

МИНИСТАРСТВО ВОЈСКЕ И МОРНАРИ
ВОЈНИ ГЕОГРАФСКИ ИНСТИТУТ

2.



КУРС ВИШЕ ГЕОДЕЗИЈЕ И МАТЕМАТИЧКЕ КАРТОГРАФИЈЕ

ОД ГЕОДЕТСКОГ БЕНЕРАЛА,

Др. Н. Ј. ЦИНГЕРА,

РЕДОВНОГ ПРОФЕСОРА ГЕОДЕТСКОГ ОДЕЉЕЊА НИКОЛАЈЕВСКЕ ВИШЕ ШКОЛЕ ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ
И ХИДРОГРАФСКОГ ОДЕЉЕЊА НИКОЛАЈЕВСКЕ ВИШЕ ШКОЛЕ ПОМОРСКЕ АКАДЕМИЈЕ У ПЕТРОГРАДУ.

ПРЕВОД С РУСКОГ

ОД

ГЕОДЕТСКОГ БЕНЕРАЛА,

СТЕВАНА П. БОШКОВИЋА

НАЧЕЛНИКА ВОЈНОГ ГЕОГРАФСКОГ ИНСТИТУТА И ПРОФЕСОРА ГЕОДЕЗИЈЕ
НА ВИШОЈ ШКОЛИ ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ



БЕОГРАД

ШТАМПАНО У ВОЈНОМ ГЕОГРАФСКОМ ИНСТИТУТУ
1930.

ПРЕДГОВОР

Овај је „Курс Више Геодезије“ по своје обиму удешен према програму шогa предметa, који је прописан за Геодешко Одељење Николајевске Више Школе Војне Академије и за Хидрографско Одељење Николајевске Поморске Академије где садржи у себи она моја предавања, која држим већ више година официрима, слушаоцима напред споменутих Академија. Уосталом, он се за геодешке официре допуњује још и доцнијим двогодишњим радовима на Пулковској Опсерваторији; одељак пак о картографским пројекцијама улази за њих у специјални предмет под насловом „Картографија“. И у овим предавањима, као и у курсу астрономије, који им предходи, ја сам се придржавао највише геометриске методе, као очигледније; јер се је показало, да се много од онога, што је мојим слушаоцима неопходно потребно, може изложити и доказати без великог њиховог оптерећења комплицираним аналитичким манипулацијама, на којима су се заснивала геодешка испитивања знаменитих научника. Овај курс, који изискује, разуме се, претходнога знања диференцијалног и интегралног рачуна и основа методе најмањих квадрата, надам се, да ће бити корисан и за остала лица, код којих се јавља потреба или жеља за упознавањем са разним питањима из више геодезије.

Н. ЦИНГЕР.

ПРЕДГОВОР ПРЕВОДИОЦА

Са овом књигом завршавамо публикавање дела ђенерала Dr. H. J. Цингера у преводу на наш језик. Она допуњује оне прве две из астрономије, које су већ публиковане у мом преводу. Све те три књиге, према шоме прешсављају целину свега онога, што је неопходно потребно једноме геодешу, као основа за будуће његове радове те је потребно да му увек буду на шолу за рад.

И у овој је књизи ђенерал Цингер збијеним слогом мисли и фраза изложио есанцију Више Геодезије, без сувишног дешаљисања. На тај су начин идеје, принципи и методе изложене и ишакнуше не може боље биши, као што је то и у првим двома књигама учињено. Тиме су, између осталог ова његова дела и постала чувена у научном свешу за рационално изучавање геодезије и за научно схватање њено. Нека би оне и код нас биле од користи онима, који се баве и који се интересују шом науком.

С. БОШКОВИЋ.

САДРЖАЈ.

(стране су означене у заградама)

УВОД.

1. Задаћа геодезије, више и ниже (1.). — 2. Геоид и идеални Земљин елипсоид (2.) — 3. Мерење степена (2.). — 4. Испитивање локалних скретања вертикалне линије (3.). — 5. Одређивање интензитета теже (4.) — 6. Нивелања и триангулације (4.). — 7. Састављање карата (6.). — 8. Главнија дела и руководства из више геодезије (6.). —

ГЛАВА I.

О кривини површина.

9. Индикатриса (9.). — 10. Кривина нормалног пресека (10.). — 11. Кривина нагнутог пресека (10.). — 12. Кривина главних пресека на обртном елипсоиду (11.). — 13. Нормални пресеци површине на блиским тачкама (12.). — 14. Геодетска линија. (13.). — 15. Развијање малог елемента површине на површину сфере (15.). — 16. Примена на Земљин елипсоид (17.).

ГЛАВА II.

Срачунавање тригонометриске мреже.

17. Сфероидни троугли (19.). — 18. Лежандрова теорема (20.). — 19. Корекциони чланови за Лежандрову теорему (21.). — 20. Највероватније поправке углова мреже (22.). — 21. Најпростији специјални случаји (27.). — 22. Разни облици неопходних услова у мрежи (30.). — 23. Број услова, независних међу собом (32.). — 24. Упрошћења у рачунању равнања (35.). — 25. Пример рачуна равнања мрежа (37.).

ГЛАВА III.

Мерење углова тригонометриске мреже.

26. Величина троуглова (41.). — 27. Облик троуглова (42.). — 28. Обележавање тригонометријских тачака (44.). — 29. Центрирања (46.). — 30. Свођење праваца на центре сигнала (47.). — 31. Мерење углова (48.). — 32. Оцена тачности мерења (50.). — 33. Најповољније време за мерење углова (53.). — 34. Хелиотропи (54.). —

ГЛАВА IV.

Мерење базиса.

35. Неопходна тачност мерења базиса (57.). — 36. О базисним апаратима уопште (57.). — 37. Струве-ов базисни апарат (58.). — 38. Сравњивање мера за мерење са нормалном мером (59.). — 39. Поступак при мерењу базиса (60.). — 40. Срачунавање дужине базиса (61.). — 41. а. Разни други базисни апарати (63.) — 41. б. Сравњивање нормалних мера (64.). — 42. Мерење базиса по канапу (65.). — 43. Мерење жицама (66.). — 44. Базисне мреже (67.). —

ГЛАВА V.

Одређивање висина.

45. Тригонометриско нивелање (71.). — 46. Утицај земне рефракције (72.). — 47. Разне методе тригонометриског нивелања (73.). — 48. Тачност тригонометриског нивелања (75.). — 49. Хоризонтално топографско нивелање (77.). — 50. Нивелир-теодолит (78.). — 51. Радови са нивелир-теодолитом (80.). — 52. Барометарско нивелање (83.). —

ГЛАВА VI.

Елипсоидне координате тригонометриских тачака.

53. Поларне и правоугне координате (87.). — 54. Геодетске ширине и дужине (88.). — 55. Однос међу разликама ширина, дужина и азимута на земном елипсоиду и на сфери (89.). — 56. Гаусове формуле (92.). — 57. Пример за објашњење (94.). — 58. Беселове формуле (96.). — 58. а. Кларкове формуле за срачунавање геодетских ширина, дужина и азимута (98.). — 59. Полигонски услови (101.). —

ГЛАВА VII.

Мерење степена.

60. Луци меридијана (105.). — 61. Луци паралела (106.). — 62. Главнија мерења степена (107.). — 63. Највероватније димензије земног елипсоида (109.). — 64. Кларкови резултати (110.). — 65. Резултати из руских мерења степена (111.). —

ГЛАВА VIII.

Локална скретања вертикалних линија.

66. Утицај скретања вертикалних линија на ширине, дужине, азимуте и висине тачака (115.). — 67. Оријентирање триангулације (116.). — 68. Релативна издизања и спуштања површине геоида према површини елипсоида (117.). — 69. Срачунавање локалног привлачења (119.). — 70. Најзначајнији примери локалног привлачења (121.). —

ГЛАВА IX.

Одређивање интензитета теже.

71. Кретање клатна у безваздушном простору (124.). — 72. Дужина клатна (125.). — 73. Свођење на бескрајно мале размахе при кретању клатна у ваздушној средини (127.). — 74. Утицај ваздушне средине на дужину клатна (129.). — 75. Одређивање трајања клаћења (130.). — 76. Разне конструкције клатна (132.). — 77. Репсолдово реверсионо клатно (133.). — 78. Апсолутна и релативна одређивања интензитета теже (134.). —

ГЛАВА X.

Облик земљин на основу посматрања интензитета теже.

79. Потенцијал интензитета теже (137.). — 80. Нивоске (водоравне) површине (138.). — 81. Развијање потенцијала привлачења у ред (140.). — 82. Нормални закон промене интензитета теже на земној површини (141.). — 83. Локални поремећаји интензитета теже (143.). — 84. Одређивање спљоштености Земљинога сфероида (146.). — 85. Посебна и општа одступања геоида од обртног елипсоида (149.). —

МАТЕМАТИЧКА КАРТОГРАФИЈА.

ГЛАВА XI.

Општи основи за построј карата.

86. Разне врсте карата (153.). — 87. Општи карактер деформација малих слика (154.). — 88. Конформне, еквивалентне и произвољне пројекције (155.). — 89. Конформна и еквивалентна претстава земне површине на сфери (155.). — 90. Одељак зенитних пројекција (159.). —

ГЛАВА XII.

Пројекције са праволинијским и кружним паралелама.

91. Цилиндричне и коничне пројекције (161.). — 92. Меркаторова пројекција (162.). — 93. Гаусова пројекција (164.). — 94. Ламбертова и Алберсова еквивалентна пројекција (165.). — 95. Пројекције са меридијанима у облику кругова (167.). — 96. Пројекције са меридијанима у облику разних кривих линија (169.). — 97. Бонова пројекција (171.). —

ГЛАВА XIII.

Зенитне пројекције.

98. Конфорна (стереографска) пројекција (173.). — 99. Еквивалентна (Ламбертова) пројекција (174.). — 100. Произвољне зенитне пројекције (174.). — 101. Разни облици перспективних пројекција (175.). — 102. Облици меридијана и паралела (176.). — 103. Построј стереографске пројекције (178.). — 104. Построј зенитних пројекција (179.). —

ГЛАВА XIV.

Релативна каквоћа разних пројекција.

105. Построј мрежа меридијана и паралела (181.). — 106. Променљивост размере код конформних пројекција (182.). — 107. Деформација фигура код еквивалентних пројекција (184.). —

Таблица.

Радиуси кривина земног елипсоида (187.).



УВОД.

1. Задаћа геодезије, више и ниже.

Геодезија има за задатак, да одређује облик Земљине површине.

Извесна незнатна просторија *штварне*, видљиве површине Земљине коре испитује се до најмањих детаља помоћу довољно простих средстава и метода, које се излажу у *нижој геодезији* или *штопографији*. При томе се може допустити, да су вертикалне линије у тачкама, које нису далеко једна од друге, приближно паралелне међу собом те је на тој основи лако одредити како пројекцију разних тачака на *уображеној нивелирној нивоској (водоравној) површини*, која је нормална на правац вертикалних линија, тако и разлике висина свих тачака; пошто се пак врло мали елемент криве површине увек може, до извесног ступња тачности, да развије на равнини, то и напред споменуте пројекције свих тачака сразмерно мале просторије земљишта могу бити представљене на равнини без осетних деформација. Оваква, у извесној размери смањена, слика на равнини добива назив *плана* земљишта.

Није тешко одредити, какав се наине део Земљине површине може представити на равнину без осетних деформација у контурама. Ради тога уобразићемо сферну површину, чији је радиус $R = 6000$ врста*) приближно једнак средњем радиусу Земље. Ако се на њој пренесе из неке тачке А у свима могућним правцима сразмерно мали лук s , којему ће у центру сфере одговарати угао $\frac{s}{R}$, онда ће се на сфери добити мали круг радиуса

$$r = R \cdot \sin \frac{s}{R} = s - \frac{s^3}{6R^2} + \dots \text{ са периферијом}$$

$$O = 2\pi r = 2\pi s - 2\pi \frac{s^3}{6R^2} + \dots$$

На плану пак земљишта, круг описани из тачке А радиусом s имаће дужину $O' = 2\pi s$, која се разликује од истините дужине O за величину $O' - O = 2\pi \frac{s^3}{6R^2} + \dots$. Да та највећа грешка за разматрани рејон не би премашала $\frac{1}{500}$ врсте, тј. величину неосетну за топографску карту, треба да буде

$$2\pi \frac{s^3}{6R^2} < \frac{1}{500}, \text{ одакле } s < \sqrt[3]{\frac{6 \cdot (6000)^2}{2\pi \cdot 500}} = 41 \text{ врсте.}$$

*) 1 врста = 500 сажења = 1066^m791, или приближно 1067 метара, тј. нешто више од километра.

Испитивање облика целе Земљине површине или већег дела њеног представља задаћу *више геодезије* и изискује примену комплициранијих поступака и метода него што су оне, којима се служи нижа геодезија.

2. Геоид и идеални Земљин елипсоид.

За одређивање релативног положаја тачака на земној површини, које су знатно удаљене једна од друге, неопходно је потребно, да се води рачуна о кривини *нивоских (водоравних) површина*, свуда нормалних на правац вертикалних линија. Једна од таквих служи на Земљи природна површина океана и морâ, *спојених са њима*, у мирном стању њиховом, т.ј. не узимајући у обзир плиму и осеку, таласања и друге сличне неправилности. Кад се она замишљено продужи и испод континенте, — као што би то било, када би они били испресецани дубоким и бескрајно уским каналима, — онда ће се добити потпуно одређена, уображена Земљина површина, која се зове *геоид*. Испитивање облика тога геоида представља главну задаћу *више геодезије*.

Пошто правац вертикалне линије или пак силе теже у свима местима зависи од привлачног деловања свију посебних честица Земље, а пошто је стварна Земљина површина и подела густинâ у унутрашњости њеној врло неправилна, то, разуме се, да и облик геоида треба да буде изванредно комплициран. Ипак, на основу потпуно оправдане претпоставке, да је Земља, слично са осталим планетама, била некада у стању течне обртне масе и да је имала доста правилни облик елипсоида, спљоштенога на половима, — може се закључити, да *идеални* облик геоида треба наине да буде *обртни елипсоид* и да су већа или мања одступања стварнога геоида од тога типичнога његовог облика произашла у главном због неравномернога хлађења и непотпуне једнородности густине земне коре. Оваква чисто теориска, идеална представа о Земљи, као о обртном елипсоиду, утврђена је, као што је познато, још од Њутнова времена.

Сад да видимо, каква се средства и методе употребљују ради могућно најтачнијег одређења како тог идеалног елипсоида, тако и стварнога геоида.

3. Мерења степена.

Узмимо на земној површини какве две тачке А и В, које нису сувише удаљене једна од друге; измеримо растојање међу њима па, пошто одредимо макар и приближно висине интервалних тачака земљишта над морском површином, пројектујмо то растојање на површину геоида, ради чега треба уобразити на целој дужини АВ низ вертикалних линија или, што је исто, низ нормала на геоид. Означимо са s срачунату дужину пројекције АВ, рачунату на самој површини геоида. Угао θ међу правцима вертикалних линија на крајњим тачкама А и В лако ће се такође срачунати по ширинама и дужинама тих тачака, које се одређују по познатим методама из астрономских посматрања. Тада ће однос $\frac{s}{\theta}$ бити радиус кривине нормалнога пресека геоида, који расматрамо.

Ако оваква геодетска мерења и астрономска посматрања буду извршена у разним правцима и на многим тачкама доста велике просторије, онда се већ добија јасан појам о кривини одговарајућег дела геоида. Пошто се затим нађе

такав елипсоид, који најближе подилази томе делу геоида, онда га, до извесног ступња приближења, можемо сматрати за напред споменуту идеалну површину целе Земље уопште.

Разуме се, да ће се обртни елипсоид, који најближе подилази свакој другој на тај начин испитаној просторији, добити са извесним другим димензијама и спљоштености; али уколико буде већи број овако испитаних просторија и уколико је свака од њих већа, утолико ће извод облика и димензија елипсоида, општега за сву Земљу, бити сигурнији. Таква геодетска испитивања у најпростијем својем облику добијају назив *мерења шпепена*. Из многих таквих мерења, а по тачним срачунавањима енглеског геодет. пуковника Кларка, излази да обртни елипсоид

са полуосама: $a = 2989457$ саж., $b = 2979271$ саж.

и спљоштености $c = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{293.5}^*)$

доста добро подилази општем облику геоида те може да служи (уосталом ништа не боље од осталих, који се мало од њега разликују) као прво полазно приближење ка истинитој површини геоида на сваком месту на Земљи. На основу овога је утврђен овај најприроднији и најпрактичнији пут за најближе изучавање посебних делова геоида.

4. Испитивање локалних скретања вертикалне линије.

Кад се узму: вертикална линија, и меридијан какве тачке земне површине прва као нормала, а други као меридијан идеалног елипсоида, који пролази кроз пројекцију те тачке на морску површину, онда се може, по измереним растојањима од ње до других тачака, да одреди правац нормала на елипсоид у свима тим тачкама, тј. могу се за све њих срачунати елипсоидне или *геодетске ширине* и *дужине*. Из астрономских пак посматрања, непосредно одређене *истиниште ширине* и *дужине* истих тачака разликоваће се више или мање од тих геодетских и, показујући уколико наине истините вертикалне линије скрећу од одговарајућих елипсоидних нормала, даће материјал како за одређивање тога елипсоида, који најбоље подилази испитаној просторији, тако и за суђење о облику самога геоида на тој просторији.

Запажена на тај начин *локална скретања* или *поремећаји у правцима вертикалних линија* објашњавају се каткад потпуно очигледним узроцима, а наине: привлачним деловањем планина, које окружују дано место, или пак, знатном дубином оближњих мора, јер је густина воде знатно мања од средње густине земне коре. Али се често пута узроци њихови крију у ненормалној густини врло дубоких маса земне коре, које нису приступачне за геолошко изучавање њихово.

* На триангулацијама, које се врше ради одређивања димензија Земљиног елипсоида, служиле су разне нормалне мере: код Француза је таква мера упочетку био *тоаз* а затим *мешар*; код Енглеза *јард* (= 3 стопе), код Руса *тоаз* и *сажењ* (= 7 енгл. стопа). Ова се мера задржала и до сад на свима руским тригонометриским радовима. Однос њен према тоазу и метру овакав је:

$$\begin{aligned} 1 \text{ саж.} &= 7 \text{ стопа} = 84 \text{ палаца} = 1.0946856 \text{ тоаза} \quad (lg = 0.0392894) \\ &= 2.1335811 \text{ метра} \quad (lg = 0.3291091). \end{aligned}$$

Напред речено испитивање скретања вертикалних линија на извесној просторији и на њему засновано изучавање облика геоида, који јој одговара, саставља другу задаћу више геодезије.

5. Одређивање интензитета теже.

Постоји још и други пут за изучавање како истините тако и идеалне површине геоида; тај *динамички* пут заснован је на одређивању величине *интензитета теже* на разним местима земне површине из посматрања клађења клатна.

Интензитет теже, зависећи на свакој тачци земне површине од привлачног деловања целокупне Земље и од центрифугалне силе, треба да се мења на површини геоида по некоме закону, који зависи од распореда густина у унутрашњости Земље. Али, при идеалној представи о унутрашњем построју Земље треба допустити, да су подједнаке густине поређане у концентричним елипсоидним слојевима са разним спљоштеностима истога ступња маленкости као и код спољашње елипсоидне површине; а у теорији привлачења доказује се, да у таквом случају, ма какав био закон промене густина при прелазу од једнога слоја на други, свака нивоска (водоравна) површина, па према томе и површина геоида, треба да буде *сфероид*, тј. обртна површина са врло малом спљоштености на половима и врло приближна обртном елипсоиду са истом спљоштености.

Кад се по теорији изнађе неопходна зависност између спљоштености таквога *идеалног сфероида* и промене интензитета теже на његовој површини, онда се из посматрања теже на разним местима на Земљи може да одреди величина спљоштености, која најбоље задовољава сва та посматрања. Та спљоштеност у ствари и излази скоро исто онаква као и она што се одређује из мерења степена. Разуме се, да усљед разних случајних неправилности у распореду густина у унутрашњости Земље *испитујућа* величина интензитета теже у свакој тачци треба више или мање да се не слаже са напред споменутом *идеалном*, и, динамичка теорија показује, како се по тим *поремећајима интензитета теже* може судити о одступању стварнога геоида од његовог сфероидног облика.

На тај начин посматрања интензитета теже у знатној мери помажу повољном решењу основне задаће више геодезије, тј. одређивању општег облика геоида. Та посматрања могу да имају слични значај и за њену другу задаћу, тј. за детаљно изучавање посебних делова геоида.

6. Нивелања и триангулације.

Напред споменута геодетска испитивања облика Земљине површине оснивају се, као што смо видели, на одређивању најкраћих растојања међу пројекцијама разних њених тачака на површини геоида. За та пројектовања неопходно су потребне *апсолутне висине* тачака над геоидом, која се добивају поступним одређивањем *разлика тих висина*, при чему бар једна тачка треба да буде изабрана гдегод на самом геоиду, тј. на површини отвореног мора. Оваква одређивања висина носе уопште назив *нивелања*.

Али непосредно мерење растојања на земној површини наишло би при његову извршењу на знатне тешкоће; због тога се оно замењује тако званом *триангулацијом*, тј. састављањем, из много изабраних тачака, непрекидне *мреже*

или пак *ланца троуглова*, на којима се мере само угли; дужине страна пак добивају се тригонометриским срачунавањем по дужини једне ма које стране мреже, која се мери са великом тачности и која се зове *основица* или *базис*. На свакој се тригонометриској тачци посматрају обично још и *зенитна растојања* свих са ње видних тачака ради одређивања њиховог релативног превишавања или снижавања. Овакво одређивање висина добива назив *геодетског* или *тригонометриског нивелања*.

У садање доба све су цивилизоване државе покриване тригонометриским мрежама; али је то изазвано не толико напред реченим научним циљевима геодезије, већ чисто практичком потребом, да се добију тачне и детаљне карте за те државе. Састављање таквих карата представља трећу задаћу више геодезије, и она се решава најбоље овако:

1.) На просторијама дане државе изаберу се основне или *првокласне тачке*, које образују непрекидни ланац троуглова, на којима се измере угли а тако исто и неке од страна (базиси), — као и код мерења степена, — са што је могуће већом тачности; кроз велике пак државе проводе се уздуж и попреко неколико таквих *првокласних ланаца*.

2.) Остале непопуњене просторије покривају се многим *другокласним ланцима* или *мрежама* троуглова, у којима се угли мере већ са мањом тачности, а за базисе им служе стране првокласне мреже.

3.) Поред свега тога одређује се још и положај веома великог броја *шрећекласних тачака* у односу према оближњим првокласним и другокласним, што се може да изврши и са још мањом тачности. Све те тачке заједно са првокласним и другокласним служе као *основа* за извршење детаљног *шопографског снимања* појединих делова земљишта.

4.) Кад се одреди из астрономских посматрања ширина једне или више тачака првокласне мреже а тако исто и азимут једне или неколико њених страна, и кад се за целу државу усвоји за њу најприлагоднији елипсоид (или пак просто идеални Земљин елипсоид), онда се срачунају геодетске ширине и дужине свих тачака без изузетка. Те елипсоидне координате ма да ће се унеколико и разликовати од истинитих геодетских, ипак ће оне доста тачно да одреде релативни положај тачака једне према другој.

5.) Треће координате свих тригонометрских тачака, тј. висине њихове над елипсоидом, који је узет уместо геоида, добивају се, као што је већ напред речено, помоћу тригонометриског нивелања, које се врши попут осталих тригонометрских мерења.

6.) После тога може се уобразити, да је елипсоид, на коме су пројектоване све тачке, подељен меридијанима и паралелама на тако мале *трапезе*, да се, без осетне грешке, могу сматрати за равне елементе. Сваки нам такав трапез, смањен у извесној размери, и даје природне границе за *план* онога дела земљишта, којему он одговара; као основа пак за извршење *шопографског снимања* државе послужиће тригонометриске тачке свих трију класа, које се претходно пренесу на планове (секције трапезне) по њиховим географским ширинама и дужинама.

7. Састављање карата.

После снимања више или мање детаљног топографског плана свих трапезних секција земљишта, остаје још, да се за разне практичке циљеве састави општа карта целе државе, тј. још више смањена њена слика, али сад већ не на елипсоидној површини, која би се добила спајањем свих трапезних планова уједно, већ на равнини. Али, пошто се знатан део елипсоидне површине не може развити или претставити на равнини без расцепа или каквих других деформација, то се та задаћа може решити само условно.

Могу се, например, из ма које тачке просторије замислити зрочно праве линије у правцу ка разним тачкама елипсоидне површине па да се на некој равнини, која пресеца те линије, добије у пројекцији, више или мање деформисана слика целе просторије; при томе ће мрежи меридијана и паралела елипсоида одговарати на тој пројекцији мрежа потпуно одређених кривих линија у равнини. Уопште пак, могу се на каквој равнини узети два низа потпуно произвољних, кривих или правих линија, које се узајамно пресецају, па их сматрати за меридијане и паралеле елипсоида и добити мрежу, у којој ће свакоме елементарном елипсоидном трапезу одговарати свој више или мање деформисани четвороугаоник. После тога, за састав карте целе просторије, остаје само, да се у те четвороугле унесу, са одговарајућим деформацијама, сви потребни детаљи, који су били добивени на трапезним плановима.

Таквих различитих система мрежа, које се уопште зову *Каршографске Пројекције*, може бити безброј много; због тога у вишој геодезији треба да буду утврђена правила за конструкцију најпогоднијих пројекција, које дају или најмање деформисане слике, или пак, које задовољавају какве друге услове.

8. Главнија дела и руководства из више геодезије.

При поступном срачунавању страна тригонометријских мрежа а тако исто и геодетских ширина и дужина разних тачака има се посла са кривим линијама, положеним на површини геоида или њему најближег елипсоида. При томе се обично разматрају *геодешке*, тј. најкраће линије међу даним тачкама. Али, пошто се из непосредних посматрања одређује релативан положај само блиских тачака, то се и сва геодетска питања могу решити, са свом неопходном тачношћу, на основу само најопштијих и најпростијих особина геодетске линије незнатне дужине. Такво најпростије, у теориском и практичком смислу, решавање најзначајнијих геодетских питања најбоље је изложено у одличној књизи: „*Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten von Zachariae. 1878.*“ (Немачки превод са данског ориџинала).

За упознавање са знатно сложенијим методама решавања тих истих питања, основаних на разматрању геодетских линија знатних дужина, најбоље може послужити књига: „*A. A. Тилло. — Геодезическія изслѣдованія Гаусса, Бесселя и Ганзена. 1866.*“ у којој су важнији радови та три чувена научника преведени на руски језик и груписани уједно.

Детаљно излагање тих истих а и других метода са истим циљем, представља прва свеска дела: „*Die mathematischen und physikalischen Theorien der*

höheren Geodäsie von Helmert. 1880.“ У другој свесци, са истом потпуношћу изложена је теорија привлачења и на њој засноване методе одређивања облика Земље из посматрања интензитета теже.

Од специјалних дела, посвећених разјашњењу теориске стране питања о облику геоида у целини и по деловима, особиту пажњу заслужују радови Θ. А. Слудскога. *Объ уклоненіи ошвъсныхъ линій*. 1863.“ и „*Общая теорія фигуры Земли*. 1888.“

Као врло добро и доста потпуно руководство из више геодезије може да послужи дело: „*Geodesy*, by Colonel Clarke. 1880,“ које је пуковник В. В. Витковски превео на руски језик; само је излагање у том делу местимично доста збијено.

„*Handbuch der Vermessungskunde* von Jordan. 1878“, (на руски превео Бикъ) врло је подробно руководство, како из више тако и из ниже геодезије. У њему је особита пажња поклоњена примени методе најмањих квадрата на геодетска мерења разне врсте и са довољном потпуности изложене особине разних картографских пројекција.

За темељно упознавање са практичким методама извршења и са свестраном обрадом првокласних триангулација може се препоручити познато дело „В. Струве, *Дуга меридіана между Дунаемъ и Ледовишымъ моремъ*“. 1861“. а исто тако одлична и корисна књига: „*Практическая Геодезія*, В. В. Витковскога“.

Најпотпунија су руководства из картографије: „*Traité des projections des cartes géographiques*, par Germain“ и „*Lehrbuch der Kartenprojection*, von Gretschel. 1873.

ГЛАВА I.

О КРИВИНИ ПОВРШИНА.

9. Индикатриса.

Уобразимо у тачци А какве површине тангентну равнину XY (сл. 1.); узмимо на њој два ма каква узајамно перпендикуларна правца AX и AY па их сматрајмо заједно са нормалом AZ у тачци А за осе правоуглих координата x , y , z . Једначина површине у односу према тим осама изразиће се уопште неком функцијом

$$z = f(x, y).$$

Али разматрајући само врло мали део површине око тачке А, тј. сматрајући координате x и y за елементарно мале величине првог степена, ми можемо, у развијању $f(x, y)$ по Маклореновом реду, занемарити чланове трећег и виших степена те ћемо тада имати просто:

$$z = \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)_0 + xy \cdot \left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy} \right)_0 + \frac{y^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right)_0; \dots \dots \dots (1.)$$

зато што ће делимичне вредности диференцијалних коефицијената $\left(\frac{dz}{dx} \right)_0$ и $\left(\frac{dz}{dy} \right)_0$ код првих степена x и y за тачку А бити једнаки са нулом.

Једначина (1.) представља једначину криве $aba'b'$, добивене пресеком површине са равнином, која је повучена паралелно са тангентном равнином на елементарно-малом од ње растојању другог степена: $AC = z$. Као што се види, та крива, која се зове *индикатриса*, увек је крива другог степена са центром С, који се налази на нормали тачке А; за површине пак испупчене у свима правцима, — а ми ћемо само такве и имати у виду у свему будућем, — она је неизоставно затворена крива, тј. *елипса*. Према томе, ако означимо главне полуосе те елипсе са a и b и баш кроз њих повучемо координатне равнине ZAX и ZAY, онда се једначина индикатрисе (1.) треба да представи у облику:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

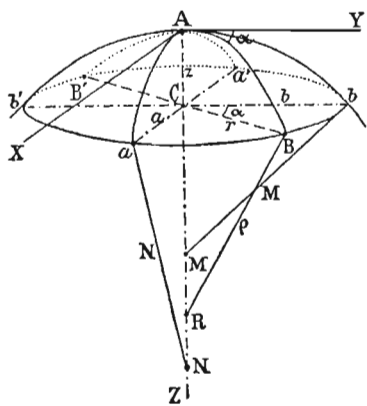
или пак

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \dots \dots \dots (2.)$$

где $r = BC$ представља радиус-вектор какве њене тачке B , а $\alpha = \sphericalangle BCB$ угао, који заклапа тај радиус са краћом полуосом елипсе $Cb = b$.

10. Кривина нормалног пресека.

Кад површину испресецамо равнинама, које пролазе кроз нормалу AZ , онда ћемо у разним правцима добити разне криве, које се зову *нормални пресеци* у тачци A .



Сл. 1.

Уобразимо кроз тачку B индикатрису нормални пресек BAV' (сл. 1.) па нека $\rho = RB = RA$ буде радиус кружне кривине, која пролази кроз три врло блиске тачке: B , A и B' на томе пресеку; онда ћемо имати, да је $r^2 = z(2\rho - z)$ или пак, с тачношћу до величина другог степена, просто

$$r^2 = 2z \cdot \rho.$$

Ако радиуси кривина нормалних пресека aAa' и bAb' , који пролазе кроз темена индикатресе, буду $N = AN = aN$ и $M = AM = bM$, онда ће се исто

тако добити

$$a^2 = 2z \cdot N \quad \text{и} \quad b^2 = 2z \cdot M$$

Пошто је z за сву индикатрису величина константна, а a и b најмањи и највећи радиус-вектори, то су и њима одговарајући радиуси кривина N и M , први највећи а други најмањи. Према томе у свакој тачци површине постоје два узајамно перпендикуларна нормална пресека, један са највећом кривином $\frac{1}{M}$ а други са најмањом $\frac{1}{N}$. Они се зову *главни нормални пресеци*.

Угао $\alpha = \sphericalangle VAB$, којим је одређен правац ма каквог нормалног пресека AB према главне са најмањим радиусом кривине M , зваћемо *азимут* тога пресека. Његов радиус кривине ρ изразиће се помоћу N и M овако

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2 \alpha}{N} + \frac{\cos^2 \alpha}{M}, \quad \dots \quad (A.)$$

што директно произлази из једначине (2.), јер су величине r^2 , a^2 и b^2 пропорционалне са ρ , N и M . Ову врло значајну формулу дао је први пут Ајлер, и она изражава општи закон, по коме се мењају кривине нормалних пресека у каквој тачци на ма каквој испупченој површини.

11. Кривина нагнутог пресека.

Ако кроз тачку A (сл. 2.) уобразимо линију TAT' , паралелну са дијаметром индикатресе BCB' или, што је исто, тангентну на нормални пресек BAV' , онда, ће свака равнина TAR' , која кроз њу пролази а саставља са нормалом AR угао i , дати на површини *нормални пресек* DAD' , чији ће азимут у тачци A бити исти као и за нормални пресек BAV' ; равнину пак индикатресе она ће пресећи

по тетиви DD' , која ће бити паралелна, а и једнака са дијаметром $BCB' = 2r$, јер је њено растојање од њега исто таква мала величина другог степена, као што је и растојање $CA = z$.

Центар R' круга кривине криве DAD' налазиће се на линији AR' , повученој на равнини DAD' , перпендикуларно на TAT' те пресеца тетиву DD' у некој тачци E на растојању $EA = z'$; сам пак радиус кривине $AR' = DR' = D'R' = \rho'$ добива се из израза $\rho' = \frac{r^2}{2z}$. А пошто правоугли троугао ACE даје

$$z' = \frac{z}{\cos EAC} = \frac{z}{\cos i},$$

то ће бити

$$\rho' = \frac{r^2}{2z} \cos i = \rho \cdot \cos i$$

т.ј. радиус кривине свакога нагнутог пресека, једнак је са радиусом кривине нормалног пресека, који њему одговара, помноженим са косинусом угла међу равнинама ша два пресека.

12. Кривина главних пресека на обртном елипсоиду.

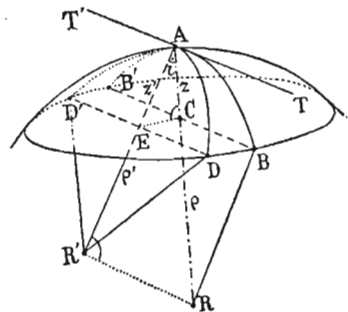
Ако је површина добивена обртањем неке криве у равнини PAP' (сл. 3.) око неке осе PP' , која се налази у њеној равнини, то ће у свакој тачци нормала AN на ту криву PAP' бити у исто време и нормала на ту површину; меридијански пак пресек PAP' , који дели површину на два потпуно симетрична дела, свакако ће бити један од главних пресека, и његов ће се радиус кривине $M = AM$ одредити из облика те криве.

Што се тиче радиуса кривине N другог главног пресека pAp' , перпендикуларног на меридијански PAP' , то он треба увек да буде једнак са дужином нормале AN (рачунајући ту дужину до осе PP'). И заиста, ако уобразимо кроз тачку A равнину, перпендикуларну на осу PP' , она ће бити нагнута према равнини главног пресека pAp' под углом $RAN = \varphi$ па ће дати у пресеку са површином круг DAD' радиуса $RA = AN \cdot \cos \varphi$; стога ће, на основу последње теореме, изаћи, да је

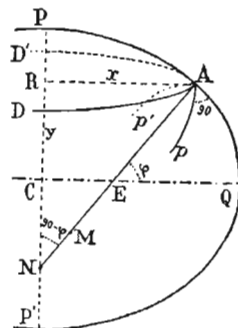
$$N = \frac{AR}{\cos \varphi} = AN.$$

Узмимо, на пример, спљоштени елипсоид, који је добивен обртањем елипсе PQP' (сл. 3.), са полуосама $CQ = a$ и $CP = b$, око краће њене осе PP' . Кад означимо са x и y правоугле координате тачке A у односу према осама CQ и CP , а са φ ширину њену, тј. угао $\sphericalangle AEQ$, који нормала AN заклапа са равнином екватора елипсоидовог, онда ћемо имати

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$



Сл. 2.



Сл. 3.

одакле је

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad y = \frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Из ових ћемо израза и добити за главне радиусе кривина M и N ове изразе у функцији ширине дате тачке A :

$$M = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad N = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{a^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ако пак уведемо у те формуле, уместо краће полуосе b , ексцентрицитет елипсе $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, онда ће се M и N представити у оваквом облику:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \dots (B.)$$

а пошто је разлика

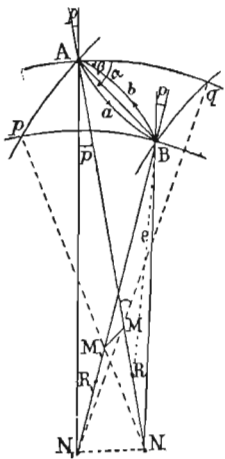
$$N - M = \frac{a e^2 \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \dots \dots \dots (B'.)$$

величина позитивна, то се изводи закључак, да је на свакој тачци спљоштенога обртног елипсоида *радиус кривине M меридијанског пресека најмањи а радиус кривине N перпендикуларног главног пресека највећи.*

Ови ће радиуси M и N , као и средњи пропорционални међу њима $R = \sqrt{MN}$, често улазити у разне формуле; због тога на крају књиге дајемо бројне вредности тих радиуса за Земљин елипсоид (по Кларку) за све ширине од 0° до 90° .

13. Нормални пресеци површине на блиским тачкама.

Замислимо на тачци A (сл. 4.) какве површине нормалу AN а кроз њу две равнине главних нормалних пресека ApN и AqM , које пресецају ту површину, и то: прва по кривој Ap са највећим радиусом кривине $AN = pN = N$ а друга по кривој Aq са најмањим радиусом кривине $AM = qM = M$.



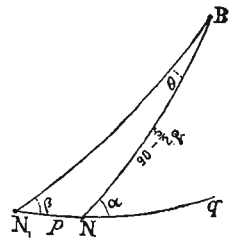
Сл. 4.

Узмимо затим да су BqN_1 и BpM_1 такве исте равнине, које пролазе кроз нормалу BN_1 тачке B , врло блиске тачци A ; при томе ће прва равнина дати на површини нормални пресек Bq са највећим радиусом кривине $BN_1 = qN_1 = N_1$, а друга пресек Bp са најмањим радиусом кривине $BM_1 = pM_1 = M_1$. Ако разматрана површина нема ни особитих тачака нити ивица, онда је јасно да у тачци B како правци пресека Bq и Bp , тако и радиуси кривине M_1 и N_1 треба да се разликују од сличних праваца Ap и Aq и радиусâ кривине M и N у тачци A само за елементарне величине; због тога,

кад се увек занемаре мале величине виших степена испред нижих, онда можемо у образованом четвороуглу $ApBq$ на површини сматрати све угле за праве, супротне пак стране за равне и паралелне, а тако исто сматрати $N_1 = N$ и $M_1 = M$.

Равнина ANB, која је повучена кроз нормалу AN и кроз тачку B, даће на површини криву AaB, која ће представљати нормални пресек површине у тачци A. Дужину његову $s = AaB$ можемо сматрати за једнаку са дужином лука AaB круга кривине, чији се центар R налази на нормали AN на растојању $AR = BR = \rho$, који се одређује по формули (A.); услед тога ће угао $\sphericalangle ARB$ при томе центру бити раван $\frac{s}{\rho}$; угао пак $\sphericalangle BAR$ између праволиниске тетиве AB и нормале AN биће једнак $90^\circ - \frac{s}{2\rho}$. Али ће тај површински пресек AaB бити нешто нагнут у тачци B, јер се нормала BN_1 не налази у његовој равнини нити се пресеца са нормалом AN; због тога ћемо, повлачећи равнину BN_1A кроз нормалу BN_1 и кроз тачку A, добити на површини између A и B други пресек, нормални у B али нагнути у A; дужина пак његова s_1 и радиус кривине ρ_1 могу се сматрати као једнаки са пређашњим s и ρ . Означимо азимут првога пресека у тачци A, тј. угао $\sphericalangle qAaB$ са α а азимут другога, тј. угао $\sphericalangle qAbB$ са β па одредимо малу разлику $\Delta = \alpha - \beta$.

Ради тога ћемо уобразити из центра помоћне сфере правце, паралелне са правом AN, AN_1 и AB који полазе из тачке A. Ти ће правци продрети кроз површину помоћне сфере у тачкама N, N_1 и B (сл. 4. bis); при чему ће луци великих кругова N_1Nq , NB и N_1B представљати и то: први — равнину главнога пресека AqM у тачци A, други — равнину нормалног пресека $NAaB$, трећи пак — равнину пресека N_1AbB , нормалног у тачци B. Кад са Θ означимо угао између две последње равнине, а лук $NN_1 = \sphericalangle NAN_1$ са p и кад напоменемо, да је у елементарном сферном троуглу NN_1B :



Сл. 4. (bis)

$$\sphericalangle BNq = \alpha, \quad \sphericalangle BN_1q = \beta \quad \text{и} \quad NB = \sphericalangle BAN = 90^\circ - \frac{s}{2\rho},$$

онда ћемо из тог троугла добити приближно:

$$\alpha - \beta = \Theta \cos \left(90^\circ - \frac{s}{2\rho} \right) = p \sin \alpha \cdot \frac{s}{2\rho} *$$

а пошто је у праволиниском елементарном троуглу AN_1M

(сл. 4.):
$$\sphericalangle AMq = \frac{Aq}{AM} = \frac{s \cdot \cos \alpha}{M}, \quad \sphericalangle AN_1q = \frac{Aq}{qN_1} = \frac{s \cdot \cos \alpha}{N}$$

и
$$p = \sphericalangle NAN_1 = \sphericalangle AMq - \sphericalangle AN_1q = s \cdot \cos \alpha \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right),$$

то ће бити

$$\Delta = \alpha - \beta = \frac{s^2}{4\rho} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \cdot \sin 2\alpha \quad \dots \quad (3.)$$

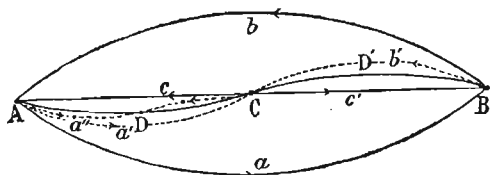
Према томе је разлика Δ између азимута α и β уопште мала величина другог степена.

14. Геодетска линија.

Унутра, између два размотрена нормална пресека AaB и AbB на површини садржаће се још безброј пресека, чије ће равнине, пролазећи кроз исту тетиву AB, бити нормалне на површини у разним интервалним тачкама између A и B.

*) За површину таквога троугла, због маленкости његове стране p , може се узети приближни израз $\Theta (1 - \cos NB)$; сравњујући га пак са тачним $(180^\circ - \alpha) + \beta + \Theta - 180^\circ$, добићемо $\alpha - \beta = \Theta \cdot \cos NB$.

Једна од таквих равнина, повучена кроз нормалу тачке С (сл. 5.), која лежи на средини растојања $AB = s$ и на једнаком удаљењу $Ca = Cb$ од пресека AaB и AbB , даће на површини криву $AcSc'B$, која дели угле $\sphericalangle aAb$ и $\sphericalangle aBb$ на пола. Кад се пак у А и В замисле нормални пресеци $Aa'C$ и $Bb'C$, који пролазе кроз ту тачку С, и кад се напомене, да ће дужина лукова AC и CB бити једнака са $\frac{s}{2}$, онда ћемо на основу (3.)



Сл. 5.

добити, да је

$$\sphericalangle cAa' = \frac{\Delta}{4} \text{ па према томе } \sphericalangle a'Aa = \sphericalangle CAa - \sphericalangle cAa' = \frac{\Delta}{4},$$

$$\sphericalangle c'Bb' = \frac{\Delta}{4} \text{ па према томе } \sphericalangle b'Bb = \sphericalangle CBb - \sphericalangle c'Bb' = \frac{\Delta}{4}.$$

У образованим двоугаоницима $Aa'Cc$ и $Cc'Bb'$ добивају се затим на исти начин тачке D и D' , које се налазе, и то: прва на средини између А и С и на једнаким удаљењима $Da' = Dc$ од пресека $Aa'C$ и AcC , а друга на средини између В и С и на једнаким удаљењима $D'c' = D'b'$ од пресека $Bb'C$ и $Bb'C$, при чему ће пресек $Aa''D$, нормални у А и повучен кроз D , сад већ саставити са $Aa'C$ угао $\sphericalangle a'Aa'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{4}$, а са пресеком AaB угао $\sphericalangle aAa'' = \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{4}$. Исто ће такве угле састављати међу собом и слични нормални пресеци у тачци В.

Ако продужимо тај поступак све даље и даље у следећим двоугаоницима, онда ћемо на разматраној површини постројити читав низ бескрајно блиских тачака, тј. непрекидну криву $ADCD'B$, која има ту особину, што је *равнина*, повучена кроз ма које бескрајно блиске њене шачке шачно нормална на површину у средњој од њих. А пошто у пројекцији на тангентну равнину такве три тачке дају праву линију, то отуд излази, да их тако конструисана крива спаја на најкраћи начин. Према томе и између сваке две њене тачке она је *најкраћа*. Те криве на површини зову се уопште *геодетске линије*. На сферној површини су оне луци великих кругова, на цилиндричној — завојице.

Из напред изложене методе построја геодетске или најкраће линије међу блиским тачкама А и В излази, да ће у самој тачци А последњи елемент те геодетске линије саставити са нормалним пресеком AaB угао

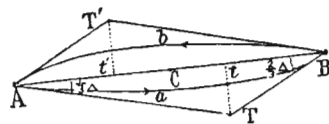
$$\sphericalangle DAa = \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{4} + \dots = \frac{\Delta}{3},$$

или, другим речима, *азимуш* А *геодетске линије* у тачци А разликује се од азимута α тога пресека за овакву малу величину другог степена:

$$\alpha - A = \frac{\Delta}{3} = \frac{s^2}{12} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \cdot \sin 2\alpha \quad \dots \quad (C.)$$

За исто ће се такву величину разликовати њен азимут и у тачци В од азимута нормалнога пресека BbA .

Ако замислимо, да је уски двоугаоник $AaBb$ скинут са површине па развијен на равнину, онда ће се геодетска линија $ADCD'B$, као најкраћа између A и B , претворити у праву AB (сл. 6.); тангенте пак у тачкама A и B на криве нормалних пресека AaB и AbB биће нагнуте према њој под углима: $TAB = \frac{\Delta}{3}$, $BAT' = \frac{2}{3}\Delta$, $TBA = \frac{2}{3}\Delta$ и $ABT' = \frac{\Delta}{3}$, тако да, кад се из тачке пресека тангената AT и BT спусти перпендикуларна Tt на AB , онда ће се добити:



Сл. 6.

$$AT - At = AT \left(1 - \cos \frac{\Delta}{3}\right) = AT \cdot \frac{\Delta^2}{18} - \dots$$

$$BT - Bt = BT (1 - \cos \frac{2}{3}\Delta) = BT \cdot \frac{4\Delta^2}{18} - \dots;$$

а пошто је приближно: $AT = \frac{2}{3}s$ а $BT = \frac{1}{3}s$, то је

$$(BT + AT) - AB = \frac{\Delta^2}{18} \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s\right) = \frac{s\Delta^2}{9} - \dots$$

а тако исто

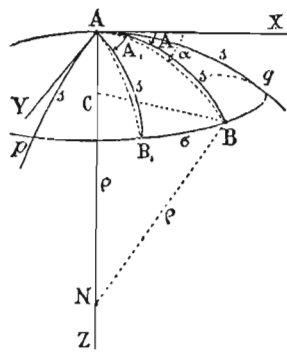
$$(BT' + AT') - AB = \frac{\Delta^2}{18} \left(\frac{2}{3}s + \frac{4}{3}s\right) = \frac{s\Delta^2}{9}.$$

Као што се види ова разлика представља малу величину петог степена; очевидно је да ће се криве AaB и AbB , још мање разликовати од AB па стога, с тачношћу до величина 4 степена закључно, дужину геодетске линије међу тачкама A и B можемо сматрати за једнаку са дужином једнога или другога нормалног пресека међу њима.

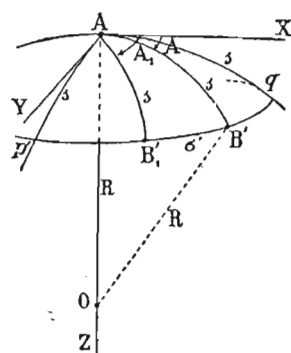
15. Развијање малог елемента површине на површину сфере.

Овај ће проблем за нас бити од особитог значаја: *Мали се елементи сваке испуцане површине може развиши на површину сфере, чији је радиус једнак са средњим геомештриским из највећег и најмањег радиуса кривине штога елемента, с тим да промена дужина разних линија, при шом, не премаши мале величине шрећег степена.*

Положај сваке тачке B елемента површине у односу према централној његовој тачци A може да се одреди, — као и на сфери радиуса $R = \sqrt{MN}$, — из дужине геодетске линије AB међу њима и азимута њеног у тачци A ; ако пак замислимо геодетске линије AB, AB_1 и т.д. једне и исте мале дужине s , које полазе из A под свима могућим геодетским азимутима A, A_1 и т.д. (сл. 7.a.), онда ће добивена крива $qBB_1 \dots p$, која пресеца све радиалне геодетске линије AB, AB_1 и т.д. под правим углима, играти на тој површини исту улогу, као и мали круг $q'B'B'_1 \dots p'$, (сл. 7.b.) који је



Сл. 7. a.



Сл. 7. b.

конструисан на сфери сличним начином. Напред речени проблем може бити решен, ако се убедимо, да ће, — с тачношћу до малих величина трећег степена (s^3) закључно, — сваки део $BB_1 = \sigma$ граничне кружне криве, која ограничава елемент површине, бити једнак са одговарајућим делом (тј. који се налази међу истим азимутима A и A_1) $\sigma' = B'B'_1$ малог круга на сфери; зато што ће се та једнакост испуњавати још са већом тачности за сличне криве, описане из A са мањим радиусима па разуме се и за све друге криве, које се налазе у унутрашњости расматране просторије кружног облика.

Кад се узме, као и у чл. чл. 9. и 10., тачка A за почетак правоуглих координата X , Y и Z и кад се са α означи азимут нормалног пресека, који пролази кроз крај B геодетске линије AB , онда ћемо имати по формулама (С.) и (А.), да је

$$\alpha = A + \frac{s^2}{12\rho} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \sin 2\alpha, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N},$$

а пошто ће, — с тачношћу до s^4 закључно, — дужина AB тога пресека бити једнака са s (чл. 14.), то ће се растојање $BC = r$ тачке B до нормале AN , затим координате њене x, y и z и најзад дужина $\partial\sigma$ бескрајно малог елемента криве $qBB_1 \dots p$ изразити овако:

$$r = \rho \cdot \sin \frac{s}{\rho}; \quad x = r \cdot \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) = 2 \rho \sin^2 \frac{s}{2\rho};$$

$$\partial\sigma = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} = \sqrt{r^2 \partial\alpha^2 + \partial r^2 + \partial z^2} = \partial\alpha \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha} \right)^2}.$$

Кад се сад r и z развију по степенима од s и кад се означе заградама занемарени чланови виших степена s , онда ћемо добити:

$$r = s - \frac{s^3}{6\rho^2} + (s^5), \quad r^2 = s^2 - \frac{s^4}{3\rho^2} + (s^6), \quad \left(\frac{\partial r}{\partial\alpha} \right)^2 = (s^6),$$

$$z = \frac{s^2}{2\rho} + (s^4), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha} \right)^2 = \frac{s^4}{4} \left(\frac{\partial \cdot \frac{1}{\rho}}{\partial\alpha} \right)^2 + (s^6), \quad \partial\alpha = \partial A + \frac{s^2}{12} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \partial \left[\frac{1}{\rho} \sin 2\alpha \right] \cdot \partial A + (s^3),$$

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= \partial\alpha \left[s^2 - \frac{s^4}{3\rho^2} + \frac{s^4}{4} \left(\frac{\partial \cdot \frac{1}{\rho}}{\partial\alpha} \right)^2 + (s^6) \right]^{\frac{1}{2}} = \partial\alpha \left[s - \frac{s^3}{6\rho^2} + \frac{s^3}{8} \left(\frac{\partial \cdot \frac{1}{\rho}}{\partial\alpha} \right)^2 + (s^5) \right] = \\ &= \partial A \left\{ s - \frac{s^3}{12} \left[\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \cdot \frac{1}{\rho}}{\partial\alpha} \right)^2 - \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \sin 2\alpha \right)}{\partial\alpha} \right] + (s^4) \right\}. \end{aligned}$$

Кад се пак $\frac{1}{\rho}$ представи у облику

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \cos 2\alpha,$$

онда ћемо имати

$$\frac{2}{\rho^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right)^2 + \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{N^2} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)^2 \cos^2 2\alpha$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x} \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)^2 \sin^2 2\alpha$$

$$\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \sin 2x \right)}{\partial x} = \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{N^2} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)^2 \cos^2 2\alpha - \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)^2 \sin^2 2\alpha;$$

због тога је

$$\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \sin 2x \right)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)^2 = \frac{2}{MN} = \frac{2}{R^2}.$$

Према томе, с тачношћу чланова трећег степена закључно, излази, да је

$$\partial \sigma = \partial A \left(s - \frac{s^3}{6R^2} \right) \quad \text{и} \quad \sigma = BB_1 = (A_1 - A) \left(s - \frac{s^3}{6R^2} \right);$$

али ће исто тако и на сфери радиуса $R = \sqrt{MN}$ бити

$$\sigma' = B'B'_1 = (A_1 - A) R \sin \frac{s}{R} = (A' - A) \left(s - \frac{s^3}{6R^2} \right);$$

према томе је $\sigma = \sigma'$.

На тај начин, да би се површина могла са савршеном тачности да развије на сферној, средњи радиус кривине \sqrt{MN} треба да остане непромењен у свима њеним тачкама.

16. Примена на Земљин елипсоид.

Ово, што смо напред доказали, јако олакшава решење некојих геодетских питања, јер допушта, да се представи извесан мали део елипсоидне Земљине површине у таквом облику, као кад би он, са свима линијама на њему, био развијен на сфери радиуса $R = \sqrt{NM}$, при чему врло мале промене у дужинама линија треба још знатно више да се смање усљед тога, што се сама та површина, са малом спљоштености

$$c = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{294} \quad \text{и} \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 2c = \frac{1}{147} \quad (\text{приближно}), \text{ мало}$$

разликује од сферне. Остаје само, да се још разјасни, какав се радиус s кружне просторије може већ сматрати за тако мали, да напред споменуте промене дужина никако не премашају оне грешке са којима су скопчана сама мерења дужина; у глави пак IV. ми ћемо видети, да тачност тих мерења достиже до $\frac{1}{500000}$ па чак и до $\frac{1}{1000000}$ дела мерене дужине.

Грешка, коју ћемо ми учинити у дужини σ , узимајући за њу приближну величину

$$\sigma = (A' - A) \left(s - \frac{s^3}{6R^2} \right)$$

са кривином

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{MN}} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{a\sqrt{1 - e^2}},$$

која одговара ширини φ централне тачке, разуме се, да неће премашити ону промену у σ , која би произашла због замене кривине $\frac{1}{R}$ њеним крајњим вредностима, које одговарају крајњим ширинама расматране просторије, а наиме $\varphi - \Delta\varphi$ и $\varphi + \Delta\varphi$, где је $\Delta\varphi = \frac{s}{M}$. А пошто се диференцирањем $lg \sigma$ добива

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = -\frac{s^2}{6} \cdot \frac{2}{R} \Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{e^2 s^2 \sin 2\varphi}{3R a \sqrt{1 - e^2}} \Delta\varphi = \mp \frac{e^2 s^3 \cdot \sin 2\varphi}{3RM a \sqrt{1 - e^2}}$$

и пошто се, због маленкости e^2 , може узети, да је у том изразу $R = M = a$ и $\sqrt{1 - e^2} = 1$, то ће релативна грешка у дужини σ увек бити мања од

$$\frac{e^2}{3} \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^3 = \frac{1}{440} \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^3.$$

Према томе она ће бити мања од $\frac{1}{10,000,000}$ за $s = \frac{a}{30} = 200$ врста.

На тај начин, развијање елипсоидне Земљине површине на сфери може бити примљено, без сваке осетне промене дужина, на просторији од 400 врста у пречнику и више. Као природна последица тога излази, очевидно, да ће угли у разним фигурама бити такође сачувани.

У свакој тачци Земљиног елипсоида, азимут α вертикалне равнине, која пролази и кроз другу тачку, треба да се рачуна, — као што је то раније речено, — од главнога пресека са најмањим радиусом M кривине, т.ј. од меридијанског. Тај се азимут зове *астрономски*, зато што се одређује из астрономских посматрања на даној тачци; азимут пак A најкраће линије, која спаја ту тачку са другом, зове се *геодешки*. Врло мала разлика између једнога и другог добиће се на основу општега њеног израза (С.), са довољном тачности, овако:

$$\alpha - A = \frac{s^2}{12\varphi} \cdot \frac{N-M}{MN} \cdot \sin 2\alpha = \frac{e^2}{12} \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin 2\alpha \quad \dots \quad (C')$$

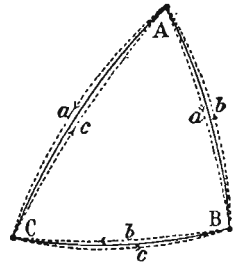
При $s = 400$ врста, т.ј. за најудаљеније тачке допуштене просторије, она не превазилази $\frac{1}{400,000} = 0''5$; при растојањима пак s , мањим од 100 врста, она постаје сасвим неосетна.

ГЛАВА II.

СРАЧУНАВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИСКЕ МРЕЖЕ.

17. Сфероидни троугли.

Замислимо, да су на некој тачци А идеалне, елипсоидне Земљине површине измерени угли између вертикалних равнина, које пролазе и кроз друге тачке В и С (сл. 8.) на тој истој површини и које нису далеко једна од друге, а затим, да су и на тим тачкама измерени слични угли. Пошто се нормални пресеци AaB и AaC у тачци А разликују од обрнатних такође нормалних пресека AbB и AcC у тачкама В и С, то ће се у свима елементима *сфероидног троугла* ABC појавити непријатна двојност, која у неколико замршује његово решење, када су му стране доста дугачке. Али се та незгода одстрањује увођењем помоћних геодетских линија AB , AC и BC и одговарајућим претварањем измерених углова на А, В и С у уображене угле између геодетских линија помоћу формуле (C') из чл. 16.



