференцијална.

*Апсолутна* опажања подразумевају добијање координата небеских тела независно од раније одређених координата ових или неких других објеката. Често су координате звезда познате до одређеног степена тачности, па је потребно наћи побољшање њихових положаја. У том случају апсолутна опажања треба да дају независне поправке. Апсолутна опажања и апсолутни звездани каталози се користе за формирање и побољшање референтне основе.

При *релативним*, или *диференцијалним* опажањима координате некаквих небеских објеката (програмских) одређују се у односу на друге објекте (упоришне) чије су координате већ познате. Док се код добијања апсолутних каталога формира сопствени систем координата, јасно је да диференцијални каталози у већој или мањој мери репродукују упоришни систем.

Терестричка релативна опажања су кудикамо једноставнија од апсолутних, па су, не тако давно, масовна одређивања координата и специјална опажања појединих група звезда вршена релативном методом, која је много простија и економичнија. Зато је број звезда са релативним координатама био на стотине пута већи него са апсолутним.

Поред овога постоји и тзв. *квази-апсолутна* метода за одређивање координата звезда, која претпоставља да на екватору фундаментални каталог не захтева поправке, док се поправке по деклинацији у зонама близу полова добијају из опажања звезда у горњој и доњој кулминацији. Квази-апсолутна метода омогућава да се у процес побољшања систематских грешака укључи већи број диференцијалних опажања.

На тај начин видимо да не постоји оштра граница између апсолутних и диференцијалних каталога. Апсолутни и диференцијални каталози добијени на једном инструменту појединачно, имају назив изворни или опажачки (у астрономској пракси употребљава се термин "посматрачки") каталози. За формирање фундаменталних каталога уобичајено су коришћени изворни апсолутни каталози, којима су додавана и диференцијална опажања.

Група диференцијалних каталога се, иначе, може објединити, па се тако добија изведени каталог. Према томе, звездани каталози се разврставају у три групе. То су: опажачки, изведени и фундаментални каталози.

Са појавом нових техника и премештањем астрометријских одређивања у васионски простор, треба очекивати нешто измењену поделу звезданих каталога.

### 2.1.1. Опажања на Меридијанском кругу у Београду.

Меридијански круг Београдске опсерваторије је типичан инструмент за астрометријска опажања. Произвела га је фирма "Askania" Bamberg почетком двадесетих година овога века. Отвор објектива је 190 mm, а жижна даљина износи 2578 mm (Šaletić 1968). Круг са поделом, пречника 800 mm, чврсто је везан за обртну осовину. Два носача у облику добоша, на које се ослањају крајеви обртне осовине, имају на себи по четири микроскоп-микрометра за читавање лимбове поделе.

Овај инструмент, намењен одређивању координата небеских тела релативном методом, постављен је почетком шездесетих година. После испитивања органа и прибора инструмента и прелиминарних радова, почиње се са опажањима 1968. и она трају све до 1994. године, такоређи непрекидно. Урађено је седам опажачких звезданих каталога, а током две деценије редовно су вршена дневна опажања Сунца, планета и звезда.

У периоду 1968 – 1970. година опажају се звезде међународног програма ширинских звезда и добија диференцијални каталог деклинација (Sadžakov и Šaletić 1972) са 3941 програмском звездом и 216 упоришних звезда (систем FK4). Укупно је обрађено око 19000 пролаза кроз меридијан. Опажања су вршена у петостепеним зонама од +20° до +65° деклинације. Епоха каталога је 1969.5, а средња квадратна грешка једног опажања износи  $\epsilon_\delta = \pm 0''.34$ . Свака звезда је опажана у просеку четири пута. Овај каталог је узет у обзир при формирању FK5 проширења (види Fricke и др 1991, стр. 143, под бројем 331).

После припреме инструмента за релативна одређивања ректасцензија, од 1973. до 1980. године рађене су звезде из програма фотографских зенит-телескопа на северној хемисфери (NPZT). Каталог (Sadžakov и др 1981) је обухватао 1719 програмских и 350 упоришних звезда у систему FK4. Ректасцензије и деклинације звезда су добијене из око 12000 пролаза, са средњом епохом опажања 1977.9. Деклинације звезда су се кретале од +10° то +60°. Средња квадратна грешка једног одређивања ректасцензије износила је  $\epsilon_\alpha \cos \delta = \pm 0''.036$ , а деклинације  $\epsilon_\delta = \pm 0''.26$ . Свака звезда је посматрана шест пута. Добијене координате упоришних звезда су коришћене за побољшање индивидуалних положаја звезда референтне основе FK5 (види Fricke и др 1988, стр. 96, под бројем 250).

На предлог професора Зверјева да се визуелно опажају тесни парови двојних звезда,

чије компоненте фотографским или фотоелектричним путем не могу да се раздвоје, од 1981. до 1987. године одређивани су положаји двојних звезда (Sadžakov и Dačić 1990). Било је око 10500 опажања по обе координате (око четири посматрања сваке звезде), а обухваћена је широка деклинацијска зона од  $-30^\circ$  до  $+70^\circ$ . Средња епоха је 1983.9, а грешке једне ректасцензије и деклинације су  $\epsilon_\alpha \cos \delta = \pm 0''.028$  и  $\epsilon_\delta = \pm 0''.34$ , респективно. Поред 1571 програмске звезде било је 712 упоришних звезда. Сви положаји су по завршетку посла преведени са FK4 на систем FK5. Овај каталог, заједно са диференцијалним каталозима рађеним у Кијеву, Харкову, Одеси, Москви и Казању, послужио је за добијање прелиминарног изведеног каталога двојних звезда (Cvetković 1992).

Београдска опсерваторија је дала свој скромни допринос настојањима да се повежу оптичка и радио-интерферометријска опажања. То је, управо, био разлог израде каталога положаја упоришних звезда у околини радио-извора од 1982. до 1987. године (Sadžakov и др 1991). Програм је садржао 537 звезда, од тога 247 упоришних. Обрађено је 3000 меридијанских пролаза у деклинацијској зони од  $-35^\circ$  до  $+85^\circ$  и преведено на систем FK5. Средња епоха опажања је износила 1984.6, а грешка једног одређивања  $\epsilon_\alpha \cos \delta = \pm 0''.024$  и  $\epsilon_\delta = \pm 0''.30$ . Звезде су у опажачком програму биле подељене на две групе, па како су се неке од њих из техничких разлога нашле и у једној и у другој групи, број опажања звезде иде од четири до осам.

Звезде из програма Онджејевског фотографског зенит-телескопа опажане су у периоду 1985 – 1990. (Sadžakov и др 1992). Урађено је око 1500 пролаза 383 звезде, од чега су 160 биле из каталога FK5. Деклинацијска зона је била врло уска, од  $+49^\circ$  до  $+50^\circ$ , а магнитуда звезда је ишла до једанаесте привидне величине. Епоха је  $E_p = 1987.1$ . Средња квадратна грешка једног одређивања износи  $\epsilon_\alpha \cos \delta = \pm 0''.020$  и  $\epsilon_\delta = \pm 0''.30$ , за ректасцензију и деклинацију. С обзиром на овакве грешке, каталог није имао неку већу тежину, али постојао је интерес да се одреде положаји ових звезда у неком фундаменталном систему, јер оне својевремено нису ушле у NPZT програм због свог слабог сјаја.

У време док је сателит Hipparcos увећало скупљао податке, на Меридијанском кругу у Београду опажане су звезда високе луминозности (HLS) и радио-звезде (Sadžakov и др 1996). Истовремено је рађен проширени списак упоришних звезда у околини радио-извора (Sadžakov и др 1997). Због мале унутрашње тачности (прецизности) у односу на савремени ниво, ова два каталога нису имала неки значај за астрометријске потребе.

Упоредо са овим радовима, на Меридијанском кругу Београдске опсерваторије су обављана такозвана *дневна мерења*. Почев од 1974, па све до 1994. године опајано је Сунце, Меркур, Венера, Марс (од 1981.) и сјајне звезде које се могу видети на инструменту при дневној светлости. Из ових опажања су одређиване вредности  $(O - C)_\alpha$  и  $(O - C)_\delta$  за поменута тела Сунчевог система. Листа објављених резултата у Билтенима

Астрономске опсерваторије може се наћи у извештају за последњу годину опажања (Даџић и др 1995).

У овом двадесетогодишњем интервалу који покрива дневна мерења опажања је око 800 пролаза Сунца кроз меридијан, око 200 пролаза Меркура, око 700 пролаза Венере и око 200 пролаза Марса. Било је, такође, и око 5000 пролаза упоришних звезда FK4, односно, FK5.

Разлике ( $O - C$ ) могу да послуже, с једне стране, за исправљање путањских елемената планета, а с друге, за поправљање оријентације координатног система, или, конкретније речено, за поправљање положаја  $\gamma$  – тачке и равни екватора. Први резултати су добијени већ после неколико година опажања (Sadžakov и др 1982).

Поправке положаја  $\gamma$  – тачке и екватора каталога FK4, који је представљао референтну основу FK4 система, добијене из опажања на Београдском меридијанском кругу (Sadžakov и др 1992а), углавном су биле у сагласности са резултатима које су добили други истраживачи, што се посебно<sup>и</sup> односи на резултате опажања Сунца (Sadžakov и др 1996а).

У великом броју опажања Сунца, мерење је вршено тако што је по ректасцензији регистрован пролаз његовог предњег и задњег краја, док је по деклинацији одређиван положаја горње и доње ивице. На тај начин директно из мерења добијан је Сунчев екваторски и поларни дијаметар, што је омогућило да се из података, евентуално, утврде његове промене у току времена (Vince и др 1996). У последњем раду који третира опажања Сунца на Меридијанском кругу у Београду, покушано је да се утврди крос-корелација између промене Сунчеве ирадијације и промене његовог дијаметра (Vince и др 1998). Постоје индиције да би се једна таква зависност могла констатовати.

## 2.2 Изведени каталог 2957 сјајних звезда.

Каталог геодетских звезда је специфичан изведени каталог намењен потребама геодетске астрономије. Први пут се појављује под називом "Каталог 2957 сјајних звезда са деклинацијама од  $-10^\circ$  до  $+90^\circ$ ". Настао је као резултат опажања у периоду 1934 – 1939. година на пет совјетских опсерваторија: у Казању, Москви, Николајеву, Пулкову и Ташкенту. Опажања и њихова обрада ишли су по јединственом плану који је разрадио Н. В. Цимерман.

Каталог садржи положаје свих звезда до шесте привидне величине у деклинацијској зони од  $-10^\circ$  па до северног пола. Све звезде овог каталога, са малим изузецима, садржане су у пулковским апсолутним каталозима ректасцензија и деклинација 1915. и 1925. године.

У пулковске каталоге, који се односе на епоху 1915.0, ушли су положаји 1631 звезде

из такозваног списка Баклунда-Хофа, који се налазио у основи "Општег прелиминарног списка фундаменталних звезда". Овај списак је 1909. године прихватио Међународни Комитет за фотографску карту неба и публикује се као прилог уз "Connaissance des Temps" за 1914. годину. Опажања по овом списку вршена су не само у Пулкову, већ и у Алжиру, Бабелсбергу, Вашингтону, Гриничу, Рту Добре Наде, Николајеву, Паризу и Иклу. Звезде пулковских каталога 1925. године опажане су ради допуне каталога из 1915. тако да се у целини дају положаји свих сјајних звезда (закључно са шестом привидном величином) од северног пола до  $-10^\circ$  деклинације. У вези са потребама геодезије, а посебно да би се за програме Талкотове методе добиле што тачније деклинације звезда, Астрономски институт је 1934. године издао изведени каталог *деклинација* 1631 звезда за епоху 1915.0. Овај каталог је добијен из опажанја у Бабелсбергу, Вашингтону, Гриничу, Рту Добре Наде и Пулкову. Опажања других опсерваторија нису могла бити коришћена из разних разлога. Аналогно томе, на Пулковској опсерваторији је урађен и 1935. године публикован изведени каталог *ректасцензија* 1642 основне и 127 допунских звезда за епоху 1925.0. Овај каталог је добијен обједињавањем апсолутних каталога Алжира, Вашингтона, Гринича, Николајева и Пулкова. За побољшање индивидуалних ректасцензија придодата су опажанја из Париза и Икла.

Овим изведеним каталозима обезбеђени су тачни положаји знатног дела сјајних звезда, примењиваних у првом реду за астрогеодетске потребе. Међутим, главни недостатак ових каталога је одсуство многих звезда пете и шесте величине, а то су звезда које имају велики значај за службу времена и теренске астрометријске радове. Зато је на првој астрометријској конференцији у Пулкову 1932. године покренуто питање проширивања изведених каталога укључивањем свих звезда од пете до шесте привидне величине. За ово је било довољно додати пулковске каталоге из 1925. године, који су садржали ове звезде, али они су имали систем различит од система изведених каталога. Сем тога, било је неопходно да се повиси тачност положаја звезда пулковских каталога понављањем опажанја на неколико опсерваторија.

Тако се појавио пројект који је представљао кооперацију више совјетских опсерваторија на поновном опажанју 1334 звезде пулковских каталога из 1925. године.

### 2.2.1 Састављање каталога 1334 геодетских звезда.

По коначном плану, четири опсерваторије: Пулковска, Московска, Казањска и Николајевска, опажанју деклинације. Ректасцензије се опажанју такође на четири опсерваторије: Пулковској, Московској, Ташкентској и Николајевској. Свака звезда на свакој опсерваторији опажан се по два пута при различитом положају инструмента. На тај начин, за



одређивање положаја, једна звезда би имала најмање осам независних опажања сваке координате.

Посао је водила Главна астрономска опсерваторија у Пулкову. Основне инструкције за опажање сводиле су се на следеће:

1. – Систем упоришних звезда за све инструменте је одређен Изведеним каталогом 1642 звезде (ректасцензија) и Изведеним каталогом 1631 звезде (деклинације). У својене упоришне звезде исте су за све опсерваторије и деле се на два списка. Сваки списак у интервалу од два часа садржи бар једну звезду у I зони (од  $-10^\circ$  до  $0^\circ$ ) са деклинацијом близу  $-5^\circ$ ; у II зони (од  $0^\circ$  до  $+10^\circ$ ) бар једну звезду око  $+5^\circ$  деклинације, и тако редом до пола. Поларна зона улази два пута; једном за горње и једном за доње кулминације.
2. – Да би се обезбедило везивање система инструмента за систем изведених каталога 1642 (1631), најмање два пута месечно требало је да се опажају серије упоришних звезда. Сагласно овоме, сваки списак упоришних звезда састављен је тако да су његове звезде могле да се без пропуштања опажају у току једне вечери.
3. – Опажања ректасцензија и деклинација вршена су посебно.
4. – Опажања у току сваке вечери трајала су четири часа. Минимални број упоришних звезда за свако пуно вече износио је 10.
5. – При опажању ректасцензија препоручено је дељење на зоне од по  $20^\circ$ . За деклинације су препоручене зоне које не превазилазе  $30^\circ$ . При томе, упоришне звезде не треба да излазе више од  $10^\circ$  ван опажачких зона програмских звезда. Сваке вечери требало је опажати макар две зоне, а свака комбинација ових зона требало је да се опажа приближно једнак број пута.
6. – Ради везивање система инструмента за изведене каталоге, а такође и ради изучавања систематских утицаја, састављане су разлике параметра ( $u + m$ ) и тачке екуатора ( $M_0$ ) по упоришним звездама различитих зона, тј. разлике облика (зона  $k$ ) – (зона  $k + i$ ). Ове разлике су прављене и за вечери када су опажане само упоришне звезде и за вечери када су опажане програмске и упоришне звезде. Ово је био основни материјал за сва даља испитивања.

Регуларна опажања звезда почела су 1934. године и трајала наредних неколико година. Најважнији циљ читавог посла било је састављање каталога положаја 1334 звезде у систему два изведена каталога 1642 (1631) звезде. Као основна епоха узета је 1935. година.

Добијени резултати показали су да је методика опажања и обраде, разрађена у Пулкову, у потпуности била оправдана. Систематска одступања каталога појединих опсерваторија невелика су, одакле следи закључак да је везивање за изведени каталог на свим опсерваторијама остварено на задовољавајући начин.

Помоћу таблица одступања каталози добијени у Пулкову, Москви, Казању и Николајеву, а такође и Пулковски апсолутни каталог из 1925. године сведени су на средњи систем. Због одређивања тачности појединих опажачких каталога израчуната је средња квадратна грешка положаја за сваки од њих и то по десетостепеним зонама. Показало се да је тачност положаја сведених на средњи систем приближно иста за свих пет каталога. На себе скреће пажњу чињеница да коначне деклинације Пулковског апсолутног каталога редуковане на 1935. годину нису тачније од других, мада су положаји овог каталога засновани на најмање шест опажања, док остала четири каталога имају по 2 - 3 опажања сваке звезде. Вероватно је то последица мале тачности усвојених сопствених кретања.

Поједини каталози су, дакле, помоћу добијених таблица разлика сведени на средњи систем, па је из свих опажања сваке звезде изведена средња вредност њене деклинације. Добијене коначне деклинације 1334 звезде засноване су на 14 - 20 опажања и имају приближно исту тачност као и деклинације изведеног каталога 1631 звезде који се налази у основи целог посла.

Опажања ректасцензија вршена су у Пулкову и Москви на меридијанским круговима, а у Николајеву и Ташкенту на пасажним инструментима Бамберга. Каталог ректасцензија био је формиран потпуно аналогно каталогу деклинација. Пошто су опажања Ташкентског каталога била завршена тек у лето 1939. године, за извођење система ректасцензија 1334 звезде коришћена су само три каталога: Пулковски, Московски и Николајевски. Из ова три каталога изведен је средњи систем, при чему је каталог Николајевске опсерваторије подвргнут потпуној преради, пошто обрада у Николајеву није одговарала установљеној методици. После тога прављена је таблица систематских одступања сваког каталога по петостепеним зонама.

Без обзира што Ташкентски каталог није ушао у средњи систем, систематска одступања овог каталога су врло мала. Ова чињеница тим више заслужује спомињање, јер су се у Ташкенту опажачи смењивали четири пута, тако да је и у овом случају испало да је усвојена методика опажања и везивања за упоришни систем била потпуно оправдана.

Пулковски апсолутни каталог 1925. године који је такође узет у обзир при извођењу система ректасцензија, у зони главних Пулковских звезда од  $-10^{\circ}$  до  $+35^{\circ}$  деклинације потпуно задовољавајуће се слаже са средњим системом. Јасно изражена систематска разлика се појављује тек при већим деклинацијама.

Коначне ректасцензије појединих каталога редуковане су на средњи систем, после чега је, као и код деклинација, израчуната средња квадратна грешка положаја по деклинацијским зонама. Резултати показују да коначне ректасцензије Пулковског, Московског и Николајевског каталога засноване на 3 - 4 опажања имају приближно једнаке средње грешке. Што се тиче каталога Ташкентске опсерваторије, знатан део његових положаја

заснован је на 1 - 2 опажања, што је узрок видног умањења тачности његових коначних ректасцензија. Релативно мала тачност положаја Пулковског каталога 1925. године редукованог на епоху 1935. несумњиво се објашњава знатним грешкама усвојеног сопственог кретања, као и код деклинација.

При формирању изведеног каталога ректасцензија 1334 звезде, усвојено је да тежина једног опажања за сваки од пет каталога буде иста. Помоћу таблица систематских одступања редукована су сва опажања на средњи систем, после чега је, као код деклинација, образована одговарајућа аритметичка средина. На тај начин добијен је изведени каталог 1334 звезде, где је свака ректасцензија заснована на 16 - 22 опажања. Овај каталог има приближно такву тачност као и изведени каталог 1642 звезде.

### 2.2.2. Састављање каталога 2957 сјајних звезда.

У вези са високом тачношћу добијених каталога ректасцензија и деклинација 1334 звезде, природно је искрсло питање о формирању општег изведеног каталога свих звезда до шесте привидне величине у границама од  $-10^\circ$  до  $+90^\circ$  деклинације, путем обједињавања изведених каталога Пулковске опсерваторије (1642 звезде), Астрономског института (1631 звезда) и каталога 1334 звезде добијеног на описани начин. Формирање проширеног каталога, који би садржао тачне положаје око 3000 звезда у једном строгом систему било је утолико пожељније јер се изведени каталози 1642 (1631) звезде односе на различите епохе. (Каталог деклинација 1631 звезде дат је за епоху 1915.0, а каталог ректасцензија 1642 звезде за епоху 1925.0).

С обзиром да у тим каталозима нису све звезде заједничке, у проширени каталог требало је укључити само 1623 звезде. Тако је у изведени каталог који обједињује сјајне звезде северног неба ушло 2957 звезда.

Каталог 1334 звезде опажан је строго у систему 1642 (1631) звезде, па састављање општег изведеног каталога 2957 звезда не захтева никакву ревизију или редуkcију система звезданих положаја. Било је довољно да се положаји звезда сведу само на једну стандардну епоху. За ту епоху је усвојена 1950. година. Како су све звезде (2957) проширеног изведеног каталога садржане у фундаменталном каталогу GC (Boss 1937), одлучено је да се при његовој редуkcији на епоху 1950.0 користе подаци дати у GC систему.

При превођењу сводног каталога ректасцензија 1642 звезде са епохе опажања (1915.) на 1925. годину усвојена су сопствена кретања наведена у PGC и у каталогу Гриничке опсерваторије. Ова сопствена кретања, уопштено говорећи, нешто се разликују од сопствених кретања GC. При састављању овог каталога та околност је узета у обзир увођењем одговарајућих поправака.

Дакле, каталог геодетских звезда се састоји из 1623 звезде узете из каталога 1642 звезде, односно, каталога 1631 звезде, с епохом опажања око 1915. године, којима су придодате 1334 звезде, чија је епоха опажања блиска 1930. години.

У изведеним каталозима 1642 (1631) звезде не наводе се тачне епохе њихових опажања. Зато у Каталогу 2957 геодетских звезда (скраћено КГЗ) оне такође нису могле бити наведене. За 1334 звезде, опажане на пет совјетских опсерваторија, дате су тачне епохе опажања.

Каталог је у систему Пулковског (1642) каталога за ректасцензију и каталога Астрономског института (1631) за деклинацију, односно, у посебном систему.

Све звезде КГЗ се налазе у GC. Посебно су дате поправке, тј. свођења на систем GC према урађеним таблицама систематских разлика. Извршено је поређење са системом FK3. Дата су свођења на овај систем као и десетогодишње промене. За звезде овог каталога које се налазе у FK3 дате су директне разлике FK3 – КГЗ за епоху 1950.0. Годишња сопствена кретања и њихове стогодишње промене узете су из каталога GC.

Каталог 2957 геодетских звезда публикован је после II светског рата и употребљаван је читаве две деценије у астрогеодетским радовима. После појаве каталога FK4, положаји ових 2957 звезда преведени су на систем FK4 за епоху 1975.0 (Губанов 1968). Тако су геодетима једно време за практичне потребе на располагању били положаји сјајних звезда (ознака КГЗ- 2) дати у систему FK4 и за најближу стандардну епоху.

### 2.3. Изведени каталог 4949 геодетских звезда.

Године 1983. на Пулковској опсерваторији завршено је састављање изведеног каталога положаја и сопствених кретања 4949 геодетских звезда у зони деклинација од  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$ .

Потреба за таквим каталогом била је условљена даљим развојем астрогеодетских радова како на северној, тако и на јужној Земљиној хемисфери. За израду каталога била су коришћена сва доступна опажања сјајних звезда ( $m \leq 6.09$ ) совјетских и других опсерваторија извршена у периоду 1963 - 1975. година. Урађено је 17 каталога по ректсцензији и 12 каталога по деклинацији са средњим епохама 1967.74 и 1968.16 респективно. Сви коришћени каталози рађени су по зонама. Број опажачких каталога који обезбеђују положај у изведеном износи 3 до 11. Тачност једног положаја у изведеном каталогу карактерисана је следећим величинама: за  $\epsilon_\alpha \cos \delta$  од  $\pm 0''.003$  до  $\pm 0''.005$ ; за  $\epsilon_\delta$  од  $\pm 0''.10$  до  $\pm 0''.12$ . Каталог је добијен у систему FK4, као и у систему FK4 који је исправљен за систематске грешке вида  $\Delta\alpha_\delta$ , што је било целисходно за његово практично коришћење до изласка FK5 (Хруцкаја 1985).

Примењена методика у формирању изведеног каталога, као и оцена опажачког материјала посебно је била усмерена на систематске грешке. Тежина у односу на систематске грешке назначавана је зависно од квалитета везивања појединих каталога за фундаментални систем (анализа по упоришним звездама). Ове тежине одређиване су за обе координате у односу на све видове грешака и могле су да остану исте за цео каталог, или да се мењају у зависности од деклинације или ректасцензије. Из анализе по каталозима и по деклинацијским зонама омогућено је не само упоређивање квалитета везивања појединих каталога за упоришни систем (што је неопходно при формирању изведеног каталога), него је дата и представа о самом систему. Рецимо, мале тежине сличне за различите каталогe, у зонама јужније од  $-30^\circ$ , сведоче о практичној немогућности да се овде оствари везивање за систем фундаменталног каталога равноправно као за звезде северне хемисфере, чак и са повећавањем броја опажања. Ово је последица уочљивог хода систематских грешака облика  $\Delta\alpha_\delta$  за јужну хемисферу. Тежине у односу на грешке облика  $\Delta\delta_\delta$  нису имале видне промене. У односу на грешке  $\Delta\alpha_\alpha$  и  $\Delta\delta_\alpha$  тежине су у целом каталогу биле исте, јер њихова прелиминарна анализа није открила изражену зависност од зоне деклинације. Тежина у односу на случајне грешке одређивана је по спољашној тачности, после превођења сваког индивидуалног каталога на систем изведеног. Максимална вредност систематских разлика (КГЗ - FK4), израчуната по заједничким звездама, у средњем не прелази границе: по ректасцензији  $\pm 0^{\circ}003$  (са грешком  $\pm 0^{\circ}002$ ) за северну хемисферу и  $\pm 0^{\circ}005$  (са грешком  $\pm 0^{\circ}003$ ) за јужну; по деклинацији је  $\pm 0''03$  (са грешком  $\pm 0''02$ ).

Сопствена кретања 4949 геодетских звезда добијена су у две етапе. У првој су добијена прелиминарна сопствена кретања. Заједно са КГЗ узети су каталози GC за епоху опажања, затим N30, Wash<sub>250</sub>, Wash<sub>350</sub>, 2Cape<sub>50</sub>, Мелбурншки каталози и каталог КГЗ-2. Сви материјали били су сведени на FK4 помоћу систематских разлика добијених непосредним упоређивањем за епоху опажања. Друга етапа се састојала у повећању тачности прелиминарних сопствених кретања путем утачавања положаја GC, који су исправљани за све видове систематских грешака при добијању индивидуалних поправака положаја звезда GC. Поправке су извођене на основи нових опажања по програму BS. Основни циљ целе процедуре је био добијање положаја за крајње епохе које је делио временски интервал од око 66 година, и то у истом систему који је близак систему FK4. Тачност добијених сопствених кретања лежи у границама: за  $\epsilon_\mu \cos \delta$  од  $\pm 0^{\circ}008$  до  $\pm 0^{\circ}015$ ; за  $\epsilon_\mu'$  од  $\pm 0''11$  до  $\pm 0''24$ .

### 2.3.1. Формирања изведеног каталога геодетских звезда.

Један од најсложенијих проблема при састављању изведених каталога звезданих положаја је оцена изворног материјала (опажачких каталога) у односу на систематске грешке. Као правило, систематске грешке се налазе упоређивањем каталога преко координата заједничких звезда. Ради веће објективности таквих оцена почеле су у садашње време широко да се примењују методе математичке статистике. Међутим, остаје неизмењена идеја о назначавану тежина у систематском смислу: тежина се додељује полазећи од оцене одступања система каталога од неког средњег система. Тако је састављен каталог ПФКСЗ, КГЗ, "Прелиминарни систем SRS". Ова метода полази од тога да су систематске грешке појединих каталога мале и у датом скупу каталога носе случајан карактер, који дозвољава да се у средњем грешке компензују. При таквом прилазу увек остаје отворено питање о блискости средњег и "правог" система. Зато је приликом формирања изведеног каталога 4949 геодетских звезда овом проблему приступљено на нешто другачији начин (Хруцкая 1980).

Како је познато, изведени каталог је резултат обједињавања релативних каталога с циљем повишења тачности координата звезда у односу на случајне грешке и најбољег репродуковања задатог упоришног система путем умањења утицаја систематских грешака појединих инструмената. Одатле следи да при обједињавању појединих каталога велики степен поузданости у систематском смислу треба да имају каталози који најбоље репродукују задати упоришни систем. Да се о томе добије информација из материјала самог каталога је немогуће. Међутим, опажања звезда једног диференцијалног каталога праћена су опажањима знатног броја упоришних звезда. Резултати ових опажања у виду поправака ( $O - C$ ), као правило, дају се у прилогу каталога и разматрају се као поправке положаја упоришних звезда у односу на случајне грешке. Диференцијални каталог ће добити утолико већу тежину у односу на систематске грешке, уколико је тесније везан за упоришни систем, тј. што је слабија зависност величине ( $O - C$ ) од положаја звезде на небеској сфери.

Математички ово се своди на оцену корелационе функције разлика "каталог минус упоришни систем" по упоришним звездама, посебно за ректасцензију ( $\alpha$ ) и посебно за деклинацију ( $\delta$ ).

Ова функција се може представити у  $\alpha$  правцу изразом

$$B^{\alpha}(\tau) = \frac{1}{N_j} \sum_{i,j} \epsilon_i(\alpha, \delta) \epsilon_j(\alpha + \tau\Delta\alpha, \delta),$$

где је  $\epsilon_i$  и  $\epsilon_j$  вредност ( $O - C$ )  $i$ -те и  $j$ -те звезде упоришног каталога за који је  $\alpha_i - \alpha_j \leq \tau\Delta\alpha$ ,  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\Delta\alpha$  је корак дискретизације,  $N_j$  је број производа  $\epsilon_i\epsilon_j$  за свако  $\tau\Delta\alpha$ .

У  $\delta$  правцу то се представља изразом

$$B^\delta(\tau) = \frac{1}{N_j} \sum_{i,j} \varepsilon_i(\alpha, \delta) \varepsilon_j(\alpha, \delta + \tau\Delta\delta).$$

Означимо условну оцену дисперзије са  $D(B)$ . Тада тежину  $i$ - тог каталога у односу на систематске грешке можемо представити са  $P_i = 1/D_i(B)$ . Тежина треба да се нађе по свакој координати посебно. Овде тежина  $P_i$  карактерише степен везивања  $i$ - тог каталога за задани упоришни систем и може остати неизмењена за цели каталог, или да се мења у зависности од деклинацијске зоне.

Појављује се питање колико је исправно користити се оваквом оценом као карактеристиком везивања разматраног диференцијалног каталога за упоришни систем. Може се испоставити да је добијени диференцијални каталог лошији него што следи из анализе упоришних звезда. Узроци овога могу бити следећи:

1) Параметри сваког каталога могу се мењати у зависности како од зенитске даљине, тако и од времена. Узевши у обзир да је једновремено опажање упоришне и програмске звезде практично немогуће, па искључивање различитих систематских грешака унутар појединих опажачких вечери не мора бити потпуно.

2) Принципијелна могућност "доброг" везивања појединих програмских звезда за упоришни систем налази се у границама сваке опажачке серије посебно. О овоме се мора водити рачуна при опажањима у широким деклинацијским зонама, посебно ако су у програм опажања укључене поларне звезде. Могућност везивања је условљена опажачким материјалом који је на располагању. Узимајући ово у обзир, тежина  $P_i$  добијена из анализе упоришних звезда, очигледно, треба да се коригује с урачунавањем могућег повезивања за упоришни систем сваког опажања програмске звезде.

Схема формирања једног изведеног каталога, узимајући у обзир већ изречене примедбе, може се представити на следећи начин:

1. Рачунање средње епохе изведеног каталога на основи епоха индивидуалних опажачких каталога који учествују у формирању изведеног.

2. Свођење индивидуалних каталога на средњу епоху изведеног каталога рачунањем поправака за сопствено кретање.

3. Оцена тачности положаја звезда у сваком каталогу на основи унутрашњег слагања опажања.

4. Формирање прве апроксимације изведеног каталога узимајући у обзир оцену тачности положаја сваке звезде.

5. Формирање система поправака изведеног каталога. Користе се разлике између индивидуалних каталога и изведеног каталога, а такође се уводе тежине у односу на систематске грешке. У овој етапи добијене поправке се изравнавају.

6. Формирање друге апроксимације изведеног каталога додавањем поправака из претходне етапе на положаје добијене у првој апроксимацији.

7. Превеђење индивидуалних каталога на систем изведеног каталога (друга апроксимација).

8. Оцена растурања из разлика положаја у индивидуалним каталозима и изведеном каталогу, као и добијање тежина из дисперзије ових разлика. Добијена тежина се условно може сматрати тежином у односу на случајне грешке, јер је условљена случајним грешкама и преосталим особеностима датог индивидуалног каталога. Ове тежине и положаји звезда у индивидуалним каталозима добијени после свођења на систем изведеног каталога (етапа под бројем 7.) служе за рачунање координата звезда у изведеном каталогу. Уз то се рачуна и средња епоха опажања.

9. У последњој етапи се дају положаји сваке звезде изведеног каталога за одговарајућу средњу епоху опажања, узевши у обзир поправку за сопствено кретање.

### 2.3.2. Положаји и сопствена кретања 4949 звезда.

Своје порекло "геодетске звезде" воде од изведеног каталога 2957 сјајних звезда са деклинацијама од  $+90^\circ$  до  $-10^\circ$  који је био састављен за потребе геодезије, посебно за обезбеђење опажања Талкотовом методом.

За састављање новог каталога коришћен је материјал добијен на следећим опсерваторијама: Ташкент ( $\alpha$ ), Бордо ( $\alpha, \delta$ ), Харков - два каталога ( $\alpha$ ), Токио ( $\alpha, \delta$ ), Кијев - два каталога ( $\alpha, \delta$ ), Букурешт ( $\alpha, \delta$ ), Китаб ( $\alpha$ ), Веч ( $\alpha$ ), Николајев ( $\alpha, \delta$ ), Стразбур ( $\alpha, \delta$ ), Перт-Бергедорф ( $\alpha, \delta$ ), Кејп ( $\alpha, \delta$ ), Сантјаго ( $\alpha, \delta$ ), Пулково ( $\alpha, \delta$ ), Копенхаген ( $\alpha, \delta$ ) (Хруцкая 1985а).

Звезде КГЗ су довољно равномерно распоређене по ректасцензији (у средњем 413 звезда на  $2^h$ ). По деклинацији расподела звезда је равномерна у зони  $\pm 70^\circ$  (у средњем 336 звезда на  $10^\circ$ ), а њихов број се смањује у поларним зонама.

Већи број каталога био је дат у систему FK4 или преведен на њега. На систем FK4 преведени су каталози Пулково ( $\alpha$ ) и Перт-Бергедорф ( $\alpha, \delta$ ), добијени у систему инструмента. Каталози Пулково ( $\delta$ ), Сантјаго ( $\alpha, \delta$ ) и Копенхаген ( $\alpha, \delta$ ) били су придодати изведеном онако како су добијени.

Формирање овог изведеног каталога и оцена материјала рађени су по већ приказаној схеми. Полазећи од дефиниције изведеног каталога сматрано је да при обједињавању опажања веће поверење заслужују каталози који боље репродукују упоришни систем. Информације о томе могу дати опажања упоришних звезда која прате опажања сјајних звезда. За оцену квалитета повезаности са фундаменталним системом коришћено је преко



84 хиљаде опажања, па, према томе, толико средњих поправака ( $O-C$ ) звезда FK4. Диференцијални опажачки каталог добијао би тим већи тег у односу на систематске грешке, што је тесније био везан за упоришни систем, тј. што се слабије показивала зависност ( $O-C$ ) од положаја звезде на небеској сфери. Математички проблем се свео на оцену корелационе функције разлика ( $Cat - FK4$ ) по упоришним звездама посебно за  $\alpha$  и  $\delta$  правце  $B^\alpha(\tau)$  и  $B^\delta(\tau)$  по свакој координати. Што је већа корелација тачака почетног низа, то већа дисперзија  $DB(\tau)$  одговара добијеним оценама. Тежина  $i$ - тог каталога у односу на систематске грешке може да се представи

$$P_i = \frac{const}{D_i B(\tau)}$$

Тежине су одређиване за сваку координату и у односу на све видове грешака. Оне могу остати непромењене за цео каталог или да се мењају у зависности од деклинација или ректасцензија. Овде су најпре одређиване тежине  $P_{\Delta\alpha\delta}$  и  $P_{\Delta\delta\delta}$  које су се мењале по зонама деклинације. Анализа величина  $P_i$  дозвољава не само да се оцени квалитет везивања појединих каталога за фундаментални систем, већ да се одреде карактеристике самог система у смислу равномерности присутних систематских грешака, а самим тим могућност везивања за њега. Мале тежине  $P_{\Delta\alpha\delta}$  које су сличне за разне каталоге у зонама јужније од  $-30^\circ$  говори о практичној немогућности да се поузданије репродукује систем FK4 који садржи оштре промене систематских грешака вида  $\Delta\alpha\delta$  на јужној хемисфери, чак и после повећања количине опажачког материјала. Тежине  $P_{\Delta\alpha\alpha}$  и  $P_{\Delta\delta\alpha}$  узимане су за дати каталог у целини, јер при прелиминарној анализи јасна зависност од деклинације није откривена.

Добијене тежине коришћене су за формирање система изведеног каталога. После свођења индивидуалних каталога на систем изведеног могло је да се приступи рачунању тежина у односу на случајне грешке ( $p_\alpha$  и  $p_\delta$ ). Оне су одређиване према спољашњем слагању. Материјал је сматран хомогеним у том смислу што је сваки каталог био сведен на упоришни систем на најбољи могући начин. Помоћу ових тежина формиран су коначни положаји звезда у изведеном каталогу

$$x = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i},$$

где је  $x_i$  координата из  $i$ - тог каталога који је преведен на систем изведеног каталога.

Ради обезбеђења "дуговечности" КГЗ неопходно је било да се добију поуздана сопствена кретања сјајних звезда. Задатак је у бити сложен због недостатка материјала, посебно за јужну хемисферу, и због недостатка поузданих положаја сјајних звезда у ранијим епохама. Извођење сопствених кретања геодетских звезда урађено је у две етапе. Прва етапа је била добијање прелиминарних сопствених кретања  $\mu$ , која по тачности (по

систематским грешкама) превазилазе сопствена кретања у каталозима GC и N30 и која су погодна за поуздана поређења. Друга етапа се састојала у даљем утачњавању сопствених кретања и провери "радне способности" на великом интервалу времена (66 година), дајући нова опажања сјајних звезда.

У првој етапи сви каталози су преведени на систем FK4 помоћу таблица систематских разлика за средње епохе каталога. Анализа разлика између положаја преведених на систем FK4 за сваки каталог и положаја у FK4 омогућили су да се оцени квалитет превођења и да се назначи одговарајућа тежина. Са овим тежинама решаване су условне једначине састављене за сваку звезду ради одређивања сопственог кретања.

Провера прелиминарних сопствених кретања на интервалу од 66 година извршена је уз помоћ каталога GC. При том је узето у обзир да формално превођење на систем FK4 није исправило све дефекте система GC. Ради обезбеђења што тачнијег превођења били су коришћени сви каталози који улазе у изведени каталог. Поједини каталози (у систему изведеног КГЗ) преведени су на средњу епоху GC и упоређени су са њим. Добијене разлике третиране су као нетачности извршеног превођења положаја GC на систем FK4, које представљају непознате, али могуће систематске грешке FK4 за епоху опажања и грешке прелиминарних сопствених кретања, условљене њиховом делимичном зависношћу од система коришћених каталога. Редом су анализиране све форме зависности. Разлике  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  разматране су по десетостепеним зонама, једино су зоне (+90° до +70°) и (-70° до -90°) узете као двадесетостепене због малог броја звезда. Разлике координата  $\Delta x_i$  у каталозима  $K_i$  и  $K_0$  ( $K_i$  су каталози програма BS, а  $K_0$  је каталог GC) представљене су као грешке GC ( $\Delta x_0$ ) и сопствених кретања ( $\Delta\mu$ ) и усредњене су у изабраном интервалу (5° по деклинацији и 2<sup>h</sup> по ректасцензији), дајући за сваки  $i$ -ти каталог условне једначине облика

$$\Delta x_i = \Delta x_0 + \Delta\mu(t_i - t_0) .$$

Условне једначине су решаване са тежинама које су усвојеним при формирању КГЗ као тежине у односу на систематске грешке. Циљ процедуре је да се максимално приближе систем GC и систем КГЗ. Што је боље ово достигнуто, то се са већом вероватноћом може сматрати да добијена сопствена кретања образују независан систем. Добијене поправке сопствених кретања по деклинацији и ректасцензији  $(\Delta\mu_\alpha)_\delta$ ,  $(\Delta\mu_\delta)_\delta$ ,  $(\Delta\mu_\alpha)_\alpha$ ,  $(\Delta\mu_\delta)_\alpha$  нешто су мало изравнате, а затим коришћене за добијене тачнијих сопствених кретања. Као резултат утачњења каталога  $K_0$  уношењем систематских поправака  $\Delta x_0$  у односу на све видове грешака јавио се каталог  $\overline{K_0}$ . Претпоставка је да каталози  $K_i$  и  $\overline{K_0}$  имају разлику само услед случајних грешака положаја  $\overline{\Delta x_0}$  и сопствених кретања  $\overline{\Delta\mu}$ . За сваку звезду су образоване условне једначине

$$K_i - \overline{K_0} = \overline{\Delta x_0} + \overline{\Delta \mu}(t_i - t_0)$$

Ове једначине су решаване са тежинама у односу на случајне грешке добијене при формирању изведеног каталога КГЗ. На тај начин су налажене индивидуалне поправке положаја и сопствених кретања звезда. Добијене индивидуалне поправке сопствених кретања заједно са систематским поправкама коришћене су за рачунање коначних вредности сопствених кретања геодетских звезда.