Сл. 8.

С друге стране, та околност, што су растојања међу тачкама, које се непосредно посматрају једна са друге, увек врло мала у сравњењу са радиусима кривина M и N елипсоидне Земљине површине, — допушта нам, да пренесемо сваки сфероидни троугао ABC на сферу радиуса $R = \sqrt{MN}$ без икакве осетне промене његових углова и страна. А пошто се геодетске линије AB , AC и BC , као најкраће на површини, претварају при томе у лукове великих кругова, то се и цело решење његово своди на просто решење сфернога троугла ABC са тим истим углима А, В и С и са истим дужинама страна a , b и c , које леже наспрам тих углова.

На тај начин, за срачунавање дужине b по даним: a , А и В, ми ћемо имати просту формулу:

$$\sin \frac{b}{R} = \sin \frac{a}{R} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$$

или пак ову:

$$b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A} - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6} \frac{b^3}{R^2} = a \frac{\sin B}{\sin A} \left(1 - \frac{a^2}{6R^2} + \frac{b^2}{6R^2} \right), \quad \dots \quad (D.)$$

која се добива развијањем $\sin \frac{b}{R}$ и $\sin \frac{a}{R}$ у ред и која је довољно тачна чак и за дужине a и b до 400 врста, јер занемарени у њој чланови петог степена $\left(\frac{1}{120} \frac{a^5}{R^4} \text{ и } \frac{1}{120} \frac{b^5}{R^4} \right)$ чине тада величину мању од $\frac{1}{6000000}$ дела самих дужина a и b .

Још би се згодније могао употребити толико исто тачни израз за lgb , при чему би чланови за додавање ка $lga \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$ (које немачки геодети називају *адишамениши*) представљали познате корекције логаритама синуса угла $\frac{a}{R}$ и $\frac{b}{R}$. Али се геодетски троугли најпростије решавају на основу Лежендрове теореме, као што ћемо сад видети.

18. Лежендрова теорема.

Ако се уобрази раван троугао $A'B'C'$ са шаквим истим странама a , b и c , какве су и у малом сферном троуглу ABC , онда ће сваки угао првог биши мањи од одговарајућег му у другоме за $\frac{1}{3}$ сферног сувишка (ексцеса) $\omega = (A + B + C) - 180^\circ$.

Ова је теорема строго тачна тек до малих величина шрећега сшечена закључно. А пошто на основу ње треба да буде

$$b = a \cdot \frac{\sin(B - \frac{1}{3}\omega)}{\sin(A - \frac{1}{3}\omega)}, \dots \dots \dots (D')$$

то је за доказ њен довољно показати идентичност овога израза са изразом (D.). И заиста, кад се (D') развије у ред по степенима мале величине ω другог степена, онда се за њу (ω) (као површине малог сферног троугла) може узети приближни израз

$$\omega = \frac{ab}{2R^2} \sin C = \frac{ab}{2R^2} \sin(A + B)$$

па преобразовати формулу (D') у (D.) на овај начин:

$$\begin{aligned} b &= a \cdot \frac{\sin B - \cos B \cdot \frac{\omega}{3}}{\sin A - \cos A \cdot \frac{\omega}{3}} = a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 - \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \right] = \\ &= a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 - \frac{ab}{6R^2} \sin(A + B) \frac{\sin(A - B)}{\sin A \cdot \sin B} \right] = a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 - \frac{ab}{6R^2} \cdot \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cdot \sin B} \right] = \\ &= a \frac{\sin B}{\sin A} \left(1 - \frac{a^2}{6R^2} + \frac{b^2}{6R^2} \right). \end{aligned}$$

Према томе, с тачношћу не мањом од напред речене, сви се геодетски троугли са странама до 400 врста (тј. како непосредно измерени тако и они који су замишљено састављени, спајањем врло удаљених тачака тригонометриске мреже) могу решавати на основу Лежендрове теореме по овим најпростијим формулама:

Кад су даши a , A и B

$$\left. \begin{aligned} 1.) \quad \omega'' &= \frac{a^2}{2MN \sin 1''} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \sin(A + B), & 2.) \quad C &= 180^\circ + \omega - (A + B), \\ 3.) \quad b &= a \cdot \frac{\sin(B - \frac{\omega}{3})}{\sin(A - \frac{\omega}{3})}, & 4.) \quad c &= a \cdot \frac{\sin(C - \frac{\omega}{3})}{\sin(A - \frac{\omega}{3})} \end{aligned} \right\} (E.)$$

Када су даше a, b и C

$$\left. \begin{array}{l} 1.) \omega'' = \frac{ab}{2MN \sin 1''} \cdot \sin C, \\ 2.) \frac{A+B}{2} = 90^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{C}{2}, \\ 3.) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \left(C - \frac{\omega}{3} \right) \\ 4.) c = a \cdot \frac{\sin \left(C - \frac{\omega}{3} \right)}{\sin \left(A - \frac{\omega}{3} \right)}, \end{array} \right\} (E')$$

19. Корекциони чланови за Лежандрову теорему.

Тачност ће се Лежандрове теореме изразити како треба, ако за њу изведемо корекционе чланове вишег степена.

Кад узмемо, ради упрошћења писања, радиус сфере $R = \sqrt{MN}$ за јединицу и кад ради скраћења означимо:

$$a + b + c = 2p, \quad -a + b + c = 2p_1, \quad a - b + c = 2p_2, \quad a + b - c = 2p_3,$$

па узмемо ове формуле:

за сферни троугао ABC

за равни троугао A'B'C'

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_2 \cdot \sin p_3}{\sin b \cdot \sin c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_1}{\sin b \cdot \sin c}}, \quad \sin \frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{p_2 \cdot p_3}{bc}}, \quad \cos \frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{p \cdot p_1}{bc}},$$

а помоћу њих ћемо добити:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A-A'}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A'}{2} - \sin \frac{A'}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{pp_1p_2p_3}}{bc} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sin p_2 \cdot \sin p_3}{p_2 \cdot p_3}} - \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_1}{p \cdot p_1}} \right) \cdot \sqrt{\frac{bc}{\sin b \cdot \sin c}}. \end{aligned}$$

Кад се сад развију синуси малих лукова p, p_1, p_2, p_3, b и c у редове до 5. степена закључно, при чему ће уопште изаћи:

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440},$$

и, кад се означи још површина равнога троугла A'B'C' са Δ , онда ћемо имати, да је

$$\sin \frac{A-A'}{2} = \frac{\Delta}{bc} \left(\frac{p^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}{12} + \frac{p_2^2 p_3^2 - p^2 p_1^2}{144} - \frac{p^4 + p_1^4 - p_2^4 - p_3^4}{1440} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{12} \right);$$

али је

$$p^2 - p_2^2 + p_1^2 - p_3^2 = (p - p_2)(p + p_2) + (p_1 - p_3)(p_1 + p_3) = b(a + c) + (c - a)b = 2bc,$$

$$p_2^2 p_3^2 - p^2 p_1^2 = (p_2 p_3 - p p_1)(p_2 p_3 + p p_1) =$$

$$= \frac{1}{16} [2a^2 - (b - c)^2 - (b + c)^2] [(b + c)^2 - (b - c)^2] = \frac{cb}{2} (a^2 - b^2 - c^2),$$

$$p^4 - p_2^4 + p_1^4 - p_3^4 = (p^2 - p_2^2)(p^2 + p_2^2) + (p_1^2 - p_3^2)(p_1^2 + p_3^2) = bc(3a^2 + b^2 + c^2);$$

због тога ће бити

$$\sin \frac{A-A'}{2} = \frac{\Delta}{6} \left(1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{48} - \frac{3a^2+b^2+c^2}{240} \right) \left(1 + \frac{b^2+c^2}{12} \right) = \frac{\Delta}{6} \left(1 + \frac{a^2+7b^2+7c^2}{120} \right).$$

Лако је видети, да ће се сличне величине за $\sin \frac{B-B'}{2}$ и за $\sin \frac{C-C'}{2}$ добити већ одавде, простом пермутацијом слова a , b и c , а пошто су саме разлике $(A-A')$, $(B-B')$ и $(C-C')$ мале величине другог степена, то излази просто:

$$A - A' = \frac{\Delta}{3} \left(1 + \frac{a^2+7b^2+7c^2}{120} \right)$$

$$B - B' = \frac{\Delta}{3} \left(1 + \frac{b^2+7a^2+7c^2}{120} \right)$$

$$C - C' = \frac{\Delta}{3} \left(1 + \frac{c^2+7a^2+7b^2}{120} \right).$$

Кад се саберу ове разлике, онда ће се сферни ексцес ω добити у тачнијем облику него пређе; а затим, кад се он стави уместо површине Δ , онда ћемо дефинитивно доћи до оваквих израза, који представљају Лежендрову теорему са корекционим члановима до 4. степена:

$$A + B + C - 180^\circ = \omega = \Delta \left(1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{24} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} A - A' &= \frac{\omega}{3} \left(1 + \frac{a^2+7b^2+7c^2}{120} \right) \left(1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{24} \right) = \frac{\omega}{3} \left(1 + \frac{b^2+c^2-2a^2}{60} \right) \\ B - B' &= \frac{\omega}{3} \left(1 + \frac{a^2+c^2-2b^2}{60} \right) \\ C - C' &= \frac{\omega}{3} \left(1 + \frac{a^2+b^2-2c^2}{60} \right) \end{aligned} \right\} \cdot (F.)$$

Да видимо сада, при каквом ће облику троугла ABC корекциони члан за угао A

$$\alpha = \frac{\omega}{180} (b^2 + c^2 - 2a^2)$$

изаћи максималан. По симетричности његовој у односу према странама b и c ми закључујемо, да ће то бити онда, када је $b=c$; а тада ће бити:

$$b = c = \frac{a}{2} \cdot \sec B, \quad b^2 + c^2 - 2a^2 = \frac{a^2}{2} (tg^2 B - 3), \quad \omega = \frac{a^2}{4} tg B \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{a^4}{180 \cdot 8} (tg^3 B - 3 tg B).$$

Према томе се *maximum* α добија, кад је $tg B = 1$, тј. кад је $B = C = 45^\circ$ а $A = 90^\circ$, и тада наине излази равно $-\frac{a^4}{180 \cdot 4}$. Кад је $a = \frac{1}{15}$ (400 врста) то чини свега $\frac{1}{36\,000\,000} = \frac{1''}{180}$; те ће таква бити и релативна грешка у страни a , која ће произаћи, ако се занемари тај корекциони члан.

20. Највероватније поправке углова мреже.

У триангулацијама, како првокласним, тако и другокласним, узима се за неизоставно правило, да се мере сва три угла у сваком троуглу. То се врши како ради повећања тачности триангулације, тако и ради контроле свију мерења.

Ради нахођења највероватнијих величина x_1, x_2, \dots, x_i , — поступајући по обичним правилима *мешоде најмањих квадрата*, — помножимо сваку од једначина (2.) са кореном квадратним из одговарајуће му тежине, при чему ће они добити облик:

$$\sqrt{g_1} \cdot x_1 = 0, \sqrt{g_2} \cdot x_2 = 0, \dots, \sqrt{g_i} \cdot x_i = 0, \dots \quad (5.)$$

па ставимо овде s ма каквих поправака x_1, x_2, \dots, x_s , изражених из једначина (4.) у линеарној функцији свих осталих $(i - s)$. На тај ћемо начин добити i основних једначина (5.) за одређивање тих $(i - s)$ поправака; када се пак оне нађу, по познатим за то правилима, онда ће се добити потпуно одређене величине и за x_1, x_2, \dots, x_s . Средња грешка ε таквога посматрања, чија је тежина била узета за јединицу тежина g_1, g_2, \dots, g_i , добиће се најзад из суме квадрата одступања од нуле оних која су остала у овима једначинама (5.), тј. суме:

$$\Sigma gx^2 = g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + \dots + g_i x_i^2 \dots \quad (6.)$$

на тај начин је

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma gx^2}{i - (i - s)}} = \sqrt{\frac{\Sigma gx^2}{s}} \dots \quad (7.)$$

Ипак се овакво решење постављенога питања не може сматрати за погодно при обради триангулација услед тога, што је код њих број s неопходних геометриских услова увек много већи од броја i тражених поправака, тако да, кад би се поступало по напред реченоме, онда би требало састављати и на крају крајева решавати врло велики број $(i - s)$ *нормалних* једначина са $(i - s)$ непознатих. Због тога се у триангулацијама увек примењује друга метода, коју ћемо даље изложити, која доводи до решења само s нормалних једначина и која допушта, да се рачун у свима случајима изводи по једном и истом формулару.

Пошто се задаћа састоји у томе, да се нађу такве поправке x_1, x_2, \dots, x_i , које би, задовољавајући услове (4.), давале за суму (6.) по могућству што мању величину, то потпуни диференцијал те суме по свима i променљивим x_1, x_2, \dots, x_i треба да буде једнак са нулом, тј. да

$$g_1 x_1 \cdot dx_1 + g_2 x_2 \cdot dx_2 + \dots + g_i x_i \cdot dx_i = 0; \dots \quad (8.)$$

неопходни пак услови (4.) дају:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot dx_1 + a_2 \cdot dx_2 + \dots + a_i \cdot dx_i &= 0 \\ b_1 \cdot dx_1 + b_2 \cdot dx_2 + \dots + b_i \cdot dx_i &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (9.)$$

Уместо тога, што бисмо одатле одређивали s неких диференцијала у функцији од осталих, стављали их затим у једначину (8.) па изједначавали са нулом коефицијенте код осталих $(i - s)$ диференцијала (што се ниуколико неби разликовало од пређашње методе решења), — ми ћемо помножити једначине (9.) са

21. Најпростији специјални случаји.

1.) Нека су три угла сфернога троугла, чији је сферни ексцес раван ω , измерени са средњим грешкама: ε_1 , ε_2 , и ε_3 , или, што је исто, са тежинама: $g_1 = \frac{1}{\varepsilon_1^2}$, $g_2 = \frac{1}{\varepsilon_2^2}$ и $g_3 = \frac{1}{\varepsilon_3^2}$, па су при томе за угле добивене такве величине:

$$N_1, N_2 \text{ и } N_3, \text{ да излази } N_1 + N_2 + N_3 = (180^\circ + \omega) = n.$$

Неопходни услов, који треба да задовоље највероватније поправке: x_1 , x_2 и x_3 углова, треба да буде:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -n,$$

а пошто је у њему $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, то ће се помоћна корелата k добити, на основу опште формуле (11.), у оваквом облику:

$$(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) k = -n;$$

изрази пак (10.) даће:

$$x_1 = -n \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}, \quad x_2 = -n \cdot \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}, \quad x_3 = -n \cdot \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2},$$

тј. *произашла грешка n у суми углова треба да се расподели на све угле троугла пропорционално са квадрашима њихових средњих грешака*; према томе, ако су сва три угла измерени са подједнаком сигурношћу, онда је треба расподелити подједнако.

Кад би се поступило по првој методи, онда бисмо имали: $x_3 = -n - x_1 - x_2$ те бисмо за одређивање x_1 и x_2 добили три једначине:

$$\sqrt{g_1} \cdot x_1 = 0, \quad \sqrt{g_2} \cdot x_2 = 0, \quad \sqrt{g_3} \cdot x_1 + \sqrt{g_3} \cdot x_2 = -\sqrt{g_3} \cdot n,$$

из којих би се по методи најмањих квадрата саставиле две нормалне једначине:

$$(g_1 + g_3) x_1 + g_3 x_2 = -g_3 n \text{ и } g_3 x_1 + (g_2 + g_3) x_2 = -g_3 n;$$

одатле пак:

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{g_1} : \frac{1}{g_2} = \varepsilon_1^2 : \varepsilon_2^2,$$

а то би довело дефинитивно до оних истих израза за x_1 , x_2 и x_3 , које смо напред добили на несравњено бржи и простији начин.

Да одредимо сад по формули (12.) средњу грешку E_1 поправљеног угла $X_1 = N_1 + x_1$. Пошто је у том случају $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 0$, $(aa) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ и $(al) = \varepsilon_1^2$, то ће се, на основу (14.), за множитељ q добити једначина:

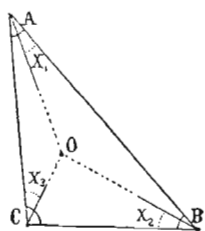
$$(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) q = -\varepsilon_1^2,$$

а затим излази:

$$E_1^2 = \left(\frac{LL}{q} \right) = \varepsilon_1^2 \cdot (1 - q)^2 + \varepsilon_2^2 q^2 + \varepsilon_3^2 q^2 = \varepsilon_1^2 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \right).$$

У случају пак подједнако сигурних посматрања добиће се, да је $E_1^2 = \frac{2}{3} \varepsilon^2$, тј. тежина се поправљеног угла, у сравњењу са тежином измереног, повећава сразмерно односу 3:2, као што то очевидно и треба да буде.

2.) Ако су на трима тачкама А, В и С (сл. 9.) измерени угли: $X_1 = \sphericalangle \text{BAO}$, $X_2 = \sphericalangle \text{CBO}$ и $X_3 = \sphericalangle \text{ACO}$ ради одређивања четврте тачке О, онда један од тих углова постаје већ сувишан. У том случају, кад означимо угле самога сферног троугла са А, В и С а стране АО, ВО и СО, изражене у угловној мери, са \widehat{AO} , \widehat{BO} и \widehat{CO} , добићемо три односа:



Сл. 9.

$$\frac{\sin \widehat{AO}}{\sin \widehat{BO}} = \frac{\sin (B - X_2)}{\sin X_1}, \quad \frac{\sin \widehat{BO}}{\sin \widehat{CO}} = \frac{\sin (C - X_3)}{\sin X_2}, \quad \frac{\sin \widehat{CO}}{\sin \widehat{AO}} = \frac{\sin (A - X_1)}{\sin X_3}$$

а производ њихов даће следећи неопходни услов, коме треба строго да одговоре угли образоване фигуре:

$$\frac{\sin (A - X_1) \cdot \sin (B - X_2) \cdot \sin (C - X_3)}{\sin X_1 \cdot \sin X_2 \cdot \sin X_3} = 1$$

или $f = \lg . \text{ бројитеља} - \lg . \text{ именитеља} = 0$.

Да би се разјаснило, како се наиме треба користити овим неопходним условом при бројним срачунавањима, претпоставићемо, да је сферни ексцес троугла ABC раван $3''$ и да су на тачкама А, В и С били добивени мерењем једнаке тачности ови угли:

A = 37°18'52"	X ₁ = 19°45' 4"
B = 47 32 14	X ₂ = 26 21 30
C = 95 8 48.5	X ₃ = 37 44 37

$$A + B + C = 179 59 54.5 = (180 + \omega) - 9''0.$$

Кад се означе њихове тражене поправке респективно са $\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ и x_3 , онда ћемо добити први неопходни услов за њих, као и у 1. примеру, у облику:

$$\alpha + \beta + \gamma = + 9''0 \quad \dots \quad (a.)$$

Кад се обратимо затим бројној контроли услова $f = 0$ и кад препишемо логаритме (са 6 децимала) синуса углова, који у тај услов улазе, онда ћемо дописати са стране још и табличне промене логаритама, које одговарају променама самих углова за $1''$, јер те промене и јесу они наиме диференцијални коефицијенти $\frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2}$ и т. д. који улазе у развијање функције f по степенима малих прираштаја x_1, x_2 , и т. д. На тај ћемо начин наћи:

	промена 5. децим.		промена 5. децим.
$\lg \sin (A - X_1) = 9.47966.2$	+ 0.67	$\lg \sin X_1 = 9.52883.3$	+ 0.59
$\lg \sin (B - X_2) = 9.55784.5$	+ 0.54	$\lg \sin X_2 = 9.64736.7$	+ 0.42
$\lg \sin (C - X_3) = 9.92556.1$	+ 0.13	$\lg \sin X_3 = 9.78684.3$	+ 0.27
$\lg . \text{ бројитеља} = 8.96306.8$		$\lg \text{ именит.} = 8.96304.3$	

$$f = \lg \text{ бројит.} - \lg \text{ именит.} = + 2.5$$

Према томе, други неопходни услов за тражене поправке (пошто се оне изражавају у секундама) добиће се непосредно, у линеарном облику, овако:

$$+ 0.67(\alpha - x_1) + 0.54(\beta - x_2) + 0.13(\gamma - x_3) - 0.59x_1 - 0.42x_2 - 0.27x_3 = -2''.5$$

или $+ 0.67\alpha + 0.54\beta + 0.13\gamma - 1.26x_1 - 0.96x_2 - 0.40x_3 = -2''.5 \dots (b.)$

За одређивање двеју корелата k_1 и k_2 , сад се, на основу формуле (11.), састављају ове величине и једначине:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1; & \quad (aa) = 3 \\ (ab) = + 0.67 + 0.54 + 0.13 = + 1.34; & \quad (bb) = + 3.43 \\ \left. \begin{aligned} + 3.00 k_1 + 1.34 k_2 = + 9.0 \\ + 1.34 k_1 + 3.43 k_2 = - 2.5 \end{aligned} \right\} & \text{ одакле } k_1 = + 0.43, \quad k_2 = - 2.30 \end{aligned}$$

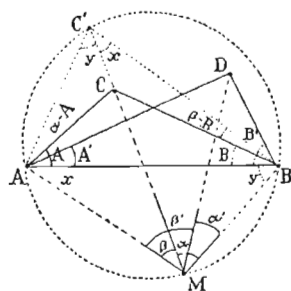
са овим се пак величинама по формулама (10.) добијају:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= k_1 + 0.67 k_2 = + 2''.5 & \alpha^2 &= 6 \\ \beta &= k_1 + 0.54 k_2 = + 2.8 & \beta^2 &= 8 \\ \gamma &= k_1 + 0.13 k_2 = + 3.7 & \gamma^2 &= 14 \\ x_1 &= - 1.26 k_2 = + 2.9 & x_1^2 &= 8 \\ x_2 &= - 0.96 k_2 = + 2.2 & x_2^2 &= 5 \\ x_3 &= - 0.40 k_2 = + 0.9 & x_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Sigma = 42$$

тако, да средња грешка ϵ мерења углова излази по формули (7.) равна $\sqrt{\frac{42}{2}} = + 4''.6$; али је та њена величина, разуме се, сувише несигурна, јер се заснива само на два откривеним случајним грешкама: $- 9''.0$ и $+ 2''.5$.

3.) Дешава се каткад случај, да се одреди положај тачке M у односу према неколико даних A, B, C, D и т.д. по углима измереним само на њој самој. Такав се случај ипак не дешава на великим и тачним триангулацијама већ само на нижим, споредним тригонометрским радовима; стога ћемо при његовом расматрању, ради упрошћења, занемарити сферне ексцесе троуглова и осталих фигура, тј. другим речима, сматраћемо Земљину површину за равнину*)

Нека су у тачци M узети правци само на три дане тачке A, B и C , тј. нека су измерени угли: $\sphericalangle AMC = \beta$ и $\sphericalangle CMB = \alpha$ (сл. 10.). Кад уобразимо круг, који пролази кроз A, B и M и који пресеца правац MC у тачци C' , онда ћемо код те тачке добити угле: $\sphericalangle BC'M = \sphericalangle BAM = x$ и $\sphericalangle AC'M = \sphericalangle ABM = y$ а из фигуре $ABCC'$ наћи ћемо ове односе:



Сл. 10.

$$\frac{CB}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AC} \cdot \frac{AC}{CB} = 1 = \frac{\sin x}{\sin(\beta - B)} \cdot \frac{\sin(z - A)}{\sin y} \cdot \frac{\sin B}{\sin A},$$

одакле је

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A \cdot \sin(\beta - B)}{\sin B \cdot \sin(z - A)},$$

а пошто постоји још и то, да је

$$x + y = 180^\circ - (\alpha + \beta),$$

то се угли x и y лако одређују и дају најобичније решење познате Потенотове задаће

*) Површини од 1000 кв. врста одговара сферни ексцес око $6''$. Сразмерно томе и решава се питање, при каквој се наиме тачности мерења углова може допустити, да се занемари сферни ексцес фигуре, која се одређује.

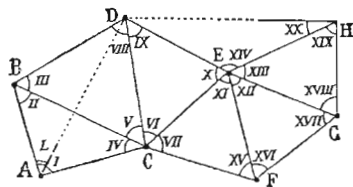
Али, ако са тачке М буде узет још и правац на тачку D, тј. ако се измери и угао $BMD = \alpha'$, онда ће се за однос $\frac{\sin x}{\sin y}$ добити и други израз, сличан првоме, па према томе појавиће се неопходни услов оваквог облика:

$$\frac{\sin A \cdot \sin(\beta - B)}{\sin B \cdot \sin(\alpha - A)} = \frac{\sin A' \cdot \sin(\beta' - B')}{\sin B' \cdot \sin(\alpha' - A')}, \text{ где је } \beta' = (\alpha + \beta) - \alpha'.$$

Слични ће се неопходни услови нагомилавати затим са сваком даљом визуром на нове тачке E, F и т.д. па стога, пре него што се приступи срачунавању углова x и y , треба претходно наћи највероватније поправке измерених углова $\alpha, \beta, \alpha', \dots$ који ће строго задовољити све те услове. Поступак при бројним срачунавањима са тим условима треба да буде онакав, како је то објашњено у 2. примеру.

22. Разни облици неопходних услова у мрежи.

Да расматримо сада разне облике геометриских услова, с којима ћемо имати посла у тригонометрским мрежама. Ради упрошћења писања, ми ћемо означавати измерене угле у мрежи обичним цифрама, њихове поправке — исто таквим цифрама у загради, истините пак или највероватније величине тих углова — цифрама римским, тако да ће са таквим ознакама увек бити:



Сл. 11.

оваквог облика:

$$I = 1 + (1), \quad II = 2 + (2) \text{ и т.д.}$$

Најпростији је облик тригонометриске мреже непрекидни ланац троуглова: ABC, BCD, CDE и т.д. (сл. 11.). Пошто су у свакоме од њих измерени сва три угла, то сваки од њих даје неопходни услов

$$I + II + IV = 180^\circ + \omega_1 \dots \dots \dots (a).$$

Може се такође да изрази неопходни однос и међу унутрашњим углима сфернога четвороугла ABCD, а наиме овако:

$$I + (II + III) + VIII + (IV + V) = 360^\circ + \Omega, \dots \dots \dots (a')$$

где је $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ његов сферни ексцес или површина; али, ако су већ узети услови за суму углова троуглова ABC, и BCD, из којих је он састављен, онда се услов (a') јавља као проста посљедица тих узетих.

Сви услови сличнога облика, као (a) и (a'), зову се *угловни*. К њима треба урачунати и т. зв. *хоризонталне* услове, који се појављују у оним случајима, када је на једној и истој тачци измерено више углова него што је неопходно потребно; на пример, ако су на тачци E измерени свих 5 углова, око ње, онда треба да буде:

$$X + XI + XII + XIII + XIV = 360^\circ \dots \dots \dots (a'')$$

У врло пространим се тригонометрским мрежама мере два па и више базиса на разним њеним партијама. Тада дужине њихове треба да су у сагласности међусобној. Нека, на пример, у ланцу ABCDEFGH (са. 11.) постоје два базиса $AB = a_1$ и $GH = a_2$. Кад се из троугла ABC одреди страна BC по a_1 , затим из троугла BCD — страна CD по BC и. т. д. и кад се измерени сферни угли I, III,

IV, VIII и т.д., — смањени (по Лежандровој теореме) за $\frac{1}{3}$ сферног ексцеса, — означе са I', III', IV', VIII' и т.д., онда ћемо за базис a_2 добити овај израз:

$$a_2 = a_1 \frac{\sin I'}{\sin IV'} \cdot \frac{\sin III'}{\sin VIII'} \cdot \frac{\sin IX'}{\sin X'} \cdot \dots \dots \dots (b.)$$

Ето тај услов и треба да задовоље измерени угли мреже, тј. да срачуната страна a_2 буде иста што и измерена. Овакви се услови зову *базисни*. Они се исто тако појављују и при спајању двеју мрежа међу собом, при чему се нека од страна јавља као заједничка код обеју.

Када је низ троуглова у мрежи наслоњен један на другог тако, да полазећи рачунски са једне стране каквог троугла и пролазећи тако кроз све њих, можемо да се вратимо на исту, као на пример у низу троуглова: DEC, CEF, FEG, GEN и HED (сл. 11.), онда нас производ поступних односа DE : CE, CE : EF, EF : GE, GE : HE и HE : DE доводи до оваквог неопходног услова за углове:*)

$$\frac{\sin VI'}{\sin IX'} \cdot \frac{\sin XV'}{\sin VII'} \cdot \frac{\sin XVII'}{\sin XVI'} \cdot \frac{\sin XIX'}{\sin XVIII'} \cdot \frac{\sin (XIV' + XX')}{\sin XX'} = 1 \dots \dots (c.)$$

Овакви услови, који престављају само специјални случај базисних, зову се *услови сшранâ*. Они се најчешће јављају у најпростијем облику, који се састоји из производа од само три односа синуса углава, када је на име у два суседна троугла мреже измерен још и угао, којим се одређује правац дијогонале образованог из њих четвороугла. На пример, ако је на тачци А (сл. 11.) измерен и угао $BAD = L$, онда се добива

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = 1 = \frac{\sin L'}{\sin (II' + III')} \cdot \frac{\sin (IV' + V')}{\sin (I - L')} \cdot \frac{\sin III'}{\sin V'} \dots \dots \dots (c')$$

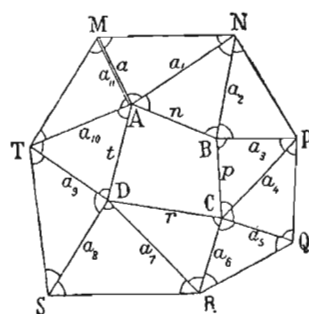
У прошлом смо члану (2. посебни случај) већ имали слични неопходни услов.

Када се непрекидни ланац троуглова AMN, ANB, BNP, ... TAM (сл. 12.) затвара, образујући унутра полигонску просторију ABC, ... A, непопуњену триангулацијом, онда се пређашњим условима углава и страна, који у њему постаје, придружују још три, и то, један такође *угловни*, који изражава суму унутрашњих углава полигона ABCD ... A, а друга два потпуно засебног облика, који изражавају неопходно заклапање полигона и који се зову *полигонски*.

У случају четвороугаоног унутрашњег пространства ABCD са странама $AB = n$, $BC = p$, $CD = r$, $DA = t$ и углима А, В, С и D, такви се услови још и доста лако добивају (на основу Лежандрове теореме) из израза дијAGONАЛА AC и BD те излазе на име овакви:

$$n^2 + p^2 - 2np \cos B' = r^2 + t^2 - 2rt \cos D'$$

$$p^2 + r^2 - 2pr \cos C' = t^2 + n^2 - 2tn \cos A',$$



Сл. 12.

*) Пошто је у два суседна троугла, због маленкости њихових страна, свагда допуштено, да се средњи радиус кривине $R = \sqrt{MN}$ сматра за једнак, то се може узети низ поступаних односа синуса страна DE, CE, FE и т. д. изражених у угловној мери. Онда ће се услов (c.) добити у облику:

$$\frac{\sin IV}{\sin IX} \cdot \frac{\sin XV}{\sin VII} \cdot \frac{\sin XVII}{\sin XVI} \cdot \frac{\sin XIX}{\sin XVIII} \cdot \frac{\sin (XIV + XX - \omega)}{\sin XX} = 1,$$

при чему ће угли VI, IX, XV, VII, и т. д. бити сферни а не равни.

при чему како стране n, p, r и t , тако и угли A', B', C' и D' треба да буду изражени измереним углима мреже. Али, за сферни полигон, ња великим бројем страна, полигонски услови добивају већ тако комплициран и незгодан облик, да се они сасвим и не узимају у обзир при првобитном рачуну равнања мреже; доцније пак, када се у њој срачунају геодетске ширине и дужине тачака, два ће се услова за заклапање полигона изразити у згоднијем облику тиме, што полазна ширина и дужина почетне тачке треба да буде равна срачунатој ширини и и дужини те исте, као завршне тачке полигона, што ће изискивати поновно поправљање углова мреже.

23. Број услова, независних међусобом.

Лако је видети, да ће од много геометриских услова, које треба да задовоље угли какве сложене тригонометриске мреже, некоји од њих бити само непосредне и неопходне последице других; међутим нахођење највероватнијих поправака углова по правилима чл. 20. претпоставља, да су сви дани услови за углове стварно различити. Због тога треба, да се зна број свих геометриских услова у даној мрежи, независних међу собом, да се не изостави ни један од њих, а тако исто да се непажњом не узме какав и сувишни, који би био само скривена последица раније узетих.

Имајући у виду прво тај случај, када је у мрежи измерен само један базис, претпоставићемо, да мрежа садржи у себи m тачака и да је на свима њима измерено уопште i углова. Пошто у таквој мрежи треба да буде одређен положај $(m - 2)$ тачака у односу према два базисним, и, пошто се свака тачка потпуно одређује са два правца узетих на њу (ма с којих других), т.ј. са два угла триангулације, — то ће неопходни а у исто време и потпуно довољни број углова за сву мрежу бити $2(m - 2)$. Сваки пак сувишно (преко тога броја) измерени угао даће један, какав било, неопходни геометриски услов; стога ће општи број свих, несависних међу собом услова, како угловних тако и страна, бити:

$$s = i - 2(m - 2) = i - 2m + 4 \dots \dots \dots (s.)$$

Колико наиме услова страна треба да буде у том општем броју s , лако је одредити, сабравши број i' свих страна мреже, чији су правци били узети. И заиста, пошто се положај сваке од $(m - 2)$ тачака, у односу према два базисним, потпуно одређује помоћу два правца, који се у њој пресецају, и, пошто је сам базис једна од страна мреже, то је неопходни и потпуно довољни број страна у мрежи раван: $2(m - 2) + 1 = 2m - 3$; свака пак сувишна (преко тог броја) страна даће један услов страна, тако да ће број свих оваквих, независних један од другога, бити:

$$s' = i' - 2m + 3 \dots \dots \dots (s'.)$$

Затим, сви остали независни међу собом услови биће већ угловни (урачунавши у њих и хоризонтне); стога број њихов треба да буде раван:

$$s'' = s - s' = i - i' + 1 \dots \dots \dots (s'')$$

Најзад, ако је у мрежи измерен не један већ n базиса, онда ће број независних један од другогача услова бити, очевидно, $(n - 1)$. Тада ће број свих услова у мрежи изаћи $(s + n - 1)$.

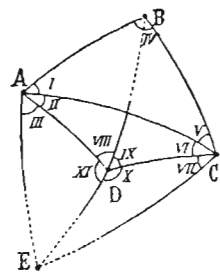
Пример 1. У мрежи ABCDE (сл. 13.), у којој су једноставним линијама показани измерени угли а испрекиданим неизмерени, имаћемо:

$$m = 5, i = 11, i' = 9;$$

стога ћемо по формулама (s) , (s') и (s'') добити:

$$s = 11 - 2 \times 5 + 4 = 5; \quad s' = 9 - 2 \times 5 + 3 = 2;$$

$$s'' = 11 - 9 + 1 = 3;$$



Сл. 13.

угловни	{	$I + IV + V = 180^\circ + \varepsilon_1$
услови.		$II + VI + VIII + IX = 180^\circ + \varepsilon_2$
		$VIII + IX + X + XI = 360^\circ.$

услови	{	$\frac{\sin(I + II) \cdot \sin V \cdot \sin IX}{\sin VIII \cdot \sin I \cdot \sin(V + VI)} = 1$
страна.		$\frac{\sin III \cdot \sin(VI + VII) \cdot \sin X}{\sin IX \cdot \sin(II + III) \cdot \sin VII} = 1.$

Пример 2. У мрежи, која је раније представљена на сл. 12., која се састоји из 11 троуглова, а у којима су измерена сва три угла у свакоме, имаћемо, да је: $m = 11$, $i = 33$ и $i' = 22$; стога ће бити:

$$s = 33 - 2 \times 11 + 4 = 15, \quad s' = 22 - 2 \times 11 + 3 = 3, \quad s'' = 33 - 22 + 1 = 12.$$

При томе ће у број 12 угловних услова ући

$$A + B + C + D = 360^\circ + \Omega,$$

где Ω означава сферни ексцес четвороугла ABCD; један услов страна добиће се из односа страна:

$$\frac{a}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_9}{a_{10}} \cdot \frac{a_{10}}{a} = 1;$$

о облику пак двају полигонских услова, који се такође урачунавају у број $s' = 3$, било је речено раније у чл. 22.

Пример 3. У четвороуглу РТКГ (сл. 16.), у коме су правци свих страна и обеју дијагонала узети са обеју страна, тј. измерено 8 углова од I до VIII, имаћемо, да је: $m = 4$, $i = 8$ и $i' = 6$; стога ће бити: $s = 8 - 2 \times 4 + 4 = 4$; $s' = 6 - 2 \times 4 + 3 = 1$ и $s'' = 8 - 6 + 1 = 3$. При томе за угловне условне једначине могу да се узму изрази сумâ углова ма каква три троугла; сума пак четвртог троугла биће већ неопходна посљедица првих трију, јер су сферни ексцеси ε_1 , ε_2 , ε_3 и ε_4 свих троуглова везани међу собом једначином

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4.$$

Исто се тако за једну условну једначину страна може узети ма која од ове четири:

$$1 = \frac{\sin II \cdot \sin(VIII - VII) \cdot \sin(IV - III)}{\sin III \cdot \sin I \cdot \sin VIII}, \quad 1 = \frac{\sin VIII \cdot \sin(II - I) \cdot \sin(VI - V)}{\sin V \cdot \sin VII \cdot \sin II},$$

$$1 = \frac{\sin VI \cdot \sin(IV - III) \cdot \sin(II - I)}{\sin I \cdot \sin V \cdot \sin IV}, \quad 1 = \frac{\sin IV \cdot \sin(VI - V) \cdot \sin(VIII - VII)}{\sin VII \cdot \sin III \cdot \sin VI}$$

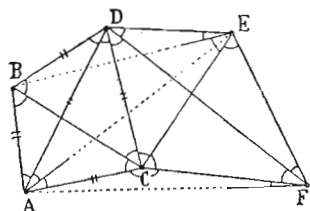
зато што ће све оне дати управо једно и исто при потребном испуњењу свих угловних услова

Пошто се у врло сложеној мрежи јавља много таквих услова, који су у ствари само последица других, то треба бити врло опрезан, те да се у рачун не би увео ни један од услова, који би био идентичан са осталим. Ради тога је најбоље поступати по овоме, врло практичном и простом Беселовом правилу:

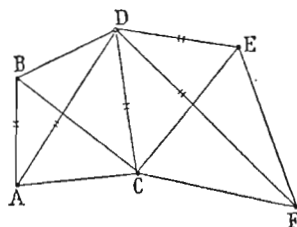
Узмимо на пример, већ довољно сложену мрежу ABCDEF (сл. 14.) са 6 тачака, 20 измерених углова, показаних на слици, и 14 страна, тако да за њу треба да буде по формулама (s.), (s'.) и (s'').):

$$s = 20 - 2 \times 6 + 4 = 12; \quad s' = 14 - 2 \times 6 + 3 = 5 \quad \text{и} \quad s'' = 20 - 14 + 1 = 7.$$

Пошто се једначина страна најпростије добива из четвороугла, у коме се налазе правци свих 6 страна (са дијагоналама заједно), то ћемо најпре исписати све такве четвороугле, који имају један заједнички врх у једној каквој тачки мреже, на пример у А. Кад се тако узме \square ABDE па се избаци једна његова



Сл. 14.



Сл. 14, bis

страна АВ, затим, кад се узме \square ADEC па се избаци његова страна AD, најзад, кад се узме \square AECF па се избаци страна у њену AC; пошто сад код тачке А нема више четвороуглова онда прелазимо на какву другу тачку, на пример В. Кад се сада узме четвороугао BDEC па се избаци његова страна BD, онда већ не можемо добити ни један више четвороугао код В, јер су стране ВА и СА у \square BECA већ раније избачене. Даље, кад пређемо на следећу тачку D, наћи ћемо код ње \square DEFC; али, кад се избаци и његова страна DC, онда већ не можемо добити више ни један четвороугао у тој мрежи, јер нам остају само још три тачке С, Е и F. Овако исписаних 5 четвороугаоника и даће нам 5 услова страна, који никаквим начином не могу бити последица један другог.

За састављање независних међу собом угловних једначина мреже треба поступати на сличан начин са свима њеним троуглима или уопште затвореним фигурама, али састављених само из таквих страна, чији су правци измерени са обеју страна. Кад се у нашој мрежи ABCDEF оставе само такве стране (сл. 14. bis), исписаћемо прво све троугле око тачке А. Кад се узме \triangle ABC па се избаци

његова страна АВ, затим, кад се узме $\triangle ADC$ и избаци страна АД, па пошто код А нема више троуглова, онда прелазимо на другу тачку, например на D. Кад се постепено узму троугли DEF, DCF, DCB и избаце њихове стране DE, DF и DC, онда се код D више не може добити троуглова, јер су стране АД и АВ троугла ABD већ избачене. На нашој ће слици после тога остати само још један $\triangle CEF$, шести по реду. Осим ових шест угловних услова, независних један од другог, треба узети још и седми услов хоризонта на тачци С.

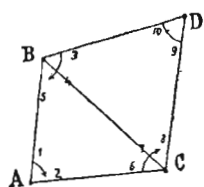
24. Упрощења у рачуну равнања.

У чл. чл. 20. и 21. било је већ изложено, како треба да се изналазе у теориском смислу најбоље поправке измерених углова, које ће испуњавати све геометриске услове дане мреже. На тој теорији засновани *рачун равнања* излази ипак, за опширне и комплициране мреже, да је и врло дуг и врло заморан; међутим њиме се тачност измерених углова врло мало повећава, зато што, када је извршено i мерења углова уместо неопходног броја $(i - s)$, онда се тежина поправљених углова повећава у средњем тек за однос $\frac{i}{i-s}$, који при релативној маленкости броја s скоро никад не надмаша $1\frac{1}{2}$ до 2. Према томе треба увек имати у виду, да се главна циљ рачуна равнања састоји управо не у томе, да се нађу *највероватније* величине за измерене угле ради повећања тачности свих извода из триангулације, већ наиме у томе, да се ти угли *изравнају* тако, да не противурече један другоме. На том се основу могу увек допустити извесна одступања од напред речених теорних правила, ако се само рачун томе упрощује и олакшава.

У опширној тригонометриској мрежи потпуни број s неопходних услова, који везују међу собом тражене поправке углова, бива по некад тако велики, да строго изналажење s корелата из s једначина постаје скоро неизводљиво. То принуђује, да се таква мрежа подели на неколико посебних група па да се сав неопходни рачун равнања изврши за сваку групу посебно; јер је, уопште говорећи, лакше и брже решити n пута $\frac{s}{n}$ једначина са $\frac{s}{n}$ непознатих, него од једном s једначина са s непознатих. Тако је, например, веома комплицирана мрежа, која покрива целу Вел. Британију заједно са Ирском, и која у себи садржи 920 независних условних једначина, била подељена на 21 групу за извршење рачуна равнања; али је и при таквом упрощењу тога рачуна он ипак трајао $2\frac{1}{2}$ године, иако је на њему радило осам извезбаних калкулатора.

Говорећи о рачуну равнања, ми смо досад подразумевали, да су на свакој тачци угли међу разним тачкама, који се са ње виде, измерени независно један од другог. У самој ствари савременим се угломерним инструментима мере управо не угли међу разним тачкама, већ правци на њих, рачунајући их од једнога, ма којег почетног правца, тако да поступајући строго, треба израчунавати највероватније поправке праваца а не углова, јер ови у том случају као разлике праваца престају бити независни један од другог. Изналажење таквих поправака измерених праваца, у ствари се ничим неће разликовати од напред изложенога, тј. ни облик, ни број s разних неопходних геометриских услова неће се притоме изменити; увећаће се, у сравању са пређашњим, само број i самих тражених поправака.

Узмимо за пример само два троугла ABC и BCD (сл. 15.), који су наслоњени један на другога, и да су у њима измерени са подједнаком тачности правци: 1, 2, 3, 9 и 10, који се на свима тачкама А, В, С и D рачунају у једном и истом правцу, како је то стрелицама показано, и који су дали ове величине као суме углова у тим троуглима:



Сл. 15.

$$(2 - 1) + (5 - 4) + (7 - 6) = 180^\circ + \omega_1 + 4''.8$$

$$(4 - 3) + (8 - 7) + (10 - 9) = 180^\circ + \omega_2 - 2''.4$$

где су ω_1 и ω_2 њихови познати сферни ексцеси. Неопходни услови за поправке (1), (2), (3), (9) и (10) тих праваца, затим, две једначине за корелате k_1 и k_2 и најзад, највероватније величине самих поправака — изаћи ће овакви:

$$\begin{array}{l} -(1) + (2) \quad - (4) + (5) - (6) + (7) \quad = -4''.8 \\ \quad - (3) + (4) \quad \quad - (7) + (8) - (9) + (10) = +2.4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6k_1 - 2k_2 = -4''.8 \\ -2k_1 + 6k_2 = +2.4 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} (1) = -k_1 & = +0''.75 & (6) = -k_1 & = +0''.75 \\ (2) = +k_1 & = -0.75 & (7) = +k_1 - k_2 & = -0.90 \\ (3) = & -k_2 = -0.15 & (8) = & +k_2 = +0.15 \\ (4) = -k_1 + k_2 & = +0.90 & (9) = & -k_2 = -0.15 \\ (5) = +k_1 & = -0.75 & (10) = & +k_2 = +0.15 \end{array}$$

На тај ће начин највероватније поправке x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 за угле (2 — 1), (5 — 4), (7 — 6), (4 — 3), (8 — 7) и (10 — 9) бити:

$$x_1 = (2) - (1) = -1''.50, \quad x_2 = (5) - (4) = -1''.65, \quad x_3 = (7) - (6) = -1''.65$$

$$x_4 = (4) - (3) = +1.05, \quad x_5 = (8) - (7) = +1.05, \quad x_6 = (10) - (9) = +0.30$$

кад би пак сви ти угли били измерени непосредно, онда бисмо добили непосредно:

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{4''.8}{3} = -1''.6 \text{ и } x_4 = x_5 = x_6 = +\frac{2''.4}{3} = +0''.8$$

Тај нам пример показује, да у најпростијем ланцу од неколико троуглова строго изналажење поправака, које је скопчано са доста комплицираним рачуном равнања, треба да даје бројне величине, које се тек нешто мало разликују од оних, које бисмо добили при изналажењу поправака углова на начин, за који није потребан рачун равнања. Имајући у виду како ту околност, тако и све оно што је напред речено о значају и циљу рачуна равнања уопште, треба доћи до закључка, да се и у случају мерења праваца могу срачунавати не њихове поправке већ поправке углова, што ће вазда бити много простије. Тако је и радио познати руски астроном В. Струве при обради рускога лука меридијана од Торнео до Дунава.

25. Пример рачуна равњања мреже.

Ради објашњења рачуна равњања какве триангулације и срачунавања, затим, њених страна, пројектованих на површини идеалног Земљиног елипсоида, — узећемо 4 тачке: Т (Торнео), К (Какамавара), Р (Перавара) и Г (Гујтапери) (сл. 16.) из продужења рускога мерења степенâ у Лапландији („Дуга меридиана“ В. Струве, часть II), при чему ће као подаци служити: Астрон. ширина полазне тачке Т... $\varphi_0 = 65^\circ 49' 44''.57$; азимут полазне стране ТК... $\alpha_0 = +3^\circ 1' 30''.93$, рачунајући га од севера ка истоку; дужина те стране $TK = 17814.86$ у тоазима ($lg TK = 4.2507823$ и ови угли, добивени из измерених праваца:

PTG = 1 =	7° 4' 3".09,	GPK = 5 =	55° 53' 45".32,
PTK = 2 =	29 54 30. 69,	GPT = 6 =	166 38 41. 09,
TKP = 3 =	39 20 33. 82,	KGT = 7 =	37 22 59. 30,
TKG = 4 =	119 46 34. 19,	KGP = 8 =	43 40 17. 43.

Кад претпоставимо у првом приближењу, да су сви ти троугли равни, онда ћемо најпростијим рачуном са логаритмима од 4 децимале добити ове дужине свих страна мреже у хиљадама тоаза:

$$TK = 17.81, \quad TP = 12.08, \quad KP = 9.50,$$

$$KG = 11.39, \quad GP = 13.56, \quad GT = 25.47;$$

затим, кад се за ширину централне тачке четвороугла ТКГР узме заокружљени број $\varphi = 66^\circ 0'$, онда ћемо наћи, из таблице на крају гњиге, за радиус $R = \sqrt{MN}$ сфере, на којој треба срачунавати све трогле, — величину

$$lg R = 6.5158 \text{ (тоаза)}$$

а с њоме је лако срачунати сферне ексцесе: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 за четири троугла:

Δ ТКР	Δ ТКГ	Δ ТРГ	Δ КРГ
2 = 29°54'30".69	4 = 119°46'34".19	1 = 7° 4' 3".09	4—3 = 80°26' 0".37
3 = 39 20 33 .82	2—1 = 22 50 27 .60	6 = 166 38 41 .09	5 = 55 53 45 .32
6—5 = 110 44 55 .77	7 = 37 22 59 .30	8—7 = 6 17 18 .13	8 = 43 40 17 .43
сума = 180 0 0 .28	180 0 1 .09	180 0 2 .31	180 0 3 .12
$\omega_1 =$ 1 .03	$\omega_2 =$ 1 .69	$\omega_3 =$ 0 .36	$\omega_4 =$ 1 .02
$n_1 =$ — 0 .75	$n_2 =$ — 0 .60	$n_3 =$ + 1 .95	$n_4 =$ + 2 .10

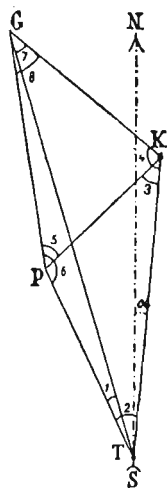
Пошто је сума углова четвртога троугла последица првих трију ($n_1 + n_4 = n_2 + n_3$), то ћемо за поправке: (1), (2), (3),... (8) даних углова имати ове три, независне међу собом условне једначине:

$$(2) + (3) + (6) - (5) = +0''.75, \quad (4) + (2) - (1) + (7) = +0''.60, \quad (1) + (6) + (8) - (7) = -1''.95;$$

њима треба додати још и једну условну једначину страна, нпр.:

$$\frac{TK}{PK} \cdot \frac{PK}{GK} \cdot \frac{GK}{TK} = \frac{\sin(VI-V) \cdot \sin VIII \cdot \sin(II-I)}{\sin II \cdot \sin V \cdot \sin VII} = 1$$

која ће се добити у логаритамском а затим и у линеарном облику, — као што је то објашњено у чл. 21. — на овај начин:



Сл. 16.

<i>Бројишелъ</i>	Промена за 1'' у 7. децим.	<i>Именишелъ</i>	Промена за 1'' у 7. децим.
$lg \sin (6 - 5) = 9.9708778$	— 8.0	$lg \sin 2 = 9.6977668$	+ 36.6
$lg \sin 8 = 9.8391780$	+ 22.1	$lg \sin 5 = 9.9180410$	+ 14.2
$lg \sin (2 - 1) = 9.5890277$	+ 50.0	$lg \sin 7 = 9.7832903$	+ 27.6
Сума = 9.3990835		9.3990981	

$$n = lg \text{ бројит. } - lg \text{ имен. } = - 146$$

$$- 50.0 (1) + 13.4 (2) - 6.2 (5) - 8.0 (6) - 27.6 (7) + 22.1 (8) = + 146.$$

Али, да не бисмо при даљем срачунавању радили са сувише великим бројевима, zgodније ће бити, да највећи од коефицијената у тој једначини учинимо равним јединици, као и у пређашњој. Кад целу ову једначину поделимо ради тога са 50, онда ћемо добити

$$- 1.00 (1) + 0.268 (2) - 0.124 (5) - 0.160 (6) - 0.552 (7) + 0.442 (8) = + 2''.92$$

Ради бољег удопства и прегледности свега онога што затим следује, коефицијенти $a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots c_1 c_2 \dots d_1 d_2 \dots$ код истих поправака (1), (2), ... (8) у ове 4 условне једначине групишу се у таблицу овако:

једн.	коэф.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	— n
1.	a	0	+ 1	+ 1	0	— 1	+ 1	0	0	= + 0''.75
2.	b	— 1	+ 1	0	+ 1	0	0	+ 1	0	= + 0.60
3.	c	+ 1	0	0	0	0	+ 1	— 1	+ 1	= — 1.95
4.	d	— 1	+ 0.268	0	0	— 0.124	— 0.160	— 0.552	+ 0.442	= + 2.92

$$(aa) = + 4 \quad (ac) = + 1 \quad (bb) = + 4 \quad (bd) = + 0.716 \quad (cd) = - 0.166$$

$$(ab) = + 1 \quad (ad) = + 0.232 \quad (bc) = - 2 \quad (cc) = + 4 \quad (dd) = + 1.613$$

Једначине за корелаше:

$$\left. \begin{aligned} 4 k_1 + k_2 + k_3 + 0.232 k_4 &= + 0''.75 \\ k_1 + 4 k_2 - 2 k_3 + 0.716 k_4 &= + 0.60 \\ k_1 - 2 k_2 + 4 k_3 - 0.166 k_4 &= - 1.95 \\ 0.232 k_1 + 0.716 k_2 - 0.166 k_3 + 1.613 k_4 &= + 2.92 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k_1 &= + 0.504 \\ k_2 &= - 0.798 \\ k_3 &= - 0.930 \\ k_4 &= - 1.994 \end{aligned}$$

квадрати

(1) =	$- k_2 + k_3 - k_4 = - 2''.13$	4.54	I = 1 + (1) =	7° 4' 0''.96
(2) =	$+ k_1 + k_2 + 0.268 k_4 = + 0.24$	0.06	II = 2 + (2) =	29 54 30.93
(3) =	$+ k_1 = + 0.50$	0.25	III = 3 + (3) =	39 20 34.32
(4) =	$+ k_2 = - 0.80$	0.64	IV = 4 + (4) =	119 46 33.39
(5) =	$- k_1 - 0.124 k_4 = - 0.75$	0.56	V = 5 + (5) =	55 53 44.57
(6) =	$+ k_1 + k_3 - 0.160 k_4 = - 0.74$	0.55	VI = 6 + (6) =	166 38 40.35
(7) =	$+ k_2 - k_3 - 0.552 k_4 = - 0.97$	0.94	VII = 7 + (7) =	37 22 58.33
(8) =	$+ k_3 + 0.442 k_4 = - 0.05$	0.00	VIII = 8 + (8) =	43 40 17.38

$$\Sigma = 7.54$$

$$\text{Средња грешка мерења једнога угла } \varepsilon = \sqrt{\frac{7.54}{4}} = \pm 1''.3$$

Дефинитивне ће се дужине свих страна троуглова дане мреже добити по Лежандровој теорему овако:

ΔTKP	$\frac{1}{3} \omega_1 = 0''.34$	$lg TK$	$= 4.250 7823$	
(VI — V)	$-\frac{1}{3} \omega_1 = 110^\circ 44' 55''.44$	$lg \sin$	$= 9.970 8780$	$lg PK = 3.977 6708$
II	$-\frac{1}{3} \omega_1 = 29 54 30. 59$	$lg \sin$	$= 9.697 7665$	
III	$-\frac{1}{3} \omega_1 = 39 20 33. 98$	$lg \sin$	$= 9.802 0607$	$lg PT = 4.081 9650$
Сума	$= 180 0 0. 01$	$lg \frac{TK}{\sin (VI - V)}$	$= 4.279 9043$	

ΔKPG	$\frac{1}{3} \omega_4 = 0.34$	$lg PK$	$= 3.977 6708$	
VIII	$-\frac{1}{3} \omega_4 = 43 40 17.04$	$lg \sin$	$= 9.839 1772$	$lg PG = 4.132 4110$
(IV—III)	$-\frac{1}{3} \omega_4 = 80 25 58.73$	$lg \sin$	$= 9.993 9174$	
V	$-\frac{1}{3} \omega_4 = 55 53 44.23$	$lg \sin$	$= 9.918 0395$	$lg KG = 4.056 5331$
Сума	$= 180 0 0.00$	$lg \frac{PK}{\sin VIII}$	$= 4.138 4936$	

ΔTKG	$\frac{1}{3} \omega_2 = 0.56$	$lg TK$	$= 4.250 7823$	
VII	$-\frac{1}{3} \omega_2 = 37 22 57.77$	$lg \sin$	$= 9.783 2861$	$lg TG = 4.406 0036$
IV	$-\frac{1}{3} \omega_2 = 119 46 32.83$	$lg \sin$	$= 9.938 5074$	
(II—I)	$-\frac{1}{3} \omega_2 = 22 50 29.41$	$lg \sin$	$= 9.589 0368$	$lg KG = 4.056 5330$
Сума	$= 180 0 0.01$	$lg \frac{TK}{\sin VII}$	$= 4.467 4962$	(контрола)

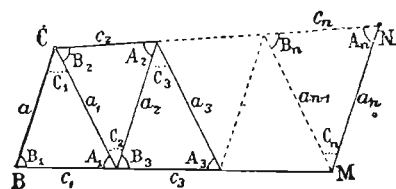
ГЛАВА III.

МЕРЕЊЕ УГЛОВА ТРИГОНОМЕТРИСКЕ МРЕЖЕ.

26. Величина троуглова.

Због несавршенства у мерењу углова тригонометриске мреже, поступно срачунате дужине њених страна добивају се све са већим грешкама уколико је већи број троуглова, који раздваја те стране од полазне стране или базиса. Због тога се пре свега јавља питање, какве се величине и каквог облика троуглова треба придржавати при састављању мреже те да грешке, које се постепено нагомилавају у срачунаваним странама, буду по могућности што мање? При разматрању тога питања, ми ћемо имати у виду најобичнији и најпростији облик мреже, тј. непрекидни ланац троуглова а ради простоте, претпостављаћемо, да су у сваком троуглу измерени не три већ само два угла, чиме се ствар, разуме се, ниуколико не мења.

Кад претпоставимо, да су угли: $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3,$ и т. д. разних троуглова ланца (сл. 17.) поправљени за $\frac{1}{3}$ њихових сферних ексцеса, онда ћемо имати за ма коју од страна тога ланца, нпр. за $MN = a_n,$ — која је раздвојена од полазне стране $BC = a$ низом n интервалних троуглова, — овај израз:



Сл. 17.

$$a_n = a \cdot \frac{\sin B_1 \cdot \sin B_2 \cdot \sin B_3 \cdot \dots}{\sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 \cdot \dots};$$

релативна пак грешка у дужини $a_n,$ која се добива диференцирањем логаритма тог израза, биће

$$\frac{\partial a_n}{a_n} = \frac{\partial a}{a} + \partial B_1 \cdot \cotg B_1 + \partial B_2 \cdot \cotg B_2 + \dots - \partial A_1 \cdot \cotg A_1 - \partial A_2 \cdot \cotg A_2 - \dots$$

Кад пређемо затим на средњу случајну грешку $a \varepsilon_n$ у страни a_n и кад означимо са ε средњу грешку измерених углова а са $a \varepsilon_0$ средњу грешку базиса $BC = a,$ онда ћемо наћи, да је

$$\frac{a \varepsilon_n^2}{a_n^2} = \frac{a \varepsilon_0^2}{a^2} + \varepsilon^2 (\Sigma \cotg^2 B + \Sigma \cotg^2 A) \dots \dots \dots (1.)$$

Ако сад ставимо, да је $B_1 = B_2 = B_3 \dots$ и $A_1 = A_2 = A_3 \dots$ и занемаримо релативно ништавну грешку $a\epsilon_0$, с којом се обично мери базис a , онда ћемо просто добити

$$\frac{a\epsilon_n}{a_n} = \epsilon \cdot \sqrt{n} \sqrt{\cotg^2 B + \cotg^2 A}; \dots \dots \dots (2)$$

т. ј. *средња грешка у дужини ма које стране a_n расте пропорционално корену квадрашноме из броја иншервалних троуглова између ње и базиса a* . Према томе би најбоље било, да је ланац састављен из троуглова по могућности што већих.

Али је то повољно само са теорне тачке гледишта, са претпоставком, да је средња грешка ϵ непроменљива. У самој пак ствари, услед сталног колебања ваздуха у доњим слојевима атмосфере, земљишни ће се предмети утолико више колебати и утолико више бити нејасни, уколико су више удаљени, због чега ће се веома осетно повећати и средња грешка мерених праваца на њих. При томе још неправилан распоред слојева ваздуха разне густине, — што зависи од неравности и других особина земљишта, — производи скоро увек извесно азимутално скретање светлосних зракова или тако звану *бочну рефракцију*, чија се величина никад не може предвидети и узети у обзир, али која је уопште знатно већа за удаљене предмете него за блиске. Због тих се узрока угли врло великих троуглова никада не могу мерити са истом сигурношћу као угли мањих троуглова.

На првокласним се триангулацијама обично придржавају средње дужине страна од 25 до 30 врста, повећавајући је само у ретким, изузетним случајима, изазваних каквим особитим локалним погодбама, на пример, у врлетним и тешко приступачним пределима, или, при пребацивању триангулације преко широког воденог пространства. Тако су на пример француски геодете при спајању триангулација са шпанске на алжирску обалу имали посла са троуглима, чије су стране досезале чак до 250 врста.

27. Облик троуглова.

Да видимо сада, како ће зависити тачност срачунаваних страна троугловног ланца од облика његових троуглова. Кад означимо измерене угле каквога троугла i са A_i и B_i а стране његове са a_{i-1} , a_i и c_i па издиференцирамо логаритме израза:

$$a_i = a_{i-1} \frac{\sin B_i}{\sin A_i} \text{ и } c_i = a_{i-1} \frac{\sin (A_i + B_i)}{\sin A_i},$$

онда ћемо добити:

$$\frac{\partial a_i}{a_i} = \frac{\partial a_{i-1}}{a_{i-1}} + \cotg B_i \cdot \partial B_i - \cotg A_i \cdot \partial A_i \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial c_i}{c_i} = \frac{\partial a_{i-1}}{a_{i-1}} + \cotg (A_i + B_i) \cdot \partial B_i + [\cotg (A_i + B_i) - \cotg A_i] \cdot \partial A_i; \dots \dots (4)$$

прелазећи пак на средње грешке, наћи ћемо:

$$\frac{a\epsilon_i^2}{a_i^2} = \frac{a\epsilon_{i-1}^2}{a_{i-1}^2} + \epsilon^2 [\cotg^2 B_i + \cotg^2 A_i] \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{c\epsilon_i^2}{c_i^2} = \frac{a\epsilon_{i-1}^2}{a_{i-1}^2} + \epsilon^2 [2 \cotg^2 (A_i + B_i) - 2 \cotg A_i \cdot \cotg (A_i + B_i) + \cotg^2 A_i] \dots (6)$$

Да у дугачком ланцу не би произлазило ни поступног увеличавања нити смањивања троуглова (јер би, на основу реченога у прош. члану, и једно и друго било неповољно,) треба да учинимо, да сви они буду једнаки и равнокраки, тј. да буде $B_i = A_i$. Кад тада означимо ради скраћења

$$\cotg B = \cotg A = t \quad \text{и} \quad \cotg (A + B) = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \frac{1}{t},$$

онда ћемо имати:

$$\frac{a \epsilon_i^2}{a_i^2} = \frac{a \epsilon_{i-1}^2}{a_{i-1}^2} + 2 \epsilon^2 t^2 \quad \dots \quad (7.) \quad \text{и} \quad \frac{c \epsilon_i^2}{c_i^2} = \frac{a \epsilon_{i-1}^2}{a_i^2} + \frac{\epsilon^2}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) \quad \dots \quad (8.)$$

Одатле се види, да ће релативне грешке у свима странама a_i , — које служе као основа за даље троугле, — бити најмање кад је $t = 0$, тј. кад је $A_i = B_i = 90^\circ$; релативне пак грешке у странама c_i (сл. 17.), — са којима се сав ланац креће унапред по главном његову правцу, — биће најмања онда, кад се израз $(t^2 + 1/t^2)$ претвара у minimum, тј. кад је $t = 1$ или $A_i = B_i = 45^\circ$. Према томе, да би се и једне и друге стране добијале по могућности што боље, потребно је, да се величина углова A_i и B_i крећу у границама од 90° до 45° .

Али се положај ма које тачке M према полазној B (сл. 17.) одређује из триангулације не само тим једним њеним растојањем MB већ још и азимуталним правцем на њу из B ; овај пак правац, услед постепеног нагомилавања грешака у измереним углима A_i и B_i , мора да буде, очевидно, све нетачније уколико је већи број троуглова од M до B , тј. утолико, уколико се угли A_i и B_i више ближе правим углима. Некорисно је повећавати број троуглова ланца и стога, што се тиме повећава и количина рада, неопходног за извршење триангулације. На основу свега овога примљено је, да угли A_i и B_i у триангулацијама буду око 60° ; другим речима, *равноштрани облик троуглова смањра се на пракси као најповољнији*; али, разуме се, тај и сувише општи закључак не треба сматрати за безусловно правило*).

*) Питање о најповољнијем облику троуглова ланца зависи од оне главне сврхе, која се има у виду при полагању триангулације. Тако на пример, ако би се циљ триангулације састојала само у томе, да се одреди страна $MN = a_n$ (сл. 17.), која се налази на даном растојању $d = MB = NC$ од базиса $BC = a$, — чију дужину ради простоте можемо сматрати за јединицу, — онда, при једнакости свих троуглова ланца и при броју њиховом

$$n = 2 \frac{d}{c} = 2d \cdot \frac{\sin A}{\sin 2A} = \frac{d}{\cos A} = \frac{d}{t} \cdot \sqrt{1+t^2},$$

формула би (7.) дала

$$f^2 = \frac{a \epsilon_n^2}{a_n^2} = 2n \epsilon^2 \cdot t^2 = 2d \epsilon^2 \cdot t \sqrt{1+t^2},$$

према томе, најмања ће се релативна грешка у a_n добити при $t = 0$, тј. при бескрајно великом броју троуглова. До тог ћемо истог закључка доћи, ако чак поставимо услов, да општа количина рада око мерења углова целог ланца остане непромењена. И заиста, ако ϵ_0 буде средња грешка у углу једанпут измереног а S дани број мерења за све угле ланца, онда ће на сваки угао доћи по $\frac{S}{2n}$ мерења и он ће се добити са средњом грешком

$$\epsilon^2 = \epsilon_0^2 \cdot \frac{S}{2n} = \epsilon_0^2 \cdot \frac{2n}{S} \quad \text{па ће стога изићи, да је}$$

$$f^2 = 4d \cdot \frac{\epsilon_0^2}{S} n t \sqrt{1+t^2} = 4d^2 \frac{\epsilon_0^2}{S} \cdot (1+t^2),$$

тј. најмања ће се величина за f добити такође при $t = 0$.

Да расматрамо још и то, какав ће облик троуглова бити најповољнији за што тачније одређивање растојања $d = MB = NC$. Пошто је оно изражено и сумом непарних страна c_i и сумом парних, то уз-

Локалне нас прилике обично приморавају, да одступамо више или мање од облика равностраних троуглова. У том се случају треба старати, да се сачува бар главни услов, тј. да A_i и B_i , који улазе у изразе свих сљедећих страна мреже, не изађу сувише оштри (мањи од 30°); угли пак C_i , који у ове изразе не улазе, могу изузетно да буду и врло мали, јер тачност резултата тиме неће бити осетно оштећена.

28. Обележавање тригонометриских тачака.

Ради избора тригонометриских тачака, увек се претходно врши извиђање или т.зв. *рекогносцирање* оног земљишта, на којему треба да буде извршена триангулација. Онај који врши рекогносцирање, снабдевен картом тога предела, дурбином и бусолом, треба брижљиво да разгледа цео видљиви хоризонт са какве већ изабране тачке па, пошто запази најузвишеније тачке земљишта, — које би могле бити погодне за продужење мреже, — треба да повуче на карти узете на њих правце; затим, после прелаза на њих, треба да се убеди, да ли ће се са њих без сметње видети како пређашње тачке, тако и неопходне даље, и да ли ће образовани троугли, који су тако унесени у карту, задовољавати по својему облику и величини оне погодбе, које су изложене у чл. чл. 26. и 27.

Ради доцнијега згоднијег визирања са једне тригонометриске тачке на другу, оне се обележавају тако званом *сигналима*, који се обично израђују од дрвета на најпростији начин. На отвореним и узвишеним местима обично се

мимо средњу његову величину $d = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{n-1} + c_n)$, при чему ће се његова грешка представити у облику

$$\frac{\partial d}{\partial c_i} = \partial d: \frac{nc}{2} = \frac{1}{nc} (\partial c_1 + \partial c_2 + \partial c_3 + \dots + \partial c_{n-1} + \partial c_n).$$

Кад узмемо општи израз (4.) у облику

$$\frac{\partial c_i}{c_i} = t [\partial B_1 + \partial B_2 + \dots + \partial B_{i-1}] - t [\partial A_1 + \partial A_2 + \dots + \partial A_{i-1}] + t' \partial B_i + (t' - t) \partial A_i,$$

где је

$$t' = \operatorname{cotg}(A + B) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right),$$

и, кад се сумирају сви овакви изрази од $i = 1$ до $i = n$, онда ћемо добити прво:

$$n \frac{\partial d}{\partial c_i} = -\partial A_1 [nt - t'] - \partial A_2 [(n-1)t - t'] - \partial A_3 [(n-2)t - t'] - \dots - \partial A_n [t - t'] + \\ + \partial B_1 [(n-1)t + t'] + \partial B_2 [(n-2)t + t'] + \dots + \partial B_{n-1} [t + t'] + \partial B_n \cdot t,$$

а затим, кад се пређе на средњу грешку ϵ_d , наћи ћемо, да је

$$\frac{n^2}{\epsilon_d^2} \cdot \frac{\epsilon_d^2}{d^2} = [nt - t']^2 + [(n-1)t - t']^2 + \dots + [2t - t']^2 + [t - t']^2 + [(n-1)t + t']^2 + \dots + [2t + t']^2 + [t + t']^2 + t'^2 = \\ = n^2 t^2 - 2nt t' + 2t'^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \cdot t^2 + 2(n-1)t t';$$

после свију пак скраћивања, изаћи ће дефинитивно:

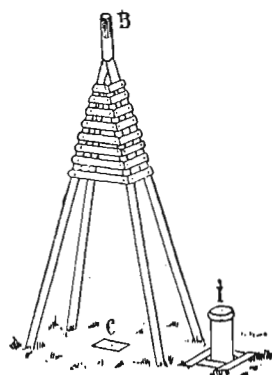
$$\frac{\epsilon_d^2}{d^2} = \frac{\epsilon_0^2}{2n} \left[\frac{4n^2-1}{3} \cdot t^2 + \frac{1}{t^2} \right] = \frac{\epsilon_0^2}{S} \left[\frac{4d^2-1}{3} \cdot t^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{4}{3} d^2 \right].$$

Одатле се види, да ће се најмања величина за ϵ_d добити онда, када је $\frac{1}{t^2} = \sqrt{\frac{4d^2-1}{3}}$, тј. када

$$\text{је } n = d \sqrt{1 + \sqrt{\frac{4d^2-1}{3}}}.$$

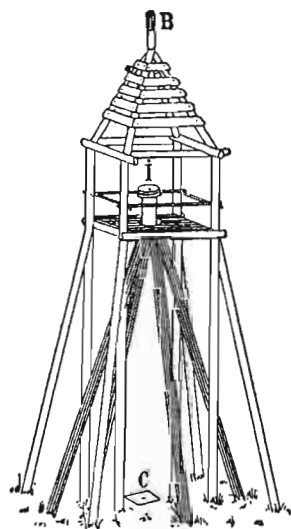
Ако је, на пример $d = 12$, тј. 12 пута веће од полазне стране a , онда ће најповољнији број троуглова бити око 46, са углима A и B око 75° . Такво би одступање од опште примљеног равностраног облика троуглова било повољно нарочито при извођењу мерења степена по меридијану или по паралели, зато што грешка у одредби завршне тачке у правцу перпендикуларном на општи правац ланца неће у том случају бити од стварнога значаја.

израђују просте пирамиде (од 3 до 5 сажњева висине) од 4 греде, које се доста дубоко у земљу закопају а горњим својим крајевима чврсто утврде за подебљи вертикални цилиндар В, који управо и треба да служи за визирање (сл. 18.); али пошто се тај визирни цилиндар са великих растојања може видети само при најповољнијим метеоролошким погодбама, то се белега за визирање повећава на тај начин, што се горњи део пирамиде окује даскама, при чему она треба са свих страна да изгледа као равнокраки троугао, симетричан у односу према вертикалном визирном цилиндру. При мерењу углова на тим тачкама угломерни се инструмент може ставити на своје треножном стативу или под самом пирамидом, или пак недалеко од ње; велики пак инструменти, који служе за најтачнија мерења углова, стављају се на каменим или масивним дрвеним стубовима I.



Сл. 18.

У равним и шумовитим пределима тачке се морају обележавати израдом сигнала висине до 10 сажњева па и више а и инструмент се мора издизати на знатну висину ради мерења углова. У тим случајима главна пажња треба да буде обраћена на то, да стуб I, на коме се ставља инструмент, буде изолован од пода по којему треба да се креће посматрач за време мерења углова; иначе ће се и најмањи покрет његов преносити преко стуба на инструмент те ће тачно визирање дурбином на предмете бити скоро онемогућено. Стога је најбоље израдити у унутрашњости сигнала засебну високу пирамиду (као велики статив) за што стабилније одржавање инструмента на стубу I, онако како је то показано на сл. 19.



Сл. 19.

Кад тачке треће класе служе само као основне тачке за топографска премеравања, онда се са њих обично и не мере угли, већ се свака од њих одређује пресецима унапред, визирајући на њих најмање са три првокласне или другокласне тачке. За овакве се трећекласне тачке бирају обично: цркве, фабрике и разни други истакнути објекти; у недостатку пак оваквих оне се означају чврсто укопаним мотчицама са каквом било ознаком на врху њиховом за визирање.

Дрвени су сигнали и пирамиде и сувише привремене грађевине, да би могле служити дуго времена за стабилно означавање тригонометриских тачака. Међутим свака тригонометриска тачка на којој су доста тачно били измерени угли, може да буде потребна чак и после много деценија, као основна тачка за радове на премеравању земљишта или пак за везу са новим триангулацијама. Стога се тригонометриске тачке стабилизирају нарочитим подземним каменим белегама са означеном тачком, укопавајући и центрирајућу их по врху пирамида дубоко (око 1^м) у земљу; над њима пак укопава се и центрира т.зв. надземни центар такође од камена или бетона. Ради још сигурнијег стабилизирања, са стране и недалеко од главног центра укопавају се још 4 побочна камена центра са белегама тако, да унакрсна веза њихова пар по пар правим линијама даје у пресеку тачан положај главног центра. На тај се начин тачка (оловног центра) може поново успоставити, ако је из ма којих узрока била временом уништена. Ради осигу-

рања што тачнијег мерења углова, на савременим се I. кл. триангулацијама чврсто укопавају над подземним центром камени (или бетонски) стубови висине око 1^м над земљом, који са својом центрираном белегом (крстићем) служе и као надземна белега, али, што је најглавније, и као чврсто, непомично постоље за инструмент, којим се мере угли на тај начин са знатно већом тачности него са статива.

29. Центрирања.

Из овога што је напред изложено, види се, да код тригонометриских белега треба разликовати три чачке; 1.) врх сигнала В, на који се врши визирање са осталих тачака, 2.) тачку I стајања инструмента на тој тачци и 3.) сами *ценшар* С сигнала (сл. 18. и 19.), тј. ону тачку, која је стабилно означена и која управо и представља тригонометриску тачку; али пошто све те три тачке могу и да не буду увек једна испод друге тачно на једној вертикалној линији, то је свагда неопходно потребно одредити са довољном тачности положај њихов једне према другој, те да би се сва визирања, извршена како са те тачке, тако и остала, која су извршена са осталих на њу, могла свести на центар сигнала. Овај се посао обично зове *ценшрирање*.

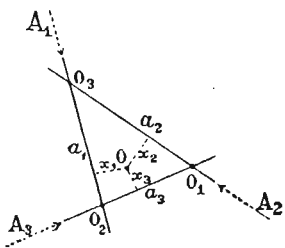
Центрирање се обично врши на овај начин: Испод самога врха сигнала постави се на незнатној висини изнад земље хоризонтална табла или сточић са табаком хартије или картона. Кад се затим постави мали универсални инструмент гдегод са стране недалеко од сигнала и доваде његов лимб и хоризонтална оса у хоризонталан положај помоћу његове либеле, онда се дурбином навизира на врх сигнала В па се спусти наниже тако, да се на хартији стола омогући обележавање праве линије као пресека вертикалне равнине, која прелази кроз врх сигнала В; на тај се исти начин обележи и пресек вертикалне равнине, која прелази кроз центар С, који је стабилизирован под сигналом; затим се то исто понови и при другом положају дурбина на инструменту те да се искључи утицај његове колимационе грешке. Када се после тога пренесе и постави инструмент на друго место па се на исти начин повуку на хартији пресеци нових вертикалних равнина, које пролазе кроз исте тачке В и С, онда ће се у пресеку одговарајућих добивених правих добити тражене хоризонталне пројекције тих тачака; али је ради контроле увек корисно извршити такво исто пројектовање и из трећег положаја инструмента око сигнала.

Усљед разних случајних грешака, три праве O_3O_2 , O_1O_3 и O_2O_1 (сл. 20.), које су добивене из тачака стајања са инструментом: A_1 , A_2 и A_3 , могу при томе и да се не пресеку у истој тачци, већ да образују неки већи или мањи троуглић $O_1O_2O_3$. Тада се појављује питање, који је положај тражене тачке О у том троуглу највероватнији? Означимо стране даног троугла $O_1O_2O_3$ са a_1 , a_2 и a_3 и допустимо, да су случајна скретања њихова x_1 , x_2 и x_3 од тачке О подједнако вероватна. Пошто та скретања треба строго да задовоље услов: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 =$ удвојеној површини троугла, то, множећи га са корелатом k , добићемо по формули (9.) главе II, да је:

$$x_1 = ka_1, \quad x_2 = ka_2, \quad x_3 = ka_3 \quad \text{или} \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3};$$

Сл. 20.

тј. тражена тачка О треба да се налази на растојањима од страна троугла $O_1O_2O_3$, која су респективно пропорционална дужинама тих страна.

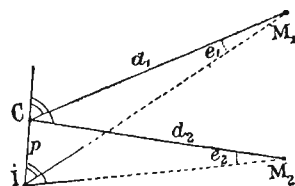


Тако се на хартији добива непосредно хоризонтално растојање r међу тачкама С и В; а кад се на том истом цртежу повуче још и правац на какав удаљени сигнал, који је ушао у мерење угла, онда ће се помоћу транспортера довољно тачно одредити и положај правца линије СВ према томе па и према осталим правцима мерених угла са те тачке.

На сличан се начин одређује и положај \dot{I} инструмента, којим се мере угли у мрежи, у односу према центру С сигнала, када се инструмент ставља под самим сигналом; али, ако се за време мерења угла он налази гдегод са стране (нпр. као на сл. 18.), онда се сви потребни подаци за одређивање његова положаја добивају на тај начин, шта се правац $\dot{I}C$ на пројекцију центра узме тим истим инструментом, визирајући на већ пренесени центар на хартији, а растојање $\dot{I}C$ измери челичном пантљиком.

30. Свођење правца на центре сигнала.

Нека сад \dot{I} (сл. 21.) буде тачка стајања са инструментом, која се налази од центра С сигнала на извесном растојању $C\dot{I} = p$, које је врло мало у сравњењу са растојањима d_1, d_2, \dots до тригонометриских тачака M_1, M_2, \dots , и нека је та тачка \dot{I} постављена према њима у извесном правцу онако, како је то напред речено. Тада ће се правци из С на M_1, M_2, \dots разликовати од измерених правца $\dot{I}M_1, \dot{I}M_2, \dots$ за величине врло малих углова $\sphericalangle CIM_1 = e_1, \sphericalangle CIM_2 = e_2, \dots$, који се из елементарних троугла $CM_1\dot{I}, CM_2\dot{I}, \dots$ добивају у секундама овако:

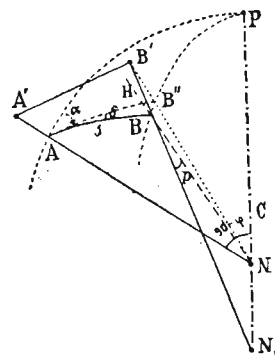


Сл. 21.

$$e''_1 = \frac{p}{d_1 \cdot \sin 1''} \cdot \sin \sphericalangle CIM_1, \quad e''_2 = \frac{p}{d_2 \cdot \sin 1''} \cdot \sin \sphericalangle CIM_2, \quad \dots \quad (9)$$

при томе, због маленкости самих свођења e_1, e_2 и т. д., растојања d_1, d_2, \dots до посматраних сигнала, као и угли $\sphericalangle CIM_1, \sphericalangle CIM_2, \dots$ треба да буду познати тек приближно. Кад претпоставимо пак, да на сл. 21. тачка \dot{I} представља врх В сигнала, онда ћемо опет добити сасвим сличне, по облику, изразе и за свођење на центар С тога сигнала оних правца, који су добивени визирањем на његов врх В са осталих тачака M_1, M_2, \dots .

Пошто се при срачунавању триангулације претпоставља, да су све тачке пројектоване на идеалну површину Земљиног елипсоида, то измерени угли могу да буду подвргнути још некојим поправкама, које зависе од висине тачака над морском површином. Нека су A' и B' две тачке на видној земној површини; $A'AN$ и $B'BN_1$ — правци нормала на тим тачкама, које пресецају Земљину осу CP у тачкама N и N_1 (сл. 22.); A и B — пројекције тих тачака на Земљин елипсоид; AP и BP — правци меридијана. Кад са H означимо висину BB' тачке B' , која се посматра са A' , и кад саставимо B' са тачком N , онда ћемо добити на меридијану BP лук $BB'' = H \cdot \sin \sphericalangle NB'N_1$, при чему се угао $\sphericalangle NB'N_1$ може сматрати да је једнак са углом $\sphericalangle NBN_1 = p$, који се изражава овако (в. чл. 13.):



Сл. 22.

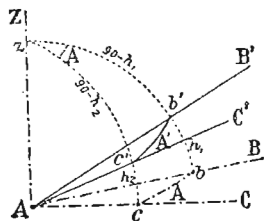
$$p = s \cdot \cos \alpha \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) = \frac{s}{a} \cdot \cos \alpha \cdot e^2 \cos^2 \varphi,$$

где s означава растојање међу тачкама A и B , φ — ширину једне или друге од њих, а α — азимут $\sphericalangle PAB$, који је приближно једнак са $180^\circ - \sphericalangle PBA$. Према томе, ма каква била висина тачке A' , азимут вертикалне равнине $A'NB''B'$, која пролази кроз њену нормалу $A'N$ и кроз посматрану са ње тачку B' , разликоваће се од азимута вертикалне равнине ANB за угао $B''AB = \delta$, који се добија из елементарног троугла $B''AB$ у оваквом облику:

$$\delta'' = \frac{BB'' \cdot \sin \alpha}{s \cdot \sin 1''} = \frac{e^2}{2 \cdot \sin 1''} \cdot \frac{H}{a} \cos^2 \varphi \cdot \sin 2\alpha \quad \dots \quad (G.)$$

Као што се види, ова поправка не зависи од растојања s , већ само од висине H посматране тачке, тако да при $\varphi = 0$, $\alpha = 45^\circ$ и $H = 1$ врсти, она преставља свега 0.1 ; стога се она скоро увек може занемарити.

Пређе се је помоћу репетиционих кругова увек мерио сам угао $B'AC' = A'$ између два земна предмета B' и C' (сл. 23.) а не његова хоризонтална пројекција $BAC = A$; стога је ту пројекцију требало добивати из првога, измереног срачунавањем, знајући приближно угловне висине тих предмета: $\sphericalangle B'AB = h_1$ и $\sphericalangle C'AC = h_2$. Оваква би свођења требало вршити и сад, ако би се десио случај, да се угли мере Писторовим кругом или секстантом.



Сл. 23.

Кад уобразимо у тачци A помоћну сферу, која пресеца нормалу AZ у тачци z , а правце AB' и AC' у тачкама b' и c' , онда ћемо имати из сферног троугла $zb'c'$:

$$\cos A' = \sin h_1 \cdot \sin h_2 + \cos h_1 \cdot \cos h_2 \cdot \cos A,$$

одакле

$$\cos A = \cos A' \cdot \sec h_1 \cdot \sec h_2 - \operatorname{tg} h_1 \cdot \operatorname{tg} h_2;$$

кад пак допустимо, да је због маленкости висина h_1 и h_2

$$\operatorname{tgh} = h, \quad \sec h = 1 + \frac{h^2}{2} \quad \text{и} \quad \cos A = \cos A' - (A - A') \sin A',$$

онда ћемо добити са довољном приближношћу саму разлику $(A - A')$ у оваквом облику:

$$(A - A') = \frac{h_1 h_2}{\sin A'} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2 \operatorname{tg} A'} \quad \dots \quad (H.)$$

или пак у оваквом:

$$A - A' = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{A'}{2} - \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{A'}{2} \quad \dots \quad (H'.)$$

31. Мерење углова.

Хоризонтални се угли међу тригонометрским тачкама мере универсалним инструментом или теодолитом већих или мањих димензија, према тачности мерења, које се има у виду. Конструкција тих инструмената, свестрано њихово оверавање и саме методе мерења углова помоћу њих, претпоставља се, да нам је већ познато из практичног дела „Курса Астрономије“; због тога ћемо се овде ограничити само са неколико практичних напомена о тим мерењима, које се тичу нарочито посматрања удаљених предмета.

Обично се мере не сами угли међу свака два посебна предмета, већ правци на све видне предмете са тачке посматрања, јер су мерења на тај начин бржа у извесној мери. Нека су A, B, C, D, \dots предмети за посматрање, који су распоређени на хоризонту с лева на десно. Кад се постави и потребним начином укочи лимб, онда се визира дурбином прво на A , затим на B , на C и т. д. и најзад понова на A , крећући алхидадни круг заједно са дурбином стално у десну страну и вршећи при визирању на сваки поједини предмет читање R на лимбу помоћу два диаметрално супротна нониуса или микроскопа (ради искључења ексцентрицитета између лимба и алхидадног круга). Затим, пошто се преврне дурбин кроз зенит а алхидадни круг обрне за 180° , онда се понављају визирања и прочитања L на све предмете $A, \dots D, C, B, A$ обрнутим радом, тј. покретом алхидадног круга са дурбином у леву страну. Полусума прочитања R и $(L \pm 180^\circ)$, која су извршена за сваки поједини предмет, даје тражени правац за сваки од тих предмета, ослобођен како од колимационе грешке дурбина, тако и од ексцентричног његовог положаја, ако је тако постављен на инструменту; полуразлика пак истих прочитања, после ослобођења од утицаја ексцентричности дурбина, изразиће величину колимационе грешке, која треба да се добије приближно подједнака за све узете правце, одступајући од средње њене величине само услед неизбежних случајних грешака у визирању на поједине предмете и у прочитањима лимба.

Ово одређење правца на све предмете A, B, C, \dots које је извршено при једном и истом, непромењеном положају лимба, зове се *раздео*. У те, овако добивене правце улазе, осим случајних грешака посматрања, још и целе *систематске грешке поделе* лимба, ако оне нису раније испитане, да би се узеле у рачун. У сваком случају, ради слабљења утицаја и једних и других грешака, треба увек вршити неколико раздела, потпуно сличних са напред описаним, померајући лимб за сваки нови раздео или за 15° (да би се извршило 12 раздела), или за 30° (за 6 раздела), или за 60° (за 3 раздела). На првокласним триангулацијама, где је потребна највећа тачност мерења углова, врши се не мање од 12 раздела; на триангулацијама другог реда довољно је 6, а за тачке трећег реда 3 или 4 раздела, употребљујући при томе и мање савршене инструменте.

Напред описана метода мерења правца на много предмета A, B, C, \dots претпоставља, да се сви ти предмети могу видети довољно јасно. Међутим у ствари се кадкад дешава, да се један или два од врло удаљених предмета за извесно време не могу јасно видети услед промењених погодаба за осветљење, или и других каквих узрока. У тим случајима рад се на мерењу врши својим редом и без тих предмета, допуњујући га за њих доцније, макар и после неколико дана, када околности за њихово посматрање постану повољне. Због тога се за почетни правац у свима разделима обично бира неки предмет A , који се јасније види од осталих; по некипут пак узима се ради тога и какав нарочито јасни предмет, макар он и не улазио у триангулацију.

Од В. Струве-овог доба у Русији се употребљују универсални инструменти и теодолити, снабдевени контролним дурбинама. Контролни се дурбин чврсто споји са лимбом и непроменљиво тако остане за све време мерења у једноме разделу; њиме се навизира на доста блиску и јасну белегу, чиме је

омогућено стално одржавање лимба у једном и истом положају за време свих визирања горњим, главним дурбином. Ради тога је потребан, и други посматрач, али се зато добивају тачни угли чак и при стављању инструмента на доста лабилну основу, као на пример на високом дрвеном сигналу или и на земљи на лакој статуре; без тога се дурбина тачна мерења не могу ни замислити при сличним околностима.

Контролни дурбин у другим државама није уобичајен; али се инструмент ставља на солидним каменим стубовима па и на дрвеним. У овом последњем случају, без контролног дурбина резултати мерења углова ипак нису увек сигурни, зато што су дрвени стубови, услед загревања сунчаном топлотом, подвргнути извесном увијању, које се дању врши у једну а ноћу у другу страну.

32. Оцена тачности мерења.

Као што је већ напред речено, о тачности се прочитаних праваца на m предмета А, В, С, може судити по одступањима v_a, v_b, v_c, \dots колимационих грешака c_a, c_b, c_c, \dots (изведених за сваки предмет) од њихове средње величине $c = \frac{1}{m} (c_a + c_b + c_c + \dots)$ у једном и истом разделу. Кад се са $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c \dots$ означе средње грешке праваца на предмете А, В, С, . . . , изведених из два визирања на њих, онда ћемо на тај начин добити величину

$$\mu^2 = \frac{\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 + \dots}{m} = \frac{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 + \dots}{m-1};$$

а ако је извршено свега n раздела, онда ће изићи

$$\mu^2 = \frac{\Sigma v_a^2 + \Sigma v_b^2 + \Sigma v_c^2 + \dots}{n(m-1)} \dots \dots \dots (c.)$$

Ако су систематске грешке лимбове поделе ништавне или, ако су оне претходно испитане и узете у рачун, онда сагласност углова међу једним и истим правцима у разним разделима може са своје стране такође да послужи за извођење исте средње величине μ^2 . Нека A_i, B_i, C_i, \dots буду правци на предмете А, В, С, . . . у неком i разделу, ослобођени од систематских грешака. Кад се изведу угли: $(B_i - A_i), (C_i - A_i), (D_i - A_i), \dots$ и средње њихове величине из свих n раздела:

$$B - A = \frac{\Sigma (B_i - A_i)}{n}, \quad C - A = \frac{\Sigma (C_i - A_i)}{n}, \dots,$$

онда ћемо добити одступања:

$$\beta_i = (B_i - A_i) - (B - A) = (B_i - B) - (A_i - A)$$

$$\gamma_i = (C_i - A_i) - (C - A) = (C_i - C) - (A_i - A)$$

.

по којима се ипак, још не може непосредно судити о средњој грешци μ мерења, јер све оне зависе од једних и истих случајних грешака у посматрањима поче-

тног предмета A . Али ако уобразимо изнад ове таблице одступања још и разлику

$$O = (A_i - A_i) - (A - A) = (A_i - A) - (A_i - A)$$

па изведемо средње величине

$$\frac{O + \beta_i + \gamma_i + \dots}{m} = \frac{(A_i - A) + (B_i - B) + (C_i - C) + \dots}{m} - (A_i - A),$$

онда ће друга одступања од њих w бити:

$${}_i w_a = (A_i - A) - \frac{(A_i - A) + (B_i - B) + (C_i - C) + \dots}{m} = \frac{(m-1)(A_i - A) - (B_i - B) - (C_i - C) + \dots}{m}$$

$${}_i w_b = (B_i - B) - \frac{(A_i - A) + (B_i - B) + (C_i - C) + \dots}{m} = \frac{(m-1)(B_i - B) - (A_i - A) - (C_i - C) + \dots}{m}$$

Кад се сад сумирају квадрати свих n одступања ${}_i w_a$ и напомене при томе, да ће квадрати средњих грешака разлика $(A_i - A)$, $(B_i - B)$, ... бити равне $\epsilon_a^2 \cdot \frac{n-1}{n}$, $\epsilon_b^2 \cdot \frac{n-1}{n}$, ... *), онда ћемо добити

$$\frac{\Sigma w_a^2}{n-1} = \frac{(m-1)^2 \epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 + \dots}{m^2} = \frac{m-2}{m} \cdot \epsilon_a^2 + \frac{\mu^2}{m} \dots \dots (10.)$$

а тако исто и

$$\frac{\Sigma w_b^2}{n-1} = \frac{m-2}{m} \cdot \epsilon_b^2 + \frac{\mu^2}{m} \dots (11.),$$

$$\frac{\Sigma w_c^2}{n-1} = \frac{m-2}{m} \cdot \epsilon_c^2 + \frac{\mu^2}{m} \dots (12.)$$

па стога је

$$\frac{\Sigma w_a^2 + \Sigma w_b^2 + \Sigma w_c^2 + \dots}{n-1} = \frac{m-2}{m} (\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 + \dots) + \mu^2 = (m-1) \mu^2,$$

т.ј.

$$\mu^2 = \frac{\Sigma w_a^2 + \Sigma w_b^2 + \Sigma w_c^2 + \dots}{(m-1)(n-1)} \dots \dots (c')$$

Одређена на тај начин величина μ^2 мора увек да изађе нешто већа него по формули (c), зато што у разним делима и осветљење предмета, и бочна рефракција могу и различито да кваре посматране правце; сем тога на њу може да се одазове још и утицај непотпуно ослобођених грешака лимбове поделе.

Ако бисмо зажелели, да одредимо сваку од квадратних грешака ϵ_a^2 , ϵ_b^2 , ϵ_c^2 , ... посебице, стављајући нађену по формули (c') величину μ^2 у изразе (10.), (11.), (12.), ... , онда би се за некоје од њих могле добити отуд (при неповољној

* И заиста,

$$(A_i - A) = A_i - \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = \frac{(n-1)A_i - A_1 - A_2 - \dots - A_n}{n};$$

због тога ће квадрат средње грешке разлике $(A_i - A)$ бити

$$\frac{1}{n^2} [(n-1)^2 \epsilon_a^2 + (n-1) \epsilon_a^2] = \frac{n-1}{n} \cdot \epsilon_a^2.$$

комбинацији случајних грешака w_a, w_b, w_c, \dots) и сувише мале па чак и негативне величине. То ћемо избећи, ако допустимо приближно, да оне треба да буду пропорционалне њима одговарајућим сумама $\Sigma w_a^2, \Sigma w_b^2, \Sigma w_c^2, \dots$ или пак сумама $\Sigma v_a^2, \Sigma v_b^2, \Sigma v_c^2, \dots$. Онда ће се из формуле (c.) добити просто:**)

$$\varepsilon_a^2 = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\Sigma v_a^2}{n}, \quad \varepsilon_b^2 = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\Sigma v_b^2}{n}, \quad \varepsilon_c^2 = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\Sigma v_c^2}{n} \dots \dots \dots (d.)$$

а из (c'.):

$$\varepsilon_a^2 = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\Sigma w_a^2}{n-1}, \quad \varepsilon_b^2 = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\Sigma w_b^2}{n-1}, \quad \varepsilon_c^2 = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\Sigma w_c^2}{n-1}, \dots \dots \dots (d'.)$$

Због сразмерно малог броја n раздела, разуме се, да се оваква оцена тачности измерених праваца не може сматрати за врло сигурну; али за одређивање њихових релативних тежина, а тако исто и тежина изведених из њих углова (B — A), (C — A), (C — B) и т. д., она ће бити потпуно довољна. Тако, кад се означе тежине тих углова, — изведених из n раздела, — са g_{ab}, g_{ac}, g_{bc} и т. д. и кад се узме тежина, која одговара квадрату средње грешке $\frac{2\mu^2}{n}$, за јединицу, онда ћемо добити:

$$g_{ab} = \frac{2\mu^2}{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}, \quad g_{ac} = \frac{2\mu^2}{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_c^2}, \quad g_{bc} = \frac{2\mu^2}{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2} \dots \dots \dots (e.)$$

Знајући те тежине, из доцнијег ћемо рачуна равнања целе мреже добити (као што је било речено у глави II) већ тачнију величину за средњу грешку ε измерених углова. И поред најбоље каквоће инструмената и великог броја раздела употребљених на мерењу углова, та грешка и у најбољим првокласним триангулацијама не излази мања од $\pm 0''.5$; узрок томе крије се у различитом и врло неправилном утицају бочне рефракције на правце ка удаљеним земним предметима.

Ради објашњења изложенога о мерењу углова и о оцени њихове тачности, ми ћемо навести посматрања на четири не тако удаљена један од другог предмета А, В, С и D, која су извршена у Пулкову 1877. године универсалним инструментом Траутона и Симса са централно постављеним горњим дурбином. Читања на његовом хоризонталном кругу вршена су помоћу микроскопа с тачношћу до $\pm 0''.2$, систематске пак грешке поделе лимба, — које су досезале до $5''$, — биле су испитане раније.

У првоме разделу, у средњем из два дијаметрално супротна микроскопа, добивена су била ова прочитања L и $R' = R + 180^\circ$:

Посм. предм.	L	$R' = R + 180^\circ$	$\frac{L + R'}{2}$	Поправке поделе	Поправљени правци	$2c = R' - L$
A	359°56'38".0	54".0	46".0	0".0	359°56'46".0	16".0
B	53 45 33.9	49.3	41.6	+ 4.4	53 45 46.0	15.4
C	78 2 24.6	43.0	33.8	+ 3.2	78 2 37.0	18.4
D	175 4 19.5	38.9	29.2	— 0.3	175 4 28.9	19.4

***) Све ово, о чему је овде реч, о одређивању средњих случајних грешака разних праваца А, В, С, ..., ничим се не разликује од одређивања сличних грешака у ходовима разних хронометара на основу њихових међусобних сравњења.

у другом већ разделу средње је прочитање на почетни предмет А било $22^{\circ}26'2''8$, у трећем $44^{\circ}55'45''6$ и т. д. увећавајући се за сваки сљедећи раздео приближно за $22^{\circ}30'$. После извршених, на тај начин, 8 раздела, дупле колимационе грешке $2c = R' - L$ и одступања њихова $2v$ од средњих њихових вредности испала су оваква:

Предм.	$2c_1$	$2c_2$	$2c_3$	$2c_4$	$2c_5$	$2c_6$	$2c_7$	$2c_8$	$2v_1$	$2v_2$	$2v_3$	$2v_4$	$2v_5$	$2v_6$	$2v_7$	$2v_8$
A	16.0	17.7	19.2	19.2	19.7	17.8	19.2	19.4	-1.3	-0.6	+2.2	+0.8	+1.1	+0.9	+0.2	+0.1
B	15.4	18.5	17.0	16.5	18.4	16.4	21.0	18.2	-1.9	+0.2	0.0	-1.9	-0.2	-0.5	+2.0	-1.1
C	18.4	19.8	16.2	17.8	17.4	15.1	17.5	19.6	+1.1	+1.5	-0.8	-0.6	-1.2	-1.8	-1.5	+0.3
D	19.4	17.1	15.5	20.3	18.8	18.2	18.4	20.0	+2.1	-1.2	-1.5	+1.9	+0.2	+1.3	-0.6	+0.7
Сред.	17.3	18.3	17.0	18.4	18.6	16.9	19.0	19.3								

Поправљени пак угли, рачунати од почетног правца А, а затим њихова одступања од средњих величина из 8 раздела, овакви су изашли:

Угли	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Сред.								
B — A	$53^{\circ}48'60''0$	$57''4$	$60''2$	$60''4$	$60''1$	$58''3$	$60''3$	$57''3$	$59''2$								
C — A	78	5	51.0	52.1	54.1	51.6	54.7	50.9	53.1	49.6	52.1						
D — A	175	7	42.9	43.0	46.1	43.1	46.0	44.3	44.3	42.9	44.1						
β	+0.8	-1.8	+1.0	+1.2	+0.9	-0.9	+1.1	-1.9	w_b	+1.2	-1.1	-0.2	+1.3	-0.5	-0.4	+0.5	-0.5
γ	-1.1	0.0	+2.0	-0.5	+2.6	-1.2	+1.0	-2.5	w_c	-0.8	+0.7	+0.8	-0.4	+1.2	-0.7	+0.4	-1.1
δ	-1.2	-1.1	+2.0	-1.0	+1.9	+0.2	+0.2	-1.2	w_d	-0.8	-0.4	+0.8	-0.9	+0.5	+0.7	-0.4	+0.2
Ср.	-0.4	-0.7	+1.2	-0.1	+1.4	-0.5	+0.6	-1.4	w_a	+0.4	+0.7	-1.2	+0.1	-1.4	+0.5	-0.6	+1.4

После тога по суми квадрата одступања v и w , т. ј. по формулама (d) и (d') излази:

	ϵ_a^2	ϵ_b^2	ϵ_c^2	ϵ_d^2	μ^2	μ
по формули (d):	0.40	0.53	0.47	0.60	0.50	$\pm 0''71$
„ „ (d'):	1.28	0.99	0.99	0.61	0.97	± 0.98

По сравњењу једних и других вредности за ϵ_a^2 , ϵ_b^2 , ϵ_c^2 и ϵ_d^2 , треба тежине за сва четири измерена правца узети приближно подједнако, а за средњу грешку угла (B — A) (C — A) (C — B) и т. д., изведених из 8 раздела, узети вредност

$$\epsilon = \frac{\mu\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\mu}{2} = \pm 0''49.$$

33. Најповољније време за мерење угла.

Ликови се удаљених предмета врло ретко виде мирни и јасни, јер се доњи слојеви атмосфере скоро никад не налазе у равнотежи. Најчешће је она нарушена око подне, када је ваздух особито јако загрејан са земље; стога је то доба дана најнеповољније за мерење угла а по некад чак и искључена могућност мерења. После тога ликови предмета почињу постепено да се побољшавају и постају најмирнији за неколико часова до заласка Сунчева (приближно после $\frac{3}{4}$ целог

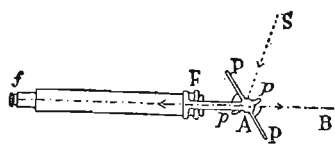
интервала између поднева и заласка). Тај период најбоље равнотеже ваздуха и најбољих ликова траје понекад око два и више часа, понекад пак мање и од часа, што зависи од доба године и разних других метеоролошких погодаба; у том периоду дана, као најповољнијем, и треба мерити угле. Пред заласком пак Сунца равнотежа се ваздуха понова нарушава те наступају врло лагана, неправилна колебања ликова, која су тако исто штетна и незгодна за тачна мерења углова, као и полудневна. Изјутра, ускоро после рађања Сунца, бива још један период добрих и мирних ликова; али је он обично тако кратак, да се њиме ретко кад користе за мерење углова.

Разуме се, да је за време јасних сунчаних дана неопходно потребно, да се посматрања врше под кровом или сунцобраном, те да се ни у лимбу ни у осталим деловима инструмента не десе знатне промене, усљед непосредног сунчаног загревања, што би штетно утицало на тачност мерења. Ноћу се, уопште говорећи, јављају повољније околности за посматрања, зато што тада слабе узроци, који изазивају колебање ваздуха и бочну рефракцију. Доба најмирнијих ликова наступа нешто после заласка Сунца и траје до поноћи па и дуже. Релативна се корист од ноћних посматрања често доказивала ваљаним резултатима француских првокласних триангулација, чији су угли врло често били мерени ноћу, ради чега су се на сигналима стављале јаке лампе са рефлекторима, чија се рефлектована светлост упућивала ка тачци са које су ти сигнали посматрани. Тако су и при грандиозној тригонометриској вези алжирске са шпанском триангулацијом мерења углова са четири тачке вршена ноћу, при чему су тачке осветљаване биле силним електричним лампама; и, не гледећи на огромна растојања међу тачкама, која су досезала до 250 врста, измерени су се угли показали скоро тако исто сигурни, као и на обичним првокласним триангулацијама ($\epsilon = \pm 0''6$), и то у главноме због тога, што се светлосни зраци, пролазећи преко Средоземног Мора, нису скоро ниуколико подвргавали утицају бочне рефракције.

Па ипак, ноћна су посматрања скопчана са изврсним незгодама те стога не налазе општу примену.

34. Хелиотропи.

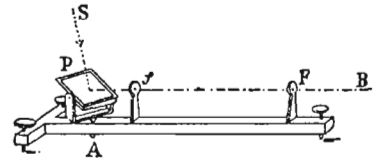
За олакшање визирања на врло удаљене тригонометриске тачке, чувени је Гаус смислио једну помоћну справу — *хелиотроп*, који се је од тога доба почео употребљавати свуда и врло често. Гаусов се хелиотроп састоји из системе два узајамно перпендикулрна огледала, већег PP и мањег pp (сл. 24), која се утврђује испред објектива дурбина Ff на прстену и шарниру тако, да



Сл. 24.

јој се могу дати сви могући нагиби у разним правцима. Ако се тим дурбином, који се налази на некој тригонометриској тачци A , навизира на какву другу тачку B па се затим мање огледало постави тако, да се у дурбину угледа рефлектовани са њега лик Сунца S , онда ће се једновремено са већег огледала PP сунчани зраци рефлектовати тачно у правцу fFB ; због тога ће се то веће огледало видети са B у облику јако светле тачке. После тога лице, које се налази код хелиотропа, треба само пажљиво да пази на потребни положај системе огледала према привидном дневном кретању Сунца, те да рефлектовани његов лик не би исчезао за посматрача на тачци B .

Још простији је хелиотроп, који је употребљавао В. Струве за време његових радова на руском мерењу степена. Тај се састоји из једнога лењира са два округла диоптра f и F и са огледалом P (сл. 25.), које се може да обрће око две осовине: хоризонталне и вертикалне. Помоћу линије диоптара fF навизира се на ону удаљену тачку B , куда се желе да упуте рефлектовани зраци светлости; затим се огледало



Сл. 25.

P постави у односу према Сунцу S тако, да диоптар f , који је њему окренут, баци своју сенку тачно на други диоптар F . Особите пак тачности у визирану помоћу диоптара на тачку B и у постављању огледала није уопште ни потребно, јер оно рефлектује читав конус зракова са отвором, који је раван угловном дијаметру Сунца, т. ј. око $\frac{1}{2}^\circ$

При употреби хелиотропа за ознаку тригонометријских тачака јавља се та незгода, што се мерење углова може вршити само за време јасних, сунчаних дана. Ипак ништа не смета, допуњивати таква посматрања ноћу, стављајући уместо хелиотропа јаке лампе са рефлекторима.

ГЛАВА IV.

МЕРЕЊЕ БАЗИСА.

35. Неопходна тачност мерења базиса.

У прошлој глави (чл. 26.) имали смо израз за средњу грешку ${}_a\epsilon_n$ неке стране a_n , која је у тригонометриској мрежи раздвојена од базиса a бројем n троуглова:

$$\frac{{}_a\epsilon_n^2}{a_n^2} = \frac{\epsilon_a^2}{a^2} + \epsilon^2 (\Sigma \cotg^2 A + \Sigma \cotg^2 B), \dots \dots \dots (1.)$$

у коме је ϵ означавало средњу грешку, с којом се мере угли у мрежи, а ϵ_a средњу грешку базиса. За ланац пак троуглова, општепримљеног нормалног облика, тј. равностраних, биће:

$$\frac{{}_a\epsilon_n}{a_n} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_a}{a}\right)^2 + \left(\epsilon \cdot \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)^2} \dots \dots \dots (2.)$$

Видели смо такође, да се угли у мрежи скоро никад не мере тачније, него са средњом грешком $\epsilon = \pm 0''.5 = \frac{1}{400000}$, тако да други члан у изразу (2.) не излази мањи од ових величина:

при $n =$	1	2	6	10
$\epsilon \sqrt{\frac{2n}{3}} =$	$\frac{1}{500000}$	$\frac{1}{350000}$	$\frac{1}{200000}$	$\frac{1}{150000}$

Па кад са таквом прогресијом расте нетачност извода из триангулације усљед саме грешке у мерењу углова, онда је сасвим бескорисно ићи пошто пото ка некаквом изванредном смањивању и првога члана $\frac{\epsilon_a}{a}$; јер је лако видети, да је већ при $n = 10$ његов утицај неосетан, ако он сâм буде $\frac{1}{500000}$. Стога се скоро увек може сматрати, да је оваква тачност мерења базиса довољна.

36. О базисним апаратима уопште.

За мерење базиса некада су се употребљавале масивне, дугачке *дрвене мере*, које су се стављале поступно једна за другом дуж мерене линије; али пошто је дрво изложено врло неправилним променама од утицаја температуре и влаге, то тачност мерења оваквим мерама већ не одговара тачности мерења

углова мреже помоћу ваљаних савремених инструмената; стога су на тачним триангулацијама дрвене мере давно већ изашле из употребе па замењене металним. Мере са разним припадностима и справама за тачно одређивање дужина самих тих мера и за поступно стављање њихово дуж линије која се мери, зову се *базисни апарати*. Конструкција је тих мера и апарата врло различита, и скоро у свакој држави, где се вршило мерење степенâ или опширни тригонометриски радови, био је властити базисни апарат, који се је више или мање стварно разликовао од осталих. Али уопште, сваки базисни апарат треба да одговара овим важним условима.

1.) Дужине мера, којима се мери базис, треба да се лако и тачно сравањују при одређеној температури са ма каквом непромењљивом *нормалном мером*; за та сравањања треба да служи нарочити апарат, т.зв. *компарататор*, чија конструкција зависи од каквоће и облика самих мера.

2.) Промене дужина мера услед температурних промена, тј. коефицијенти њихових ширења (дилатација), треба да буду добро испитани; сама пак температура мерâ за време мерења базиса треба да се одређује са потребном тачношћу.

3.) Стављање мерâ за време мерења базиса на потребним треножним основама треба да буде солидно и да се врши лако и брзо.

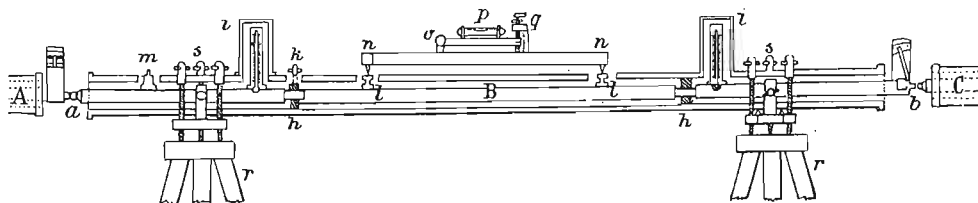
4.) Чврсти крајеви суседних мера не треба да се непосредно додирују, а заостало врло мало растојање међу њима треба да се мери каквим тачним начином.

5.) Мере треба да се тачно стављају по линији базиса, а извесни мали њихови нагиби, услед теренских прегипа, треба да се мере са потребном тачношћу.

Од многих базисних апарата, који одговарају овим условима, ми ћемо детаљније описати апарат В. Струве-а, који је служио за мерење најглавнијих базиса у Русији; што се тиче других базисних апарата, задржаћемо се само на њиховим главним одликама.

37. Струве-ов базисни апарат.

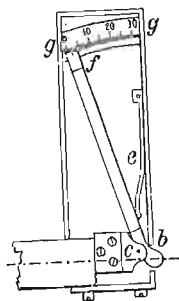
Струве-ов се базисни апарат састоји из 4 једнаке мере (А, В, С и D) од кованог жељеза дужине од 2 тоаза (12 франц. стопа) и око 4 сантиметра у страни квадратнога пресека. Мера се с једне стране завршава малим цилиндрићем (*a*) од тврдог челика (сл. 26.), с друге пак стране осетљивом полужицом (представљеном засебно на сл. 27. у увеличаном облику), чији краћи



Сл. 26.

крак са челичном, добро углачаном полусфером (*b*) представља други крај мере. Обрћући се око непомичне осе (*c*), тај се крак може, при слабом притиску на њега, да покрене у правцу осе мере тек врло мало; међутим,

у исто време казаљка (f) дужега крака, — стално потискиваног слабом опругом (e), — пролази знатни део лука (gg), подељеног на 30 делића. Покрету тога дужег крака за 1 подеок (који је раван $\frac{1}{2}$ парис. линије) одговара покрет првога, краћег за $\frac{1}{75}$ линије, тако да, при оцени одока десетих делова подеока на луку, дужина мере ($ab = 1728$ парис. линија) може да се одреди тачније од $\frac{1}{750}$ линије, т. ј. са релативном грешком $\frac{1}{750 \times 1728} = \frac{1}{1296000}$. Оваква покретљива конструкција тога краја мере, чинећи га тако рећи *меканим*, допушта, да се врши непосредни додир овога са *шврдим* крајем суседне мере (C) без и најмањег ударца, који би могао бити од штетних последица. За нормалну дужину сваке од тих мера треба сматрати ону, која одговара средњему положају казаљке f на луку (на 15. његовом подеоку).



Сл. 27.

Мера је затворена у дрвеном дугачком сандучету и лежи у њему на два месингана узвишења (h), који се налазе на растојању од њених крајева за $\frac{1}{2}$ целе њене дужине *), спајајући се с једним од њих завртњем (k) за кочење, а када је тај завртањ одврнут, онда се мера може слободно да покреће дуж сандучића за 2 — 3 сантиметра у једну или другу страну помоћу репића (m), који стрчи ван сандучића. Два термометра (i) смештени су са својим куглицама у мала удубљења, израђена у самој мери; скале пак њихове излазе из сандучића и заштићене су дрвеним кутијама са једном страном, која се отвара ради читавања температуре. Осим тога, кроз горњу даску сандучића пролазе још и два сточића (l) спојена са мером за стављање на њих нарочите справе са либелом, која служи за одређивање нагиба мере. За заштиту од брзих промена спољне температуре мера је увијена на целој својој дужини, заједно са куглицама термометара, у дебели слој вате.

Справа за одређивање нагиба састоји се из металног лењира (nn) у облику издуженог Т са три ножице, којима се ставља на сточиће (l). Крај алхидаде са либелом (p), — која се сбрће око осе o на том лењиру, — клизи по луку (q), подељеном на мале делиће, што омогућава одређивање нагиба сточића па и саме мере с тачношћу до 0.1 лучне минуте.

За потребно стављање мера за време мерења базиса служе дрвени троножни подметачи (r) и метални треношци (s) са по три вертикална завртња за спуштање и издизање мере, и, са два хоризонтална завртња за давање правца мери дуж линије, која се мери.

38. Сравњивање мера за мерење са нормалном мером.

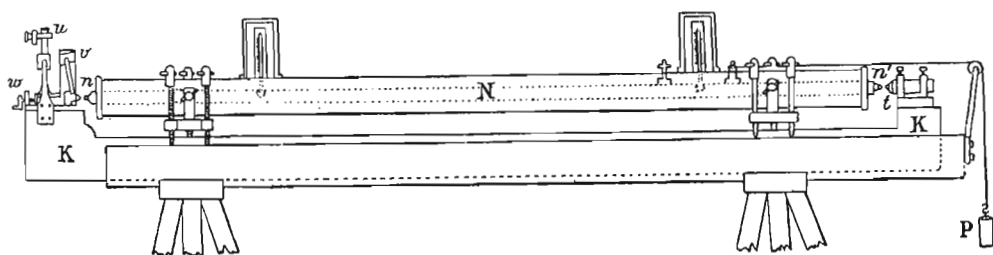
Нормална мера (N), чија се непроменљивост дужине чува са особитом брижљивошћу, чини неопходни саставни део базисног апарата од 4 мере за мерење. Оба краја су нормалне мере (n) и (n') (сл. 28.) *шврди* и завршени брижљиво углачаним полусферним површинама. Упоредивање с њоме свих мера за мерење врши се на *компарашору*, чији се главни део састоји из масивне растове греде (K), на чијем је једном крају утврђен непомични челични цилиндар

* При таквом растојању тачака ослонца од крајева мере, њено је изгибање услед властите тежине минимално.

дрић (t), сличан са тврдим крајевима мере, а на другом непомицини микроскоп (u) и покретна плочица са осетљивом полугом (v) и са хоризонталном скалом за читавање помоћу микроскопа са тачношћу $\frac{1}{1000}$ парис. линије.

Свака од мера за мерење ставља се на компаратор тако, да се њен меки крај (b) доведе у додир са непомичном тачком (t) тако, да казаљка осетљиве полуге његове стане тачно наспрам подеока 15. Кад се затим помоћу завртња (w) покрене плочица компараторова дотле, док се њена осетљива полука (v) не доведе у додир са тврдим крајем (a) мере, онда се микрометром микроскопа поставе кончићи његови на једну од црта скале и забележи прочитање тога микрометра: a , b , c или d , према томе, која се је од мера А, В, С или Д налазила на компаратору.