### 2.3.3. Редукција КГЗ на систем FK5.

После добијања систематских разлика FK5 - FK4 решено је да се изведени каталог 4949 геодетских звезда преведе на нови фундаментални систем, што је и урађено на Пулковској опсерваторији (Khrutskaya 1991). Као полазни материјал служио је каталог положаја и сопствених кретања у систему FK4, за епоху и еквинокциј 1950.0. Пре рачунања систематских разлика положаја и сопствена кретања КГЗ били су сведени на епоху и равнодневицу 1950.0. Систематске разлике су рачунате по програму послатом из Хајделберга. Добијене разлике представљале су сумарну систематску разлику од три компоненте: ректасцензије, деклинације и привидне величине. После њиховог увођења подаци КГЗ били су исправљени за систематске грешке у смислу (нова посм. - FK4)<sub>1950.0</sub>.

Почев од 1. јануара 1984. године користи се нови систем астрономских константи, нова фундаментална епоха и нови еквинокциј J2000.0, па је, с обзиром на то, после исправака КГЗ за систематске разлике FK5 - FK4 материјал каталога преведен на епоху и еквинокциј J2000.0 с новим астрономским константама.

Као резултат ових операција добијен је изведени каталог положаја и сопствених кретања геодетских звезда за J2000.0 и у систему FK5.

У изведени каталог КГЗ поред звезда BS ушло је 1361 звезда из FK4 са магнитудом  $m \leq 6.09$ . При формирању каталога неопходно је било дати положаје ових звезда. Могућа су била два решења:

1. С обзиром да после изласка FK5 изведени КГЗ треба превести на нови фундаментални систем, онда је једно решење укључити у КГЗ оригиналне положаје звезда FK4 исправивши их само за  $\Delta \alpha$  на јужној хемисфери.

2. Користити положај FK4 побољшан у случајном смислу, који је добијен преко средње вредности поправке ( $O - C$ ) дате у индивидуалним каталозима за звезде FK4.

Како је при изради програма BS било обухваћено више разних деклинацијских зона, број добијених средњих вредности ( $O - C$ ) за једну звезду из FK4 није био велики. Максималан број је 12 у зони  $\pm 20^\circ$ , а минимални је 3 за све звезде испод  $-40^\circ$  деклинације.

Мали број опажања не дозвољава да се озбиљно постави питање о побољшању FK4 у случајном смислу. Зато је прво решење усвојено као основно. Друга могућност је коришћена за оцену идентичности материјала у целини и за оцену квалитет репродукције FK4.

После превођења на систем FK5 добијене су две варијанте изведеног каталога КГЗ. У првој су положаји и сопствена кретања FK4 исправљени за разлику FK5 - FK4. У другој варијанти узети су положаји и сопствена кретања FK5. При томе су звезде поред систематских добиле и индивидуалне поправке. *На Београдској опсерваторији постоји ова варијанта са оригиналним положајима и сопственим кретањима FK5.*

Ово поглавље, посвећено првенствено Каталогу 4949 геодетских звезда, завршавамо таблицом у којој се дају средње грешке положаја његових звезда за епоху 2000.0. Вредности су добијене по формулама (1.1) – (1.5), на основи података о грешкама положаја и сопствених кретања, као и о средњим епохама опажања КГЗ. У обзир су, такође, узете средње грешке разлика КГЗ – FK4 рачунате по заједничким звездама. (Те грешке износе: за ректасцензију  $\pm 0^{\circ}002$  и за деклинацију  $\pm 0''02$ .) Ради поређења, за исту епоху су израчунате и средње грешке положаја звезда у основном FK5 каталогу.

**Таблица 2.1.**

*Просечне средње грешке положаја КГЗ и FK5 звезда за епоху 2000.0.*

Cat	$E_{\alpha} \cos \delta$	$E_{\delta}$
КГЗ	$\pm 0^{\circ}006$	$\pm 0''13$
FK5	$\pm 0^{\circ}003$	$\pm 0''05$

*Каталог 4949 геодетских звезда садржи звезде до шесте привидне величине, има три звезде на 25 квадратних степени, изведен је у систему FK5 и случајне грешке координата његових звезда су релативно мале. С обзиром на то, у овом моменту он представља задовољавајућу основу за астрогеодетска одређивања на терену.*

### 3. Промене положаја звезда.

#### Фундаменталне астрономске константе.

Ради одређивања положаја небеских тела неопходно је да се изабере просторно-временски референтни систем, везан за било коју материјалну основу. Пошто се сва опажања врше са површине Земље, основни значај за опажача имају топоцентрични положаји небеских тела. За прелазак на геоцентричне координате треба знати облик и размере Земље. Осим тога, када се тражи хелиоцентрични положај небеског тела морамо знати растојање од Земље до Сунца и промену тог растојања са временом.

Координатни систем у односу на који се одређују положаји небеских тела везан је за Земљину поларну осу и њену екваторску раван. Међутим, чињеница је да овај систем није непокретан, већ мења свој положај у простору услед прецесије и нутације. На крају, брзина светлости има коначну вредност, па се због кретања Земље у односу на звезде појављује аберациона промена привидних положаја звезда.

Према томе, за прелазак са непосредно одређених топоцентричних координата небеског тела на његове геоцентричне или хелиоцентричне координате, а такође ради могућности упоређивања опажања вршених у различито време, неопходно је обрачунати размере и облик Земље, растојање од Земље до Сунца, параметре прецесије, нутације и аберације. Коначно, морамо знати вредност масе великих планета и Месеца, пошто поремећаји елемената Земљине орбите и промене положаја Земљине осе у простору зависе, пре свега, од величине масе великих планета и Месеца. Све ове величине, које имају значајну улогу у сваком редуccionом израчунавању, називају се *фундаменталним астрономским константама* (Куликов 1956, стр. 9 – 10).

#### 3.1. Појаве које привидно мењају положаје небеских тела.

Привидне промене положаја звезда, односно, промене њихових координата у датом систему, последица су, дакле, многих појава које могу да се сврстају у три групе (Kovalevsky 1990, стр. 63):

- геометријско померање опажача или небеског тела;
- оптички ефекти због којих се тело не налази на правцу којим долази светлосни зрак;
- промене самог референтног система.

У првој групи су сопствена кретања и паралаксе звезда. Другој групи припадају астрономска рефракција, аберација светлости и релативистичко савијање светлосног зрака у гравитационом пољу. У трећу групу појава сврставају се прецесија и нутација, као и поларно кретање.

Астрономска рефракција представља последицу проласка светлосног зрака кроз атмосферу и зависи од места и услова опажања. Овде неће бити разматрана, уз констатацију да се утицаји астрономске рефракције и њених аномалија одстрањују из самог *мереног положаја*. Пошто се ради о условима опажања, ова појава се, дакле, може третирати као део инструмента. Такође, неће бити разматрано ни поларно кретање, јер се оно испољава преко промена координата тачака на Земљиној површини. При томе Земљина обртна оса задржава своју оријентацију у простору, али мења положај у самој Земљиној маси. Подразумева се да координате тачака на Земљи добијене из астрогеодетских одређивања обавезно треба сводити на средњи пол, тј. обрачунати утицај поларног кретања.

Да би се примениле формуле по којима се рачунају утицаји ових појава потребне су још и неке информације. Ако се ради о ректасцензији и деклинацији, користе се три додатне информације да би се тачно одредио положај небеског тела. Треба прво знати датум за који рачунамо координате, затим, шта је центар сфере и, најзад, на који се екватор и еквинокциј небеске сфере односе те координате (Green 1985, стр. 284 – 286).

Поменути датум може бити датум опажања или датум ефемериде. Док ова информација није позната немогуће је узети у обзир сопствено кретање звезде.

Центар небеске сфере дефинише координатни почетак, због чега је овај податак неопходан. Најчешће се користе барицентар Сунчевог система и геоцентар. Прелазак са једног на други центар врши се обрачунавањем износа годишње аберације и годишње паралаксе. Наравно, због повећања тачности треба узети у обзир релативистичко савијање светлости и аберационе чланове другог реда.

Што се тиче екватора и еквинокција, за исту епоху могу се изабрати средњи екватор и средњи еквинокциј, или прави екватор и прави еквинокциј. У првом случају обрачунава се само износ прецесије, док се у другом случају додаје и износ нутације. У оба случаја епоха може, а не мора, да буде иста као датум опажања или датум ефемериде.

У зависности од тога шта се рачуна приликом одређивања положаја звезде, дефинишу се средњи, прави и привидни положај звезде. Овоме треба додати и стандардни средњи положај.

*Средњи положај* је дат средњим координатама  $(\alpha_1, \delta_1)$  звезде на барицентричној небеској сфери у односу на средњи екватор и средњи еквинокциј датума. Ту је епоха екватора и еквинокција једнака датуму опажања. Средње координате звезде мењају се само услед прецесије и сопственог кретања. Остале поправке су искључене дефиницијом.

*Прави положај*, или праве координате  $(\alpha_2, \delta_2)$  звезде су координате на барицентричној небеској сфери у односу на прави екватор и прави еквинокциј датума. Праве координате садрже поправке за нутацију. Ретко се користе и представљају само карику при преласку са средњег на привидни положај.

*Привидни положај* се даје привидним координатама  $(\alpha, \delta)$  звезде на геоцентричној небеској сфери у односу на прави екватор и прави еквинокциј датума. Привидни положај подразумева обрачунавање још и поправке за годишњу аберацију и годишњу паралаксу. Од мереног положаја се разликује за локалну рефракцију и дневну аберацију.

*Стандардни средњи положај* подразумева стандардне средње координате  $(\alpha_0, \delta_0)$  звезде за датум стандардне епохе. По правилу стандардна епоха је или Беселова В1950.0, или јулијанска Ј2000.0. У каталозима се дају стандардни средњи положаји звезда.

### 3.1.1. Геометријска померања.

Свака звезда има својствено (пекуларно) кретање у простору које се пројектује на небеску сферу. Сем тога, због кретања Сунчевог система такође ће се регистровати некакво кретање звезде на небеској сфери. Уобичајено је да се оба ова кретања разматрају заједно. Векторски збир брзина ових кретања може да се разложи на радијалну и тангенцијалну компоненту. Тангенцијална компонента брзине  $V_t$  проузрокује промену правца према звезди. Величина ове промене током једне године назива се *годишњим сопственим кретањем* звезде. Сопствена кретања су врло мала и могу се сматрати непроменљивим током неколико деценија. Наравно, што је звезда удаљенија од Сунчевог система, при истој брзини  $V_t$  њена угловна брзина је мања. Зато се, без обзира на велики дијапазон брзина звезда, испитује зависност растојања до звезда и њихових сопствених кретања (Гуревич 1979, стр. 73 – 74).

Сопствено кретање звезде на небеској сфери може се представити двома ортогоналним компонентама. Једна компонента  $\mu_\alpha$  је кретање дуж паралела екваторске координатне мреже, а друга  $\mu_\delta$  је кретање дуж деклинацијског круга. У звезданим каталозима и годишњацима се дају обе компоненте, с тим што прва компонента, сопствено кретање по ректасцензији, има ознаку  $\mu$ , а друга, сопствено кретање по деклинацији, обично има ознаку  $\mu'$ .

Као што је већ речено, при одређивању положаја звезде за неки датум обавезно се обрачунава њено сопствено кретање као први корак при преласку на привидни положај.

Привидно померање небеског тела условљено премештањем опажача назива се паралактичким померањем или *паралаксом*. Паралактичко померање је у толико веће што је

небеско тело ближе опажачу и што је веће померање опажача (Бакулин 1973, стр. 34 – 37).

Координате небеског тела одређене из тачака на Земљиној површини називају се топоцентричним. Топоцентричне координате сваког небеског тела одређене у једном истом моменту са различитих тачака Земљине површине различите су. Ова разлика је значајна за тела Сунчевог система, али је занемарљива за звезде (мање од  $0''00004$ ). Зато се за тела Сунчевог система у астрономским годишњацима дају њихове геоцентричне координате, тј. координате које се односе на центар Земље. За прелазак са геоцентричних на топоцентричне координате неопходно је обрачунати утицај паралаксе.

*Дневном паралаксом* небеског тела назива се разлика праваца по којима би оно било видљиво из центра Земље и из било које тачке на њеној површини. Другим речима, дневна паралакса је угао под којим би са небеског тела био видљив радијус Земље на месту опажања. За небеско тело које се налази у зениту места опажања дневна паралаксе једнака је нули. Ако се тело налази на хоризонту, онда његова дневна паралакса добија своју максималну вредност и назива се у том случају дневном хоризонтском паралаксом. Познавање хоризонтске дневне паралаксе омогућава да се одреди растојање до датог тела, јер је синус паралаксе однос екваторског полупречника Земље и растојања.

Услед огромних растојања од Земље до звезда, њихова дневна хоризонтска паралакса практично не постоји и растојања се одређују помоћу годишње паралаксе. *Годишња паралакса* звезде је угао  $\pi$  под којим се са звезде види средњи полупречник Земљине орбите, уз услов да је правац према звезди нормалан на овај полупречник.

Пошто се опажач заједно са Земљом креће око Сунца готово по кружности, то се правац од Земље ка некој блиској звезди стално мења и ова звезда треба да у току године на небеској сфери описује некакву елипсу, која се зове паралактичка елипса, која је утолико више развучена, уколико је звезда ближа еклиптици, и утолико мањих размера, уколико је звезда удаљенија од Земље. Код звезде која се налази у полу еклиптике елипса се претвара у мали круг, а код звезде која се налази на еклиптици у део лука великог круга који опажачу са Земље изгледа као дуж. Велике полуосе паралактичких елипси једнаке су годишњим паралаксама звезда.

Из овога следи да присуство годишње паралаксе у положајима звезда представљају доказ кретања Земље око Сунца.

Паралактичко померање тела на небеској сфери је потпуно одређено и испуњава три основне поставке (Куликов 1956, 54 – 55):

1. Паралактичко померање небеског тела се врши по великом кругу који пролази кроз апекс опажачевог кретања и почетни положај небеског тела.
2. Паралактичким померањем небеско тело се удаљује од апекса опажачевог кретања.



3. Синус паралактичког померања небеског тела пропорционалан је синусу угловног растојања небеског тела од апекса опажачевог кретања.

Паралактичко померање  $p$  везано је са његовом хоризонтском паралаксом и зенитним растојањем формулом

$$\sin p = \varrho \sin p_0 \sin z ,$$

у којој  $\varrho$  представља растојање тачке на Земљи од центра Земље у деловима екваторског радијуса,  $p$  је паралактичко померање небеског тела,  $p_0$  његова хоризонтска паралакса, а  $z$  је зенитско растојање. Из саме дефиниције екваторске хоризонтске паралаксе следи да је

$$\Delta = \frac{a_0}{\sin p_0} ,$$

где  $\Delta$  представља растојање од центра Земље до небеског тела, док је  $a_0$  екваторски радијус Земље.

Из одређивања годишње паралаксе следи:

$$D = \frac{A_0}{\sin \pi} ,$$

где је  $D$  растојање од Сунца до звезде,  $A_0$  средње растојање између Земље и Сунца, а  $\pi$  је годишња паралакса звезде. И овде да би се одредило растојање до звезде потребно је знати њену паралаксу. Сем тога потребно је знати и растојање од Земље до Сунца, које се рачуна по познатој паралакси Сунца.

У астрономији је дефинисана, између осталих, јединица за дужину преко годишње паралаксе. Растојање које одговара годишњој паралакси од једне лучне секунде назива се парсеком. Ако се растојање до звезде  $D$  изражава у парсецима, онда постоји проста веза између растојања и годишње паралаксе изражене у лучним секундама:

$$D = \frac{1}{\pi} .$$

Према томе, да би се одредило растојање до небеског тела, неопходно је да се зна његова паралакса. Зато је задатак одређивања растојања до небеских тела, уствари, задатак одређивања паралакси тих објеката.

Прва одређивања годишњих паралакси звезда урадили су у периоду од 1835. до 1840. године Струве, Бесел и Хендерсон. Мада ова одређивања нису била много тачна, не само да су дала објективан доказ о кретању Земље око Сунца, већ су унела јасну представу о огромним растојањима на којима се налазе небеска тела у Васиони.

Паралаксе звезда добијене астрометријским методама називају се тригонометријским паралаксама. Треба приметити да се растојања до звезда могу оценити по неким физичким или статистичким законитостима, на пример, по зависности периоде цефеиде од њене апсолутне звездане величине. Међутим, калибрација ових законитости врши се према звездама са познатом тригонометријском паралаксом (Подобед и Нестеров 1982, стр. 144).

У древна времена се сматрало да су све звезде распоређене на истом растојању с унутрашње стране површине кристалне сфере. Први покушаји да се одреде растојања до звезда везани су за име Коперника и Тихо Брахеа, који су се трудили да одреде разлику положаја звезде за два момента, када се Земља налази у две супротне тачке на својој орбити око Сунца. Тачност опажања тог времена није им омогућавала да одреде ову разлику. Међутим, изведен је правилан закључак да се звезде налазе бар на неколико хиљада пута већем растојању него Сунце.

Повишење тачности астрометријских опажања чинило је све реалнијом могућност мерења тригонометријских паралакси. Као што је већ поменуто, у XVIII веку је Бредли, покушавајући да измери паралаксу, открио годишње абериционо померање звезда. Почетком XIX века постало је јасно да су паралаксе звезда мање од једне лучне секунде, односно, да су звезде двеста хиљада пута даље од Земље него Сунце. На тај начин, апсолутно мерење паралактичког померања, а исто тако и одређивање тригонометријске паралаксе појављује се као један од најтежих задатака астрометрије.

Са технолошким напретком проблеми ове врсте се полако превазилазе. Hipparcos (High Precision PARallax COLlecting Satellit) сателит који је био активан читавих 37 месеци, од новембра 1989. до марта 1993. године, прикупио је, између осталог, податке о положајима, сопственим кретањима и паралаксама за више од сто хиљада програмских звезда (Turon 1996).

### 3.1.2. Оптички ефекти.

Један од доказа Земљиног обилажења око Сунца је годишње абериционо померање звезда, које је открио још 1728. године енглески астроном Бредли покушавајући да одреди годишњу паралаксу звезде  $\gamma$  *Draconis*.

*Аберација* је појава која се, уопштено гледајући, састоји у томе да опажач у покрету види небеско тело на нешто другачијем месту од оног на коме би га видео да се налази у стању мировања. Аберицијом се такође назива и угао између опажаног (привидног) правца и стварног правца ка небеском телу. Разлика ових правца је последица самерљивости брзине светлости и брзине кретања опажача (Бакулин и др. 1977, стр. 126 – 128).

Постоје три термина који се употребљавају у вези абериције. то су: дневна, годишња

и вековна аберација (Куликов 1956, стр. 113 – 115).

Дневна аберација настаје као последица обртања Земље око своје осе. Абериционо померање тела на небеској сфери се врши по великом кругу који пролази кроз прави положај небеског тела и источну тачку, при чему се тело привидно помера ка источној тачки. Ово померање је пропорционално синусу угловног растојања тела од источне тачке. Његова вредност се одређује по формули

$$\kappa' = 0'' \cdot 319 \cos \varphi' \sin \gamma ,$$

где је  $\varphi'$  геоцентрична ширина места опажања, а  $\gamma$  је угловно растојање небеског тела од источне тачке.

Годишња аберација је последица кретања Земље око Сунца. Абериционо померање на небеској сфери услед годишње аберације врши се по великом кругу који пролази кроз прави положај небеског тела и апекс Земљиног кретања. Померање зависи од угловног растојања небеског тела од овог апекса. Величина абериционог померања може да се представи формулом

$$\kappa = \frac{v}{c} \sin \varphi ,$$

где је  $\varphi$  угао између правца у ком опажач види небеско тело и правца брзине Земљиног кретања.

Средња брзина кретања Земље око Сунца је  $2\pi$  астрономских јединица на годину, што износи  $29.8 \text{ km/s}$ . Максимално абериционо померање имамо за звезде које се налазе на  $90^\circ$  од апекса Земљиног годишњег кретања око Сунца. У лучним секундама ово померање износи  $206264'' \cdot 8 (v/c) \approx 20'' \cdot 5$ . Тачна вредност овог померања за епоху J2000.0 представља константу годишње аберације.

Вековна аберација настаје због транслаторног кретања читавог Сунчевог система у простору, па се, према томе, она појављује само код светлосних извора који не учествују у кретању Сунчевог система. При овом кретању координате апекса мењају се врло мало, због чега абериционо померање сваке звезде можемо сматрати непроменљивом величином.

Кретање Сунчевог система у односу на околне звезде сматра се инерцијалним и његова брзина износи  $19.5 \text{ km/s}$ . Зато је однос ове брзине према брзини кретања светлости, изражен у лучним секундама, приближно  $13'' \cdot 4$ . Величина вековне аберације изражава се формулом

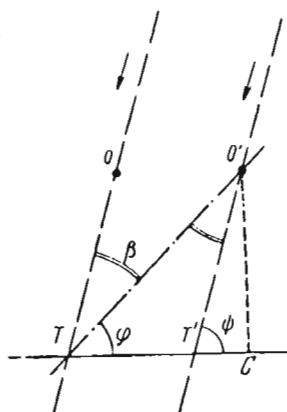
$$\kappa_0 = 13'' \cdot 04 \sin \psi .$$

Овде је  $\psi$  угловно растојање небеског тела од апекса кретања Сунчевог система, чије су координате (ректасцензија и деклинација)

$$A = 270^\circ, \quad D = 34^\circ$$

Вековну аберацију, пошто се она не мења за свако тело посебно, немогуће је утврдити. Ово абериационо померање може се само израчунати и узети у обзир при одређивању "истинитог" правца према небеском телу, тј. правца по ком би се тело видало, ако би брзина Сунца у односу на систем звезда била једнака нули.

Појава аберације, односно, промена правца светлосног зрака који иде од светлосног извора ка опажачу, настаје само при њиховом међусобном кретању једног у односу на други. Узрок аберације је, дакле, коначност брзине светлости, јер је светлосном зраку потребан некакав временски интервал, мада врло мали, да пређе изврстан део пута. Зато дурбин мора да се нагне за неки мали угао у смеру кретања опажача да би се светлосни зрак кретао паралелно правцу визуре. То је класично објашњење појаве аберације, које сам Бредли даје и које у следећих неколико редова наводимо.



Слика 3.1. Класично објашњење појаве аберације.

При астрономским опажањима светлосни зрак прелази растојање  $OT$  (сл. 3.1.) од објектива до пресека крста конача  $T$  (који има сваки инструмент предвиђен за мерење координата небеског тела) у току неког малог временског интервала  $\tau$ . За то време се инструмент, услед кретања Земље око Сунца по њеној орбити, премести транслаторно у положај  $O'T'$ . Лик небеског тела у фокалној равни неће лежати у пресеку крста конача  $T'$ , већ ће бити померен у страну обратно кретању Земље. Да би лик небеског тела био у пресеку крста конача, нужно је да се окуларни део цеви премести обратно смеру кретања Земље, тј. у положај  $T$ . Другачије говорећи, цев инструмента треба нагнути на страну кретања Земље за угао  $\angle OTO' = \angle TO'T'$  и поставити је у положај  $TO'$ . Величина тог угла, или величина аберације  $\angle TO'T' = \beta$ , добија се из решавања троугла  $\Delta TO'T'$ , управо на следећи начин:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{TC}{O'C} = \frac{TT' + O'T' \cos \psi}{O'T' \sin \psi} = \operatorname{ctg} \psi + \frac{TT'}{O'T' \sin \psi}$$

Угао који заклапа истинити правац ка небеском телу са правцем кретања опажача означен је грчким словом  $\psi$ , а угао који чини правац визуре и правац кретања опажача словом  $\varphi$ .

Како је  $TT' = v\tau$ , а  $O'T' = c\tau$ , где  $v$  означава брзину кретања Земље по орбити, а  $c$  брзину светлости, добија се

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \psi + \frac{v}{c} \operatorname{cosec} \psi$$

Како је  $\psi - \varphi = \beta$ , ова формула се може свести на облик

$$\sin \beta = \frac{v}{c} \sin \varphi,$$

што се може лако добити непосредно из цртежа.

Поред тога, овде ће бити приказано извођење формула за рачунање аберације, у коме полазиште представља специјална теорија релативности (Загребин 1966, стр. 310 – 313).

Размотримо систем координата  $x, y, z$  везан за Сунце, који при проучавању годишње аберације може да се сматра непокретним. Покретни координатни систем који је везан за Земљу може да се означи са  $x', y', z'$ .

Нека се светлосни зрак креће у равни  $xOy$  и нека је  $\psi$  угао између светлосног зрака и правца релативног кретања, које се врши дуж осе  $x$  релативном брзином  $v$ . Једначине кретања светлости ће бити

$$\begin{aligned} x &= -ct \cos \psi, \\ y &= -ct \sin \psi. \end{aligned}$$

Сагласно Лоренцовим трансформацијама, координате  $x'$  и  $y'$  везане за покретну Земљу, могу да се одреде из једначина

$$\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -c \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cos \psi,$$

$$y' = -c \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sin \psi;$$

одакле је

$$x' + vt' = -c \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \cos \psi,$$

$$y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \sin \psi.$$

Ако се последње једначине реше по  $x'$  и  $y'$ , могу да се нађу правоугле координате везане за покретну Земљу. Добија се

$$x' = -ct' \left( \frac{\cos \psi + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \psi} \right),$$

$$y' = -ct' \left( \frac{\sin \psi}{1 + \frac{v}{c} \cos \psi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

Изрази у заградама представљају косинус и синус угла  $\varphi$  који заклапа светлосни зрак с координатним системом везаним за Земљу. Дакле, слично као у случају координатног система везаним за Сунце, имамо једначине

$$x' = -ct' \cos \varphi,$$

$$y' = -ct' \sin \varphi,$$

где се тражени угао који светлосни зрак саставља са осом  $x'$  одређује сагласно формулама

$$\frac{\cos \psi + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \psi} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\sin \psi}{1 + \frac{v}{c} \cos \psi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sin \varphi.$$

Одавде се добија

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \psi + \frac{v}{c} \operatorname{cosec} \psi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Формула за аберацију светлости која је већ дата на основи класичних разматрања поклапа се са овом последњом до величине првог реда у односу на  $v/c$ .

Ако последњу формулу развијемо задржавајући се на члановима другог реда у односу на  $v/c$  добијамо

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} (\varphi + \beta) + \frac{v}{c} \operatorname{cosec} (\varphi + \beta) + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \operatorname{ctg} (\varphi + \beta),$$

одакле је, после сређивања и задржавања на члановима другог реда,

$$\sin \beta = \frac{v}{c} \sin \varphi + \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \sin 2\varphi.$$

Количник  $v/c$  је реда  $10^{-4}$ , па разлика у величини аберације рачуната по класичној формули и поправљеној (ово последње) не прелази  $0''.0005$ . Зато се редукција за аберацију врло често вршила по класичној формули. Међутим, та вредност се сада налази на граници тачности савремених одређивања положаја неких објеката (вангалактички радиоизвори), па је треба узети у обзир. Поред тога, при извођењу константе аберације и њене

везе са Сунчевом паралаксом ипак се узима и други члан развоја, јер Сунчева паралакса може да се одреди са тачношћу већом од  $0''.0001$ .

Утицај годишње аберације на екваторске координате звезде може да се представи формулама у којима фигурише константа аберације  $\kappa$  (Халхунов 1972, стр. 210 – 213):

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha) \cos \delta &= -\kappa \frac{V}{V_0} (\cos \lambda_A \sin \alpha - \sin \lambda_A \cos \alpha \cos \varepsilon) \\(\delta' - \delta) &= -\kappa \frac{V}{V_0} (\cos \lambda_A \cos \alpha \sin \delta + \sin \lambda_A \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \\ &\quad - \sin \lambda_A \cos \delta \sin \varepsilon) .\end{aligned}$$

У првој апроксимацији, сматрајући да је Земљина орбита кружна, имамо брзину  $V = V_0$ , лонгитуду алекса  $\lambda_A = \lambda_\odot - 90^\circ$  и у том случају претходне формуле добијају облик:

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha) \cos \delta &= -\kappa (\sin \lambda_\odot \sin \alpha + \cos \lambda_\odot \cos \alpha \cos \varepsilon) \\(\delta' - \delta) &= -\kappa (\sin \lambda_\odot \cos \alpha \sin \delta - \cos \lambda_\odot \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon + \\ &\quad - \sin \lambda_\odot \cos \delta \sin \varepsilon) .\end{aligned}$$

У стварности Земљина орбита је елиптична, а брзина  $V$  је променљива и није управна на радијус-вектор. Ово захтева да се одреди редукација посебно по компонентама  $V_1$  и  $V_2$  брзине кретања Земље.

Заменом  $V$  у претходним формулама са  $V_1 = V_0[1 - e \cos(\lambda_\odot - \omega)]$ , где је  $V_1$  брзина нормална на радијус-вектор Земљиног положаја, при чему је лонгитуда алекса кретања  $\lambda_{A_1} = \lambda_\odot - 90^\circ$ , добијају се формуле у следећем облику:

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)_1 \cos \delta &= -\kappa (\sin \lambda_\odot \sin \alpha + \cos \lambda_\odot \cos \alpha \cos \varepsilon) + \\ &\quad + \kappa e (\sin \lambda_\odot \sin \alpha + \cos \lambda_\odot \cos \alpha \cos \varepsilon) \cos(\lambda_\odot - \omega) \\(\delta' - \delta)_1 &= -\kappa (\sin \lambda_\odot \cos \alpha \sin \delta - \cos \lambda_\odot \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon + \\ &\quad + \cos \lambda_\odot \cos \delta \sin \varepsilon) + \\ &\quad + \kappa e (\sin \lambda_\odot \cos \alpha \sin \delta - \cos \lambda_\odot \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon + \\ &\quad + \cos \lambda_\odot \cos \delta \sin \varepsilon) \cos(\lambda_\odot - \omega) .\end{aligned}$$

Ако се уместо  $V$  стави  $V_2 = -V_0 e$ , где је компонента  $V_2$  управљена дуж радијус-вектора, при чему је лонгитуда алекса  $\lambda_{A_2} = \lambda_\odot - 180^\circ$ , добијају се формуле:

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)_2 \cos \delta &= \kappa e (-\cos \lambda_\odot \sin \alpha + \\ &\quad + \sin \lambda_\odot \cos \alpha \cos \varepsilon) \sin(\lambda_\odot - \omega) \\(\delta' - \delta)_2 &= \kappa e (-\cos \lambda_\odot \cos \alpha \sin \delta - \\ &\quad - \sin \lambda_\odot \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon + \\ &\quad + \sin \lambda_\odot \cos \delta \sin \varepsilon) \sin(\lambda_\odot - \omega) .\end{aligned}$$

Потпуна редукција сваке координате биће равна суми редукција по компонентама брзине, дакле,

$$\alpha' - \alpha = (\alpha' - \alpha)_1 + (\alpha' - \alpha)_2$$

$$\delta' - \delta = (\delta' - \delta)_1 + (\delta' - \delta)_2 .$$

Као крајњи резултат, после неких малих сређивања, добија се

$$\alpha' - \alpha = -\kappa(\sin \lambda_{\odot} \sin \alpha + \cos \lambda_{\odot} \cos \alpha \cos \varepsilon) \sec \delta +$$

$$+ \kappa \varepsilon (\cos \alpha \cos \varepsilon \cos \omega + \sin \alpha \sin \omega) \sec \delta$$

$$\delta' - \delta = -\kappa(\sin \lambda_{\odot} \cos \alpha \sin \delta - \cos \lambda_{\odot} \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon +$$

$$+ \cos \lambda_{\odot} \cos \delta \sin \varepsilon) +$$

$$+ \kappa \varepsilon (\cos \alpha \sin \delta \sin \omega + \cos \delta \sin \varepsilon \cos \omega -$$

$$- \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon \cos \omega) .$$

Ове пуне формуле за редукцију екваторских координата састоје се из два дела. Први део (са општим чиниоцем  $\kappa$ ) јавља се као периодична функција лонгитуде Сунца ( $\lambda_{\odot}$ ), па се врло брзо мења у току времена. Други део, који носи назив *елиптичка аберација*, садржи општи чинилац  $\kappa \varepsilon$  мале вредности (око  $0''.34$ ) и не зависи од лонгитуде Сунца. За сваку звезду посебно елиптичка аберација може да се сматра константом, јер величине од којих зависи (координате  $\alpha$  и  $\delta$ , нагиб еклиптике према екватору  $\varepsilon$ , лонгитуда перихела  $\omega$  и ексцентрицитет Земљине орбите  $e$ ) мењају се током времена незнатно, па је тај део унесен у каталожке положаје, односно, у стандардне средње координате.

До преласка на FK5 систем редукција средњих положаја на привидни вршила се само рачунањем главних чланова аберације, тј. оних у којима се појављује лонгитуда Сунца. У том смислу, средњи положаји звезда у каталогу FK4, за разлику од FK5, садрже чланове елиптичке аберације (употребљава се и термин E-чланови аберације). Због тога матрица за конверзију положаја FK4 звезда са епохе B1950.0 на епоху J2000.0 садржи и елементе којима се елиминише елиптичка аберација из средњих положаја (Aoki и др. 1983).

*Релативистичко савијање светлосног зрака* у јаком гравитационом пољу спада у групу оптичких ефеката (Kovalevsky 1990, стр. 67). Овај ефекат који може да достигне  $1''.75$  у непосредној околини Сунца, спадне на свега неколико хиљадитих делова лучне секунде перпендикуларно на овај правац. Ако са  $\theta$  обележимо угао између правца  $s$  ка Сунцу и правца  $r$  ка звезди који је поправљен за вредност аберације, привидни угао износи  $\theta + \gamma$ . Вредност  $\gamma$  је дата изразом

$$\gamma = \frac{2GS}{c^2 a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} .$$



Овде је  $GS$  хелиоцентрична гравитациона константа,  $c$  је брзина светлости, док је  $a$  растојање опажач - Сунце.

У приближној апроксимацији за реална опажања, која се увек обављају на већем угловном растојању од Сунца ( $15 - 20^\circ$  па навише), претпостављајући да Земља обилази око Сунца по кружници, вредност релативистичког одступања светлости је

$$\gamma = 0''.00407 \operatorname{ctg} \theta/2 .$$

### 3.1.3. Промене референтног система.

Месец и Сунце гравитационим деловањем на елипсоидалну Земљу мењају непрекидно њену оријентацију у простору. Пошто се мења правац осе ротације имамо, према томе, промену оријентације равни Земљиног екватора. На небеској сфери се мења положај небеских полова, небеског екватора, тачке пролећне равнодневице, зенита, хоризонта. Ово повлачи за собом измену екваторских и хоризонтских координата небеских тела.

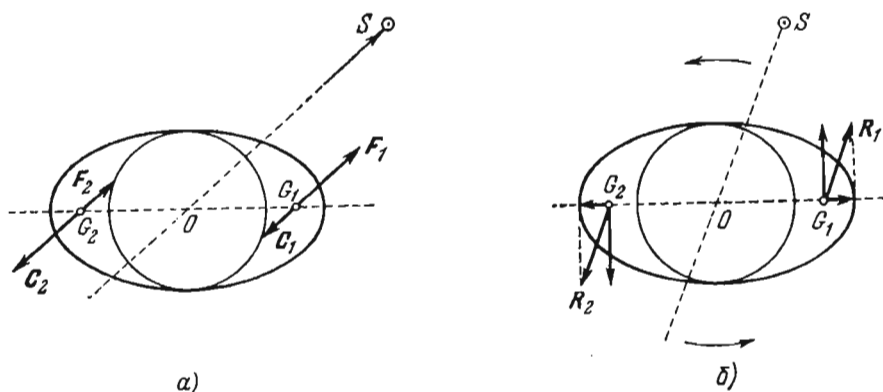
Поремећајно кретање (промена оријентације) Земљине осе не изазива промену географских координата тачака на Земљиној површини, јер узајамни однос осе ротације и равни екватора, с једне стране, и тежишних линија и хоризонтских равни, с друге, остаје непромењена. Иначе, услед привлачног деловања Месеца и Сунца на Земљу, период Земљине ротације се по мало мења (расте), па се звездани и средњи сунчани дан унеколико продужава, јер силе привлачења изазивају на Земљи плиме које коче њену ротацију. Ово је вековно, прогресивно успоравање Земљине ротације.

Постепено померање тачке пролећне равнодневице открио је још у другом веку пре наше ере грчки астроном Хипарх. Упоређивањем еклиптичких координата звезда добијених из сопствених мерења са координатама које су 150 година пре њега мерили астрономи Аристил и Тимохарис, утврдио је да су лонгитуде свих звезда порасле за приближно  $1^\circ.5$ , док се латитуда није приметно изменила. Полазећи од тога, Хипарх је закључио да се нису све звезде помериле у страну пораста лонгитуда, већ да се на супротну страну померила тачка пролећне равнодневице, тј. у смеру супротном годишњем кретању Сунца, у сусрет Сунцу. На тај начин, Сунце при свом привидном годишњем кретању по еклиптици долази у тачку пролећне равнодневице нешто раније него што је време његовог пуног обиласка. По томе је појава названа прецесија (*praecessio aequinoctium* - предњачење равнодневице).

Физичко објашњење прецесије дао је Њутн. Пуну теорију поремећаја обртног кретања Земље разрадио је Даламбер после Бредлијевог открића нутације.

Равни екватора и еклиптике, а према томе, и тачка пролећне равнодневице ( $\gamma$ - тачка), налазе се у непрекидном кретању које је изазвано Месечевим и Сунчевим дејством на

Земљина екваторијална испупчења и сталним утицајем других планета Сунчевог система на хелиоцентричну Земљину орбиту, еклиптику (Абалакин 1979, стр. 68 – 69).



Слика 3.2. Графички приказ узрока прецесије.

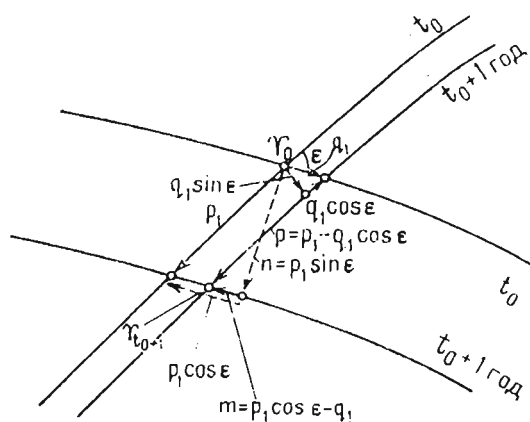
Сунце привлачи супротне стране екваторијалног испупчења Земље силама  $F_1$  (ближу) и  $F_2$  (удаљенију страну), при чему је  $F_1 > F_2$  (сл. 3.2). Центрифугалне силе условљене орбиталним хелиоцентричким кретањем Земље које делују на центре инерције ових испупчења су  $C_1$  и  $C_2$ , при чему је  $C_1 < C_2$ . Резултанте  $R$  сила привлачења  $F$  и центрифугалних сила  $C$  делују на центре маса испупчења  $G_1$  и  $G_2$ . Ако се резултанте  $R$  раздвоје на по две компоненте (једна паралелна и једна управна на раван екватора), тада управне компоненте стварају обртни момент који тежи да раван Земљиног екватора смести у раван еклиптике. Овај обртни момент у комбинацији са моментом Земљине ротације око своје осе изазива, у основи, прецесионо кретање Земљине осе. Наравно, стварно кретање које произилази из утицаја допунског гравитационог привлачења Месеца и планета је много сложеније.

Утицај Сунца и Месеца може бити представљен у виду суме двеју компонената. Прва компонента је луни - соларна прецесија која се испољава у виду непрекидног дугопериодичног кретања средњег светског пола у односу на пол еклиптике са периодом од око 26 000 година на угловном растојању које је једнако нагибу еклиптике према екватору, тј.  $23^\circ 5'$ . Услед луни - соларне прецесије тачка пролећне равнодневице помера се по екватору према западу за  $50'' 3$  годишње. Друга компонента је астрономска нутација која представља краткопериодично кретање правога светског пола око средњег по таласастој трајекторији са амплитудом од око  $9'' 0$  и периодом главног члана нутације око 18.6 година.

На луни - соларну прецесију суперпонује се такозвана планетна прецесија. Појава се испољава тако што се, услед привлачног дејства које на Земљу врше планете, еклиптика њише око једног свог средњег положаја у границама од  $\pm 4^\circ$  у размаку од око 60 000 година изазивајући фине промене нагиба еклиптике према екватору и померање самог пола

еклиптические по небеској сфери. Овај нагиб у наше време опада за око  $0''.47$  годишње. Услед планетне прецесије  $\gamma$ - тачка клизи по екватору за око  $0''.12$  годишње, али у директном смеру.