Када се на компаратор ставља нормална мера (N) (сл. 28.), онда се она помиче док се потпуно не доведе у додир са непомичном тачком (t) и то са изванредном



Сл. 28.

брижљивошћу помоћу тега (P), обешеног за њу, који је способан тек једва једва да покрене меру у њеном сандучићу. Примицање пак плочице и осетљиве полуге компаратора (v) ка другоме крају нормалне мере, као и одговарајуће прочитање (n) микроскоповог микрометра на пређашњу црту скале, врши се исто онако као код мера за мерење.

На тај начин разлике: $(a - n)$, $(b - n)$, $(c - n)$ и $(d - n)$, изражене у линеарној мери, показале у колико се разликују дужине свих мера за мерење од дужине нормалне мере при оној температури t_0 , коју су оне имале за време савјивања и која је читавана на свима њиховим термометрима. Оваква савјивања свих мера за мерење са нормалном треба вршити како до, тако и после мерења базиса.

39. Поступак при мерењу базиса.

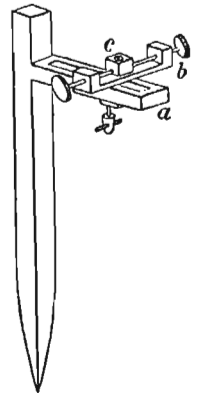
При мерењу базиса мере су окренуте увек својим меким крајевима (осетљивим полугама) у ону страну, куда се креће мерење; тврди пак њихови крајеви остају позади. Ради објашњења самога поступка при мерењу, претпоставићемо, да су све четири мере: А, В, С и Д већ постављене како треба на линији базиса и да су доведене у додир једна са другом; при томе нека је Д испред свију а А позади. Ради продужења мерења мера се А у своме сандучићу повуче врло пажљиво уназад од В па се пренесе напред на већ раније постављене треношце тако, да између њенога тврдог краја (задњег) и мекога (предњег) краја мере Д остане врло мало растојање; када се пак тој мери буде дао потребан положај по висини, по нагибу и по линији базиса помоћу завртања њених треножаца онда се она помоћу нарочитог кључа пажљиво и полагаано помиче у своме сандучићу дотле, док се не додирне са Д и то тако, да осетљива полука мере Д показује приближно 15 подеока лука. После овога се у дневник мерења уписује:

нагиб мере D, и стање термометара и осетљиве полуге предидуће мере C. Затим се скида мера B па пошто се постави на напред речени начин испред A, онда се читава на A нагиб а на D температура и осетљива полука; и т.д.

За стављање мера тачно у линију базиса служи универсални инструмент, који се претходно постави далеко унапред тако, да се његов дурбин креће тачно у вертикалној равнини, која пролази кроз оба краја базиса. Предњи крај сваке новопостављене мере треба да се налази тачно на вертикалном кончићу тога дурбина, те се по знацима посматрача кроз њега положај мере корегира.

Код извезаних посматрача постављање поједине мере са свима потребним посматрањима: нагиба, двају термометара и осетљиве полуге, изискује у средњем пко 3 минуте времена, тако да се при повољним околностима за један дан може измерити $\frac{2}{3}$ до $\frac{3}{4}$ врсте.

При завршетку дневнога рада, а тако исто и при прекиду његову за подуже време, например у случају кише, крај се последње мере пројектује на масивни жељезни колац, који се дубоко у земљу побије. При врху његовом налази се огранак (a) (сл. 29.) са прорезом, по којему може да клизи и да се завртњем одоздо утврди полука (b); по њој се пак покреће и завртњима учвршћује коцка (c) са малим кружићем на њеној горњој површини. Центар тога кружића и треба да буде тачна пројекција краја мере. Само пак пројектовање врши се помоћу малог универсалвог инструмента, који се ставља на неколико корака у правцу управном на правац базиса. Ради продужења рада крај се мере поново ставља тачно над том тачком на сличан начин. Исто се тако и започиње само мерење базиса с једнога од његових крајева, обележених на солидним каменим фундаментама под пирамидама.



Сл. 29.

Кад се дође до другога краја базиса, између њега и последње мере остаје увек неко растојање, мање од 2 тоаза; тај се остатак пажљиво мери једним лењиром, који се у хоризонталном положају прислања једним својим крајем уз осетљиву полуку мере па се у исто време на њега пројектује крај базиса помоћу универсалвог инструмента.

40. Срачунавање дужине базиса.

Означимо са l дужину једне ма које од 4 мере, добивене из сравњења њеног са нормалном мером N при температури t_0 , а изражену у париским линијама ($\frac{1}{864}$ тоаза), а са k коефицијент њенога ширења; тада ће дужина мере при температури t (прочитаној на оба термометра за време мерења базиса) бити $l[1 + k(t - t_0)]$. Затим, ако се са i значи нагиб мере (који се одређује помоћу раније описане справе) изражен у лучним минутама, онда ће хоризонтална пројекција дужине мере бити:

$$l \cos i = l - 2l \cdot \sin^2 \frac{i}{2} = l - \frac{l \sin^2 1'}{2} \cdot i^2.$$

Најзад, нека f буде прочитани положај осетљиве полуге, v вредност једнога делића њенога лука у парис. линијама, m сав број мера, стављених на базис а r остатак при завршетку мерења, измерени лењиром. Тада ће се дужина

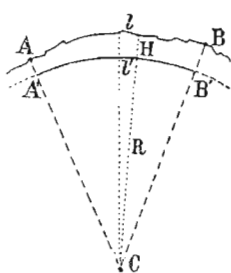
базиса L , изражена дужином нормалне мере N при температури t_0 , изразити овако:

$$L = m \cdot l + kl \cdot \Sigma(t - t_0) - \frac{l \sin^2 1'}{2} \cdot \Sigma i^2 + v \cdot \Sigma(15 - f) + r \quad (i.)$$

где су коефицијенти kl , $\frac{l \sin^2 1'}{2}$ и v код незнатих корекционих чланова узети подједнако за све мере.

Помоћу нагиба i мере одређује се такође и превишење предњег краја њеног над задњим са $l \cdot i \cdot \sin 1'$; а пошто се тај задњи крај ставља тачно наспрам предњег краја предидуће мере, то ће поступне суме $l \sin 1' \Sigma i = h$ изражавати висине појединих мера у односу према почетној, тј. оне ће дати тачни профил целог базиса, који је потребно знати приближно, ради пројектовања измерене дужине L на морску површину.

Нека R буде радиус кривине нивоске (водоравне) Земљине површине, H висина над том површином једне од мера l , а H_0 висина почетне тачке краја базиса A (сл. 30.), која је одређена нивелањем (глава V) Тада ће се за дужину l' те мере, као пројекције на морску површину, добити довољно тачни израз у оваквом облику:



Сл. 30.

$$l' = l \cdot \frac{R}{R + H} = l - l \cdot \frac{H}{R};$$

па ће стога дужина целог базиса $AB = L$, после свођења њеног на ту површину, бити:

$$A'B' = L - \frac{l}{R} \cdot \Sigma H = L - \frac{L}{R} \left(H_0 + \frac{\Sigma h}{m} \right) \quad (i.)$$

Нетачности у срачунатој дужини базиса L могу да се десе услед ових узрока: 1.) услед грешака у срачунивању мера за мерење са нормалном мером, 2.) услед грешака у постављању мера по линији базиса, 3.) услед грешака у одређивању нагиба мера, 4.) услед грешака у читавању стања осетљивих полуга и термометара, 5.) услед грешака у одмеравању остатка r и у пројектовању мера при прекиду и обнављању рада, 6.) услед извесне нестабилности мера на њиховим треношцима и 7.) услед нетачности одређивања температура мера помоћу њихових термометара.

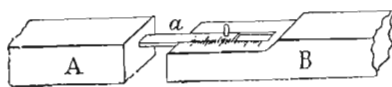
Утицај је последњег извора грешака највећи и ослабити га је тешко; јер, не гледећи на то, што су термометри са својим куглицама увучени у само тело мере и омотани као и мера ватом, они ипак могу показивати не баш праву температуру мере. Међутим нетачност у температури свега за $0^\circ.1$ изазива у мереној дужини релативну грешку око $\frac{1}{1000000}$, јер је коефицијент ширења жељеза раван 0.000011 (ширење за 1°C). Осим тога ни само простирање температура у свакој од мера за време мерења базиса не може бити потпуно равномерно, нарочито за време топлих, сунчаних дана.

Па ипак, не гледећи на све указане изворе грешака, од којих неке имају карактер сталних, неке пак чисто случајних, — средња грешка, с којом се мере базиси Струве-овим базисним апаратом, не надмаша $\frac{1}{500000}$ део целе измерене дужине, ако она није мања од 4 врсте (километра).

41.а. Разни други базисни апарати.

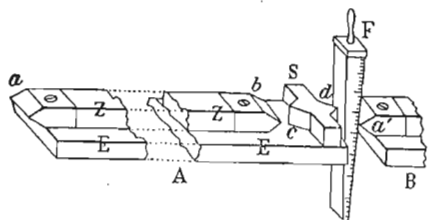
Код свију осталих базисних апарата мере за мерење израђују се од два разнородна метала, те да оне саме показују своју температуру, слично металним термометрима. Па ипак и у том случају показана њихова не излазе потпуно сигурно, јер простирање температуре у оба метала и на целој дужини мере није подједнако.

Прва мисао о конструкцији мера на овај начин припада францускоме научнику Борди. На његовом базисном апарату, који се је пређе употребљавао у Француској, свака од 4 мере састављена је из два лењира, једнога од платине а другог од месинга а оба спојена само на једном крају; разлика дужина та два лењира, која се мења са температуром, мерила се је на другој, слободном крају помоћу скале и нониуса. Мали пак интервал међу појединим мерама А и В (сл. 31.) мерио се нарочитим лењиром (*a*) за извлачење са нониусом. На тај су се исти начин мерили интервали између мера и код пређашњих несавршених базисних апарата, који су се употребљавали у другој деценији прошлог столећа на радовима старих руских триангулација.



Сл. 31.

У Немачкој, Белгији, Данској и Шведској базиси су мерени Бесел-овим базисним апаратом. Свака од 4 мера тога апарата, дужине од 2 тоаза, састоји се из жељезног (E) и цинканог (Z) лењира (сл. 32.). Краћи од њих, цинкани,

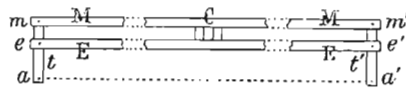


Сл. 32.

свршава се на оба своја краја у облику хоризонталних оштрица (*a*) и (*b*) и спојен је за жељезни само на једном крају (*a*); на другом пак крају жељезног лењира утврђена је челична призма (S) са две вертикалне оштрице (*c*) и (*d*), тако да се дужина мере рачуна од хоризонталне оштрице (*a*) до вертикалне (*d*). Интервал између (*b*) и (*c*),

који одређује температуру мере, а тако исто и интервал (*da'*) међу суседним мерама А и В, мери се с тачношћу до $\frac{1}{1000}$ париске линије танким стакленим клином (F). Овим се базисним апаратом мере базиси са таквом истом брзином и скоро са истом тачности као и са Струве-овим базисним апаратом.

Енглески компенсациони базисни апарат састоји се из 6 мера дужине од по 10 стопа, и из седам рамова са по 2 микроскопа на сваком, на растојању од $\frac{1}{2}$ стопе један од другог. Месингани (M) и жељезни (E) лењир сваке мере (сл. 33.) спојени су на средини (C), крајеви пак његови везани су им жељезним језицима (*t*) и (*t'*), који се слободно обрћу на шарнирима (*m*), (*e*), (*m'*) и (*e'*), а да би растојање међу тачкама (*a*) и (*a'*), — које



Сл. 33.

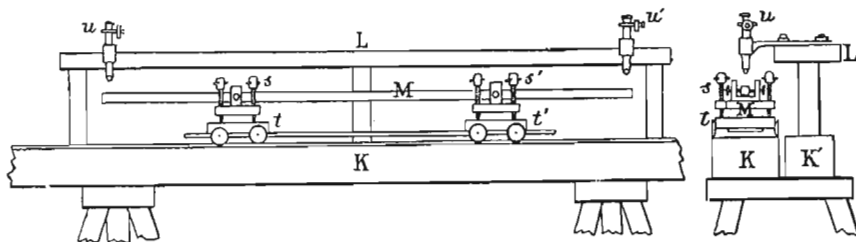
су обележене на тим језицима, — остало потпуно непромењиво при променама температурним, учињено је, да однос дужина *ta* и *m'a'* према дужинама *ea* и *e'a'* буде раван односу међу коефицијентима ширења месинга и жељеза. На сличан су начин конструисани и компенсирани и сви рамови са микроскопима Мере и рамови стављају се на солидним подлогама дуж линије базиса тако, да сваки пар микроскопа дође над тачкама (*a*) и (*a'*) двеју суседних мера, и тада

седам посматрача једновремено стављају кончиће микроскопских микрометара на одговарајуће тачке (a) и (a') и врше читање на добошима тих својих микрометара; предњи пак крај предње мере пројектује се на масивни жељезни статив, који затим служи као почетна тачка за следеће стављање целокупног апарата дуж линије базиса. Не гледећи на сложеност у конструкцији тога апарата и на изванредно лагани рад са њиме, тачност мерења базиса њиме (у Енглеској и Ист. Индији) није била већа од тачности мерења са Струве-овим и Беселовим базисним апаратима.

Најтачније су мерени базиси у Шпанији, као и они које су мерили француски геодети у Алжиру помоћу апарата, који се састоји само из једне мере дужине од 3 или 4 метра, и, из неколико масивних треножаца са микроскопима, који се стављају на истом растојању један од другог дуж базисне линије. Мера је састављена из челичног и месинганог лењира са шкалама врло fine поделе на крајевима њиховим, које се стављају под два суседна микроскопа и тиме одређује растојање међу њима. Овим су начином мерени базиси са тачношћу не мањом од $\frac{1}{1000000}$ њихове властите дужине, и то само благодарећи томе, што се је рад вршио под преносним дрвеним кровом, којим је апарат био заштићен од непосредног утицаја сунчаних зракова.

41.б. Сравнивање нормалних мера.

При мерењима степена и другим геодетским радовима у разним се државама и досад служе различитим нормалним мерама (тоаз, јард, метар, сажењ), од којих су неке означене тачкама или цртицама на крајевима њиховим, а неке стварним њиховим крајевима; стога је неопходно потребно савињење њихово међу собом. В. Струве је за то употребљавао компаратор врло прости конструкције. На дебелој дрвеној дасци L (сл. 34.), утврђеној на масивној греди K' ,

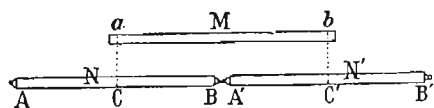


Сл. 34.

утврђена су два микроскопа (u) и (u') на жељеном растојању један од другог, а по шинама на другој греди K , паралелној са првом, слободно се креће на колицима (t) и (t') са треношцима (s) и (s') мера M , за савињење, и поставља својим крајевима под микроскопе.

Ако су мере за савињење означене цртицама или тачкама и ако су приближно исте дужине, онда се мала разлика у њиховим дужинама одређује непосредно једновременим прочитањем (са два посматрача) микроскопских микрометара; савињевање пак мера различите дужине, — например тоаза и метра врши се помоћу какве помоћне мере, подељене цртицама на већи или мањи број делова, чија се једнакост међусобна може контроласати и испитати на том истом компаратору.

Сравњивање мере M , означене цртицама (a) и (b) (сл. 35.), са мером N приближно исте дужине, али ограничене стварним својим крајевима A и B , који се не могу тачно посматрати помоћу микроскопа, В. Струве је вршио на овај врло оштроумни начин: Узме се још једна мера $A'B' = N'$, сасвим слична са N , и на срединама њиховим урежу танке помоћне цртице C и C' . Кад се, свака на својим колицима, поставе на компаратор, и, кад се доведу крајеви њихови B и A' у контакт, онда два посматрача стављају кончиће микрометара (u) и (u') (сл. 34.) на цртице C и C' (сл. 35.) те се из сравњења са мером M одређује мала разлика $(CB + A'C') - M = n$; а затим, кад се преврну мере N и N' тако, да се оне додирују својим другим крајевима B' и A , одређује се разлика $(C'B' + AC) - M = n'$, тако да се у суми добија



Сл. 35.

$$(CB + A'C' + C'B' + AC) = N + N' = 2M + (n + n').$$

Што се тиче разлике $N - N' = r$, то се она добива са високом тачности на напред описаном компаратору базисног апарата Струве (чл. 38.). А из суме и разлике мера N и N' лако се добива и дужина сваке од њих посебице.

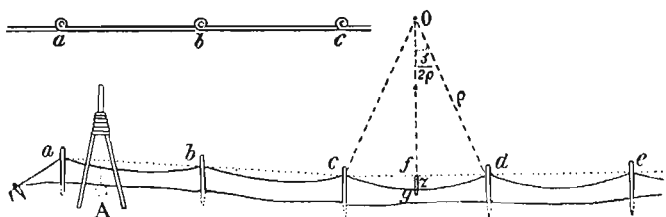
Из сличних се сравњења разних мера при различитим температурама одређују и њихови коефицијенти ширења.

42. Мерење базиса по канапу.

У извесним случајима, када се триангулација врши у циљу одређивања основних тачака за топографска премеравања а угли мере доста грубо, може се сматрати као довољно тачна и ова, даље изложена, метода мерења базиса, коју је први пут предложио (1837. г.) В. Струве:

На линији базиса, кроз сваких 15 до 20 сажњева, побија се коље (сл. 36.), и на њима ексерима обележавају тачке a, b, c, d, e и т.д. које се на неколико суседних колаца налазе на једној правој линији, а мали нагиби правих линија abc, cde и т.д. одређују се са свих прегибних тачака малим уни-

версалним инструментом. Затим се на том кољу добро затеже јаки канап или жица, омотавањем на местима означеним ексерима. Кад се на канапу обележи пројекција A' краја базиса A , што се врши истим универсалним инструментом, онда



Сл. 36.

два посматрача почињу да преносе по канапу од белеге A' одређену дужину, обележену на дрвеној летви двема танким цртицама; та пак дужина треба да буде сравњена са каквом нормалном мером, како пре, тако и после мерења базиса. При сваком преносу дужине летве на канап, наспрам предње њене цртице врши се на канапу оштрим ножићем лаки зарез, наспрам којег се прислања затим задња црта летве за одмеравање унапред, и т.д. На тај се начин може измерити дневно до 2 врсте с тачношћу до $\frac{1}{50000}$ те дужине, а по жици, и са већом брижљивошћу у раду, чак и два пут тачније.

Пошто чак и врло јако затегнути канап заузима, услед своје тежине, криволиниски облик, то је потребно, да се после измерене дужине $cg d = s$ добије одговарајућа јој тетива $cd = s'$. Ради тога се, посматрањем (за време самога мерења) са свакога прелома c канапа на други d , одређује малим лењирићем дужина стреле $fg = z$. Кад се са ρ означи радиус кривине $Oc = Od$ криве $cg d$, онда ћемо добити, да је приближно

$$z = \rho \left(1 - \cos \frac{s}{2\rho} \right) = \frac{s^2}{8\rho}, \text{ одакле је } 2\rho = \frac{s^2}{4z};$$

па је стога

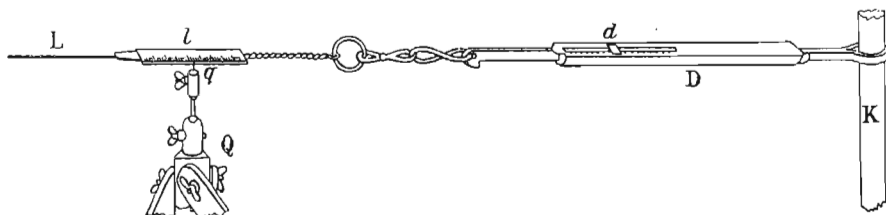
$$s' = 2\rho \cdot \sin \frac{s}{2\rho} = s - \frac{1}{6} \frac{s^3}{(2\rho)^2} = s - \frac{8}{3} \cdot \frac{z^2}{s}.$$

Према томе, поправка ће целе дужине базиса (при равним интервалима s између коља) бити $\frac{8}{3s} \Sigma z^2$. Што се тиче поправака, које зависе од нагиба тетива ab , bc , cd и т.д. оне су толико просте, да им не треба објашњења.

Летва за та мерења најбоља је од суве боровине, засићена уљем и обојена масном бојом за заштиту од утицаја влаге. Да се не би пренебрегла поправка, која зависи од температуре мере (коэффициент ширења боровог дрвета је око 0.000004), потребно је мерити температуру ваздуха како за време мерења базиса, тако и за време сравњивања летве са нормалном мером.

43. Мерење жицама.

Шведски инжењер Једерин предложио је, да се, ради убрзања посла, базиси мере дугачким жицама сталне дужине. Његов се апарат упочетку састојао управо из две жице L (сл. 37.) од по 25 метара дужине, и то једне челичне



Сл. 37.

а друге месингане. На крајевима њиховим утврђене су скале l , подељене на милиметре, за читавање. У саставни део тога базисног апарата улази и извесан број лаких статива Q , који се стављају дуж линије базиса на истом растојању од 25 метара. Сваки се од тих статива завршава на врху вертикалним цилиндрићем q са финим крстићем на горњој сферној његовој површини. Тај се цилиндрић може унеколико да помера на све стране и да се учврсти у жељени положај.

Кад се жица затегне преко два суседна статива тако, да скале олако клизе поред крстића њихових цилиндрића q , онда два посматрача читавају једновремено обе скале и тиме одређују растојање с тачношћу већом од $\frac{1}{2}$ милиметра. При томе се жица увек затеже, помоћу коља K , једном и истом одређеном снагом (10 килограма), која се манифестује на оба њена краја спиралним динамометрима D .

Утицај се температуре лако и врло тачно открива на тај начин, што се исто то растојање одмах мери и другом жицом са другојачим коефицијентом ширења. Најзад, да би се узео у рачун нагиб мерених интервала међу стативима, једновремено са мерењем базиса врши се и топографско нивелање (гл. V, чл. 49.), којим се одређују релативне висине врхова свих статива.

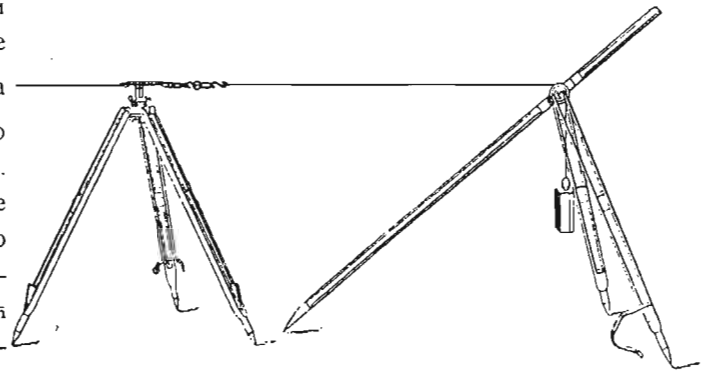
Мерење базиса овом методом врши се брже него и по канапу; по тачности пак оно се више ближи мерењу помоћу најсавршенијих базисних апарата. Али су постојали извесни недостаци, који су се састојали у томе, што се је у току времена констатовала извесна нестабилност у дужини жица и у томе што их је тешко било сравњивати с другим (нормалним) мерама*).

44. Базисне мреже.

Пошто је тешко наћи ма где за једну од страна првокласне тригонометриске мреже такво земљиште по коме би се она без препрека могла непосредно измерити као базис, и, пошто би мерење тачним базисним апаратом линије од 20 и више километара изискивало врло много труда и времена, то се за базис обично бира линија не дужа од 10 километара, а најчешће од 4 до 6 километара, па се он везује за најближу му страну првокласне триангулације помоћном *базисном мрежом* тако, да се тај прелаз ка дужиој линији изврши са што мањим губитком у тачности.

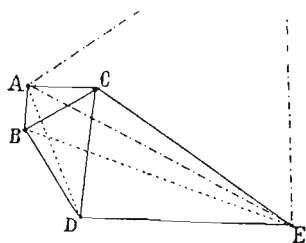
Ради тога се на базис $AB = a$ конструише троугао ABC (сл. 38.a.) са таквим углом C , да му страна $BC = a_1$ изађе знатно већа од a ; на њој се затим конструише сличан троугао BDC са још већом страном $CD = a_2$ и т.д. Још боље је наслонити на базис AB два троугла ABC и ABD (сл. 38.b.) те

*) Ускоро затим овај је базисни апарат усавршио француски научник Г и ј о м (садањи директор Интернационалног Биро-а за Мере и Тегове) тиме, што је у место две употребио само једну жицу 24^m дужине од своје легуре *invara*, јер јој је коефицијент ширења мањи од 0.000001 те грешка чак и од $1^\circ C$. у одређивању њене температуре не изазива грешку у дужини ни до $\frac{1}{1,000,000}$ дела те дужине. Уместо динамометра, он је употребио тегове од 10 килограма за затезање жица (сл. 37.a.), чиме је омогућено лакше намештање скала жице наспрам крстића статива и много тачније (многократно) читавање њихово (тачније у средњем од ± 0.1 милиметра), што већ на растојању 15 до 20 ($360-480^m$) статива осигурава тачност једнога мерења већу од $\frac{1}{1,000,000}$ дела те дужине. Жице се после фабријације подвргавају затезању са снагом чак од 100 килограма, и, нарочитим ударцима ради осигурања сталног стабилитета њихових дужина, и тек кад је то извршено, онда се дефинитивно одређују њихове дужине са великом тачности на нарочитој бази од 24 метра дужине, измереној нормалном мером од 4^m са највећом могућном тачношћу. Жице овако спремљене и сравњене са нормалном мером до и после мерења базиса осигуравају тачност мерења већу од $\frac{1}{1,000,000}$ дела његове дужине, (в. „*Mésures rapides des bases géodésiques*“ par Ch. Ed. Guillaume).

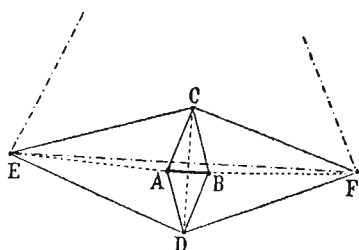


Сл. 37.a.

да се добије дугачка дијагонала $CD = a_1$ па на њу наслонити још два троугла CDE и CDF са дијагоналом $EF = a_2$. У првом се случају, најбрже повећање



Сл. 38.a.



Сл. 38.b.

страна достиже са најмањим губитком у тачности онда, када су троугли ABC , BCE , и т. д. правоугли са углима $C = D = E = 27^\circ$ (приближно), а у другом, када су троугли ABC , ABD , CDE и CDF равнокраки са углима $C = D = E = F = 33 \frac{1}{2}^\circ$ (при-

ближно). У оваквим се базисним мрежама мере обично правци и свих могућних дијагонала те да се тражена страна добије што сигурније.

Оно што смо рекли о најпогоднијем облику троуглова у једном и у другом начину повећавања базиса произлази из овога: У првом случају (сл. 38.a.), кад се означе угли $ACB = BDC = CED$ са A , а угли $BAC = CBD = CDE$ са B и кад се не узме у рачун грешка у мерењу самога базиса, онда ћемо имати уопште по формули (1.):

$$\frac{a \varepsilon_n^2}{a_n^2} = f^2 = \varepsilon^2 \cdot n (\cotg^2 A + \cotg^2 B) \text{ и } \frac{a_n}{a} = m = \left(\frac{\sin B}{\sin A} \right)^n$$

а одатле ћемо непосредно увидети, да свако повећање m треба да буде пропраћено са најмањом грешком f онда, када су угли $B = 90^\circ$; јер тада њихова нетачност неће имати никаква утицаја на грешку f . Да ограничимо још и онај рад, који је потребно утрошити на мерење углова A у свих n троуглова, на извесан дани број s раздела. Тада ће на сваки од углова A доћи по $\frac{s}{n}$ раздела а ако је средња грешка мерења угла једним разделом равна ε_0 , онда ће изаћи, да је $\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 \cdot \frac{s}{n}$ а израз ће се за f претворити у овај:

$$f = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \cdot n \cotg A = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \cdot \lg m \frac{\cotg A}{\lg \operatorname{cosec} A}.$$

Према томе најмања ће се величина за f добити онда, кад је $\lg \operatorname{cosec} A = \cos^2 A$, тј. онда, када је приближно $A = 27^\circ$ те ће онда наине бити:

$$f_{min.} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \cdot \frac{\lg m}{\sin 27^\circ \cdot \cos 27^\circ} = 2.5 \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \cdot \lg m \dots \dots \dots (3.)$$

У другом случају (сл. 38.b.) базисна мрежа, очевидно, треба да буде симетрична у односу према базису $AB = a$, тј. троугли ABC , ABD , CDE , CDF и т. д. треба да буду равнокраки са углима $C = D = E = F$, тако да, кад прву дијагоналу CD означимо са a_1 , другу EF са a_2 и т. д. имамо уопште

$$a_n = \frac{a}{2^n} \cdot \left(\cotg \frac{C}{2} + \cotg \frac{D}{2} \right) \left(\cotg \frac{E}{2} + \cotg \frac{F}{2} \right) \dots;$$

кад пак узмемо диференцијал логаритма овога израза по C , D , E , F и т. д. и кад ставимо затим, да је $C = D = E = F = \dots$, онда ћемо добити, да је

$$\frac{\partial a_n}{\partial a} = \frac{\partial C + \partial D + \partial E + \partial F + \dots}{2 \sin C};$$

према томе је

$$\frac{a \varepsilon_n^2}{a^2 n} = f^2 = \varepsilon^2 \frac{2n}{4 \sin^2 C} = \varepsilon^2 \cdot \frac{n}{2 \sin^2 C} \text{ и } \frac{a_n}{a} = m = \cotg^n \frac{C}{2}.$$

При истом пак броју s раздела, утрошених на мерење $2n$ углова C, D, E, F и т. д. изаћи ће, да је $\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 \cdot \frac{2n}{s}$ па је стога

$$f = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \frac{n}{\sin C} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \frac{\lg m}{\sin C \cdot \lg \cotg \frac{C}{2}};$$

одатле ће се добити најмања вредност за f онда, када је $\lg \cotg \frac{C}{2} = \sec C$, тј. онда када приближно буде угао $C = 33\frac{1}{2}^\circ$, те ће тада наиме бити

$$f_{min.} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \lg m \cdot \cotg 33\frac{1}{2}^\circ = 1.5 \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{s}} \cdot \lg m \cdot \dots \dots \dots (4.)$$

Кад сравнимо израз (3.) са овим (4.), видећемо, да се исто повећање базиса достиже другим начином са мањом грешком.



ГЛАВА V.

ОДРЕЂИВАЊЕ ВИСИНА.

45. Тригонометриско нивелање.

На свакој се тачци тригонометриске мреже, осим хоризонталних углова, мере обично још и зенитна растојања до осталих тачака у циљу одређивања њихових *разлика висинских* над продуженом морском површинџм, тако да ако се макар једна од њих налази на морској обали, онда се по тим разликама добијају поступно и *апсолутне висине* свих тачака. Овакво поступно одређивање висина тригонометриских тачака по измереним зенитним растојањима носи назив *геодешског* или *тригонометриског нивелања*.

Због тога што тачке А и В (сл. 39) нису далеко једна од друге, може се допустити, да се њихове вертикалне линије ZAA'O и Z₁BB'O пресецају међу собом у тачци О (где је, строго говорећи, растојање међу тим линијама најкраће) под углом AOB = C. Тада ће се на идеалној површини земног елипсоида ee' добити пројекције А' и В' тих тачака; пошто се пак радиус кривина B'O = A'O = ρ лука А'В' срачунатог из триангулације, одређује по формули (А.) [в. чл. 10.,] то ће бити познат и угао C = $\frac{s}{\rho}$.

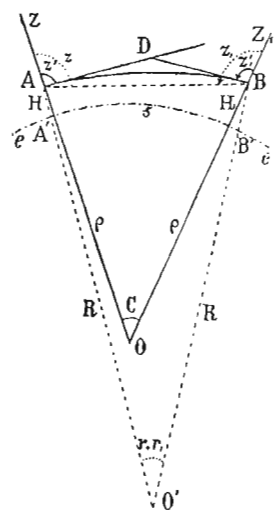
Нека су сад из посматраних зенитних растојања на тачкама А и В добивени угли ZAB = z и Z₁BA = z₁. Разлика ће се H₁ — H = h међу апсолутним висинама AA' = H и BB' = H₁ тачно одредити по њима из троугла ABO на овај начин

$$\frac{BO - AO}{BO + AO} = \frac{H_1 - H}{2\rho + H + H_1} = tg \frac{C}{2} \cdot tg \frac{z_1 - z}{2};$$

а ако се $tg \frac{C}{2}$ развије у ред и у место њега узме тај ред до чланова са s² закључно, онда ће се добити

$$h = H_1 - H = s \cdot tg \frac{z_1 - z}{2} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{s^2}{\rho^2} \right) \left(1 + \frac{H + H_1}{2\rho} \right) \dots \dots \dots (1.)$$

Али, пошто је одређивање зенитних растојања, — као што ћемо одмах увидети, — подвргнуто тако знатним грешкама, те је у сравњењу с њима корекциони члан



Сл. 39.

$\frac{1}{12} \frac{s^2}{\rho^2}$ скоро увек ништаван, онда је, на истој основи, скоро увек допуштено, занемарити и други корекциони члан $\frac{H + H_1}{2\rho}$. На тај начин излази¹ просто, да је

$$h = s \cdot \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} \dots \dots \dots (2.)$$

а ако се узме у обзир, да је $z_1 = 180^\circ - z + C$ и означи $90^\circ - z$, т.ј. висински угао предмета В над хоризонтом тачке А, са i , онда ће бити

$$h = s \cdot \operatorname{tg} \left(i + \frac{C}{2} \right) \dots \dots \dots (2'.)$$

Пошто се светлосни зрак, прелазећи од А ка В кроз слојеве ваздуха разне густине, прелама и постаје криволиниски, то ће се тачка В представити из А у правцу тангенте AD на ту криву те ће се *посматрано* њено зенитно растојање $\sphericalangle ZAD = z'$ разликовати од истинитог z за величину рефракције $z - z' = r$; исто ће се тако и при визирању из В на А, посматрано зенитно растојање $\sphericalangle Z_1BD = z'_1$ разликовати од истинитог z_1 за величину рефракције $z_1 - z'_1 = r_1$, која се јавља у тачци В. Познавање тих величина *земне рефракције* r и r_1 од стварног је значаја у геодетском нивелању.

46. Утицај земне рефракције.

Услед тога што распоред слојева ваздуха разне густине, који прилежу уз земну површину, зависи од многих локалних и метеоролошких погодаба, а и услед изванредне променљивости тога распореда, морамо се задовољити тек приближним познавањем утицаја земне рефракције, које је засновано на испитивањима из огледа. Најприроднија и најпростија је претпоставка, да је кривина зрака АВ на целом његовом путу међу блиским тачкама А и В једнолика (таква претпоставка, као што је познато из теорије астрономске рефракције, одговара промени густине разних слојева ваздуха пропорционално њиховим висинама), т.ј. сматрати криволиниски зрак АВ за лук круга некаквога радиуса $AO' = BO' = R$ (сл. 39.) а саме рефракције $\sphericalangle DAB = r$ и $\sphericalangle DBA = r_1$, које постоје у тачкама А и В, за равне међу собом. Тада ће се угао $AO'B = r + r_1$ изразити односом $\frac{AB}{R}$, а пошто је дужина лука АВ приближно равна $A'B' = s$, онда ћемо добити

$$r + r_1 = \frac{s}{R} = \frac{\rho}{R} \cdot C = k \cdot C \dots \dots \dots (3.)$$

Према томе, при узетој претпоставци, рефракције ће $r = r_1 = \frac{kC}{2}$ увек бити пропорционалне углу C или растојању s међу тачкама А и В. Величина $k = \frac{\rho}{R}$, којом је изражена кривина зрака АВ и која зависи само од закона промене густине разних слојева ваздуха међу тачкама А и В, зове се *коэффициент земне рефракције* (каткад се тако зове величина двапут мања, т.ј. $\frac{k}{2}$).

Коефицијент се рефракције k непосредно одређује из одговарајућих и једновремених посматрања зенитних растојања z' и z'_1 са ма каквих двају тачака А и В, јер чак и без претпоставке да је $r = r_1$, ми тада добијамо за спољни

угао $(r + r_1)$ четвороугла ADBO овај израз:

$$r + r_1 = 180^\circ - (z' + z'_1) + C \dots \dots \dots (4.)$$

А још боље и још простије ће се одредити рефракција r и све њене промене у току дана и године из посматрања са једне само тачке А, када је релативна висина друге тачке В већ тачно позната из геометриског нивелања, о чему ће бити речи у чл. 49.

Из многобројних огледа и посматрања, извршених у разним државама, излази, да се главне промене коефицијента земне рефракције k врше периодички у току сваког дана, а наиме: при рађању и заласку Сунца он бива од $+0.2$ до $+0.4$, око подне пак он је минималан, прелазећи при том понекад чак и у негативну величину, тако да предмети изгледају не повишени већ снижени. Али је најповољније време за посматрање зенитних растојања земних предмета оно исто што и за мерење хоризонталних углова, т.ј. момент најмирнијих ликова, који наступа по подне приближно после $\frac{2}{3}$ целог интервала између поднева и Сунчева заласка, јер се тада доњи слојеви ваздуха највише ближе стању равнотеже. Око тог момента *нормална* се величина коефицијента k креће од 0.12 до 0.16 а постепено повећање њено Δk са прираштајем времена за 1 час доста се добро изражава (по испитивањима немачког геодет. ђенерала Бајера) овом формулом

$$\Delta k = \frac{0.4}{T}, \dots \dots \dots (5.)$$

где T означаје трајање дана у часовима.

Разуме се, да нормална величина коефицијента k треба да зависи од стања барометра и термометра на тачци посматрања а тако исто и од тога, на каквој висини пролази светлосни зрак изнад земљишта. Из многих посматрања, извршених 1837. године на геодетском нивелању између Црног и Касписког Мора, В. Струве је извео ову емпиричку формулу за k :

$$k = \left(0.145 + \frac{0.85}{h}\right) \cdot \frac{b}{29} \cdot (1.015)^{16-t} \dots \dots \dots (6.)$$

где b означаје висину барометра у енгл. палчевима, t температуру у степенима Реомировим а h средњу висину визуре над земљиштем изражену у енгл. стопама.

Запажено је још, да коефицијет k излази нешто мањи у пределима, који леже недалеко од мора. Уопште пак, зависност је његова од доба године и разних локалних и метеоролошких погодаба тако велика, да се на нормалну његову величину, чак и у близини момента најмирнијих ликова, не може рачунати са мањом средњом грешком од $x = \pm 0.01$.

47. Разне методе тригонометриског нивелања.

Кад у формулама (2.) и (2'.) заменимо z и z_1 са посматраним зенитним растојањима z' и z'_1 или пак са висинским углима $i' = 90^\circ - z'$ и $i'_1 = 90^\circ - z'_1$, поправљеним за одговарајуће величине рефракције $r = \frac{k}{2} C$ и $r_1 = \frac{k_1}{2} C$, онда

ћемо добити израз за разлику висина h двеју тачака А и В:

$$h = s \operatorname{tg} \frac{1}{2} [(z'_1 + r_1) - (z' + r)] = s \operatorname{tg} \left(\frac{i' - i'_1}{2} + \frac{k_1 - k}{2} \cdot \frac{C}{2} \right) \dots \dots \dots (K)$$

за случај када су посматрања извршена на обема тачкама А и В,

и
$$h = s \operatorname{tg} \left(i' - r + \frac{C}{2} \right) = s \operatorname{tg} \left[i' + (1 - k) \frac{C}{2} \right] \dots \dots \dots (K')$$

када је само са једне тачке посматран висински угао i' .

Најтачније се одређује висина h , када два посматрача *једновремено* врше посматрања на обема тачкама А и В, зато што се онда утицај рефракције (са претпоставком да је $r = r_1$ или $k = k_1$) потпуно искључује. Ради веће тачности, а наиме ради искључења утицаја сталних инструменталних грешака (прегиба дурбина и грешака кружне поделе), које улазе у посматране угле i' и i'_1 , добро је, да оба посматрача промене своја места и да поново изврше посматрања.

Исто се тако добро и сигурно може одредити разлика висинска тачака А и В посматрајући их једновремено са какве интервалне тачке С, која се налази приближно на истом растојању и од А и од В, јер и при овој методи *нивелирања из средине* треба да се искључе у изводу разлике висинске h , како утицај рефракције, тако и напред споменуте инструменталне грешке.

Ради објашњења свега овога што смо овде изложили о изводу земне рефракције и о променљивости њеној, навешћемо читав низ одговарајућих и једновремених посматрања зенитних растојања z' и z'_1 између Дорпата (Јурјева) и Керзела, извршених 1829. године (*Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands von W. Struve*). Растојање s међу тим тачкама било је 17333 тоаза ($31\frac{2}{3}$ врсте); азимут те стране $\alpha = 22^\circ 22'$; средња пак ширина $\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = 58^\circ 33'$; тако да по формули А излази, да је $\rho = 3275500$ тоаза а

$$C = \frac{s}{\rho \sin 1''} = 18' 11''.6$$

Дорпатско време	$z' - 90^\circ$	$z'_1 - 90^\circ$	$r + r_1$	k	$\frac{z'_1 - z'}{2}$	h	v	
5. А в г у с т а	3 ^h 49 ^m	4'20".4	11'55".0	1'56".2	0.107	3'47".3	19.11	— 0.08
	4 27	4 14.3	11 50.3	2 7.0	0.116	3 48.0	19.16	— 0.03
	5 8	4 6.3	11 38.4	2 26.9	0.135	3 46.0	19.00	— 0.19
	5 40	3 57.6	11 27.6	2 46.4	0.152	3 45.0	18.91	— 0.28
	6 11	3 45.9	11 14.7	3 11.0	0.175	3 44.4	18.87	— 0.32
5.	21 6	4 21.1	12 2.1	1 48.4	0.099	3 50.5	19.38	+ 0.19
	21 52	4 23.4	12 8.4	1 39.8	0.091	3 52.5	19.54	+ 0.35
6. А в г у с т а	4 6	4 15.2	11 54.4	2 9.0	0.112	3 49.6	19.30	+ 0.11
	5 42	3 53.1	11 32.4	2 46.1	0.152	3 49.6	19.30	+ 0.11
	6 42	3 47.6	11 28.5	2 55.5	0.161	3 50.5	19.37	+ 0.18

Сред. $h = 19.19$ тоаза

У овој је табlici за сваки пар једновремено посматраних зенитних растојања z' и z'_1 изведена, по формули (4.) сума рефракција обеју тачака ($r + r_1$) и одговарајући јој коефицијент $k = \frac{r+r_1}{C}$. Променљивост његова у разне часове дана манифестована је овде доста очигледно. Пошто је 5. и 6. августа потпуно трајање дана T на ширини $\varphi_m = 58\frac{1}{2}^\circ$ приближно равно 16^h , то је вечерњи момент најмирнијих ликова требао да падне око $\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{2} = 5^h 20^m$ па се је у том моменту нормални коефицијент k добивао 0.143 и 0.146, при чему је променљивост његова за 1 час била

$$\Delta k = \frac{0.175 - 0.107}{6.2 - 3.8} = 0.028 \quad \text{и} \quad \Delta k = \frac{0.161 - 0.112}{6.7 - 4.1} = 0.019$$

што у средњем даје број 0.024, који се врло мало разликује од 0.025, који се добива по формули (5.).

Али су полуразлике зенитних растојања z'_1 и z' и висине h , нађене из њих по формули (К.) са претпоставком $r = r_1$, добивене 5. и 6. августа доста различне; према томе такво се одређивање, не гледећи на једновременост посматрања са обеју тачака, није потпуно оправдало у том случају.

48. Тачност тригонометриског нивелања.

У случају једностраног посматрања тачке В из А; грешка ће ∂h у одређивању разлике висинске h зависити како од грешке измереног висинског угла i' , тако и од нетачности коефицијента рефракције k , а добиће се, због маленкости угла $i' + (1 - k) \frac{C}{2}$ из формуле (К') у оваквом облику:

$$\partial h = s (\partial i' - \frac{1}{2} C \cdot \partial k);$$

ако пак претпоставимо, да су грешке $\partial i'$ и ∂k случајне и означимо средње квадратне њихове величине са ϵ и κ , онда ће средња грешка висине h , која се одређује, бити

$$\epsilon_h = s \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 \cdot \kappa^2} = s \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{s}{2\rho}\right)^2 \cdot \kappa^2} \quad \dots \quad (k)$$

Ако претпоставимо да је $\epsilon = \pm 1'' = \pm \frac{1}{200000}$ и $\kappa = \pm 0.01$ и ако изразимо растојања s у десетицама врста а ϵ_h у енгл. палчевима, онда ћемо одатле добити

$$\epsilon_h = 2.1 s \sqrt{1 + 2.8 s^2}, \quad \dots \quad (k')$$

при чему поткорена количина јасно показује, како силно расте грешка ϵ_h са повећањем растојања s међу тригонометриским тачкама А и В и то услед недовољно познате рефракције. При обостраним пак али неједновременим посматрањима тачке В из А и А из В, као што увек и бива на триангулацијама, грешка ће се ϵ_h смањити приближно само за величину односа 1 према $\sqrt{2}$.

На свакој се триангулацији обично одређује знатно већи број различитих разлика висинских, него што је то неопходно потребно ради извођења тражених надвишавања свих њених тачака над хоризонтом неке полазне тачке; због тога се највероватније величине тих непознатих треба да срачунавају по методи најмањих квадрата.

Претпоставимо например, да су у четвороуглу ABCD одређене разлике висина: $B - A = h_1$, $C - A = h_2$, $D - A = h_3$, $C - B = h_4$, $D - B = h_5$, и $D - C = h_6$ са одговарајућим средњим грешкама: ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , ϵ_4 , ϵ_5 и ϵ_6 . Кад се означе релативне висине тачака B, C и D у односу према A са x , y и z , имаћемо за њих 6 следећих једначина:

$$\begin{aligned} x &= h_1 & y - x &= h_4 \\ y &= h_2 & z - x &= h_5 \\ z &= h_3 & z - y &= h_6, \end{aligned}$$

а кад их доведемо на једну и исту тачност, — множећи их са квадратним кореном из њихових одговарајућих тежина: $g_1 = \frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_1^2}$, $g_2 = \frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_2^2}$ и т.д., где је ϵ_0 средња грешка при $g = 1$, — онда ћемо добити по методи најмањих квадрата три овакве нормалне једначине:

$$\begin{aligned} (g_1 + g_4 + g_5) \cdot x - g_4 \cdot y - g_5 \cdot z &= g_1 h_1 - g_4 h_4 - g_5 h_5 \\ (g_2 + g_4 + g_6) \cdot y - g_4 \cdot x - g_6 \cdot z &= g_2 h_2 + g_4 h_4 - g_6 h_6 \\ (g_3 + g_5 + g_6) \cdot z - g_5 \cdot x - g_6 \cdot y &= g_3 h_3 + g_5 h_5 + g_6 h_6, \end{aligned}$$

из којих ће се и одредити како највероватније величине x , y и z , тако и њихове тежине g_x , g_y и g_z .

Формуле (k) и (k') показују још и то, да ће се релативна висина h ма каквих двеју тачака A и B, удаљених једна од друге на растојању s , добити несравњено тачније, ако се између њих изабере неколико интервалних станица па поступно одреде њихове разлике висинске $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$, после чега ће изаћи

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n$$

И заиста, ако се ради простоте претпостави, да су интервали d међу свима n станицама једнаки, т.ј. $d = \frac{s}{n}$ а да је тачност мерења углова i' пређашња, т.ј. $\epsilon = \pm 1''$, онда ћемо по формули (k') добити

$$\epsilon_n^2 = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2} = 2.1 d \sqrt{n} \sqrt{1 + 2.8 d^2} = \frac{2.1}{\sqrt{n}} \cdot s \sqrt{1 + \frac{2.8}{n^2} \cdot s^2}.$$

На тај начин, при знатном броју n станица, утицај се рефракције на одређивање висине h може потпуно уништити, а случајне грешке, које произлазе у h услед нетачности мерења углова i' , — ослабити у односу 1 према \sqrt{n} .

мали нагиб дурбина i'' , који се манифестује либелом, а и извесна колимациона грешка његова c'' , то ка прочитању n треба да се додају поправке $d \cdot i'' \cdot \sin 1''$ и $d \cdot c'' \cdot \sin 1''$, при чему се растојање до летве d , које у њих улази, непосредно одређује из разлике читања n_1 и n_2 , јер је оно увек пропорционално тој разлици.

Сам рад на хоризонталном нивелању састоји се у томе, што се на свакој тачки стајања са нивелиром A_1, A_2, A_3 и т.д. (сл. 42.) врше читавања њиме на задњој и предњој летви, после чега се нивелир са задњом летвом преноси унапред а бивша предња летва остаје на своме месту, само се својом поделом обрне у другу страну. На тај начин, ако означимо поправљена *задња* прочитања са $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ а *предња* са $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, тражена ће се разлика висина почетне А и завршне тачке В изразити овако:

$$h = (r_1 - v_1) + (r_2 - v_2) + (r_3 - v_3) + \dots + (r_n - v_n);$$

да пак ни кривина Земље, ни рефракција, ни колимациона грешка дурбина, ни некоја неједнакост прстенова његових, ни место нуле на либели — не би имали никаквога утицаја на одређивану разлику $(r - v)$, нивелир се увек ставља на приближно једнаком растојању од обеју летава.

На основу напред реченога средња ће грешка, с којом се добива висина h , бити

$$\epsilon_h = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2n} = \frac{\epsilon}{\sqrt{3d}} \cdot \sqrt{s} \quad \dots \quad (k'')$$

где s означава дужину изнивелисане линије АВ а d средње растојање од нивелира до летве. Ако се узме да је оно 50 метара а $\epsilon = \pm 1^{mm}$, онда се може очекивати

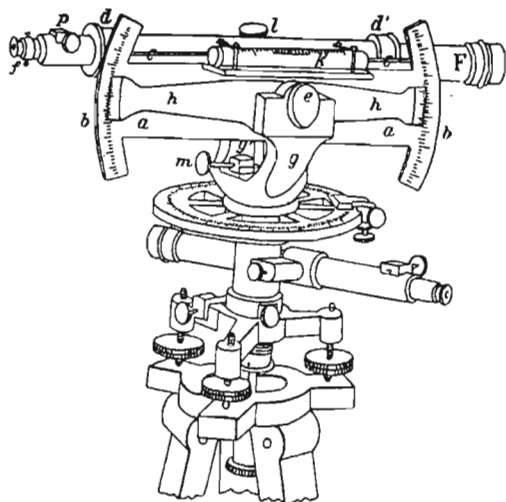
при $s = 1$ километру	$\epsilon_h = \pm 2.6$ милиметра
при $s = 100$ км.	$\epsilon_h = \pm 26^{mm} = \pm 1$ енгл. палац.

Ова се висока, теоретички очекивана, тачност скоро сасвим оправдава на *шачном нивелању* (Nivellement de précision), која се врше у Запад. Европи и у Русији. Одређене на тај начин висине најважнијих тачака на нивеланој линији означају се на грађевинама од тврдог материјала чврсто узиданим, солидним белегама, т.зв. *реперима* с тим, да би служиле као *ослонске* тачке за даље развијање нивелања на све стране. При томе се нивелања доводе до обала морских а на име до т.зв. *фушишкова*, по којима се одређује, из многогодишњих посматрања, средња, нормална висина морскога ниво-а.

50. Нивелир - теодолит.

У брдским пределима и на јако испресецаном земљишту хоризонтално се нивелање јако успорава услед тога, што се летве морају стављати на кратком растојању од нивелира. Да би се то избегло упстребљује се нивелир, којим се мере незнатни висински угли; али, као што ћемо даље видети, са знатним губитком у тачности нивелања.

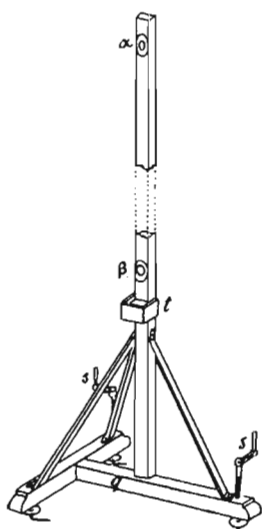
Такав се нивелир-теодолиш (сл. 43.) употребује у Русији. На њему се угли нагиба дурбина мере на луцима (b и b') вертикалног круга подељеног цр-тицама на растојању $5'$ једна од друге. Дурбин је (Ff) намештен са својим цилиндричним прстеновима (d и d') у коритастом жљебу (cc), и све се то обрће око хоризонталне осе (e), која лежи на носачима (g и g'). На једном од носача (g) чврсто је утврђена хоризонтална алхидада (hh) са либелом (k) и са два нониуса, помоћу којих се могу да врше читања на луцима круга с тачношћу до $4''$ па чак и до $2''$; на другом пак носачу (g') налази се микрометарни завртањ (m) за тачно визирање хоризонталним концем дурбина на жељени предмет, када је завртањ за кочење (l) уврнут. Конструкција осталих делова тога инструмента, — т.ј. вертикална оса са хоризонталним лимбом, алхидадним кругом и контролним дурбином, за мерење хоризонталних углова, — ничим се не разликује од конструкције малих универсалних инструмената. И вертикални и хоризонтални се угли мере нивелир-теодолитом онако исто, као и са сваким другим инструментом, при оба положаја вертикалног круга, с том само разликом, што при прелазу од положаја при кругу с десне стране на положај при кругу с лева, дурбин мора да се скине из свога лежишта, да би се преврнуо за 180° (ради искључења колимационе грешке), при чему завртањ (p), којим се покреће окуларна цев (f), прелази одозго надоле или обратно.



Сл. 43.

Летве, које припадају тим нивелирима (сл. 44.), имају са сваке стране само по две белеге (α) и (β) на растојању од $1\frac{1}{2}$ сажња једна од друге, а утврђене су на треножним основама (q) са завртњима (s) за изди-зање и спуштање, помоћу којих се и доводе у вертикални положај, који секонтролише двома унакрсним либелама (t).

Претпоставимо, да су нивелир-теодолитом измерени висински угли α и β (сл. 45.) на горњу и доњу белегу летве, а њихова разлика да је $\alpha - \beta = \Delta$. Кад означимо са h_α и h_β превишења тих белега над хоризонтом Ae дурбина а са d хоризонтално растојање до летве, и кад ради упрошћења примимо дужину летве ($\alpha\beta$) за јединицу, добићемо:



Сл. 44.

$$h_\alpha = d \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad h_\beta = d \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad h_\alpha - h_\beta = 1 = d \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

одакле је

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \Delta}, & h_\alpha &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \Delta}, \\ & & h_\beta &= \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \Delta}. \end{aligned} \right\} \dots (L)$$



Сл. 45.

Али пошто угли α , β и Δ нису велики а за сваки се мали угао x можемо користити приближним изразом

$$\lg \sin x = \lg \sin 1'' + \lg x + \sigma(x) = \lg \sin 1'' + \lg(x),$$

у коме $\lg(x)$ означава логаритам броја секунда угла x , сабран са познатом поправком $\sigma(x)$ логаритма синуса тог угла, — то се уместо тачних формула (L) добивају ове, које су згодније за срачунавање:

$$\left. \begin{aligned} \lg h_\alpha &= \lg(\alpha) - \lg(\Delta) - \lg \sec \beta \\ \lg h_\beta &= \lg(\beta) - \lg(\Delta) - \lg \sec \alpha \\ \lg d &= \text{доп. } \lg \sin 1'' - \lg(\Delta) - (\lg \sec \alpha + \lg \sec \beta) \end{aligned} \right\} \dots (L')$$

При томе једнакост $h_\alpha - h_\beta = 1$ служи као одлична контрола срачунатих висина h_α и h_β .

Сам пак поступак поступнога одређивања висинских разлика летава и инструмента остаје исти, као, и при хоризонталном нивелању, само се ради повећања брзине рада узима за нормално растојање од инструмента до летава око 100 сажњева (200^m) па чак и нешто више. Али утицај рефракције на таквим растојањима постаје већ врло осетан и притом неједнак за доњу и горњу белегу, тако да видна угловна величина летве Δ при једном и истом растојању d излази променљива, у зависности од промене рефракције у току дана, а то уноси у величине d , h_α и h_β , који се одређују, доста осетне грешке, како случајне, тако и сталне*). Услед тога наиме и излази, да је тачност таквога нивелања више него два пут мања од тачности хоризонталнога.

51. Радови са нивелир-теодолитом.

Ако се занемари утицај рефракције и због маленкости углова α , β и Δ допусти, да је $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 1$ и $\sin \Delta = \Delta \cdot \sin 1''$, онда ће се средња случајна грешка ϵ_d у срачунатом растојању d од инструмента до летве изразити у

*) За време радова са нивелир-теодолитом, који су ради опита вршени 1871. године (*Записки Военно-Топограф. Ошдѣла Главнаго Штаба*, томъ XXXVI), осим двеју белеге (α) и (β) посматрана је увек још и трећа (γ), за $\frac{1}{2}$ сажња испод (β); стога се утицај рефракције на њу манифестовао уопште јаче и очигледније. Разлика утицаја рефракције на њу и на белеге (α) и (β) била је у разним часовима дана и у разним летњим месецима оваква:

Часови дана	д о п о д н е			п о п о д н е			
	7-9	9-11	11-1	1-3	3-5	5-7	7-9
у јуну и јулу	-1''.9	-3''.2	-3''.2	-3''.3	-2''.8	-1''.7	+0''.5
у августу и септ.	-0.8	-1.6	-1.8	-1.4	-0.5	+0.2	+1.6

У посебним пак, у осталом врло ретким, случајима рефракција спушта доњу белегу за 20'' (око подне) и за толико исто је издиже (увече). То показује, да је штетно повећавати дужину летве тиме што би се доња белеге (β) спустила ниже. Одатле такође излази, да и при хоризонталном нивелању утицај рефракције на читања задње и предње летве може бити не сасвим једнак те ће при поступном пењању земљишта произвести у резултату нивелања поступно нагомилавање грешке.

зависности од средње грешке ϵ измерених висинских углова α и β овако

$$\frac{\epsilon_d}{d} = \frac{\epsilon}{\Delta} \cdot \sqrt{2} \quad \text{или} \quad \epsilon_d = \epsilon'' \sin 1'' \sqrt{2} \cdot d^2;$$

пошто је пак за нивелир-теодолит $\epsilon'' = \pm 1''.3$ (приближно), то ће при $d = 100$ саж. $= 100 \times \frac{2}{3}$ дужине летве изаћи

$$\epsilon_d = \frac{1''.3 \sqrt{2} \cdot (100)^2}{200000} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.04 \text{ летве} = \pm 0.06 \text{ саж.}$$

Према томе дужина линије од 20 врста (50 станица са инструментом) могла би се измерити са средњом грешком $\pm 0.06 \sqrt{2} \times 50 = 0.6$ сажња. Ма да, услед напред реченог утицаја рефракције, мерена на тај начин растојања и подлеже двапут већим средњим грешкама, ипак се и та тачност може сматрати као потпуно довољна те да се том методом одреди положај основних тачака за топографска премеравања. На тај начин ова метода може с успехом да замени нижу триангулацију у свима оним случајима, када је њено извршење ма чиме отежано, нпр. у врло шумовитим пределима; тада се нивелир-теодолитом пролази полигонски влак, састављен из дугачких линија, одређујући и све преломне хоризонталне угле на свима тачкама стајања са инструментом.

Такви су се радови вршили још од 1860. године у Финској, Костромској Губернији и у другим пределима у Русији. Нивелир-теодолит је тада снабдевен са три статива а он се преноси са једнога на други тако, да ако рад иде правцем $A, A_1, A_2 \dots A_n$ а инструмент се налази на тачци A_1 (сл. 46.), то ће задњи статив A , на коме су већ била извршена мерења, остати још на своме месту; трећи пак статив поставља се благовремено на тачци A_2 , на који се после преноси инструмент. Затим, по свршетку свих мерења на тачци A_1 , инструмент се преноси на статив A_2 , а статив A на следећу тачку A_3 , и т.д.; летве пак P, P_1, P_2, \dots стављају се увек приближно на средини интервала AA_1, A_1A_2 и т.д. На свакој тачци, после мерења висинских углова на белеге задње и предње летве, мере се на хоризонталном кругу правци како на те летве, тако и предидући и на следећи статив, при чему се контролним дурбином визира обично на једну од летава.

На тај ће начин у сваком троуглу, AA_1 образованом из два суседна статива A и A_1 и интервалне летве P , бити познати: растојања $AP = d, A_1P = d_1$ и угли $PA A_1 = e, PA_1 A = e_1$; по тим пак даним растојање $AA_1 = D_1$ међу самим стативима срачунаваће се овако

$$D_1 = d \cdot \cos e + d_1 \cdot \cos e_1 \dots \dots \dots (l.)$$

а неизоставна једнакост

$$d \cdot \sin e = d_1 \cdot \sin e_1 \dots \dots \dots (l')$$

послужиће као контрола мерења и срачунавања.

Кад је тако добивен полигон са познатим странама: $AA_1 = D_1, A_1A_2 = D_2, \dots$ и спољним углима: $AA_1A_2 - 180^\circ = \theta_1, A_1A_2A_3 - 180^\circ = \theta_2$ и т.д., лако ће се срачунати дужина ма које дијagonале AA_n тога полигона, која спаја полазну тачку A са ма којом тачком A_n , а тако исто и угао $XAA_n = \theta_n$, који та дијаго-

нала заклапа са правцем осе AX. Ради тога је још простије срачунавати постепено правоугле координате X и Y свију тачака стајања инструмента: A, A₁, A₂, ... у односу према правоуглим координатним осама AX и AY. Ако са Θ_0 означимо угао XAA₁, који заклапа прва страна полигона AA₁ са осом AX, онда ће угли, које састављају остале стране: A₁A₂, A₂A₃, ... са том осом, бити: $\Theta_0 + \Theta_1$, $\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2$, и т.д. а пројекције x и y тих страна на осе AX и AY биће:

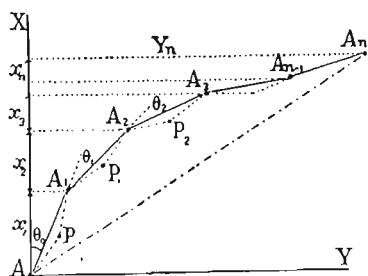
$$\begin{aligned} x_1 &= D_1 \cos \Theta_0 & y &= D_1 \sin \Theta_0 \\ x_2 &= D_2 \cos (\Theta_0 + \Theta_1) & y_2 &= D_2 \sin (\Theta_0 + \Theta_1) \\ &\dots & & \dots \\ x_n &= D_n \cos (\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{n-1}) & y_n &= D_n \sin (\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{n-1}); \end{aligned}$$

координате пак тачака A₁, A₂, ... A_n у односу према полазној тачци A наћи ће се овако:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 & Y_1 &= y_1 \\ X_2 &= x_1 + x_2 & Y_2 &= y_1 + y_2 \\ &\dots & & \dots \\ X_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n & Y_n &= y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{aligned}$$

Најзад, тражени угао Θ_n и дужина дијagonале AA_n добиће се из израза:

$$\operatorname{tg} \Theta_n = \frac{Y_n}{X_n}, \quad AA_n = \frac{X_n}{\cos \Theta_n} = \frac{Y_n}{\sin \Theta_n}.$$



Сл. 46.

Ова метода срачунавања координата може се безопасно примењивати у овом случају само за дужине AA_n, које нису веће од 40 врста, зато што би иначе сферни ексцеси срачунаваних троуглова могли достићи и до 4'', а то се већ не може занемарити.

Срачунавања пак висинских разлика $h_i = H_i - H_{i-1}$ и растојања D_i међу свима појединим станицама нивелир-теодолита A_{i-1} и A_i врши се на основу формула (L'), (l) и (l') по оваквом формулару:

Станице:	A _{i-1}	A _i
	предња летва	задња летва
Измерени угли	α + 0°48' 0"5	+ 0°57'43"0
	β + 0 0 18.6	+ 0 5 30.0
$\Delta = \alpha - \beta$	0 47 41.9	0 52 13.0
$\lg \alpha$	3.45946	3.53943
$\lg \sec \beta$	0	0
$\lg \Delta$	3.45665	3.49595
$\lg \sec \alpha$	4	6
$\lg \beta$	1.2695	2.5185
<hr/>		
$\lg h_\alpha$	0.00281	0.04348
$\lg h_\beta$	7.8128	9.0225
h_α	+ 1.0065	+ 1.1053
h_β	+ 0.0065	+ 0.1053
} (контрола)		
Висина $h_i = H_2 - H_1 =$	— 0.0988	= — 0.1482 саж.

Измерени угли: e	$0^{\circ}29'45''$	$0^{\circ}32'36''$
$lg \sin e$	7.9372	7.9769
$lg d$	1.22888	1.18951
$lg \cos e$	— 2	— 2
$d \cdot \sin e$	0.6237	0.6242
разлика		0.0005 (контрола)
$d \cdot \cos e$	72.07	65.83
Растојање $D_i =$	137.90	= 206.85 саж.

52. Барометарско нивелање.

Релативне висинске разлике тачака на видној земној површини $h = H_2 - H_1$ доста се често још одређују из посматрања стања барометра и термометра на тим тачкама.

Уобразимо на каквом месту под географском ширином φ вертикални цилиндрични стуб ваздуха са површином његовог попречног пресека равном произвољној јединици, па нека је δ густина ваздуха на висини H изнад Земљине морске површине, t његова температура, p притисак, т.ј. тежина свега ваздуха у том стубу, који се налази изнад те висине а g убрзање интензитета теже. Пошто притисак p треба да буде раван тежини живиног стуба у барометру, постављеног на висини H , то, кад са Δ означимо густину живе при температури 0° а са b висину барометарског живиног стуба сведеног на 0° , — имаћемо:

$$p = g \cdot b \cdot \Delta \dots \dots \dots (7.)$$

На суседној пак већој висини $(H + \partial H)$ притисак ће се p смањити за тежину ваздушнога стуба бескрајно мале висине ∂H и густине δ , т.ј. за

$$\partial p = - g \cdot \delta \cdot \partial H \dots \dots \dots (8.)$$

Али, ако са g_{φ} означимо убрзање интензитета теже на самој површини Земље а са R растојање до центра земнога елипсоида, то ће приближно бити:

$$g = g_{\varphi} \cdot \frac{R^2}{(R + H)^2};$$

по познатом пак Мариотовом закону је

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon t},$$

где δ_0 означава густину сувог ваздуха на морској површини под 45° . ширине при $t = 0^{\circ}$ и при нормалном притиску $p_0 = g_{45} \cdot 760^{mm} \Delta$ а ϵ коефицијент ширења ваздуха. Стављајући те величине g и δ у основну једначину (8.) наћи ћемо:

$$\frac{\partial p}{p} = - \frac{g_{\varphi} \delta_0}{p_0} \cdot \frac{R^2}{1 + \epsilon t} \cdot \frac{\partial H}{(R + H)^2} = \frac{g_{\varphi} \cdot \delta_0 R^2}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon t} \partial \left(\frac{1}{R + H} \right).$$

Интеграл тога израза у границама апсолутних висина H_1 и H_2 и њихових одговарајућих притисака p_1 и p_2 , због неизвесности аналитичке зависности t од H , може бити написан у оваквом облику

$$\frac{1}{M} \cdot \lg \frac{p_1}{p_2} = \frac{g_\varphi \delta_0 R^2}{p_0 (1 + \varepsilon t_m)} \left[\frac{1}{R + H_1} - \frac{1}{R + H_2} \right] = \frac{g_\varphi \delta_0}{p_0 (1 + \varepsilon t_m)} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right) \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)};$$

где је $M = 0.43429$ модул обичних логаритама а t_m нека средња температура на простору $H_2 - H_1$; кад пак разлике висинске $H_2 - H_1 = h$ нису велике, за t_m се може узети средња аритметичка из температура ваздуха t_1 и t_2 , које су се показале на висинама H_1 и H_2 , т.ј. $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$. Кад се занемари члан $\frac{H_1 H_2}{R^2}$, који је ништаван у сравњењу са 1, и кад се означи $\frac{p_0}{g_{45} M \delta_0}$ са C , добићемо

$$h = H_2 - H_1 = C \cdot \frac{g_{45}}{g_\varphi} \cdot (1 + \varepsilon t_m) \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{R}\right) \lg \frac{p_1}{p_2}.$$

Означимо сада са b_1 и b_2 стања барометра на висинама H_1 и H_2 сведена на 0° , а убрзања интензитета теже са g_1 и g_2 , онда ће, са истим одбацивањем малих величина $\frac{H_1}{R}$ и $\frac{H_2}{R}$, изаћи

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{g_1 b_1 \Delta}{g_2 b_2 \Delta} = \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{R + H_2}{R + H_1}\right)^2 = \frac{b_1}{b_2} \left(1 + 2 \frac{h}{R}\right)$$

или

$$\lg \frac{p_1}{p_2} = \lg \frac{b_1}{b_2} + 2 M \cdot \frac{h}{R};$$

стога ће дефинитивно бити

$$h = C \cdot \left(\frac{g_{45}}{g_\varphi}\right) \cdot (1 + \varepsilon t_m) \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{R}\right) \cdot \left(\lg \frac{b_1}{b_2} + 2M \frac{h}{R}\right) \quad \dots \quad (M.)$$

У оваквом је облику први пут Лаплас дао *баромешарску формулу* за одређивање разлика висинских h двеју тачака. У њој није узета у обзир влажност ваздуха, која га чини лакшим; због тога висине, одређене по тој формули, треба да се добивају унеколико мање од истинитих; уместо тога Лаплас је примио за коефицијент ширења ваздуха за 1°C број 0.0040, т.ј. нешто већи од истинитог $\varepsilon = 0.00366$, што, ниуколико не усложњавајући формуле, има извесног теорног оправдања, јер се са повећањем температуре и влажност ваздуха уопште повећава. Што се тиче константног броја $C = \frac{p_0}{g_{45} \cdot M \delta_0} = \frac{760^{mm} \Delta}{M \cdot \delta}$, то се теориска његова величина од близу 18400 метара замењује обично бројем 18336^m , изведеног емпиријским путем из многих одређивања висина.

На тај начин, тражена висина h одређује се по Лапласовој формули поступним приближењима; за олакшање пак рачунања по њој, састављају се помоћне таблице.

Од осталих познатих формула за исту циљ, најпростија је ова Бабинева формула

$$h = 16000 \cdot \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \cdot \left(1 + \frac{4}{1000} t_m\right) \dots \dots \dots (M')$$

помоћу које се с довољном тачности одређују мале висинске разлике h на средњим ширинама и која се лако добива из (M.), ако занемаримо чланове $\frac{H_1 + H_2}{R}$ и $2M \frac{h}{R}$ и ограничимо се само првим чланом у реду

$$\lg \frac{b_1}{b_2} = \lg b_1 - \lg b_2 = \lg \left(1 + \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right) - \lg \left(1 - \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right) = M \cdot 2 \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} + \dots$$

Из формуле се (M') јасно да видети, да на малим апсолутним висинама, када је $(b_1 + b_2)$ око 1500 милиметара, свакој промени барометарских стања $(b_1 - b_2)$ за 1^{mm} одговара висинска разлика од 11 метара приближно, тако да грешци $\partial b = 0.1^{mm}$, с којом се читава барометар, одговара грешка од $\partial h = 1.1$ метра у висини, која се одређује. Због нетачности пак одређивања средње температуре $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$ за $\frac{1}{4}^\circ C$. висине, које се одређују, треба да буду погрешке за $\frac{1}{1000}$ део њихове властите величине, т.ј. на пример, за 0.1 метра при $h = 100^m$ и за 1^m при $h = 1000^m$. У самој ствари пак барометарска одређивања великих висинских разлика ни изблиза нису тако повољна, зато што у барометарским формулама претпостављена равнотежа атмосфере и равномерност промене температуре ваздуха са пењањем врло је ретко остварљива.

Ипак, што год су две тачке мање удаљене једна од друге и што год је мања њихова висинска разлика h , у толико ће вероватнија бити претпоставка, да је $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$; због тога ће најбоља метода *баромешарског нивелања* бити онаква исто као и геодетског, т.ј. међу тачкама, које су далеко једна од друге, како по растојању тако и по висини, најбоље је изабрати неколико интервалних станица па постепено одређивати разлике висинске двеју суседних станица из *једновремених* посматрања барометра и термометра на њима.

ГЛАВА VI.

ЕЛИПСОИДНЕ КООРДИНАТЕ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ТАЧАКА.

53. Поларне и правоугле координате.

Ако се уобразе геодетске линије, које спајају какву тачку M_0 триангулације са другим њеним тачкама M_1, M_2, \dots, M_n (сл. 47.), то ће се релативан положај њихов на површини идеалног земног елипсоида одредити дужинама тих линија

$$M_0M_1 = s_1, \quad M_0M_2 = s_2, \quad \dots \quad M_0M_n = s_n$$

и азимутима њиховим

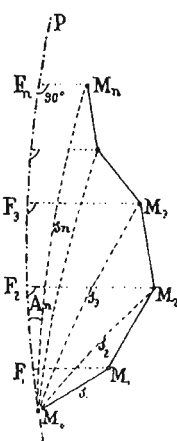
$$\sphericalangle PM_0M_1 = A_1, \quad \sphericalangle PM_0M_2 = A_2, \quad \dots \quad \sphericalangle PM_0M_n = A_n$$

Ове елипсоидне координате тачака зову се *поларне*.

За постепено срачунавање њихово потребно је знати само приближну ширину B_0 полазне тачке M_0 и геодетски азимут A_1 прве триангулационе стране $M_0M_1 = s_1$; јер, кад се реши [по формулама (E') главе II] сфероидни троугао $M_0M_1M_2$, чије су стране M_0M_1 и M_1M_2 и угао $M_0M_1M_2$ дати из триангулације, наћи ћемо дужину $M_0M_2 = s_2$ и угле $M_1M_0M_2$ и $M_0M_2M_1$, а одатле ће нам бити познат и азимут $\sphericalangle PM_0M_2 = A_2$; кад се затим реши на исти начин троугао $M_2M_0M_3$, добићемо поларне координате $M_0M_3 = s_3$ и $\sphericalangle PM_0M_3 = A_3$ за тачку M_3 , и т.д. При томе ће се радиуси кривина M и N , који улазе у израз за сферни ексцес троуглова, унеколико мењати у зависности од ширине тачака $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$; али пошто их за ту циљ треба знати тек приближно, оне се могу узети просто са раније састављене карте триангулације.

Исто се тако могу замислити у свима тачкама M_1, M_2, \dots, M_n геодетске линије $M_1F_1, M_2F_2, M_nF_n, \dots$, које пресецају почетни меридијан M_0P под правим углима; тада ће се положај сваке тачке M_n у односу према почетној M_0 одредити дужинама лукова:

$$M_0F_n = X_n \quad \text{и} \quad F_nM_n = Y_n.$$



Сл. 47.

Ове се елипсоидне координате зову *правоугле* и лако се срачунавају из поларних s_n и A_n на овај начин: на основу Лежандрове теореме, равни троугао $M'_0M'_nF'_n$ са истим странама као и троугао $M_0M_nF_n$ имаће угле

$$\sphericalangle F'_nM'_0M'_n = A_n - \frac{\omega}{3}, \quad \sphericalangle M'_0F'_nM'_n = 90^\circ - \frac{\omega}{3}, \quad \sphericalangle M'_0M'_nF'_n = (90^\circ - A_n + \omega) - \frac{\omega}{3},$$

где је
$$\omega = \frac{s_n^2 \cdot \sin A_n \cdot \cos A_n}{2 MN \sin 1''};$$

а пошто се због маленкости ω увек може узети, да је $\sin \sphericalangle M'_0F'_nM'_n = \cos \frac{\omega}{3} = 1$, то ће изаћи просто

$$\left. \begin{aligned} X_n &= s_n \cdot \frac{\sin \sphericalangle M'_0M'_nF'_n}{\sin \sphericalangle M'_0F'_nM'_n} = s_n \cdot \cos \left(A_n - \frac{2}{3} \omega \right) \\ Y_n &= s_n \cdot \frac{\sin \sphericalangle F'_nM'_0M'_n}{\sin \sphericalangle M'_0F'_nM'_n} = s_n \cdot \sin \left(A_n - \frac{1}{3} \omega \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.)$$

Када просторија, која треба топографски да се премери, није сувише велика, она се може поделити на мање квадратне делове па основне тригонометриске тачке пренети на одговарајуће картографске секције по њиховим правоуглим координатама X_n и Y_n .

На тај се начин права M_0X на равнини узима уместо меридијана тачке M_0 а перпендикуларна на њу M_0Y уместо геодетске линије M_0Q перпендикуларне на M_0P , тако да положај на карти тачке M_n , конструисане по координатама X_n и Y_n излази нетачан у том смислу, што растојање њено X_n до осе M_0Y излази нешто веће од истинитог најкраћег њеног растојања $M_nG = X'_n$ до геодетске линије M_0Q . Али се оно, слично са Y_n , добива из сфероидног правоуглог троугла M_0M_nG у облику

$$X'_n = s_n \cdot \sin \left(90^\circ - A_n - \frac{\omega}{3} \right) = s_n \cdot \cos \left(A_n + \frac{1}{3} \omega \right);$$

стога је

$$\Delta X = X_n - X'_n = s_n \cdot \cos \left(A_n - \frac{2}{3} \omega \right) - s_n \cdot \cos \left(A_n + \frac{1}{3} \omega \right) = 2s_n \sin \frac{\omega}{2} \sin \left(A_n - \frac{1}{6} \omega \right)$$

или приближно

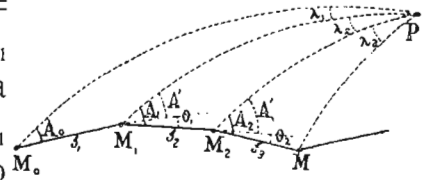
$$\Delta X = X_n - X'_n = s_n \cdot \omega \cdot \sin A_n = \frac{s_n^3 \sin^2 A_n \cos A_n}{2 MN} = \frac{X_n \cdot Y_n^2}{2 MN} \dots \dots (2.)$$

Кад је $X_n = Y_n = 100$ врста, то износи око 7 сажњева те је и за карте размере 1:42000 већ осетно. Због тога се такве просте правоугле координате не могу употребити за тачна топографска премеравања на већим просторијама од 200 врста у пречнику, већ се у том случају употребљују пројекције, у којима су те разлике елиминисане до тачности, која је неопходно потребна према размери у којој се врши премеравање и исцртавају карте.

54. Геодетске ширине и дужине.

Нека су $M_0M_1 = s_1$, $M_1M_2 = s_2$, ... стране тригонометриске триангулације (сл. 48.) а $\sphericalangle M_0M_1M_2 = 180^\circ + \Theta_1$, $\sphericalangle M_1M_2M_3 = 180^\circ + \Theta_2$ и т.д. угли међу тим странама, добивени после извршеног равнања триангулације. Ако се усвоје

извесне одређене димензије земнога елипсоида, например Кларкове (чл. 3.), и, ако се из астрономских посматрања одреде ширина B_0 какве тачке M_0 и азимут $\sphericalangle PM_0M_1 = A_0$ стране M_0M_1 , то ће се по тим даним потпуно одредити и положај на том елипсоиду тачке M_1 , т.ј. њена ширина $B_1 = B_0 + \beta_1$, њена дужина од прве тачке $\lambda_1 = \sphericalangle M_0PM_1$ а тако исто и азимут на њој $A'_1 = A_0 + \delta_1$ продужења геодетске линије M_0M_1 . После тога, по ширини B_1 тачке M_1 , по лин. дужини друге стране $M_1M_2 = s_2$ и по азимуту њеном $\sphericalangle PM_1M_2 = A_1 = A'_1 + \Theta_1 = A_0 + \delta_1 + \Theta_1$, одредиће се ширина B_2 тачке M_2 , дужина њена $\lambda_2 = \sphericalangle M_1PM_2$ од тачке M_2 и азимут $A'_2 = A_1 + \delta_2$ продужења геодетске линије M_1M_2 , и т.д. тако да, кад се означи ради скраћења



Сл. 48.

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = [\beta_n], \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n = [\delta_n],$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = [\lambda_n], \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \dots + \Theta_n = [\Theta_n],$$

имаћемо за ма коју тачку M_n :

$$B_n = B_0 + [\beta_n], \quad L_n = [\lambda_n], \quad A'_n = A_0 + [\delta_n] + [\Theta_n] \dots \dots \dots (3.)$$

Нађене на тај начин, на усвојеном земном елипсоиду, ширине B_n и дужине L_n свих тачака а тако исто и азимути A'_n свију страна мреже, носе назив *геодетских*. Постепено њихово срачунавање, као што ћемо видети, изискује решење ове основне задаће:

По даној на земном елипсоиду ширини B_0 тачке M_0 и азимушу на њој A_0 геодетске линије крашке лин. дужине $M_0M_1 = s_1$ одредиши: 1.) Ширину B_1 другог краја те линије M_1 , 2.) његову дужину λ и 3.) азимуш на њему A' продужења линије M_0M_1 ; при чему се мале разлике $B_1 - B_0 = \beta$, λ и $A' - A_0 = \delta$ треба да срачунавају са тачношћу не мањом од $0''01$ те да се при даљем сабирању њиховом по формулама (3.) неби постепено нагомилавале грешке, те надмашале оне, којима су подвргнута одређивања ширинâ, дужинâ и азимутâ из астрономских посматрања.

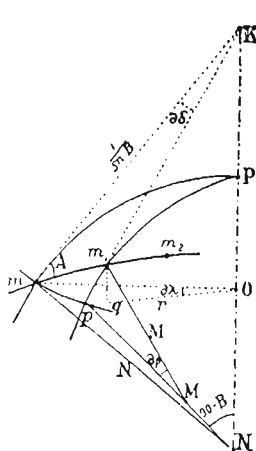
55. Однос између разлика ширина, дужина и азимута на земном елипсоиду и на сфери.

Замислимо какав бескрајно мали елемент $mm_1 = ds$ геодетске линије M_0M_1 , који полази из тачке M_0 под азимутом A_0 , и означимо ширину његова краја m са B , а азимут $\sphericalangle Pmm_1$, који он саставља са меридијаном Pm , са A (сл. 49.); означимо затим, као и увек, радиус кривине меридијанског пресека у тачци m са M , радиус кривине пресека, перпендикуларног на овај, т.ј. дужину нормале mN , са N и радиус $mO = N \cos B$ паралелнога круга тачке m са r . Кад повучемо кроз суседну тачку m_1 меридијански пресек Pm_1p , који пресеца паралелу тачке m у p , добићемо из бескрајно малог правоуглог троугла mm_1p за разлику $\delta\beta$ ширинâ тачака m и m_1 и за разлику $\delta\lambda$ њихових дужина ове изразе:

$$m_1p = M \cdot \delta\beta = ds \cdot \cos A \quad \text{или} \quad \delta\beta = \frac{ds}{M} \cdot \cos A \dots \dots \dots (4.)$$

$$mp = r \cdot \delta\lambda = ds \cdot \sin A \quad \delta\lambda = \frac{ds}{N} \sin A \sec B \dots \dots \dots (5.)$$

Нека су mK и m_1K праве по којима се тангенцијална равнина, — која у себи садржи елемент mm_1p , — пресеца са равнинама меридијана mPN и m_1PN .



Пошто се, по познатој особини геодетске линије (гл. I, чл. 14.), њена тачка m_2 , суседна са m_1 , мора налазити на пресеку елипсоида, који пролази кроз нормалу тачке m_1 и кроз предидућу тачку m , то ће разлика азимута $\partial\delta = \sphericalangle Km_1m_2 - \sphericalangle Kmm_1$ бити тачно равна углу mKm_2 , који се зове *зближење меридијанских линија* mK и m_1K ; а за то зближење добија се из троугла mKp овакав израз:

$$mp = \frac{r}{\sin B} \cdot \partial\delta = r \cdot \partial\lambda \quad \text{или} \quad \partial\delta = \partial\lambda \cdot \sin B = \frac{\partial s}{N} \sin A \operatorname{tg} B \dots (6)$$

Сл. 49.

Уобразимо сад на сфери извеснога радиуса R полазну тачку M'_0 са оном истом ширином B_0 , коју има тачка M_0 на земном елипсоиду, па повуцимо из ње лук великога круга $M'_0M'_1$ те исте лин. дужине s и под оним истим азимутом A_0 , као и код геодетске линије M_0M_1 , при чему ће се на крају тог лука у тачци M'_1 добити: потпуно одређена ширина b_1 , дужина λ' и азимут a' продужења лука $M'_0M'_1$. Тада ће свакоме елементу $mm_1 = ds$ одговарати на сфери једнак с њиме по лин. дужини елемент $m'm'_1 = ds$, али већ са ширином b и са азимутом a у тачци m' , који се разликују од елипсоидних B и A ; разлика пак ширина ($\partial\beta'$), дужина ($\partial\lambda'$) и азимута ($\partial\delta'$) у тачкама m' и m'_1 изразиће се, слично предидућем, овако:

$$\partial\beta' = \frac{\partial s}{R} \cdot \cos a, \quad \partial\lambda' = \frac{\partial s}{R} \cdot \sin a \sec b, \quad \partial\delta' = \frac{\partial s}{R} \cdot \sin a \operatorname{tg} b;$$

стога ће се изрази (4.), (5.) и (6.) представити у оваквом облику:

$$\partial\beta = \frac{R}{M} \cdot \frac{\cos A}{\cos a} \cdot \partial\beta', \quad \partial\lambda = \frac{R}{N} \cdot \frac{\sin A \cdot \sec B}{\sin a \cdot \sec b} \cdot \partial\lambda', \quad \partial\delta = \frac{R}{N} \cdot \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{\sin a \operatorname{tg} b} \cdot \partial\delta';$$

тако да ће за целу дужину геодетске линије s изаћи:

$$\beta = \Sigma \frac{R}{M} \cdot \frac{\cos A}{\cos a} \cdot \partial\beta', \quad \lambda = \Sigma \frac{R}{N} \cdot \frac{\sin A \sec B}{\sin a \sec b} \cdot \partial\lambda', \quad \delta = \Sigma \frac{R}{N} \cdot \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{\sin a \operatorname{tg} b} \cdot \partial\delta'.$$

Али, пошто се радиуси кривина M и N земнога елипсоида мењају врло мало на сразмерно малој лин. дужини s , то се уместо њих могу у тим сумама узети средње њихове вредности M_m и N_m , које одговарају средњој ширини $B_m = \frac{1}{2}(B_0 + B_1)$ крајњих тачака геодетске линије; за радиус пак сфере најбоље је узети величину $R_m = \sqrt{M_m N_m}$, те да се како $\partial\beta'$, тако и $\partial\lambda'$ и $\partial\delta'$ што мање разликују од њима одговарајућих елипсоидних разлика $\partial\beta$, $\partial\lambda$ и $\partial\delta$. Тада ће се и све сферне ширине b и азимоти a тако мало разликовати од елипсоидних B и A , да се и за односе $\frac{\cos A}{\cos a}$, $\frac{\sin A}{\sin a}$, $\frac{\sec B}{\sec b}$, $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} b}$ могу узети средње њихове величине, које одговарају средњим азимутима и ширинама:

$$A_m = \frac{A_0 + A'}{2}, \quad a_m = \frac{A_0 + a'}{2}, \quad B_m = \frac{B_0 + B_1}{2} \quad \text{и} \quad b_m = \frac{B_0 + b_1}{2}.$$

На тај ће се начин мале разлике β , λ , и δ на елипсоиду изразити помоћу сферних разлика $\beta' = b_1 - B_0$, λ' и $\delta' = \alpha' - A_0$ овако:

$$\beta = \frac{R_m}{M_m} \cdot \frac{\cos A_m}{\cos \alpha_m} \cdot \beta', \quad \lambda = \frac{R_m}{N_m} \cdot \frac{\sin A_m \sec B_m}{\sin \alpha_m \sec b_m} \cdot \lambda', \quad \delta = \frac{R_m}{N_m} \cdot \frac{\sin A_m \operatorname{tg} B_m}{\sin \alpha_m \operatorname{tg} b_m} \cdot \delta' \dots (N.)$$

Остаје нам само да видимо, за какве ће се наине величине s добивати по формули (N) разлике β , λ и δ с тачношћу од $0''.01$ например. Кад узмемо од тачке M_0 лин. дужину s под разним азимутима A_0 , увидећемо, да ће разлика ширина $\beta = B_1 - B_0$ изаћи највећа кад је $A_0 = 0^\circ$; у том ће се случају, према томе, десити и највећа грешка због допуштења, да су радиуси кривина M_m и N_m непромењљиви; али у том случају излази, да су $\lambda = 0$ и $\delta = 0$ те од формула (N.) остаје само једна нетачна:

$$M_m \beta = R_m \beta' = s, \dots \dots \dots (N')$$

која је нетачна стога наине, што се лин. дужина s лука елиптичког меридијана међу ширинама B_0 и B_1 строго изражава овако:

$$s = \int_{B_0}^{B_1} M \cdot \partial B = a (1 - e^2) \int_{B_0}^{B_1} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} \cdot \partial B;$$

кад се пак занемаре четврти и виши степени малог ексцентрицитета e , како у изразу тога интеграла, (гл. VII, чл. 60.) тако и у величини M_m , имаћемо:

$$\int_{B_0}^{B_1} M \cdot \partial B = a (1 - e^2) \int_{B_0}^{B_1} (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B) \partial B = a \beta (1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \cdot \cos 2 B_m)$$

$$M_m \cdot \beta = a \beta (1 - e^2) (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B_m) = a \beta (1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cdot \cos 2 B_m);$$

а пошто је
$$\frac{\sin \beta}{\beta} = 1 - \frac{\beta^2}{6}$$

то ће грешка Δs у лин. дужини s , срачунатој по формули (N'), бити

$$\Delta s = M_m \cdot \beta - \int_{B_0}^{B_1} M \cdot \partial B = a \frac{e^2}{8} \cdot \beta^3 \cdot \cos 2 B_m.$$

Према томе и разлика ширина β треба да се добије по формули (N') са грешком

$$\Delta \beta = \frac{\Delta s}{M_m} = \frac{e^2}{8} \cdot \beta^3 \cdot \cos 2 B_m = \frac{\beta^3}{1176} \cdot \cos 2 B_m,$$

која ће увек бити мања од $0''.01$, ако β не буде већа од $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{1176}}} = 2^\circ 2$, т.ј. ако s не буде веће од 230 врста (Км).

56. Гаусове формуле.

Да бисмо у сферном троуглу $M'_0P'M'_1$ одредили непознате $\beta' = b_1 - B_0$, $\lambda' = \sphericalangle M'_0P'M'_1$ и $\delta' = \alpha' - A_0$ по даним $A_0 = \sphericalangle PM_0M_1$, $90^\circ - B_0 = M'_0P'$ и $\sigma = \frac{s}{R_m} = M_0M_1$, применићемо на томе ове познате Неперове аналогије:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha_m}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}}, \quad \operatorname{cotg} b_m = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha_m}{2}}{\sin \frac{\delta'}{2}}, \quad \operatorname{cotg} a_m = \operatorname{cotg} \frac{\lambda'}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\beta'}{2}}{\sin b_m},$$

где је као и пређе, $a_m = \frac{A_0 + \alpha'}{2}$ и $b_m = \frac{B_0 + b_1}{2}$.

Кад развијемо затим тангенсе, синусе и косинусе малих лукова $\frac{\sigma}{2}$, $\frac{\beta'}{2}$, $\frac{\delta'}{2}$ и $\frac{\lambda'}{2}$ у редове до четвртих степена закључно (што је сасвим довољно за њихово рачунање с тачношћу до $0''.01$ чак и за вредности њихове до 4°), и кад ставимо ради скраћења писања:

$$\beta'_0 = \sigma \cdot \cos a_m, \quad \lambda'_0 = \sigma \cdot \sin a_m \cdot \sec b_m, \quad \delta'_0 = \sigma \cdot \sin a_m \cdot \operatorname{tg} b_m, \quad \dots \quad (7.)$$

— при чему ће увек бити

$$\sigma^2 - \beta'^2_0 = \lambda'^2_0 - \delta'^2_0,$$

добићемо из првих двеју аналогија:

$$\beta' = \beta'_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta'_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\beta'_0}{2} \right)^2 \right] = \beta'_0 \left(1 + \frac{\lambda'^2_0}{12} + \frac{\delta'^2_0}{24} \right) \dots \dots \quad (8.)$$

$$\delta' = \delta'_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\delta'_0}{2} \right)^2 \right] = \delta'_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{\delta'^2_0}{24} \right); \dots \dots \quad (9.)$$

трећа пак аналогија претстављена у облику:

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} a_m}{\cos b_m} \cdot \cos \frac{\beta'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\sin a_m}{\cos b_m} \cdot \frac{\cos \frac{\beta'}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}}$$

даће

$$\lambda' = \lambda'_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta'_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta'_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda'_0}{2} \right)^2 \right] = \lambda'_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\lambda'^2_0}{24} \right) \dots \quad (10.)$$

Кад се ставе ови изрази (8.), (9.) и (10.) у односе (N.) пређашњега, 55. члана, добићемо за разлике β , λ и δ на елипсоиду овакве формуле:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{s}{M_m} \cdot \cos A_m & \beta &= \beta_0 \left(1 + \frac{\lambda'^2_0}{12} + \frac{\delta'^2_0}{24} \right) \\ \lambda_0 &= \frac{s}{N_m} \cdot \sin A_m \cdot \sec B_m & \lambda &= \lambda_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\lambda'^2_0}{24} \right) \\ \delta_0 &= \frac{s}{N_m} \cdot \sin A_m \cdot \operatorname{tg} B_m & \delta &= \delta_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{\delta'^2_0}{24} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (P.)$$

где су мали сферни корекциони чланови δ_0^2 и λ_0^2 замењени овде са елипсоидним δ_0^2 и λ_0^2 , пошто то неће изазвати осетне разлике на лин. дужинама s , које не надмашају 230 врста и на ширинама B_m мањим од 70° . Али ће при срачунавању још згодније бити, ако се буду изналазиле корекције не самих величина β_0 , λ_0 и δ_0 већ њихових логаритама, користећи се формулом

$$\lg(1 + \frac{x^2}{12}) = kx''^2, \quad \text{где је } k = \frac{0.4343}{12} \cdot \sin^2 1''$$

у којој је лук x изражен у секундама (x''). Дефинитивно ћемо на тај начин имати:

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{MN} \cdot \sin 1''}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{s}{M_m \cdot \sin 1''} \cdot \cos A_m & \lg \beta &= \lg \beta_0 + k\lambda_0^2 + \frac{1}{2} k \delta_0^2 \\ \lambda_0 &= \frac{s}{N_m \cdot \sin 1''} \cdot \sin A_m \cdot \sec B_m & \lg \lambda &= \lg \lambda_0 - \frac{1}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{2} k \lambda_0^2 \\ \delta_0 &= \frac{s}{N_m \cdot \sin 1''} \cdot \sin A_m \cdot \operatorname{tg} B_m & \lg \delta &= \lg \delta_0 + k \sigma^2 + \frac{1}{2} k \delta_0^2 \end{aligned} \right\} \dots (P')$$

Ови изрази за разлике β , λ и δ на земном елипсоиду скоро су исто тако тачни (али нешто простији), као и они, које је извео сам Гаус са свим другим путем (в. „Геодезическія изслѣдованія Гауса, Бесселя и Ганзена“, прев. Тило). Они се врло лако памте, јер главни њихови чланови β_0 , λ_0 и δ_0 имају јасно и просто геометриско значење, а логаритамске њихове поправке имају ту особину, што је поправка за β_0 равна поправци за δ_0 , сабраној са удвојеном поправком за λ_0 . Све се те поправке (корекције) (kx^2), изражене у јединицама 7. децимале, лако изналазе из овакве таблице, по аргументу $\lg x''$:

$\lg x''$	kx^2	$\lg x''$	kx^2	$\lg x''$	kx^2	$\lg x''$	kx^2	$\lg x''$	kx^2	$\lg x''$	kx^2
2.686	2	3.206	22	3.347	42	3.431	62	3.492	82	3.539	102
2.836	4	.225	24	.357	44	.438	64	.497	84	.544	104
2.924	6	.243	26	.367	46	.445	66	.502	86	.548	106
2.987	8	.259	28	.376	48	.451	68	.507	88	.552	108
3.035	10	.274	30	.385	50	.458	70	.512	90	.556	110
3.075	12	.288	32	.393	52	.464	72	.517	92	.560	112
3.108	14	.301	34	.401	54	.470	74	.522	94	.564	114
3.137	16	.313	36	.409	56	.476	76	.526	96	.567	116
3.163	18	.325	38	.417	58	.481	78	.531	98	.571	118
3.186	20	.336	40	3.424	60	3.487	80	3.535	100	3.575	120

За дужине пак s , које су мање од 25 врста, корекциони се чланови у формулама (P) и (P') могу занемарити, т.ј. сматрати $\beta = \beta_0$, $\lambda = \lambda_0$ и $\delta = \delta_0$.

Мада се непознате β , λ и δ срачунавају по тим формулама поступним приближењима, ипак се помоћу њих долази врло брзо до дефинитивно тачних величина β , λ и δ , као што ћемо одмах видети на примеру (чл. 57.). При томе прва два приближења за β и B_m , δ и A_m треба срачунавати без корекционих чланова само са логаритмима од четири и од пет децимала; треће пак приближење, извршено са логаритмима од седам децимала, изаћи ће у највише случајева дефинитивно.

Користећи се резултатима већ срачунате триангулације, понекад је потребно решити обратну задаћу, т.ј. по познатим ширинама B_0 и B_1 и разликама дужина λ двеју шачака M_0 и M_1 одредиши дужину геодешке линије $M_0M_1 = s$, која спаја ше две шачке, и азимуше њене A_0 и A_1 у шим шачкама. Она се решава по формулама (P') још простије и то свега са два приближења; јер ако допустимо спочетка, да је $B_1 - B_0 = \beta_0$ и $\lambda = \lambda_0$ па срачунамо (само са логаритмима од четири децимале) s , A_m и δ_0 из израза:

$$s \cdot \cos A_m = \beta_0 \cdot M_m \cdot \sin 1'', \quad s \cdot \sin A_m = \lambda_0 \cdot \cos B_m \cdot N_m \cdot \sin 1'', \quad \delta_0 = \lambda_0 \cdot \sin B_m,$$

одредићемо све корекционе чланове у формулама (P'), а са логаритмима од седам децимала: $lg \beta_0$, $lg \lambda_0$ и $lg \delta_0$, добићемо дефинитивно s , A_m и δ после чега ће изаћи

$$A_0 = A_m - \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad A' = A_m + \frac{\delta}{2};$$

али стоти делови секунада у тако срачунатим азимутима A_0 и A_1 могу изаћи и погрешни.

57. Пример за објашњење.

Нека је потребно, — као и у примеру чл. 25. (сл. 16.), — срачунати величине B_1 , λ и A' тачке G, по истим даним:

по ширини почетне тачке T $B_0 = 65^\circ 49'44''57$

по лин. дужини стране $TG = s$ (у тоазима) $lg s = 4.406\ 0036$

и по азимуту њеном $A_0 = +3^\circ 1'30''93 - 22^\circ 50'29''41 = -19^\circ 48'58''48$,

при чему ће се са карте или са цртежа триангулације одмах добити приближно

$$B_1 = 66^\circ 15' \quad \text{и} \quad B_m = 66^\circ 2'.$$

Кад се из таблица радиуса узму пре свега логаритми M_m и N_m (изражени у тоазима) за ширине $66^\circ 2'$ а тако исто и промене њихове за $1'$ по ширини, добићемо:

за	$B = 66^\circ 2' \dots lg M \sin 1'' = 1.201\ 2030$	$lg N \cdot \sin 1'' = 1.201\ 6936$
пром. за	$+ 1'$	$+ 9.6$
		$+ 3.2$

а затим кад узмемо спочетка да је $A_m = A_0 = -19^\circ 49'$, добићемо, поступним срачунавањем I, II и III приближења, непознате β , δ и λ по оваквом формулару:

	I.	II.	III.	поправке
$B_m =$	$66^\circ 2'$	$66^\circ 2'18''$	$66^\circ 2'17'' 6$	
$A_m =$	$-19 49$	$-19 59 10$	$-19 59 14 . 0$	
$lg s - lg M_m \cdot \sin 1'' =$	3.2048	3.20480	$3.2048 003$	
$lg \cos A_m =$	9.9735	9.97302	$9.9730 211$	
$lg \operatorname{tg} B_m =$	0.3521	0.35220	$0.3521 971$	
$lg s - lg N_m \cdot \sin 1'' =$	3.2043	3.20431	$3.2043 099$	
$lg \sin A_m =$	9.5302_n	9.53376_n	$9.5337 855_n$	
$lg \cos B_m =$			$9.6086 620$	
$lg \beta =$	3.1783	3.17782	$3.1778 214$	$\left. \begin{array}{l} + 15 \\ + 6 \end{array} \right\}$
$\beta =$	$+ 25' 8''$	$+ 25' 6'' 0$	$+ 25' 5'' 995$	
$lg \delta =$	3.0866_n	3.09027_n	$3.0902 925_n$	$\left. \begin{array}{l} + 22 \\ + 6 \end{array} \right\}$
$\delta =$	$- 20' 21''$	$- 20' 31'' 0$	$- 20' 31'' 106$	
$lg \sigma =$	3.2046		$lg \lambda = 3.1294 334_n$	$\left. \begin{array}{l} - 11 \\ + 8 \end{array} \right\}$
			$\lambda = - 22' 27'' 203$	
$B_1 = 66^\circ 14' 50'' 56_5$			$A' = - 20^\circ 9' 29'' 59.$	

Напомена. Те исте координате B_1 , λ и A' за тачку G могле би се добити срачунавањем разлика β , λ и δ прво за тачке T и K (в. чл. 25, сл. 16.) а затим за K и G, или прво за T и P а затим за P и G. Слагање тих резултата служило би као најсигурнија контрола извршеног срачунавања.

Да покажемо сад формулар решења обратне задаће, т.ј. изналажења A_0 , A' и s по даним:

$$B_0 = 65^\circ 49' 44'' 57_0, \quad B_1 = 66^\circ 14' 50'' 56_5 \quad \text{и} \quad \lambda = - 0^\circ 22' 27'' 20_3.$$

Прво се приближење (са логаритмима од 4 децимале) врши писаљком, стога се и ставља заједно са другим:

	I.	II.
$B_m = 66^\circ 2' 17'' 568$ поправке	$lg \beta_0 \cdot M_m \cdot \sin 1'' =$	$lg s \cdot \cos A_m = 4.3790$ 248
$\beta = + 25 \quad 5.995$		$lg \cos A_m = 9.9730$ 211
$lg M_m \cdot \sin 1'' = 1.2012 033$	$lg \lambda_0 \cdot \cos B_m N_m \sin 1'' =$	$lg s \cdot \sin A_m = 3.9397$ 892 _n
$lg \beta = 3.1778 236$		$lg \sin A_m = 9.5337$ 855 _n
$lg N_m \sin 1'' = 1.2016 937$		$lg s = 4.4060$ 037
$lg \cos B_m = 9.6086 621$	$lg \frac{s}{R_m \sin 1''} =$	$lg \sigma = 3.2046$
$lg \lambda = 3.1294 331_n$		$lg \operatorname{tg} A_m = 9.5607$ 642 _n
$lg \sin B_m = 9.9608 590$		$A_m = - 19^\circ 59' 14'' 00$
$lg \delta_0 = 3.0902 924_n$		$\frac{1}{2} \delta = - 10$ 15.55
$lg \delta = 3.0902 952_n$		$A_0 = - 19^\circ 48' 58'' . 45$
$\delta = - 20' 31'' 105$		$A' = - 20 \quad 9 \quad 29 . 55$

58. Беселове формуле.

Гаусове се формуле (P') могу употребити и за срачунавање разлика координата β , λ и δ крајњих тачака геодетске линије ма какве лин. дужине s ; само је ради тога треба разделити на делове, чије дужине не би биле веће од 230 врста, па срачунати разлике β , λ и δ једну за другом за све такве делове посебно. Непосредно пак решење сфероидног троугла M_0PM_1 са геодетском линијом $M_0M_1 = s$ ма како велике лин. дужине дао је био Бесел. Оно се састоји у овој теорему:

Производ из распојања r сваке шачке геодетске линије од осе обршног елипсоида и синуса њеног азимуша A у шој шачци стална је величина, ш.ј.:

$$\partial(r \cdot \sin A) = \partial r \cdot \sin A + r \cdot \cos A \cdot \partial A = 0.$$

И заиста, из слике се 49. геометриски јасно види, да је

$$\partial r = pq = pm_1 \cdot \sin B = - (M\partial B) \cdot \sin B;$$

формуле пак (4.) и (6.) дају

$$M\partial B = \partial s \cdot \cos A \quad \text{и} \quad r \cdot \partial A = N \cdot \cos B \cdot \partial \delta = \partial s \cdot \sin A \cdot \sin B;$$

стога излази, да је

$$\partial(r \cdot \sin A) = - \partial s \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \sin A + \partial s \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos A = 0,$$

што је и требало доказати.

Ако сад ставимо, да је $r = N \cos B = \frac{a \cdot \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = a \cdot \cos u$, где је

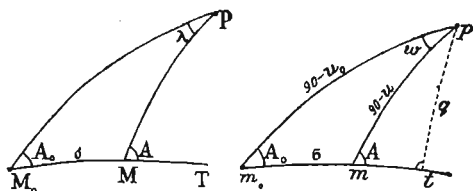
$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \cdot \operatorname{tg} B, \dots \dots \dots (11.)$$

то у свакој тачци M геодетске линије M_0MT (сл. 50. а.), која полази из тачке M_0 под азимутом A_0 , — на основу тек што доказане теореме, — треба да буде:

$$\cos u \cdot \sin A = \cos u_0 \cdot \sin A_0; \dots \dots \dots (12.)$$

а то показује, да постоји сферни троугао m_0mp (сл. 50. б.) чији су угли код m_0 и m равни сфероидним азимутима A_0 и A , стране пак m_0p и mp равне допунама лукова u_0 и u , које се зову *сведене ширине* тачака M_0 и M . На тај начин, да бисмо свели решење сфероидног троугла M_0PM на решење тога сфернога, остаје само да се нађу односи међу осталим њиховим одговарајућим елементима:

$$\sphericalangle M_0PM = \lambda \quad \text{према} \quad \sphericalangle m_0pm = w \quad \text{и} \quad M_0M = s \quad \text{према} \quad m_0m = \sigma.$$



Сл. 50, а.

Сл. 50, б.

Пошто за диференцијалне прираштаје величина s , σ , λ и w ми већ имамо, по предидућем, да је:

$$\partial s \cdot \cos A = M \cdot \partial B = -\frac{\partial r}{\sin B} = \frac{a \cdot \sin u \cdot \partial u}{\sin B}, \quad \partial \sigma \cdot \cos A = \partial u$$

$$\partial s \cdot \sin A = N \cdot \cos B \cdot \partial \lambda = r \cdot \partial \lambda = a \cdot \cos u \cdot \partial \lambda, \quad \partial \sigma \cdot \sin A = \cos u \partial w,$$

то одатле излази, да је:

$$\partial s = a \cdot \partial \sigma \cdot \frac{\sin u}{\sin B} = a \cdot \partial \sigma \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \quad \dots \quad (13.)$$

$$\partial \lambda = \partial w \cdot \frac{\partial s}{a \cdot \partial \sigma} = \partial w \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \quad \dots \quad (14.)$$

Кад пак из p уобразимо перпендикулар $pl = q$ на лук великога круга m_0mt , из троугла ћемо m_0pt наћи прво величине $m_0t = Q$ и q по формулама:

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{cotg} u_0 \cdot \cos A_0, \quad \operatorname{tg} q = \sin Q \cdot \operatorname{tg} A_0, \quad \dots \quad (15.)$$

а затим добићемо:

$$\sin u = \cos q \cdot \cos (Q - \sigma)$$

$$\partial w = \partial \sigma \cdot \frac{\sin A}{\cos u} = \frac{\partial \sigma}{\cos u} \cdot \frac{\cos u_0 \cdot \sin A_0}{\cos u} = \partial \sigma \cdot \frac{\sin q}{\cos^2 u}$$

Кад ставимо сад те величине $\sin u$ и ∂w у изразе (13.) и (14.), кад ове развијемо у редове до чланова са четвртим степенима мале величине e закључно, кад затим изразимо $\cos^2(Q - \sigma)$ и $\cos^4(Q - \sigma)$ у двојним луцима $\cos 2(Q - \sigma)$ и $\cos 4(Q - \sigma)$, и најзад, кад означимо ради скраћења писања

$$a \sqrt{1 - e^2} = b, \quad \alpha = 1 + k^2 \cdot \frac{3}{4} k^4, \quad \beta = k^2 - k^4, \quad \gamma = \frac{k^4}{8}$$

$$\frac{e \cdot \cos q}{2 \sqrt{1 - e^2}} = k, \quad \alpha' = \frac{e^2}{2} \cdot \sin q \left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{k^2}{2}\right), \quad \beta' = \frac{e^2 k^2}{4} \cdot \sin q,$$

онда ће се они представити у облику

$$\partial s = b \cdot \partial \sigma [\alpha + \beta \cdot \cos 2(Q - \sigma) - 2\gamma \cos 4(Q - \sigma)], \quad \partial \lambda = \partial w - \partial \sigma [\alpha' - \beta' \cos 2(Q - \sigma)],$$

одакле ће после интегрирања изаћи дефинитивно:

$$\frac{s}{b} = \alpha \sigma + \beta \cdot \sin \sigma \cdot \cos (2Q - \sigma) - \gamma \cdot \sin 2\sigma \cdot \cos (4Q - 2\sigma) \quad \dots \quad (16.)$$

$$\lambda = w - \alpha' \cdot \sigma + \beta' \cdot \sin \sigma \cdot \cos (2Q - \sigma) \quad \dots \quad (17.)$$

Ове упрошћене, али довољно тачне формуле увео је Бесел за изражавање елемената s и λ сфероидног троугла M_0PM помоћу одговарајућих елемената σ и w сфернога троугла. За одређивање ширине B , дужине λ и азимута A за крајњу тачку M геодетске линије $M_0M = s$ по тим формулама, потребне су ове радње:

- 1.) По даној ширини B тачке M_0 срачуна се њена сведена ширина u_0 (11.).
- 2.) По даноме азимуту A_0 на тачци M_0 срачунају се луци Q и q (15.)
- 3.) По лин. дужини s срачуна се поступним приближењима лук σ (16.)
- 4.) По тако нађеним u_0 , σ и A_0 срачунају се остали елементи помоћног сферног троугла: u , w и A , при чему ће A и бити тражени азимут у тачци M .
- 5.) По формули (17.) одреди се тражена дужина λ .
- 6.) По сведеној ширини u срачуна се из израза (11.) тражена ширина B .

58. а. Кларкове формуле за срачунавање геодетских ширина, дужина и азимута.

Задаћа, да се по ширини B_0 тачке M_0 и азимушу у њој A_0 геодетске линије незнатне лин. дужине $M_0M = s$ одреди на земном елипсоиду ширина B другог краја B те линије, његова дужина λ и азимут у њему A' продужења линије M_0M , решава се, као што смо видели у чл. 56., по Гаусовим формулама (Р.) поступним приближењима. Стога се на пракци обично претпоставља, да се употребе друге формуле, макар и не тако просте па и мање тачне, али да се помоћу њих непосредно одређују напред речене непознате. Из њих су најбоље Кларкове формуле*). Извешћемо их прво за сферу неког радиуса R , величине, у сравњењу са s , исто такве као што су и радиуси кривина елипсоида.

Замислимо код пола P сфере троугао M_0PM (сл. 50. d. I) па га за решење његово, по даним његовим странама $M_0P = 90^\circ - B_0$, $M_0M = \frac{s}{R}$ и углу међу њима A_0 , поделимо на два: M_0Mr и MPr са правим углима у p . Кад означимо катете првога од њих са x и y а сферни ексцес са ω , добићемо с тачношћу до чланова степена $\left(\frac{s}{R}\right)^4$ закључно, овакве изразе, сличне са (1.) ове главе:

$$\omega = \frac{s^2}{2R^2} \sin A_0 \cos A_0, \quad x = \frac{s}{R} \cos \left(A_0 - \frac{2}{3}\omega\right), \quad y = \frac{s}{R} \sin \left(A_0 - \frac{1}{3}\omega\right), \quad \dots \quad (I)$$

после чега ће се ширина B' тачке p и угао pMM_0 одредити овако:

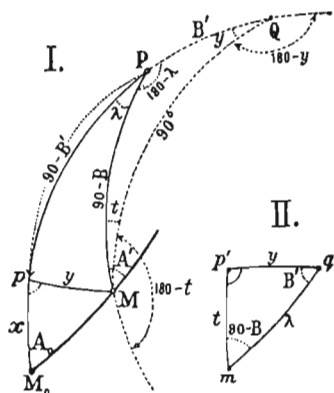
$$B' = B_0 + x, \quad \sphericalangle pMM_0 = 90^\circ - A_0 + \omega \dots \dots \dots (II)$$

Напоменућемо притом, да овде, као и у формулама (1.) ове главе, знак код ω може бити и позитиван и негативан, према томе какви су знаци код $\sin A_0$ и $\cos A_0$.

Да би се затим одредиле са истом тачности непознате $PM = 90^\circ - B$, $\sphericalangle M_0PM = \lambda$ и $\sphericalangle PMp = 90^\circ - t$ из другог троугла MPp по познатим катетама у њему $Mr = y$ и $Pp = 90^\circ - B'$, пренесимо по меридијану Pp лук $pQ = 90^\circ$, при чему ће, очевидно изаћи и $QM = 90^\circ$ и $\sphericalangle QMp = 90^\circ$. Кад добијемо на тај начин код пола P троугао PQM са странама: 90° , B' , $90^\circ - B$ и углима: y , t ,

*) Clarke „Geodesy“ стр. 273.

$180^\circ - \lambda$, па према томе и код супротног пола P' троугао $P'QM$ са странама: 90° , $180^\circ - B'$, $90^\circ + B$ и углима: $180^\circ - y$, $180^\circ - t$, $180^\circ - \lambda$, — заменићемо овај последњи са њему одговарајућим поларним троуглом $p'qm$ (сл. 50. d. II), у коме ће угли бити: 90° , B' и $90^\circ - B$, а стране мале величине y , t и λ истога ступња, као и лук $\frac{s}{R}$. Кад се на основу тога примени Лежандрова теорема на троугао $p'qm$ и означи њихов сферни ексцес са η , имаћемо:



Сл. 50. d.

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{yt}{2} = \frac{y^2}{2} \operatorname{tg} B', & \lambda &= \frac{y}{\cos(B + \frac{1}{3}\eta)}, \\ B &= B' - \eta & t &= \lambda \sin(B + \frac{2}{3}\eta), \\ A' &= 180^\circ - \sphericalangle pMM_0 - \sphericalangle pMP = A_0 + t - \omega. \end{aligned} \right\} \dots (III)$$

Замислимо сад на земном елипсоиду кроз тачку M геодетску линију Mp , која пресеца меридијан M_0P у тачци p , па означимо, као и малопре, ширину те тачке p са B' . Тада ће се линеарне величине X и Y катета малог сферног троугла M_0Mp одредити по истим формулама (1.) ове главе са величином $R = \sqrt{M_m N_m}$, где радиуси кривине M_m и N_m одговарају средњој ширини $B_m = \frac{1}{2}(B_0 + B')$; сама пак ширина B' добиће се овако:

$$B' = B_0 + \frac{X}{M_m} = B_0 + \frac{s}{M_m} \cdot \cos(A_0 - \frac{2}{3}\omega).$$

Према томе потребно је само грубо претходно њено срачунавање B_m по приближном изразу за њу

$$B_m = B_0 + \frac{s}{2M_0} \cos A_0 \dots \dots \dots (IV)$$

те да се из таблица нађу потребне вредности за M_m и N_m .

После тога имаћемо у тачци p елипсоида под азимутом $RpM = 90^\circ$ геодетску линију познате лин. дужине $pM = Y$. У том случају је, за одредбу тражене ширине B и дужине λ њенога краја M , погодније узети помоћну сферу (чл. 55.), која тангира алипсоид по паралели тачке p , т.ј. која има за радиус R нормалу N' у тој тачци; зато што ће тада у једначинама (N.) чл. 55., усљед врло мале разлике ширина B и B' ,*) са доста великом тачношћу изаћи: $N_m = N'$, $M_m = M'$, $A_m = a_m$ и $B_m = b_m$, те ће се претворити у следеће:

$$\beta = \frac{N'}{M'} \beta', \quad \lambda = \lambda' \quad \text{и} \quad \delta = \delta'.$$

На тај ће се начин све непознате B , λ и A' наћи по формулама (III), ако само ставимо у њима $y = \frac{Y}{N'}$ и помножимо разлику $B' - B = \eta$, која се по њима добија, са односом радиуса кривина N' и M' у тачци p .