Обично се разматра заједнички утицај луни - соларне и планетне прецесије као општа прецесија, која је, дакле, изазвана кретањем средњих полова екватора и еклиптике. Две прецесије, луни - соларна по лонгитуди  $p_1$  и планетна по ректасцензији  $q_1$  узимају се као независне. Остале прецесије су функције од  $p_1$  и  $q_1$  (Гуревич 1979, стр. 79 – 83), што са слике 3.3 може лепо да се види.



Слика 3.3. Утицај прецесије на положај  $\gamma$ - тачке.

Утицај луни - соларне прецесија на лонгитуду је, дакле,  $p_1$ , на ректасцензију  $p_1 \cos \epsilon$ , а на деклинацију  $p_1 \sin \epsilon$ , док на латитуду луни - соларна прецесија не утиче. Утицај планетне прецесије на ректасцензију износи  $q_1$ , на лонгитуду  $q_1 \cos \epsilon$ , на латитуду је  $q_1 \sin \epsilon$ , док је на деклинацију једнак нули. Другим речима, општа прецесија по лонгитуди је  $p_1 - q_1 \cos \epsilon = p$ , по ректасцензији  $p_1 \cos \epsilon - q_1 = m$ , по деклинацији  $p_1 \sin \epsilon = n$  и по латитуди  $q_1 \sin \epsilon$ .

За годишње промене екваторских координата услед опште прецесије дају се изрази

$$\Delta \alpha = m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta$$

$$\Delta \delta = n \cos \alpha .$$

Размотримо ова два израза, односно, како прецесија утиче на координате звезда у зависности од њиховог положаја на небеској сфери.

Због померања тачке пролећне равнодневице по еклиптици ректасцензије звезда монотонно се увећавају. Ово се односи на све звезде чије су еклиптичке латитуде  $\beta$  по апсолутној вредности мање од латитуде северног светског пола, односно, за које важи  $|\beta| < 90^\circ - \epsilon$ . Ректасцензије звезда близу полова еклиптике мењају се мало и периодично се повећавају

и смањују. Сами полови еклиптике су непокретни и имају координате: северни  $\alpha = 18^h$ ,  $\delta = 90^\circ - \varepsilon$ , а јужни  $\alpha = 6^h$ ,  $\delta = \varepsilon - 90^\circ$ .

Пошто се раван небеског екватора помера, растојања звезда од те равни, значи деклинације, у већој и мањој мери се мењају. На часовном кругу тачке пролећне равнодневице и у његовој близини деклинације се увећавају, док се на супротној страни, око тачке јесење равнодневице смањују. Кад се од ових тачака крене према часовним круговима од  $6^h$  и  $18^h$  промене деклинација опадају по апсолутној вредности и на тим часовним круговима оне су једнаке нули.

Заједно са прецесијом треба разматрати једну појаву периодичног карактера. Још је Бредли установио да ретроградно кретање чворова Месечеве путање изазива периодична померања Земљине осе ротације која су добила назив нутације. Тај назив је касније примењен и на периодичне чланове прецесије, а и на слободно померање Земљине осе, па је Бредлијева нутација названа астрономском нутацијом (Миланковић 1997, стр. 252 – 256).

Данас се под појмом астрономске нутације подразумевају сва периодична кретања Земљине осе ротације у којима она мења свој положај у простору. Фактички, нутацију треба разматрати заједно са појавом прецесије, јер им је физички узрок заједнички: то је гравитационо дејство тела Сунчевог система на Земљина екваторијална испупчења.

Може се набројати низ периодичних кретања која узрокују појаву нутације. На пример, због Земљиног годишњег кретања, Сунце према екватору мења периодично свој положај у току године. Исто се дешава и са Месецом због његовог обилажења око Земље. Најзад, мењају се периодично и даљине ових небеских тела од Земље. Зато свако привидно Сунчево кретање или право Месечево кретање у односу на Земљу изазива периодичну промену, како у интензитету, тако и у правцу њихових привлачних сила на Земљина екваторска испупчења, па дакле и периодичне промене разних врста и реда величине у општој прецесији  $p$ . Она исто тако изазивају и периодичне промене у нагибу екватора. Зато се разликују многи чланови астрономске нутације, како они са дугим, тако и они са кратким периодама.

Члан најдуже периоде са највећом амплитудом у астрономској нутацији долази од већ поменутог ретроградног кретања линије чворова Месечеве путање, која обиђе еклиптику за 18.6 година. Ако лонгитуду узлазног чвора Месечеве путање над еклиптиком обележимо са  $\Omega$ , онда се од промена Месечевог положаја изазваних овим кретањем линије чворова периодично мења његова привлачна сила која дејствује на Земљина екваторска испупчења. Последица ове промене је промена опште прецесије која се испољава као нутација у лонгитуди  $\Delta\psi = k_1 \sin \Omega$  и нутација у нагибу  $\Delta\varepsilon = k_2 \cos \Omega$ .

Поред уоченог највећег члана астрономске нутације постоје још и многобројни други.

Сунце проведе привидно шест месеци на северној, а шест месеци на јужној небеској хемисфери. Ово његово привидно кретање које је последица Земљиног кретања око Сунца, изазива једно периодично кретање правога пола с годишњом периодом. Месечево кретање око Земље изазива један нутацијски члан са месечном периодом, и тако редом.

Иначе, под утицајем Бредлијеве нутације полови на небеској сфери описују малу, такозвану нутациону елипсу око средњег положаја. Велика полуоса ове елипсе  $a \approx 9''.2$  представља константу нутације.

### 3.2. Фундаменталне астрономске константе.

Астрономске константе и параметри служе за рачунање просторно - временских координата небеских тела и промена тих координата. Систем астрономских константи због тога има основну улогу у областима астрономије које се баве практичним одређивањем положаја небеских тела и теоријским изучавањем њихових кретања. Пре него што буду приказане важеће константе и начин рачунања звезданих положаја, даћемо историјски осврт на формирање система астрономских константи према књизи "Основи ефемеридске астрономије" (Абалакин 1979, стр. 17 – 33).

До краја XIX века приликом редуција астрономских опажања и у теоријским истраживањима (на пример, при формирању теорије планетних кретања) примењиване су нумеричке вредности астрономских константи, које су из разноразних разлога (пре свега субјективних) сматране најбољим у датој установи или опсерваторији. Неповољан утицај такве разноврсности усвојених нумеричких вредности једних истих елемената орбита и астрономских константи на тачност астрономских испитивања истакао је у своје време Њукомб у предговору своје знамените књиге "The Elements of the Four Inner Planets". Овај утицај био је очигледан при анализи старих опажања положаја небеских тела који су се мењали од случаја до случаја када су се мењале нумеричке вредности константе прецесије, нутације и аберације. Пошто није постојала сарадња између институција које су издавале ефемериде, за једну исту годину и за исту константу узимане су различите вредности. Данас је често тешко установити која је вредност онда заиста усвајана.

Обрада старих материјала је показала посебно да није било јединственог система вредности планетских маса. У теоријама кретања Сунца, Меркура и Марса, које је засновао Леверје, при рачунањима се користе разне вредности Венерине масе. Грешке у ефемеридама доводе до тога да су оне биле са временом све мање употребљиве. Повремено су предузимани покушаји да се побољшају ефемериде увођењем поправака које нису увек биле засноване на теорији. Установљавање општег система астрономских константи и њихово строго испитивање урадио је Њукомб у већ поменутој књизи.

### 3.2.1. Стари систем астрономских константи.

Формирање система астрономских константи Њукомб је замислио још 1877. године. У уводу првог тома његових "Astronomical Papers" он је указао на важност избора јединственог система елемената планетних орбита и астрономских константи, независно од тога на који се временски интервал ефемериде простиру, што је основа ефемеридских радова. Као плод двадесетогодишњег рада Њукомба и његових сарадника појавио се систем утачњених орбиталних елемената великих планета и вредности фундаменталних астрономских константи. На њима је заснована теорија планетних кретања и публикована у првих осам томова "Astronomical Papers". Међутим, највећи значај за астрономске константе до данашњих дана има Њукомбова књига "The Elements of the Four Inner Planets", објављена 1895. у виду посебног прилога америчком годишњаку за 1897. годину. Извршена је темељна анализа и обрада колосалног материјала, који је обухватао више од 60 000 меридијанских опажања Сунца, Меркура, Венере и Марса почев од времена Бредлија, тј за 140 година. Њукомб је извео нумеричке вредности паралаксе Сунца, константе аберације, масе Месеца, паралаксе Месеца, коефицијент паралактичке неједнакости у кретању Месеца, коефицијент лунарне неједнакости у кретању Земље, константу нутације, коефицијент механичког сажимања Земље, нагиб еклиптике, константу луни - соларне прецесије и планетне прецесије, а такође вредности маса планета и вековних промена средњих елемената њихових орбита.

Вредност овог титанског рада тешко се може проценити, поготову што је Њукомб у то верме располагао веома примитивним рачунарским прибором. Само геније математичара и осећај за рачун омогућио је Њукомбу да сведе на минимум огромни обим рачунарског рада, везан за редукују опажања, са састављањем и решавањем система од 9 000 условних једначина са 20 непознатих, за шта би, иначе, било потрбно више од стотину година.

Њукомбови резултати представљени су на Париској конференцији о фундаменталним звездама, која је заседала у мају 1896. године и на којој су се окупили директори главних институција за издавање ефемерида и неки астрономи заинтересовани за разматране проблеме. Конференција је препоручила да се у свим ефемеридама усвоје јединствене вредности астрономских константи. Такође је на овој конференцији усвојена препорука о увођењу у праксу јединственог каталога фундаменталних звезда, тј. каталога положаја изабраних сјајних звезда, равномерно распоређених по целом небу, који треба свим опсерваторијама да служи за одређивање времена и као упоришни каталог при одређивању положаја слабијих звезда.

На париском Конгресу Међународне астрономске уније 1911. године разматрана су питања везана за састављање националних астрономских годишњака. Посебна пажња је

усмерена на избор таблица кретања и астрономских константи за састављање ефемерида Сунца, Месеца и великих планета. Такође је пажња посвећена избору звезда за које се у годишњацима дају привидна места, прегледу каталога средњих места, величини и сопственим кретањима звезда. Одлучено је да се уведе гриничко време као аргумент у свим астрономским ефемеридама и да се дају привидна места за звезде из фундаменталних каталога Ауверса, Њукомба и Боса са допунама из спискова Баклунда и Хофа. Изабрано је 3064 звезде и рачунање њихових привидних места расподељено је између институција разних земаља које се баве ефемеридама. Фундаменталне астрономске константе су остале неизмењене, једино је додат Хајфордов коефицијент спљоштености Земље.

Висок квалитет Њукомбовог рада омогућио је да се задржи опште прихваћен систем астрономских константи (1896-1911) *све до 1964. године*. Међутим, због недовољне усаглашености система и нетачности нумеричких вредности неких константи астрономи су више пута, у периоду 1940 - 1960. година, преиспитивали овај систем. На пример, у њему није поштована сагласност међу усвојеним вредностима паралаксе Сунца, константе аберације и односа масе Сунца и система Земља + Месец. Основна неусаглашеност испољавала се у неслагању вредности опште прецесије по лонгитуди са вредностима дужине тропске и звездане године (усвојене у Њукомбовим "Tables of the Sun"). Тако је у низу радова де Ситер покушао да изведе савршенији систем константи. Де Ситерова истраживања завршио је Брауер.

У својству основних астрономских константи де Ситер је изабрао паралаксу Сунца, масу Месеца, брзину светлости, динамичку спљоштеност Земље, њен средњи радијус, убрзање силе теже на средњој географској ширини и две константе ( $\kappa$  и  $\lambda_1$ ) које дефинишу модел Земљине унутрашње грађе. Све остале астрономске константе де Ситеровог система биле су изведене на основи теоријских разматрања. На тај начин био је формиран усаглашен систем у оквиру усвојених теоријских претпоставки. У њему је било садржано 40 астрономских константи са њиховим вековним изменама. Најважнија одлика система де Ситера и Брауера у односу на Њукомбов систем састојала се у томе што су били наведени диференцијални односи између основних и изведених астрономских константи. Ово је дозвољавало да се, у случају потребе, лако израчуна *утицај измењене нумеричке вредности* једне астрономске константе на вредности других константи које су са њом повезане.

Ипак, де Ситер - Брауеров систем не задовољава критеријуме идеалног система, који захтева строго испуњење теоријских узајамних односа и усаглашености у границама грешака мерене нумеричке вредности, са њеним вредностима добијеним из опажања. Ствар је у томе што се у систему де Ситер - Брауера Земља представља као обртно тело с полуосама  $a$ ,  $b$  које се налази у стању хидростатичке равнотеже. Таква фигура равнотеже

не представља обртни елипсоид. Њена спољашња површина пролази на 3 метра ниже од површине обртног елипсоида. Вредност константе нутације била је изведена теоријски при познатој а priori вредности константе прецесије и масе Месеца. Међутим, вредност константе нутације добијена тим путем суштински се разликује од добро усаглашених вредности које су биле одређене из опажања. Према томе, полазна претпоставка о хидростатичкој равнотежи Земље у де Ситеровој теорији била је неоснована. Ова околност заједно са другим недостацима омела је увођење де Ситер - Брауеровог система уместо Њукомбовог.

Године 1948. Клеменс, пошто је ревидирао систем де Ситер - Брауера, предлаже нови систем астрономских константи и даје исцрпне препоруке за његово коришћење у пракси. Клеменс први разматра питања везана за увођење равномерног Њутновог времена, касније названог ефемеридским временом. Посебно предлаже поправке и утачњења у Брауновим "Tables of the Moon", усмерена на усаглашавање ефемерида Месеца са скалом ефемеридског времена.

Задржавање јединственог система астрономских константи без измена и његова примена у свим светским астрономским институцијама, како при обради и анализи опажања, тако и у теоријским истраживањима, без обзира на све уочене недостатке, показало се, између осталог, веома повољним за радове који су повезани са анализом великих серија опажања. Зато је Конференција о проблемима астрономских константи, одржана у Паризу 1950. године, у својим закључцима препоручивала уздржавање од увођења било каквих измена у Њукомбов систем, без обзира на познату неусаглашеност овог система и одступање усвојених нумеричких вредности неких константи од њихових највероватнијих вредности. Тада још увек није било довољно јаких разлога за ревизију система, јер тачност опажања није захтевала суштинско повећање тачности рачунања астрономских ефемерида.

У резолуцијама које је усвојила париска конференција 1950. године садржана је, између осталог, препорука да се ефемериде Месеца ускладе са ефемеридама Сунца. То се постиже искључивањем великог емпиријског члана у Брауновој теорији кретања Месеца и додавањем одговарајуће поправке уз средњу лонгитуду Месеца. Препоручује се, такође, да ефемериде пет спољашњих планета буду рачунате на основи резултата нумеричке интеграције диференцијалних једначина кретања ових планета.

На овој конференцији је препоручено увођење нове јединице за мерење времена, ефемеридске секунде. Ефемеридска секунда би одговарала систему мерења времена у коме је изражена као аргумент у Њукомбовим теоријама планетних кретања. У складу са тим уводи се појам ефемеридског времена.



### 3.2.2. IAU (1964) систем астрономских константи.

Није прошло ни десет година од Париске конференције, а настаје потреба за новим системом фундаменталних астрономских константи, које би задовољиле нове захтеве у вези са прогресом у мерењима астрономско-геодетских параметара Земље и размера Сунчевог система, а такође и у астродинамици.

Било је све више аргумената који су изискивали ревидирање Њукомбовог система. У току седам протеклих деценија од увођења овог система развијени су и са успехом примењивани принципијелно нови методи астрономских опажања, који су суштински повећали тачност мерења. Из радиолокационих опажања Меркура и Венере, а касније Марса, и уз помоћ космичких сонди одређене су са високом тачношћу неке астрономске константе. Појавила се, дакле, потреба да се израчунавају ефемериде како за класична астрономска истраживања, тако и за решавање задатака теоријске и практичне астродинамике са тачношћу која би одговарала високој тачности мерења. За успешно решавање задатака астродинамике неопходно је знати с максималном тачношћу вредност одређених константи и узајамни однос тела Сунчевог система за онај временски интервал у току кога се остварује лет вештачког небеског објекта (космички експеримент). С друге стране, за астродинамичка истраживања неопходан је систем усаглашених вредности фундаменталних константи, погодан за рачунање ефемерида и редукције опажања у току више деценија. Зато је потребно да се са највећом тачношћу одреде константе и да се, по могућности, одреде њихове вековне промене. Исто тако, за астродинамику су потребне константе и ефемериде које су сагласне са најновијим опажањима, што значи, стално повећање њихове тачности.

Погрешне вредности неких астрономских константи, на пример, константе аберације, изазивају грешке у редукцијама опажања које, уопштено говорећи, не могу да се уклоне, јер би ради њиховог искључења било потребно да се изврше поновна рачунања са новим вредностима, што је везано са огромним практичним тешкоћама.

Набројани разлози и упорне препоруке од стране организација које координирају истраживања космичког простора довели су до сазивања нове међународне конференције о астрономским константама, која је одржана у Паризу 1963. године као Симпозијум 21 Међународне астрономске уније.

У резолуцијама Париске конференције (Подобед (ред.) 1967, стр. 356 – 358) указује се да неусклађеност и неслагање Њукомбовог система астрономских константи са најновијим одређивањима захтева стварање новог система константи и увођење у све националне и међународне ефемериде. Нови систем повишене тачности био би састављен од независних, основних, астрономских константи, са тачним теоријским међусобним односима, и изведених константи. Тако би се постигла унутрашња непротивуречност целог система.

Резолуције Симпозијума 21 препоручују да се привремено не мења вредност константе опште прецесије и константе нутације, а такође ни вредност планетних маса (са могућим искључењем масе система Земља + Месец).

За припрему пројекта новог система астрономских константи одређена је радна група Комисије 4 Астрономске уније која је имала задатак да утврди нумеричке вредности астрономских константи које су препоручене резолуцијом као основне: астрономске јединице у метрима, брзине светлости у метрима у секунди, екваторског радијуса Земљиног сфероида  $a_e$ , динамичког коефицијента фигуре Земље  $J_2$ , геоцентричке гравитационе константе  $GE$ , масе Месеца у јединицама Земљине масе  $\mu$ , средњег сидеричког кретања Месеца, нагиба еклиптике према екватору  $\epsilon$ . Стварање система астрономских константи везано је за решење два самостална проблема: проблема међусобног односа појединих константи и проблема одређивања нумеричких вредности сваке константе. При томе усвојене вредности треба да су усаглашене са одређивањима свих непосредно опажаних константи. Разлике између усвојених и опажаних вредности треба да су толико мале, да при утачњавању ефемерида можемо да се ограничимо само на увођење поправака првог реда величине. При установљавању односа међу астрономским константама треба разликовати апсолутне, основне (фундаменталне у самом значењу те речи) и изведене константе. Вредности апсолутних (дефиниционих) констаната установљава се једном за свагда; на пример, Гаусова константа гравитације  $k$ , или број ефемеридских секунди  $s$  у тропској години епохе 1900.0.

Следећи принципе стварања система константи<sup>и</sup> које је разрадио Вилкинс, радна група је усвојила константе  $k$  и  $s$  као апсолутне. На тај начин била је дефинисана астрономска јединица времена, ефемеридски дан, једнак 86400 ефемеридских секунди и астрономска јединица дужине  $A$ . За дефинисање астрономске јединице служила је једначина којом се изражава трећи Кеплеров закон

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m).$$

Тако је дефинисана астрономска јединица  $a = A = 1AJ$  као радијус кружне хелиоцентричне орбите по којој се креће тело нулте масе са сидеричким периодом једнаким  $2\pi/k$  ефемеридских дана при неизмењеним нумеричким вредностима дефиниционих констаната. За јединицу масе усвојена је маса Сунца. Дефиниција секунде требало је да приближно усагласи ефемеридско време са средњим сунчевим временом у интервалу 1820 - 1910. година.

Избор астрономске јединице  $A$  као основне константе уместо паралаксе Сунца  $\pi_0$  условљен је тиме што примена радиолокационих метода за мерење растојања између Земље и других небеских тела даје непосредно та растојања у светлосним секундама

(време кашњења  $\tau$ ). Како су растојања међу планетама позната са тачношћу до 6-7 значајних цифара, простим рачунањем могуће је да се изразе за практичне потребе у метрима или светлосним секундама.

Међу основне астрономске константе спада низ узајамно независних параметара. При томе су нумеричке вредности неких основних константи задржане без измена: вредности планетних маса, константа опште прецесије по лонгитуди, константа нутације и нагиб еклиптике. У суштини, ове константе одређују кретање и узајамни положај равни еклиптике и екуатора. Да су уведене нове вредности ових константи заједно са промењеним вредностима планетних маса, то би захтевало велики труд око прерачунавања свих ефемерида, каталога положаја и сопствених кретања, многобројних помоћних таблица. Овако нешто не би имало оправдања, посебно због тога што су се у скорој будућности очекивале још тачније вредности.

Треба истаћи да грешка усвојене вредности константе прецесије у коначном резултату не утиче на ефемериде звезда, јер се грешке допуштене при преласку са равнодневице једне епохе на равнодневицу друге епохе помоћу Њукомбове вредности прецесије компензује одговарајућом грешком сопствених кретања фундаменталних звезда која су одређивана са том истом Њукомбовом вредношћу константе прецесије.

С аналогним, мада мање повољним стањем, сусрећемо се у случају константе нутације, за коју су нова одређивања давала вредности мање за  $0''.01$  од Њукомбове вредности и са средњом грешком од неколико јединица на трећој децимали. Због непостојања довољно поуздане теорије унутрашње Земљине грађе, није се могла са сигурношћу увести нова вредност константе прецесије и нутације, па је једино решење било да се привремено задрже постојеће вредности.

Као основне константе које карактеришу фигуру и гравитационо поље Земље изабрани су екваторски радијус  $a_e$  Земљиног сфероида, динамички коефицијент форме  $J_2$  и геоцентрична гравитациона константа  $GE$ , која у геоцентричком кретању има исту улогу као Гаусова константа гравитације  $k$  у хелиоцентричком кретању. Усвојена вредност  $GE$  изведена је на основи анализе кретања вештачких Земљиних сателита.

Величина астрономске јединице  $A$  у метрима добијена је заокруживањем средњих вредности одређиваних радиотехничким методама.

Однос  $\mu$  масе Месеца и Земље одређен је из радиоопажња космичких сонди. Анализа месечних варијација радиолокационих мерења радијалне брзине космичког брода "Маринер-2" омогућила је да се одреди кретање Земље у односу на барицентар система Земља + Месец и да се добије вредност  $\mu$ .

На XII конгресу Међународне астрономске уније у Хамбургу, усвојен је IAU (1964) систем астрономских константи (Куликов 1969, стр. 59 – 85) који је уведен у националне и

међународне ефемериде почев од издања за 1968. годину. Коришћење система астрономских константи било је остваривано на три начина:

1. непосредним прерачунавањем ефемерида на основи нових вредности;
2. табулирањем нумеричких вредности диференцијалних поправака већ објављених ефемерида израчунатих са старим вредностима астрономских константи;
3. давањем аналитичких израза за рачунање одговарајућих поправака.

### 3.3. Фундаменталне астрономске константе – нови систем.

Још у време радова на стварању новог система астрономских константи, који је усвојен на конгресу Међународне астрономске уније (IAU) 1964. године, наслућивало се да није далеко дан када ће поново бити постављено питање формирања још тачнијег система константи у складу са напретком савремене опажачке и теоријске астрономије. У овај систем неопходно је било укључити вредности константи и параметара који задовољавају савремене резултате одређивања добијене при истраживању Месеца и планета помоћу космичких апарата. Осим тога, било је потребно отклонити низ несагласности које су се одржале и у константама IAU (1964). На пример, вредности планетних маса нису биле усаглашене са новом вредношћу масе система Земља + Месец. Вредност константе прецесије, без обзира на установљену њену грешку од једне лучне секунде на столеће, такође је задржана у систему IAU (1964). Питање састављања новог система разматрано је на Колоквијуму 9 IAU у Хајделбергу, септембра 1970. године. Посебна пажња је обрађана на нумеричке вредности константе прецесије и масе планета.

На овом Колоквијуму формиране су три радне групе: за константу прецесије, за планетне ефемериде и за јединице и скале времена. Резултати радова све три групе разматрани су на XV конгресу IAU у Сиднеју 1973. године, затим на саветовањима у Вашингтону (октобра 1974.), у Херстмонсоу (октобра 1975.) и Вашингтону (јуна 1976. године) и публиковани су под називом "Заједнички извештај радних група Комисије 4 IAU за прецесију, ефемериде планета, јединице и временске скале" (Duncombe и др. 1977). Овај извештај је разматран на пленуму XVI конгреса Међународне астрономске уније (IAU) у Греноблу 1976. године. У неколико саопштења били су изложени следећа питања:

1. увођење новог система астрономских константи,
2. одређивање тачних нумеричких вредности константи,
3. избор нове стандардне епохе,
4. методика рачунања привидних положаја звезда,
5. рачунање нутације,
6. нове временске скале.

Истовремено са овим питањима, на заседањима одговарајућих комисија Међуна-

родне астрономске уније решавали су се и други задаци који имају значај за рачунање положаја небеских тела и ефемеридску астрономију. На пример, комисија 16 разматрала је ефемериде за физичка опажања Марса; комисија 17 фигуру и ротацију Месеца; итд.

### 3.3.1. IAU (1976) систем астрономских константи.

На конгресу у Греноблу донето је неколико резолуција које су се директно односиле на израчунавање положаја звезда и тела Сунчевог система. Ове резолуције су ниже наведене.

РЕЗОЛУЦИЈА 1, коју су предложили Унијине комисије 4, 8 и 31.

Међународна астрономска унија одобрава препоруке дате у Заједничком извештају радних група Комисије 4 које се односе на:

- систем астрономских константи IAU (1976),
- нову стандардну епоху и равнодневицу,
- фундаментални референтни систем,
- процедуре израчунавања привидних положаја и редукцију опажања,
- скале времена за динамичке теорије и ефемериде,
- и на друге величине које се користе при састављању ефемерида,
- а препоручује се њихово коришћење при састављању фундаменталног каталога FK5 и националних и међународних ефемерида, почев од издања за 1984. годину, као и у свим другим астрономским радовима везаним за ове проблеме.

IAU (1976) систем астрономских константи има следећи облик:

#### *М е р н е ј е д и н и ц е*

Јединице метар ( $m$ ), килограм ( $kg$ ) и секунда ( $s$ ) су јединице дужине (растојања), масе и времена у Међународном систему јединица (SI). Астрономска јединица времена једнака је интервалу времена од једног дана ( $D$ ), који садржи 86 400 секунди. Интервал који садржи 36 525 дана једнак је једном јулијанском stoleћу. Астрономска јединица масе једнака је маси Сунца. Астрономска јединица дужине једнака је оној дужини ( $A$ ), за коју Гаусова гравитациона константа ( $k$ ) узима вредност 0.017 202 098 95, ако се као мерне јединице појављују астрономска јединица дужине, масе и времена. Димензија величине  $k^2$  поклапа се са димензијом Кевендишове константе гравитације ( $G$ ), тј. једнака је  $L^3 M^{-1} T^{-2}$ . Дужина  $A$  назива се такође јединичним растојањем.

*Д е ф и н и ц и о н е к о н с т а н т е*

1. Гаусова гравитациона константа  $k = 0.017\ 202\ 098\ 95$   
2. Брзина светлости  $c = 299\ 792\ 458\ m s^{-1}$

*О с н о в н е к о н с т а н т е*

3. Светлосно време за јединично растојање  $\tau_A = 499.004\ 782\ s$   
[499.004 783 7 s]  
4. Екваторски радијус Земље  $a_e = 6\ 378\ 140\ m$   
[IUGG вредност] [6 378 137 m]  
5. Динамички коефицијент Земљиног облика  $J_2 = 0.001\ 082\ 63$   
6. Геоцентрична гравитациона константа  $GE = 3.986\ 005 \times 10^{14}\ m^3 s^{-2}$   
[3.986 004 48  $\times 10^{14}\ m^3 s^{-2}$ ]  
7. Константа гравитације  $G = 6.672 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$   
8. Однос масе Месеца према маси Земље  $\mu = 0.012\ 300\ 02\ (1 / 81.300\ 68)$   
[0.012 300 034 (1 / 81.300 587)]  
9. Општа прецесија у лонгитуди у јулијанском  
столећу за стандардну епоху J2000.0  $p = 5029''.0966$   
10. Нагиб еклиптике према екватору  
за стандардну епоху J2000.0  $\epsilon = 23^\circ\ 26'\ 21''.448$   
[23° 26' 21''.4119]  
(11.) Константа нутације за стандардну епоху J2000.0  $(N = 9''.2109)$

*И з в е д е н е к о н с т а н т е*

11. Константа нутације за стандардну епоху J2000.0  $N = 9''.2025$   
12. Јединично растојање  $c\tau_A = A = 1.495\ 978\ 70 \times 10^{11}\ m$   
[1.495 978 706 6  $\times 10^{11}\ m$ ]  
13. Сунчева паралакса  $\arcsin(a_e/A) = \pi_\odot = 8''.794149$   
14. Константа аберације за стандардну епоху J2000.0  $\kappa = 20''.49552$   
15. Коефицијент Земљине спљоштености  $\alpha = 0.003\ 352\ 81 = 1 / 298.257$   
16. Хелиоцентрична гравитациона константа  $GS = 1.327\ 124\ 38 \times 10^{20}\ m^3 s^{-2}$   
[1.327 124 40  $\times 10^{20}\ m^3 s^{-2}$ ]  
17. Маса Сунца према маси Земље  $(GS)/(GE) = S/E = 332\ 946.0$   
[332 946.038]  
18. Маса Сунца према маси система Земља + Месец  $(S/E)/(1 + \mu) = 328\ 900.5$   
[328 900.55]  
19. Маса Сунца  $(GS)/G = 1.9891 \times 10^{30}\ kg$

## С и с т е м п л а н е т н и х м а с а

20. Односи масе Сунца према масама планета:

Меркур	6 023 600
Венера	408 523.5
Земља + Месец	328 900.5 [328 900.55]
Марс	3 098 710
Јупитер	1 047.355 [1 047.350]
Сатурн	3 498.5 [3 498.0]
Уран	22 869 [22 960]
Нептун	19 314
Плутон	3 000 000 [130 000 000]

Уз овај списак астрономских константи следује објашњење. Вредности у угластим заградама добијене су после усвајања система астрономских константи IAU (1976) и користе се за рачунање ефемерида у Астрономском алманаху (Astronomical Almanac) почев од 1989. године (Lang 1992, стр. 12 – 14). Даље, приликом усвајања овог система само је Гаусова гравитациона константа била дефинициона, а сада је то и брзина светлости. После прихватања IAU (1980) теорије нутације, одређена је нова вредност константе нутације и она је премештена у групу изведених константи под редним бројем 11. (Претходна вредност је уписана у малу заграду).

Приложени списак константи упоредо садржи вредности усвојене 1976. године и вредности добијене после нових мерења (у угластим заградама), одакле видимо колико су се ове величине промениле.

Мисија Војаџера знатно је измениле нашу слику о Сунчевом систему и представу о масама планета. Између осталог, на ивици нашег планетног система, уместо једне, имамо две планете: Плутон и Харон који скупа обилазе око Сунца. Фрапантно делује чињеница да је маса овог система за два реда величине мања него што се добија из рачунања. Шта онда изазива поремећаје у кретању Нептуна?

Но, вратимо се резолуцијама које се односе на рачунање положаја звезда.

### 3.3.2. Резолуције које се односе на рачунање положаја.

РЕЗОЛУЦИЈА 2 (нова стандардна епоха и равnodневица):

Препоручује се

(а) новом стандардном епохом (са ознаком J2000.0) сматрати датум 2000, јануар 1.5,

који се поклапа са јулијанским даном JD 2451545.0, коме одговара нова стандардна равнодневица;

(b) јединицом времена, која се користи у фундаменталним формулама рачунања прецесије, сматрати јулијанско столеће од 36525 дана;

(c) да разлика између епохе (момента) почетка године и стандардне епохе буде изражена у деловима јулијанске године која је једнака 365.25 дана.

### РЕЗОЛУЦИЈА 3 (фундаментални референтни систем)

Препоручује се

(a) да фундаментални референтни систем, дефинисан положајима (координатама) звезда и вековним променама ових координата у фундаменталном каталогу FK5, одговара што је могуће тачније динамичком референтном систему;

(b) да поправка нул-пункта система ректасцензија у каталогу FK4 (поправка равнодневице) буде изведена из одговарајућих савремених опажања, а поправка кретања равнодневице каталога FK4 буде одређена по истим опажачким подацима као и нове прецесионе величине;

(c) да израз за гриничко средње звездано време у  $0^h$  UT буде исправљен том истом поправком и кретањем равнодневице који су усвојени за FK5, како би се избегао прекид у систему UT.

### РЕЗОЛУЦИЈА 4 (процедуре за рачунање привидних положаја)

Препоручује се

(a) рачунати звездану аберацију на основи потпуне брзине Земље у односу на барицентар Сунчевог система, па средња места звезда не треба да садрже чланове елиптичке аберације ( $E$ -чланове);

(b) рачунати нутацију за положај пола који је Вулард назвао "Ојлеров пол ротације";

(c) рачунати свођења на привидни положај строго и непосредно, без посредства средњег положаја звезде за почетак године, у свим случајевима када се тражи висок степен тачности.

### РЕЗОЛУЦИЈА 5 (скеле времена за динамичке теорије и ефемериде)

Препоручује се

(a) сматрати да је вредност нул-пункта нове временске скале за привидне геоцентричне ефемериде једнака тачно 1977, јануар 1.0003725 у тренутку 1977, јануар  $1^d 00^h 00^m 00^s$  TAI;

(b) јединицом ове временске скале сматрати дан од 86400 секунди у систему SI на средњем нивоу мора;



(c) усвојити за једначине кретања, које се односе на барицентар Сунчевог система, такве временске скале да између ових скала и временске скале усвојене за привидне геоцентричне ефемериде постоје само периодичне варијације;

(d) не уводити временске скокове у систем Међународног атомског времена ТАИ.

### РЕЗОЛУЦИЈА 6 (друге величине које се користе за састављање ефемерида)

У овој резолуцији се препоручују нумеричке вредности маса најкрупнијих малих планета и маса сателита, затим, екваторски радијуси планета, као и коефицијенти који се односе на гравитационо поље планета и Месеца.

### 3.3.3. Коментари резолуција.

#### К о м е н т а р и   Р е з о л у ц и ј е   1

По правилу, константе овог ревидираног система астрономских константи изражени су у јединицама SI, како би се обезбедило слагање при употреби у сродним областима науке. Међутим, у астрономији је неопходно користити астрономски систем јединица за дужину, масу и време. Астрономска јединица времена (дан) била је поново дефинисана преко секунде система SI, која је са своје стране одређена као ефемеридска секунда у границама грешке мерења. Секунда SI система односи се на средњи ниво мора.

1. Гаусова гравитациона константа служи за дефинисање астрономске јединице дужине када је већ дефинисана одговарајућа јединица за време и масу. Вредност  $k$  је била усвојена од стране Међународне астрономске уније 1938. године. Округла вредност величине  $k/86400$  једнака је  $1.990983675 \times 10^{-7}$ .

2. Вредност брзине светлости препоручена је на XV конгресу о проблемима мера и тежина 1975. године. Она не треба да се мења, чак и ако метар буде редефинисан преко друге таласне дужине, различите од оне која се користи у садашње време.

3. Вредност светлосног времена за јединично растојање (временски интервал у коме светлост прелази јединицу дужине) заснована је на радио-локационим мерењима планетних растојања. Оно је нумерички једнако броју светлосних секунди у 1 астрономској јединици дужине. Његова реципрочна вредност, једнака 0.00200398881, даје брзину светлости изражену у астрономским јединицама на секунд.

17 – 20. Реципрочне вредности маса планета укључују масу атмосфере и сателита. За Меркур, Венеру и Марс усвојене су вредности блиске резултатима најтачнијих одређивања добијаних помоћу космичких апарата. Вредност Земљине масе  $E$  изведена је из усвојених величина  $A$ ,  $GE$  и  $\mu$ . У случају Јупитера, Урана и Нептуна савремена одређивања маса не говоре у корист Њукомбових вредности. Маса Сатурна добијена је као

средња вредност из најпоузданијих одређивања. Маса Плутона одређена је на основи анализе поремећаја у кретању Нептуна. Маса Сунца у килограмима дата је ради поређења астрономске јединице масе и јединице масе у SI систему. Она је позната са ниским степеном тачности, која одговара тачности гравитационе константе  $G$  у јединицама SI.

## К о м е н т а р и Р е з о л у ц и ј е 2

1. Нова стандардна епоха пренешена је за једно јулијанско столеће иза фундаменталне епохе Њукомбових планетних теорија: 0.5 јануар 1900. и изражена је у систему динамичког времена уместо светског времена UT. Конкретно, за тачне планетне и Лунарне теорије кретања овај систем је изражен кроз временску скалу која је дефинисана диференцијалним једначинама кретања у односу на барицентар Сунчевог система.

2. У новом систему јулијанска епоха која одговара јулијанском датуму JD, задата је изразом

$$J[2000.0 + (JD - 2451545.0)/365.25] .$$

Да би се израчунала одговарајућа Беселова епоха може се користити однос

$$B[1900.0 + (JD - 2415020.31352)/365.242198781] .$$

Овде се Беселова година фиксира трајањем тропске године од 365.242198781 дана за епоху B1900.0 (JD 2415020.31352). Словима J и B означене су јулијанска и Беселова епоха; она се могу изоставити, ако их контекст или потребна тачности чине излишним.

## К о м е н т а р и Р е з о л у ц и ј е 5

У току одржавања XVI конгреса Уније на седницама комисија 4 и 31 тачка (d) Резолуције 5 добила је нову формулацију (Абалакин 1979, стр. 42 – 43):

”(d) У тренутку 0<sup>h</sup>00<sup>m</sup>00<sup>s</sup> TAI 1. јануара 1977. године усагласити дужину трајање јединице временске скале TAI са трајањем секунде у Међународном систему јединица SI, узевши у обзир њихово садашње разилажење за  $1 \times 10^{-12}s$ . Убудуће не уносити никакве измене у систем TAI.”

Оваква формулација одражава потребу да се покlope размере интервала временске скале TAI са секундом у систему SI, која је садржана у инструкцијама Консултативног комитета за одређивање секунде (CCDS) из 1970. и у његовим препорукама 1974. године. Зато је на XVI конгресу Међународне астрономске уније у вези тога била усвојена резолуција Комисије 4 и 31.

”Међународна астрономска унија је у августу 1976. године, имајући у виду разлику

размерног интервала временске скале TAI и секунде SI на нивоу мора, усвојила следећу резолуцију:

Имајући у виду да је

(а) Међународна астрономска унија за динамику Сунчевог система усвојила нову временску скалу, засновану на секунди као јединици за мерење времена у Међународном систему јединица SI,

(б) та нова временска скала тесно везана са системом Међународног атомског времена (TAI) и да је неопходан висок степен равномерности и тачности скале TAI,

(с) упоређивањем са усавршавањем првобитним еталонима учестаности установљено да се савремена дужина размерног (јединичног) интервала TAI скале разликује од секунде на нивоу мора за  $(10 \pm 2) \times 10^{-13} s$ ,

комисије 4 и 31 IAU, препоручују да се у тренутку  $0^h 00^m 00^s$  TAI 1. јануара 1977. године спроведе јединствено усаглашавање скоком од  $+10 \times 10^{-13} s$ , како би се трајање размерног интервала TAI скале довело у што бољу сагласност са секундом SI на нивоу мора и да би надаље била сачувана равномерност и тачност TAI скале.”

Тако је, у сагласности са овом резолуцијом, за епоху 1977, јануар 1.0 TAI (тј. за епоху 1976, децембар 31,  $23^h 59^m 45^s$  UTC) дужина јединичног интервала TAI скале била повећана за  $10 \times 10^{-13} s$  и, као последица тога, за толико је увећана дужина јединичног интервала TC скале за ову исту епоху; фреквенција временских радиосигнала који се емитују у систему UTC, умањени су за релативну величину једнаку  $10 \times 10^{-13}$ .

#### 3.3.4. IAU (1980) теорија нутације.

Иако су на XVI конгресу Међународне астрономске уније разматрана питања везана за рачунање нутације, у вези тога није дато коначно решење. Маја месеца 1977. године у Кијеву је одржан IAU симпозијум 78 посвећен нутацији и Земљиној ротацији. Председник Комисије 4 IAU оснива Радну групу за нутацију, као одговор на захтев овог симпозијума. По препоруци Радне групе за нутацију, на XVII конгресу Уније у Монтреалу усвојена је IAU (1979) теорија нутације.