*) При $Y = 100$ врста или $y = \frac{1}{60} = 1^\circ$ и $B' = 70^\circ$ разлика ће $B' - B = \eta$ достићи свега до $1'.3$,

Скуп свију формула потребних за срачунавање B , λ и A' по даним B_0 , A_0 и s излази овакав:

$$\left. \begin{array}{ll}
 1.) \quad \omega = \frac{s^2}{2 M_m N_m \sin 1''} \sin A_0 \cos A_0 & 4.) \quad B' = B_0 + x \\
 2.) \quad x = \frac{s}{M_m \sin 1''} \cos (A_0 - \frac{2}{3}\omega) & 7.) \quad B = B' - \eta' \\
 3.) \quad y = \frac{s}{N' \sin 1''} \cdot \sin (A_0 - \frac{1}{3}\omega) & 8.) \quad \lambda = \frac{y}{\cos (B + \frac{1}{3}\eta)} \\
 5.) \quad \eta = \frac{\sin 1''}{2} y^2 \operatorname{tg} B' & 9.) \quad t = \lambda \sin (B + \frac{2}{3}\eta) \\
 6.) \quad \eta' = \frac{N'}{M'} \cdot \eta & 10.) \quad A' = A_0 + t - \omega.
 \end{array} \right\} \dots (Q.)$$

Ове формуле, које су довољно тачне за растојања Y , која не надмашају 100 врста, разликују се од Кларкових само тиме, што се у његовим множи са $\frac{N'}{M'}$ сам израз 5.) за η ; али пошто је величина η врло мала и улази само у λ и t , као мала поправка, то је та разлика сасвим неосетна.

Пример. Са истим даним подацима, као и у примеру чл. 57. а наиме:

$$B_0 = 65^\circ 49' 44''.57, \quad A_0 = -19^\circ 48' 58''.48 \quad \text{и} \quad \lg s = 4.4060036 \quad (\text{тоаз.})$$

срачунаћемо прво помоћу логаритама од 4 децимале по формули (IV) разлику $B_m - B_0 = 12'34''$ па добити:

$$B_m = 66^\circ 2' 18'', \quad \lg M_m = 6.5156284, \quad \lg N_m = 6.5161, \quad \lg M_m N_m = 3.0317;$$

затим ће се даља срачунавања извршити по овом формулару:

доп. $\lg 2 M_m N_m \sin 1'' =$	1.9817	$A_0 - \frac{2}{3}\omega =$	$-19^\circ 48' 57''.16$	$B_0 =$	$65^\circ 49' 44''.57$
$\lg s^2 =$	8.8120	$A_0 - \frac{1}{3}\omega =$	$-19^\circ 48' 57''.82$	$x =$	$\frac{25 \quad 7.619}{66 \quad 14 \quad 52.189}$
$\lg \cos A_0 =$	9.9735	$\lg \cos (A_0 - \frac{2}{3}\omega) =$	9.9734 913	$B' =$	$66 \quad 14 \quad 52.189$
$\lg \sin A_0 =$	$\frac{9.5302_n}{0.2974_n}$	доп. $\lg M_m \sin 1'' =$	8.7987 967	$\eta' =$	$\frac{1.624}{66 \quad 14 \quad 50.565}$
$\lg \omega =$	0.2974_n	$\lg s =$	4.4060 036	$B =$	66 14 50.565
$\omega =$	$-1''.983$	доп. $\lg N' \sin 1'' =$	8.7983 022	$\frac{1}{3}\eta =$	0.541
$\frac{1}{3}\omega =$	-0.661	$\lg \sin (A_0 - \frac{1}{3}\omega) =$	$\frac{9.5302 \quad 018_n}{3.1782 \quad 916}$	$B + \frac{1}{3}\eta =$	$66 \quad 14 \quad 51.106$
$\lg \frac{\sin 1''}{2} =$	4.3845	$\lg x =$	3.1782 916	$B + \frac{2}{3}\eta =$	$66 \quad 14 \quad 51.647$
$\lg y^2 =$	5.4690	$\lg y =$	2.7345 076 _n	$\lambda =$	$- \quad 22' 27''.203$
$\lg \operatorname{tg} B' =$	$\frac{0.3565}{0.2100}$	$\lg \cos (B + \frac{1}{3}\eta) =$	$\frac{9.6050 \quad 745}{3.1294 \quad 331_n}$	$t =$	$- \quad 20' 33''.088$
$\lg \frac{N'}{M'} =$	$\frac{0.0005}{0.2105}$	$\lg \lambda =$	3.1294 331 _n	$t - \omega =$	$- \quad 20 \quad 31.105$
$\lg \eta' =$	0.2105	$\lg \sin (B + \frac{2}{3}\eta) =$	$\frac{9.9615 \quad 611}{3.0909 \quad 942_n}$	$A' =$	$- \quad 20^\circ 9' 29''.585$
$\eta =$	$1''.622$	$\lg t =$	3.0909 942 _n		

59. Полигонски услови.

У чл. 22. гл. II. било је већ речено, да када се ланац троуглова затвара, образујући унутра простор у облику полигона $ABCD \dots A$ (сл. 12.), неиспуњен триангулацијом, онда се, после срачунавања геодетских ширина и дужина свих тачака, узимају у рачун два неопходна услова за измерене угле, који изражавају затварање полигона $ABCD \dots A$. Да видимо сад, како се изражавају ти полигонски услови.

Претпоставимо испрва, да никакав рачун равнања није извршен у разматраном ланцу и да су у свима троуглима били измерени само по два угла: X_1 и X_2 , X_3 и X_4 и т.д. Тада ће све стране полигона: $AB = s_1$, $BC = s_2$ и т.д., — које су служиле за срачунавање геодетских ширина и дужина тачака В, С и т.д. по почетној ширини B_0 полазне тачке А и азимуту на њој A_0 прве стране АВ, — бити изражене логаритамски као функције базиса a и тих углова X_1 , X_2 , X_3, \dots ; тако да, ако се означе са $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ мале поправке тих углова, онда ће се одговарајуће поправке $lg s_1, lg s_2, \dots$ изразити овако:

$$\partial lg s_1 = \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 + \dots, \quad \partial lg s_2 = \alpha''_1 x_1 + \alpha''_2 x_2 + \alpha''_3 x_3 + \dots, \dots \quad (18.)$$

где су коефицијенти код x_1, x_2, x_3 и т.д. неке потпуно одређене бројне величине.

Узмимо сад Гаусове формуле за поступне разлике ширина и дужина тачака А, В, С, D и т.д. у облику

$$lg \beta = lg s + lg \cos A - lg M \cdot \sin 1'' + \text{поправке}$$

$$lg \lambda = lg s + lg \sin A - lg N \cdot \sin 1'' - lg \cos B + \text{поправке}$$

па означимо са $\Delta lg \beta$, $\Delta lg \lambda$, $\Delta lg \cos A$, $\Delta lg \sin A$ табличне промене $lg \beta$, $lg \lambda$, $lg \cos A$, $lg \sin A$ при промени β , λ , и A за $1''$. Онда ће услед промене $lg s$ и азимута A за мале величине $\partial lg s$ и ∂A срачунате разлике β и λ добити ове прираштаје:

$$\partial \beta = p \cdot \partial lg s + C \cdot \partial A, \quad \text{где је } p = \frac{1}{\Delta lg \beta} \quad \text{и } C = \frac{\Delta lg \cos A}{\Delta lg \beta}$$

$$\partial \lambda = q \cdot \partial lg s + S \cdot \partial A, \quad \text{где је } q = \frac{1}{\Delta lg \lambda} \quad \text{и } S = \frac{\Delta lg \sin A}{\Delta lg \lambda},$$

а поправке ширине B_n и дужине L_n ма које тачке изразиће се на основу формула (3.) овако:

$$\partial B_n = \Sigma \partial \beta = \Sigma p \cdot \partial lg s + \Sigma C \cdot \partial A, \quad \partial L_n = \Sigma \partial \lambda = \Sigma q \cdot \partial lg s + \Sigma S \cdot \partial A,$$

где ће се различите азимутне промене ∂A (ако се занемаре релативно ништавне промене у срачунатим разликама δ) изразити просто из сумâ поправака x_1, x_2, x_3, \dots углова триангулације, а различите промене $\partial lg s$ одредиће се из

израза (18.). На тај ће се начин ∂B_n и ∂L_n представити у облику

$$\partial B_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots \dots \dots (a.)$$

$$\partial L_n = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots \dots \dots (b.)$$

где су $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ неки познати бројеви.

Према томе, ако се сумирањем поступних разлика β и λ добију за тачку А: ширина $B_0 - \partial B_n$ (уместо B_0) и дужина — ∂L_n (уместо нуле), то ће једначине (a.) и (b.) и бити неопходни услови за одређивање непознатих поправака x_1, x_2, x_3, \dots . На основу реченога пак у примеру 2. чл. 23. њима се придружују још два неопходна услова

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots = n_1 \dots \dots \dots (c.)$$

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + \dots = n_2 \dots \dots \dots (d.)$$

од којих ће један бити услов углова, који изражава суму унутрашњих углова полигона ABCD...A, а други услов страна. Сад остаје само, да се нађу, по обичним правилима (чл. 20.), највероватније вредности за x_1, x_2, x_3, \dots , које строго задовољавају та четири услова (a.), (b.), (c.) и (d.).

Претпоставимо сад, да су у свима троуглима ланца, који образује полигон ABCD...A, измерени били сва три угла и да су рачуном равнања били испуњени у њему сви неопходни услови па међу њима и (c.) и (d.). Да се не би понављала сва та срачунавања због додатка двају полигонских услова (a.) и (b.), — изналазе се такве поновне поправке x_1, x_2, x_3, \dots већ изравнатих углова X_1, X_2, X_3, \dots , које не би измениле ни потребне суме углова у свима троуглима, ни раније достигнуте величине $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ из услова (c.) и (d.). Ако се означе са Y трећи угли у троуглима а са y поновне непознате поправке њихове, — први ће се захтев изразити једначинама:

$$x_1 + x_2 + y_1 = 0, \quad x_3 + x_4 + y_2 = 0, \text{ и т.д. } \dots \dots \dots (19.)$$

па стога ће се услов, да сума квадрата поправака свих углова буде најмања, представити у облику

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + (x_3 + x_4)^2 + \dots = \text{minimum}$$

или

$$(2x_1 + x_2) \partial x_1 + (x_1 + 2x_2) \partial x_2 + (2x_3 + x_4) \partial x_3 + (x_3 + 2x_4) \partial x_4 + \dots = 0 \dots (20.)$$

Кад се пак издиференцирају услови (a.), (b.), (c.), (d.), помножени са њима одговарајућим корелатама k_1, k_2, k_3, k_4 , па затим сви саберу, добиће се

$$(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4) \partial x_1 + (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4) \partial x_2 + \dots = 0 \dots (21.)$$

а према томе

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4 \\ x_1 + 2x_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x_3 + x_4 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + d_3 k_4 \\ x_3 + 2x_4 = a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 + d_4 k_4 \end{array} \right\} \dots (22.)$$

Кад се одавде пар по пар добивени изрази за x_1 и x_2 , x_3 и x_4, \dots ставе у услове (a.), (b.), (c.) и (d.), добиће се овакве четири једначне:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha\alpha) k_1 + (\alpha\beta) k_2 + (\alpha\gamma) k_3 + (\alpha\delta) k_4 = \partial B_n \\ (\alpha\beta) k_1 + (\beta\beta) k_2 + (\beta\gamma) k_3 + (\beta\delta) k_4 = \partial L_n \\ (\alpha\gamma) k_1 + (\beta\gamma) k_2 + (\gamma\gamma) k_3 + (\gamma\delta) k_4 = 0 \\ (\alpha\delta) k_1 + (\beta\delta) k_2 + (\gamma\delta) k_3 + (\delta\delta) k_4 = 0 \end{array} \right\} \dots (23.)$$

На тај ће се начин одредити бројне вредности корелата k_1, k_2, k_3 и k_4 а затим из једначина (22.) и све непознате x_1, x_2, x_3, \dots

Напомена. Ова метода обједињава у себи и елиминацију некојих непознатих поправака (y_1, y_2, \dots) средством најпростијих угловних услова, и, увођење помоћних корелата (k_1, k_2, \dots) за релативно мали број компликованих неопходних услова (a.), (b.), (c.), (d.). Она се често употребљује и при обичном рачуну равнања триангулације, када се она углавном састоји из простог ланца троуглова (Струве, *Дуга Меридијана*). Узмимо на пример, да, осим угловних услова за разне троугле ланца, у њему постоји само један базисни услов облика (c.). Пошто се грешке троуглова поделе подједнако на све угле у сваком троуглу, угловни ће се услов представити у облику (19.); кад се пак помноже услови (c.) са корелатом k , на основу (22.) добиће се

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} (2a_1 - a_2) \cdot k, \quad x_3 = \frac{1}{3} (2a_3 - a_4) k, \dots \\ x_2 = \frac{1}{3} (2a_2 - a_1) \cdot k, \quad x_4 = \frac{1}{3} (2a_4 - a_3) k, \dots; \end{array}$$

једначина пак за одредбу k биће оваква:

$$\frac{2}{3} [(a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2) + (a_3^2 + a_4^2 - a_3 a_4) + \dots] \cdot k = n.$$

ГЛАВА VII.

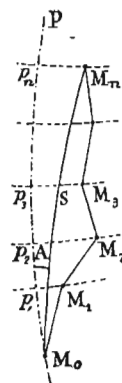
МЕРЕЊА СТЕПЕНА.

60. Луци меридијана.

Тригонометриски ланац троуглова за мерење степенâ т.ј. за одређивање облика и величине Земље увек се протеже или приближно у правцу каквог меридијана, или пак у правцу какве паралеле, те да се на најпростији начин добије: у првом случају лин. дужина меридијанског лука између одређених ширина, а у другом лин. дужина лука паралеле, која одговара познатој разлици дужина.

Нека су $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ тригонометриске тачке, које се налазе у близини меридијана PM_0 какве полазне тачке M_0 (сл. 51.), па нека су из астрономских посматрања одређене ширине φ_1 и φ_2 тачака M_0 и M_n а на првој од њих још и азимут триангулационе стране M_0M_1 . Тада ће се (као што је речено у чл. 53.) лако срачунати, по извесним приближним димензијама земног елипсоида, поларне координате тачке M_n у односу према M_0 , т.ј. лин. дужина геодетске линије $M_0M_n = S$ и азимут њен $PM_0M_n = A$, а по тим даним тражена линеарна дужина D меридијанског лука од M_0 до паралеле $M_n p_n$ тачке M_n одредиће се на овај начин:

Кад се средњи из азимута линије M_0M_n у тачкама M_0 и M_n означи са A_m , имаћемо по Гаусовим формулама (P')



Сл. 51

$$\lg D = \lg (M_m \cdot \beta \sin 1'') = \lg S \cos A_m + k \lambda_0^2 + \frac{k}{2} \delta_0^2; \dots \dots (1.)$$

при чему, због маленкости A_m , величине $\cos A_m$ и логаритамских поправака $k \lambda_0^2$ и $\frac{1}{2} k \delta_0^2$, то скоро сасвим неће зависити од приближно узетих димензија Земље за срачунавање.

С друге стране, лук D , као лук елиптичког меридијана са екваторијалном полуосом a и ексцентрицитетом e , треба да се изражава овако

$$D = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot \partial B \cdot \sin 1'' = a \cdot \sin 1'' \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1 - e^2) \partial B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

Кад се пак подинтегрална функција развије у ред по степенима мале величине e до чланова e^4 закључно, и, кад се $\sin^2 B$ и $\sin^4 B$ изразе помоћу косинуса лукова $2B$ и $4B$, имаћемо:

$$(1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} = (1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 B \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64} e^4 \right) - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{16} e^4 \right) \cos 2B + \frac{15}{64} e^4 \cos 4B$$

а, интегрирајући ово од $B = \varphi_1$ до $B = \varphi_2$, добићемо дефинитивно

$$D = a (\varphi_2 - \varphi_1) \sin 1'' (1 - \alpha e^2 - \beta e^4), \dots \dots \dots (2.)$$

где је

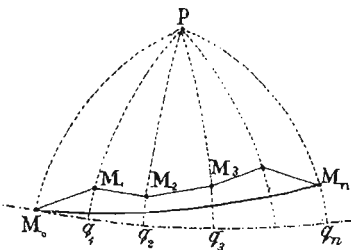
$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin 1''}$$

$$\beta = \frac{3}{64} + \frac{3}{16} \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1) \sin 1''} - \frac{15}{128} \frac{\sin 2 (\varphi_2 - \varphi_1) \cos 2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1) \sin 1''}.$$

Из два или неколико таквих лукова D , измерених под различитим ширинама, и могу да се одреде a и e , т.ј. тражене димензије Земље, као спљоштаног обртног елипсоида.

61. Луци паралела.

Ако се триангулација $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$ (сл. 52.) пружа приближно по правцу паралеле $M_0 q_n$ полазне тачке M_0 , то се по поларним координатама $M_0 M_n = S$ и $\sphericalangle P M_0 M_n = A$ ма које друге тачке M_n може лако срачунати лин. дужина паралеле $M_0 q_n = C$ између меридијана $P M_0$ и $P M_n q_n$. И заиста, кад означимо са A_m средњи из азимута геодетске линије $M_0 M_n$ у тачкама M_0 и M_n , добићемо по Гаусовим формулама (P')



Сл. 52.

$$\lg C_m = \lg (N_m \cos B_m \cdot \lambda \sin 1'') = \lg (S \sin A_m) - \frac{k}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2} k \lambda_0^2, \dots \dots (3.)$$

где је C_m дужина лука паралеле под ширином B_m као средње из ширина тачака M_0 и M_n ; затим ћемо имати

$$C = C_m \frac{N_0 \cos B_0}{N_m \cos B_m} = C_m \frac{\cos B_0}{\cos B_m} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_0}} \dots \dots \dots (3')$$

У том је случају азимут A_m близу 90° а B_m се мало разликује од B_0 ; стога, узете

за рачунање приближне димензије Земље неће такође имати скоро никаквог утицаја на величине $\sin A_m$, $\frac{\cos B_0}{\cos B_m}$ и $\frac{N_0}{N_m}$ па према томе ни на срачунату линеарну дужину лука C .

Али, ако су l_1 и l_2 астрономски одређене дужине тачака M_0 и M_n , онда на обртном елипсоиду са дужом полуосом a и ексцентрицитетом e треба да буде

$$C = N_0 \cos B_0 (l_2 - l_1) \sin 1'' = \frac{a \cdot \cos B_0 (l_2 - l_1) \sin 1''}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}}$$

или пак с довољном приближношћу

$$C = a \cdot \cos B_0 (l_2 - l_1) \sin 1'' (1 + \alpha' e^2 + \beta' e^4), \dots \dots \dots (4.)$$

где је $\alpha' = \frac{1}{2} \sin^2 B_0$ и $\beta' = \frac{3}{8} \sin^4 B_0$.

На тај начин из два или неколико лукова паралела, измерених под различитим ширинама B_0 , могу се добити тражене величине a и e .

62. Главнија мерења степена.

Од до сад*) извршених мерења степена најзначајнија су:

I *Руско - Скандинавско*, које се састоји управо из 12 посебних лукова, а које у целини обухвата лук од $25^\circ 20'$ од Дунава до Сев. Леденог Океана.

II *Француско - Енглеско*, од острва Форментера до шкотских острва (лук $22^\circ 10'$), подељено на 13 посебних лукова. Оно је затим продужено и везано преко Средоземног мора (в. чл. 33.) за француску триангулацију у Алжиру.

III *Енглеско мерење у Инсш. Индији* (лук од $23^\circ 49'$) од рта Коморина до Хималаја, подељено на 13 посебних лукова.

IV *Француско - Енглеско мерење на Ршу Добре Наде* (лук од $4^\circ 37'$).

V *Француско мерење у Перу* (лук од $3^\circ 7'$).

Осим тога има и неколико тачних мерења степена по кратким луцима, нпр. у *Прусској* (Беселаво), *Хановеру* (Гаусово), у *Данској* и т.д.

Од измерених лукова паралела најзначајнији је *лук паралеле 52°* , који је пројектовао В. Струве и који се протеже кроз сву Европу од Урала до Ирске, чији је већи, руски део подељен на 8 лукова. Други знатни *лук паралеле $47\frac{1}{2}^\circ$* протеже се такође кроз Русију од Кишињева до Астрахана. Мањи луци паралела мерени су у Ист. Индији (на ширини $+15^\circ$) у Сев. Америци (на 42°) и у Алжиру.

Овде ћемо у таблицама дати лин. дужине D са ширинама φ за побројане најглавније лукове миридијана и лин. дужине C са дужинама l за руске лукове паралела; дате пак у тим таблицама вредности величина $\delta\varphi$ и $\delta l \cdot \cos B_0$ објасниће се доцније.

*) До краја XIX века, када је оно дело писано.

Луци Меридијана.

Ширине φ	D у стопама	δφ	Ширине φ	D у стопама	δφ			
I. {	45°20' 2".94	616 530	- 2".98	III. {	8°12'10".44	1013 112	- 3".14	
	47 1 24.98	630 232	+ 1.13		10 59 41.06	727 410	- 2.20	
	48 45 3.04	490 789	+ 2.59		12 59 51.79	698 010	+ 2.90	
	50 5 49.95	711 194	- 2.23		14 55 21.51	451 009	- 3.68	
	52 2 42.16	951 567	+ 0.11		16 9 46.13	686 355	+ 4.36	
	54 39 4.16	676 100	- 0.22		18 3 14.82	975 450	+ 1.24	
	56 30 4.97	686 009	+ 2.25		20 44 21.27	463 636	+ 4.53	
	58 22 47.56	623 714	- 1.48		22 1 3.77	763 828	- 2.95	
	60 5 9.84	931 770	- 0.42		24 7 10.79	593 918	- 1.39	
	62 38 5.25	1168 884	- 1.26		25 45 10.93	789 123	+ 1.99	
	65 49 44.57	1043 728	+ 3.91		27 55 30.02	578 114	- 1.90	
	68 40 58.40	727 403	- 1.42		29 30 48.32	311 135	+ 3.65	
	70 40 11.23		+ 0.03		30 22 11.78	602 052	+ 0.14	
	38 39 53.17	988 702	+ 4.25		32 1 34.06		- 3.55	
	41 22 47.90	668 586	+ 0.57					
	43 12 54.30	2053 539	- 1.23					
	48 50 47.98	646 654	- 2.62		IV. {	- 29 44 17.66	811 508	- 0.38
	50 37 6.54	586 357	- 1.17			- 31 58 9.11	714 879	+ 0.20
52 13 26.59	450 226	+ 1.18		- 33 56 3.20	106 197	- 0.64		
53 27 29.50	478 604	- 2.49		- 34 13 32.13	45 792	+ 0.98		
54 46 6.20	540 584	- 1.45		- 34 21 6.26		- 0.16		
56 14 53.60	444 102	- 1.09						
57 27 49.12	605 706	- 0.71	V. {	+ 0 2 31.2	1131 025	+ 0.59		
59 7 15.19	623 792	+ 0.08		- 3 4 31.9		- 0.59		
60 49 37.21		+ 1.45						

Руски луци паралела.

Дужине l	C у стопама	δl. cos B ₀	Дужине l	C у стопама	δl. cos B ₀		
B ₀ = 52°	0° 0' 0".00	427 997	- 1".79	B ₀ = 47½°	0° 0' 0".00	775 750	- 1".79
	1 53 57.60	630 959	- 1.15		3 8 10.23	793 493	+ 3.81
	4 41 51.10	1215 442	+ 3.84		6 20 49.17	1119 504	+ 2.45
	10 5 37.60	1540 715	+ 0.21		10 52 35.22	1195 906	+ 1.87
	16 56 1.30	797 688	- 3.37		15 43 6.30	861 000	- 7.00
	20 28 19.45	1450 470	+ 1.24		19 11 55.11		+ 0.66
	26 54 44.80	911 039	- 4.55				
	30 57 6.40	1132 123	+ 4.80				
	35 58 42.25		+ 0.78				

63. Највероватније димензије земног елипсоида.

Напред изложени луци меридијана и паралела пружају нам велики број једначина облика (2.) и (4.) за одређивање полуосе a и ексцентрицитета e земног елипсоида; али пошто нивоска (водоравна) Земљина површина одступа од правилног елипсоидног облика, то се може истраживати само такав елипсоид, који би најбоље задовољио све те једначине, т.ј. управо такав, чије би нормале у разним тачкама најмање одступале од праваца вертикалних линија, добивених из астрономских ширина и дужина тих тачака. На тај начин, ако се та мала одступања по ширини у разним тачкама меридијанских лукова означе са $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \dots$ а одступања у правцу првог вертикала у разним тачкама лукова паралела са $\delta l_1 \cdot \cos B_1, \delta l_2 \cdot \cos B_2, \delta l_3 \cdot \cos B_3, \dots$ и, ако их будемо сматрали за случајне, онда ће услов за одређивање непознатих a и e бити овакав

$$\Sigma (\delta\varphi)^2 + \Sigma (\delta l \cdot \cos B)^2 = \text{minimum} \dots \dots \dots (5.)$$

Узмимо, да је са некаквим приближним величинама a_0 и e_0^2 и са астрономским ширинама φ_1 и φ_2 срачуната по формули (2.) лин. дужина D_0 меридијанског лука, који се разликује од измерене D за величину $\Delta D = D - D_0$. Ако ми додамо тим основним величинама a_0 и e_0^2 мале поправке Δa и Δe^2 , а ширинама φ_1 и φ_2 поправке $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$, па занемаримо у формули (2.) члан βe_0^4 , — пошто се он при томе скоро неће ни изменити, — онда ћемо за прираштај ΔD имати овај израз

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta a}{a_0} - \frac{\alpha \Delta e^2}{1 - \alpha e_0^2} + \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1},$$

а кад се ради скраћења означи

$$-\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0} = p, \quad \frac{\alpha (\varphi_2 - \varphi_1)}{1 - \alpha e_0^2} = q, \quad \frac{\Delta D}{D} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = r,$$

онда ће се одатле добити

$$\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 = p \cdot \Delta a + q \cdot \Delta e^2 + r \dots \dots \dots (6.)$$

На сличан начин, ако се лук C_0 паралеле, — који је сручунат по формули (4.) са величинама a_0 и e_0^2 и посматраним дужинама l_1 и l_2 , — буде разликовао од измереног C за величину $\Delta C = C - C_0$, изаћи ће

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta a}{a_0} + \alpha' \cdot \Delta e^2 + \frac{\delta l_2 - \delta l_1}{l_2 - l_1},$$

а одатле, кад се ради скраћења означи

$$-\frac{l_2 - l_1}{a_0} \cos B_0 = p', \quad -\alpha' (l_2 - l_1) \cos B_0 = q', \quad \frac{\Delta C}{C} (l_2 - l_1) \cos B_0 = r',$$

добићемо

$$\cos B_0 (\delta l_2 - \delta l_1) = p' \cdot \Delta a + q' \Delta e^2 + r' \dots \dots \dots (7.)$$

Кад се прво случајне разлике $(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1)$ и $(\delta l_2 - \delta l_1)$ ставе равне нули у свима на тај начин добивеним једначинама (6.) и (7.) и одреде по методи најмањих квадрата непознате Δa и Δe^2 , добићемо таква још заостала одступања $(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1)$ и $(\delta l_2 - \delta l_1) \cos B$, чија ће сума квадрата бити најмања. Али ће се, нешто друкчије поступити у случају, када некоји од лукова D или C леже у суседству, један у продужењу другога (као што смо видели у датим примерима); јер ће тада разлике $(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1)$, $(\delta\varphi_3 - \delta\varphi_2)$ и т.д. или пак $(\delta l_2 - \delta l_1)$, $(\delta l_3 - \delta l_2)$ и т.д. зависити једна од друге. Онда ће свако мерење степена по меридијану доставити низ оваквих једначина (6.):

$$\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 = f_1, \delta\varphi_3 - \delta\varphi_2 = f_2, \delta\varphi_4 - \delta\varphi_3 = f_3, \dots, \delta\varphi_n - \delta\varphi_{n-1} = f_{n-1}, \dots \quad (8.)$$

у којима су десне стране просто ради скраћења означене словом f ; простим пак сабирањем њиховим, — означивши уопште $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i = F_i$, — добићемо:

$$\delta\varphi_1 - \delta\varphi_1 = 0, \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 = F_1, \delta\varphi_3 - \delta\varphi_1 = F_2, \dots, \delta\varphi_n - \delta\varphi_1 = F_{n-1} \dots \quad (9.)$$

или у средњем
$$\frac{\Sigma\delta\varphi}{n} - \delta\varphi_1 = \frac{\Sigma F}{n} = F_m \dots \dots \dots \quad (10.)$$

а пошто због карактера случајности одступања $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \dots, \delta\varphi_n$ треба да буде $\frac{\Sigma\delta\varphi}{n} = 0$, то ће се, после елиминације $\delta\varphi_1$, уместо (9.) добити оваква система једначина:

$$\delta\varphi_1 = -F_m, \delta\varphi_2 = F_1 - F_m, \delta\varphi_3 = F_2 - F_m, \dots, \delta\varphi_n = F_{n-1} - F_m \dots \quad (11.)$$

из које ће се већ моћи одредити највероватније вредности за Δa и Δe^2 по методи најмањих квадрата. Тако исто треба поступити и са једначинама (7.), које нам пружају разни услови мерења степена по каквој паралели.

64. Кларкови резултати.

Из свију меридијанских лукова, које смо дали у чл. 62. са додатком још и лука источно-индијске паралеле, енглески геодет. пуковник Кларк је извео по методи најмањих квадрата, онако како смо објаснили, ове највероватније димензије земног елипсоида:

$a = 20\,926\,202$	енгл. стопа са вероватном грешком ± 245	ст.
$b = 20\,854\,895$	„ „ „ „ „ „	± 227 „ *)
$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.006\,803$	„ „ „ „ „ „	± 0.000025
$c = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{293.5}$	„ „ „ „ „ „	± 1.1 (у именитељу).

Добивена после тога одступања $\delta\varphi$ по ширини, чија је средња квадратна вредност изашла $\pm 2''.5$, дата су у последњем ступцу таблице чл. 62. Та се одступања никако не могу објаснити само нетачношћу ширина φ (које се одређују са средњом грешком не већом од $\pm 0''.2$) и нетачношћу тригонометрских мерења лукова D, већ се морају приписати управо одступању стварне

* $a = 6\,378\,249$ метара
 $b = 6\,356\,515$ „

нивоске Земљине површине од елипсоидног облика. При томе се како знаци, тако и величине њихове мењају у свима луцима без икакве приметне правилности; стога се потпуно потврђује и напред узета претпоставка о случајности њиховога карактера.

Из истих меререња степена Кларк је извео Земљине димензије још и на тај начин, што меридијане није сматрао за елипсе већ за криве са радиусима кривине M , који се изражавају функцијом ширине φ овако

$$M = A + B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi;$$

али, кад су одређене биле највероватније вредности за A , B и C , показало се, да одступање добивене кривине од раније елипсе не износи више од ± 20 енгл. стопа.

Најзад је Кларк срачунао Земљине димензије и на тај начин, што ју је сматрао за елипсоид са три осе па је нашао за поларну полуосу b и за 2 екваторијалне полуосе a' и a'' ове вредности:

$$b = 20\,854\,447 \text{ енгл. стопа}, \quad a = \frac{a' + a''}{2} = 20\,925\,867 \text{ енгл. стопа},$$

$$a' - a'' = 1524 \text{ енгл. стопа}, \quad \text{средња поларна спљоштеност } c = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{293.1},$$

$$\text{екваторијална спљоштеност } c' = \frac{a' - a''}{a'} = \frac{1}{13730} = \frac{c}{47}.$$

При томе се дужа екваторијална полуоса a' показала у правцу 8° дужине западно од Гринвича; али су подаци за то срачунавање, били, разуме се, сувише недовољни, да би се томе правцу и самој екваторијалној спљоштености могло поклонити много вере

Напомена. Многи се од астронома и геодета служе и до данас елементима земног елипсоида, које је Бесел много раније извео, али из много мањег броја меридијанских лукова. Те димензије су овакве:

$$a = 327\,2077 \text{ тоаза} = 20\,923\,400 \text{ енг. стопа}, \quad c = \frac{1}{299.15}^*)$$

Напомена преводиоца. На основу најновијих испитивања и срачунавања америчког геодета Хејфорда, који је у та срачунавања увео и изостатичко равнање тј. отклањање утицаја атракције на скретање вертикала, добивени су ови елементи земнога елипсоида

$$a = 6\,378\,388 \text{ метара}, \quad c = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297}$$

и они су примљени на конгресу „Међународног Геодетског и Геофизичког Савеза“ у Мадриду 1924. г., као најтачнији за сад, за срачунавање триангулација.

65. Резултати из руских мерења степена.

Да бисмо примером објаснили извод највероватнијих димензија земног елипсоида, по изложеноме у чл. 63., одредићемо полуосу a и спљоштеност c таквога обртног елипсоида, који би најбоље одговарао даним само рускога меридијаског лука (I).

*) $a = 6377397.2$ метара

Кад узмемо за основу срачунавања Кларкове резултате из свију мерења степена, тј. $\alpha_0 = 20\ 926\ 202$ стопе и $e^2_0 = 0.006\ 803$, по формули (6.) добили бисмо просто, да је $r = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1$; стога при изналажењу поправака $\Delta\alpha$ и Δe^2 , те величине r имамо већ готове за све поједине делове лука I, као разлике тих истих одступања $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \dots$, које је Кларк био нашао. Кад још ставимо ради удобнијег срачунавања

$$\frac{\Delta\alpha}{1000} = x, \quad 1000 \Delta e^2 = y, \quad p = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\alpha_0} \cdot 1000, \quad q = \frac{z(\varphi_2 - \varphi_1)}{1 - \alpha e^2_0} \cdot \frac{1}{1000},$$

и, кад срачунамо (са логаритмима само од 4 децимале) коефицијенте p и q по — датим у табlici — ширинама појединих тачака лука I, добићемо спочетка низ даље означених једначина (6.); из њих ћемо затим, као што је изложено у чл. 63., добити систему једначина (9.) и (11.), а из ових последњих саставићемо најзад по методи најмањих квадрата две нормалне једначине за изналажење највероватнијих вредности непознатих x и y :

		p	q				
(6.)	{	$\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 = -0.29 x + 1.33 y + 4.11$			(9.)	{	$\delta\varphi_1 - \delta\varphi_1 = 0.00 x + 0.00 y + 0.00$
		$\delta\varphi_3 - \delta\varphi_2 = -0.30 + 1.09 + 1.46$					$\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 = -0.29 + 1.33 + 4.11$
		$\delta\varphi_4 - \delta\varphi_3 = -0.23 + 0.65 - 4.82$					$\delta\varphi_3 - \delta\varphi_1 = -0.59 + 2.42 + 5.57$
		$\delta\varphi_5 - \delta\varphi_4 = -0.34 + 0.65 + 2.34$					$\delta\varphi_4 - \delta\varphi_1 = -0.82 + 3.07 + 0.75$
		$\delta\varphi_6 - \delta\varphi_5 = -0.45 + 0.32 - 0.33$					$\delta\varphi_5 - \delta\varphi_1 = -1.16 + 3.72 + 3.09$
		$\delta\varphi_7 - \delta\varphi_6 = -0.32 - 0.14 + 2.47$					$\delta\varphi_6 - \delta\varphi_1 = -1.61 + 4.04 + 2.76$
		$\delta\varphi_8 - \delta\varphi_7 = -0.32 - 0.44 - 3.73$					$\delta\varphi_7 - \delta\varphi_1 = -1.93 + 3.90 + 5.23$
		$\delta\varphi_9 - \delta\varphi_8 = -0.29 - 0.66 + 1.06$					$\delta\varphi_8 - \delta\varphi_1 = -2.25 + 3.46 + 1.50$
		$\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_9 = -0.44 - 1.43 - 0.84$					$\delta\varphi_9 - \delta\varphi_1 = -2.54 + 2.80 + 2.56$
		$\delta\varphi_{11} - \delta\varphi_{10} = -0.55 - 2.49 + 5.17$					$\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_1 = -2.98 + 1.37 + 1.72$
		$\delta\varphi_{12} - \delta\varphi_{11} = -0.49 - 2.83 - 5.33$					$\delta\varphi_{11} - \delta\varphi_1 = -3.53 - 1.12 + 6.89$
		$\delta\varphi_{13} - \delta\varphi_{12} = -0.34 - 2.28 + 1.45$					$\delta\varphi_{12} - \delta\varphi_1 = -4.02 - 3.95 + 1.56$

у средњем $0 - \delta\varphi_1 = -2.01 x + 1.14 y + 2.98$

		a	b	c					
(10.)	{	$\delta\varphi_1 = +2.01 x - 1.14 y - 2.98$			$= -2.17$	(11.)	{	$(aa) = + 24.48$	$(ab) = + 35.10$
		$\delta\varphi_2 = +1.72 + 0.19 + 1.13$			$= + 1.69$			$(ac) = - 4.21$	
		$\delta\varphi_3 = +1.42 + 1.28 + 2.59$			$= + 2.92$			$(bb) = + 122.73$	$(bc) = + 2.25$
		$\delta\varphi_4 = +1.19 + 1.93 - 2.23$			$= - 2.05$				
		$\delta\varphi_5 = +0.85 + 2.58 + 0.11$			$= + 0.10$				
		$\delta\varphi_6 = +0.40 + 2.90 - 0.22$			$= - 0.42$				
		$\delta\varphi_7 = +0.08 + 2.76 + 2.25$			$= + 1.96$				
		$\delta\varphi_8 = -0.24 + 2.32 - 1.48$			$= - 1.83$				
		$\delta\varphi_9 = -0.53 + 1.60 - 0.42$			$= - 0.78$				
		$\delta\varphi_{10} = -0.97 + 0.23 - 1.26$			$= - 1.61$				
		$\delta\varphi_{11} = -1.52 - 2.26 + 3.91$			$= + 3.66$				
		$\delta\varphi_{12} = -2.01 - 5.09 - 1.42$			$= - 1.51$				
		$\delta\varphi_{13} = -2.35 - 7.37 + 0.03$			$= + 0.09$				

Нормалне једначине:

$$+ 24.48 x + 35.10 y - 4.21 = 0$$

$$+ 35.10 x + 122.73 y + 2.25 = 0$$

$$x = + 0.336 \text{ са тежином } 14.4$$

$$y = - 0.115 \text{ „ „ } 72.4$$

$$\Delta\alpha = + 336 \text{ стопа}$$

$$\Delta e^2 = - 0.000\ 115$$

У групи једначина (10.) показане су вредности за $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \dots, \delta\varphi_{13}$, нађене помоћу x и y . Средња њихова грешка ε и средње грешке x и y одређују се на овај начин:

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum (\delta\varphi)^2}{13-3} = 4.66, \quad \varepsilon = \pm 2''.16, \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{14.4}} = \pm 0.569, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{72.4}} = \pm 0.254;$$

дефинитивно пак излази:

$$a = a_0 + 336 \text{ ст.} = 20\,926\,538 \text{ ст. са вероват. грешком } \pm 379 \text{ стопа.}$$

$$e^2 = e_0^2 - 0.000\,115 = 0.006\,688 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \pm 0.000\,169$$

$$c = \frac{a-b}{a} = \frac{e^2}{2} \left(1 + \frac{e^2}{4} + \dots\right) = \frac{1}{298.5} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \pm 7.4 \text{ (у имен.)}$$

Исто је такав резултат добио и пуковиик Б о н с д о р ф (Записки В. Топ. Отдѣла Гл. Штаба, XLII) само из руског меридијанског лука. Професор пак Жданов (Записки В. Топ. Отдѣла Гл. Штаба, L) нашао је из два руска лука паралела 52° и $47.1/2^\circ$ и три краћа меридијанска лука, који их спајају, ове највероватније вредности за a и c :

$$a = a_0 - 1746 \text{ ст.} = 20\,924\,456 \text{ ст. са вероват. грешком } \pm 1000 \text{ стопа.}$$

$$c = \frac{1}{293.5 + 6.2} = \frac{1}{299.7} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \pm 6.9 \text{ (у имен.)}$$

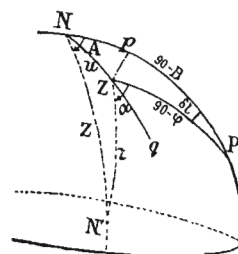
Случајна одступања вертикалних линија $\delta l \cdot \cos B_0$, која су се при томе показала, и дата су у нашој таблици чл. 62. Према томе, како дужа полуоса a , тако и спљоштеност c земног елипсоида, добивају се само из руских мерења степена са тако знатним вероватним грешкама, да се још никако не може рећи, да би се оне боље прилагођавале па и примењивале на простору Европске Русије него a_0 и c_0 , које је Кларк нашао за сву Земљу уопште.

ГЛАВА VIII.

ЛОКАЛНА СКРЕТАЊА ВЕРТИКАЛНИХ ЛИНИЈА.

66. Утицај скретања вертикалних линија на ширине, дужине, азимуте и висине тачака.

Замислимо на каквој тачци M земне површине помоћну сферу па нека нормала тачке M идеалнога земног елипсоида продире кроз ту сферу у тачци N (сл. 53.), вертикална линија у тачци Z , која се зове зенит, а правац паралелни са Земљином осом — у полу P . Велики ће круг PN те сфере представљати раван елипсоидног меридијана те ће са некојим почетним меридијаном заклапати угао L , који смо раније назвали геодетском дужином тачке M ; велики пак круг PZ биће истинити меридијан тачке M те ће заклапати са тим истим почетним меридијаном угао, који је раван истинитој или астрономској дужини l те тачке. Лук $PN = 90^\circ$ — B биће раван допуни геодетске ширине B тачке M , а $PZ = 90^\circ - \varphi$ допуни истините ширине φ .



Сл. 53.

Замислимо још и перпендикулар Zp на меридијан PN и означимо угао PNZ са Θ . Тада ће се потпуно скретање вертикалне линије $NZ = u$ у тачци M разложити по меридијану и по правцу перпендикуларном на њега на две компоненте:

$$Np = \xi = u \cdot \cos \Theta \quad \text{и} \quad Zp = \eta = u \cdot \sin \Theta,$$

те ће се из елементарног сферног троугла NZP лако добити:

$$\delta\varphi = \varphi - B = \xi, \quad \delta l = l - L = \eta \cdot \sec \varphi \dots \dots \dots (1.)$$

Такав је утицај скретања вертикале тачке M на ширину φ и дужину l , добивених из астрономских посматрања.

Ако је из M посматрана у правцу N' каква друга тачка триангулације, онда је $\sphericalangle PNN' = A$ геодетски азимут тога правца, који се добива срачунавањем на елипсоиду, а $\sphericalangle PZN' = \alpha$ истинити азимут, који се добива из астрономских посматрања. Али пошто је за земни предмет зенитно растојање $ZN' = z$ увек близу 90° , то се у елементарном троуглу NZN' угли qZN' и qNN' могу сма-

трати за једнаке, те је стога

$$\alpha - A = \sphericalangle PZq - \sphericalangle PNq = \sphericalangle NPZ \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

или
$$\delta\alpha = \alpha - A = \delta l \cdot \sin \varphi = \eta \operatorname{tg} \varphi \quad \dots \quad (2.)$$

т.ј. ушлицај скрешања вертикалне линије на азимуше, посматране са какве шачке на земне предмете, шреба да излази само као просша посљедица њенога скрешања по дужини, и обрашно. Ово је први пут запазио Лаплас.

Најзад, разлика δz између посматраног зенитног растојања z тачке N' и угловног растојања $NN' = Z$ рачунатог од нормале идеалног елипсоида, — која (разлика) треба да покаже некакав утицај на резултате геодетског нивелања, — изразиће се помоћу компонената локалног скретања ξ и η , — као што је лако видети из троугла NZN' , — на овај начин:

$$-\delta z = Z - z = u \cdot \cos(A - \Theta) = \xi \cos A + \eta \sin A \quad \dots \quad (3.)$$

67. Оријентирање триангулације.

У гл. VI видели смо, да је за срачунавање елипсоидних ширина B и релативних дужина L тачака триангулације: M_0, M_1, M_2, \dots довољно знати ширину B_0 какве полазне тачке M_0 и азимут A_0 стране M_0M_1 , која из ње полази. Али ако се за B_0 и A_0 узме ширина φ_0 и азимут α_0 , који су одређени из астрономских посматрања, онда ће разлике $\varphi_0 - B_0 = \xi_0$ и $\alpha_0 - A_0 = \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0$, — које проилазе усљед извесног скретања u_0 вертикалне линије на тачци M_0 , — учинити, да за све остале тачке срачунате геодетске ширине B и дужине L буду више или мање погрешне. Усљед тога се за оријентирање триангулације никад не треба задовољавати само са двама величинама φ_0 и α_0 , већ треба из астрономских посматрања одредити ширине φ , дужине l или пак азимуте страна α по могућности на што већем броју тачака; јер се тада могу изнаћи такве највероватније вредности за ξ_0 и η_0 при којима би се срачунате координате B, L и A разних тачака најбоље слагале са астрономским φ, l и α ; тада се тек онај остатак разлика $(\varphi - B), (l - L)$ и $(\alpha - A)$ треба да припише скретању вертикалних линија на тим тачкама.

Ради тога треба пре свега одредити, уколико ће се управо изменити B, L и A , срачунате за какву тачку M са полазним величинама φ_0 и α_0 , ако се од ових буду одузеле ξ_0 и $\eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0$. Кад поновимо сва срачунавања са истом ширином φ_0 , али са почетним азимутом α_0 увећаним за $10''$, увидећемо, да ће B, L и A добити неке прираштаје $10 \Delta B_a, 10 \Delta L_a$ и $10 \Delta A_a$; Кад се још једном понове та срачунавања са непромењеним сад полазним азимутом α_0 , али са ширином φ_0 повећаном за $10''$, добићемо прираштаје $10 \Delta B_b, 10 \Delta L_b$ и $10 \Delta A_b$. Тада ће се тражене промене $\Delta B, \Delta L$ и ΔA изразити овако:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= -\xi_0 \cdot \Delta B_b - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \Delta B_a \\ \Delta L &= -\xi_0 \cdot \Delta L_b - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \Delta L_a \\ \Delta A &= -\xi_0 \cdot \Delta A_b - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \Delta A_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.)$$

Кад додамо те поправке првобитно срачунатим координатама B , L и A , имаћемо, на основу једначина (1.) и (2.), за компоненте ξ и η скретања вертикалне линије на ма којој тачци M ове изразе:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi - (B + \Delta B) = (\varphi - B) + \xi_0 \cdot \Delta B_b + \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \Delta B_a \\ \eta \sec \varphi &= l - (L + \Delta L) = (l - L) + \xi_0 \cdot \Delta L_b + \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \Delta L_a \\ \text{или пак } \eta \operatorname{tg} \varphi &= \alpha - (A + \Delta A) = (\alpha - A) + \xi_0 \cdot \Delta A_b + \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \Delta A_a \end{aligned} \right\} \dots (5.)$$

На тај начин свака астрономска одредба ширине φ , или дужине l , или пак азимута α на ма којој тригонометриској тачци даће нам или једначину облика

$$\xi = n + p\xi_0 + q\eta_0 \dots \dots \dots (6.)$$

$$\text{или пак } \eta = n' + p'\xi_0 + q'\eta_0 \dots \dots \dots (6'.)$$

Ако спочетка узмемо да су све ξ и η равне нули па нађемо из те системе једначина по обичној методи најмањих квадрата највероватније вредности тражених ξ_0 и η_0 , то ће се оне вредности за ξ и η , које се добију после замене нађених ξ_0 и η_0 , и моћи сматрати за компоненте скретања вертикала на разним тачкама.

Треба само напоменути, да једначине (6'), за дужине и азимуте, имају, уопште говорећи, нешто мању тежину, него једначине (6.) за ширине; јер се разлике дужина врло ретко одређују из астрономских посматрања са истом тачности као ширине; у једначинама пак азимута улазе свецело грешке измерених углова триангулације.

Као образац оријентирања триангулације може послужити обрада тригонометријске мреже, која захвата сву Вел. Британију са Ирском*): 35 посматраних ширина и 41 посматраних дужина и азимута доставили су за ту сложену мрежу 76 условних једначина, у којима су сем ξ_0 и η_0 , биле уведене још и поправке Δa и Δe првобитно примљених елемената земног елипсоида a_0 и e_0 , због чега су оне добиле облик:

$$\xi = n + p\xi_0 + q\eta_0 + r\Delta a + s\Delta e$$

$$\eta = n' + p'\xi_0 + q'\eta_0 + r'\Delta a + s'\Delta e.$$

На тај је начин за елипсоид, који се најбоље прилагођава испитаном пространству, нађена дужа полуоса $a = 20\,927\,005$ стопа и спљоштеност $c = \frac{1}{280}$. Уосталом на сигурност се сличних одредаба елемената a и c уопште не може рачунати, као што смо то видели и на примеру у предидућој глави (чл. 65.).

68. Релативна издизања и спуштања површине геоида према површини елипсоида.

До сада смо сматрали, да су скретања ξ и η на разним тачкама земне површине случајна. Међутим на мањим се просторијама она мењају, при прелазу са једне тачке на другу, толико правилно, да се потпуно јасно манифестује узрок њихова постојања — утицај локалне ашракције (привлачења).

* Klark „Account of the Observations and Calculations of the Principal Triangulation of Great Britain and Ireland“.

Тако су например у Московској Губернији*) биле одређене из астрономских посматрања ширине вр. великог броја другокласних и трећекласних тригонометријских тачака, па су изведене отуд вредности за $\xi = \varphi - B$ за поједина места, која се налазе приближно на једном и истом меридијану (звонаре Ивана Великог у Москви), изашле овакве:

φ	$55^{\circ}10'$	$15'$	$20'$	$25'$	$30'$	$35'$	$40'$	$45'$	$50'$	$55'$	$56^{\circ}0'$	$5'$	$10'$
ξ	$+1''.2$	$+1''.8$	$+0''.8$	$+3''.8$	$+6''.3$	$+4''.5$	$-2''.3$	$-8''.4$	$-5''.5$	$-3''.2$	$-1''.2$	$+2''.0$	$+2''.4$

При томе су сличне правилне промене у скретању ξ запажене и на знатном простирању ка истоку и ка западу од Москве. По њима се може саставити приближна представа о самом облику стварне нивоске површине на целој тој просторији, т. ј. представа о облику *геоида*. Расматрајући само напред речени меридијански пресек његов, срачунаћемо простим интерполовањем, за сваки интервал од $5'$ по ширини (приближно равног $30\,000$ стопа) издизање површине геоида ζ у односу према површини земног елипсоида на овај начин:

$$\Delta\zeta = -30\,000 \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \cdot \sin 1'' = -0.15 \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \text{ стопа};$$

а затим поступним сабирањем $\Delta\zeta$ добићемо и саме висине ζ површине геоида над површином елипсоида, узевши да је на првој тачци ($\varphi = 55^{\circ}10'$) $\zeta = 0$.

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = +1''.5 + 1''.3 + 2''.3 + 5''.0 + 5''.4 + 1''.1 - 5''.3 - 7''.0 - 4''.4 - 2''.2 + 0''.4 + 2''.2$$

$$\Delta\zeta = -0.23 - 0.20 - 0.35 - 0.75 - 0.81 - 0.17 + 0.80 + 1.05 + 0.66 + 0.33 - 0.06 - 0.33$$

$$\zeta = 0 - 0.23 - 0.43 - 0.78 - 1.53 - 2.34 - 2.51 - 1.71 - 0.66 \quad 0.00 + 0.33 + 0.27 - 0.06$$

Као што се види, геоид овде образује у односу према елипсоиду извесно спуштање на дубину мању од 3 стопе. У другим пак пределима, као например у Швајцарској и на Кавказу, где систематска скретања вертикалних линија досежу до неколико десетака секунда, геоид се издиже изнад елипсоида на 40 и више стопа.

Уопште говорећи, на оним просторијама, где су откривена систематска скретања вертикалних линија како по ширини, тако и по дужини, издизање ζ геоида над елипсоидом у свакој тачци, — чије су правоугле елипсоидне координате (чл. 53.) у односу према централној тачци равне X и Y , — треба да се изражава неком функцијом тих координата

$$\zeta = F(XY)$$

Тада ће се скретања вертикалних линија од нормалâ елипсоида у правцу меридијана и у правцу перпендикуларном на њега представити, очевидно, у облику производних:

$$\xi \sin 1'' = \frac{\partial\zeta}{\partial X} = f_x(XY), \quad \eta \sin 1'' = \frac{\partial\zeta}{\partial Y} = f_y(XY);$$

*) Швейцарь. „Изслѣдованіе мѣстной аштракціи около Москвы“.

па због тога величине ξ и η , посматране на разним местима испитане просто-рије, треба да задовоље једначину

$$\frac{\partial \zeta}{\partial Y} = \frac{\partial \eta}{\partial X} \dots \dots \dots (7.)$$

Ту неопходну везу између скретања вертикалне линије по ширини и по дужини ($\eta = \delta l \cdot \cos \varphi$) дао је први пут проф. Слудски. На њој је засновано врло интересантно испитивање геод. ђенерала Померанцева „О облику геоида у рејону Ферганске Области“ *).

Кад се ограничимо само на малу просторију тражене површине геоида, зависност се ζ од координата тачака X и Y може представити простом интерполационом формулом

$$\zeta = A + (B_1 X + B_2 Y) + (C_1 X^2 + 2C_2 XY + C_3 Y^2) + \\ + (D_1 X^3 + 3D_2 X^2 Y + 3D_3 XY^2 + D_4 Y^3) + \dots \dots$$

па одредити бројне вредности коефицијената $B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2$, и т.д. по многим даним величинама ξ и η из једначина:

$$\xi \sin 1'' = B_1 + 2(C_1 X + C_2 Y) + 3(D_1 X^2 + 2D_2 XY + D_3 Y^2) + \dots$$

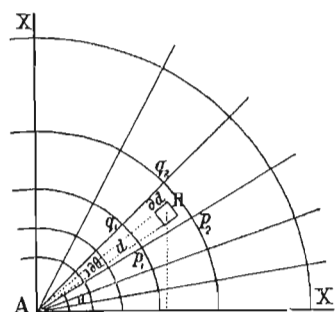
$$\eta \sin 1'' = B_2 + 2(C_2 X + C_3 Y) + 3(D_2 X^2 + 2D_3 XY + D_4 Y^2) + \dots$$

69. Срачунавање локалног привлачења.

Локално привлачење (ашракција), које осетно мења правац вертикалних линија у границама релативно малих просторија земљишта, зависи с једне стране од видног рељефа стварне земне површине, која је доста добро изражена на плановима и картама тога земљишта; с друге стране оно зависи од разних неправилности унутрашње структуре земне коре, које нам остају недовољно познате због њихове неприступачности за непосредно геолошко испитивање. Да видимо, како се срачунава и узима у обзир утицај првог узрока, који је каткад и сам довољан, да објасни локална скретања вертикалних линија.

Кад занемаримо кривину земље, уобразимо око какве тачке A вертикалне цилиндричне површине разних полупречника: $Ap_1 = d_1, Ap_2 = d_2 \dots$ (сл. 54.)

и вертикалне радиалне равнине: $Aq_1 q_2, \dots$, које састављају са неким основним хоризонталним правцем AX (на пример са меридијанском линијом) угле: $\sphericalangle XA p_1 = \theta_1, \sphericalangle XA q_1 = \theta_2, \dots$. На тај ће се начин земљиште око тачке A разделили на призматичне елементе $p_1 q_1 q_2 p_2$ са одређеном висином H (у односу према A) за сваки од њих, што је лако оценити по даноме рељефу земљишта на карти; густина пак δ за сваки од тих призматичких елемената може се, уопште говорећи, сматрати као подједнака, а на име као средња густина спољњих слојева земне коре $\delta = 2.8$.



Сл. 54.

*) Записки В. Топогр. Отдѣла Гл. Штаба, часть LIV.

Пошто су вертикални угли, под којима се из тачке А представљају висине Н, скоро увек тако мали, да се косинуси њихови у претстојећим приближним срачунавањима могу сматрати за јединице, то ће се привлачно (атракционо) деловање на тачку А бескрајно танке вертикалне призме, — која има у основи равнину $d \cdot \partial\theta \cdot \partial d$, — изразити просто овако

$$\partial F = k\delta \frac{H \cdot d\partial\theta \cdot \partial d}{d^2} = k\delta \cdot H \cdot \frac{\partial d}{d} \cdot \partial\theta,$$

где је k коефицијент Њутновог привлачења. Привлачење пак којему је подвргнута тачка А од стране призматичког елемента $p_1 q_1 q_2 p_2$ у правцу АХ биће

$$F_x = \int \partial F \cos \theta = k\delta H \int_{d_1}^{d_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial d}{d} \cdot \partial \theta \cos \theta = k\delta H (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \lg \frac{d_2}{d_1}.$$

При радиусима d_1, d_2, d_3, \dots , који расту у геометријској прогресији, и при углима $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, који расту у аритметичкој прогресији, величине ће

$$K = \lg \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{4343} \text{Lg} \frac{d_2}{d_1} \quad \text{и} \quad L = \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \quad \dots \quad (8.)$$

остајати сталне за све комаде раздељеног земљишта те ће се потпуно привлачно деловање на тачку А у правцу АХ добити врло просто у облику

$$F_x = k\delta \cdot KL \cdot \Sigma H \quad \dots \quad (9.)$$

Ова кружна и радиална подела врши се обично на прозачној хартији у размери плана земљишта па се она и постави на план тако, да се центар поделе поклопи са жељеном тачком А а основна линија АХ са меридијанском линијом; затим остаје само, да се по хоризонталама плана одреде средње висине Н за сваки комад поделе и да се узме њихова општа сума. За срачунавање пак деловања привлачења F_y у правцу првог вертикала, треба линију АУ поклопити са правцем меридијана тачке А па сад понова одредити већ друге средње висине Н' свију комада поделе. Треба ипак напоменути, да се само у ретким случајима може одредити крајње растојање d , после којег рељеф земљишта неби показивао осетног утицаја на вертикалну линију централне тачке А*).