Непосредно иза тога Међународна унија за геодезију и геофизику (IUGG) усваја резолуцију којом се тражи поновно разматрање проблема, уз могућност да теорија нутације буде заснована на другачијем моделу Земље. После консултација и дискусија на IAU колоквијуму 56 у Варшави 1980. године, покренут је поступак за измену теорије нутације у који су биле укључене комисије Међународне астрономске уније. Коначно је она усвојена под називом *IAU (1980) теорија нутације*. На основи нове теорије сачињене су формуле за рачунање нутације у лонгитуди и у нагибу и одређене су нумеричке вредности чланова

развоја. Резултати се дају у коначном извештају радне групе за нутацију (Seidelmann 1982).

Теорију нутације која је до тада била у употреби разрадио је Е. Вулард и она је имала следеће карактеристике: заснована је на моделу чврсте Земље са динамичком осном симетријом; константа нутације има емпиријску вредност и није у сагласности са другим усвојеним константама; Ојлерово кретање и принудно дневно кретање пола нису укључени у теорију нутације, већ су представљени као део поларног кретања.

Међутим, разна теоријска истраживања и опажачка активност указивали су на недостатке такве теорије нутације. Пре свега, Земља није чврсто тело и ефекти те нечврстоће се одражавају на опажања. Одређивања UT1 и поларног кретања из оптичких опажања звезда, доплеровско и ласерско праћење сателита, ласерско опажање Месеца и радио-интерферометријска мерења имала су довољно високу тачност која је превазилазила тачност редукција по важећој теорији нутације. Осим тога, Цефреј и Ејткинсон су утврдили да тренутна оса ротације, какву је дефинисао Вулард, има ротацију у односу на Земљин фиксни координатни систем са квази-дневном периодом. Приликом редукције опажања ова ротација не може да се занемари, па је на XVI конгресу Уније донета резолуција да се усвоји другачији референтни пол. Опажања су указивала да са Вулардовом теоријом нутације и другачије дефинисаним референтним полом, координатни систем фиксиран за небеско тело још увек ротира у односу на тај референтни пол.

Значи, требало је ревидирати постојећу теорију нутације. Због тога је предузета активност да се нађе низ нутационих коефицијената који би потпуно задовољавали радне стандарде за одређивање UT1 и поларног кретања, за редукцију оптичких опажања звезда, праћење сателита, ласерско праћење Месеца, радио-интерферометријска мерења и друге захтеве високе тачности.

Предложена је солуција која обједињује неколико промена у дотадашњој теорији нутације.

а) Узет је нечврсти модел Земље без осне симетрије. Овакав модел је подложен плимским променама, има тврдо унутрашње и течно спољашње језгро, али океан није узет у обзир.

б) Константе су у сагласности са IAU (1976) системом астрономских константи и одговарају прикупљеним опажачким подацима различитог типа.

в) Референтни пол је биран тако да не постоји дневно или квази-дневно кретање овог пола са гледишта координатног система фиксираног у простору или фиксираног за Земљу. Феномен динамичке промене ширине, другачије познат као принудно дневно кретање пола, садржан је имплицитно у новој теорији нутације. Нова теорија нутације на тај начин укључује споља изазвано принудно кретање Земљине осе, али није укључено слободно

кретање, или тако слижена појава као што је плима океана, атмосферска струјања и кретања океана или језгра. Нови референтни пол представљаће *небески ефемеридски пол*.

*IAU (1976) систем астрономских константи, IAU (1980) теорија нутације и каталог положаја и сопствених кретања фундаменталних звезда FK5, заједно са JPL нумеричком теоријом кретања тела Сунчевог система и са одговарајућим формулама и процедурама, чине једну целину, референтни систем FK5. Овај систем омогућава да за било који тренутак израчунамо положај звезде или неког другог тела на небеској сфери.*

#### 4. Редукција опажања.

##### Векторско рачунање привидног положаја.

За рачунање привидног положаја звезде користи се процедура чији су полазни подаци њен средњи положај (координате  $\alpha_0$  и  $\delta_0$ ) у систему FK5, који се односи на екватор и равнодневицу стандардне епохе J2000.0, као и одговарајуће сопствено кретање (по ректасцензији  $\mu_0$  и по деклинацији  $\mu'_0$ ).

Тренутак  $T$  за који се рачуна привидни положај задајемо у скали барицентричног динамичког времена TDT, уз претпоставку да разлика између ове скале и скале Земљиног динамичког времена није битна за ово свођење, односно, имамо да је  $T = TDB = TDT$ .

Поред положаја и сопственог кретања, потребни су следећи подаци:

- барицентричне координате Земље  $\mathbf{E}_B$  у астрономским јединицама,
- вектор брзине Земље  $\dot{\mathbf{E}}_B$  у астрономским јединицама на дан,
- хелиоцентрични положај Земље  $\mathbf{E}$  у астрономским јединицама.

Вектори  $\mathbf{E}_B$  и  $\dot{\mathbf{E}}_B$  дати су, на пример, у руском Астрономском годишњаку за 1995. годину (Абалакин (ред.) 1994, I део - Ефемериде Сунца, Месеца и планета) на парним страницама од 156 до 170. У истим ефемеридима на страницама 26 до 33 имамо геоцентрични вектор положаја Сунца  $\mathbf{E}_S$  (правоугле координате Сунца). Како је  $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_S$ , једноставно се долази до хелиоцентричног положаја Земље.

Величине  $\mathbf{E}_B$ ,  $\dot{\mathbf{E}}_B$  и  $\mathbf{E}$  се рачунају на основи JPL (Jet Propulsion Laboratory) нумеричке теорије кретања тела Сунчевог система (Сунце, девет планета и Месец). У раду смо користили податке JPL теорије са ознаком DE200/LE200. Барицентрично динамичко време TDB овде фигурише као аргумент. У терминима опште теорије релативности скала земалског динамичког времена TDT одговара сопственом времену, док би скала барицентричног динамичког времена TDB одговарала координатном времену. Ове скале су међусобно повезане преко релација које зависе од динамичког модела Сунчевог система и коришћене метрике. Произвољне константе ових релација тако су изабране да се скале сопственог и координатног времена разликују једна од друге само за величине које се периодично мењају (Абалакин (ред.) 1994, I део, стр. 281 – 282).

Обрачунавајући сопствено кретање звезде и њену годишњу паралаксу добија се *геоцентрични правац* звезде. Уводећи поправку за релативистичко савијање светлосног зрака и годишњу аберацију добијамо *сопствени правац* звезде. Поправљањем сопственог правца

за утицај прецесије и нутације рачунамо *привидни правац*, односно, *привидни положај звезде на небеској сфери*.

Поступак и формуле по којима се рачуна привидни положај звезде наћи ћемо у Астрономском годишњаку (Абалакин (ред.) 1994, II део, стр. 352 – 354) или, ако нам је на располагању, у Астрономском алманаху (Foster and Boksenberg (eds.) 1996, стр. B39 – B41). У овом поглављу размотрени су векторски изрази и дата су објашњења са детаљнијим упутствима за рачунање привидних положаја звезда.

#### 4.1. Геоцентрични и сопствени правац.

Вектор барицентричног положаја звезде  $\mathbf{q}$  за екватор и равнодневицу епохе J2000.0 може да се напише у облику

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_o \cos \delta_o \\ \sin \alpha_o \cos \delta_o \\ \sin \delta_o \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где су  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  правоугле координате тачке на сфери јединичног полупречника.

Вектор сопственог кретања  $\mathbf{m}$ , који се односи на исту епоху, дат је изразом

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_o \sin \alpha_o \cos \delta_o - \mu'_o \cos \alpha_o \sin \delta_o + v\pi \cos \alpha_o \cos \delta_o \\ \mu_o \cos \alpha_o \cos \delta_o - \mu'_o \sin \alpha_o \sin \delta_o + v\pi \sin \alpha_o \cos \delta_o \\ \mu'_o \cos \delta_o + v\pi \sin \delta_o \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Производ  $v\pi$  је радијална брзина звезде сведена на јединично растојање. Сопствено кретање за столеће  $\mu_o$  (по ректасцензији) и  $\mu'_o$  (по деклинацији), као и паралакса  $\pi$  дају се у радијанима. Овде се радијална брзина  $v$  неке звезде изражава у астрономским јединицама на 100 година. Пошто се подаци за радијалну брзину дају у километрима на секунд, треба извршити трансформацију имајући у виду да је

$$1 \text{ km/s} = 21.09495 \text{ AJ}/100g .$$

Ако се још узме у обзир утицај паралаксе на положај, онда се за тренутак  $T$  рачуна геоцентрични вектор положаја звезде

$$\mathbf{P} = \mathbf{q} + t\mathbf{m} - \pi\mathbf{E}_B, \quad (4.3)$$

где је  $t = (\text{JD}(T) - \text{JD}2451545.0)/36525$  интервал времена између заданог тренутка  $T$  и стандардне епохе J2000.0, изражен у јулијанским столећима. Вектор  $\mathbf{P}$  може да се испише у матричном облику:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x + tm_x - \pi E_{Bx} \\ q_y + tm_y - \pi E_{By} \\ q_z + tm_z - \pi E_{Bz} \end{pmatrix} . \quad (4.4)$$

За даље рачунање треба наћи јединични вектор геоцентричног правца звезде

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \quad (4.5)$$

и јединични вектор хелиоцентричног положаја Земље

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} . \quad (4.6)$$

Интензитети вектора  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  рачунају се из формула

$$|\mathbf{P}| = P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} , \quad (4.7)$$

$$|\mathbf{E}| = E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} . \quad (4.8)$$

Пројекције јединичног вектора геоцентричног правца звезде  $(x, y, z)$  и јединичног вектора хелиоцентричног положаја Земље  $(e_x, e_y, e_z)$  на осе правоуглог координатног система рачунају се по формулама

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} \\ \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} \\ \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} \end{pmatrix} . \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_x}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}} \\ \frac{E_y}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}} \\ \frac{E_z}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}} \end{pmatrix} . \quad (4.10)$$

У вектор геоцентричног правца звезде  $\mathbf{p}$  треба увести поправку за гравитационо одступање светлости, па се добија поправљени правац звезде

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p} + \frac{2\mu(\mathbf{e} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{p})}{c^2 E (1 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e})} , \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$  означава скаларни производ вектора  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{e}$  :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} = (p \cdot e) = xe_x + ye_y + ze_z . \quad (4.12)$$



Овде је  $E$  интензитет вектора хелиоцентричног положаја Земље који се рачуна по формули (4.8), док је

$$\mu/c^2 = 9.87 \times 10^{-9} \text{ AJ} .$$

Вектор  $\mathbf{p}_1$  може да се пише у матричном облику:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{2\mu(e_x - (p/e)x)}{c^2 E(1+(p/e))} \\ y + \frac{2\mu(e_y - (p/e)y)}{c^2 E(1+(p/e))} \\ z + \frac{2\mu(e_z - (p/e)z)}{c^2 E(1+(p/e))} \end{pmatrix} . \quad (4.13)$$

Израчунавајући аберацију, добијамо сопствени правац звезде у геоцентричном инерцијалном систему, који се креће брзином  $\mathbf{V}$  у односу на прави координатни систем:

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\beta^{-1} \mathbf{p}_1 + \mathbf{V} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}}{(1+\beta^{-1})}}{(1 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V})} , \quad (4.14)$$

где  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V}$  означава скаларни производ поправљеног геоцентричног правца звезде и вектора брзине Земље

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} = (p_1 V) = x_1 V_x + y_1 V_y + z_1 V_z . \quad (4.15)$$

Вектор брзине Земље  $\mathbf{V}$  се изражава у односу на брзину светлости, па је

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{E}}_B/c = 0.005\,775\,5 \dot{\mathbf{E}}_B .$$

(Пошто је вектор  $\dot{\mathbf{E}}_B$  дат у астрономским јединицама на дан, број испред  $\dot{\mathbf{E}}_B$  представља реципрочну вредност брзине светлости изражене у астрономским јединицама на дан.)

Коефицијент  $\beta^{-1}$  се рачуна по формули

$$\beta^{-1} = \sqrt{(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{V})} = \sqrt{(1 - V_x V_x - V_y V_y - V_z V_z)} . \quad (4.16)$$

Вектор  $\mathbf{p}_2$  може да се напише у облику:

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta^{-1} x_1 + V_x + \frac{(p_1 V) V_x}{(1+\beta^{-1})}}{(1+(p_1 V))} \\ \frac{\beta^{-1} y_1 + V_y + \frac{(p_1 V) V_y}{(1+\beta^{-1})}}{(1+(p_1 V))} \\ \frac{\beta^{-1} z_1 + V_z + \frac{(p_1 V) V_z}{(1+\beta^{-1})}}{(1+(p_1 V))} \end{pmatrix} . \quad (4.17)$$

По последњој формули се, дакле, рачунају компоненте вектора сопственог правца.

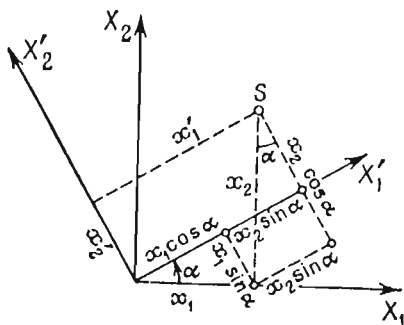
## 4.2. Рачунање прецесије и нутације.

Да бисмо из сопственог правца звезде добили привидни правац потребно је још израчунати утицај прецесије и нутације на положај звезде.

Пре него што буду изложене формуле за израчунавање утицаја прецесије и нутације, задржаћемо се на примени матрица за рачунање ротације координатних система, а потом на добијању прецесионе и нутационе матрице.

### 4.2.1. Матрице елементарне ротације.

Задатак ротације координатног система који се јавља при претварању координата и неким рачунањима промена координатног система решава се применом матрица ротације.



Слика 4.1. Ротација координатног система у равни.

Ради једноставности, узећемо ротацију координатног система у равни (сл. 4.1.). Нека су дате координатне осе  $X_1$ ,  $X_2$  које треба ротацијом за угао  $\alpha$  у директном смеру (супротно смеру кретања казаљки на часовнику) довести у нови положај  $X'_1$ ,  $X'_2$ .

Геометријско разматрање односа координата у ова два система даће нам њихову међусобну везу (Гуревич 1979, стр. 35 – 43):

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ове две једначине можемо записати у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

где се на десној страни појављује производ матрица.

Матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

назива се *матрицом елементарне ротације*. Уводећи нове ознаке  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  за координатне осе и узимајући да ово претварање координата представља пример ротације координатног система око  $Z$  – осе, када је  $z' = z$ , онда матрица елементарне ротације гласи:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

У општем случају имамо

за ротацију око  $X$  – осе:

$$p(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} ; \quad (4.19)$$

за ротацију око  $Y$  – осе:

$$q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} ; \quad (4.20)$$

за ротацију око  $Z$  – осе:

$$r(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.21)$$

Ове матрице важе, значи, уколико се систем ротира у директном смеру. Ако осе  $X$ ,  $Y$  ротацијом у ретроградном смеру за угао  $\alpha$  преместимо у положај  $X'$ ,  $Y'$ , из геометријских разматрања могу да се изведу формуле за координате тачке у новом систему

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha , \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ово се, такође, добија према формулама (4.18) ако уместо  $\alpha$  ставимо  $-\alpha$ .

Значи, приликом ротирања оса у смеру кретања казаљки на часовнику имамо за ротацију око  $X$  – осе:

$$p(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} ; \quad (4.23)$$

за ротацију око  $Y$  – осе:

$$q(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} ; \quad (4.24)$$

за ротацију око  $Z$  – осе:

$$r(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.25)$$

Две узастопне ротације, на пример,

$$x' = r(\alpha) x \quad , \quad x'' = p(-\beta) x'$$

могу се заменом објединити у један израз:

$$x'' = p(-\beta) r(\alpha) x \quad . \quad (4.26)$$

Примењујући узастопно три елементарне ротације увек може да се оствари прелазак из једног координатног система у неки други који је произвољно оријентисан у односу на претходни.

У примени матрица елементарне ротације важе следећа правила:

- *утврдити по каквом редоследу, око којих оса, за које углове и у ком смеру треба извршити ротацију;*
- *полазећи од тога, исписати усвојеним ознакама редослед ротационих матрица здесна улево;*
- *заменити скраћено обележавање матрица самим матрицама и множити их по усвојеним правилима;*
- *ако се ротира сферни координатни систем, треба га претворити у правоугли.*

Држећи се наведених правила извешћемо, као пример, Гаусову групу образаца датих у уџбенику опште астрономије Шеварлића и Бркића (1971, стр. 26 – 28). С обзиром да се ротира систем  $X Y Z$  око осе  $X$  за угао  $c$  у ретроградном смеру (сл. 4.2.), имамо

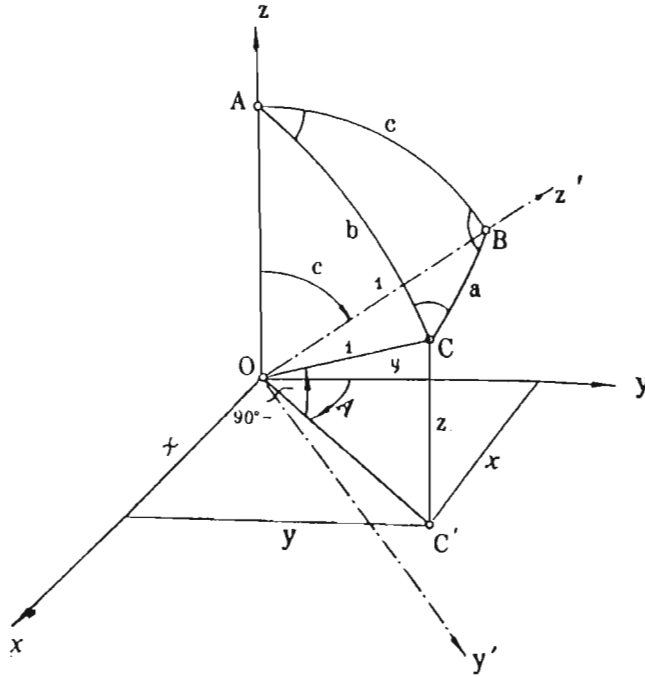
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = p(-c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad . \quad (4.27)$$

Везујући елементе  $A$  и  $b$  за координатни систем  $X Y Z$ , а елементе  $B$  и  $a$  за нови систем  $X' Y' Z'$ , може се видети да је

$$\begin{aligned} x &= \cos(90^\circ - b) \sin A = \sin b \sin A \quad , \\ y &= \cos(90^\circ - b) \cos A = \sin b \cos A \quad , \\ z &= \sin(90^\circ - b) = \cos b \quad , \end{aligned} \quad (4.28)$$

односно,

$$\begin{aligned} x' &= \cos(90^\circ - a) \sin(180^\circ - B) = \sin a \sin B \quad , \\ y' &= \cos(90^\circ - a) \cos(180^\circ - B) = -\sin a \cos B \quad , \\ z' &= \sin(90^\circ - a) = \cos a \quad . \end{aligned} \quad (4.29)$$



Слика 4.2. Ротација система при извођењу Гаусове групе образаца.

Увођењем (4.28) и (4.29) у формулу (4.27) и исписивањем матрице  $p(-c)$  према (4.23), добија се израз

$$\begin{pmatrix} \sin a \sin B \\ -\sin a \cos B \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & -\sin c \\ 0 & \sin c & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin b \sin A \\ \sin b \cos A \\ \cos b \end{pmatrix},$$

одакле се, после множења матрица на десној страни, изводи Гаусова група образаца (у нешто измењеном виду) :

$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ -\sin a \cos B &= \cos c \sin b \cos A - \sin c \cos b, \\ \cos a &= \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Као пример може, такође, да се узме претварање хоризонтских координата у месне екваторске, уз претпоставку да је  $X$  - оса усмерена ка западној тачки:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \sin t \\ \cos \delta \cos t \\ \sin \delta \end{pmatrix} = p(90^\circ - \varphi) \begin{pmatrix} \sin z \sin A \\ \sin z \cos A \\ \cos z \end{pmatrix},$$

односно,

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \sin t \\ \cos \delta \cos t \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin z \sin A \\ \sin z \cos A \\ \cos z \end{pmatrix},$$

одакле је, после множења матрица

$$\begin{aligned}\cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos t &= \sin \varphi \sin z \cos A + \cos \varphi \cos z, \\ \sin \delta &= -\cos \varphi \sin z \cos A + \sin \varphi \cos z.\end{aligned}$$

У обрнутом случају, претварање месних екваторских координата у хоризонтске изводи се према следећој формули:

$$\begin{pmatrix} \sin z \sin A \\ \sin z \cos A \\ \cos z \end{pmatrix} = p(-90^\circ + \varphi) \begin{pmatrix} \cos \delta \sin t \\ \cos \delta \cos t \\ \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Кад се исписише матрица  $p(-90^\circ + \varphi)$  у развијеном облику, имамо

$$\begin{pmatrix} \sin z \sin A \\ \sin z \cos A \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \sin t \\ \cos \delta \cos t \\ \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Коначно се добија

$$\begin{aligned}\sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ \sin z \cos A &= \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta, \\ \cos z &= -\cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta.\end{aligned}$$

За претварање небеских екваторских координата у еклиптичке, уз претпоставку да је  $X$  – оса усмерена према  $\gamma$  – тачки, имамо формулу

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = p(\epsilon) \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix},$$

а за обрнуто претварање

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = p(-\epsilon) \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

У наведеним примерима  $\varphi$  је географска ширина, а  $\epsilon$  је нагиб еклиптике према екватору.

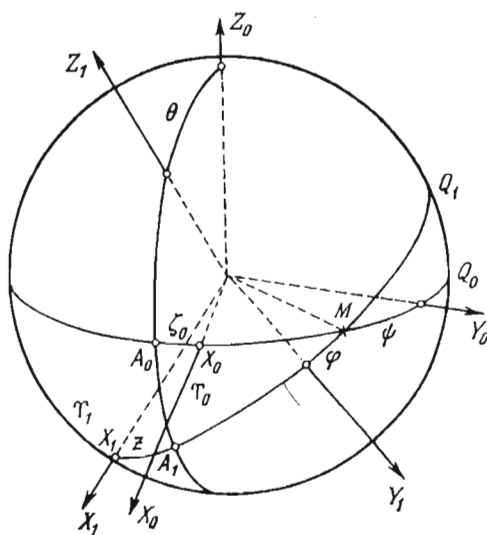
#### 4.2.2. Прецесиона матрица.

После рекапитулације основних правила која се односе на ротацију координатних система, можемо да се позабавимо матрицом прецесије. Другим речима, на овом месту нас интересује како се преко матрица ротације израчунава утицај прецесије на координате небеског тела.

Нека је дат координатни систем  $X_1 Y_1 Z_1$  који се помера у односу на систем  $X_0 Y_0 Z_0$  услед утицаја прецесије (Абалакин 1979, стр. 69 – 71). Осе  $X_0$  и  $Y_0$  леже у равни екватора

чији је положај дат за неки почетни тренутак  $T_0$ , при чему је оса  $X_0$  дефинисана положајем  $\gamma$  – тачке у том истом тренутку. Дат је, како је на слици 4.3. приказано, за тренутак  $T_1$  положај равни екватора у којој се налазе осе  $X_1$  и  $Y_1$ , где је оса  $X_1$  дефинисана положајем  $\gamma$  – тачке у тренутку  $T_1$ . Оријентација координатног система  $X_1 Y_1 Z_1$  биће одређена помоћу Ојлерових углова  $\psi$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$  (Анђелић и Стојановић 1966, стр. 49 – 51), који по Њукомбу (Newcomb 1960, стр. 239 – 240) имају ознаке  $\zeta_0$ ,  $z$  и  $\theta$ .

Иначе, називи ових углова потичу из астрономије:  $\psi$  се зове углом прецесије,  $\varphi$  углом сопствене ротације, а  $\vartheta$  је угао нутације. Права која спаја координатни почетак и тачку  $M$  се назива линијом чворова.



Слика 4.3. Ојлерови углови.

Са слике 4.3 се види следеће:

- лук  $MY_0$  једнак је луку  $A_0X_0$  и одговара углу  $\psi$ , односно, углу  $\zeta_0$ ;
- лук  $MY_1$  једнак је луку  $A_1X_1$  и одговара углу  $\varphi$ , односно, углу  $z$ ;
- лук  $Z_0Z_1$  одговара углу  $\vartheta$ , односно, углу  $\theta$ .

Ојлерови углови  $\zeta_0$ ,  $z$  и  $\theta$  представљају прецесионе параметре за свођење  $\gamma$  – тачке са епохе  $T_0$  на произвољну епоху  $T$ . Њихове вредности према Лискеовим рачунањима (Lieske 1979), ако је  $T_0 = J2000.0$ , износе:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 2306'' \cdot 2181 t + 0'' \cdot 30188 t^2 + 0'' \cdot 017998 t^3, \\ z &= 2306'' \cdot 2181 t + 1'' \cdot 09468 t^2 + 0'' \cdot 018203 t^3, \\ \theta &= 2004'' \cdot 3109 t - 0'' \cdot 42665 t^2 - 0'' \cdot 041833 t^3, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где је, као што смо већ споменули

$$t = (\text{JD}(T) - \text{JD}2451545.0) / 36525.$$

Уколико хоћемо да трансформишемо систем  $X_o Y_o Z_o$  у систем  $X_1 Y_1 Z_1$  узастопним ротацијама, прво бисмо га ротирали око  $Z$  – осе за угао  $(90^\circ - \zeta_o)$  у директном смеру до поклапања  $X$  – осе са линијом чворова, затим око  $X$  – осе (односно, линије чворова) за угао  $\theta$  у директном смеру и на крају око осе  $Z$  – осе за угао  $(90^\circ + z)$  у ретроградном смеру, па је матрица прецесије

$$\mathcal{P} = r(-90^\circ - z) p(\theta) r(90^\circ - \zeta_o).$$

Како су лукови  $A_o M$  и  $A_1 M$  једнаки  $90^\circ$ , матрицу прецесије можемо добити и на тај начин што тачку  $X_o$  доводимо до поклапања са  $A_o$  ротацијом око  $Z$  – осе, затим до поклапања са  $A_1$  ротацијом око  $Y$  – осе и, коначно, до поклапања са  $X_1$  ротацијом око  $Z$  – осе. Одговарајућа матрица прецесије гласи:

$$\mathcal{P} = r(-z) q(\theta) r(-\zeta_o). \quad (4.32)$$

Кад су нам познати прецесиони параметри  $\zeta_o$ ,  $z$  и  $\theta$  који одређују положај средње равнодневице и средњег екватора, можемо да пређемо на рачунање матрице прецесије. Ротационе матрице у формули (4.32) исписујемо у развијеном облику према (4.20) и (4.25), па добијамо елементе прецесионе матрице :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta_o & -\sin \zeta_o & 0 \\ \sin \zeta_o & \cos \zeta_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos z \cos \theta & -\sin z & -\cos z \sin \theta \\ \sin z \cos \theta & \cos z & -\sin z \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta_o & -\sin \zeta_o & 0 \\ \sin \zeta_o & \cos \zeta_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos z \cos \theta \cos \zeta_o - \sin z \sin \zeta_o & -\cos z \cos \theta \sin \zeta_o - \sin z \cos \zeta_o & -\cos z \sin \theta \\ \sin z \cos \theta \cos \zeta_o + \cos z \sin \zeta_o & -\sin z \cos \theta \sin \zeta_o + \cos z \cos \zeta_o & -\sin z \sin \theta \\ \sin \theta \cos \zeta_o & -\sin \theta \sin \zeta_o & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.33) \end{aligned}$$

Ова се матрица користи за израчунавање утицаја прецесије на координате звезда, односно, за превођење положаја са једне епохе на другу. Потребно је само одредити одговарајуће вредности параметара  $\zeta_o$ ,  $z$  и  $\theta$  према формулама (4.31).

### 4.2.3. Нутациона матрица.

У сагласности са препоруком Међународне астрономске уније вредности нутације у лонгитуди  $\Delta\psi$  и  $d\psi$  и нутације у нагибу  $\Delta\epsilon$  и  $d\epsilon$  рачунате су по теорији нутације IAU (1980). Ознаке  $\Delta\psi$  и  $\Delta\epsilon$  односе се на дугопериодичне чланове нутације, а ознаке  $d\psi$  и  $d\epsilon$  на краткпериодичне. Основне формуле за рачунање нутације, развој фундаменталних



аргумената  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$  и  $\Omega$ , као и таблице елемената дугопериодичне и краткопериодичне нутације овде су припремљене према Астрономском годишњаку за 1995. годину (Абалакин (ред.) 1994, стр. 314 – 317).

Нутација у лонгитуди и нагибу рачуна се у виду сума

$$\begin{aligned}\Delta\psi + d\psi &= \sum_{i=1}^{106} (m_i + n_i t) \sin z_i, \\ \Delta\varepsilon + d\varepsilon &= \sum_{i=1}^{106} (p_i + r_i t) \sin z_i.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Аргумент  $z_i$  се рачуна на основи формуле

$$z_i = a_i l + b_i l' + c_i F + d_i D + e_i \Omega.\tag{4.35}$$

Развој фундаменталних аргумената  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$  и  $\Omega$  има следећи облик

$$\begin{aligned}l &= 485866''\ 733 + (1325^r + 715922''\ 633) t + 31''\ 310 t^2 + 0''\ 064 t^3 \\ l' &= 1287099''\ 804 + (99^r + 1292581''\ 224) t - 0''\ 577 t^2 - 0''\ 012 t^3 \\ F &= 335778''\ 877 + (1342^r + 295263''\ 137) t - 13''\ 257 t^2 + 0''\ 011 t^3 \\ D &= 1072261''\ 307 + (1236^r + 1105601''\ 328) t - 6''\ 891 t^2 + 0''\ 019 t^3 \\ \Omega &= 450160''\ 280 - (5^r + 482890''\ 539) t + 7''\ 455 t^2 + 0''\ 008 t^3,\end{aligned}\tag{4.36}$$

где је:

$l$  - средња аномалија Месеца,

$l'$  - средња аномалија Сунца,

$F$  - средњи аргумент ширине Месеца,

$D$  - средња елонгација Месеца и Сунца,

$\Omega$  - средња дужина узлазног чвора Месечеве орбите на еклиптици;

док је

$$1^r = 360^\circ = 1296000''\ 0.$$

Да бисмо израчунали величине  $\Delta\psi + d\psi$  и  $\Delta\varepsilon + d\varepsilon$ , поред фундаменталних аргумената чије су вредности дате развојем у ред (4.36), користимо још Таблице 4.1. и 4.2. Таблица 4.1. (редни бројеви од 1 до 30) садржи дугопериодичне чланове нутације, а Таблица 4.2. (редни бројеви од 31 до 106) садржи краткопериодичне чланове. У првом ступцу таблица дат је редни број  $i$ ; од другог до шестог ступца се налазе коефицијенти  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $e_i$  (види формулу 4.35); у седмом и осмом ступцу се налазе вредности  $m_i$  и  $n_i$  (види формулу 4.34) помоћу којих се рачуна нутација у лонгитуди; а у деветом и десетом ступцу су вредности  $p_i$  и  $r_i$  (види формулу 4.34) за рачунање нутације у нагибу. У једанаестом ступцу је наведена периода  $P_i$  у данима.

Таблица 4.1. Дугопериодични чланови нутације ( $i$  – редни број;  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  – коефицијенти у (4.35);  $m_i, n_i, p_i, r_i$  – коефицијенти у (4.34);  $P_i$  – периода у данима).

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$m_i$	$n_i$	$p_i$	$r_i$	$P_i$
1	0	0	0	0	1	-17".1996	-0".01742	9".2025	0".00089	6798.4
2	0	0	0	0	2	0".2062	0".00002	-0".0895	0".00005	3399.2
3	-2	0	2	0	1	0".0046	0".00000	-0".0024	0".00000	1305.5
4	2	0	-2	0	0	0".0011	0".00000	0".0000	0".00000	1095.2
5	-2	0	2	0	2	-0".0003	0".00000	0".0001	0".00000	1615.7
6	1	-1	0	-1	0	-0".0003	0".00000	-0".0000	-0".00000	3232.9
7	0	-2	2	-2	1	-0".0002	0".00000	0".0001	0".00000	6786.3
8	2	0	-2	0	1	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	943.2
9	0	0	2	-2	2	-1".3187	-0".00016	0".5736	-0".00031	182.6
10	0	1	0	0	0	0".1426	-0".00034	0".0054	-0".00001	365.3
11	0	1	2	-2	2	-0".0517	0".00012	0".0224	-0".00006	121.7
12	0	-1	2	-2	2	0".0217	-0".00005	-0".0095	0".00003	365.2
13	0	0	2	-2	1	0".0129	0".00001	-0".0070	0".00000	177.8
14	2	0	0	-2	0	0".0048	0".00000	0".0001	0".00000	205.9
15	0	0	2	-2	0	-0".0022	0".00000	-0".0000	0".00000	173.3
16	0	2	0	0	0	0".0017	-0".00001	0".0000	0".00000	182.6
17	0	1	0	0	1	-0".0015	0".00000	0".0009	0".00000	386.0
18	0	2	2	-2	2	-0".0016	0".00001	0".0007	0".00000	91.3
19	0	-1	0	0	1	-0".0012	0".00000	0".0006	0".00000	346.6
20	-2	0	0	2	1	-0".0006	0".00000	0".0003	0".00000	199.8
21	0	-1	2	-2	1	-0".0005	0".00000	0".0003	0".00000	346.6
22	2	0	0	-2	1	0".0004	0".00000	-0".0002	0".00000	212.3
23	0	1	2	-2	1	0".0004	0".00000	-0".0002	0".00000	119.6
24	1	0	0	-1	0	-0".0004	0".00000	0".0000	0".00000	411.8
25	2	1	0	-2	0	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	131.7
26	0	0	-2	2	1	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	169.0
27	0	1	-2	2	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	329.8
28	0	1	0	0	2	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	409.2
29	-1	0	0	1	1	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	388.3
30	0	1	2	-2	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	117.5

Таблица 4.2. Краткопериодични чланови нутације (ознаке као у Таблици 4.1.).

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$m_i$	$n_i$	$p_i$	$r_i$	$P_i$
31	0	0	2	0	2	-0".2274	-0".00002	0".0977	-0".00005	31.7
32	1	0	0	0	0	0".0712	0".00001	-0".0007	0".00000	27.6
33	0	0	2	0	1	-0".0386	-0".00004	0".0200	0".00000	13.6
34	1	0	2	0	2	-0".0301	0".00000	0".0129	-0".00001	9.1
35	1	0	0	-2	0	-0".0158	0".00000	-0".0001	0".00000	31.8
36	-1	0	2	0	2	0".0123	0".00000	-0".0053	0".00000	27.1
37	0	0	0	2	0	0".0063	0".00000	-0".0002	0".00000	14.8
38	1	0	0	0	1	0".0063	0".00001	-0".0033	0".00000	27.7
39	-1	0	0	0	1	-0".0058	-0".00001	0".0033	0".00000	27.4
40	-1	0	2	2	2	-0".0059	0".00000	0".0026	0".00000	9.6
41	1	0	2	0	1	-0".0051	0".00000	0".0027	0".00000	9.1
42	0	0	2	2	2	-0".0038	0".00000	0".0016	0".00000	7.1
43	2	0	0	0	0	0".0029	0".00000	-0".0001	0".00000	13.8
44	1	0	2	-2	2	0".0029	0".00000	-0".0012	0".00000	23.9
45	2	0	2	0	2	-0".0031	0".00000	0".0013	0".00000	6.9
46	0	0	2	0	0	0".0026	0".00000	-0".0001	0".00000	13.6
47	-1	0	2	0	1	0".0021	0".00000	-0".0010	0".00000	27.0
48	-1	0	0	2	1	0".0016	0".00000	-0".0008	0".00000	32.0
49	1	0	0	-2	1	-0".0013	0".00000	0".0007	0".00000	31.7
50	-1	0	2	2	1	-0".0010	0".00000	0".0005	0".00000	9.5
51	1	1	0	-2	0	-0".0007	0".00000	0".0000	0".00000	34.8
52	0	1	2	0	2	0".0007	0".00000	-0".0003	0".00000	13.2
53	0	-1	2	0	2	-0".0007	0".00000	0".0003	0".00000	14.2
54	1	0	2	2	2	-0".0008	0".00000	0".0003	0".00000	5.6
55	1	0	0	2	0	0".0006	0".00000	0".0000	0".00000	9.6
56	2	0	2	-2	2	0".0006	0".00000	-0".0003	0".00000	12.8
57	0	0	0	2	1	-0".0006	0".00000	0".0003	0".00000	14.8
58	0	0	2	2	1	-0".0007	0".00000	0".0003	0".00000	7.1
59	1	0	2	-2	1	0".0006	0".00000	-0".0003	0".00000	23.9
60	0	0	0	-2	1	-0".0005	0".00000	0".0003	0".00000	14.7

Таблица 4.2. Краткопериодични чланови путације (наставка).

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$m_i$	$n_i$	$p_i$	$r_i$	$P_i$
61	1	-1	0	0	0	0".0005	0".00000	0".0000	0".00000	29.8
62	2	0	2	0	1	-0".0005	0".00000	0".0003	0".00000	6.9
63	0	1	0	-2	0	-0".0004	0".00000	0".0000	0".00000	15.4
64	1	0	-2	0	0	0".0004	0".00000	0".0000	0".00000	26.9
65	0	0	0	1	0	-0".0004	0".00000	0".0000	0".00000	29.5
66	1	1	0	0	0	-0".0003	0".00000	0".0000	0".00000	25.6
67	1	0	2	0	0	0".0003	0".00000	0".0000	0".00000	9.1
68	1	-1	2	0	2	-0".0003	0".00000	0".0001	0".00000	9.4
69	-1	-1	2	2	2	-0".0003	0".00000	0".0001	0".00000	9.8
70	-2	0	0	0	1	-0".0002	0".00000	0".0001	0".00000	13.7
71	3	0	2	0	2	-0".0003	0".00000	0".0001	0".00000	5.5
72	0	-1	2	2	2	-0".0003	0".00000	0".0001	0".00000	7.2
73	1	1	2	0	2	0".0002	0".00000	-0".0001	0".00000	8.9
74	-1	0	2	-2	1	-0".0002	0".00000	0".0001	0".00000	32.6
75	2	0	0	0	1	0".0002	0".00000	-0".0001	0".00000	13.8
76	1	0	0	0	2	-0".0002	0".00000	0".0001	0".00000	27.8
77	3	0	0	0	0	0".0002	0".00000	0".0000	0".00000	9.2
78	0	0	2	1	2	0".0002	0".00000	-0".0001	0".00000	9.3
79	-1	0	0	0	2	0".0001	0".00000	-0".0001	0".00000	27.3
80	1	0	0	-4	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	10.1
81	-2	0	2	2	2	0".0001	0".00000	-0".0001	0".00000	14.6
82	-1	0	2	4	2	-0".0002	0".00000	0".0001	0".00000	5.8
83	2	0	0	-4	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	15.9
84	1	1	2	-2	2	0".0001	0".00000	-0".0001	0".00000	22.5
85	1	0	2	2	1	-0".0001	0".00000	0".0001	0".00000	5.6
86	-2	0	2	4	2	-0".0001	0".00000	0".0001	0".00000	7.3
87	-1	0	4	0	2	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	9.1
88	1	-1	0	-2	0	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	29.3
89	2	0	2	-2	1	0".0001	0".00000	-0".0001	0".00000	12.8
90	2	0	2	2	2	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	4.7

Таблица 4.2. Краткопериодични чланови нутације (наставак).

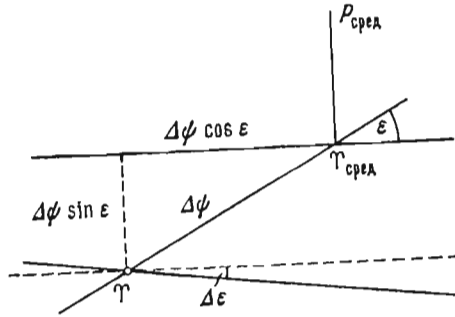
$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$m_i$	$n_i$	$p_i$	$r_i$	$P_i$
91	1	0	0	2	1	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	9.6
92	0	0	4	-2	2	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	12.7
93	3	0	2	-2	2	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	8.7
94	1	0	2	-2	2	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	23.8
95	0	1	2	0	1	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	13.1
96	-1	-1	0	2	1	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	35.0
97	0	0	-2	0	1	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	13.6
98	0	0	2	-1	2	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	25.4
99	0	1	0	2	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	14.2
100	1	0	-2	-2	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	9.5
101	0	-1	2	0	1	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	14.2
102	1	1	0	-2	1	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	34.7
103	1	0	-2	2	0	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	32.8
104	2	0	0	2	0	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	7.1
105	0	0	2	4	2	-0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	4.8
106	0	1	0	1	0	0".0001	0".00000	0".0000	0".00000	27.3

Вредности  $\Delta\psi + d\psi$  и  $\Delta\epsilon + d\epsilon$ , као и средњи нагиб еклиптике  $\epsilon$  који је дат развојем у ред за тренутак  $T$ :

$$\epsilon = 84381''.448 - 46''.8150 t - 0''.00059 t^2 + 0''.001813 t^3, \quad (4.37)$$

омогућавају да израчунамо елементе нутационе матрице. Вредност параметра  $t$  који се јавља у развојима (4.36) и (4.37) већ нам је позната.

Служећи се сликом 4.4. и уз помоћ матрица елементарне ротације можемо добити нутациону матрицу. Дакле, најпре треба ротирати екваторски систем око осе  $X$  (која се поклапа са правцем према  $\gamma$  – тачки) за угао  $\epsilon$  у директном смеру. Затим око осе  $Z$  у ретроградном смеру за угао  $\Delta\psi$  који представља нутацију у лонгитуди. На крају имамо ротацију око осе  $X$  за угао  $\epsilon + \Delta\epsilon$  у ретроградном смеру. Овде  $\Delta\epsilon$  представља нутацију у нагибу. Ради једноставнијег приказа, уместо  $\Delta\psi + d\psi$  стављена је ознака  $\Delta\psi$ , а уместо  $\Delta\epsilon + d\epsilon$  имамо  $\Delta\epsilon$ .



Слика 4.4. Утицај нутације.

Према правилу да се матрице елементарне ротације испишују по редоследу здесна улево, нутациону матрицу рачунамо из производа

$$\mathcal{N} = p(-\epsilon - \Delta\epsilon) r(-\Delta\psi) p(\epsilon). \quad (4.38)$$

Елементе нутационе матрице добијамо испишујући матрице ротације из формуле (4.38) у развијеном облику и множећи их по познатим правилима:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) & -\sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon + \Delta\epsilon) & \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \sin \Delta\psi & \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \cos \Delta\psi & -\sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \\ \sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \sin \Delta\psi & \sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \cos \Delta\psi & \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

После множења добијају се елементи нутационе матрице:

$$n_{11} = \cos \Delta\psi,$$

$$n_{12} = -\sin \Delta\psi \cos \epsilon,$$

$$n_{13} = -\sin \Delta\psi \sin \epsilon,$$

$$n_{21} = \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \sin \Delta\psi,$$

$$n_{22} = \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \cos \Delta\psi \cos \epsilon + \sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \sin \epsilon,$$

$$n_{23} = \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \cos \Delta\psi \sin \epsilon - \sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \cos \epsilon,$$

$$\begin{aligned}
n_{31} &= \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \sin \Delta\psi , \\
n_{32} &= \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \Delta\psi \cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \sin \varepsilon , \\
n_{33} &= \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \Delta\psi \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \varepsilon .
\end{aligned}$$

Пошто су  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  врло мале вредности, имамо практично да је  $\cos \Delta\psi = 1$  и  $\cos \Delta\varepsilon = 1$ . Изражавајући углове  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  аналитичком мером, њихове синусе можемо да заменимо самим угловима; дакле,  $\sin \Delta\psi = \Delta\psi$  и  $\sin \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon$ . Како је

$$\begin{aligned}
\cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) &= \cos \varepsilon - \Delta\varepsilon \sin \varepsilon , \\
\sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) &= \sin \varepsilon + \Delta\varepsilon \cos \varepsilon ;
\end{aligned}$$

једноставно се израчунава

$$\begin{aligned}
n_{22} &= \cos^2 \varepsilon - \Delta\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \sin^2 \varepsilon + \Delta\varepsilon \cos \varepsilon \sin \varepsilon = 1 , \\
n_{23} &= \cos \varepsilon \sin \varepsilon - \Delta\varepsilon \sin^2 \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \varepsilon - \Delta\varepsilon \cos^2 \varepsilon = -\Delta\varepsilon , \\
n_{32} &= \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \Delta\varepsilon \cos^2 \varepsilon - \cos \varepsilon \sin \varepsilon + \Delta\varepsilon \sin^2 \varepsilon = \Delta\varepsilon , \\
n_{33} &= \sin^2 \varepsilon + \Delta\varepsilon \cos \varepsilon \sin \varepsilon + \cos^2 \varepsilon - \Delta\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon = 1 .
\end{aligned}$$

Сем тога, елементе  $n_{21}$  и  $n_{31}$  добијамо занемарујући чланове другог реда:

$$\begin{aligned}
n_{21} &= \Delta\psi \cos \varepsilon , \\
n_{31} &= \Delta\psi \sin \varepsilon .
\end{aligned}$$

Коначно, нутациона матрица гласи

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} , \quad (4.39)$$

где су углови  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  изражени аналитичком мером.

### 4.3. Привидни правац и привидни положај.

Из сопственог правца звезде у једначини (4.14), који смо добили уводећи поправку за гравитационо одступање светлости и годишњу аберацију, изводи се привидни геоцентрични правац звезде  $\mathbf{p}_3$  по формули

$$\mathbf{p}_3 = \mathcal{R} \mathbf{p}_2 , \quad (4.40)$$

где  $\mathcal{R}$  означава матрицу укупног утицаја прецесије и нутације на вектор сопственог правца. Матрица  $\mathcal{R}$  се добија као производ  $\mathcal{N} \times \mathcal{P}$ , односно, пошто најпре рачунамо утицај преце-

сије, а затим нутације, матрица прецесије се налази са десне, а матрица нутације са леве стране.

Укупан утицај прецесије и нутације на положај звезде може у матричном облику да се прикаже на следећи начин:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = p(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) \ r(-\Delta\psi) \ p(\varepsilon) \ r(-z) \ q(\theta) \ r(-\zeta_o) \ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} . \quad (4.41)$$

Остаје још да одредимо елементе матрице  $\mathcal{R} = \mathcal{N} \times \mathcal{P}$ , која може да се напише у развијеном облику на следећи начин:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} . \quad (4.42)$$

Полазећи од тога да се елементи  $r_{ij}$  рачунају као зборови производа:

$$r_{11} = n_{11}p_{11} + n_{12}p_{21} + n_{13}p_{31} \ ,$$

$$r_{12} = n_{11}p_{12} + n_{12}p_{22} + n_{13}p_{32} \ ,$$

$$r_{13} = n_{11}p_{13} + n_{12}p_{23} + n_{13}p_{33} \ ,$$

$$r_{21} = n_{21}p_{11} + n_{22}p_{21} + n_{23}p_{31} \ ,$$

$$r_{22} = n_{21}p_{12} + n_{22}p_{22} + n_{23}p_{32} \ ,$$

$$r_{23} = n_{21}p_{13} + n_{22}p_{23} + n_{23}p_{33} \ ,$$

$$r_{31} = n_{31}p_{11} + n_{32}p_{21} + n_{33}p_{31} \ ,$$

$$r_{32} = n_{31}p_{12} + n_{32}p_{22} + n_{33}p_{32} \ ,$$

$$r_{33} = n_{31}p_{13} + n_{32}p_{23} + n_{33}p_{33} \ ,$$

пошто су једначинама (4.33) и (4.39) дати елементи  $p_{ij}$  прецесионе и елементи  $n_{ij}$  нутационе матрице, налазимо да је

$$r_{11} = (\cos z \cos \theta \cos \zeta_o - \sin z \sin \zeta_o) - \Delta\psi \cos \varepsilon (\sin z \cos \theta \cos \zeta_o + \cos z \sin \zeta_o) - \Delta\psi \sin \varepsilon \sin \theta \cos \zeta_o \ ,$$

$$r_{12} = -(\cos z \cos \theta \sin \zeta_o + \sin z \cos \zeta_o) + \Delta\psi \cos \varepsilon (\sin z \cos \theta \sin \zeta_o - \cos z \cos \zeta_o) + \Delta\psi \sin \varepsilon \sin \theta \sin \zeta_o \ ,$$

$$r_{13} = -\cos z \sin \theta + \Delta\psi \cos \varepsilon \sin z \sin \theta - \Delta\psi \sin \varepsilon \cos \theta \ ,$$



$$r_{21} = \Delta\psi \cos \varepsilon (\cos z \cos \theta \cos \zeta_o - \sin z \sin \zeta_o) + (\sin z \cos \theta \cos \zeta_o + \cos z \sin \zeta_o) - \Delta\varepsilon \sin \theta \cos \zeta_o ,$$

$$r_{22} = -\Delta\psi \cos \varepsilon (\cos z \cos \theta \sin \zeta_o + \sin z \cos \zeta_o) - (\sin z \cos \theta \sin \zeta_o - \cos z \cos \zeta_o) + \Delta\varepsilon \sin \theta \sin \zeta_o ,$$

$$r_{23} = -\Delta\psi \cos \varepsilon \cos z \sin \theta - \sin z \sin \theta - \Delta\varepsilon \cos \theta ,$$

$$r_{31} = \Delta\psi \sin \varepsilon (\cos z \cos \theta \cos \zeta_o - \sin z \sin \zeta_o) + \Delta\varepsilon (\sin z \cos \theta \cos \zeta_o + \cos z \sin \zeta_o) + \sin \theta \cos \zeta_o ,$$

$$r_{32} = -\Delta\psi \sin \varepsilon (\cos z \cos \theta \sin \zeta_o + \sin z \cos \zeta_o) - \Delta\varepsilon (\sin z \cos \theta \sin \zeta_o - \cos z \cos \zeta_o) - \sin \theta \sin \zeta_o ,$$

$$r_{33} = -\Delta\psi \sin \varepsilon \cos z \sin \theta - \Delta\varepsilon \sin z \sin \theta + \cos \theta .$$

Сагласно (4.40), пошто смо израчунали елементе матрице  $\mathcal{R}$ , налазимо компоненте вектора  $\mathbf{p}_3$  по формулама:

$$x_3 = r_{11}x_2 + r_{12}y_2 + r_{13}z_2 ,$$

$$y_3 = r_{21}x_2 + r_{22}y_2 + r_{23}z_2 , \quad (4.42)$$

$$z_3 = r_{31}x_2 + r_{32}y_2 + r_{33}z_2 .$$

Ако пођемо од тога да је  $X$  – оса управљена ка положају  $\gamma$  – тачке за дати тренутак  $T$ , а  $Z$  – оса ка полу екватора за тај исти тренутак, из једноставног геометријског разматрања можемо да изведемо формуле које дају везу између компонената вектора привидног положаја, с једне стране, и привидне ректасцензије и деклинације, с друге:

$$\alpha = \arctg \frac{y_3}{x_3} , \quad \delta = \arctg \frac{z_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}} . \quad (4.43)$$

Квадрант за привидну ректасцензију  $\alpha$  одређује се према знаку  $x_3$  и  $y_3$ , а знак деклинације  $\delta$  исти је као знак компоненте  $z_3$ .

*На овај начин су добијене, за произвољни тренутак  $T$ , привидне геоцентричне екваторске координате неке звезде у FK5 референтном систему.*

## 5. Одређивања геодетске астрономије.

### Примена диференцијалних образаца.

Геодетска астрономија је област астрономије у којој се изучавају методе одређивања географских координата тачака на Земљиној површини и азимути праваца из опажања небеских тела.

Астрономска одређивања ширине, дужине и азимута заједно са резултатима геодетских и гравиметријских мерења обезбеђују формирање базе геодетских података и оријентацију државне геодетске мреже, одређивање параметара Земљиног елипсоида, оријентацију оса референтног система геодетских координата и одређивање висина квази-геоида у односу на референтни елипсоид.

У примени метода за одређивања геодетске астрономије посебно се анализирају најповољнији услови опажања, тј. услови при којима грешке мерења у најмањој могућој мери утичу на добијене резултате одређивања. У ову сврху погодно је користити тако зване *диференцијалне обрасце* (Мишковић 1960, стр. 71 – 76). Задатак се решава на тај начин што грешке мерених података сматрамо као познате мале прираштаје независних променљивих, а грешку рачунате величине одређујемо као прираштај познате функције мерених података и њихових грешака.

Ако су прираштаји независно променљивих довољно мали, тако да већ њихови квадрати и међусобни производи постану занемарљиви, тада имамо тотални диференцијал првог реда, који се иначе и користи у рачуну грешака (Курант 1952, стр. 65 – 68).

Поменуте диференцијалне обрасце је, дакле, могуће користити за налажење поправки одређиваних величина; у нашем случају, за поправке стања часовника, поправке ширине и поправке азимута. Самим тим, помоћу њих можемо да извршимо свођење Бошковићевих посматрања на систем FK5.

На једноставан начин, прелазећи са геометријске на аналитичку меру и обрнуто, можемо се уверити да и у случају када коначни прираштаји  $\Delta$  достигну 15 лучних секунда имамо  $\Delta^2 \approx 0''.001$ . Значи, у нашим израчунавањима довољно је да се задржимо на диференцијалима првог реда.

Парцијалне изводе и диференцијал првог реда ћемо користити за налажење случајних грешака одређиваних величина. У том смислу стање часовника, односно, ширину или азимут, треба разматрати као функцију независно променљивих величина (мереног времена

или координата звезда). Случајна грешка се онда одређује као средња квадратна грешка функције независно променљивих, која је једнака квадратном корену збира квадрата производа парцијалних извода функције по свакој од променљивих са средњом квадратном грешком одговарајуће променљиве (Бољшаков 1970, стр. 105). Другим речима, прираштај замењујемо средњом квадратном грешком дате променљиве, сваки сабирак у диференцијалном обрасцу квадрирамо, а затим нађемо квадратни корен збира тако добијених квадрата.

### 5.1. Зениталне и азимуталне методе.

Из геометрије небеске сфере следи да географска ширина  $\varphi$ , правац меридијана  $NS$  и месно звездано време  $s$  у неком тренутку  $T$  на било којој тачки Земљине површине могу да буду одређени, ако се за тај тренутак одреди положај зенита на небеској сфери (Уралов 1980, стр. 7 – 18).

У сваком задатом тренутку место зенита на небеској сфери може бити дефинисано зенитним даљинама бар два небеска тела  $z_1$  и  $z_2$  са познатим екваторским координатама, или пресеком два вертикала који пролазе кроз та небеска тела, тј. азимутима  $A_1$  и  $A_2$ . У складу са овим, све методе одређивања ширине, времена и правца меридијана засноване су на два принципа мерења, мерење зенитних даљина и мерење азимута. Отуда подела на *зениталне* и *азимуталне* методе одређивања.

Најпотпуније искључење грешака мерења зенитних даљина постиже се при опажањима двеју (или више) звезда на једнаким зенитним даљинама. У том случају се не мери директно зенитна даљина, већ се добијају тренуци пролаза кроз дати алмукантарат, па су искључене грешке везане за читање круга. Претпоставка је да рефракција утиче симетрично у односу на зенит. У пракси је врло често коришћена Цингерова метода за одређивање стања часовника и Пјевцовљева метода за одређивање ширине.

У групу азимуталних метода спада одређивање азимута правца терестричког објекта, чиме је одређен правац меридијана. На северној хемисфери најчешће се користи опажање Северњаче чија је деклинација близу  $90^\circ$ , а азимут за ширине до  $+65^\circ$  не прелази  $\pm 2^\circ 40'$ . Одређивање тачног астрономског азимута се своди на одређивање хоризонталног угла између Северњаче и терестричког објекта.

#### 5.1.1. Цингерова метода

Претпоставимо да помоћу одговарајућег инструмента опажамо пролаз неке звезде кроз један исти алмукантарат пре и после кулминације. При томе се не интересујемо за

или координата звезда). Случајна грешка се онда одређује као средња квадратна грешка функције независно променљивих, која је једнака квадратном корену збира квадрата производа парцијалних извода функције по свакој од променљивих са средњом квадратном грешком одговарајуће променљиве (Бољшаков 1970, стр. 105). Другим речима, прираштај замењујемо средњом квадратном грешком дате променљиве, сваки сабирак у диференцијалном обрасцу квадрирамо, а затим нађемо квадратни корен збира тако добијених квадрата.

### 5.1. Зениталне и азимуталне методе.

Из геометрије небеске сфере следи да географска ширина  $\varphi$ , правац меридијана  $NS$  и месно звездано време  $s$  у неком тренутку  $T$  на било којој тачки Земљине површине могу да буду одређени, ако се за тај тренутак одреди положај зенита на небеској сфери (Уралов 1980, стр. 7 – 18).

У сваком задатом тренутку место зенита на небеској сфери може бити дефинисано зенитним даљинама бар два небеска тела  $z_1$  и  $z_2$  са познатим екваторским координатама, или пресеком два вертикала који пролазе кроз та небеска тела, тј. азимутима  $A_1$  и  $A_2$ . У складу са овим, све методе одређивања ширине, времена и правца меридијана засноване су на два принципа мерења, мерење зенитних даљина и мерење азимута. Отуда подела на *зениталне* и *азимуталне* методе одређивања.

Најпотпуније искључење грешака мерења зенитних даљина постиже се при опажањима двеју (или више) звезда на једнаким зенитним даљинама. У том случају се не мери директно зенитна даљина, већ се добијају тренуци пролаза кроз дати алмукантарат, па су искључене грешке везане за читање круга. Претпоставка је да рефракција утиче симетрично у односу на зенит. У пракси је врло често коришћена Цингерова метода за одређивање стања часовника и Пјевцовљева метода за одређивање ширине.

У групу азимуталних метода спада одређивање азимута правца терестричког објекта, чиме је одређен правац меридијана. На северној хемисфери најчешће се користи опажање Северњаче чија је деклинација близу  $90^\circ$ , а азимут за ширине до  $+65^\circ$  не прелази  $\pm 2^\circ 40'$ . Одређивање тачног астрономског азимута се своди на одређивање хоризонталног угла између Северњаче и терестричког објекта.

#### 5.1.1. Цингерова метода

Претпоставимо да помоћу одговарајућег инструмента опажамо пролаз неке звезде кроз један исти алмукантарат пре и после кулминације. При томе се не интересујемо за

мерење њене занитне даљине. Нека су  $\alpha$  и  $\delta$  координате звезде, затим,  $T_e$  и  $T_w$  тренутак пролаза кроз дати алмукантарат источно и западно од меридијана по звезданом часовнику, а  $u_e$  и  $u_w$  одговарајућа стање часовника. Полазећи од тога да је у оба случаја рефракција иста, да се промена координата  $\alpha$  и  $\delta$  у вемеском интервалу од  $T_e$  до  $T_w$  може занемарити и да су једнаки часовни углови мерено на леву и десну страну од меридијана, онда је

$$\alpha - (T_e + u_e) = (T_w + u_w) - \alpha .$$

Одавде се добија

$$\frac{1}{2}(u_e + u_w) = \alpha - \frac{1}{2}(T_e + T_w) .$$

Пошто ход часовника може да се сматра равномерним, то је полузбир  $\frac{1}{2}(u_e + u_w)$  једнак стању часовника у тренутку  $\frac{1}{2}(T_e + T_w)$  и можемо га, дакле, рачунати по добијеној формули.

Идеја ове методе је врло једноставна, пошто није потребно мерити висину, па нема читања круга, али је она врло неекономична. Пре свега, звезду треба опажати даље од меридијана када је брзина њеног кретања по висини довољно велика, због чега ће између источног и западног пролаза кроз исти алмукантарат протећи више часова. Уместо тога, може се користити метода одређивања стања часовника из опажања двеју звезда на једнаким зенитним даљинама која би била далеко практичнија. Треба само пронаћи такав пар звезда чије су деклинације једнаке, а разлика ректасцензија таква да оне пролазе на једнаким зенитним даљинама близу првог вертикала, једна на истоку, друга на западу, брзо (за неколико минута) једна иза друге. Нека су  $\alpha_e$  и  $\delta$  координате источне звезде, а  $\alpha_w$  и  $\delta$  координате западне;  $T_e$  и  $T_w$  су тренуци када једна и друга достижу неку исту висину која није тачно позната;  $u$  је стање часовника у средњем тренутку. Дневни ход часовника је увек довољно добро познат или је тако мали да га можемо занемарити у току неколико минута, а за то време и промена рефракције је заиста занемарљива.

При једнаким деклинацијама звезда и њихови часовни углови у тренутку опажања, рачунати од меридијана ка истоку и ка западу, треба да су једнаки, па је, према томе,

$$\alpha_e - (T_e + u) = (T_w + u) - \alpha_w ,$$

односно,

$$u = \frac{1}{2}(\alpha_e - \alpha_w) - \frac{1}{2}(T_e + T_w) .$$

На небу, практично, нема парова звезда са потпуно једнаким деклинацијама, али зато се може наћи пуно парова код којих је та разлика мала и чији је положај потпуно погодан за опажања на истоку и на западу, не много далеко од првог вертикала. Јасно је да се, при

малој разлици деклинација звезда у таквом пару, стање часовника разликује од последњег израза за малу величину  $y$ :

$$u = \frac{1}{2}(\alpha_e - \alpha_w) - \frac{1}{2}(T_e + T_w) + y .$$

Величина  $y$  је утолико ближа нули, уколико је разлика деклинација мања, а при  $\delta_e = \delta_w$  имамо  $y = 0$  (Блажко 1979, стр. 212 – 218).

Примена оваквих парова звезда за одређивање стања часовника представља суштину Цингерове методе, назване по руском геодети Н.Ј. Цингеру који је 1874. предложио ову методу. Цингер је, уствари, указао на начин рачунања величине  $y$ . Овде то приказујемо према Цингеровом уџбенику практичне астрономије у преводу С.П. Бошковића (Цингер 1928, стр. 163 – 166).

Нека су  $\alpha_e$ ,  $\delta_e$  и  $\alpha_w$ ,  $\delta_w$  привидне координате источне и западне звезде,  $T_e$  и  $T_w$  одговарајући моменти опажања ових звезда на једној истој висини по звезданом часовнику, затим,  $u$  стање часовника и  $\varphi$  ширина места опажања. Како се обе звезде опажају на истој зенитној даљини  $z$ , по основним формулама сферне астрономије имамо

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta_e + \cos \varphi \cos \delta_e \cos(\alpha_e - T_e - u) \\ &= \sin \varphi \sin \delta_w + \cos \varphi \cos \delta_w \cos(T_w + u - \alpha_w) . \end{aligned}$$

Уведимо ознаке:

$$\frac{1}{2}(\delta_w + \delta_e) = \delta, \quad \frac{1}{2}(\delta_w - \delta_e) = \varepsilon ;$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_e - \alpha_w - T_e + T_w) = t, \quad \frac{1}{2}(T_e + T_w) - \frac{1}{2}(\alpha_e + \alpha_w) + u = y .$$

Тада се добија

$$\delta_w = \delta + \varepsilon, \quad \delta_e = \delta - \varepsilon;$$

$$T_w + u - \alpha_w = t + y, \quad \alpha_e - T_e - u = t - y;$$

па је

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin(\delta - \varepsilon) + \cos \varphi \cos(\delta - \varepsilon) \cos(t - y) = \\ &= \sin \varphi \sin(\delta + \varepsilon) + \cos \varphi \cos(\delta + \varepsilon) \cos(t + y) . \end{aligned}$$

Даљим сређивањем имамо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi [\cos(\delta - \varepsilon) \cos(t - y) - \cos(\delta + \varepsilon) \cos(t + y)] &= \\ &= \sin \varphi [\sin(\delta + \varepsilon) - \sin(\delta - \varepsilon)] \end{aligned}$$

и, после примене адicioneих теорема,

$$\begin{aligned} \cos \varphi [(\cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon) (\cos t \cos y + \sin t \sin y) - \\ - (\cos \delta \cos \varepsilon - \sin \delta \sin \varepsilon) (\cos t \cos y - \sin t \sin y)] = \\ = 2 \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \delta . \end{aligned}$$

Дељењем са  $\cos \varphi$ , назначеним множењем и сређивањем, добија се облик

$$\sin \delta \sin \varepsilon \cos y \cos t + \cos \delta \cos \varepsilon \sin y \sin t = \tan \varphi \sin \varepsilon \cos \delta ,$$

који, дељењем са  $\cos \delta \cos \varepsilon \sin t$ , може да се упрости:

$$\sin y + \cos y \frac{\tan \delta \tan \varepsilon}{\tan t} = \frac{\tan \varphi \tan \varepsilon}{\sin t} .$$

Увешћемо помоћне углове  $m$  и  $n$ , такве да је

$$\tan m = \frac{\tan \delta \tan \varepsilon}{\tan t}, \quad \sin n = \frac{\tan \varphi \tan \varepsilon}{\sin t} \cos m .$$

Тада је

$$\sin y + \cos y \tan m = \frac{\sin n}{\cos m} ,$$

или

$$\sin y \cos m + \cos y \sin m = \sin n ,$$

па је, према томе,

$$\sin(y + m) = \sin n .$$

Одавде следи

$$y + m = n .$$

Дакле, тражена мала величина  $y$  је,

$$y = n - m .$$

При оваквим рачунањима  $m$ ,  $n$  и  $y$  се добија у лучним секундима, зато коначна формула за рачунање стања часовника  $u$  добија облик

$$u = \frac{1}{2}(\alpha_e + \alpha_w) - \frac{1}{2}(T_e + T_w) + \frac{1}{15}(n - m) .$$

Да би стање часовника што мање зависило од грешке  $\Delta\varphi$  у усвојеној вредности географске ширине, потребно је да звезде буду опажане симетрично у односу на меридијан. Тада грешке показивања часовника улазе приближно са половином своје вредности у грешку стања часовника. Утицај грешака показивања часовника  $\Delta T_e$  и  $\Delta T_w$  биће знатно умањен око времена пролаза звезде кроз први вертикал (када је брзина промене висине звезде највећа).

Полазећи од тога да се звезде опажају на једнаким зенитним даљинама, јасно је да се астрономска рефракција при обради опажања овде не обрачунава. Међутим, обавезно треба увести поправку за разлику нагиба осе Талкотове либеле, поправку за утицај дневне аберације и поправку за одступање усвојене ширине од њене праве вредности (Уралов 1973, стр. 160 – 162). Поправка за убрзање кретања звезда, у условима симетричности положаја у односу на меридијан, практично је једнака нули. Наравно, ако је регистровање времена вршено методом око - ухо (Бошковићева опажања), не обрачунава се поправка за ширину контакта и мртви ход микрометра, као ни поправка за паралаксу пера хронографа.

### 5.1.2. Пјевцовљева метода

Пјевцовљева метода претпоставља добијање ширине места опажања из опажања јужних и северних звезда на једнаким зенитним даљинама без коришћења окуларног микрометра. Уместо мерења висине, региструје се тренутак пролаза јужне и северне звезде кроз одговарајуће хоризонталне конце.

Полазна једначина Пјевцовљеве методе може да се пише у облику

$$\begin{aligned} \cos z_1 = \cos z_2 = \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos(T_1 + u_1 - \alpha_1) = \\ = \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos(T_2 + u_2 - \alpha_2) , \end{aligned} \quad (5.1)$$

где су  $(\alpha_1, \delta_1)$ ,  $(\alpha_2, \delta_2)$  познате координате звезда, а  $u_1$  и  $u_2$  стање часовника које се посебно одређује. Из самих опажања добијају се тренуци  $T_1$  и  $T_2$ . Решавајући последњу једначину по ширини  $\varphi$ , добија се

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \delta_1 \cos(T_1 + u_1 - \alpha_1) - \cos \delta_2 \cos(T_2 + u_2 - \alpha_2)}{\sin \delta_2 - \sin \delta_1} . \quad (5.2)$$

Одатле следи да, одредивши тренутке  $T_1$  и  $T_2$ , као и код Цингерове методе, када две звезде пролазе кроз један исти алмукантарат који не мора бити тачно познат, можемо израчунати ширину  $\varphi$ . Остаје само да се одреди које су звезде погодне за опажања, односно, код каквих парова звезда грешка часовниковог стања најмање утиче на резултат и када се ширина добија са највећом тачношћу.

Нека се ширина  $\varphi$  рачуна по последњој једначини са координатама  $(\alpha_1, \delta_1)$  и  $(\alpha_2, \delta_2)$ , које сматрамо потпуно тачним, и подацима  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $u_1$  и  $u_2$  у којима очекујемо грешке.



Нека је познат ход часовника и, према томе, нека је позната разлика  $u_2 - u_1$ , па се може извести  $u_2$  из  $u_1$ . Нека су тачне вредности  $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta u_1, \Delta u_2$ , значи, са њима се може израчунати тачна вредност ширине и нека она износи  $\varphi + \Delta\varphi$ . Диференцирањем једначине (5.2) налазимо да је (Блажко 1979, стр. 229 – 232)

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = - \frac{\overset{\sin}{\cos} \delta_1 \overset{\sin}{\cos}(T_1 + u_1 - \alpha_1)(dT_1 + du_1)}{\sin \delta_2 - \sin \delta_1} + \frac{\overset{\sin}{\cos} \delta_2 \overset{\sin}{\cos}(T_2 + u_2 - \alpha_2)(dT_2 + du_2)}{\sin \delta_2 - \sin \delta_1}.$$

Из паралактичког троугла имамо

$$\cos \delta \sin t = \sin z \sin A ;$$

$$\sin \delta = \cos z \sin \varphi + \sin z \cos \varphi \cos(180^\circ - A) ,$$

где се азимут  $A$  рачуна од јужне тачке у ретроградном смеру од  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

Како је  $T_1 + u_1 - \alpha_1 = t_1, T_2 + u_2 - \alpha_2 = t_2$  и  $\sin z_1 = \sin z_2 = \sin z$ , добија се

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{-\sin z \sin A_1(dT_1 + du_1) + \sin z \sin A_2(dT_2 + du_2)}{\sin z \cos \varphi(-\cos A_2 + \cos A_1)}.$$

Одатле следи, стављајући  $du_1 = du_2 = du$  и замењујући диференцијале коначним прираштајима:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi}{\cos \varphi} &= \frac{\sin A_2 - \sin A_1}{\cos A_1 - \cos A_2} \Delta u - \frac{\sin A_1}{\cos A_1 - \cos A_2} \Delta T_1 + \frac{\sin A_2}{\cos A_1 - \cos A_2} \Delta T_2 = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \Delta u - \frac{\sin A_1}{\cos A_1 - \cos A_2} \Delta T_1 + \frac{\sin A_2}{\cos A_1 - \cos A_2} \Delta T_2 . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Да би  $\Delta\varphi$  што је могуће мање зависило од  $\Delta u$ , потребно је да коефицијент уз  $\Delta u$  буде што мањи, а најбоље једнак нули. А ако је  $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = 0$ , онда је  $\frac{1}{2}(A_1 + A_2)$  једнако  $90^\circ$  или  $270^\circ$ , тј. збир  $(A_1 + A_2)$  једнак је  $180^\circ$  или  $540^\circ$ .

Из овога произилази да азимути  $A_1$  и  $A_2$  треба да се допуњавају до  $180^\circ$ , тј. обе звезде да се налазе на западној половини неба, једна на југу, друга на северу, или, ако се азимути допуњавају до  $540^\circ$ , тј. до  $360^\circ + 180^\circ$  (што значи да је сваки азимут већи од  $180^\circ$ ), треба да су обе звезде на источној половини неба, једна на северу, друга на југу. У оба случаја азимут јужне звезде, рачунат од јужне тачке, по апсолутној вредности треба да је приближан азимуту северне звезде, рачунате од северне тачке. Практично је тешко да се изабере такви парови где су услови у потпуности испуњени, али их треба приближно задовољити.

Замењујући индексе 1 и 2 одговарајућим индексима  $s$  и  $n$ , имајући у виду да је приближно (а у идеалном случају тачно)  $\sin A_n = \sin A_s, \cos A_n = -\cos A_s$  и  $\operatorname{tg} A_n = \operatorname{tg} A_s$ , (како за источне, тако и за западне парове), формула (5.3) добија следећи облик:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} &= \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_s + A_n) \Delta u - \frac{1}{2} \operatorname{tg} A_s \Delta T_s + \frac{1}{2} \operatorname{tg} A_s \Delta T_n \\
&= \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_s + A_n) \Delta u - \frac{1}{2}(\Delta T_s - \Delta T_n) \operatorname{tg} A_s \\
&= \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_s + A_n) \Delta u - \frac{1}{2}(\Delta T_n - \Delta T_s) \operatorname{tg} A_n .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Дакле, да би  $\Delta\varphi$  што је могуће мање зависило од грешака у  $T_s$  и  $T_n$ , неопходно је да  $\operatorname{tg} A_s$ , а, према томе, и  $\operatorname{tg} A_n$  буду по апсолутној вредности што је могуће мање, тј. да се опажане звезде налазе што је могуће ближе јужном и северном делу меридијана.

Међутим, ово није zgodно из практичних разлога. Прво, избор звезда које испуњавају овај услов је ограничен, зато што при једнаким зенитним даљинама њихове деклинације треба приближно да задовољавају једнакост  $\delta_n - \varphi = \varphi - \delta_s$ , односно, треба да је приближно  $\frac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) = \varphi$ . Друго, за одређивања овом методом потребно је, као и код Сингерове методе, опажати пролазе сваке звезде кроз хоризонталне конце инструмента. Ако се звезда налази врло близу меридијана, њено кретање по висини је крајње споро и за опажање на неколико конача било би потребно јако пуно времена. Зато се у пракси иде на некакав компромис и одабирају се звезде чији оштри азимути (од југа и од севера) нису мањи од  $6 - 15^\circ$ , а такође, нису ни већи од  $30 - 40^\circ$ . Грешке  $\Delta T_s$  и  $\Delta T_n$  у тренуцима  $T_s$  и  $T_n$  улазе у  $\varphi$  пропорционално  $\operatorname{tg} A$  и то са супротним знацима, те се њихов утицај поништава ако су они једнаки. Зато, на пример, лична грешка опажања при одређивању тренутака  $T_s$  и  $T_n$ , ако је у оба случаја једнака, ~~не~~ <sup>не</sup> утиче ~~на~~ <sup>на</sup> одређивање ширине.

Овом методом су руски астрономи и геодете одређивали ширину осамдесетих година XIX века, али је метода почела највише да се примењује када је М.В. Пјевцов разрадио детаље, указао на најпогодније услове опажања и објавио их 1887. године. Отада се ова метода и назива Пјевцовљевом методом. Касније се показало да је Пјевцовљева метода јако погодна за одређивања на великим ширинама (преко  $60^\circ$ ).

Ширина коју одређујемо Пјевцовљевом методом рачуна се по формули (5.2), али је потребно, као и код Сингерове методе унети одговарајуће поправке (Уралов 1973, стр. 166 – 168). Поправка за нагиб дурбина директно се добија из разлика нагиба осе Талковтоне либеле. Поправка за утицај дневне аберације и поправка за одступање усвојене вредности лонгитуде практично је једнака нули уколико је задовољен услов  $A_s + A_n = 180^\circ (= 540^\circ)$ . Поправку за убрзање кретања звезде по зенитној даљини није потребно уводити ако се обрада врши за сваки конач посебно.

### 5.1.3. Одређивање азимута из опажања Северњаче.

Наводећи дурбин на један објекат, а затим на други, и добивши тачна читања на хоризонталном кругу, у разлици ових читања која су исправљена за инструментске грешке,

добиће се разлика азимута ових објеката. Према томе, ако нам је познат азимут једног од ова два објекта, лако може да се израчуна азимут другог.

За објекат чији азимут може да нам буде познат, обично се бира звезда са познатим координатама  $\alpha$  и  $\delta$ . Приликом опажања бележи се тренутак опажања  $T$  по часовнику, чије стање  $u$  треба да је познато, а исто тако и ширина места опажања  $\varphi$ . Тада се часовни угао  $t$  добија по формули

$$t = T + u - \alpha .$$

Азимут звезде може да се рачуна из паралактичког троугла (троугао зенит – пол – звезда) по формулама

$$\sin z \sin A_S = -\sin z \sin A_N = \cos \delta \sin t ,$$

$$\sin z \sin A_S = -\sin z \cos A_N = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t .$$

Овде  $A_S$  означава азимут звезде рачунат од јужне тачке  $S$  према западу, а  $A_N = A_S + 180^\circ$  азимут рачунат од северне тачке  $N$  према истоку.

Ако су  $M_*$  и  $M$  исправљена читања хоризонталног круга по главном микроскопу (по коме се бирају степени круга) при опажању звезде и терестричког предмета у положају ”круг десно”, на пример, то ћемо у случају пораста читања при обртању инструмента у смеру казаљке на часовнику имати:

читање круга по главном микроскопу, када је дурбин управљен у јужну тачку

$$M_S = M_* - A_S ,$$

читање круга по главном микроскопу, када је дурбин управљен у северну тачку

$$M_N = M_* - A_N ,$$

азимут терестричког објекта једнак је  $M - M_S$ , ако се рачуна од јужне тачке, или  $M - M_N$ , ако се рачуна од северне тачке.

За контролу стабилности тачке меридијана на хоризонталном кругу у току читаве серије одређивања азимута служи контролни дурбин, који је за време опажања чврсто спојен с основом инструмента, а према томе, и с хоризонталним кругом и остаје све време управљен на изабрану значку.

Ради умањења утицаја грешака лимбове поделе, мерење азимута се више пута понавља и врши се различитим деловима хоризонталног круга. Зато се круг на инструменту помера око вертикалне осе.

Потребно је размотрити при каквим условима грешке координата звезде и грешке мерења најмање утичу на одређивање азимута  $A$ . Зато треба поћи од формуле за рачунање азимута, која се добија дељењем синусог обрасца са синусно-косинусним (ако се азимут рачуна од јужне тачке):

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos \delta \sin t}{-\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t}, \quad (5.5)$$

одакле је

$$\operatorname{tg} \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t - \sin t \operatorname{ctg} A. \quad (5.6)$$

Диференцирањем формуле (5.6) добија се (Блажко 1979, стр. 204 – 206)

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{\cos^2 \delta} \cos \varphi - \operatorname{tg} \delta \sin \varphi d\varphi &= \\ &= \cos \varphi \operatorname{cost} d\varphi - \sin \varphi \sin t dt - \operatorname{cost} \operatorname{ctg} A + \sin t \frac{dA}{\sin^2 A}. \end{aligned}$$

После сређивања и замене диференцијала коначним прираштајима имамо:

$$\begin{aligned} \Delta A = \frac{\sin^2 A \cos \varphi}{\cos^2 \delta \sin t} \Delta \delta - \sin^2 A \left( \frac{\operatorname{tg} \delta \sin \varphi}{\sin t} + \cos \varphi \operatorname{ctg} t \right) \Delta \varphi + \\ + \sin A (\sin \varphi + \operatorname{ctg} t \operatorname{ctg} A) \Delta t. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Како је, из паралактичког троугла,

$$\frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin t}{\sin z} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

коэффициент уз  $\Delta \delta$  постаје

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 \delta \sin^2 t} \sin t \cos \varphi = \frac{\sin t \cos \varphi}{\sin^2 z} = \frac{\sin \varphi}{\sin z}.$$

Имајући у виду, даље, синусне обрасце и да је по косинусном обрасцу

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

коэффициент уз  $\Delta \varphi$  добија облик

$$\sin A \left( \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\sin z} + \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos t}{\sin z} \right) = \sin A \operatorname{ctg} z.$$

Пошто је

$$\cos q = \cos A \cos t + \sin A \sin t \sin \varphi,$$

коэффициент уз  $\Delta t$  се трансформише на следећи начин:

$$\frac{\sin A}{\sin t} (\sin A \sin t \sin \varphi + \cos A \cos t) = \frac{\cos \delta}{\sin z} \cos q.$$

Коначно (5.7) добија облик

$$\Delta A = \frac{\sin q}{\sin z} \Delta \delta - \sin A \operatorname{ctg} z \Delta \varphi + \frac{\cos \delta}{\sin z} \cos q \Delta t . \quad (5.8)$$

Одатле се види да  $\Delta t = \Delta T + \Delta u - \Delta \alpha$  има најмањи утицај на азимут  $A$ , ако је  $\cos q = 0$ , односно, ако је  $q$  једнако  $90^\circ$  или  $270^\circ$ , тј. ако се звезда налази у највећој дигресији, на западу или на истоку. Грешка ширине има најмањи утицај на азимут, ако је  $\sin A$  мала величина, тј. ако се звезда налази близу меридијана или у самом меридијану, али тада  $q$  не може бити  $90^\circ$ , односно,  $270^\circ$ . Међутим, при свакој вредности  $q$  коефицијент уз  $\Delta t$  биће утолико мањи, уколико је мања величина  $\cos \delta$ . То значи да звезда треба да буде што ближа полу, а самим тим биће мали и  $\sin A$ , чак и у највећој дигресији. Овакво разматрање доводи до закључка да је Северњача најпогоднија звезда за одређивање азимута правца терестричког објекта. Поред тога, она је довољно сјајна да се види у осветљеном пољу чак и малог дурбина. Зато се за ове циљеве она готово искључиво користи.

Треба приметити да се у имениоцу свих чланова на десној страни појављује  $\sin z$ . Он показује да одређивање азимута помоћу Поларе постаје мање тачно, што је мања зенитна даљина  $z$ , односно, што је место опажања ближе северном Земљином полу.

## 5.2. Случајне грешке опажања и грешка јединице тежине.

Случајне грешке опажања су толико многобројне и разноврсне по својој природи да их је практично немогуће све обрачунати. Док систематске грешке, које делују са једним знаком, можемо искључити из резултата путем посебно организоване методике опажања, утицај случајних грешака се може само умањити увећавањем броја опажања или побољшањем услова и средстава за мерење.

Како је врло тешко у рачун а priori унети све изворе случајних грешака, обично се израчуната грешка а priori и грешка а posteriori, која је добијена из резултата опажања, међусобно не слажу.

Неке од основних грешака мерења могу бити: грешке визирања на небеско тело, грешке читања вертикалног лимба, грешке одређивања нагиба, заостали утицаји грешака рефракције и грешака савијања. У случају Цингерове и Пјевцовљеве методе фигуришу грешке визирања на небеско тело, уствари, грешке регистрације времена, и грешке одређивања нагиба либелине осе. Овде ћемо посебну пажњу посветити грешкама регистрације времена у свакој од три методе које су претходно приказане.