Да би се одредила скретања вертикале ξ и η , која произлазе од компоненте F_x и F_y , врло малих у сравњењу са привлачним деловањем G целе Земље, потпуно је допуштено Земљу сматрати за куглу радиуса $R = 5970$ врста; пошто је пак средња њена густина δ_0 приближно двапут већа од густине δ спољних слојева њене коре, то ће изаћи, да је

$$G = k \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi k \delta_0 R = \frac{8}{3} \pi k \delta \cdot R$$

$$\xi = \frac{F_x}{G \sin 1''} = \frac{3 KL}{8 \pi \sin 1''} \cdot \frac{\Sigma H}{R}, \quad \eta = \frac{F_y}{G \sin 1''} = \frac{3 KL}{8 \pi \sin 1''} \cdot \frac{\Sigma H'}{R} \quad \dots \quad (10.)$$

*) Ако се тачка А, за коју се одређује локално привлачење, налази близу мора, онда за ово треба под Н подразумевати његове дубине т.ј. негативне висине, смањене у односу $\frac{\delta-1}{\delta} = \frac{1.8}{2.8} = \frac{9}{14}$.

Кад се узме на пример $\frac{d_2}{d_1} = 2$, тј. $K = 0.693$, $L = \sin \Theta_2 - \sin \Theta_1 = \frac{1}{8}$, и кад се све висине H и H' изразе у врстама, онда ћемо имати

$$\xi = 0''.355 \Sigma H, \quad \eta = 0''.355 \Sigma H' \dots \dots \dots (10')$$

Ову је методу употребио први пут Хутон за срачунавање привлачног дејства планине Шехаљен, у чијој су близини вршена позната Маскелинова посматрања о скретању вертикале, која су послужила за извод средње Земљине густине δ_0 .

70. Најзначајнији примери локалнога привлачења.

Као најбољи пример, да се знатна скретања вертикалних линија објашњавају каткад једино рељефом земљишта, може послужити привлачење Кавкаских Планина*). На руским триангулацијама, које се протежу од Кијева до Астрахана међу астрономским ширинама φ и геодетским B откривене су само мале разлике ξ , од $-2''$ до $+3''$; тј. особитих скретања вертикала по ширини (чија је средња величина свуда око $\pm 2''.5$) не опажа се; али, по мери приближења ка гробу Кавказа, те се разлике почињу повећавати, а к југу од њега примају чак и супротни знак, тако да од Владикавказа до Душета на растојању од 100 врста, оне прелазе од $+35''.8$ на $-18''.3$. Из ове се таблице види, уколико се повољно објашњују та одступања привлачењем Кавкаских Планина:

φ	Тачке	$\xi = \varphi - B$		разлике
		Посматр.	срачун.	
45° 4'	Ставропољ	+ 9''.7	+ 10''.8	- 1.1
43 46	Јекатериноградскаја	+ 12 .6	+ 12 .6	0.0
43 29	Александровскаја	+ 18 .1	+ 19 .4	- 1.3
43 0	Владикавказ	+ 35 .8	+ 38 .8	- 3.0
42 6	Душет	- 18 .3	- 17 .4	- 0.9

Исто се тако добро објашњавају скретања вертикалних линија у Швајцарској и у Сев. Италији (која досежу од $+12''$ до $-20''$) привлачењем Алпа, већи део откривених скретања вертикала у Бугарској (од $-10''$ до $+20''$) — привлачењем Балканских и Родопских Планина, и, још нека друга.

Али, с друге стране, има доста и таквих скретања вертикала, чији се узрок крије у доста знатним одступањима густине слојева земне коре, (који се налазе на неприступачној дубини под рејоном посматрања), од средње нормалне њихове густине $\delta = 2.8$. Тако на пример, раније наведена одступања вертикалних линија у Московској губернији, која досежу до $-8''.4$ и $+6''.3$ по ширини, ниуколико не одговарају спољњем, уопште доста равном земљишту, те јасно указују на то, да се скоро дуж целе губерније, у правцу од истока ка западу, протеже на дубини од неколико врста цели слој веома незнатне густине. Исто се тако

*) Ј. Стебницкѣй. „Объ отклоненіи отвѣсныхъ линій притяженіемъ Кавказскихъ горъ, 1870.“

ни разлике међу астрономским и геодетским ширинама на многобројним тачкама великобританске триангулације (чл. 67.) (које су досезале до 10") нису потпуно објасниле, а у средњем су се тек двапут смањиле, када су у рачун била узета и локална привлачења, која зависе од рељефа области. Спољним се рељефом такође не објашњавају ни скретања вертикала на неким местима у Швајцарској, Бугарској и др.

Али као најизразитији пример утицаја на правац вертикала, па према томе и на облик геоида, оних скривених од нас неправилности унутрашње структуре Земљине коре служе резултати енглеских геодетских радова у Индији, који се са јужне стране провлаче поред дубоког Индијског Океана а са севера испод самих Хималаја. Показало се при томе*), да утицај на вертикале огромнога хималајског плато-а, — чија средња висина износи око 15000 стопа, — ни изблиза не одговара његовим димензијама, већ је, на против, знатно мањи; у близини пак Индиског Океана није откривено никакво скретање вертикала, које би требало очекивати усљед огромне водене масе мале густине. Према томе густина слојева земне коре под Хималајима треба да буде мања од нормалне а под Индиским Океаном већа.

Са делимичних неправилности облика геоида које су проузроковане локалним привлачењем, да пређемо сад на општа његова одступања од обртног елипсоида, која такође могу да буду изазвана, с једне стране, општом узвише-ношћу континената и знатном дубином океана, а, с друге стране, унутрашњом, потпуно непознатом структуром земне коре. Слично ономе, као и за сразмерно мали рејон земљишта, могло би се срачунати привлачно деловање на вертикалу целога континента или и великог океана па доста приближно одатле одредити узвишавања и снижавања геоида на огромним просторијама. Таква су срачунавања вршена више пута (Фишер, Брунс, Хелмерт) па су давала сасвим природне резултате, тј. да се геоид може на континентима да издигне над елипсоидом на висину и до 500 стопа. а на океанима да се спушта испод њега и знатно више од тога.

Али престава, која се из тога добива, о општем облику стварне нивоске Земљине површине, т. ј. геоида, доста је произвољна, јер се заснива на потпуно правилном распореду густине у Земљиној кори; при томе је она још и мало вероватна, јер све оно што ми већ знамо о локалним привлачењима у Индији и др. местима не говори у њену корист. Најзад, — као што ћемо видети у глави X, — она се не потврђује ни посматрањима интензитета теже на разним местима земне површине.

*) Pratt. „The Figure of the Earth“.

где је $M = \Sigma m$ маса целог тела. На тај ће се начин добити

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot \Sigma mr^2 = ga \cdot M \sin \Theta^*).$$

или

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{g}{l} \cdot \sin \Theta \quad \dots \dots \dots (1.)$$

где је

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma} \quad \dots \dots \dots (R)$$

Да бисмо одредили из једначине (1.) кретање клатна, претпоставићемо, да је оно изведено из својега положаја равнотеже за неки угао $\text{GON} = \Theta = \alpha$ па затим остављено само себи без икаквог ударца са стране. Пошто ће се угао Θ постепено смањивати, то ће се промена његова $\partial \Theta$ за бескрајно кратко време ∂t изразити овако

$$\partial \Theta = - \omega \cdot \partial t$$

Кад се помноже обе стране једначине (1.) са том величином $\partial \Theta$, добићемо

$$- \omega \cdot \partial \omega = \frac{g}{l} \cdot \sin \Theta \cdot \partial \Theta,$$

а кад се ово интегрира и напомене, да је $\omega = 0$ при $\Theta = \alpha$, наћићемо

$$- \frac{\omega^2}{2} = - \frac{g}{l} \cos \Theta + \frac{g}{l} \cos \alpha$$

или

$$\omega = - \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{2 \cos \Theta - 2 \cos \alpha} \quad \dots \dots \dots (2.)$$

Одатле се види, да ће угловна брзина клатна ω , пошто достигне највећу величину при $\Theta = 0$, почети да се смањује те ће постати равна нули при $\Theta = - \alpha$, после чега ће се кретање клатна почети већ да врши у супротном правцу до $\Theta = + \alpha$ и тако даље до бескрајности.

Кад одредимо ∂t из израза (2.) па га интегрирамо од $\Theta = + \alpha$ до $\Theta = - \alpha$, добићемо потпуно трајање τ једнога размаха клатна у облику

$$\tau = - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} \frac{\partial \Theta}{\sqrt{2 \cos \Theta - 2 \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\partial \Theta}{\sqrt{2 \cos \Theta - 2 \cos \alpha}}$$

и ако се, при довољној маленкости угла α , ограничимо приближним изразима

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{24} \alpha^4, \quad \cos \Theta = 1 - \frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{1}{24} \Theta^4,$$

то ће изаћи

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2 \cos \Theta - 2 \cos \alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2 + \Theta^2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 + \Theta^2}{24}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha^2 - \Theta^2}{24}\right) = \frac{1 + \frac{1}{12} \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} - \frac{1}{24} \sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}. \end{aligned}$$

*) Овај извод диференцијалне једначине кретања клатна намењен је онима, који нису упознати са аналитичком механиком, у којој се она добива из општих једначина кретања чврстог тела.

Али је
$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\partial \Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} = \pi, \quad \int_{-\alpha}^{+\alpha} \partial \Theta \cdot \sqrt{\alpha^2 - \Theta^2} = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \pi ;$$

због тога је

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{12} \right) \pi - \frac{\alpha^2}{48} \pi \right] = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right) \dots \dots \dots (3.)$$

Према томе ако се трајање једнога размаха клатна при бескрајно малом углу α означи са τ_0 , т.ј.

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (4.)$$

то ће се оно добити из посматранога времена τ размаха одређене величине α на овај начин

$$\tau_0 = \tau \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)^{-1} = \tau - \tau \cdot \frac{\alpha^2}{16} \dots \dots \dots (5.)$$

Величина $\tau \frac{\alpha^2}{16}$ зове се *свођење (редукција) на бескрајно мале размахе (амплишуде)*.

72. Дужина клатна.

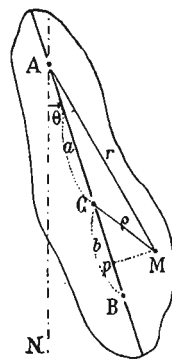
Тачка О, која се зове *центар вешања*, одређује се перпендикуларом ГО, спуштеним из центра тежишта Г на осу клатна О (сл. 55.); дужином пак ОС = l , пренетом по томе перпендикулару, одређује се на клатну тачка С, која се зове *центар клаћења*, стога што би у случају простога математичког клатна исте дужине ОС = l (које се састоји само из једне материјалне тачке С) како једначина (1.) тако и све околности кретања (2.), (3.), (4.) и (5.), које из ње потичу, биле исте. По тој дужини ОС = l , коју ћемо звати *дужином клатна*, и по трајању τ_0 бескрајно малог његова размаха тражено ће се убрзање силе теже g добити из (4.) у облику

$$g = \pi^2 \frac{l}{\tau_0^2} = \pi^2 L, \dots \dots \dots (6.)$$

где ће $L = \frac{l}{\tau_0^2}$ означавати *дужину секундног клатна*, које би вршило размах тачно за 1 секунду средњег времена. Та дужина на земној површини излази увек нешто мања од 1 метра.

Тако ће, за тачан извод величина g или пак L бити потребно, с једне стране, врло тачна посматрања трајања клаћења каквога клатна, за шта, као што ћемо даље видети, постоје изврсне методе, а, с друге стране, исто тако тачна срачунавања његове дужине l из израза (R.) по даним димензијама и тежини свих саставних делова његових. Али се уместо такве одредбе дужине l , — која на делу представља доста велике тешкоће, — обично користе овом особитом *узајамности центра вешања и центра клаћења*:

Ако центру вешања клатна А одговара центар клаћења В (сл. 56.), то ће и обратно: А постати центар клаћења, када се то исто клатно буде клатило око осе, која пролази кроз В паралелно са пређашњом. Да бисмо то доказали, изразићемо растојање $MA = r$ разних честица m клатна до осе А помоћу растојања њиховог $MG = \rho$ до линије, која пролази кроз центар тежишта G паралелно са осом А. Кад означимо AG по пређашњем са a а пројекцију ρ на равнину AGB са z , имаћемо



Сл. 56.

$$r^2 = a^2 + \rho^2 + 2az$$

па према томе

$$\Sigma mr^2 = Ma^2 + \Sigma m\rho^2 + 2a \Sigma mz,$$

при чему је $\Sigma mz = 0$ (по познатој особини центра тежишта тела). Тада ће се величина Σmr^2 , која се зове *моменти инерције* тела односно осе А, заменити моментом инерције $\Sigma m\rho^2$ односно хоризонталне линије, која пролази кроз G , а дужина клатна l_a при вешању његову у А добиће се из израза (R.) у облику

$$l_a = \frac{Ma^2 + \Sigma m\rho^2}{Ma} = a + b, \quad \text{где је} \quad b = \frac{\Sigma m\rho^2}{Ma} = GB \quad \dots \quad (7.)$$

Али ћемо и дужину клатна l_b при клаћењу његову око осе В имати на сличан начин

$$l_b = \frac{Mb^2 + \Sigma m\rho^2}{Mb} = b + \frac{\Sigma m\rho^2}{Mb} = b + a = l_a$$

а том се једнакошћу $l_a = l_b$ и доказује напред речена узајамност тачака А и В.

На основу тога може се израдити такво *реверсионо клашно*, са два међу собом паралелним осам А и В, те да трајање клаћења τ_0 како око једне тако и око друге буде потпуно једнако; тада ће растојање АВ, које се лако да измерити, и бити тражена дужина l , која ће одговарати времену τ_0 .

Може се, најзад, проћи и без мерења дужине клатна l , већ, ослањајући се на њену непроменљивост, посматрати трајања његова клаћења τ_0 и τ'_0 на разним местима па одређивати величине g' и L' из просте пропорције

$$\frac{g'}{g} = \frac{L'}{L} = \frac{\tau_0^2}{\tau'^2_0}, \quad \dots \quad (8.)$$

знајући апсолутну величину g и L само на каквом једином месту. Таква одређивања интензитета теже или пак дужине секундног клатна зову се *релативна*.

73. Свођење на бескрајне мале размахе при кретању клатна у ваздушној средини.

Обратимо се сада расматрању утицаја ваздушне средине на кретање клатна. Услед отпора његова, размаси клатна $2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3, \dots$ и посматрања трајања њихова

$$\tau_1 = \tau_0 + \tau_0 \frac{\alpha_1^2}{16}, \quad \tau_2 = \tau_0 + \tau_0 \frac{\alpha_2^2}{16}, \quad \tau_3 = \tau_0 + \tau_0 \frac{\alpha_3^2}{16}, \dots$$

постепено ће се смањивати, тако да ако се из посматрања одреди време $T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n$ доста знатног броја n таквих размаха, то ће се средње трајање τ једнога рузмаха изразити овако

$$\tau = \frac{T}{n} = \tau_0 + \tau_0 \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{16 n},$$

а одатле ће се са истом висином тачности добити

$$\tau_0 = \tau - \tau \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{16 n} \dots \dots \dots (S.)$$

Скоро се увек може допустити, да се у ваздуху полуразмаси клатна α смањују у току времена t у прогресији геометриској, т.ј.

$$\alpha = \alpha_1 e^{-ct}, \dots \dots \dots (9.)$$

зато што се тај знак (теориски оправдани), када је дејство отпорне средине пропорционално брзини кретања клатна, задовољавајуће оправдава и на огледу. Стога је за одређивање средње величине $\frac{\Sigma \alpha^2}{n}$ довољно запазити угле одступања клатна α_1 и α_n само при првом и последњем његовом размаху. И заиста, кад узмемо интервал времена T за јединицу, имаћемо

$$\frac{\Sigma \alpha^2}{n} = \int_0^1 \alpha^2 \cdot dt = \alpha_1^2 \int_0^1 e^{-2ct} \cdot dt = \frac{\alpha_1^2}{2c} (1 - e^{-2c});$$

а пошто је из (9.)

$$c = \lg \alpha_1 - \lg \alpha_n = \frac{\text{Lg } \alpha_1 - \text{Lg } \alpha_n}{0.4343},$$

то ће изаћи

$$\frac{\Sigma \alpha^2}{n} = \frac{0.2171 \alpha_1^2}{\text{Lg } \alpha_1 - \text{Lg } \alpha_n} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}\right) = 0.2171 \frac{\alpha_1^2 - \alpha_n^2}{\text{Lg } \alpha_1 - \text{Lg } \alpha_n} \dots \dots \dots (10.)$$

Пример. При посматрању клаћења једнога реверсионог клатна у Пулкову у току времена $T = 24^m 13^s 78$, које је протекло од првога до последњег од 1936 размаха, запажене су биле приближно после сваке 4 минуте ове величине полуразмаха α' :

α'	58'.4	53'.7	49'.2	45'.4	42'.1	38'.9	36'.0
$\text{Lg } \alpha'$	1.766	1.730	1.692	1.657	1.624	1.590	1.556
разлика	36	38	35	33	34	34	

Као што се види, закон смањивања $\text{Lg } \alpha$ пропорционално времену доста се добро оправдава у овом случају. Кад помножимо посматране величине α'_1 и α'_n са $\sin 1'$

за претварање њихово у апстрактне бројеве, наћи ћемо по формули (10.)

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{0.2171}{16} \cdot \frac{2115}{0.210} \cdot \sin^2 1' = 0.0000116$$

Затим, пошто је средње трајање једнога размаха било

$$\tau = \frac{T}{n} = \frac{1453^s 78}{1936} = 0^s 750 9151 ,$$

то ће свођење на бескрајно мали размах бити $\frac{3}{4} \cdot 0.000 0116 = \mathbf{0.000 0087}$ па према томе

$$\tau_0 = \mathbf{0^s 750 9064}.$$

74. Утицај ваздушне средине на дужину клатна.

У ваздушној средини клатно постаје лакше, а, повлачећи за собом при својим клаћењима честице ваздуха, креће се заједно, може се рећи, као са неким ваздушним омотачем. Због тога се пређашњи израз (R.) за дужину клатна

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma} = \frac{g \cdot \Sigma mr^2}{Mg \cdot a}$$

мења, прво стога, што се момент тежине клатна $Mg \cdot a$ односно осе вешања А смањује за величину момента тежине њиме истиснутог ваздуха, тако да ако се са μ означи маса ваздуха, која одговара садржини клатна, а са s растојање њенога центра тежишта до осе А, онда ће уместо $Mg \cdot a$ ући разлика

$$Mg \cdot a - \mu g \cdot s = g (Ma - \mu s).$$

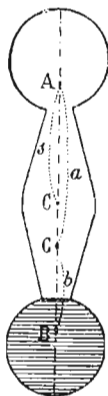
Друго, дужина l мења се још и стога, што се моменту инерције самога клатна Σmr^2 додаје момент инерције k оне непознате нам масе ваздуха, коју оно за собом повлачи те суделује у његовим клаћењима. На тај начин излази

$$l = \frac{\Sigma mr^2 + k}{Ma - \mu s} = \frac{Ma^2 + \Sigma m r^2 + k}{Ma - \mu s} \dots \dots \dots (R')$$

Додати момент инерције k , који овде улази, може се одредити чисто експерименталним путем из посматрања другог клатна истога спољњег облика али са другом масом M , као што је то вршио Бесел (чл. 76.). Код реверсионог пак клатна, чији је спољњи облик потпуно симетричан и у коме се обе осе вешања А и В (сл. 57.) налазе на једнаким растојањима $AC = BC = s$ од центра С његова облика, утицај ће се тога момента инерције k на дужину l потпуно искључити, јер при истој густини ваздуха величина k треба да остане непромењљива како при клаћењу клатна око осе А, тако и око В.

И заиста, кад по пређашњем означимо растојања АГ и ВГ до центра тежишта Г са a и b а дужину клатна при клаћењу његову око А и В са l_a и l_b , имаћемо из израза (R')

$$l_a = \frac{Ma^2 + \Sigma m r^2 + k}{Ma - \mu s}, \quad l_b = \frac{Mb^2 + \Sigma m r^2 + k}{Mb - \mu s},$$



Сл. 57.

одакле

$$\Sigma m\rho^2 + k = (Ma - \mu s) l_a - Ma^2 = (Mb - \mu s) l_b - Mb^2;$$

према томе

$$a \cdot l_a - b \cdot l_b = a^2 - b^2 + \frac{\mu s}{M} (l_a - l_b) \quad \dots \quad (11.)$$

Али ако се на симетричном клатну нађу такве две осе А и В, подједнако удаљене од С, тако да трајања клаћења око њих τ_a и τ_b буду потпуно једнака, то ће и одговарајуће дужине l_a и l_b бити једнаке; стога ће из једначине (11.) изаћи просто, да је

$$l_a = l_b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b,$$

т.ј. дужина клатна биће као и пређе једнака са растојањем АВ међу осама вешања А и В.

Уосталом није неопходно потребно тежити за тим, да се код реверсионог клатна достигне потпуна једнакост његових клаћења τ_a и τ_b око осе А и око В; јер ако она и нису подједнака, ипак је по њима лако одредити трајање клаћења τ_0 , које тачно одговара баш мереној дужини АВ = $a + b$. Заиста, пошто на основу (6.) треба да буду

$$\frac{l_a}{a + b} = \frac{\tau_a^2}{\tau_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{l_b}{a + b} = \frac{\tau_b^2}{\tau_0^2},$$

то, — кад ставимо те изразе l_a и l_b у једначину (11.) и у њој заменимо s са $\frac{1}{2}(a + b)$, — наћи ћемо

$$a \tau_a^2 - b \tau_b^2 = (a - b) \tau_0^2 + \frac{\mu(a + b)}{2M} \cdot (\tau_a^2 - \tau_b^2),$$

одакле је

$$\tau_0^2 = \frac{a \cdot \tau_a^2 - b \cdot \tau_b^2}{a - b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{\mu}{M} (\tau_a^2 - \tau_b^2);$$

а тај се израз лако преобразује у следећи, zgodнији за срачунавање

$$\tau_0^2 = \frac{\tau_a^2 + \tau_b^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{a + b}{a - b} (\tau_a^2 - \tau_b^2) \left(1 - \frac{\mu}{M}\right) \quad \dots \quad (Т.)$$

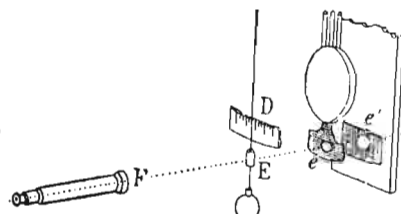
Други члан ове формуле са масом μ истиснутога ваздуха срачунава се по даној садржини клатна и густини ваздуха, која зависи од стања барометра и термометра за време посматрања клаћења. При малој разлици између времена τ_a и τ_b утицај његов може да буде врло незнатан; али је за то неопходно потребно, да разлика $(a - b)$, која улази у именитељ, буде доста велика, т.ј. да центар тежишта С симетричног клатна буде по могућности што даље од центра С његова облика.

75. Одређивање трајања клаћења.

Као што смо видели, за тачно одређивање времена τ једног размаха клатна потребно је посматрати трајање већег броја његових размаха па тако исто запажати угле α његова одступања, који се поступно смањују. Ти се угли лако оцењују са довољном тачности до 1' на скали лука D (сл. 58.), непомично постављеној у близини доњег краја клатна. Запажајући пак по часовнику, — чији

ход треба да буде добро познат, — прелаз какве одређене тачке клатна кроз нулу скале лука D, могло би се одредити и време T за неколико његових клаћења; али би то било и сувише грубо, пошто се моменти таквих прелаза оцењују с тачношћу не већом од 0.1 секунде.

Најтачнија метода за извођење трајања τ оснива се на посматрању *поклапања* размахâ клатна, које се испитује, са размасима клатна часовника приближно исте дужине. Ради тога се часовник, на чијем је клатну утврђена диафрагма са округлим отвором e (сл. 58.), поставља позади клатна које се испитује са цилиндрићем E врло мало дељим од отвора e ; на задњој пак страни сандучића часовника налази се такође округао отвор e' , сличан са e . Кад оба клатна мирују, e , e' и E треба да буду на једној правој линији тако, да би за посматрача, који издаље посматра кроз дурбин F у правцу E $e e'$, цилиндрић E потпуно покривао оба та отвора. На тај начин, ако би размаси оба клатна били једнакога трајања и потпуно се поклапали, то се осветљени кружић e никако не би ни појављивао у дурбину; али при најмањој разлици у трајању размаха оба ће се клатна почети да разилазе те ће се спочетка почети да појављују само врло мали сегменти кружића e , који ће се са сваким новим размахом повећавати; затим ће се појавити и цели кружић e , али ће по истеку извесног времена од њега остати постепено све мањи и мањи пређашњи сегмент, који ће најзад и сасвим нестати те да се ускоро почне поново појављивати. Очеvidно, да је у том моменту поновне појаве сегмента једно клатно претекло друго равно за два размаха и да ће средњи из посматраних момената нестајања и појаве сегмента бити тачни момент поклапања размаха оба клатна. Ради веће тачности треба запажати такође и појављивање и нестајање сличнога сегмента e и са друге стране цилиндрића E.



Сл. 58.

Претпоставимо, да је, између два сукцесивна поклапања размаха, клатно часовника извршило n размаха чије нам је трајање (τ) познато, а клатно пак које се испитује два размаха више, т. ј. $n + 2$; тада ће се тражено средње трајање τ једнога размаха овога наћи овако

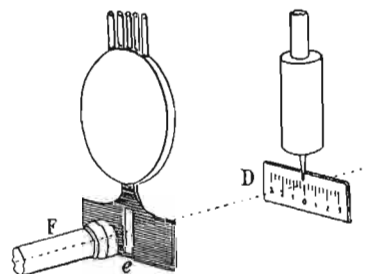
$$\tau = \frac{n}{n + 2} \cdot (\tau).$$

Нека сад $\pm x$ буде нека врло мала случајна грешка броја n , добивеног из посматрања; тада ће извод τ бити погрешан за величину

$$\Delta \tau = \frac{n}{n + 2} (\tau) - \frac{n \pm x}{n \pm x + 2} (\tau) = \frac{\pm 2x}{(n + 2)^2} (\tau),$$

која, на пример, при $(\tau) = 1^s$, $n = 600$ и $x = \pm \frac{1}{2}$ износи тек око $\frac{1}{360\,000}$ део секунде.

Са не мањом се тачношћу посматрају поклапања размаха оба клатна на овај начин: Кроз жљоб e диафрагме, утврђене на клатну часовника (сл. 59.), при сваком његовом размаху појављује се у дурбину F само за један тренутак лик заостренога краја ра-

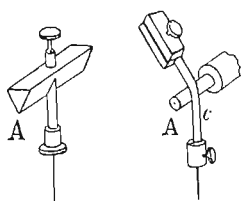


Сл. 59.

склађеног клатна, које се испитује, и лук D са степенском поделом, тако да се тај шиљак, — изгледајући сваки пут као непомичан, — постепено премешта по луку D само усљед незнатне разлике у трајању размаха оба клатна; тачно пак поклапање размаха одређује се оценом оног момента, када оштри врх клатна, које се испитује, пролази кроз нулу на скали D .

76. Разне конструкције клатна.

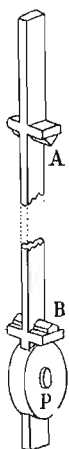
Конструкције клатна, која су различити посматрачи употребљавали за одређивање интензитета теже g , биле су врло различите. За време старих и далеко још несавршених посматрања Бугер-а у Перу, за време доцнијих посматрања француских астронома у Европи и, најзад, за време најчувенијих Беселових испитивања — клатно је по својему спољњем облику највише личило на идеално математичко и састојало се наике из металне кугле, обешене о врло танку жицу. На француском Бордином апарату за осу је вешања A служила ивица челичне призме (сл. 60) која се је ослањала на челичну или ахатову хоризонталну равнину; на Беселовом пак апарату жица се на врху завршавала изванредно танком и мало еластичном месинганом пантљичицом c , прегипајући се преко челичног цилиндрића A .



Сл. 60.

За одређивање утицаја ваздуха на дужину клатна l , које се изводи по формули (R'), Бесел је мењао месингану куглу са куглом од слонове кости, а дужину жице мењао је равно за 1 тоаз, да се не би ослањао на мерење растојања од кугле клатна до осе вешања A . Уопште све околности, које би могле бити и од најмањег значаја за изводе из посматрања, као што су: нека прегипања жице за време клаћења клатна, еластичност пантљичице c , прегипање њено преко цилиндрића A , моменти инерције свих саставних делова клатна и т.д. — све је то било испитано и узето у рачун са таквим предвиђањем и са таквом брижљивошћу, да су његови изводи дужине секундног клатна за Кенигсберг и Берлин и до сад сматрани као једни од најтачнијих. У исто време он је у својем делу „*Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels*. 1828.“ поставио и потпуну теорију симетричног реверсионног клатна.

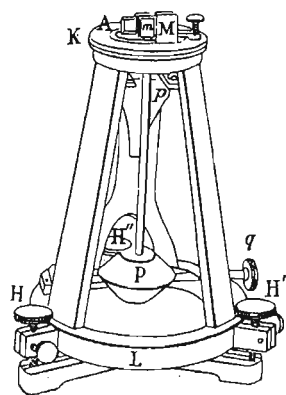
Кетер се је још раније (1818. г.) користио принципом узајамности центра клаћења и центра вешања за одређивање интензитета теже у Лондону; али његово клатно није било симетрично, већ се састојало из месинганог лењира (сл. 61.) са двама челичним призмама A и B , које су служиле за осе вешања, а са једним само тегом P , тако да се утицај ваздушне средине на дужину клатна AB није потпуно искључивао, већ га је требао узимати у рачун као и код пређашњих неререверсионих клатна.



Сл. 61.

Најчешће су разни посматрачи, нарочито поморци, одређивали не апсолутне величине теже g , већ само промене њене на разним местима, које су изводили из посматрања клаћења тако званог *шталног клатна*, које се састоји из чврстог металног прута (око 1 метра дужине) са тешким тегом у облику сочива на једном крају и челичном призмом на другом, које служи за осу вешања. У ту врсту клатна треба урачунати и Штернаково полусекундно клатно, сразмерно врло малих димензија помоћу којих се посматрања сада све више и више распростраиру.

Штернекову клатну AP (сл. 62.) припада релативно веома солидни статив KL из једноставног металног комада са три завртња H, H' и H'' за издизање-одоздо и са хоризонталном равнином од ахата-одозго, која служи као ослонац за призму A клатна при његову клаћењу. На овој је призми утврђено огледалце m , за рефлектовање у дурбин (кроз који издаље гледа посматрач) лика скале, која показује угле α амплитудâ клатна. Полусекундни пак часовник (или хронометар) са клатном, које врши своја клаћења нешто брже, везујући сваке секунде галвански ток, даје, помоћу нарочитог електромагнета, у истом огледалцету моментални лик једне сјајне црте; пролазом те сјајне црте, — која се постепено помера, — кроз нулту црту скале и одређује се момент поклапања размахâ оба клатна. Друго огледалце M, које се налази на горњој равнини статива, служи за правилно постављање лика скале у дурбину, и оно треба да буде паралелно са m , када је клатно у миру. Полука p служи за пажљиво спуштање и издизање клатна, а ручица q за давање клаћења.



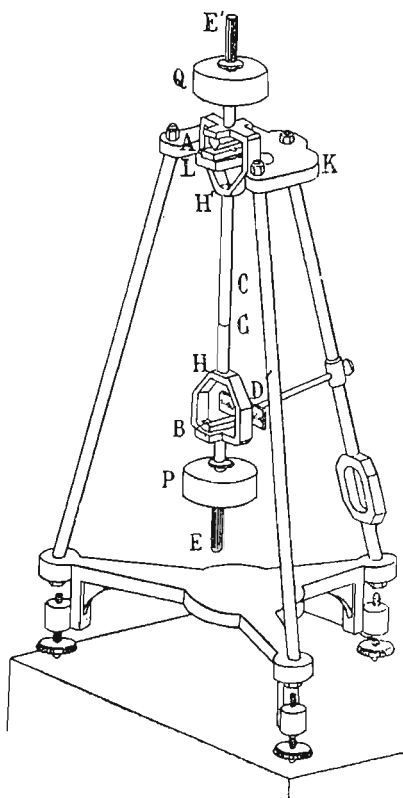
Сл. 62.

Поправке посматраног трајања размахâ клатна, које зависе од стања барометра и термометра, одређују се за тај апарат чисто емпириским путем на основу специјалних посматрања с њим при врло различитим атмосферским притисцима и температурама.

77. Репсолдово реверсионно клатно.

Први апарат са потпуно симетричним реверсионим клатном израдио је 1865. г. Репсолд за Петроградску Академију Наука и тај је апарат послужио за одређење интезитета теже у Петрограду, у Пулковоу, на неколико станица рускога меридијанског лука, а затим у Енглеској, Индији и на Кавказу. Само клатно састоји се из цилиндричног месинганог прута EE' са два рама H и H' (сл. 63.) на којима су чврсто утврђене две челичне призме, тако звани *ножеви*, са брижљиво углачаним ивицама (оштрицама) A и B; на крајевима пак E и E' завртњима су чврсто утврђена два повећа месингана цилиндра P и Q, једнака по облику, али различита по тежини, на тај начин што је један од њих (P) пун а други (Q) празан. Трајања размахâ клатна τ_a и τ_b око оса A и B равна су приближно $\frac{3}{4}$ секунде.

Статив, који држи клатно, разуме се, треба да се ставља на солидно озидани стуб са чврстом основом. На огранку његове горње равне основе K налази се одлично углачана челична (или од ахата) површина L, која се подножним завртњима статива доводи у хоризонтални положај помоћу либеле, која се на њу за то ставља; о ту се површину и веша



Сл. 63.

клатно једним или другим од његових ножева. Амплитуде α размаха клатна читавају се на луку D, утврђеном на једној од ножица статива; трајање пак њихово одређује се по поклапању њиховом са размасима клатна часовника, — који такође припада апарату, — онако, како је то објашњено у чл. 75. (сл. 58).

Растојање $AB = a + b$ међу ножевима мери се увек при вертикалном положају клатна. Ради тога на стативу постоје (на сл. 63. то није представљено): нормални размерник и компаратор са два микроскопа, којим се визира једно за другим час на ивице (оштрице) ножева А и В, час на поделу размерника на тај начин, што се тај компаратор обрће око вертикалне осе. Што се тиче разлике $(a - b)$, која улази у формулу (Т.) и која зависи од положаја центра тежишта G клатна, то ју је довољно одредити само приближно, обележавањем црте G на оном месту прута клатновог на коме оно балансира у хоризонталном својем положају.

Ради предохране клатна од утицаја ваздушних промаја за време његових клаћења, оно се ставља заједно са стативом у стаклени сандук. Тамо су обешена на разним висинама и два или три термометра, који показују температуру t клатна за време посматрања његових клаћења. Ако са τ и τ_1 означимо трајања поједнога бескрајно малог размаха клатна, која одговарају температурама t и t_1 , а са κ коефицијент ширења клатна, то очевидно треба да буде

$$\tau_1^2 = \tau^2 \cdot [1 + (t_1 - t) \kappa] \quad (12.)$$

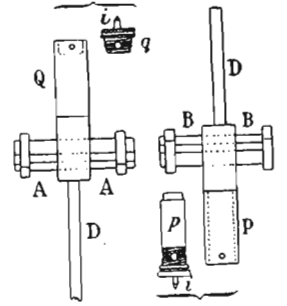
На тај се начин, из посматрања клаћења клатна при разним температурама, може одредити доста тачно сам коефицијент κ његова ширења; када је пак он познат, онда се свако посматрано трајање размаха може да сведе по формули (12.) на исту температуру при којој је измерена дужина клатна.

78. Апсолутна и релативна одређивања интензитета теже.

Клаћење клатна на његовом стативу преноси се унеколико и на њега. То се потврђује нарочитим осетљивим апаратима, који јасно откривају померање површине статива у ону страну, куда се креће и клатно. Услед тих колебања саме осе А вешања клатна, истинита дужина његова l треба да излази нешто већа од измерене $(a + b)$. И заиста, како описаним Репсолдовим, тако и другим сличним њему најновијим апаратима, интензитет теже g (или пропорционална му дужина L секундног клатна) увек се је одређивао за извесан знатно мањи део од истинитог, а наиме за $\frac{1}{5000}$ до $\frac{1}{7000}$ део; унапред пак одредити ту грешку и узети је у обзир за добивање апсолутне величине g с тачношћу до $\frac{1}{1000000}$, с којом се из многих посматрања времена τ клаћена добива растојање $(a + b)$ међу оштрицама ножева, — једва ли је могућно.

Нека нетачност у изводу апсолутне величине g може да произађе: од веће или мање затупљености ножева реверсионог клатна, од непотпуне сигурности одређивања његове температуре помоћу термометара, од појаве нарочите врсте сталних грешака у одређивању његове дужине $(a + b)$ и т.д. Уосталом, односно утицаја првога од тих узрока нетачности Бесел је доказао, да ако се оштрице ножева буду сматрале за цилиндричне површине вр. малих радиуса кривине, то

се грешка, која при том произлази, потпуно елиминира мењањем (премештањем) ножева. На реверсионном пак клатну француског геод. пуковника Дефоржа то се достиже много боље не премештањем ножева А и В, који треба насвагда да буду чврсто утврђени, већ премештањем тегова. Ради тога на празним цилиндрима Р и Q, којима се завршује његово клатно (сл. 64.), уврће се час прости завртањ q , када цилиндар остаје празан, час тешки тег p са сличним завртњем.



Сл. 64.

Релативна одређивања теже реверсионим, као и простим сталним клатном, која се оснивају на непромењљивости његове дужине и која изискују само посматрања трајања његова клаћења, — несравњено су простија и заслужују, уопште говорећи, великог поверења, јер, и клаћења статива, и затупљивање ножева, и разни други узроци сталних грешака треба да утичу на разним местима посматрања подједнако. Услед тога у резултатима, добивених из довољног броја посматрања клаћења чак и помоћу малог Штернековог клатна, може се скоро гарантовати за $\frac{1}{100000}$ део изведене величине g или L .

Пример. 1874. године, из посматрања на опсерваторијама у Кију (у Енглеској) и на Пулковској, добивена су била по формули (Т.) ова трајања τ_k и τ_p размаха реверсионог клатна (Репсолдовога), чији је коефицијент ширења κ био раван 0.0000193 за 1° C :

у Кију-у $\tau_k^2 = 0.564\ 9625$ при темп. $+ 13^\circ.1 \text{ C}$.

у Пулкову $\tau_p^2 = 0.564\ 6280$ „ „ $+ 18.0 \text{ C}$.

кад се прво сведе величина τ_p^2 по формули (12.) на исту температуру, која је била у Кију-у, добићемо

$$\tau_p^2 = 0.564\ 6280 (1 - 4.9 \kappa) = 0.564\ 5746$$

а затим, по дужини секундног клатна у Кију-у $L_k = 994.150 \text{ m m}$ (одређене апсолутно Кетеровим клатном), наћићемо такву исту дужину L_p за Пулково на овај начин

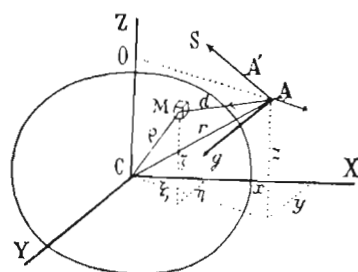
$$L_p = L_k \cdot \frac{\tau_k^2}{\tau_p^2} = L_k + L_k \cdot \frac{\tau_k^2 - \tau_p^2}{\tau_p^2} = L_k + 0.683 \text{ m m} = 994.833 \text{ m m}.$$

ГЛАВА X.

ОБЛИК ЗЕМЉИН НА ОСНОВУ ПОСМАТРАЊА ИНТЕНЗИТЕТА ТЕЖЕ.

79. Потенцијал интензитета теже.

Не чинећи спочетка никакве претпоставке ни о спољњем облику, ни о унутрашњој структури Земље, узећемо центар њенога тежишта C за почетак координата а њену обртну осу CZ за једну из трију узајамно перпендикуларних координатних оса CX, CY и CZ (сл. 65.) па ћемо означити са ξ, η и ζ координате каквога бескрајно малог земљиног елемента M са масом ∂M , а са x, y и z координате тачке A , која се налази гдегод ван Земље, али која такође суделује у њеном ротационом кретању; масу пак тачке A узећемо ради простоте за јединицу. Тада ће бити



Сл. 65.

$$AM = d = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}; \dots \dots \dots (1.)$$

сила пак $\frac{k \partial M}{d^2}$, с којом елемент M привлачи тачку A у правцу AM , разложиће се, очевидно, на овакве три компоненте по осама X, Y и Z :

$$k \frac{\partial M}{d^2} \cdot \frac{x - \xi}{d}, \quad k \frac{\partial M}{d^2} \cdot \frac{y - \eta}{d}, \quad k \frac{\partial M}{d^2} \cdot \frac{z - \zeta}{d};$$

стога ће се компоненте j_x, j_y и j_z привлачног дејства целе Земље на тачку A изразити овако:

$$j_x = k \int \frac{x - \xi}{d^3} \partial M, \quad j_y = k \int \frac{y - \eta}{d^3} \partial M, \quad j_z = k \int \frac{z - \zeta}{d^3} \partial M.$$

Све се оне представљају много простије, као делимичне производне по x, y и z одређенога интеграла

$$V = k \int \frac{\partial M}{d}, \dots \dots \dots (V.)$$

који вреди за све бескрајно мале Земљине елементе ∂M . И заиста, пошто из израза (1.) за d излази:

$$\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{x - \xi}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial y} = \frac{y - \eta}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial z} = \frac{z - \zeta}{d},$$

то је

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = k \int \frac{\partial M}{d^2} \cdot \frac{\partial d}{\partial x} = j_x, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = k \int \frac{\partial M}{d^2} \cdot \frac{\partial d}{\partial y} = j_y, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = k \int \frac{\partial M}{d^2} \cdot \frac{\partial d}{\partial z} = j_z.$$

Тај интеграл V зове се *пошенцијал привлачнога дејства земље на шачку А*.

Ако означимо затим угловну брзину обртања Земље са ω , то ће се центрифугална сила, која дејствује на тачку А у правцу ОА, перпендикуларном на осу CZ, изразити, као што је познато, са $\omega^2 \cdot AO$ и разложиће се по осама X и Y на компоненте

$$\omega^2 OA \cdot \frac{x}{AO} = \omega^2 x \quad \text{и} \quad \omega^2 AO \cdot \frac{y}{AO} = \omega^2 y$$

које су делимичне производне по x и y овакве функције U:

$$U = \frac{\omega^2}{2} \cdot (x^2 + y^2)$$

Та се функција U зове *пошенцијал центрифугалне силе у тачци А*.

Најзад ће интензитет теже g у тачци А, као резултанта из привлачне силе и центрифугалне силе, имати овакве саставне делове по осама X, Y и Z:

$$g_x = j_x - \omega^2 x, \quad g_y = j_y - \omega^2 y, \quad g_z = j_z - \omega^2 z;$$

стога ће бити:

$$g_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = -\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \dots \quad (2.)$$

где је

$$W = V + U = k \cdot \int \frac{\partial M}{d} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \dots \quad (W.)$$

пошенцијал иншензишета шеже у шачци А. Сама пак величина g и угли: $\sphericalangle(g, x)$, $\sphericalangle(g, y)$, и $\sphericalangle(g, z)$, које са координатним осама саставља њен правац (који је у исто време и правац вертикалне линије у тачци А), одредиће се овако:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}, \quad \left. \begin{aligned} \cos \sphericalangle(g, x) &= -\frac{g_x}{g}, & \cos \sphericalangle(g, y) &= -\frac{g_y}{g}, \\ \cos \sphericalangle(g, z) &= -\frac{g_z}{g} \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.)$$

80. Нивоске (водоравне) површине.

Додајмо сад координатама тачке А бескрајно мале прираштаје ∂x , ∂y и ∂z , тј. пређимо са ње на другу тачку А' у неком правцу AS, при чему ће бити:

$$AA' = \partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}, \quad \left. \begin{aligned} \cos \sphericalangle(S, x) &= \frac{\partial x}{\partial s}, & \cos \sphericalangle(S, y) &= \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \cos \sphericalangle(S, z) &= \frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.)$$

Тада ће потенцијал W, као функција координата x , y и z , добити прираштај

$$\partial W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) \cdot \partial x + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) \cdot \partial y + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) \cdot \partial z = -g_x \cdot \partial x - g_y \cdot \partial y - g_z \cdot \partial z,$$

који ће услед једнакости (3.) и (4.) добити овакав облик:

$$\partial W = g \cdot ds [\cos \sphericalangle (g, x) \cdot \cos \sphericalangle (S, x) + \cos \sphericalangle (g, y) \cdot \cos \sphericalangle (S, y) + \\ + \cos \sphericalangle (g, z) \cdot \cos \sphericalangle (S, z)]$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial s} = g \cdot \cos \sphericalangle (g, S) \dots \dots \dots (5.)$$

На тај се начин може из потенцијала W да добије компонентна сила теже $g \cdot \cos \sphericalangle (g, S)$ по ма коме правцу AS , који саставља са осама X, Y, Z угле $\sphericalangle (S, x), (S, y), (S, z)$.

Прелазећи са тачке A на друге, бескрајно близу до ње, у правцима перпендикуларним на вертикалну линију Ag , имаћемо увек да је $\cos \sphericalangle (g, S) = 0$; стога ће се једначина (5.) претворити у ову:

$$W(x, y, z) = C \text{ (константој величини) } \dots \dots \dots (6.)$$

На тај начин добија се једначина површине, нормалне у свима својим тачкама према вертикалним линијама; тачније говорећи, добија се једначина целе системе површина, које имају исте особине, јер величина C може бити различита, према томе кроз какву ће наине дану тачку (x_0, y_0, z_0) пролазити оваква површина. Све се оне зову *нивоске (водоравне)*, и у њихов број треба уврстити, разуме се, и површину земних океана у мирном њиховом стању, тј. *геоид*.

Ако се сад почнемо да премештамо са тачке A по вертикалној линији навише, то ће угао (g, S) у формули (5.) бити раван 180° , а $ds = dh$ изразиће премештај по висини; стога ће изаћи

$$\partial W = -g \cdot dh \dots \dots \dots (7.)$$

Пошто тежа g на разним тачкама једне и исте нивоске површине може бити врло различита, то ова једначина (7.) показује, да растојање dh међу два блиским нивоским површинама $W = C$ и $W = C + \partial C$ није свуда подједнако, већ је обратно пропорционално величини g . Као што ћемо даље видети, најмања се величина g , тј. она на екватору, разликује од највеће, тј. од оне на половима, приближно за $\frac{1}{188}$ део; према томе ако се на екватору две нивоске површине налазе једна од друге на растојању од 1000 метра, то ће на половима растојање међу њима бити за $\frac{1}{188}$ део, или приближно за 5.3 метра мање од горњег.

Та околност треба да утиче, разуме се, на резултате тачног нивелања. Тако на пример, прелазећи, при нивелању какве линије, са једне нивоске површине на другу и враћајући се поново на полазну тачку (или уопште на пређашњу нивоску површину), ми треба у резултату да добијамо не $\sum dh = 0$, као што се то обично допушта, већ $\sum g dh = 0$, што није једно и исто. Уосталом, грешка која се при томе чини, у врло ретким случајима може да надмаши нетачност резултата услед случајних грешака самога нивелања.

81. Развијање потенцијала привлачења у ред.

Напишимо израз (1.) за растојање $AM = d$ у облику,

$$d^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \\ = r^2 - 2r\rho \cdot \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} + \rho^2,$$

где је $r = AC$ а $\rho = MC$ (сл. 65.) па, означивши ради скраћења

$$\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} = \cos \sphericalangle ACM = \Theta,$$

развијмо $\frac{1}{d}$ у ред по растућим степенима односа $\frac{\rho}{r}$. Тада ће изаћи

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\Theta \frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \Theta \frac{\rho}{r} + \frac{3\Theta^2 - 1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{5\Theta^3 - 3\Theta}{2} \cdot \frac{\rho^3}{r^3} + \dots \right)^*$$

па ће се потенцијал привлачења Земље (V) представити у облику реда сљедећих чланова, — од којих у првоме $M = \int \rho dM$ означава масу целе Земље —:

$$V = \frac{kM}{r} + \frac{k}{r^2} \int \Theta \rho \cdot dM + \frac{k}{2r^3} \int (3\Theta^2 - 1) \rho^2 \cdot dM + \frac{k}{2r^4} \int (5\Theta^3 - 3\Theta) \rho^3 \cdot dM + \dots (V')$$

При томе ће други члан тога реда увек бити раван нули, јер⁶¹ се он распада на три интеграла

$$\frac{kx}{r^3} \int \xi dM, \quad \frac{ky}{r^3} \int \eta dM \quad \text{и} \quad \frac{kz}{r^3} \int \zeta dM,$$

од којих је сваки посебице раван нули, усљед тога што су координате разних елемената Земље ξ , η и ζ сведене наиме на центар тежишта C .

Интеграл следећег, трећег члана тога реда, после замене у њему вредности Θ , добиће уопште овакав облик

$$\int (3\Theta^2 - 1) \rho^2 \cdot dM = \int \left[3 \left(\frac{x}{r} \xi + \frac{y}{r} \eta + \frac{z}{r} \zeta \right)^2 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right] dM = \\ = \left(3 \frac{x^2}{r^2} - 1 \right) \int \xi^2 dM + \left(3 \frac{y^2}{r^2} - 1 \right) \int \eta^2 dM + \left(3 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \int \zeta^2 dM + \\ + 6 \frac{xy}{r^2} \int \xi \eta dM + 6 \frac{xz}{r^2} \int \xi \zeta dM + 6 \frac{yz}{r^2} \int \eta \zeta dM.$$

Али ако допустимо, 1.) да је Земља тело симетрично како у односу према својој обртној оси, тако и у односу према екватору, 2.) да спољња њена површина, отступајући врло мало од сферног облика, има на половима неку малу спљоштеност s и 3.) да су густине у унутрашњости њеној поређане у концентричним

*) Да је тај ред за $r > \rho$ свршен, види се отуд, што се он при највећој вредности $\Theta = +1$ претвара у суму чланова бескрајно опадајуће геометриске прогресије:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho^3}{r^3} + \dots \right) = \frac{1}{r - \rho}$$

слојевима, који се исто тако мало разликују од сферног облика, као и спољња површина, онда ће услед такве симетрије, очевидно, бити:

$$\int \xi \eta \partial M = 0, \quad \int \xi \zeta \partial M = 0, \quad \int \eta \zeta \partial M = 0,$$

$$\int \xi^2 \partial M = \int \eta^2 \partial M = \int \zeta^2 \partial M + AM a^2,$$

где је a екваторијални радиус Земље, а A неки апстрактни број истога ступња маленкости, као и спљоштеност s . На тај ће начин изаћи

$$\begin{aligned} \int (3 \Theta^2 - 1) \rho^2 \partial M &= \left(3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} - 3\right) \int \zeta^2 \partial M + \left(3 \frac{x^2 + y^2}{r^2} - 2\right) AM a^2 = \\ &= AM a^2 \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2}\right), \end{aligned}$$

те ће се потенцијал V , — ако се занемаре сви остали чланови реда (V'), — добити у оваквом простом облику:

$$V = \frac{kM}{r} + kM \frac{Aa^2}{2r^3} \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2}\right) \dots \dots \dots (V'')$$

У општој теорији привлачења (в. наш Курс Астрономије, — теорни део) доказује се, да се за обртни елипсоид са малом спљоштености s и са сличним унутарњим концентричним распоредом густина елипсоидних слојева потенцијал привлачног дејства на спољну тачку изражава на сасвим сличан начин, ако га развијемо по степенима s и ако се ограничимо само првим степеном s . Та околност може да послужи као сигурна гаранција, да ће и у нашој нешто широј претпоставци о структури Земље одбачени чланови реда (V') бити већ величине другог и вишег ступња маленкости. У њих ће ући такође и утицај разних малих одступања стварне Земљине структуре од наше претпостављене, потпуно симетричне.

82. Нормални закон промене интензитета теже на земној површини.

Кад у изразима (W) и (V'') заменимо правоугле координате x , y и z са поларним r и φ' , — где ће φ' бити *геоцентричка ширина* тачке A , — представимо потенцијал интензитета теже у облику

$$W = \frac{kM}{r} + kM \frac{Aa^2}{2r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \varphi'; \dots \dots \dots (8.)$$

а кад одредимо константну C из услова, да нивоска површина $W = C$ пролази кроз тачке земнога екватора ($\varphi' = 0^\circ$, $r = a$), добићемо наине једначину површине геоида. Да бисмо је разликовали од осталих нивоских површина, означаћемо геоцентричка растојања њених тачака са ρ и на основу (8.) имаћемо за њу

$$\frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{Aa^2}{2\rho^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2 \rho^3}{2kM} \cos^2 \varphi' \right] = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{A}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2kM} \right].$$

Али је $\frac{\omega^2 a^3}{kM} = q$, као однос центрифугалне силе $\omega^2 a$ према интензитету теже $\frac{kM}{a^2}$ (приближно раван $\frac{1}{289}$), мала величина истога ступња, као и A ; стога, ограничивши се само првим степенима обеју њих, добићемо

$$\frac{\rho}{a} = \frac{1 + \frac{A}{2}(1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{q}{2} \cos^2 \varphi'}{1 + \frac{A}{2} + \frac{q}{2}} = 1 - \left(\frac{3}{2} A + \frac{q}{2}\right) \sin^2 \varphi', \quad \dots \quad (9.)$$

а, као што је познато, то је приближна једначина обртног елипсоида са малом спљоштености*)

$$c = \frac{3}{2} A + \frac{q}{2} \quad \dots \quad (10.)$$

Напоменућемо, да тачност једначине (9.) остаје иста при замени геоцентричке ширине φ' са истинитом или астрономском ширином φ , јер се оне разликују међу собом само за мали угао $\varphi - \varphi' = \frac{c}{\sin \varphi'} \sin 2\varphi$ (в. Курс Астрономије). На тој се основи може узети да је и величина g равна $g \cos(\varphi - \varphi')$, тј. компоненти њеној у правцу радиуса вектора AC (сл. 65.); стога, кад издиференцирамо једначину (8.) по r и у њој заменимо φ' са φ , добићемо овакав израз за g :

$$g = - \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{kM}{r^2} + 3kM \cdot \frac{Aa^2}{2r^4} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \omega^2 r \cdot \cos^2 \varphi; \quad \dots \quad (11.)$$

за саму пак површину геоида он ће се претворити, на основу (9.) и (10.), у овај:

$$\begin{aligned} g &= \frac{kM}{a^2} (1 - c \sin^2 \varphi)^{-2} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} A - q + \left(q - \frac{9}{2} A\right) \sin^2 \varphi\right] = \\ &= \frac{kM}{a^2} \cdot \left[1 + c - \frac{3}{2} q + \left(\frac{5}{2} q - c\right) \sin^2 \varphi\right]. \end{aligned}$$

На тај начин, кад означимо са g_0 и g_1 интензитете тежа на екватору и на половима, а са i разлику ($g_1 - g_0$), имаћемо дефинитивно:

$$g = g_0 + i \sin^2 \varphi \quad \dots \quad (X.)$$

$$\frac{i}{g_0} = \frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} \cdot q - c \quad \dots \quad (Y.)$$

*) При истој ширини φ' геоцентричко ће се растојање ρ' тачке на обртном елипсоиду са полуосама a и $b = a(1 - c)$ изразити из једначине

$$\frac{(\rho' \cos \varphi')^2}{a^2} + \frac{(\rho' \sin \varphi')^2}{a^2(1 - c)^2} = 1$$

те ће с тачношћу до другог степена спљоштености c бити

$$\frac{\rho'}{a} = (1 - c) (1 - 2c \cos^2 \varphi' + c^2 \cos^2 \varphi')^{-\frac{1}{2}} = 1 - c \sin^2 \varphi' - \frac{3}{2} c^2 \sin^2 \varphi' \cos^2 \varphi'.$$

Према томе највећа величина разлике $\rho - \rho'$, на ширини $\varphi' = 45^\circ$, излази равна $\frac{3}{8} c^2 \cdot a = \frac{3}{8} \frac{a}{(294)^2} = 27$ метара.

Формулом (X) изражен је закон промене интензитета теже g на Земљиној површини у зависности од ширине места φ , при чему, као што ћемо даље у чл. 84. видети, посматрања дају:

$$g_0 = 9.7800 \text{ метра,} \quad i = 0.0519 \text{ метра,} \quad \frac{i}{g_0} = \frac{1}{188}.$$

Неопходни пак међусобни однос (Y) међу релативним прираштајем интензитета теже на половима $\frac{g_1 - g_0}{g_0}$, односом q центрифугалне силе на екватору према интензитету теже и спљоштености земнога сфероида c — представља врло важну теорему, коју је француски научник Клеро први пут доказао. Тим се односом може доста тачно да одреди спљоштеност c само из посматрања интензитета теже на разним местима земне површине, и, као што се из предидућег види, има оправдања па ма какав био закон промене густина у унутрашњости Земље при прелазу од једних концентричних њених слојева ка другима.

Напоменућемо још, да ако се узме једна тачка A на самом геоиду а друга A_h на незнатној висини h изнад A , то ће се интензитети тежа на њима g и g_h представити на основу израза (11.) у оваквом облику:

$$g = \frac{kM}{\rho^2} [1 + (1.)], \quad g_h = \frac{kM}{(\rho + h)^2} [1 + (1.)_h],$$

где ће мали корекциони чланови (1.) и (1.)_h бити скоро једнаки; стога ће довољно приближно изаћи:

$$\frac{g}{g_h} = \frac{(\rho + h)^2}{\rho^2} = \left(1 + \frac{h}{\rho}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{\rho}$$

или

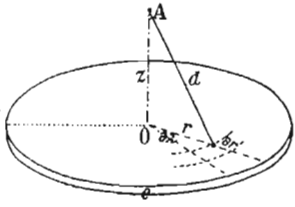
$$\frac{g - g_h}{g_h} = \frac{L - L_h}{L_h} = \frac{2h}{\rho} \dots \dots \dots (Z.)$$

Та формула треба да служи за *свођење (редукцију) на морску површину* теже g_h или пропорционалне јој дужине секундног клатна L_h , посматране на висини h .

83. Локални поремећаји интензитета теже.

Слично ономе, како правци вертикалних линија одступају од нормала идеалнога земног елипсоида, тако исто, усљед истих неправилности у структури земне коре, треба више или мање да одступа и посматрани на разним ширинама интензитет теже од нормалне његове величине g , који се одређује формулом (X.). Овде такође треба разликовати чисто *локалне поремећаје интензитета теже* или, тако рећи, случајне од *општих поремећаја* или систематских, који делују у једном и истом смислу на свима тачкама опширног пространства Земљине површине. Ови последњи, будући тесно везани са општим неправилностима облика геоида, од особитог су значаја и интереса, а да би се они јасније манифестовали, треба посматрани на свакој појединој тачци интензитет теже ослобођавати од јавних а по каткад и врло силних локалних поремећаја.