Случајна грешка једног визирања на непокретни предмет дата је изразом

$$m_b' = \frac{b}{W} ,$$

где  $b$  представља раздвојну моћ ока (за разне опажање износи  $30''.0 < b < 60''.0$ ), а  $W$  је увеличање дурбина (Уралов 1980, стр. 160 – 162).

За визирање методом навођења, када је брзина померања тела по правцу нормалном на нит мала, случајна грешка визирања остаје практично иста као и при опажању непокретног предмета:

$$m_b = \frac{b}{W\sqrt{k}} ,$$

где је  $k$  број навођења визирног конца на небеско тело.

При визирању методом опажања момената пролаза кроз конце дурбина који су непокретни по висини, средња квадратна грешка тренутка пролаза зависи од брзине померања лика у правцу нормалном на конце. При томе је грешка утолико већа уколико је мања брзина кретања, па се може писати:

$$m_T' = \frac{m_b^3}{V} .$$

Компонента брзина кретања небеског тела нормална на хоризонталне конце дата је изразом

$$V = \cos \delta \sin q = \cos \varphi \sin A ,$$

према синусној теореме за паралактички троугао.

Опажачко искуство показује да грешка у оцени тренутка пролаза небеског тела не зависи само од брзине кретања, него и од неке случајне величине  $a$  која карактерише методу опажања пролаза. Сем тога, и вредност  $b$  се мења у зависности од методе опажања. Следи да се грешка одређивања тренутка пролаза кроз дате конце може приказати изразом

$$m_T^2 = a^2 + \frac{m_b^2}{V^2} ,$$

односно, за један конач имамо

$$m_T^2 = a^2 + \frac{b^2}{(W \cos \varphi \sin A)^2} . \tag{5.8}$$

Свођењем ове грешке на неки карактеристичан положај, на пример, на први вертикал или на меридијан добија се грешка јединице тежине. У излагању које следи биће изведене грешке јединице тежине за Шингерову, Пјевцовљевићу и методу одређивања азимута из опажања Северњаче, с тим што ће бити размотрен само део који се односи на регистрацију времена.

### 5.2.1. Грешке одређивања стања часовника.

Цингерова метода, која служи за одређивање стања часовника, полази од тога да се опажа једна источна и једна западна звезда на истој зенитној даљини у близини првог вертикала. Ако у формули (5.1) испишемо индексе  $e$  и  $w$  уместо 1 и 2 и диференцирамо је по  $\varphi$ ,  $\delta$  и  $t$ , добијамо

$$\begin{aligned}
 & (\sin \varphi \sin \delta_e - \sin \varphi \cos \delta_e \cos t_e) d\varphi + \\
 & + (\sin \varphi \cos \delta_e - \cos \varphi \sin \delta_e \cos t_e) d\delta_e - \cos \varphi \cos \delta_e \overset{\sin}{\cos} t_e dt_e = \\
 & = (\cos \varphi \sin \delta_w - \sin \varphi \cos \delta_w \cos t_w) d\varphi + \\
 & + (\sin \varphi \cos \delta_w - \cos \varphi \sin \delta_w \cos t_w) d\delta_w - \cos \varphi \cos \delta_w \overset{\sin}{\cos} t_w dt_w .
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Имајући у виду да је у општем случају

$$t_e = T_e + u - \alpha_e ,$$

$$t_w = T_w + u - \alpha_w ;$$

после сређивања се добија

$$\begin{aligned}
 du = & - \frac{\cos A_e - \cos A_w}{\cos \varphi (\sin A_e - \sin A_w)} d\varphi - \\
 & - \frac{\sin A_e}{\sin A_e - \sin A_w} dT_e + \frac{\sin A_w}{\sin A_e - \sin A_w} dT_w + \\
 & + \frac{\sin A_e}{\sin A_e - \sin A_w} d\alpha_e - \frac{\sin A_w}{\sin A_e - \sin A_w} d\alpha_w + \\
 & + \frac{\cos q_e}{\cos \varphi (\sin A_e - \sin A_w)} d\delta_e - \frac{\cos q_w}{\cos \varphi (\sin A_e - \sin A_w)} d\delta_w .
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Из формуле (5.10) издвојамо чланове у којима фигуришу  $dT_e$  и  $dT_w$ . С обзиром на (5.8), израчунавамо утицај грешке одређивања тренутка пролаза кроз дати конач на израчунато стање часовника по Цингеровој методи

$$\begin{aligned}
 m_u^2 = & \frac{\sin^2 A_e}{(\sin A_e - \sin A_w)^2} \left( a^2 + \frac{b^2}{W^2 \cos^2 \varphi \sin^2 A_e} \right) + \\
 & + \frac{\sin^2 A_w}{(\sin A_e - \sin A_w)^2} \left( a^2 + \frac{b^2}{W^2 \cos^2 \varphi \sin^2 A_w} \right) .
 \end{aligned}$$

После сређивања је

$$\begin{aligned}
 m_u^2 = & \frac{\sin^2 A_e + \sin^2 A_w}{(\sin A_e - \sin A_w)^2} a^2 + \\
 & + \frac{2}{\cos^2 \varphi (\sin A_e - \sin A_w)^2} \left( \frac{b}{W} \right)^2 .
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Узимајући да је за средње ширине  $\cos^2 \varphi \approx \frac{1}{2}$  и да је  $\sin A_w = -\sin A_e = 1$  у првом вертикалу, грешка  $m_u$  сведна на први вертикал рачуна се по једноставном обрасцу

$$m_u^2 = \frac{1}{2} a^2 + \left( \frac{b}{W} \right)^2. \quad (5.12)$$

За регистровање тренутка пролаза кроз дати хоризонтални конач методом око – ухо, дате су, по Уралову, вредности  $a = 0 \text{ } ^\circ 10$ ,  $b = 4 \text{ } ^\circ 7$ . За увеличање дурбина  $W = 60 \times$  израчунава се вредност грешке јединице тежине

$$m_u^2 = \frac{1}{2} (0 \text{ } ^\circ 10)^2 + \left( \frac{4 \text{ } ^\circ 7}{60} \right)^2;$$

$$m_u = \pm 0 \text{ } ^\circ 106.$$

### 5.2.2. Грешке одређивања ширине.

Пјевцовљева метода претпоставља добијање ширине из опажања једне јужне и једне северне звезде на истом зенитном растојању  $z_s = z_n$ . Дакле, ако диференцирамо (5.1) по  $\varphi$ ,  $\delta$  и  $t$ , добијамо исти израз као (5.9), само што уместо индекса  $e$  и  $w$  имамо  $s$  и  $n$ . Издвајајући  $d\varphi$  на леву страну, после сређивања налазимо да је

$$\begin{aligned} d\varphi = & - \frac{\cos \varphi (\sin A_s - \sin A_n)}{\cos A_s - \cos A_n} du - \\ & - \frac{\cos \varphi \sin A_s}{\cos A_s - \cos A_n} dT_s + \frac{\cos \varphi \sin A_n}{\cos A_s - \cos A_n} dT_n + \\ & + \frac{\cos \varphi \sin A_s}{\cos A_s - \cos A_n} d\alpha_s - \frac{\cos \varphi \sin A_n}{\cos A_s - \cos A_n} d\alpha_n + \\ & + \frac{\cos q_s}{\cos A_s - \cos A_n} d\delta_s - \frac{\cos q_n}{\cos A_s - \cos A_n} d\delta_n. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из (5.13) ћемо издвојити чланове у којима фигуришу  $dT_s$  и  $dT_n$ , па је с обзиром на (5.8), утицај грешке одређивања тренутка пролаза кроз дати хоризонтални конач на израчунату ширину по Пјевцовљевој методи

$$\begin{aligned} m_\varphi^2 = & \frac{(\cos \varphi \sin A_s)^2}{(\cos A_s - \cos A_n)^2} \left( a^2 + \frac{b^2}{W^2 \cos^2 \varphi \sin^2 A_s} \right) + \\ & + \frac{(\cos \varphi \sin A_n)^2}{(\cos A_s - \cos A_n)^2} \left( a^2 + \frac{b^2}{W^2 \cos^2 \varphi \sin^2 A_n} \right), \end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned} m_\varphi^2 = & \frac{1}{(\cos A_s - \cos A_n)^2} \left( a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 A_s + \frac{b^2}{W^2} \right) + \\ & + \frac{1}{(\cos A_s - \cos A_n)^2} \left( a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 A_n + \frac{b^2}{W^2} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$



Како се звезде опажају на различитим азимутима, односно, на различитим удаљењима од меридијана, да би грешке разних парова биле међусобно упоредиве, потребно је да се сведу на исти ниво. За Пјевцовљеву методу, која захтева опажања на једнаким зенитним даљинама што ближе меридијану, природно је да сва опажања сведемо на меридијан. Пошто је у меридијану  $\sin A_s = \sin A_n = 0$  и  $\cos A_s = -\cos A_n = 1$ , грешка  $m_\varphi$  сведена на меридијан се рачуна по обрасцу

$$m_\varphi^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{W} \right)^2 . \quad (5.15)$$

За регистрацију времена методом око – ухо ( $b = 4 \text{ } ^\circ \text{ } 7$ ) и за увеличање  $W = 60 \times$  вредност грешке јединице тежине износи

$$m_\varphi^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{15 \times 4 \text{ } ^\circ \text{ } 7}{60} \right)^2 ;$$

$$m_\varphi = \pm 0 \text{ } ^\circ \text{ } 83 .$$

### 5.2.3. Грешке одређивања азимута.

Грешку одређивања азимута из опажања Северњаче рачунаћемо пошавши од тоталног диференцијала, који се добија диференцирањем (5.6)

$$dA = \frac{\sin q}{\sin z} d\delta - \sin A \operatorname{ctg} z d\varphi + \frac{\cos \delta}{\sin z} \cos q dt . \quad (5.16)$$

Ако разматрамо само члан који стоји уз  $dt$ , израчунаћемо  $m_A$  по формули

$$m_A^2 = \frac{\cos^2 \delta \cos^2 q}{\sin^2 z} m_T^2 ,$$

односно,

$$m_A^2 = \frac{\cos^2 \delta \cos^2 q}{\sin^2 z} \left( a^2 + \frac{b^2}{W^2 \cos^2 \delta \cos^2 q} \right) . \quad (5.17)$$

Грешку  $m_A$  можемо свести на највећу дигресију Северњаче, када је  $\cos q = 0$ . Ако узмемо да је за Северњачу  $\sin^2 z \approx \frac{1}{2}$ , утицај грешке регистровања времена се рачуна по обрасцу

$$m_A^2 = 2 \left( \frac{b}{W} \right)^2 . \quad (5.18)$$

Метод око – ухо даје грешку јединице тежине

$$m_A^2 = 2 \left( \frac{15 \times 4 \text{ s } 7}{60} \right)^2$$

$$m_A = \pm 1 \text{ " } 66 .$$

### 5.3. Грешке координата звезда у астрогеодетским одређивањима.

Полазећи од одговарајућих диференцијалних образаца израчунаћемо грешке стања часовника, грешке ширине и грешке азимута, и то *онај део који садржи грешке координата* фундаменталних звезда. Посебно ће бити израчунат утицај систематских, а посебно случајних грешака. Користићемо Таблицу 1.6, која даје случајне грешке положаја звезда, као и Таблице 1.7 и 1.8 које дају систематску разлику FK5 – NFK.

#### 5.3.1. Утицај грешака координата звезда на одређивање стања часовника.

Размотримо утицај грешака положаја звезда (грешке координата  $\alpha$  и  $\delta$ ) на одређивање стања часовника под претпоставком да су звезде у Цингеровим паровима имале деклинације које се крећу између  $+20^\circ$  и  $+50^\circ$  и да је већина њих опажана близу првог вертикала, на удаљењу од 10 до 15 степени по азимуту. Полазећи од ове чињенице биће израчунате грешке а priori стања часовника као последица утицаја систематских и случајних грешака координата звезда.

За неки фиктивни Цингеров пар на средњој ширини  $\varphi = +45^\circ$  узећемо звезде са деклинацијом  $\delta_e = \delta_w \approx 35^\circ$ . При зенитној даљини  $z \approx 40^\circ$  нека азимут буде  $-A_e = A_w \approx 80^\circ$  за звезде јужно од првог вертикала, односно,  $-A_e = A_w \approx 100^\circ$  за звезде северно од првог вертикала. Нека је паралактички угао је  $q_e = q_w \approx 60^\circ$ .

Ако се у формули (5.10) са диференцијала пређе на коначне прираштаје и издвоје само чланови који садрже  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  и  $\Delta\varphi$ , имамо

$$\begin{aligned} \Delta u = & - \frac{\cos A_e - \cos A_w}{\cos \varphi (\sin A_e - \sin A_w)} \Delta \varphi + \\ & + \frac{\sin A_e}{\sin A_e - \sin A_w} \Delta \alpha_e - \frac{\sin A_w}{\sin A_e - \sin A_w} \Delta \alpha_w + \\ & + \frac{\cos q_e}{\cos \varphi (\sin A_e - \sin A_w)} \Delta \delta_e - \frac{\cos q_w}{\cos \varphi (\sin A_e - \sin A_w)} \Delta \delta_w . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Замењујући претпостављене вредности азимута, паралактичких углова и ширине у диференцијалном обрасцу (5.19), добија се

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} (\Delta \alpha_e + \Delta \alpha_w) - \frac{1}{3} (\Delta \delta_e - \Delta \delta_w) . \quad (5.20)$$

Грубо гледано, звезде на истим деклинацијама имају једнаке систематске грешке:  $\Delta\alpha_e = \Delta\alpha_w = \Delta\alpha$  и  $\Delta\delta_e = \Delta\delta_w = \Delta\delta$ . Из тога произилази да је систематска грешка стања часовника приближно једнака систематској грешки ректасцензија за дату деклинацију пара

$$\Delta u \approx \Delta\alpha .$$

Према вредностима у последњем реду Таблице 1.7. за деклинацију  $+35^\circ$  налазимо да је  $\Delta\alpha = -0^s070$ , одакле следи

$$\Delta u \approx -0^s070 .$$

Другим речима, свођењем на систем FK5 положаја звезда које користи С.П. Бошковић за одређивања Цингеровом методом и који су дати у систему NFK, стање часовника се мења приближно за  $-0^s070$  .

Што се тиче случајне грешке стања часовника, имамо

$$\varepsilon_u^2 \approx \frac{2}{4} E_\alpha^2 + \frac{2}{9} E_\delta^2 ,$$

а ако то још поједноставимо,

$$\varepsilon_u^2 \approx \frac{1}{2} E_\alpha^2 + \frac{1}{4} E_\delta^2 . \quad (5.21)$$

Овде је  $E_\alpha$  грешка ректасцензије за  $\delta = 35^\circ$ , док је грешка деклинације  $E_\delta$  дата у часовној мери.

Према Таблици 1.6. налазимо вредности

- за систем FK5:  $E_\alpha = \pm 0^s004$  и  $E_\delta = \pm 0^s002$  ;
- за систем NFK:  $E_\alpha = \pm 0^s018$  и  $E_\delta = \pm 0^s013$  .

На основи тога се добија случајна грешка стања часовника која је последица случајних грешака координата звезда у датом пару:

- за систем FK5:  $\varepsilon_u \approx \pm 0^s003$  ;
- за систем NFK:  $\varepsilon_u \approx \pm 0^s014$  .

Преласком са NFK на систем FK5, у укупном буџету случајних грешака стања часовника, део који припада координатама звезда смањен је близу пет пута.

### 5.3.2. Утицај грешака координата звезда на одређивање ширине.

У одређивањима ширине Пјевцовљевом методом појављују се парови звезда које су опажане у близини меридијана, симетрично у односу на први вертикал. Растојања од

меридијана се креће од  $10^\circ$  до  $30^\circ$  по азимуту. Јужна звезда у пару обично буде близу екватора, док северна звезда може да има деклинацију  $+60^\circ$  до  $+80^\circ$ . Полазећи од ових података израчунаћемо грешка ширине као последица грешке положаја звезде.

За фиктиван Пјевцовљев пар на ширини  $\varphi = +45^\circ$  узећемо јужну звезду са деклинацијом  $\delta_s \approx +20^\circ$  и северну звезду са деклинацијом  $\delta_n \approx +70^\circ$ , око горњег пролаза. Нека је азимут  $A_s \approx 20^\circ$  и  $A_n \approx 160^\circ$ , а паралактички угао  $q_s \approx 15^\circ$  и  $q_n \approx 105^\circ$ . У формули (5.13) диференцијале замењујемо коначним прираштајима и издвојамо чланове који садрже  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  и  $\Delta u$ , па је

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = & - \frac{\cos\varphi(\sin A_s - \sin A_n)}{\cos A_s - \cos A_n} \Delta u + \\ & + \frac{\cos\varphi \sin A_s}{\cos A_s - \cos A_n} \Delta\alpha_s - \frac{\cos\varphi \sin A_n}{\cos A_s - \cos A_n} \Delta\alpha_n + \\ & + \frac{\cos q_s}{\cos A_s - \cos A_n} \Delta\delta_s - \frac{\cos q_n}{\cos A_s - \cos A_n} \Delta\delta_n . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Замењујући у диференцијалном обрасцу (5.22) назначене вредности азимута, паралактичких углова и ширине добија се

$$\Delta\varphi \approx \mp \frac{1}{8} (\Delta\alpha_s - \Delta\alpha_n) + \frac{1}{2} \Delta\delta_s + \frac{1}{7} \Delta\delta_n . \quad (5.23)$$

Горњи знак испред заграде важи за пар који је опажан на источној страни неба (IV и III квадрант), а доњи знак за пар на западној страни неба (I и II квадрант).

На основи вредности  $\Delta\alpha$  датих у последњем реду Таблице 1.7. за деклинацију  $\delta_s = +20^\circ$  и  $\delta_n = +70^\circ$  имамо  $\Delta\alpha_s = -0''.95$  и  $\Delta\alpha_n = -3''.15$ , респективно. У последњем реду Таблице 1.8. за исте деклинације  $\delta_s$  и  $\delta_n$  имамо  $\Delta\delta_s = +0''.12$  и  $\Delta\delta_n = +0''.06$ .

Тако налазимо грешку  $\Delta\varphi$  која је последица систематских разлика каталога NFK и FK5. Свођењем NFK на систем FK5 добија се поправка ширине

- за пар на истоку:  $\Delta\varphi \approx -0''.21$  ;
- за пар на западу:  $\Delta\varphi \approx +0''.35$  ;
- у средњем је:  $\Delta\varphi \approx +0''.07$  .

На основи (5.13) изводимо формулу по којој се процењује утицај случајних грешака координата звезда на одређивања ширине. Нека грешка ректасцензије за северну звезду износи  $3E_\alpha$ , где је  $E_\alpha$  грешка екваторске звезде. Ако се вредност  $E_\alpha$  узме као приближна грешка јужне звезде, онда је

$$\varepsilon_\varphi^2 \approx \left(\frac{1}{8} E_\alpha\right)^2 + \left(\frac{3}{8} E_\alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2} E_\delta\right)^2 + \left(\frac{1}{7} E_\delta\right)^2 .$$

После упрошћавања је

$$\varepsilon_{\varphi}^2 \approx \frac{1}{6} E_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} E_{\delta}^2 . \quad (5.24)$$

У Таблици 1.6. имамо

- за систем FK5:  $E_{\alpha} = \pm 0''.05$  и  $E_{\delta} = \pm 0''.03$  ;
- за систем NFK:  $E_{\alpha} = \pm 0''.23$  и  $E_{\delta} = \pm 0''.20$  .

На основи тога се добија случајна грешка ширине која је последица случајних грешака координата звезда у датом пару:

- за систем FK5:  $\varepsilon_{\varphi} \approx \pm 0''.02$  ;
- за систем NFK:  $\varepsilon_{\varphi} \approx \pm 0''.14$  .

Преласком на систем FK5, у укупном буџету случајних грешака ширине, део који припада координатама звезда смањен је седам пута.

### 5.3.3. Утицај грешака координата Северњаче на одређивање азимута.

За рачунање грешке азимута поћи ћемо од следећих података: деклинација Северњаче је приближно  $89^{\circ}$ ; за географску ширину од  $45^{\circ}$  њена зенитна даљина износи око  $45^{\circ}$ ; азимут је приближно  $178 - 179^{\circ}$ ; паралактички угао нека се креће у границама од  $45^{\circ}$  до  $135^{\circ}$ . Ако са наведеним вредностима уђемо у формулу (према (5.16))

$$\Delta A = + \frac{\cos \delta}{\sin z} \cos q \Delta u - \sin A \operatorname{ctg} z \Delta \varphi - \frac{\cos \delta}{\sin z} \cos q \Delta \alpha + \frac{\sin q}{\sin z} \Delta \delta \quad (5.25) ,$$

добијамо следећи изрази за западну половину неба:

$$\Delta A \approx \mp \frac{1}{60} \Delta \alpha + \Delta \delta \pm \frac{1}{60} \Delta u - \frac{1}{60} \Delta \varphi .$$

Горњи знак ~~важи~~ се односи на  $q \approx 45^{\circ}$ , а доњи на  $q \approx 135^{\circ}$ .

За источну половину неба, ако ставимо  $q_e = -q_w$ , важи:

$$\Delta A \approx \mp \frac{1}{60} \Delta \alpha - \Delta \delta \pm \frac{1}{60} \Delta u + \frac{1}{60} \Delta \varphi .$$

Ако занемаримо последња два члана ( $\frac{1}{60} \Delta u$  и  $\frac{1}{60} \Delta \varphi$ ), имамо упрошћену формулу

$$\Delta A \approx \mp \frac{1}{60} \Delta \alpha \mp \Delta \delta . \quad (5.26)$$

Горњи знак испред  $\Delta \alpha$  важи ако је  $q$  мање од  $90^{\circ}$ , а испред  $\Delta \delta$  ако је Северњача на источној хемисфери.

Уз очекивање да  $\Delta\alpha$  иде приближно до  $+1^s$  и  $\Delta\delta$  приближно до  $-0''.40$  (према вредностима у Бошковићевим редуccionим листовима), налазимо поправку азимута:

$$-0''.65 < \Delta A < +0''.65.$$

Оваква вредност се добија као последица разлика положаја Северњаче у систему FK5 и систему NFK.

У разматрању утицаја грешака положаја звезда, случајну грешку азимута одређујемо према формули:

$$\frac{\epsilon_A^2}{E_A^2} \approx \left(\frac{1}{60} E_\alpha\right)^2 + E_\delta^2 + \left(\frac{1}{60} E_u\right)^2 + \left(\frac{1}{60} E_\varphi\right)^2.$$

С обзиром да су последња два члана у овој формули практично занемарљиви у односу на случајне грешке ректасцензије и деклинације, она може да се пише једноставније:

$$\epsilon_A^2 \approx \left(\frac{1}{60} E_\alpha\right)^2 + E_\delta^2. \quad (5.27)$$

Случајна грешка положаја Северњаче у систему FK5 за епоху 1906.0 износи

$$M_\alpha = \pm 0^s0489, \quad M_\delta = \pm 0''.013,$$

а грешка система за исту епоху је (према Таблици 1.4)

$$m_\alpha = \pm 0^s1205, \quad m_\delta = \pm 0''.018;$$

одакле произилази да је грешка положаја Северњаче

$$E_\alpha = \pm 0^s130 = \pm 1''.95, \quad E_\delta = \pm 0''.02,$$

па се добија грешка

$$\epsilon_A \approx \pm 0''.04.$$

Када користимо звезде у систему NFK који је био важећи у првој половини овог века, случајна грешка азимута ће бити знатно већа. Оригинална вредност случајне грешке Поларе у систему NFK није нам на располагању. Зато ћемо се послужити подацима из каталога FK3, где је

$$M_\alpha = \pm 0^s0455, \quad M_\delta = \pm 0''.018;$$

$$M_\mu = \pm 0^s211, \quad M_{\mu'} = \pm 0''.07.$$

Имајући у виду да су грешке положаја у систему NFK око 1.5 пута веће, а грешке сопствених кретања око 1.8 пута веће него у систему FK3, такође, и да је епоха NFK око 1870.0, може се наћи да је грешка положаја Поларе у NFK за епоху 1906.0

$$M_\alpha = \pm 0^s1528, \quad M_\delta = \pm 0''.053,$$

док је грешка система за исту епоху је (према Таблици 1.1)

$$m_\alpha = \pm 0^s4853, \quad m_\delta = \pm 0''.116.$$

Из овога се добија случајна грешка положаја Северњаче

$$E_{\alpha} = \pm \overset{7''.64}{\cancel{0''.509}} , \quad E_{\delta} = \pm 0''.13 .$$

Случајна грешка азимута онда износи

$$\epsilon_A \approx \pm 0''.18 .$$

Преласком на систем FK5, дакле, случајна грешка азимута која је последица случајне грешке координата Северњаче смањује се четири и по пута.

*После рачунања утицаја систематских грешака а priori може се закључити да у резултате одређивања стања часовника у целости улази поправка равнодневице NFK каталога ( $-0^s.050$ ). Резултати одређивања ширине су знатно измењени због присуства ове поправке (око три десета лучне секунде по апсолутној вредности). Опажањем једнаког броја Пјевцовљевиx парова на источној и на западној половини неба њен утицај се анулира и остаје само утицај систематских разлика деклинација, првенствено јужне звезде. Утицај на резултате одређивања азимута зависи и од тога на којој се половини неба налази Северњача и од тога да ли се опажа пре или после највеће дигресије. Што се тиче случајних грешака, видимо да се део који потиче од грешака координата звезда вишеструко смањује свођењем на FK5 систем.*

## 6. Бошковићева одређивања 1900 – 1911.

### Свођење на ГК5 систем.

У првим годинама XX века почела су геодетска одређивања ради тачног топографског премера Србије. Том приликом су откривена знатна неслагања у вези картографских радова бивше Аустро–Угарске, Румуније, Бугарске и Србије, и то баш на четворомеђи тих држава, тј. на североисточном крају тадашње Србије, тамо где карпатско–балкански лук пресеца те области раздвајајући лонгитудинално Панонски од Понтијског басена. Због тога је било врло важно да се реши проблем о узроку тих неслагања. Такође је било важно питање како да се оријентише триангулација Србије и на који сфероид да се пројектује. Због везе тадашњих геодетских радова са радовима бечког Војногеографског института, а преко њих и са осталим сличним радовима земаља средње Европе, решено је да се оријентација оствари према радовима бечког Војногеографског института и да се, попут њихових радова, пројекција врши на сфероид Бесела, као што су тада били сви радови средње Европе. Тако је још онда стварана веза и континуитет средњеевропских радова са балканским.

С.П. Бошковић је крајем прошлог века, на студијама у Пулкову, наслућивао да је, вероватно, скретање вертикале од њеног нормалног положаја према идеално кривој површини Земљиног сфероида узрок геодетског, па самим тим и картографског, углавном лонгитудиналног неслагања у земљама Панонског и Понтијског басена. Ово би могла бити последица локалног атракционог поремећаја инезитета силе теже, изазваног структуром карпатско–балканског планинског лука. Зато је још тада планирао геодетске и астрономске радове како би утврдио истинитост тих својих наслућивања (Бошковић 1952, стр. 1 – 3).

### 6.1. Астрогеодетска одређивања у Краљевини Србији.

Ради остварења своје замисли С.П. Бошковић је припремио два универзална инструмента за геодетска и астрономска опажања, дванаест хронометара, анероиде и термометре. Срачунате су ефемериде парова звезда за одређивање времена Шингеровом методом за тачке свих географских ширина тадашње Србије, а исто тако ефемериде парова звезда за одређивање географске ширине Пјевцовљевом методом и ефемериде Поларе за одређи-



вање азимута класичном методом. Бошковић је планирао рад тако да паралелно са мерењем хоризонталних и вертикалних углова триангулације изврши и астрономска мерења за одређивање времена, географске ширине и азимута, изабравши за то низ тачака на највишим нашим планинама, као и низ тачака у нашим речним долинама, рачунајући да ће се тако најбоље испитати и открити наслућивани локални атракциони утицаји на поремећај нормалног правца интензитета силе Земљине теже, па отуда и скретање вертикале.

Прва одређивања на I – северној тачки Параћиског базиса и на највишем врху Шиљку планине Ртањ 1900. године дала су врло добре резултате. Пошто су експедиције за ове радове на изабраним највишим тачкама наших планина скопчане са знатним физичким напорима, Бошковић је програм геодетских и астрономских радова приредио тако да то буде урађено првих година, а затим да се пређе на тачке у нашим речним котлинама. Године 1901. извршене су експедиције и мерења на Миџору, Трему (Сува Планина) и Јастрепцу; 1902. године на Великом Стрешеру, Петровој гори, Копаонику, Јанковом Камени (на Голији) и Торнику; 1903. године на Малом Повлену, Дели-Јовану, Великом Суморовцу, Црном Врху дуленском, Букуљи и Церу. Затим, 1905. године на тачкама: Нишка црква, Зајечарска црква и Неготинска црква; 1906. године у Пироту на Тија-Бари (код споменика) и на II тачки (северној) Врањског базиса у селу Златокопу; 1907. године на Хисару (Лесковачком), код Трстеничке цркве и код Чачанске цркве; 1908. године на I тачки Лозничког базиса – Старачи и на Озеровцу код Марковачког моста на Морави. После тога, 1909. године на Авали, Подгорици и Куличу (код утока Мораве у Дунав); најзад, 1911. године на Осојни код Кладова и у Пироту на Тија-Бари. Астрономски радови нису вршени 1904. године, када је Бошковић био заузет мерењем 4 базиса, и 1910. године, када је био заузет премером талвега Дрине од Зворника до Раче у сарадњи са бечким Војногеографским институтом.

Хитни радови на срачунавању тригонометријске триангулације и започети радови на новом топографском премеру размера 1:25 000, затим радови 1912 - 1913. године, хитни геодетски радови за нови топографски премер ослобођених крајева и радови од 1914. до 1920. године онемогућили су срачунавање огромног астрономског материјала. Али је он заједно са триангулацијом сачуван. Пренесен је преко Албаније до Крфа, затим у Солун, па најзад опет у отаџбину – у Београд 1919. године. У то време је Војногеографски институт у Београду, поред свога, добио и нови стручни персонал, руске топографе, који су много помогли својом техничком сарадњом при срачунавању астрономских података.

У Таблици 6.1. даје се преглед тачака, са годином када су обављена астрогодетска одређивања и координатама. Стубац ширина садржи Бошковићеве вредности, као и последњи стубац са азимутима (називи тачака чији су азимути одређивани дају се у наредној табlici).

Таблица 6.1.

Тачке на којима је одређивано скретање вертикала у Србији 1900 – 1911 ( $\lambda$  – лонгитуда места опажања;  $\varphi$  – Бошковићеве вредности латитуде;  $A$  – Бошковићеве вредности азимута).

Место опажања	година	$\lambda$	$\varphi$	$A$
1. Параћин	1900.	$- 1^h 25^m 6$	$+ 43^\circ 50' 31''.57$	$277^\circ 00' 42''.36$
2. Ртањ	1900.	$- 1^h 27^m 6$	$+ 43^\circ 46' 39''.98$	$250^\circ 27' 47''.48$
3. Миџор	1901.	$- 1^h 30^m 8$	$+ 43^\circ 23' 50''.52$	$170^\circ 55' 05''.48$
4. Трем	1901.	$- 1^h 28^m 7$	$+ 43^\circ 11' 10''.10$	$64^\circ 28' 37''.81$
5. Јастребац	1901.	$- 1^h 25^m 8$	$+ 43^\circ 22' 58''.37$	$44^\circ 16' 58''.68$
6. Стрешер	1902.	$- 1^h 29^m 0$	$+ 42^\circ 37' 39''.02$	$15^\circ 40' 28''.03$
7. Петрова гора	1902.	$- 1^h 26^m 1$	$+ 42^\circ 59' 55''.41$	$63^\circ 15' 27''.57$
8. Копаоник	1902.	$- 1^h 23^m 3$	$+ 43^\circ 16' 06''.24$	$135^\circ 46' 21''.21$
9. Јанков камен	1902.	$- 1^h 21^m 1$	$+ 43^\circ 20' 23''.12$	$139^\circ 31' 56''.68$
10. Торник	1902.	$- 1^h 18^m 7$	$+ 43^\circ 39' 10''.12$	$201^\circ 16' 11''.63$
11. Мали Повлен	1903.	$- 1^h 18^m 9$	$+ 44^\circ 07' 53''.08$	$29^\circ 29' 07''.65$
12. Дели-Јован	1903.	$- 1^h 28^m 9$	$+ 44^\circ 13' 39''.75$	$59^\circ 29' 26''.37$
13. Велики Суморовац	1903.	$- 1^h 26^m 6$	$+ 44^\circ 19' 01''.08$	$184^\circ 53' 13''.17$
14. Црни Врх	1903.	$- 1^h 23^m 6$	$+ 43^\circ 51' 41''.31$	$199^\circ 06' 29''.75$
15. Букуља	1903.	$- 1^h 21^m 9$	$+ 44^\circ 17' 59''.29$	$188^\circ 34' 13''.41$
16. Цер	1903.	$- 1^h 18^m 0$	$+ 44^\circ 36' 14''.77$	$105^\circ 00' 58''.66$
17. Нишка црква	1905.	$- 1^h 27^m 6$	$+ 43^\circ 18' 55''.62$	$218^\circ 14' 31''.58$
18. Зајечарска црква	1905.	$- 1^h 29^m 2$	$+ 43^\circ 54' 08''.28$	$65^\circ 34' 25''.86$
19. Неготинска црква	1905.	$- 1^h 30^m 1$	$+ 44^\circ 13' 39''.12$	$179^\circ 05' 34''.41$
20. Пирот	1906.	$- 1^h 30^m 4$	$+ 43^\circ 09' 36''.47$	$288^\circ 30' 27''.85$
21. Златокоп	1906.	$- 1^h 27^m 3$	$+ 42^\circ 31' 03''.04$	$122^\circ 02' 43''.35$
22. Хисар	1907.	$- 1^h 27^m 8$	$+ 42^\circ 59' 12''.76$	$221^\circ 31' 47''.66$
23. Трстеничка. црква	1907.	$- 1^h 24^m 1$	$+ 43^\circ 37' 16''.44$	$190^\circ 50' 30''.32$
24. Чачанска црква	1907.	$- 1^h 21^m 4$	$+ 43^\circ 53' 38''.70$	$99^\circ 27' 12''.55$
25. Старача	1908.	$- 1^h 16^m 8$	$+ 44^\circ 34' 30''.59$	$232^\circ 06' 56''.65$
26. Озеровац	1908.	$- 1^h 24^m 4$	$+ 44^\circ 14' 08''.20$	$225^\circ 02' 57''.46$
27. Авала	1909.	$- 1^h 22^m 0$	$+ 44^\circ 41' 22''.50$	$194^\circ 19' 50''.30$
28. Кулич	1909.	$- 1^h 19^m 6$	$+ 44^\circ 42' 52''.08$	$272^\circ 02' 05''.21$
29. Подгорица	1909.	$- 1^h 24^m 1$	$+ 44^\circ 40' 59''.45$	$114^\circ 27' 53''.41$
30. Осојна	1911.	$- 1^h 30^m 4$	$+ 44^\circ 35' 18''.79$	$74^\circ 31' 36''.01$

Таблица 6.1.

Тачке на којима је одређивано скретање вертикала у Србији 1900 – 1911 ( $\lambda$  – лонгитуда места опажања;  $\varphi$  – Бошковићеве вредности латитуде;  $A$  – Бошковићеве вредности азимута).

Место опажања	година	$\lambda$	$\varphi$	$A$
1. Параћин	1900.	– 1 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 6	+ 43° 50' 31".57	277° 00' 42".36
2. Ртањ	1900.	– 1 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 6	+ 43° 46' 39".98	250° 27' 47".48
3. Миџор	1901.	– 1 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 8	+ 43° 23' 50".52	170° 55' 05".48
4. Трем	1901.	– 1 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 7	+ 43° 11' 10".10	64° 28' 37".81
5. Јастребац	1901.	– 1 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 8	+ 43° 22' 58".37	44° 16' 58".68
6. Стрешер	1902.	– 1 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 0	+ 42° 37' 39".02	15° 40' 28".03
7. Петрова гора	1902.	– 1 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 1	+ 42° 59' 55".41	63° 15' 27".57
8. Копаоник	1902.	– 1 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 3	+ 43° 16' 06".24	135° 46' 21".21
9. Јанков камен	1902.	– 1 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 1	+ 43° 20' 23".12	139° 31' 56".68
10. Торник	1902.	– 1 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup> 7	+ 43° 39' 10".12	201° 16' 11".63
11. Мали Повлен	1903.	– 1 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup> 9	+ 44° 07' 53".08	29° 29' 07".65
12. Дели-Јован	1903.	– 1 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 9	+ 44° 13' 39".75	59° 29' 26".37
13. Велики Суморовац	1903.	– 1 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 6	+ 44° 19' 01".08	184° 53' 13".17
14. Црни Врх	1903.	– 1 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 6	+ 43° 51' 41".31	199° 06' 29".75
15. Букуља	1903.	– 1 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 9	+ 44° 17' 59".29	188° 34' 13".41
16. Цер	1903.	– 1 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup> 0	+ 44° 36' 14".77	105° 00' 58".66
17. Нишка црква	1905.	– 1 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 6	+ 43° 18' 55".62	218° 14' 31".58
18. Зајечарска црква	1905.	– 1 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 2	+ 43° 54' 08".28	65° 34' 25".86
19. Неготинска црква	1905.	– 1 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 1	+ 44° 13' 39".12	179° 05' 34".41
20. Пирот	1906.	– 1 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 4	+ 43° 09' 36".47	288° 30' 27".85
21. Златокоп	1906.	– 1 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 3	+ 42° 31' 03".04	122° 02' 43".35
22. Хисар	1907.	– 1 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 8	+ 42° 59' 12".76	221° 31' 47".66
23. Трстеничка црква	1907.	– 1 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 1	+ 43° 37' 16".44	190° 50' 30".32
24. Чачанска црква	1907.	– 1 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 4	+ 43° 53' 38".70	99° 27' 12".55
25. Старача	1908.	– 1 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 8	+ 44° 34' 30".59	232° 06' 56".65
26. Озеровац	1908.	– 1 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 4	+ 44° 14' 08".20	225° 02' 57".46
27. Авала	1909.	– 1 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 0	+ 44° 41' 22".50	194° 19' 50".30
28. Кулич	1909.	– 1 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 6	+ 44° 42' 52".08	272° 02' 05".21
29. Подгорица	1909.	– 1 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 1	+ 44° 40' 59".45	114° 27' 53".41
30. Осојна	1911.	– 1 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 4	+ 44° 35' 18".79	74° 31' 36".01

Већ 1923. године Бошковић је могао у кратком резимираном облику да прикаже резултате и закључке својих астрономских одређивања у Географском друштву приликом опширног предавања о нашим астрономским, геодетским, топографским и картографским радовима. Резултати су приказани и 1927. године у Прагу на конгресу Међународне геодетске и геофизичке уније са писаним резимеом о томе на француском језику.

Пред сам други светски рат Бошковић је као члан Института земаљске одбране примио сав тај астрономски елаборат (у 30 великих фасцикли) на чување и дефинитивну научну обраду за публикување на нашем језику. За време окупације материјал је брижљиво сачуван и омогућено је, после завршетка рата да резултати буду објављени у издању Српске академије наука под називом "СКРЕТАЊЕ ВЕРТИКАЛА У СРБИЈИ" (Бошковић 1952).

Пре него што пређемо на излагање резултата свођења Бошковићевих одређивања на систем FK5, треба нешто рећи о значају одређивања скретања вертикала и методама за одређивање скретања. За ово ћемо користити текст са почетка поменуте публикације (стр. 5 – 8).

#### 6.1.1. Скретање вертикале.

Један од главних научних задатака геодезије је испитивање облика и димензија планете Земље. Са постепеним обогаћивањем геодетског и астрономског материјала на континентима, овај проблем је решаван већ много пута и све тачније у смислу одређивања правилног геометријског тела облика спљоштеног елипсоида – сфероида одређених димензија. Тако су постали најпознатији сфероиди: Валбека, Бесела, Кларка, Хејфорда, Красовског. Из добијених резултата се јасно испољавао закључак да прави облик Земље, а то је крива морска водена површина у равнотежи, замишљено продужена испод континента, није потпуно правилно геометријско тело, већ тело знатно компликованије криве површине, назване геод, која је у свим својим тачкама управна на стварни правац виска, или такозвану вертикалу. Овај правац се, у општем случају, не слаже потпуно са правцем нормале ма кога од прихваћених идеалних земљиних сфероида. Геодезија се, уз остало, бави испитивањем тих скретања вертикала, па самим тим и питањем о облику геоида дотичне области.

Открићем локалних скретања правца вертикале открива се и узрок тих скретања, односно, неједнакост густине масе Земљине коре и њеног рељефа, те се код местимичних знатних вредности тих скретања може одмах судити о великим масама богатих драгоценим рудама.

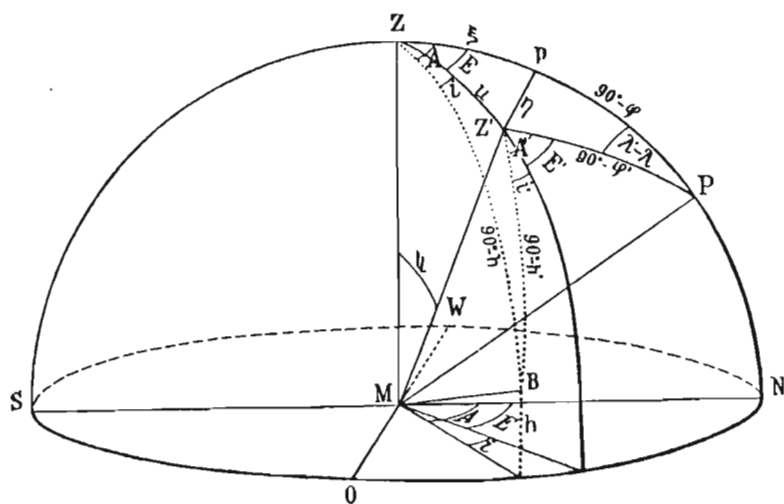
Овим се открива и један од узрока неслагања геодетских и картографских радова

разних држава које су имале различите и посебне своје полазне астрономске тачке за оријентацију својих триангулација.

Најзад, појављивањем нових научних радова и открића у свим земљама света омогућиће се општа компензација свих триангулација на континентима, на чему се у Европи и у Америци поодавно увелико ради, после чега ће се и доћи до изналажења будућег, највероватнијег и најприближнијег геоиду, идеалног Земљиног сфероида и до најбоље унификације картографских радова света.

### 6.1.2. Одређивање скретања вертикале.

Нека је на Земљиној површини дата нека тачка  $M$  за коју је геодетским путем одређена географска ширина  $\varphi$ , географска дужина  $\lambda$  и азимут  $A$  правца са  $M$  на неку тачку  $B$  (сл. 6.1.). Нека су из астрономских опажања добијене те исте координате, које ћемо називати астрономским и обележити респективно са  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  и  $A'$ . У општем случају одговарајуће геодетске и астрономске координате се неће поклапати међу собом, већ ће се показати извесне мале разлике  $\varphi' - \varphi$ ,  $\lambda' - \lambda$  и  $A' - A$ , као последица скретања вертикале у тачки  $M$  са њеног идеалног правца нормале на идеални Земљин елипсоид, услед извесног локалног атракционог поремећаја идеалног правца силе Земљине теже.



Слика 6.1. Скретање вертикале.

Кад из тачке  $M$  Земљиног сфероида, на коме су срачунате геодетске координате, као из центра, замислимо помоћну сферу, нормала те тачке сфероида, продужена ка идеалном зениту, пробиће ту сферу у тачки  $Z$ . Правац повучен кроз исту тачку  $M$ , паралелно са Земљиним осом, продреће кроз сферу у тачки  $P$ , па ће велики круг  $PZ$  представљати раван елипсоидалног меридијана, са географском дужином  $\lambda$ , коју називамо геодетском.

Стварна вертикала (правац виска), која се одређује на истој тачки астрономским путем, неће се покlopити са идеалном нормалом  $MZ$ , него ће скренути са тог правца за неку малу угловну величину  $u$  (од неколико секунди, а ретко кад више од десетак секунди), те ће пробити сферу у тачки  $Z'$  правог зенита. Тако ће лук великог круга  $PZ'$  бити прави, астрономски меридијан тачке  $M$ , удаљен од почетног за величину праве, астрономске дужине  $\lambda'$ .

Лук  $PZ$  представљаће допуну геодетске ширине  $\varphi$  тачке  $M$  до  $90^\circ$ , тј.  $PZ = 90^\circ - \varphi$ . Лук  $PZ'$  биће допуна астрономске ширине  $\varphi'$  тачке  $M$  до  $90^\circ$ , тј.  $PZ' = 90^\circ - \varphi'$ .

Тотална вредност скретања вертикале  $MZ'$  од њеног идеалног правца - нормале тачке  $M$  на елипсоиду биће представљено луком  $ZZ' = u$ .

Кад се из тачке  $Z'$  упише лук  $Z'p$  нормално на лук меридијана  $ZP$ , добићемо, због мале вредности одступања  $u$ , два елементарна сферна троугла. Из троугла  $ZZ'p$  видимо да се тотална вредност  $ZZ' = u$  разлаже у две компоненте, једну  $Zp = \xi$  правцем меридијана, тј. правцем север - југ ( $N - S$ ) и другу  $Z'p = \eta$  правцем првог вертикала, тј. правцем исток - запад ( $O - W$ ). Кад се угао  $pZZ'$  означи са  $E$ , из елементарног троугла  $pZZ'$  ове две компоненте се могу изразити на следећи начин:  $\xi = u \cos E$  и  $\eta = u \sin E$ .

Из оштроуглог сферног троугла  $PZZ'$ , због врло мале вредности  $Z'p$  и угла  $(\lambda' - \lambda)$ , добијамо:

$$\xi = (90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi') = \varphi' - \varphi, \quad (6.1)$$

односно, скретање вертикале правцем меридијана ( $N - S$ ) једнако је разлици астрономске и геодетске ширине тачке  $M$ .

Из правоуглог сферног троугла  $Z'Pp$  са правим углом код  $p$  имамо

$$\cos(90^\circ - \eta) = \sin(90^\circ - \varphi') \sin(\lambda' - \lambda).$$

С обзиром да су вредности  $\varphi'$  и  $\varphi$  приближно једнаке и да су величине  $\lambda' - \lambda$  и  $\eta$  врло мале, биће:

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi, \quad (6.2)$$

где су величине  $(\lambda' - \lambda)$  и  $\eta$  изражене у лучним секундама.

Компонента  $\eta$  може да се добије из разлике ( $A' - A$ ) астрономског и геодетског азимута. Размотримо правоугли троугао  $pPZ'$ . По Неперовом правилу, косинус стране  $PZ'$  једнак је производу котангеса углова  $pZ'P$  и  $pPZ'$ . Страна  $PZ'$  је допуна астрономске ширине  $\varphi'$  до деведесет степени, па је  $PZ' = (90^\circ - \varphi') \approx (90^\circ - \varphi)$ . Такође је угао код темена  $Z'$  једнак  $180^\circ - (90^\circ - E) - E'$ , а угао код темена  $P$  је  $\lambda' - \lambda$ . Значи,

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \operatorname{ctg} [180^\circ - (90^\circ - E) - E'] \operatorname{ctg} (\lambda' - \lambda),$$

односно, после сређивања:

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} (E' - E) \operatorname{ctg} (\lambda' - \lambda). \quad (6.3)$$

Треба још показати да је разлика  $(E' - E)$  практично једнака разлици астрономског и геодетског азимута правца  $(A' - A)$ . Када се из тачке  $M$  опажа нека друга земљишна тачка  $B$  на незнатној висини  $h$  над хоризонтом ради одређивања геодетског  $A$  и астрономског  $A'$  азимута правца  $MB$ , тада ће се, на помоћној сфери, геодетска вертикална раван тог правца представити луком великог круга  $ZB$  под углом  $(E + i) = A$  геодетског азимута правца  $MB$ . Астрономска вертикална раван представиће се луком  $Z'B$  под углом  $(E' + i) = A'$  астрономског азимута, па је разлика између астрономског и геодетског азимута

$$(A' - A) = (E' - E) + (i' - i).$$

Скретање вертикала  $i$  је јако мало у поређењу са луковима  $(90^\circ - h)$  и  $(90^\circ - h')$ , па је разлика  $(i' - i)$  занемарљива. Зато се може писати

$$(A' - A) = (E' - E).$$

Ако узмемо у обзир последњу једнакост, онда се формула (6.3) може писати у облику

$$\operatorname{tg} (A' - A) = \operatorname{tg} (\lambda' - \lambda) \sin \varphi.$$

Пошто су  $(A' - A)$  и  $(\lambda' - \lambda)$  врло мале угловне вредности, изражавају се у лучним секундама на следећи начин:

$$(\lambda' - \lambda)'' \sin \varphi - (A' - A)'' = 0. \quad (6.4)$$

Ово је *Лапласова једначина* којом се узајамно контролишу одређивања географских дужина и азимута из астрономских опажања.

Коришћењем Лапласове једначине може да се одреди компонента  $\eta$ , тј. скретање вертикале у правцу првог вертикала  $(O - W)$  на основи одређивања азимута  $A'$  из астрономских опажања (поред геодетског азимута  $A$ ) и без астрономског одређивања географске дужине. И заиста, кад се узму у обзир изрази (6.2) и (6.4), добија се

$$\eta = (A' - A) \operatorname{ctg} \varphi. \quad (6.5)$$

Формулама (6.1) и (6.5) дате су компоненте скретања вертикала. Тотална вредност скретања вертикала  $u$  рачуна се према изразу

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad (6.6)$$

при чему је правац тог скретања вертикале одређен углом  $E$ :

$$\operatorname{tg} E = \frac{\eta}{\xi}. \quad (6.7)$$

У посебном случају Бошковићевих мерења, из периода 1900 - 1911. година, једним истим универзалним инструментом (са додатком једног тачног хронометра) било је могуће да се на било којој тачки тригонометријске триангулације добију сви подаци за одређивање и геодетских величина  $\varphi$  и  $A$ , а такође и астрономских  $\varphi'$  и  $A'$  (географске ширине и азимута). Самим тим одређене су и вредности  $\xi$  и  $\eta$  за скретање вертикала у датим тачкама правцем меридијана ( $N - S$ ) и правцем првог вертикала ( $O - W$ ).

## 6.2. Свођење Бошковићевих опажања на FK5 систем.

У време када сам са професором Владетом Миловановићем разматрао грешке положаја звезда у фундаменталним каталозима у вези свођење опажања на FK5 систем и кад су дефинисани циљеви ове тезе, на располагању нам је била само поменута књига "Скретања вертикала у Србији" Стевана П. Бошковића. Поред објашњења и анализе, књига је садржала појединачне резултате одређивања са датумима опажања и парове звезда из којих су ти резултати добијени. Првобитна замисао је била да се после идентификације звезда њихови привидни положаји добију у систему NFK, који је важио почетком двадесетих година кад је Бошковић радио редукације својих опажања, и у актуелном систему FK5 (са новим стандардним положајима, новим астрономским константама и по новој процедури).

У вези са редукацијама одмах је искрсло неколико проблема. Прво, требало је наћи или израчунати Беселове бројева са којима је Бошковић добијао привидне положаје. Пре свега, на располагању нам нису годишњаци од пре осамдесет или деведесет година где се налазе ти подаци. Што се тиче рачунања Беселових бројева, рачунарска техника нам омогућава брзо рачунање, али питање је да ли бисмо без оригиналних формула и описа поступка могли да поновимо рачун на идентичан начин и тако добијемо исте вредности као у одговарајућим годишњацима. Друго, да бисмо добили што тачнији привидни положај звезде, потребно је да знамо тренутак опажања, а то никако не може да се реконструише из података у Бошковићевој књизи. Треће, ни на једном месту не налазимо помен о томе који је годишњак коришћен за редукације. Врло је вероватно да су положаји



звезда у Бошковићевим одређивањима узети из каталога NFK, јер се сматрало у оно доба да је тај каталог високе тачности. Сем тога, био је основа Берлинског годишњака и руског "ежегодника", који почиње да излази 1922. године. Међутим, допуштамо минималну могућност да су положаји звезда дати у Њукомбовом систему  $N_2$  (Бакулин 1980, стр. 211), који је у првој четвртини овог века представљао основу америчких ефемерид.

У суштини, да бисмо свели Бошковићеве резултате астрогеодетских одређивања на систем FK5 најбоље је да користимо оригиналне Бошковићеве вредности привидних координата звезда (ректасцензије и деклинације). Тиме избегавамо разне недоумице и нагађања. После распитивања на више места, између осталог и у Архиву САНУ, утврђено је да се комплетан Бошковићев редуccionи материјал, тачније, редуccionи листови са Цингеровим и Пјевцовљевим паровима и опажањима Северњаче, чува у библиотеци Војногеографског института.

Привидне координате звезда које смо добили на руке знатно су поједноставиле посао. Требало је само рачунати привидне ректасцензије и деклинације по процедури која је приказана у IV делу. За овај део рада, као што је речено, коришћене су барицентричне координате тела Сунчевог система рачунате по JPL нумеричкој теорији DE200/LE200 ради добијања барицентричних координата Земље и њеног вектора брзине. Одговарајући подаци за интервал од 1899. до 1924. године су добијени од колеге Б. Јовановића.

После добијања разлике између FK5 положаја и положаја у Бошковићевим редуccionим листовима, могли су Бошковићеви резултати је да се сведу на систем FK5. Свођење је извршено тако што су рачунате поправке Бошковићевих резултата по диференцијалним формулама изведеним у V поглављу.

#### 6.2.1. Свођење стања часовника.

Одређивања стања часовника Цингеровом методом С.П. Бошковић је изводио бар у две опажачке ноћи. Број парова се кретао од 4 до 43. Највећи број парова (преко 40) је опажан на првој тачки Парафинског базиса и на Ртњу. Од укупно 384 опажана пара у материјалу је недостајало четири редуccionа листа; два за прву тачку Парафинског базиса и два за Букуљу. У овом раду је обрађено, значи, 380 парова.

Бошковићев опажачки програм имао је 49 различитих парова. Звезде нису носиле бројеве, већ су имале номенклатуру по сазвежђима. После идентификације, утврђено је да овај програм садрж 54 различите звезде. Само једна,  $\zeta$  Herculis, двојна звезда треће привидне величине, не налази се у FK5. Подаци за ову звезду узети су из PPM каталога (Röser и Bastian 1991), који је састављен у систему FK5 за еквинокциј и епоху J2000.0 .

Како је из опажања одређивано и стање и ход часовника, улазни подаци су подељени

не по датумима, већ по групама из којих је одређиван ход.

За сваку звезду је из редукционих листова узиман средњи тренутак опажања (у звезданом времену) заокружен на минут. Овај податак је потребан ради рачунања привидног положаја звезде у систему FK5 и одређивања часовног угла. После тога је рачуната зенитна даљина, азимут и паралактички угао. Други податак је привидни положај звезде са којим је Бошковић рачунао стање часовника. На почетку рачунања прављене су разлике између FK5 и ових положаја.

Најпре је у првој апроксимацији израчуната вредност поправке  $\Delta\varphi$  по формули (5.22), при чему је претпостављено да је  $\Delta u = 0$ . Потом је за сваку тачку нађена средња вредност поправке  $\Delta\varphi$ . Ове средње вредности фигуришу у формули (5.19) по којој су рачунате поправке стања часовника. Поновно рачунање поправке ширине даје практично за све тачке скоро непромењену вредност, па није било потребе да се опет рачуна стање часовника.

У Таблици 6.2 приказане су средње вредности поправака стања часовника за сваку тачку на којој је Бошковић вршио астрогеодетска одређивања. Општа аритметичка средина износи  $-0^{\circ}061$ , што је близу вредности која је израчуната за фиктиван Шингеров пар:  $-0^{\circ}070$ . Наравно, не треба очекивати потпуно поклапање, јер положаји звезда у пару не одговарају идеалном случају. Сем тога, вредност поправке за фиктиван пар садржи само разлику система, док стварна вредност садржи и индивидуалне поправке ректасцензија и деклинација звезда.

Вредности поправака  $\Delta u$ , дакле, можемо сматрати свођењем на FK5 систем. Преласком на овај систем, део грешке стања часовника који је последица утицаја средње квадратне грешке координата звезда умањује се са  $\pm 0^{\circ}014$  на  $\pm 0^{\circ}003$ .

### 6.2.2. Свођење ширине.

Као и код стања часовника, одређивања ширине Пјевцовљевом методом извођено је бар у две опажачке ноћи. Број парова се кретао од 5 до 35, у просеку нешто преко десет парова на свакој тачки. Од 342 опажана пара у материјалу је недостајао само један редукциони лист, и то за прву тачку Параћинског базиса, тако да за њу имамо 34 пара. Укупно је обрађено 341 Пјевцовљев пар.

Иначе, цео опажачки програм Бошковићев је имао 19 различитих Пјевцовљевих парова. После идентификације показало се да програм чини 36 различитих звезда и све се оне налазе у каталогу FK5.

Да би се што коректније обрачунала поправка стања часовника и ход, подаци су разврстани по групама, при чему је вођено рачуна како су груписани Шингерови парови

из којих је одређиван ход часовника. За већину тачака различите групе су одговарале различитим датумима, али на неколико места имамо две или три групе у једном датуму.

Из редуccionих листова је за сваку звезду узиман средњи тренутак опажања звезде заокружен на десети део минута. Овај податак забележен у звезданом времену потребан је због рачунања привидног положаја звезде у систему FK5 и одређивања часовног угла. После је, као код Шингерових парова, рачуната зенитна даљина, азимут и паралактички угао. Други податак је привидни положај звезде са којим је Бошковић рачунао ширину. На почетку рачунања прављене су разлике између FK5 и ових положаја.

У првој апроксимацији је најпре рачуната вредност поправке  $\Delta\varphi$  по формули (5.22), при чему је претпостављено да је  $\Delta u = 0$ . После тога су рачунате поправке стања часовника, па је са одговарајућим поправкама  $\Delta u$  поновљено рачунање. Нове поправке ширине дале су практично за све тачке скоро непромењену вредност.

Усредњене вредности поправака ширине приказане су у Таблици 6.2 заједно са бројем парова из којих је ова вредност добијена. Општа аритметичка средина поправке ширине је  $+0''.17$ . Она је већа од вредности израчунате за два фиктивна Пјевцовљева пара, један на источној и један на западној половини неба.

Прегледањем редуccionих листова упада у очи да је само око једне петине Пјевцовљевих парова опажано на источној половини неба, што се види из азимута на којима су обављана опажања. С обзиром на ову чињеницу, пошто је поправка ширине за источни фиктивни пар  $-0''.21$ , а за западни  $+0''.35$ , општа аритметичка средина треба да износи у нашем случају  $+0''.24$ . Неподударност опште аритметичке средине са овом вредношћу могућа је, као и код Шингерове методе, зато што стварни распоред звезда у пару није идеално симетричан и што реални пар звезда садржи и систематске и индивидуалне поправке положаја. Сем тога, деклинације звезда се мењају у широком распону (од  $-13^\circ$  до  $+82^\circ$ ), а северне звезде су опажане и око доњег пролаза.

Добијене вредности поправака  $\Delta\varphi$  представљају свођење Бошковићевих вредности ширина на FK5 систем. Преласком на овај систем, део грешке ширине који је последица утицаја средње квадратне грешке координата звезда умањује се са  $\pm 0''.14$  на  $\pm 0''.02$ . Како је на свакој тачки средња ширина добијана из најмање пет Пјевцовљевих парова, преласком на FK5 систем део случајне грешке резултата одређивања ширине, који се може приписати утицају случајних грешака положаја звезда, износи око  $\pm 0''.01$  и мање.

### 6.2.3. Свођење азимута.

Што се тиче резултата одређивања азимута, да би се умањио утицаја грешака лимбове поделе, после сваког опажања Северњаче хоризонтални круг је окретан за  $30^0$ , па је

из којих је одређиван ход часовника. За већину тачака различите групе су одговарале различитим датумима, али на неколико места имамо две или три групе у једном датуму.

Из редукционих листова је за сваку звезду узиман средњи тренутак опажања звезде заокружен на десети део минута. Овај податак забележен у звезданом времену потребан је због рачунања привидног положаја звезде у систему FK5 и одређивања часовног угла. После је, као код Шингерових парова, рачуната зенитна даљина, азимут и паралактички угао. Други податак је привидни положај звезде са којим је Бошковић рачунао ширину. На почетку рачунања прављене су разлике између FK5 и ових положаја.

У првој апроксимацији је најпре рачуната вредност поправке  $\Delta\varphi$  по формули (5.22), при чему је претпостављено да је  $\Delta u = 0$ . После тога су рачунате поправке стања часовника, па је са одговарајућим поправкама  $\Delta u$  поновљено рачунање. Нове поправке ширине дале су практично за све тачке скоро непромењену вредност.

Усредњене вредности поправака ширине приказане су у Таблици 6.2 заједно са бројем парова из којих је ова вредност добијена. Општа аритметичка средина поправке ширине је  $+0''.17$ . Она је већа од вредности израчунате за два фиктивна Пјевцовљева пара, један на источној и један на западној половини неба.

Прегледањем редукционих листова упада у очи да је само око једне петине Пјевцовљевих парова опажано на источној половини неба, што се види из азимута на којима су обављана опажања. С обзиром на ову чињеницу, пошто је поправка ширине за источни фиктивни пар  $-0''.21$ , а за западни  $+0''.35$ , општа аритметичка средина треба да износи у нашем случају  $+0''.24$ . Неподударност опште аритметичке средине са овом вредношћу могућа је, као и код Шингерове методе, зато што стварни распоред звезда у пару није идеално симетричан и што реални пар звезда садржи и систематске и индивидуалне поправке положаја. Сем тога, деклинације звезда се мењају у широком распону (од  $-13^\circ$  до  $+82^\circ$ ), а северне звезде су опажане и око доњег пролаза.

Добијене вредности поправака  $\Delta\varphi$  представљају свођење Бошковићевих вредности ширина на FK5 систем. Преласком на овај систем, део грешке ширине који је последица утицаја средње квадратне грешке координата звезда умањује се са  $\pm 0''.14$  на  $\pm 0''.02$ . Како је на свакој тачки средња ширина добијана из најмање пет Пјевцовљевих парова, преласком на FK5 систем део случајне грешке резултата одређивања ширине, који се може приписати утицају случајних грешака положаја звезда, износи око  $\pm 0''.01$  и мање.

### 6.2.3. Свођење азимута.

Што се тиче резултата одређивања азимута, да би се умањио утицај грешака лимбове поделе, после сваког опажања Северњаче хоризонтални круг је окретан за  $30^\circ$ , па је

опажање понављано. Тако је на свакој тачки било укупно дванаест мерења (опажања у 12 гируса). Материјал који нам је био на располагању садржао 372 редукциона листа, јер су на Авали опажања Северњаче била поновљена.

У податке за рачунање поправки азимута улазила је поправка ширине и поправка стања часовника, с тим што се водило рачуна о ходу часовника. Из редукционих листова су бележене привидне координате са којима је Бошковић рачунао азимуте и прављена је разлика FK5 и ових положаја. Следећи податак из редукционог листа је тренутак пролаза Северњаче кроз вертикални конач, заокружен на минут. Узиман је тренутак и за положај инструмента "круг лево" и за положај "круг десно". Овај податак је коришћен, не само за рачунање привидних координата Северњаче, већ и за рачунање зенитне даљине, азимута и паралактичког угла, односно, за рачунање коефицијената у формули (5.25) и добијање поправки  $\Delta A$ .

У Таблици 6.2 приказане су усредњене вредности поправки азимута. Средина из свих тридесет вредности износи  $-0''24$ . Прегледањем редукционих листова може се утврдити да је  $2/3$  опажања Северњаче обављено на западној половини неба (коефицијент уз  $\Delta\delta$  позитиван). Такође је  $2/3$  опажања рађено у тренутку када се северњача налазила између доње кулминације и највеће дигресије, било на источној, било на западној половини неба (коефицијент уз  $\Delta\alpha$  негативан). С обзиром на (5.26) рачунамо

$$\frac{2}{3} (-0.65) + \frac{1}{3} (+0.65) .$$

Процењена вредност  $-0''22$  врло добро се слаже са средњом вредношћу која је добијена из конкретних рачунања поправака азимута. Израчунате вредности  $\Delta A$  представљају свођења на FK5 систем.

Преласком на FK5 систем, део грешке азимута који је последица утицаја средње квадратне грешке координата звезда умањује се са  $\pm 0''18$  на  $\pm 0''04$ . Како је на свакој тачки азимут добијен из опажања Северњаче у 12 гируса, после преласка на FK5 систем део случајне грешке, који се може приписати случајним грешкама координата Северњаче, има вредност око  $\pm 0''01$ .

#### 6.2.4. Укупни резултати свођења на FK5 систем.

Укупни резултати свођења стања часовника, ширине и азимута на FK5 систем дати су у Таблици 6.2. У првом ступцу је редни број, а у другом је наведено место опажања (тачка на којој је одређивано скретање вертикале). Трећи и четврти стубац садрже податке који се односе на стање часовника (број обрађених парова и средња вредност поправке), а пети и шести имају податке који се односе на ширину. У седмом ступцу су поправки азимута.

опажање понављано. Тако је на свакој тачки било укупно дванаест мерења (опажања у 12 гируса). Материјал који нам је био на располагању садржао 372 редукциона листа, јер су на Авали опажања Северњаче била поновљена.

У податке за рачунање поправки азимута улазила је поправка ширине и поправка стања часовника, с тим што се водило рачуна о ходу часовника. Из редукционих листова су бележене привидне координате са којима је Бошковић рачунао азимуте и прављена је разлика FK5 и ових положаја. Следећи податак из редукционог листа је тренутак пролаза Северњаче кроз вертикални конач, заокружен на минут. Узиман је тренутак и за положај инструмента "круг лево" и за положај "круг десно". Овај податак је коришћен, не само за рачунање привидних координата Северњаче, већ и за рачунање зенитне даљине, азимута и паралактичког угла, односно, за рачунање коефицијената у формули (5.25) и добијање поправки  $\Delta A$ .

У Таблици 6.2 приказане су усредњене вредности поправки азимута. Средина из свих тридесет вредности износи  $-0''.24$ . Прегледањем редукционих листова може се утврдити да је  $2/3$  опажања Северњаче обављено на западној половини неба (коефицијент уз  $\Delta\delta$  позитиван). Такође је  $2/3$  опажања рађено у тренутку када се северњача налазила између доње кулминације и највеће дигресије, било на источној, било на западној половини неба (коефицијент уз  $\Delta\alpha$  негативан). С обзиром на (5.26) рачунамо

$$\frac{2}{3} (-0.65) + \frac{1}{3} (+0.65) .$$

Процењена вредност  $-0''.22$  врло добро се слаже са средњом вредношћу која је добијена из конкретних рачунања поправака азимута. Израчунате вредности  $\Delta A$  представљају свођења на FK5 систем.

Преласком на FK5 систем, део грешке азимута који је последица утицаја средње квадратне грешке координата звезда умањује се са  $\pm 0''.18$  на  $\pm 0''.04$ . Како је на свакој тачки азимут добијен из опажања Северњаче у 12 гируса, после преласка на FK5 систем део случајне грешке, који се може приписати случајним грешкама координата Северњаче, има вредност око  $\pm 0''.01$ .

#### 6.2.4. Укупни резултати свођења на FK5 систем.

Укупни резултати свођења стања часовника, ширине и азимута на FK5 систем дати су у Таблици 6.2. У првом ступцу је редни број, а у другом је наведено место опажања (тачка на којој је одређивано скретање вертикале). Трећи и четврти стубац садрже податке који се односе на стање часовника (број обрађених парова и средња вредност поправки), а пети и шести имају податке који се односе на ширину. У седмом ступцу су поправки азимута.

Таблица 6.2.

Поправке стања часовника, астрономске ширине и азимута ( $n_u$  – број обрађених Сингерових парова;  $\Delta u$  – средња вредност поправке стања часовника;  $n_\varphi$  – број обрађених Пјевцовљевих парова;  $\Delta\varphi$  – средња вредност поправке ширине;  $\Delta A$  – средња вредност поправке азимута).

	Место опажања	$n_u$	$\Delta u$	$n_\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta A$	Опажана тачка
1.	Параћин	41	-0°072	34	+0''218	-0''083	Пл. Баба
2.	Ртањ	42	-0°106	13	+0''302	-0''486	Вел. Жежевица
3.	Миџор	11	-0°056	6	+0''162	-0''151	Мутна бара
4.	Трем	9	-0°060	8	+0''029	-0''263	Терзина гарина
5.	Јастребац	10	-0°083	7	+0''112	-0''276	Бела стена
6.	Стрешер	8	-0°065	5	+0''216	+0''118	Бесна кобила
7.	Петрова гора	9	-0°058	7	+0''091	-0''141	Крварски вис
8.	Кобаоник	5	-0°025	7	-0''013	-0''394	Једовник
9.	Јанков камен	7	-0°023	6	+0''170	-0''467	Савина вода
10.	Торник	8	-0°062	12	+0''016	-0''602	Бјелиш
11.	Мали Повлен	6	-0°049	9	+0''017	-0''098	Јасеновац
12.	Дели-Јован	7	-0°058	7	+0''044	-0''077	Црна гора
13.	Велики Суморовац	7	-0°062	8	+0''049	-0''113	Столице
14.	Црни Врх	5	-0°038	10	-0''046	-0''125	Стражара
15.	Букуља	2	-0°059	9	-0''130	-0''118	Космај
16.	Цер	12	-0°069	5	-0''222	-0''179	Мршића гроб
17.	Нишка црква	9	-0°029	17	+0''129	-0''295	Калафат
18.	Зајечарска црква	8	-0°037	15	+0''053	-0''070	Ртањ
19.	Неготинска црква	9	-0°053	9	+0''421	+0''040	Џањевски вис
20.	Пирот	9	-0°088	12	+0''083	-0''497	Јасеновица
21.	Златокоп	9	-0°044	11	+0''449	-0''245	Свети Илија
22.	Хисар	21	-0°039	14	+0''200	-0''074	Трем (Сува пл.)
23.	Трстеничка црква	10	-0°049	16	+0''140	-0''418	Габровачко бр.
24.	Чачанска црква	10	-0°036	13	+0''294	-0''520	Каблар
25.	Старача	18	-0°038	14	+0''259	-0''320	Видојевица
26.	Озеровац	17	-0°058	12	+0''092	-0''080	Колачи
27.	Авала	34	-0°059	24	+0''346	-0''228	Милићево брдо
28.	Кулич	17	-0°037	13	+0''360	-0''423	Лештар
29.	Подгорица	15	-0°074	13	+0''100	-0''297	Охридска црква
30.	Осојна	5	-0°061	5	+0''350	-0''296	Високи чукар

Дакле, у шестом и седмом ступцу се дају свођења Бошковићевих одређивања ширине и азимута на FK5 систем заокружена на три децимале. У даљим приказивањима ове величине ће се појављивати заокружене на две децимале. Последњи, осми стубац садржи називе тачака које су посматране ради одређивања азимута њихових праваца.

Таблица 6.2 садржи свођења која су добијена на основи директно израчунатих разлика привидних положаја у FK5 систему и Бошковићевих привидних положаја за свако опажање посебно. Другим речима, после свођења ширина и азимута на FK5 систем, може се узети као да је Бошковић у својим редуцијама користио положаје звезда из FK5 каталога, нове астрономске константе и нову процедуру за рачунање привидних положаја.

Случајна грешка резултата која потиче од случајне грешке положаја звезда износи око  $\pm 0''.01$  и за ширину и за азимут. Чак овај део грешке у средњој вредности ширине може бити и мањи, што зависи од броја опажаних Пјевцовљевих парова у датој тачки (где је одређивано скретање вертикале).

### 6.3. Анализа Бошковићевих одређивања ширине.

Бошковићева одређивања ширине су за нас нешто интересантнија него његова одређивања азимута, јер представљају директно одређивање једне географске координате астрономским путем. Осим тога, регистрација времена пролаза звезде кроз више конача омогућава да се стекне боља слика о прецизности (унутрашњој тачности) са којом су вршена опажања. Зато је резултатима одређивања ширине посвећена нешто већа пажња.

Ширине су поново рачунате полазећи од података који су уписани у редуционе листове. На овај начин су елиминисане могуће рачунске грешке. Рачунање је обављено на исти начин као и код Бошковића; значи, ширина је рађена за сваки конач посебно по формули (5.2), па су вредности за све конце давале средњу вредност ширине добијену из једног Пјевцовљевог пара.

Посебно је провераван нагиб дурбина. Пошто је поправка за нагиб дурбина доста често износила 2 до 4 лучне секунде, проверавана је дужина либелиног мехура и његово кретање у току опажања.

#### 6.3.1. Грешка јединице тежине и одбацавање погрешних контаката.

Као што је већ поменуто, звезде које су опажане у Пјевцовљевим паровима налазиле су се на различитим удаљењима од меридијана и нису биле симетрично распоређене у односу на први вертикал. Због тога је било потребно да се одступања појединачних вредности ширине сведу на исти ниво, па онда да се анализира тачност по паровима. За



Пјевцовљевој методи одступања се свде на меридијан, односно, у меридијану добијамо грешку јединице тежине (Уралов 1973, стр. 13 – 14). Ову грешку смо израчунали а ригорі према (5.15) и она износи  $\mu_\varphi = \pm 0''83$ . Та вредност је добијена полазећи од податка да Кернов инструмент, којим је Бошковић вршио одређивања, има увеличање дурбина  $W = 60\times$  (Бошковић 1946, стр. 10). Дељењем (5.15) са (5.14) а ригорі израчунавамо тежину  $p$  помоћу које се могу одступања добијена из мерења сводити на меридијан:

$$p = \frac{\mu_\varphi^2}{m_{T\varphi}^2}.$$

Вредности  $p$  за сваки Пјевцовљев пар су већ добијене приликом рачунања свођења Бошковићевих вредности ширина.

Да бисмо имали некакав критеријум за одбацивање погрешних опажања, тј. за елиминацију великих одступања од средње вредности, ослонићемо се на правило  $3\sigma$ , које је користио Бошковић у својим рачунањима. Како из самих опажања можемо да добијемо грешку једног одређивања ширине, сводићемо је на меридијан множењем са  $p$  и упоређивати са грешком а ригорі.

Нека је  $m_\varphi^2$  грешка одређивања ширине на једном концу, а  $m_\Delta^2$  грешка једне разлике ( $\Delta = \varphi - \bar{\varphi}$ ). Грешка разлике може да се напише у облику (Смирнов и Дунин-Барковский 1965, стр. 202 – 207)

$$m_\Delta^2 = \frac{n-1}{n} m_\varphi^2,$$

где је  $n$  број конаца за које је регистровано време пролаза. У наредној табlici су дате вредности (сведене на меридијан)

$$3\mu_\varphi \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

за  $n$  од 3 до 9 и а ригорі усвојену вредност  $\mu_\varphi = \pm 0''83$ . Узети су ови бројеви, јер је ширина одређивана из пролаза звезда кроз најмање три, а највише девет конаца:

$n$	9	8	7	6	5	4	3
$\Delta''$	2.35	2.33	2.31	2.27	2.23	2.16	2.03

Користећи вредности према овој скали утврдили смо да од укупног броја појединачних ширина добијених на сваком концу (нешто преко 2300) треба искључити двадесет једну вредност (девет промила).

У Табlici 6.3 дају се просечне вредности грешака ширине добијене из Бошковићевих опажања.

Таблица 6.3.

Просечне грешке ширине одређене из регистрације времена ( $n$  – број конаца који су узети у обзир;  $n^-$  – број искључених конаца;  $m_{T\varphi}$  – просечна средња квадратна грешка по једном концу;  $\mu_\varphi$  – просечна средња грешка јединице тежине).

Место опажања	$n$	$n^-$	$m_{T\varphi}$	$\mu_\varphi$
1. Параћин	235	4	$\pm 0''.91$	$\pm 0''.81$
2. Ртањ	99		$\pm 0''.72$	$\pm 0''.64$
3. Миџор	38	1	$\pm 0''.53$	$\pm 0''.49$
4. Трем	45		$\pm 0''.82$	$\pm 0''.73$
5. Јастребац	53		$\pm 0''.52$	$\pm 0''.48$
6. Стрешер	32		$\pm 0''.79$	$\pm 0''.75$
7. Петрова гора	52	1	$\pm 0''.76$	$\pm 0''.66$
8. Копаоник	49		$\pm 0''.61$	$\pm 0''.55$
9. Јанков камен	46	1	$\pm 0''.90$	$\pm 0''.77$
10. Торник	79	3	$\pm 0''.75$	$\pm 0''.66$
11. Мали Повлен	62		$\pm 0''.65$	$\pm 0''.58$
12. Дели-Јован	49		$\pm 0''.94$	$\pm 0''.81$
13. Велики Суморовац	62	1	$\pm 0''.75$	$\pm 0''.66$
14. Црни Врх	69		$\pm 0''.68$	$\pm 0''.61$
15. Букуља	68		$\pm 0''.79$	$\pm 0''.67$
16. Цер	34		$\pm 0''.73$	$\pm 0''.68$
17. Нишка црква	111	2	$\pm 0''.83$	$\pm 0''.73$
18. Зајечарска црква	100		$\pm 0''.75$	$\pm 0''.69$
19. Неготинска црква	59		$\pm 0''.73$	$\pm 0''.63$
20. Пирот	80	1	$\pm 0''.99$	$\pm 0''.85$
21. Златокоп	73	1	$\pm 0''.84$	$\pm 0''.76$
22. Хисар	89	2	$\pm 0''.75$	$\pm 0''.66$
23. Трстеничка црква	88	3	$\pm 0''.74$	$\pm 0''.66$
24. Чачанска црква	85		$\pm 0''.70$	$\pm 0''.63$
25. Старача	93	1	$\pm 0''.76$	$\pm 0''.66$
26. Озеровац	78		$\pm 0''.75$	$\pm 0''.66$
27. Авала	161		$\pm 0''.66$	$\pm 0''.59$
28. Кулич	90		$\pm 0''.64$	$\pm 0''.59$
29. Подгорица	91		$\pm 0''.73$	$\pm 0''.65$
30. Осојна	34		$\pm 0''.97$	$\pm 0''.82$

Први и други стубац Таблице 6.3 садрже редни број и место одређивања ширине. У трећем ступцу је број конаца који су узети у обзир (без искључених), а у четвртном броју искључених конаца. Пети стубац даје просечну средњу грешку по једном концу, онако како је добијена за сваки пар. У шестом је ова грешка, множена већ познатом тежином  $p$  за сваки пар, сведена на меридијан, тј. просечна средња грешка јединице тежине.

Из целокупног материјала, не обрачунавајући удаљење од меридијана у разматраним Пјевцовљевим паровима, добија се из Бошковићевих опажања просечна средња грешка  $\pm 0''.76$ . Грешка јединице тежине добијена из целокупног материјала, после искључења грубих грешака, износи  $\pm 0''.67$ , што је осетно мања вредност од грешке јединице тежине  $\pm 0''.83$  коју смо добили а priori. Ово говори да је Бошковић у својим опажањима регистрацију времена методом око-ухо вршио са знатно већом прецизношћу од уобичајене (просечне).

После искључења контаката (свега 21) на којима је утврђено веће одступање и после свођења на меридијан, примењен је Бартлетов поступак за проверу хипотезе о хомогености низа дисперзија (Смирнов и Дунин-Барковский 1965, стр. 266 – 277). За сваку тачку на којој је вршено одређивање ширина груписани су парови по томе на колико је конаца регистрован тренутак пролаза. За сваки пар је рачуната средња квадратна грешка, па је испитивана хомогеност грешака добијених посебно на три конца, посебно на четири, и тако редом до девет (број степени слободе од 2 до 8). Коришћена је одговарајућа таблица и тест је показао да се средње квадратне грешке значајно не разилазе међу собом.

### 6.3.2. Одступања ширине добијене из појединачних парова.

После обраде материјала по контактима контролисано је рачунање нагиба дурбина. У редукционе листове су била уписана читања крајева мехура Талкотове либеле, која се учвршћује за обртну осовину ради мерења нагиба дурбина. Такође смо имали податке о либелиној подели (вредност парса), па је проверено рачунање нагиба. За сваки случај је најпре контролисана дужина мехура, односно, промена дужине у току опажања. У том погледу, с обзиром да нисмо располагали и другим подацима (на пример, мерења температуре), може се закључити да је материјал хомоген. Пошто је либела читана и пре и после опажања звезде, контролисано је померање либелиног мехура у току опажања једне звезде. У већини случајева то померање је ишло испод једног парса. После тога је израчуната поправка за нагиб дурбина.

Ширине израчунате из сваког Пјевцовљевог пара, поправљене за нагиб дурбина и сведене на FK5 систем дале су нове средње вредности за сваку тачку на којој је вршено одређивање. Грешка једне ширине после овог рачунања незнатно се смањила. Просеч-

на вредност грешке једне ширине у Бошковићевим редукцијама износи  $\pm 1''50$ , а после поновне обраде и свођења на FK5 систем  $\pm 1''41$ .

Летимичним прегледањем појединачних резултата, стиче се утисак да тамо где се појављују веће поправака за нагиб дурбина, имамо већа одступања вредности ширине од средње вредности за дату тачку. Због тога је рачунат коефицијент корелације између нагиба дурбина и одступања ширине од средње вредности за сваку станицу посебно. Потом је преко средњег квадратног одступања коефицијента корелације проверавана хипотеза о одсуству корелационе везе (Смирнов и Дунин-Барковский 1965, стр. 333). За тринаест тачака са вероватноћом не мањом од 0.99 може се сматрати да постоји корелациона веза.

У Таблици 6.4 дају се вредности коефицијента корелације  $r$  (шеста колона) и његово средње квадратно одступање  $s_r$  (седма колона). Тамо где није потврђена хипотеза о одсуству корелационе везе стоји звездица испред вредности  $s_r$ .

У истој таблици су дате средње вредности ширина за сваку тачку на којој је вршено одређивање и средња квадратна грешка једне ширине  $m_\varphi$ . Такође је дат и број парова  $n$  из кога је израчунато  $\bar{\varphi}$ . Наведене вредности су добијене после поновне обраде.

На неколико тачака грешка једне ширине прелази две лучне секунде (Стрешер, Јанков камен, Нишка црква, Зајечарска црква и Златокоп). Зато је за ове тачке посебно, а и за све остале извршено тестирање на грубе грешке коришћењем израза

$$3\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

где је за  $\sigma$  узета већ поменута вредност  $\pm 1''41$ , док је  $n$  број парова из којих је одређивана ширина дате тачке.

#### 6.4. Коначни резултати.

У студији "Геодетске референтне мреже СРЈ" (није званично публикована), одељак о проблемима коришћења постојећих резултата астрогодетских одређивања, В. Миловановић указује на то (страна 86) да астрогодетска одређивања С.П. Бошковића у периоду пре I светског рата треба обрадити коришћењем FK5 каталога, уз тестирање мерења на грубе грешке. По извршеној дисперзионој анализи, резултате одређивања треба свести на пол CIO (Conventional International Origin).

С обзиром да би одређивања пре првог светског рата могла бити од интереса за савремене задатке само са резултатима одређивања латитуда (Миловановић 1984, стр. 46 – 47) и да је ова координата директно добијена (лонгитуда није ни одређивана), у нашем раду је, при анализи унутрашње и спољашње тачности резултата, интересовање усмерено на одређивање латитуда.

Таблица 6.4.

Резултати ширинских одређивања после анализе и контроле рачунања ( $n$  – број Пјевцовљевих парова;  $\bar{\varphi}$  – средња вредност ширине;  $m_{\varphi}$  – средња грешка једне ширине;  $r$  – коефицијент корелације између одступања појединачних вредности ширине и одговарајућих нагиба дурбина;  $s_r$  – средње одступање коефицијента корелације).

	Место опажања	$n$	$\bar{\varphi}$	$m_{\varphi}$	$r$	$s_r$
1.	Параћин	34	32''26	±0''99	+466	* ±.134
2.	Ртањ	13	40''69	±0''97	+400	±.233
3.	Миџор	6	51''07	±1''15	+448	±.326
4.	Трем	8	10''33	±0''96	+828	* ±.111
5.	Јастребац	7	58''25	±1''83	+917	* ±.060
6.	Стрешер	5	39''66	±2''93	+984	* ±.014
7.	Петрова гора	7	55''55	±1''67	-466	±.296
8.	Копаоник	7	06''37	±1''38	+361	±.329
9.	Јанков камен	6	23''83	±2''60	+609	±.257
10.	Торник	12	10''45	±1''35	-362	±.251
11.	Мали Повлен	9	53''02	±1''50	+269	±.309
12.	Дели-Јован	7	40''43	±1''27	+914	* ±.062
13.	Велики Суморовац	8	60''18	±1''39	+636	* ±.210
14.	Црни Врх	10	41''71	±1''58	+725	* ±.150
15.	Букуља	9	60''05	±1''95	+600	* ±.213
16.	Цер	5	15''83	±1''12	+431	±.364
17.	Нишка црква	17	56''08	±2''52	+820	* ±.079
18.	Зајечарска црква	15	08''38	±2''21	+569	* ±.175
19.	Неготинска црква	9	39''74	±0''42	-460	±.263
20.	Пирот	12	36''70	±1''73	+525	±.209
21.	Златокоп	11	63''72	±2''02	-.075	±.300
22.	Хисар	14	12''75	±0''45	+640	* ±.158
23.	Трстеничка црква	16	17''17	±1''00	+034	±.250
24.	Чачанска црква	13	39''07	±1''05	+308	±.251
25.	Старача	14	31''03	±0''90	+265	±.248
26.	Озеровац	12	09''21	±0''42	+302	±.262
27.	Авала	24	23''07	±0''59	+479	* ±.157
28.	Кулич	13	52''26	±0''50	+200	±.266
29.	Подгорица	13	59''58	±1''19	+048	±.277
30.	Осојна	5	18''96	±0''94	+897	* ±.087

После анализирања тачности опажања сваког Пјевцовљевог пара преко грешке јединице тежине, и искључења контаката који су давали грубу грешку, тестирани су резултати за сваку тачку посебно. За тачке под редним бројем 6. (Стрешер), под бројем 17. (Нишка црква) и бројем 18. (Зајечарска црква) искључен је по један пар из коначне вредности ширине. Разлике између поново израчунатих средњих вредности ширине и вредности које је добио Бошковић дате су у трећем ступцу Таблице 6.5 под ознаком  $\Delta\varphi_c$ . У четвртном ступцу, под ознаком  $\Delta\varphi_{fk5}$ , дају се свођења на FK5 систем. Вредности азимута које је добио Бошковић нису посебно анализирани, па је у Таблици 6.5 наведено само свођење азимута на FK5 систем (седми стубац) са ознаком  $\Delta A_{fk5}$ .

Имајући у виду да се због кретања осе ротације у телу Земље, при чему оса задржава непромењену оријентацију у простору, мењају координате тачака на Земљи, потребно је тренутне ширине и азимуте свести на средњи пол. То свођење је вршено по обрасцима (Подобед и Нестеров 1982, стр. 361 – 365)

$$\varphi_0 = \varphi - (x \cos \lambda + y \sin \lambda)$$

$$A_0 = A + (x \sin \lambda - y \cos \lambda) \sec \varphi_{\frac{1}{2}}$$

Координате  $x$  и  $y$  за свођење на пол CIO узете су из публикације која садржи хомогенизоване резултате Међународне службе ширине (Yumi и Yokoyama 1980, стр 167 – 172) за период 1899.9 - 1979.0. Треба напоменути да референтна основа Hipparcos омогућава израчунавање параметара Земљине оријентације у новом референтном систему ICRS (International Celestial Reference System), што је и учињено за период 1899.7 – 1992.0 (Vondrák и др. 1998). У параметре Земљине оријентације EOP (Earth Orientation Parameters) спадају и координате тренутног пола  $x$  и  $y$ . Овде ћемо се, ипак, држати свођења на пол CIO, јер анализе и изведени резултати у поменутом раду имају само прелиминарно значење. У случају потребе, свођења се могу лако извршити заменом старих вредности новим вредностима параметара поларног кретања.

Израчунате вредности свођења ширине и азимута на пол CIO, под ознаком  $\Delta\varphi_{cio}$  и  $\Delta A_{cio}$  респективно, дају се у петом и осмом ступцу Таблице 6.5. У истој табlici се дају поправљене вредности  $[\xi]$  (компонента правцем север – југ) и  $[\eta]$  (компонента правцем исток – запад) скретања вертикале.

Са поправљеним вредностима  $[\xi]$  и  $[\eta]$  је израчуната тотална вредност скретања вертикале  $u$  према формули (6.6), као и угао скретања  $E$  према (6.7). Разлика астрономске и геодетске лонгитуде рачуната је према Лапласовој једначини (6.4). Коначни резултати  $[u]$ ,  $[E]$  и  $[\lambda' - \lambda]$  дају се у Таблици 6.6, у трећем, петом и седмом ступцу. Упоредо са поправљеним вредностима, у четвртном, шестом и осмом ступцу дају се Бошковићеве вредности  $u$ ,  $E$  и  $\lambda' - \lambda$ .

Таблица 6.5.

Поправке резултата Бошковићевих астрогеодетских одређивања ( $\Delta\varphi_c$  – поправка рачунања ширине;  $\Delta\varphi_{fk5}$  и  $\Delta A_{fk5}$  – свођење на FK5 систем;  $\Delta\varphi_{cio}$  и  $\Delta A_{cio}$  – свођење на пол СИО;  $[\xi]$  – поправљена компонента скретања вертикале правцем север – југ;  $[\eta]$  – поправљена компонента скретања вертикале правцем исток – запад).

Место опажања	$\Delta\varphi_c$	$\Delta\varphi_{fk5}$	$\Delta\varphi_{cio}$	$[\xi]$	$\Delta A_{fk5}$	$\Delta A_{cio}$	$[\eta]$
1. Параћин	-0".32	+0".22	+0".05	-00".15	-0".08	+0".07	-14".07
2. Ртањ	+0".16	+0".30	+0".06	+07".02	-0".49	+0".05	-06".83
3. Мицор	+0".05	+0".16	-0".12	+08".49	-0".15	+0".17	-01".78
4. Трем	-0".09	+0".03	-0".08	+10".26	-0".26	+0".18	-08".40
5. Јастребац	-0".48	+0".11	-0".06	+00".67	-0".28	+0".18	-08".78
6. Стрешер	+1".32	+0".15	-0".16	+05".81	+0".12	-0".20	-11".60
7. Петрова гора	-0".13	+0".09	-0".19	-00".93	-0".14	-0".13	-06".94
8. Копаоник	-0".21	-0".01	-0".19	-02".81	-0".39	-0".09	-02".85
9. Јанков камен	+0".23	+0".17	-0".19	+02".41	-0".47	-0".07	+02".50
10. Торник	+0".07	+0".02	-0".18	-03".19	-0".60	-0".01	-01".16
11. Мали Повлен	-0".29	+0".02	-0".09	+02".94	-0".10	-0".30	-07".32
12. Дели-Јован	+0".45	+0".04	-0".14	+05".75	-0".08	-0".26	+02".53
13. Велики Суморовац	-0".10	+0".05	-0".15	+00".70	-0".11	-0".24	-04".15
14. Црни Врх	+0".29	-0".05	-0".17	+02".37	-0".13	-0".18	-06".05
15. Букуља	+0".78	-0".13	-0".18	+05".37	-0".12	-0".17	-06".04
16. Цер	+1".17	-0".22	-0".19	+04".06	-0".18	-0".12	-07".10
17. Нишка црква	+0".42	+0".16	+0".01	+02".29	-0".30	-0".24	-11".39
18. Зајечарска црква	+0".37	+0".01	-0".02	+00".76	-0".07	-0".24	+14".95
19. Неготинска црква	+0".08	+0".42	-0".05	+03".75	+0".04	-0".23	+14".60
20. Пирот	+0".09	+0".08	+0".07	-02".06	-0".50	-0".11	-00".01
21. Златокоп	+0".17	+0".45	+0".06	+00".78	-0".25	-0".12	-17".20
22. Хисар	-0".27	+0".20	-0".02	+03".61	-0".07	+0".13	-04".76
23. Трстеничка црква	-0".30	+0".14	+0".06	+02".40	-0".42	+0".11	+45".11
24. Чачанска црква	+0".02	+0".29	+0".09	+02".40	-0".52	+0".10	-02".83
25. Старача	+0".16	+0".26	-0".11	+04".61	-0".32	+0".24	-06".29
26. Озоровац	+0".90	+0".09	-0".09	+05".60	-0".08	+0".25	-09".38
27. Авала	+0".15	+0".35	-0".28	+01".72	-0".23	+0".10	-00".84
28. Кулич	-0".20	+0".36	-0".24	+00".62	-0".42	+0".20	-09".51
29. Подгорица	+0".00	+0".10	-0".18	+01".92	-0".30	+0".10	-03".54
30. Осојна	-0".20	+0".35	-0".15	+02".10	-0".30	-0".38	+05".50

Таблица 6.6.

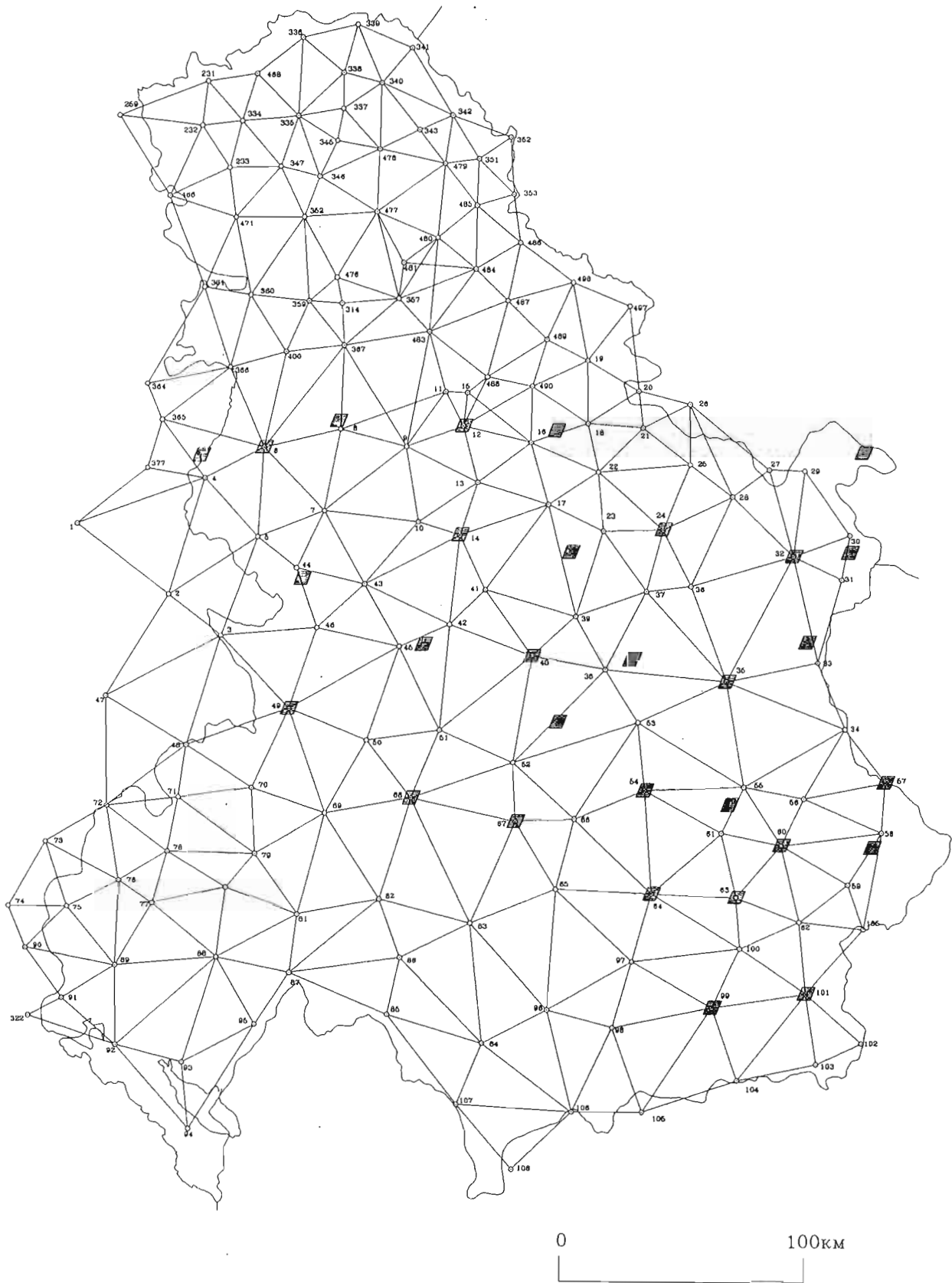
Скретања вертикала сведена на систем  $FK5$  ( $[u]$  – поправљена тотална вредност скретања вертикале;  $[E]$  – поправљен угао скретања;  $[\lambda' - \lambda]$  – поправљена разлика астрономске и геодетске лонгитуде;  $u$ ,  $E$  и  $\lambda' - \lambda$  – Бошковићеве нумеричке вредности).

	Место опажања	$[u]$	$u$	$[E]$	$E$	$[\lambda' - \lambda]$	$\lambda' - \lambda$
1.	Параћин	14''07	14''1	- 90°61	- 90°4	-19''50	-19''5
2.	Ртањ	9''79	9''1	- 44°21	- 44°6	- 9''45	- 8''8
3.	Миџор	8''67	8''6	- 11°84	- 12°1	- 2''45	- 2''5
4.	Трем	13''26	13''3	- 39°31	- 38°6	-11''51	-11''4
5.	Јастребац	8''81	8''8	- 85°64	- 82°8	-12''08	-11''8
6.	Стрешер	12''97	12''3	- 63°40	- 68°6	-15''77	-15''7
7.	Петрова гора	7''00	6''6	- 97°63	- 96°1	- 9''49	- 9''1
8.	Копаоник	4''00	3''3	-134°60	-136°2	- 3''91	- 3''2
9.	Јанков камен	3''47	3''8	+ 46°05	+ 54°6	+ 3''44	+ 4''2
10.	Торник	3''39	3''1	-160°02	-170°8	- 1''61	- 0''7
11.	Мали Повлен	7''89	7''6	- 68°12	- 64°4	-10''20	- 9''6
12.	Дели-Јован	6''28	6''1	+ 23°75	+ 28°2	+ 3''53	+ 4''0
13.	Велики Суморовац	4''21	3''9	- 80°43	- 76°7	- 5''80	- 5''3
14.	Црни Врх	6''50	6''1	- 68°61	- 68°0	- 8''38	- 7''9
15.	Букуља	8''08	7''5	- 48°36	- 49°3	- 8''43	- 8''0
16.	Цер	9''33	7''6	- 60°24	- 64°1	- 9''97	- 9''5
17.	Нишка црква	11''62	10''9	- 78°63	- 81°1	-15''66	-14''9
18.	Зајечарска црква	14''97	15''3	+ 87°09	+ 88°5	+20''75	+21''2
19.	Неготинска црква	15''07	15''2	+ 75°60	+ 77°4	+20''37	+20''6
20.	Пирот	2''06	2''4	-179°72	+165°4	- 0''01	+ 0''9
21.	Златокоп	17''22	16''8	- 87°40	- 89°7	-23''34	-22''8
22.	Хисар	5''97	6''1	- 48°99	- 52°4	- 6''53	- 6''6
23.	Трстеничка црква	45''17	45''5	+ 86°95	+ 86°8	+62''31	+62''8
24.	Чачанска црква	3''71	3''1	- 49°70	- 50°2	- 3''92	- 3''3
25.	Старача	7''80	7''5	- 53°76	- 55°3	- 8''81	- 8''7
26.	Озеровац	10''92	10''7	- 59°16	- 63°9	-13''09	-13''3
27.	Авала	1''91	1''7	- 26°03	- 23°6	- 1''18	- 1''0
28.	Кулич	9''53	9''3	- 86°27	- 85°7	-13''39	-13''1
29.	Подгорица	4''03	3''9	- 61°53	- 58°8	- 4''98	- 4''7
30.	Осојна	5''89	6''5	+ 69°10	+ 71°3	+ 7''72	+ 8''7

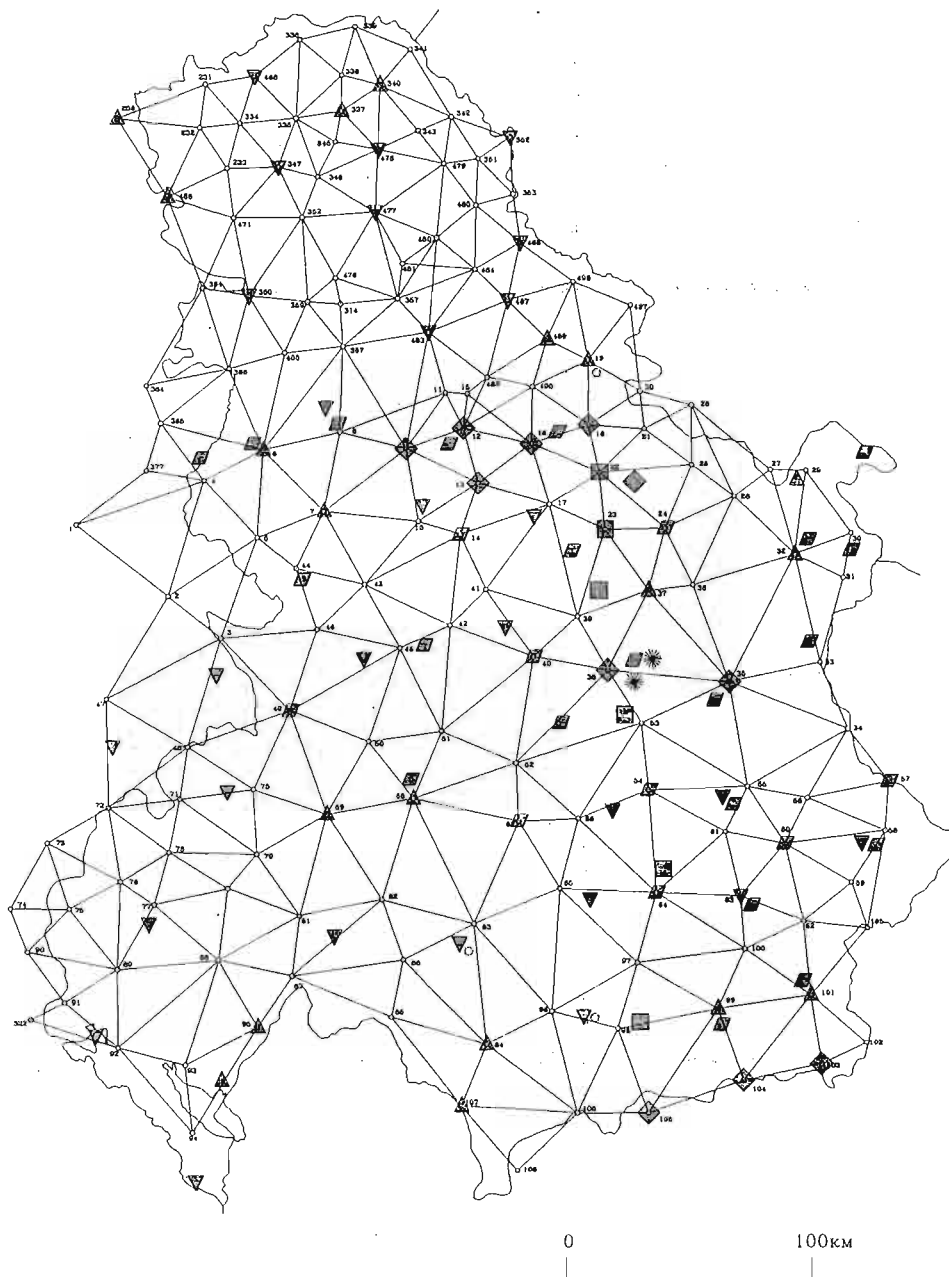


Ово поглавље завршавамо двама сликама (урадио С. Делчев) које приказују Бошковићева астрогеодетска одређивања у односу на геодетску референтну мрежу СРЈ. Слика 6.2. предочава места на којима је Бошковић одређивао скретање вертикале пре 1914. године. Слика 6.3. садржи све тачке на територији СР Југославије где су вршена астрогеодетска одређивања почев од 1900. године па надаље.

*Резултати Бошковићевих астрогеодетских одређивања су обрађени уз свођење координата опажаних звезда на систем FK5. Поново је рачуната ширина и посебно су анализирани резултати ширинских опажача. После свођења на пол СИО, за сваку тачку је израчуната поправљена тотална вредност скретања вертикале и нађен је поправљени угао њеног скретања. На основи упоредних вредности, које су наведене у Таблици 6.6, може се закључити да уведене поправке нису битно измениле Бошковићеве резултате. Значајно је то што су ови резултати сведени на савремени референтни систем FK5. Такође је, увођењем поправака за координате тренутног пола, извршена хомогенизација Бошковићевих резултата одређивања ширине и азимута.*



Слика 6.2. Преглед Бошковићевих астрогеодетских одређивања.



- ▣ Одређивања С. Бошковића пре 1914.г.
- Одређивања ВГИ-а између два рата
- ▲ Одређивања ВГИ-а после другог светског рата – Лапласове тачке
- ▼ Одређивања ВГИ-а после другог светског рата – Геоидне тачке
- ◆ Одређивања СГУ после другог светског рата – Лапласове тачке
- Одређивања СГУ после другог светског рата – Геоидне тачке
- \* Одређивања Института за геодезију

Слика 6.3. Преглед астрогеодетских одређивања на територији СРЈ.  
(ВГИ – Војногеографски институт; СГУ – Савезна геодетска управа)

## Закључак.

Полазећи од чињенице да је положај тачке у простору њена квантитативна карактеристика и да се може одредити само у односу на нешто, рачунате су систематске разлике фундаменталног каталога FK5 и осталих каталога из немачке серије FK. Узимајући у обзир систематске грешке положаја звезда за дату епоху и одговарајуће систематске грешке сопствених кретања (подаци који се дају у каталозима), могу се за неки изабрани тренутак израчунати одступања било ког каталога од основног, на пример, FK5. Ова одступања се добијају преко заједничких звезда, а разлика FK5 – FK представљају свођење на основни каталог.

Таблице 1.7. и 1.8, које смо израчунали на основи података записаних у каталозима FK3, FK4 и FK5, у нашем случају приказују свођење NFK на систем каталога FK5 за епоху 1906.0. Систематске разлике ректасцензија у Таблици 1.7. су највећим делом последица грешке положаја Њукомбове тачке пролећне равнодневице (поправка је око  $-0^{\circ}050$ ) која је ушла у каталог NFK. Систематске разлике деклинација у Таблици 1.8. углавном потичу од разлика FK3 – NFK за дату епоху, имају позитиван знак и не прелазе вредност  $+0''20$ . Таблица 1.6. показује да су просечне случајне грешке положаја Ауверсових звезда (звезде из NFK; FK5 нумерација од 1 до 925) мање пет до шест пута у FK5 него у каталогу NFK. Наведене таблице су нам послужиле да проценимо утицај грешака координата звезда на резултате астрогеодетских одређивања.

Што се тиче каталога 4949 геодетских звезда, видимо да он садржи звезде до шесте привидне величине, да има три звезде на 25 квадратних степени, да репродукује систем FK5 и да су му случајне грешке координата релативно мале ( $\pm 0^{\circ}006$  у ректасцензији и  $\pm 0''13$  у деклинацији за епоху 2000.0). На основи реченог, закључујемо да овај каталог представља задовољавајућу основу за астрогеодетска одређивања на терену.

IAU (1976) систем астрономских константи, IAU (1980) теорија нутације и каталог положаја и сопствених кретања фундаменталних звезда FK5, заједно са JPL нумеричком теоријом кретања тела Сунчевог система, као и одговарајућим формулама и процедурама, чине једну целину, референтни систем FK5. Насупрот ранијем начину, по новој процедури се са стандардног средњег положаја FK5 прелази на геоцентрички привидни положај векторским рачуном. Свођењем положаја звезда на систем FK5 повишава се тачност резултата астрогеодетских одређивања у делу који зависи од координата опажаних звезда.

Посебна пажња у овом раду посвећена је утицају грешака положаја звезда на одређивање стања часовника Шингеровом методом, одређивање ширине Пјевцовљевом методом и одређивање азимута из посматрања Северњаче. Анализа утицаја грешака координата звезда на резултате поменутих одређивања вршена је коришћењем одговарајућих диференцијалних образаца у којима те грешке фигуришу.

После израчунавања утицаја систематских грешака а priori може се закључити да у резултате одређивања стања часовника у целости улази поправка равнодневице NFK каталога. При одређивањима ширине ова поправка равнодневице доводи до знатне промене резултата (три десета дела лучне секунде по апсолутној вредности). Опажањем једнаког броја Пјевцовљевих парова на источној и на западној половини неба њен утицај се анулира, па остаје само утицај систематских разлика деклинација, првенствено јужних звезда<sup>2</sup>. Утицај на резултате одређивања азимута зависи и од тога на којој се половини неба налази Северњача и од тога да ли се опажа пре или после највеће дигресије. Што се тиче случајних грешака, видимо да се део који зависи од средње квадратне грешке координата свођењем на FK5 систем вишеструко умањује.

У редукционе листове где су рачунати резултати Бошковићевих одређивања времена, ширине и азимута биле су уписане привидне ректасцензије и деклинације звезда које су улазиле у рачун, тако да је могла да се врши директна компарација тих координата са координатама добијеним у систему FK5.

Применом диференцијалних образаца добијене су поправке стања часовника, поправке ширине и поправке азимута правца за тридесет тачака на којима су вршена ова одређивања. После тога су поправљене величине и углови скретања вертикала у Србији, а коначни резултати су приказани у Таблици 6.6.

Општи закључак који се из свега овога изводи је следећи:

- у фундаменталним каталозима из серије FK има довољно података за рачунање грешака звезданих положаја који се свде на изабрану епоху;
- диференцијални обрасци омогућавају да се, поред најповољнијих услова опажања, одреде утицаји грешака координата звезда на резултате одређивања геодетске астрономије;
- слагање грешака а priori и грешака а posteriori говоре да се могу добити коректне процене утицаја грешака координата звезда на поменута одређивања и, такође, да су Бошковићева рачунања изузетно брижљиво и тачно изведена;
- прецизност регистрације времена у Бошковићевим астрогеодетским одређивањима је, за ондашњи технички ниво, врло висока;
- поправке нису довеле до битних измена, али је значајно то што су, уношењем поправљених положаја коришћених звезда, резултати Бошковићевих одређивања скретања вертикала у Србији сведени на референтни систем FK5.

## Р е ф е р е н ц е.

1. \* \* \*: 1995, *Information Bulletin IAU*, 74
2. \* \* \*: 1998, *Information Bulletin IAU*, 81
3. Абалакин, В.К.: 1979, *Основы эфемеридной астрономии*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
4. Абалакин, В.К. (ред): 1994, *Астрономический ежегодник на 1995 год, Часть I, Эфемериды Солнца, Луны и планет*, ИТА, Санкт-Петербург
5. Абалакин, В.К. (ред): 1994, *Астрономический ежегодник на 1995 год, Часть II, Средние и видимые места звезд*, ИТА, Санкт-Петербург
6. Анђелић, Т., Стојановић, Р.: 1966, *Рационална механика*, Завод за изд. уџб. СРС, Београд
7. Aoki, S., Soma, M., Kinoshita, H., Inoue, K.: 1983, *Astron. Astrophys.*, 128, 263 – 267.
8. Auwers, A.: 1879, *Fundamental-Catalog für die Zonen-Beobachtungen am nördlichen Himmel*, Publ. der AG, Bd. XIV
9. Auwers, A.: 1889, *Vorläufiger Fundamental-Catalog für die südlichen Zonen der A. G.*, *Astron. Nach.*, Bd. 121, Nr. 2890–91
10. Auwers, A.: 1897, *Fundamental-Catalog für Zonenbeobachtungen am Südhimmel und südlicher Polar-Catalog für die Epoche 1900.*, *Astron. Nach.*, Bd. 143, Nr. 3431–32
11. Бакулин, П.И. (отв. ред): 1973, *Астрономический календарь, Постоянная часть*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
12. Бакулин, П.И., Кононович, Э.В., Мороз, В.И.: 1977, *Курс общей астрономии*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва

13. Бакулин, П.И.: 1980, *Фундаментальные каталоги звезд*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
14. Блажко, С.Н.: 1979, *Курс практической астрономии*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
15. Большаков, В.Д.: 1970, *Теорија грешака посматрања са основама теорије вероватноће*, "Научна књига", Београд
16. Бошковић, С.П.: 1946, *Прва и друга одредба географске дужине Београда*, Српска академија наука, Београд
17. Бошковић, С.П.: 1952, *Скретање вертикала у Србији*, САН, Посебна издања, СХСХVI, Географски инст., књ. 4
18. Bien, R., Fricke, W., Lederle, T., Schwan, H.: 1977, *Veröff. Astron. Rechen-Institut Heilderberg*, 27
19. Boss, L.: 1910, *Preliminary General Catalogue*, Carnegie Institution of Washington, Publ., No. 115
20. Boss, V.: 1937, *General Catalogue*, Carnegie Institution of Washington, Publ., v. I, No. 468
21. Vince, I., Dačić, M., Cvetković, Z.: 1996, *18th SPIG, September 2 – 6, 1996, Kotor, Contributed Papers*, Vujičić, B. and Djurović, S. (eds), Faculty of Sciences, Institute of Physics, Novi Sad, 524 – 527
22. Vince, I., Dačić, M., Cvetković, Z., Popović, N., Jovanović, P.: 1998, *19th SPIG, August 31 – September 4, 1998, Zlatibor, Contributed Papers*, Konjević, N., Ćuk, M. and Videnović, I.R. (eds), Faculty of Physics, University of Belgrade, 666 – 670
23. Vondrák, J., Pešek, I., Ron, C., Čeppek, A.: 1998, *Publ. Astron. Inst. Czech*, 87
24. Губанов, В.С.: 1968, *Труды ЦНИИГАиК*, 179, 14 - 93.
25. Гуляев, А.П., Хоммик, Л.М.: 1983, *Дифференциальные каталоги звезд*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
26. Гуревич, В.Б.: 1979, *Введение в сферическую астрономию*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва

27. Green, R.M.: 1985, *Spherical astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge
28. Dačić, M., Sadžakov, S., Cvetković, Z.: 1995, *Bull. Astron. Belgrade*, **151**, 81 – 84
29. Duncombe, R.L., Fricke, W., Seidelmann, P.K., Wilkins, G.A.: 1977, *Trans. IAU*, **XVIIb**, 56 – 67.
30. Eichhorn, H.: 1974, *Astronomy of Star Positions*, Frederick Ungar Publishing Co., New York
31. Загребин, Д.В.: 1966, *Введение в астрометрию*, "Наука", Москва - Ленинград
32. Зверев М.С.: 1950, *Успехи астрономических наук; Том V*, Изд. Акад. наук СССР, Москва – Ленинград
33. Куликов, К.А.: 1956, *Фундаментальные постоянные астрономии*, Гос. изд. технико-теорет. лит., Москва
34. Куликов, К.А.: 1969, *Новая система астрономических постоянных*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
35. Курант, Р.: 1952, *Курс дифференциалного и интегрального исчисления, (Книга друга)*, "Научная книга", Београд
36. Khruckaya, E.V.: 1991, *Astroph. Sp. Sci.*, **177**, 47 – 50
37. Kopff, A.: 1937, *Dritter Fundamentalkatalog des Berliner Astronom. Jahrbuchs. I Teil. Die Auwers-Sterne für die Epochen 1925 und 1950*, Veröff. Astron. Rechen-Institut Berlin-Dahlem, **54**
38. Kopff, A.: 1938, *Dritter Fundamentalkatalog des Berliner Astronom. Jahrbuchs. II Teil. Die Zusatzsterne für die Epoche 1950*, Abhandl. Preuss. Akademie Phys.-math. Klasse, **3**
39. Kovalevsky, J.: 1988, *Celestial Reference Frames for Geodesy*, Festschrift RUDOLF SIGL zum 60. Geburtstag, München, 136 – 141.
40. Kovalevsky, J., Mueller, I.I.: 1989, *Reference Frames*, J. Kovalevsky et al. (eds), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1 – 12.
41. Kovalevsky, J.: 1990, *Astrométrie moderne*, Lecture Notes in Physics, W. Beiglböck (m. ed), Springer – Verlag Berlin Heidelberg, **358**



42. Lang, K.R.: 1992, *Astrophysical Data: Planets and Stars*, Springer – Verlag New York, Inc.
43. Lieske, J.H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B.: 1977, *Astron. Astrophys.*, **58**, 1 – 16.
44. Lieske, J.H.: 1979, *Astron. Astrophys.*, **73**, 282 – 284.
45. Миланковић, М.: 1997, "Небеска механика", *Избрана дела, Књига 3*, М.С. Димитријевић (ред), Завод за уџб. и наст. средст., Београд
46. Миловановић, В.: 1984, *Зборник Института за геодезију*, Београд, **23**
47. Мишковић, В.В.: 1960, *Општа астрономија, Први део (Сферна тригонометрија)*, Завод за изд. уџб. НРС, Београд
- No.
48. Moritz, H.: 1980, *Bulletin Gèodèsique*, **54**, No. 3, 395 – 405
49. Mueller, I.I.: 1969, *Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy*, Frederick Ungar Publishing Co., New York
50. Newcomb, S.: 1960, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Dover Publications, Inc., New York, (an unabridged and unaltered republication of the first edition published by the Macmillan Company in 1906)
51. Подобед, В.В. (ред): 1967, *Фундаментальные постоянные астрономии, (XXI<sup>e</sup> Symposium de l'U.A.I. sur le system de constantes astronomique)*, (превод на руски), "Мир", Москва
52. Подобед, В.В.: 1968, *Фундаментальная астрометрия*, "Наука", Гл. ред. физ.- мат. лит., Москва
53. Подобед, В.В., Нестеров, В.В.: 1982, *Общая астрометрия*, "Наука", Гл. ред. физ.- мат. лит., Москва
54. Peters, J.: 1907, *Neuer Fundamentalkatalog des Berliner Astronom. Jahrbuchs*, Veröff. Astron. Rechen-Institut, **33**
55. Poder, K.: 1991, *A note on the EUREF system*, IUGG General Assembly, Wien, Aug. 11 – 24, 1991

56. Röser, S., Bastian, U.: 1991a, *PPM STAR CATALOGUE (Positions and Proper Motions of 181731 stars north of  $-2.5$  degrees declination for equinox and epoch J2000)*, Vol. I: zones  $+80^\circ$  to  $+30^\circ$ , Astron. Rechen-Institut, Heidelberg
57. Смирнов, Н.В., Дунин-Барковский, И.В.: 1965, *Курс теории вероятностей и математической статистики*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва
58. Sadžakov, S., Šaletić, D.: 1972, *Publ. Obs. Astron. Belgrade*, 17
59. Sadžakov, S., Šaletić, D., Dačić, M.: 1981, *Publ. Obs. Astron. Belgrade*, 30
60. Sadžakov, S., Dačić, M., Šaletić, D., Ševarlić, B.: 1982, *Sun and Planetary System*, Reidel Publ., 445 – 446
61. Sadžakov, S., Dačić, M.: 1990, *Publ. Obs. Astron. Belgrade*, 38
62. Sadžakov, S., Dačić, M., Cvetković, Z.: 1991, *Astron. Journal*, 101(2), 713-733
63. Sadžakov, S., Dačić, M., Cvetković, Z.: 1992, *Bull. Astron. Belgrade*, 146, 1-13
64. Sadžakov, S., Dačić, M., Cvetković, Z.: 1992a, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 92, 605 – 607
65. Sadžakov, S., Dačić, M., Cvetković, Z.: 1996, *Bull. Astron. Belgrade*, 153, 1-18
66. Sadžakov, S., Cvetković, Z., Dačić, M.: 1996a, *Proc. 2nd Hellenic Astron. Conf.*, Contadakis, M.E., Hadjidemetriou, J.D., Mavridis, L.N. and Seiradakis, J.H. (eds), 151 – 154
67. Sadžakov, S., Dačić, M., Cvetković, Z.: 1997, *Bull. Astron. Belgrade*, 155, 3-25
68. Schwan, H.: 1983, *Veröff. Astron. Rechen-Institut Heilderberg*, 30
69. Schwan, H., Bastian, U., Bien, R., Jährling, R., Jahreiss, H., Röser, S.: 1993, *Veröff. Astron. Rechen-Institut Heilderberg*, 34
70. Seidelmann, P.K.: 1982, *Celestial Mechanics*, 27, 79 – 106.
71. Turon, C.: 1996, *Reviews in Modern Astronomy, "Positions, Motions and Cosmic Evolution"*, R.E. Schielicke (ed), Astronomische Gesellschaft, Hamburg, 9, 69 – 86.
72. Уралов, С.С.: 1973, *Общая теория методов геодезической астрономии*, "Недра", Москва
73. Уралов, С.С.: 1980, *Курс геодезической астрономии*, "Недра", Москва
74. Fricke, W., Kopff, A.: 1963, *Veröff. Astron. Rechen-Institut Heilderberg*, 10

75. Fricke, W.: 1980, *Celestial Mechanics*, **22**, 113 – 125.
76. Fricke, W.: 1982, *Astron. Astrophys.*, **107**, L13 – L16.
77. Fricke, W., Schwan, H., Lederle, T.: 1988, *Veröff. Astron. Rechen-Institut Heilderberg*, **32**
78. Fricke, W., Schwan, H., Corbin, T.: 1991, *Veröff. Astron. Rechen-Institut Heilderberg*, **33**
79. Foster, K.W., Boksenberg, A. (eds): 1996, *The Astronomical Almanac for the year 1997*, Washington, London
80. Халхунов, В.З.: 1972, *Сферическая астрометрия*, "Недра", Москва
81. Хруцкая, Е.В.: 1980, *Астрон. журн.*, **57**, 1, 195 – 199.
82. Хруцкая, Е.В.: 1985, *Астрон. журн.*, **62**, 3, 605 – 607.
83. Хруцкая, Е.В.: 1985а, *Геод. Картограф.*, **8**, 30 – 34.
84. Пиммерман, Н.В.: 1948, *Труды ГАО в Пулковсе*, **LXI**
85. Цингер, Н.Ј.: 1928, *Курс астрономије (практички део)*, Војно географски институт, Београд
86. Cvetković, Z.: 1992, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **96**, 191 – 206
87. Шеварлић, Б.М., Бркић, З.М.: 1971, *Опита астрономија*, "Савремена администрација", Београд
88. Šaletić, D.: 1968, *Publ. Obs. Astron. Belgrade*, **14**, 88 – 94.
89. Wilkins, G.A.: 1990, *Inertial Coordinate System on the Sky*, J.H. Lieske and V.K. Abalakin (eds), IAU, Printed in the Netherlands, 39 – 46.
90. Yumi, S., Yokoyama, K.: 1980, *Results of the International Latitude Service in a Homogeneous System, 1899.9 - 1979.0*, Central Bureau of the IPMS, International Latitude Observatory of Mizusawa, Mizusawa