Уобразимо спочетка масу, која изазива поремећај, са средњом густином $\delta = 2.8$ у облику хоризонталног округлог диска (плоче) релативно мале дебљине e (сл. 66.) па одредимо како потенцијал w , тако и привлачно дејство j таквога диска на тачку А, која се налази на самој његовој оси ОА на растојању $OA = z$. Кад тај диск поделимо на бескрајно мале елементе dm вертикалним равнинама, које пролазе кроз вертикалну осу ОА под бескрајно малим углима $d\lambda$, и концентричним круговима радиуса r и $r + dr$, добићемо



Сл. 66.

$$w = k \int \frac{dm}{d} = k \delta e \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2 \pi k \delta e (\sqrt{r^2 + z^2} - z) \dots (12.)$$

$$j = - \frac{\partial w}{\partial z} = 2 \pi k \delta e [1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}] \dots (13.)$$

Ако пак ставимо сад, да је $z = 0$ и узмемо за сâм интензитет теже g , као и у чл. 69., приближни израз

$$g = \frac{kM}{a^2} = \frac{4}{3} \pi k \delta_0 a = \frac{8}{3} \pi k \delta a,$$

то ће изаћи просто

$$j = 2 \pi k \delta \cdot e \quad \text{и} \quad \frac{j}{g} = \frac{3}{4} \frac{e}{a}; \dots (13')$$

тј. привлачно дејство диска на тачку А, која се налази на њему самоме, не зависи од његова радиуса r већ само од његове дебљине e .

На основу овога, када се интензитет теже g_h посматра на каквој континенталној тачци на висини h над морском површином, то од њега (g_h) понекад одузимају привлачење целе оне сувишне континенталне масе, која се налази између тачке посматрања и морске површине, те, стављајући у (13') $e = h$, добивају за свођење g_h на морски ниво уместо формуле (Z.) ову:

$$\frac{g - g_h}{g_h} = \frac{L - L_h}{L_h} = \frac{2h}{a} \quad \frac{j}{g} = 2 \frac{h}{a} - \frac{3}{4} \frac{h}{a} = \frac{5}{4} \frac{h}{a}, \dots (Z')$$

коју је први пут дао Јунг. Али величина g , која се на тај начин добива, излази увек знатно мања од нормалне (посматране под истом ширином на самој морској површини) при врло великим висинама h ; међутим у идућем члану ми ћемо видети, да врло великих одступања од нормалне неће бити, ако се свођење врши по формули (Z.). Отуд излази, да се овде дешава оно исто, што је запажено и на правцима вертикалних линија у Индији у близини Хималаја (чл. 70.), тј. привлачно дејство континенталне масе, која се издиже над нивоском Земљином површином, приближно се уравнотежује деловима Земљине коре мање густине, који се налазе на већим дубинама. Стога је боље и тачније не користити се Јунговом формулом, већ привлачење опште континенталне масе приписивати другим скривеним од нас узроцима систематских поремећаја интензитета теже.

Да би се одредио утицај видног рељефа земљишта око какве тачке А на посматрани на њој интензитет теже g , треба, уопште говорећи, поступити исто онако, као и при срачунавању утицаја локалног привлачења на правац вертикалне линије (чл. 69.), а наиме: треба поделити земљиште на призматичне елементе $p_1 q_1 p_2 q_2$ (сл. 54.) концентричним цилиндрима разних радиуса d и радијалним равнинама, које међу собом заклапају једнаке угле $\Theta_2 - \Theta_1 = \frac{2\pi}{n}$. Тада ће се, као и у чл. 69., — означивши са H средњу висину (у односу према А) таквог елемента, — добити привлачно његово дејство F_z на тачку А у вертикалном правцу у облику:

$$\partial F_z = k\delta \frac{H d \partial\Theta}{d^2} \cdot \frac{\partial d}{d} \cdot \frac{1}{2} H, \quad F_z = k\delta \frac{H^2}{2} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \partial\Theta \int_{d_1}^{d_2} \frac{\partial d}{d^2} = \pi k\delta \frac{H^2}{n} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right);$$

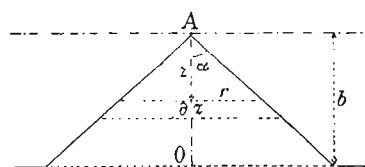
кад се пак узме сума H^2 за цео прстен са радиусима d_1 и d_2 а затим и за остале такве прстене, имаћемо за релативно повећавање или смањивање величине g , посматране на тачци А, овакав израз

$$\frac{\Sigma F_z}{g} = \frac{3}{8a} \Sigma \frac{H^2}{n} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \dots \dots \dots (14.)$$

Ако узмемо, на пример, да је тачка А окружена једноставним прстеном радиуса $d_1 = 60$ врста, $d_2 = 80$ врста са средњом висином $H = 2$ врсте, то ће изаћи, да је $\frac{\Sigma F_z}{g} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 20}{8 \cdot 6000 \cdot 60 \cdot 80} = \frac{1}{960000}$. Према томе утицај рељефа земљишта на посматрану силу теже може бити осетан само на незнатном пространству.

Да размотримо још засебно онај посебни случај, када се тачка посматрања А налази на врху правога конуса висине $AO = b$ и са углом 2α при том врху (сл. 67.). Примењујући формуле (12.) и (13.) на сваки бескрајно танки слој таквога конуса, имаћемо у њима:

$$e = dz \quad \text{и} \quad \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \cos \alpha$$



Сл. 67

те ћемо интегрирањем добити за потенцијал ω и привлачно дејство j целог конуса на тачку А овакве изразе:

$$\omega = 2 \pi k\delta \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \int_0^b z dz = \pi k\delta b^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \dots \dots \dots (15.)$$

$$j = 2 \pi k\delta (1 - \cos \alpha) \int_0^b dz = 2 \pi k\delta b (1 - \cos \alpha), \quad \frac{j}{g} = \frac{3}{4} \frac{b}{a} (1 - \cos \alpha) (16.)$$

Тако на пример, на врху Арарата, који се у облику конуса издиже над околним земљиштем на висину b око 1 врсте, Порат је био одредио дужину секундног клатна 992.561 милиметра. Кад за ту планину узмемо приближно $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ (при

$\alpha = 80^\circ$), добићемо по формули (16.) овакву дужину L_h , — ослобођену од привлачења самога Арарата: —

$$L_h = 992.561 \left(1 - \frac{j}{g}\right) = 992.561 \left(1 - \frac{1}{9600}\right) = 992.458;$$

а пошто је висине h тачке посматрања над морем била у том случају 1883 метра, то се после свођења L_h на морски ниво по формули (Z.) добија дефинитивно

$$L = 992.458 + 0.586 = 993.044.$$

У сасвим се сличним погодбама налазе и одређивања интензитета теже на малим посебним острвима, која представљају само врхове конуса, који се издижу са врло дубокога дна разних мора и океана. Да би се повећани интензитет теже $g + j$ на таквом острву свео на нормалну његову величину g , који би се добио на истом морском ниво-у али далеко од острва, треба узети, да је његова густина равна $2.8 - 1.0 = 1.8 = \frac{9}{14} \delta$; тада ће по формули (16.) изаћи приближно

$$\frac{j}{g} = \frac{27}{56} \cdot \frac{b}{a} (1 - \cos \alpha).$$

Кад узмемо, например, да је $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ (при $\alpha = 70^\circ$) и $b = 4$ врсте, што представља тек средњу дубину океана, ми треба да очекујемо на океанским острвима средње повећање интензитета теже $j = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{56} \cdot \frac{4}{6000} \cdot g = \frac{1}{4700} g$; при дубини пак $b = 6$ врста оно може достићи и до $\frac{1}{3000} g$.

84. Одређивање спљоштености Земљинога сфероида.

Да би се извела спљоштеност Земљина на основу теореме Клеро (Y.), треба одредити из посматрања дужине секундног клатна L на различитим местима земне површине величине g_0 и i или пак њима пропорционалне: дужину секундног клатна на екватору Λ и прираштај њен на половима \dot{I} , при чему на основу формуле (X.) треба да буде:

$$\Lambda = \frac{g_0}{\pi^2}, \quad \dot{I} = \frac{i}{\pi^2}, \quad L = \Lambda + \dot{I} \sin^2 \varphi \quad (X')$$

Кад, ради удобнијег срачунавања, узмемо какве приближне вредности Λ_0 и \dot{I}_0 за Λ и \dot{I} и кад ставимо

$$\Lambda = \Lambda_0 + x, \quad \dot{I} = \dot{I}_0 + y, \quad L_0 = \Lambda_0 + \dot{I}_0 \sin^2 \varphi,$$

имаћемо за одређивање малих поправака x и y врло велики број једначина облика

$$x + y \cdot \sin^2 \varphi = (L - L_0) = n \quad (X'')$$

Никакве вредности x и y неће потпуно тачно задовољити такве једначине наине услед локалних и систематских поремећаја теже, јер, као што смо видели у глави IX, сама одређивања дужина L подлеже сразмерно ништавним грешкама.

Ове се величине L понекад ослобођавају од привлачног дејства рељефа околног земљишта а понекад не. У сваком случају утицај ће се чисто локалних поремећаја ослабити на изводу тражених Λ и I утолико боље, уколико је на већем броју тачака одређена дужина L ; присуство пак систематских поремећаја интензитета теже изискује, разуме се, што је могуће равномернији распоред тачака посматрања по целој Земљиној површини. К сажалењу, у унутрашњости континента, са изузетком само Европе, до сад је извршено још и сувише мало одређивања интензитета теже; сем тога одредбама се њеним на океанским острвима не можемо користити како треба, из узрока, што се чисто локално, али огромно привлачно дејство тих острва може да оцени тек грубо приближно, због недостатака потребних данах.

Имајући у виду све што је напред речено, ми ћемо одбацити све посматране дужине L на острвима а задржаћемо, ради примерног одређења Λ и I , само 43 тачке, које су распоређене, највећим делом по обалама разних мора и океана. У следећој табlici изложене*) дужине L у милиметрима сведене су већ на морски ниво по формули (Z) према апсолутним висинама h у метрима; бројеви пак n , који улазе у основне једначине (X''), срачунати су помоћу приближних величина

$$\Lambda_0 = 991.000 \text{ m m.} \quad \text{и} \quad I_0 = 5.200 \text{ m m.}$$

№ Тачке посматрања	ширина дужина		вис. h	L	n	(L)	$L-(L)$
	φ	λ					
1. Шпицберг	79°50'0 +	12°	6 996.068		+ 0.029	996.022	+ 0.046
2. Мелвил	74 47.2 —	111	10 5.862		+ 20	5.823	+ 39
3. Гренланд	74 32.3 —	19	10 5.779		— 52	5.812	— 33
4. Нова Земља	72 22.6 +	50	7 5.698		— 25	5.704	— 6
5. Хамерфест	70 40.1 +	24	9 5.558		— 72	5.610	— 52
6. Торнео	65 50.7 +	24	4 5.365		+ 36	5.307	+ 58
7. Архангелск	64 34.3 +	41	6 5.219		— 22	5.218	+ 1
8. Петроград	59 56.5 +	30	8 4.877		— 17	4.869	+ 8
9. Ситха	57 3.0 —	135	0 4.621		— 41	4.636	— 15
10. Вилно	54 41.0 +	25 101	4.436		— 25	4.433	+ 3*
11. Петропавлоск	53 1.0 +	159	0 4.350		+ 32	4.390	+ 60
12. Липецк	52 36.6 +	40 160	4.238		— 45	4.244	— 16*
13. Гринвич	51 28.7	0 28	4.143		— 40	4.154	— 11
14. Париз	48 50.2 +	2 70	3.884		— 63	3.916	— 32*
15. Клермон-Феран	45 46.8 +	3 406	3.601		— 70	3.638	— 37*
16. Владикавказ	43 2.0 +	45 693	3.403		— 19	3.388	+ 15*
17. Тифлис	41 41.5 +	45 435	3.246		— 54	3.265	— 19*

*) Знатан део ових дужина L узет је из друге књиге Хелмертовог дела „*Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. 1884.*“; некоје пак, које су недавно одређене, узете су из издања Импер. Руског Географског Друштва: „*Tableau des longueurs de pendule, observées par des savants russes. 1893.*“ —

№ Тачке посматрања	ширина φ	дужина λ	вис. h	L	n	(L)	L—(L)
18. Њујорк	40°44'5	— 74°	15 993.193	—	0.022	993.179 +	14
19. Арарат	39 46.2 +	45 1883	3.044	—	84	3.092 —	48*
20. Сан-Франциско	37 47.0 —	121 117	2.933	—	19	2.915 +	18
21. Море (у Индији)	33 15.6 +	78 4696	2.524	—	40	2.524	0*
22. Измаилија	30 35.9 +	32 10	2.250	—	97	2.306 —	56
23. Датаира (Инд.)	28 44.1 +	78 218	2.104	—	97	2.159 —	55*
24. Калкута	22 32.9 +	88 6	1.713	—	52	1.720 —	7
25. Сан-Блаз	21 32.4 —	105 35	1.689	—	12	1.656 +	33
26. Дамаргида	18 3.3 +	78 593	1.397	—	102	1.448 —	51*
27. Јамајка	17 56.1 —	77 3	1.497	+	4	1.446 +	51
28. Коканада	16 56.4 +	82 3	1.379	—	63	1.395 —	16*
29. Мадрас	13 4.1 +	80 8	1.169	—	97	1.218 —	49
30. Аден	12 46.9 +	45 2	1.227	—	28	1.207 +	20
31. Тринидад	10 38.9 —	62 6	1.171	—	7	1.129 +	42
32. Порто-Бело	9 32.5 —	80 4	1.136	—	7	1.094 +	42
33. Сијера Леоне	+ 8 29.5 —	13 58	1.111	—	2	1.064 +	47
34. Равак	— 0 1.6 +	131 0	0.966	—	34	0.950 +	16
35. Пара	— 1 27.0 —	48 12	0.947	—	56	0.953 —	6
36. Бахија	— 12 59.4 —	39 65	1.223	—	40	1.215 +	8
37. Рио Жанеиро	— 22 55.3 —	43 22	1.713	—	76	1.744 —	31
38. Валпараизо	— 33 2.5 —	72 0	2.500	—	46	2.506 —	6
39. Порт Џаксон	— 33 51.6 +	151 0	2.625	+	7	2.578 +	47
40. Рт Добре Наде	— 33 56.0 +	18 10	2.581	—	39	2.581	0
41. Монтевидео	— 34 54.4 —	56 4	2.641	—	62	2.664 —	23
42. Фалкланд. остр.	— 51 33.5 —	58 0	4.116	—	74	4.161 —	45
43. Рт Хорн	— 55 51.3 —	68 12	5.566	+	4	5.535 +	31

На тај начин, за извод највероватнијих величина x и y по методи најмањих квадрата, ми имамо 43 једначине (X''). Кад узмемо да су њихове тежине једнаке, оне ће нам дати ове две нормалне једначине:

$$\left. \begin{aligned} 43x + y \cdot \Sigma \sin^2 \varphi &= \Sigma n \\ x \cdot \Sigma \sin^2 \varphi + y \cdot \Sigma \sin^4 \varphi &= \Sigma n \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \text{ где су } \begin{aligned} \Sigma \sin^2 \varphi &= 17.76, & \Sigma n &= -1.569, \\ \Sigma \sin^4 \varphi &= 11.36, & \Sigma n \sin^2 \varphi &= -0.512, \end{aligned}$$

одакле су

$$x = -0.050 \text{ или } \Lambda = 990.950 \text{ m m. са тежином } p_x = 15.2$$

$$y = +0.034 \text{ „ } \dot{I} = 5.234 \text{ „ „ „ „ } p_i = 4.0$$

С тим се пак величинама Λ и \dot{I} добивају дате у табlici дужине (L.), које нај-

боље подилазе даним L . Средње квадратно ε из одступања $L - (L)$ и средње грешке ε_Λ и ε_i излазе овакве:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma [L - (L)]^2}{43 - 2}} = \pm 0.035; \quad \varepsilon_\Lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon}{p_x}} = \pm 0.009; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{\varepsilon}{p_i}} = \pm 0.017.$$

Кад сад срачунамо

$$g = \pi^2 \Lambda = 9.78\ 028, \quad q = \frac{\omega^2 a}{g_0} = \left[\sin 1^s \cdot \frac{86\ 400}{86\ 164} \right]^2 \frac{a}{g_0} = 0.003\ 467,$$

$$i = \pi^2 \dot{i} = 0.05\ 165, \quad \frac{i}{g_0} = \frac{\dot{i}}{\Lambda} = 0.005\ 281 \quad (\text{са ср. греш. } \pm 0.000\ 017),$$

добећемо по теореме Клеро:

$$c = \frac{5}{2} q - \frac{i}{g_0} = 0.003\ 386 = \frac{1}{295.2}$$

са средњом грешком $\pm 17 \pm 1.5$

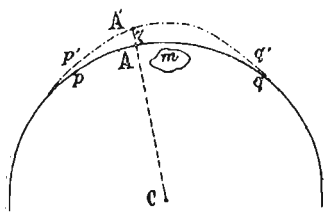
По Хелмертовим пак срачунавањима, — који је приближно узео у рачун привлачно дејство како континенталних маса, тако и острва, — величине Λ , \dot{i} , g_0 , i и c из посматрања теже на 122 тачке изашле су овакве:

$$\Lambda = 990.918 \text{ m. m.}, \quad g_0 = 9.77997 \text{ метра}, \quad c = \frac{1}{298 \pm 1.3}$$

$$\dot{i} = 5.261 \quad \text{„ „} \quad i = 0.05193 \quad \text{„ „}$$

85. Посебна и општа одступања геоида од обртног елипсоида.

Да видимо сад, колика могу да буду посебна или делимична одступања геоида од нормалног његовог облика — обртног елипсоида услед разних случајних неправилности у структури Земљине коре; при томе ћемо се ограничити како за Земљин потенцијал W , тако и за интензитет теже g на мирном морском ниво-у pAq (сл. 68.) приближним изразима:



Сл 68.

$$W = \frac{kM}{a} \quad \text{и} \quad g = \frac{kM}{a^2} = \frac{4}{3} \pi k \delta_0 a.$$

Разуме се, да сувишак масе m у Земљиној кори, — који је ништаван у сравњењу са масом M целе Земље, — изменивши ту површину pAq на $p'A'q'$, неће произвести никаквог осетног утицаја на морски ниво око тачака јако удаљених од њега; стога, ако са W' означимо потенцијал Земљиног привлачења на какву тачку A' поремећеног ниво-а, издигнутог на висину $AA' = \zeta$, а са w потенцијал саме сувишне масе m , то ће се површина $p'A'q'$ одредити једначином

$$W' + w = W;$$

а пошто је на основу (7.):

$$W' - W = -g \zeta = -w$$

то ће изаћи

$$\zeta = \frac{w}{g} \dots \dots \dots (17.)$$

Например, издигнуће нормалнога ниво-а океана око његових острва коничног облика добиће се, кад се овде ставе величине w , које се одређују формулом (15.); тада ће, при $\delta = 2.8 - 1 = 1.8$, $b = 4$ врсте и $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, изаћи:

$$\zeta = \frac{\pi k \delta b^2}{\frac{1}{3} \pi k \delta_0 a} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1.8 \times 16}{5.6 \times 6000} \cdot 2 = \frac{9}{7000} \text{ врста} = 4\frac{1}{2} \text{ стопе.}$$

Издизање геоида због привлачног дејства масивнијих планинских гребена и узвишења, које постоје на земној површини, треба да досежу и до неколико сажњева, што се потврђује и из посматрања скретања вертикалних линија (чл. 68.) на таквим местима; али све овакве само локалне неправилности, дајући геоиду као неку врсту таласастог облика, ниуколико не кваре општи нормални његов облик. Сасвим ће друга ствар бити при оцени привлачног дејства опширних континената, који се издижу над морским ниво-ом просечно око 200 сажњева, као и обратног дејства водâ земљиних океана, средње дубине више од $3\frac{1}{2}$ врсте. Кад замислимо, например, континент у облику округлог диска радиуса $r = \frac{1}{2} a$ и дебљине $e = 200$ сажњева, добићемо издизање геоида ζ на њему по формули (12.), ако у њој ставимо да је $z = 0$, тада ће изаћи

$$\zeta = \frac{w}{g} = \frac{2 \pi k \delta e \cdot r}{\frac{1}{3} \pi k \delta_0 \cdot a} = \frac{3}{8} e = 75 \text{ сажњева.}$$

Али, као што смо напоменули у чл. 70., на овоме заснована предвиђања систематских издизања геоида на континентима и још већих спуштања његових у односу према елипсоиду на океанима сасвим се не оправдавају стварним посматрањима интензитета теже. И заиста, ако се посматране на континентима Европе и Азије дужине секундног клатна сведу на морски ниво по формули (Z.), то се не добивају дужине L веће од нормалних (L), као што би то изискивало привлачење континенталних маса, већ излазе чак и *нешто мање* (у средњем за $\frac{1}{30000}$ део), што се делимично види и на 11 континенталних тачака, које су ушле у нашу таблицу чл. 84., означених тамо знаком*. Исто тако и посматране дужине L на усамљеним морским и океанским острвима излазе *веће* од нормалних (L) за оволике делове наиме:

<i>Остр. Средоз. мора</i>	$\frac{L - (L)}{(L)}$	<i>Остр. Тихог ок.</i>	$\frac{L - (L)}{L}$
Форментера	1:13000	Бонин	1: 3100
Липари	1: 8100	Мови	1: 5600
<i>Остр. Атлан. ок.</i>		Гуам	1: 5000
Св. Томе	1: 5400	Јуалан	1: 3400
Фернандо	1: 4600	Галапагос	1:14000
Вознесења	1: 6000	Ил де Франс	1: 4200
Св. Јелене	1: 4200	Јуж. Шкотска	1:13000

а такви увеличани интензитети теже на острвима и ако се потпуно објашњују (чл. 83.) као појаве локалне, они не дају ни најмањих указања на постојање систематских поремећаја њихових на самој површини великих мора и океана.

Да се из посматрања интензитета теже открију општа одступања геоида од његовог нормалног елипсоидног облика постоји само један сигурни пут: Не чинећи никакве претпоставке односно правилности и симетричности распореда маса, како на спољњим, тако и на најдубљим слојевима земље, узети из развијеног потенцијала теже (V') чл. 81. члан, који смо раније одбацили:

$$\frac{k}{2r^4} \int \rho^3 (5 \Theta^3 - 3 \Theta) \partial M,$$

(а у случају потребе и слѣдећи) па помоћу њега добити изразе за потенцијал W и за интензитет теже g у зависности од координата x , y и z тачке посматрања општије него што су (8.) и (11.) чл. 82. Тада ће, уместо пређашње само једне непознате A , ући у ове изразе за W и g 12 константних $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$, које зависе од непознатог нам распореда маса у Земљи, а наиме:

$$MA_1 = \int \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \zeta^2 \right) \partial M, \quad MA_2 = \int (\xi^2 - \eta^2) \partial M, \quad MA_3 = \int \xi \eta \cdot \partial M, \dots$$

$$MA_6 = \int (4 \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) \eta \partial M, \quad MA_7 = \int (4 \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) \zeta \partial M, \dots MA_{12} = \int \xi \eta \zeta \partial M.$$

Ако се пак одреде бројне њихове вредности по многим посматрањима интензитета теже g , која нам стаје на расположењу, па се замене у изразу W чл. 79., то ће се најзад добити једначина геоида у поларним координатама

$$W(r, \varphi, \lambda) = C \quad \text{или} \quad r = f(\varphi, \lambda),$$

која се најбоље слаже са напред реченим посматрањима.

Тако је наиме и поступио проф. Слудскиј.*) По његовим срачунавањима, основаним на иста 122 посматрања интензитета теже, којима се користио и Хелмерт, али који само нису били ослобођени од локалних привлачења, изашло је, да се на континентима геоид *спушша* испод елипсоида (за сравњења узет је обртни елипсоид са спљоштености $c = \frac{1}{288.5}$) а на океанима да се *издиже*, и, да максималне величине како спуштања, тако и издижања досежу до 500 метара. Разуме се, да се таква знатна одступања геоида од елипсоида добијају само стога, што се врло велики, али чисто локални поремећаји интензитета теже на острвима распростиру, као систематски, на сву површину океана. У самој пак ствари, судећи по оним систематским поремећајима интензитета теже, који су досад откривени на континентима и по ономе што их за океане немамо, веровати је, да опште неправилности геоида треба да буду несравњено мање. Испитивања проф. Слудског интересантна су главно у том смислу, што из њих постаје јасно, да *сисшематским негашивним поремећајима иншензитета шеже на коншиненцима одговарају спушшања геоида а не издижања.*

*) Његови чланци о тој ствари: „*Problème principal de la haute géodesie. 1884.*“, „*Essai de solution du problème géodesique. 1884.*“ и „*La figure de la Terre d'après les observations du pendule. 1886.*“ штампани су у „Бюллетеняхъ Имп. Моск. Общ. Испытателей Природы“, а „*Общая теорія фигуры Земли. 1888.*“ у „Московск. Матем. Сборникъ“.

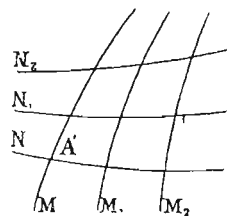
МАТЕМАТИЧКА КАРТОГРАФИЈА.

ГЛАВА XI.

ОПШТИ ОСНОВИ ЗА ПОСТРОЈ КАРАТА.

86. Разне врсте карата.

На равнини се може узети сасвим произвољна система кривих линија $M, M_1, M_2 \dots$ (сл. 69.) па условно сматрати, да оне претстављају земне меридијане, који одговарају разним географ. дужинама l, l_1, l_2, \dots а друга, такође произвољна система N, N_1, N_2, \dots да представља земне паралеле, које одговарају разним географским ширинама $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$. Ако при том у свакој од узетих система све криве буду прелазиле једна у другу по јасно израженом закону и непрекидно, т.ј. тако, да криве, које одговарају бескрајно блиским г. дужинама или пак бескрајно блиским г. ширинама буду такође бескрајно близу једна до друге, то ће свакој тачци A земне елипсоидне површине одговарати потпуно одређена тачка A' , која се налази наиме, у пресеку криве M прве системе, која претставља меридијан l са кривом друге системе N , која претставља паралелу φ . На тај начин чисто условно добивена слика целе Земљине површине или пак само једнога њеног дела зове се *географска карша*.



Сл. 69.

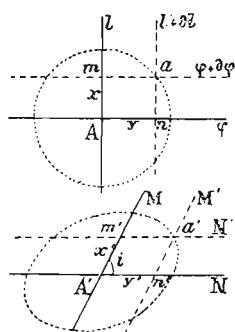
Карте које одједном претстављају целу Земљину површину или бар половину њену, зову се *планисфере* (Mappeмонdes, Weltkarte). Карте не тако великих димензија, које претстављају простране државне површине, зову се *генералне* или *опште* карте. Још детаљније карте зову се *специјалне*, а ако је могућно више детаља претстављено на њима у крупној размери, зову се *шопографске*. По циљу, којему су карте намењене, оне могу бити: *географске* (у специјалном смислу те речи), *хипсометриске* или *орографске* (које углавном претстављају рељеф земне површине), *поморске*, *хидрографске*, *геолошке* и т. д.

Али, ма какав био циљ, којему је карта намењена, за одређивање на њој разних тачака, које одговарају тачкама земне површине, и уопште за пренос на њу потребних детаља, неопходно је потребна напред речена основна, више или мање густа *мрежа* кривих линија, која условно претставља мрежу земних меридијана и паралела. Та се мрежа уопште зове *картографска пројекција*. Ма да треба да све деформације претстављених на карти: углова, дужина и разних

контура зависе од узетог облика кривих те мреже M, M_1, M_2, \dots и N, N_1, N_2, \dots ипак се може доћи до неких потпуно општих и врло важних закључака о карактеру тих деформација на врло малој просторији ма какве пројекције. Тиме ћемо се пре свега и забавити.

87. Општи карактер малих слика.

Ако на карти две дане бескрајно блиске криве M и M' одговарају двама бескрајно блиским меридијанима земног елипсоида са г. дужинама l и $l + dl$ (сл. 70.), а криве N и N' паралелама са г. ширинама φ и $\varphi + d\varphi$, то ће се бескрајно мали правоугаоник $Aman$ на елипсоиду са странама $Am = x$ и $An = y$ претставити



такође бескрајно малим паралелограмом $A'm'a'n'$ са странама $A'm' = a'n' = x'$ и $A'n' = a'm' = y'$ и са неким познатим углом међу њима $\sphericalangle m'A'n' = i$. На тај начин кад означимо са μ и ν односе $\frac{A'm'}{Am}$ и $\frac{A'n'}{An}$, т.ј. *размере* лин. дужина на тачци у правцу меридијана и паралела, имаћемо за сваку врло малу величину x и y

$$x' = \mu \cdot x \quad \text{и} \quad y' = \nu \cdot y.$$

Према томе, ако правоугле координате x и y тачке a у односу према почетку A буду задовољавале једначину $x^2 + y^2 = 1$, т.ј. ако буду припадале кругу бескрајно малог радиуса, који ми ради простоте узимамо за јединицу, то ће се међу косоуглим координатама x' и y' одговарајуће тачке a' на карти (у односу према почетку A') добити оваква зависност

Сл. 70.

$$\frac{x'^2}{\mu^2} + \frac{y'^2}{\nu^2} = 1.$$

То показује, да се бескрајно мали круг претставља у свакој тачци карте A' у облику елипсе са спрегнутим полудијаметрима μ и ν у правцу елемената меридијана и паралела те тачке; величине пак главних полуоса те елипсе m и n , које се одређују по познатој Аполонијевој теореме

$$m^2 + n^2 = \mu^2 + \nu^2 \quad \text{и} \quad m n = \mu \nu \cdot \sin i,$$

изражавају *максималну* и *минималну* *размеру* линеарних дужина око тачке A' .

Притоме је још очевидно, да се сваки квадрат описани око тог истог круга, претвара на карти у паралелограм, описани око елипсе, из чега директно излази, да сваким двама узајамно перпендикуларним дијаметрима круга треба да одговара на елипси пар спрегнутих међу собом дијаметара; пошто пак у елипси најмањи угао образују међу собом такви спрегнути дијаметри, који су нагнути према дужој оси m под углима

$$\gamma = \pm \arctg \frac{n}{m},$$

то највећа деформација углова у тачци A' на карти треба да буде равна разлици

$$\eta = 90^\circ - 2\gamma$$

На тај се начин добива, да је

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{cotg} 2 \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right);$$

кад се пак η изрази у лучним минутама а спљоштеност елипсе $\frac{m-n}{m}$ са p , онда ћемо, у случајима кад та спљоштеност није велика, имати приближно

$$\eta = \frac{p}{\sin 1'} \dots \dots \dots (a.)$$

88. Конформне, еквивалентне и произвољне пројекције.

Види се, дакле, да се помоћу трију величина μ , ν и i , које се добивају за какву тачку A' на карти, потпуно одређује деформација углова и линеарних дужина на бескрајно малом простору око те тачке, тако да ако се гдегод покаже да је $i = 90^\circ$ а $\mu = \nu$, то ће бити и $m = n$, и тада ће се на том месту не само врло мали круг претставити такође у облику круга, већ ће и лик свакога другог веома малог контура изаћи сличан са стварним.

Да би бескрајно мале слике на карти биле свуда на њој сличне са стварним, неопходно је потребно дакле да буде испуњен услов

$$i = 90^\circ \quad \text{и} \quad \mu = \nu \dots \dots \dots (b.)$$

на свима тачкама карте. Пројекцијâ са тако важним особинама може бити безрој много. Све се оне зову *конформне* (у којима су сачуване сличности облика) а код свију њих сама величина размере $m = n$ треба више или мање да се мења на разним тачкама; јер би сталност размере код њих водила сличности и свих великих слика са стварним; то би тек значило, да се крива елипсоидна површина може развити на равнину без икаквих деформација. Код тих се пројекција однос променљиве размере према размери на каквој одређеној тачци зове понекад *модул*.

Али се, уместо једнакости $\mu = \nu$ и $i = 90^\circ$, исто тако може задржати на целој карти непроменљивост величинâ

$$m n = \mu \nu \cdot \sin i = Q \dots \dots \dots (c.)$$

тј. непроменљивост односа површинâ елементарно малих паралелограма $A' m' a' n'$ према њима одговарајућим површинама $A m a n$ елипсоида. Јасно је, да ће се у том случају сачувати иста пропорционалност и међу површинама свих коначних (великих) фигура. Пројекцијâ са тако драгоценим особинама такође може бити безброј много, а оне се зову *хомолографичке* или *еквивалентне*.

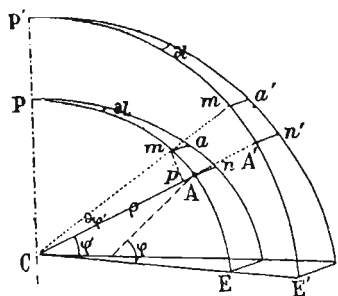
Пошто се код конформних претстава знатног пространства земне површине мора знатно да мења размера на разним тачкама, а код еквивалентних пак мора да се добивају и сувише велике деформације фигура, то се при састављању не тако великих и не особито тачних карата прибегава понекад построју пројекција, које не испуњују ни услов конформности нити еквивалентности, већ које имају некакве особине средње или интервалне међу овима. Све пројекције ове врсте могу се назвати *условним* или *произвољним*.

Пројекција конформних и еквивалентних може бити безброј много, зато што облик кривих једне од система, које претстављају меридијане и паралеле, остају ипак савршено произвољне, а само се услов друге системе јавља притом већ као неопходан, да би испунио постављени услов конформности или пак еквивалентности. На тај је начин сасвим природно омогућено, да се и меридијани, и паралеле или пак само једни од њих претставе у облику најпростијих линија, т.ј. у облику правих или кружних линија. На свима оним пројекцијама, које се примењују на делу, паралеле се наиме увек претстављају у облику правих, паралелних међу собом, или у облику кругова; меридијани пак могу притом да изађу и као праве, и као кругови па и у облику разних других кривих. Најпростије од тих пројекција, на којима су меридијани претстављени правим линијама, правцем перпендикуларним на праволиниске или на концентрично кружне паралеле, добијају специјални назив *цилиндричних* и *коничних пројекција*.

Доцније мало (чл. 90.) рећи ћемо о другом полазном начелу, које води ка одељку тако званих *зенишних пројекција*, на којима су како земни меридијани, тако и паралеле, уопште говорећи, доста сложене криве.

89. Конформна и еквивалентна претстава земне површине на сфери.

При састављању тачних и детаљних карата било би и сувише грубо сматрати Земљину површину за сферу; узимати пак у рачун спљоштеност Земље $c = \frac{1}{294}$ у свима посебним облицима пројекција незгодно је у том смислу, што



Сл. 71.

ће то комплицирати формуле, које се на њих односе, те ће отежати изучавање онога што је значајније а то је, њихових особина. То ћемо избећи, ако прво нађемо конформну или еквивалентну претставу елипсоида Земљине површине на сфери неког радиуса па затим да преносимо све слике са те сфере на равнину.

Кад спојимо две врло блиске тачке А и *m* елиптичког меридијана PAE (сл. 71.) са центром Земље С и пројектујемо лук *Am* на правац *mp*, перпендикуларни на радиус $AC = r$, добићемо, да је $mp = Am \cdot \cos(\varphi - \varphi')$,

где φ означава географску а φ' геоцентричку ширину тачке А. Али, пошто је

$$\varphi - \varphi' = c \sin 2\varphi \dots \dots \dots (d)$$

и
$$\cos(\varphi - \varphi') = 1 - \frac{c^2}{2} \sin^2 2\varphi = 1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{173\,000}$$

то се са релативном грешком, сасвим неосетном чак и за карте најкрупније размере, може увек сматрати, да је

$$mp = Am.$$

Кад опишемо сад из центра С сферу некаквога радиуса R па на њу пројектујемо помоћу зракова САА', С*tm*'', . . . ма који елемент Земљине површине *Am* *an*, који се налази међу бескрајно блиским паралелама φ и $\varphi + d\varphi$ и међу

бескрајно блиским меридијанима са разликом g . дужина ∂l , добићемо на тој сфери елемент $A' m' a' n'$, ограничени паралелама φ' и $\varphi' + \partial\varphi'$ и двама меридијанима са истом разликом дужина ∂l , тако да ће изаћи

$$m = \frac{A'm'}{Am} = \frac{A'm'}{mp} = \frac{R}{\rho} \quad \text{и} \quad n = \frac{A'n'}{An} = \frac{R}{\rho};$$

т. ј. на свима тачкама A' на сфери, размере ће m и n правцем меридијана и паралела бити једнаке међу собом.

Према томе, да се добије на сфери конформна прешшшава земне површине пошребно је само, да се астрономске ширине свију шачака замене са геоцентричким. Сама пак размера претставâ на сфери мењаће се на разним паралелама у зависности од ширине φ (али само с тачношћу до првог степена спљоштености c) овако:

$$m = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{a(1 - c \sin^2 \varphi)} = \frac{R}{a} (1 + c \sin^2 \varphi); \dots \dots \dots (d')$$

тако, да ако поставимо услов, да нам размера на екватору $m_0 = \frac{R}{a}$ буде јединица, то радиус сфере R треба да буде једнак са дужом полуосом a земног елипсоида.

Да би се на сфери добила еквивалентна претстава, размотрићемо испрва, како се уопште изражава површина S елипсоидне зоне, која се садржи између екватора и какве паралеле. За сваку елементарну зону ∂S , која је ограничена паралелама φ и $\varphi + \partial\varphi$, на основу познатих нам израза за радиусе кривине M и N (чл. 12.), биће очевидно

$$\begin{aligned} \partial S &= 2 \pi N \cos \varphi \cdot M \partial\varphi = \frac{2 \pi a^2 (1 - e^2) \partial(\sin \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \\ &= 2 \pi a^2 (1 - e^2) (1 + 2 e^2 \sin^2 \varphi + 3 e^4 \sin^4 \varphi + \dots) \partial(\sin \varphi); \end{aligned}$$

па је стога

$$S = 2 \pi a^2 (1 - e^2) (1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^4 \varphi + \dots) \sin \varphi$$

Цела пак површина Σ елипсоида изразиће се овако:

$$\Sigma = 4 \pi a^2 (1 - e^2) (1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \dots) = 4 \pi a^2 (1 - \frac{e^2}{1.3} - \frac{e^4}{3.5} - \dots).$$

Узмимо сад, да паралели φ земног елипсоида одговара на сфери неког радиуса R' паралела са ширином ψ , т. ј. да елипсоидној зони S одговара сферна зона $S' = 2 \pi R' \sin \psi$, а да целој површини елипсоида Σ одговара цела површина сфере $\Sigma' = 4 \pi R'^2$. Услов ће се еквивалентности онда испунити, ако однос S' према Σ' буде увек једнак са односом S према Σ , а то доводи до овакве неопходне зависности ψ од φ :

$$\sin \psi = \frac{1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^4 \varphi + \dots}{1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \dots} \sin \varphi.$$

Ако пак при том учинимо, да буде $\Sigma' = \Sigma$, т. ј. да буде

$$R'^2 = a^2 (1 - \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{15} e^4 - \dots),$$

то ће све површине на сфери бити једнаке са њима одговарајућим површинама на елипсоиду. Са истом ћемо пак тачности (само до првог степена спљоштности

$c = \frac{1}{2} e^2$), као и код конформне претставе имати просто:

$$\sin \psi = \sin \varphi - \frac{2}{3} e^2 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi = \sin \varphi - \frac{2}{3} c \sin 2\varphi \cdot \cos \varphi$$

или

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \varphi - \frac{2}{3} c \sin 2\varphi = \varphi - \frac{2}{3} (\varphi - \varphi') \\ R' &= a \left(1 - \frac{1}{3} c\right) = a \left(1 - \frac{1}{880}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e.)$$

Кад сравнимо лучне елементе паралела и меридијана: $A'' n'' = R' \cos \psi \, dl$ и $A'' m'' = R' \, d\psi$ те еквивалентне претставе са њима одговарајућим елементима елипсоида: $A' n' = N \cos \varphi \, dl$ и $A' m' = M \, d\varphi$, и кад напоменемо, да ће с тачношћу до првог степена спљоштености c бити:

$$\frac{M}{N} = 1 - 2c \cos^2 \varphi, \quad \cos \psi = \cos \varphi \left(1 + \frac{4}{3} c \sin^2 \varphi\right) \text{ и } d\psi = d\varphi \left(1 - \frac{4}{3} c \cdot \cos 2\varphi\right),$$

добићемо за однос размера n и m у еквивалентној претстави овакав израз:

$$\frac{n}{m} = \frac{M \cos \psi}{N \cos \varphi} : \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{(1 - 2c \cos^2 \varphi) \left(1 + \frac{4}{3} c \sin^2 \varphi\right)}{1 - \frac{4}{3} c \cdot \cos 2\varphi} = 1 - \frac{2}{3} c \cdot \cos^2 \varphi \dots (e'.)$$

То показује, да ће се бескрајно мали круг на елипсоиду претставити на сфери у облику елипсе са спљоштености $p = \frac{2}{3} c \cdot \cos^2 \varphi$ у правцу паралеле; највећа пак величина те спљоштености и њој одговарајућа највећа деформација η у углима [в. чл. 87. (а.)] биће:

$$p = \frac{2}{3} c = \frac{1}{440} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{p}{\sin 1'} = 7'.8.$$

Према томе у свему што буде следовало, ми ћемо имати посла са преносом на равнину сферне површине (конформно или еквивалентно), која замењује њој одговарајућу елипсоидну земну површину. Притом, ради веће простоте формула, сматраћемо радиус те сфере увек као јединицу и употребљаваћемо уместо ширина φ' и ψ поларна растојања Θ , не заборављајући, да у случају примене какве конформне пројекције на земну површину треба сматрати дужу полуосу земног елипсоида a за јединицу и

$$\Theta = 90^\circ - \varphi' = (90^\circ - \varphi) + (\varphi - \varphi');$$

у случају еквивалентних пројекција треба сматрати за јединицу $a \left(1 - \frac{1}{880}\right)$ и

$$\Theta = 90^\circ - \psi = (90^\circ - \varphi) + \frac{2}{3} (\varphi - \varphi');$$

у случају пак какве произвољне пројекције, интервалне по својим особинама између конформне и еквивалентне, могу се узимати и за радиус сфере и за Θ какве интервалне величине међу напред реченим*).

*) Промене размере m или пак односа $\frac{n}{m}$ код равних пројекција такве су величине у сравњењу са њиховим променама (d') и (e') на самој помоћној сфери, да се ове последње могу и не узимати у обзир при изучавању карактеристичких особина разних пројекција.

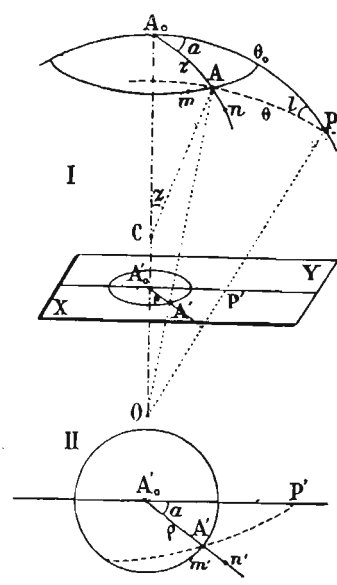
Што се тиче малих поправака ширина ($\varphi - \varphi'$), те тачне њихове величине, — које одговарају спљоштености земног елипсоида $c = \frac{1}{293.5}$ (по Кларку), — дајемо у овој табlici:

φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$
0° 0' 0".0		15° 5' 51".0		30° 10' 8".6		45° 11' 44".0		60° 10' 10".7		75° 5' 53".0	
1 0 24.5		16 6 12.0		31 10 20.6		46 11 43.6		61 9 58.1		76 5 31.5	
2 0 48.9		17 6 32.6		32 10 31.8		47 11 42.4		62 9 44.7		77 5 9.5	
3 1 13.3		18 6 52.7		33 10 42.2		48 11 40.4		63 9 30.7		78 4 47.2	
4 1 37.6		19 7 12.3		34 10 51.9		49 11 37.5		64 9 15.9		79 4 24.5	
5 2 1.8		20 7 31.4		35 11 0.7		50 11 33.7		65 9 0.5		80 4 1.5	
6 2 25.9		21 7 49.9		36 11 8.8		51 11 29.1		66 8 44.4		81 3 38.2	
7 2 49.8		22 8 7.8		37 11 16.1		52 11 23.6		67 8 27.6		82 3 14.7	
8 3 13.4		23 8 25.2		38 11 22.5		53 11 17.3		68 8 10.2		83 2 50.9	
9 3 36.8		24 8 42.0		39 11 28.1		54 11 10.2		69 7 52.2		84 2 26.9	
10 4 0.0		25 8 58.1		40 11 32.9		55 11 2.3		70 7 33.7		85 2 2.7	
11 4 22.9		26 9 13.6		41 11 36.8		56 10 53.6		71 7 14.6		86 1 38.3	
12 4 45.5		27 9 28.4		42 11 39.9		57 10 44.0		72 6 54.9		87 1 13.8	
13 5 7.7		28 9 42.5		43 11 42.1		58 10 33.7		73 6 34.8		88 0 49.3	
14 5 29.5		29 9 55.9		44 11 43.5		59 10 22.6		74 6 14.1		89 0 24.6	
15 5 51.0		30 10 8.6		45 11 44.0		60 10 10.7		75 5 53.0		90 0 0.0	

90. Одељак зенитних пројекција.

Положај сваке тачке A на сфери у односу према ма којој централној тачци A_0 може се одредити помоћу зенитног растојања њеног $ASA_0 = z$ и азимута $\sphericalangle PA_0A = a$ (сл. 72. I) сасвим онако, као и у односу према полу P помоћу поларног њеног растојања θ и г. дужине l . Стога уместо да се меридијани и паралеле претстављају на равнини најпростијим линијама, могу се истим тим линијама да претстављају вертикални кругови AA_0 , који полазе из A_0 под разним азимутима a . Мали кругови сфере разних растојања z , зову се *алмуканшараши*.

Најприродније и најпростије је, разуме се, да се састави таква пројекција, на којој би деформације у контурама и промене размере биле савршено једнаке у свима правцима од централне тачке A_0 површине која се претставља. Сваки ће се вертикал $A_0 A$ претставити тада као права $A'_0 A'$ (сл. 72. II), која заклапа са тако исто праволиниским меридијаном $A'_0 P'$ угао $P'A'_0 A'$, који је једнак са истинитим азимутом $\sphericalangle PA_0 A = a$, а сваки алмукантарат z представиће се као круг, описани из A'_0 неким радиусом



Сл. 72.

$A'_0 A' = \rho$; при чему сама зависност ρ од z може бити одређена тако, да би пројекција задовољавала или услов конформности, или еквивалентности, или пак какав други. Све такве пројекције добивају општи назив *зенишних пројекција*.

Меридијани и паралеле сфере представљају се на зенитним пројекцијама у облику различитих кривих линија, према облику функције $\rho = f(z)$, и свакад могу бити нацртане по тачкама на овај начин: Кад означимо поларна растојања централне тачке A_0 и какве друге A са Θ_0 и Θ , а г. дужину тачке A од меридијана PA_0 са l , имаћемо из сферног троугла PA_0A

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \cos \Theta_0 \cos \Theta + \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos l \\ \sin z \sin a &= \sin \Theta \sin l \\ \sin z \cos a &= \sin \Theta_0 \cos \Theta - \cos \Theta_0 \sin \Theta \cos l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (f.)$$

Кад срачунамо по тим формулама (или пак и друкчије) низ величина a_1, a_2, a_3, \dots и z_1, z_2, z_3, \dots за неку одређену г. дужину l' и за паралеле $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$ на једнаком растојању једна од друге, конструисаћемо на пројекцији по координатама a_1, a_2, a_3, \dots и $\rho_1 = f(z_1), \rho_2 = f(z_2), \dots$ низ тачака криве, која претставља меридијан географ. дужине l' . Кад се то исто уради за разне г. дужине l', l'', l''', \dots , које подједнако одстоје једна од друге, добићемо на пројекцији целу систему меридијана; кад пак спојимо кривим линијама оне њихове тачке, које одговарају истим поларним растојањима $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$, добићемо онда и систему паралела.

Посебни облик зенитних пројекција претстављају *перспективне пројекције*, које се добивају, кад се гледа на површину сфере из тачке O (сл. 72. I), која је узета гдегод на вертикалној линији $A_0 CO$, па се сви зраци OA_0, OP, OA , и т. д. пројектују на какву равнину XY , која је перпендикуларна на централни зрак OCA_0 . Та се равнина зове *пројекциона равнина*. Очевидно је, да ће се сви вертикали сфере $A_0 A$ претставити на њој у облику правих линија $A'_0 A'$, које полазе из тачке A_0 под азимутима a ; сви пак алмукантарати претставиће се у облику концентричних кругова разних радиуса ρ , који зависе од положаја тачке гледања O .

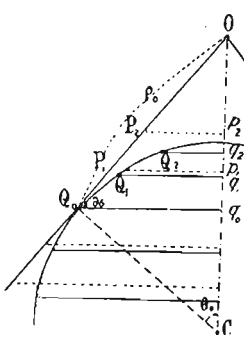


ГЛАВА XII.

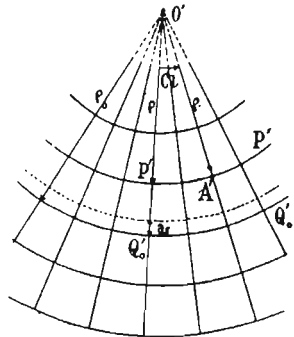
ПРОЈЕКЦИЈЕ СА ПРАВОЛИНИСКИМ И КРУЖНИМ ПАРАЛЕЛАМА.

91. Цилиндричне и коничне пројекције.

Веома уску зону сфере, која прилеже уз какву паралелу Q_0 са поларним растојањем θ_0 , можемо развити на равнину без икаквих деформација, исто онако као и у случају, кад би она састављала део површине конуса OQ_0 (сл. 73. а.), који тангира ту паралелу Q_0 . Та паралела претставиће се у облику кружног лука $Q'_0Q'_0$ радиуса $O'Q'_0 = OQ_0 = \rho_0 = tg \theta_0$ (сл. 73. б.); свака друга паралела, на растојању од ње за врло мали лук ds , претставиће се у облику концентричног са њом круга радиуса $\rho_0 \mp ds$; сви пак меридијани сфере претставиће се у облику правих $O'Q'_0, O'A', \dots$, које полазе из општега центра O' под углима $Q'_0O'A' = Cl$, који су пропорционални са географ. дужинама l .



Сл. 73. а.

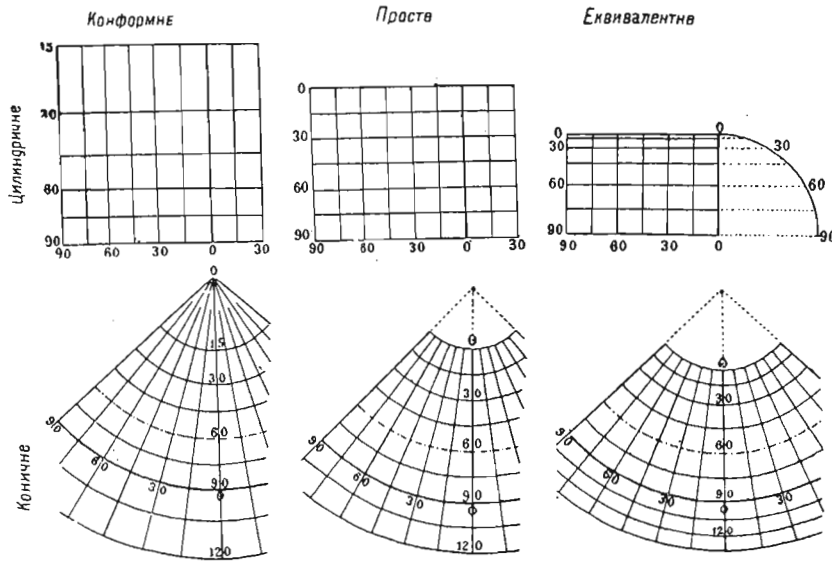


Сл. 73. б.

Ако се оваква конструкција прошири и на дужи меридијанске лукове $s = \theta_0 - \theta$, претстављајући сваку паралелу θ у облику круга радиуса $OP' = \rho = \rho_0 - (\theta_0 - \theta)$, то ће се добити тако звана *просна конична пројекција* (Птоломејева), која је доста zgodna за претставу сферне зоне незнатне ширине. Али, ако на конусовој изводници OQ_0 пренесемо лин. дужине Q_0P_1, Q_0P_2, \dots једнаке са меридијанским луцима Q_0Q_1, Q_0Q_2, \dots , увидећемо, да ће се при једној и истој разлици географ. дужина l луци разних паралела на тој пројекцији смањивати пропорционално са радиусима OQ_0, OP_1, OP_2, \dots , или, што је исто, пропорционално са дужинама перпендикулара $Q_0q_0, P_1p_1, P_2p_2, \dots$; међутим одговарајући луци паралела сфере смањиваће се знатно брже, а наиме пропорционално са радисима $Q_0q_0, Q_1q_1, Q_2q_2, \dots$. Слично ће се десити и с друге стране од средње паралеле Q_0 . Према томе на простој коничној пројекцији размера m сачувана је као стална правцем меридијанâ, размера пак n правцем паралела све се више и више увећава са удаљењем од средње паралеле.

Али се може наћи и таква функција за радиусе паралелâ $\rho = f(\theta)$, при којој би на простору ма како широке зоне био испуњен услов конформности или пак еквивалентности претстава: у првом случају ($m = n$) требало би, оче-

видно, све више и више размицати паралеле са њиховим удаљењем у једну или другу страну од средње; у другом пак случају ($m n = Q$) требало би их, напротив, све више и више зближавати. Ради прегледа, на сл. 74. претстављене



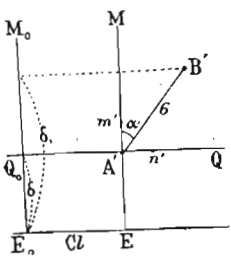
Сл. 74.

су такве *конишне пројекције*, као и *цилиндричне*, као посебни њихов случај, када се врх O тангирајућег конуса налази на бескрајном удаљењу, те се круг екуатора и кругови паралела претварају у међусобно паралелене праве.

Ако се, најзад, уобрази, да основни конус или цилиндар не тангира сферу већ да је пресеца по каквим два паралелама, то ће се напред речене конишне и цилиндричне пројекције изменити, и тада ће код њих остати опште само једно: паралеле ће се претставити као *конценшрични кругови* или као *међусобно паралелне праве линије* а меридијани као *праве, перпендикуларне* на њих. Ламберт је био први (1772. г.), који је темељно изучио најважније од тих пројекција, како конформне тако и еквивалентне; али је од њих конформна цилиндрична била и раније позната и звала се Меркаторова пројекција по имену својега проналазача. Конформна пак конишна зове се Гаусова пројекција, ма да ју је он добио знатно позније из своје *опште теорије конформних прешшпава*.

92. Меркаторова пројекција.

Кад поставимо услов, да на пројекцији буду претстаљене све паралеле сфере као праве E_0E, Q_0Q, \dots , а сви меридијани као праве E_0M_0, EM (сл. 75.), перпендикуларне на прве и на растојањима Cl од почетног меридјана E_0M_0 пропорционално геогр. дужинама l , — означимо са δ растојање праве Q_0Q , — која претставља паралелу Θ , — од екуатора E_0E и одредимо облик функције $\delta = f(\Theta)$ тако, да пројекција изађе конформна.



Сл. 75.

Пошто ће у том случају бескрајно малим луцима меридијана и паралела сфере $Am = d\Theta$ и $An = dl \cdot \sin \Theta$ одговарати на пројекцији елементи $A'm' = -d\delta$ и $A'n' = Cdl$, то ће бити

$$m = \frac{A'm'}{Am} = -\frac{\partial \delta}{\partial \Theta}, \quad n = \frac{A'n'}{An} = \frac{C}{\sin \Theta};$$

стога је за испуњење конформности потребно да буде

$$\partial\delta = -C \frac{\partial\Theta}{\sin \Theta^2}$$

т. ј.

$$\delta = -C \int_{90^\circ}^{\Theta} \frac{\partial\Theta}{\sin \Theta} = C \lg \cotg \frac{\Theta}{2} = \frac{C}{0.4343} Lg \cotg \frac{\Theta}{2}, \dots \dots (g.)$$

где знак *Lg* означава обични логаритам. Константна пак величина *C* може бити изражена овде у ма каквим јединицама, јер се њоме одређује само општа размера карте; што се пак тиче односа размере *m* на каквој паралели Θ према размери m_0 на екватору, он ће се изразити овако*):

$$\frac{m}{m_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{1}{\sin \Theta} \dots \dots \dots (g'.)$$

Свакој правој линији *A'B'*, која је повучена на оваквој пројекцији под углом α према правим *EM* (сл. 75.), треба да одговара на сфери, па према томе и на елипсоиду, крива, која пресеца све земне меридијане под тим истим углом α . Она се зове *локсодромска линија* и њоме се у навигацији одређује пут брода, који се држи по компасу у непроменљивом азимуту α . Услед тога се та пројекција (коју је још у XVI веку предложио Меркатор) и употребљује увек за поморске карте; пошто је пак 1 морска миља (у којој се изражавају растојања на мору) равна 1' екваторског лука или $\frac{a}{3438}$ то ће се константна *C* претворити тада у број 3438' а формула (g.) у ову

$$\delta = 7915'.7 Lg \cotg \frac{\Theta}{2}.$$

Кад ставимо у тој формули вредности Θ за земни елипсоид (чл. 89.), добићемо овакве бројне вредности величине δ за разне географске ширине φ :

φ	δ	разм.	$\frac{m}{m_0}$
0°	0° 0'.0		1.000
10	9 59.1	9° 59'.1	1.015
20	20 17.1	10 18.0	1.065
30	31 16.7	10 59.6	1.156
40	43 27.7	12 11.0	1.307
50	57 36.5	14 8.8	1.559
60	75 7.2	17 30.7	2.005
70	99 4.2	23 57.0	2.933
80	139 12.7	40 8.5	5.778
90	∞	∞	∞

*) У односу не на помоћну сферу већ на сам земни елипсоид размера ће *m* на основу (*d'*) (чл. 89.) бити

$$m = \frac{C}{\sin \Theta} \left(1 + \frac{1}{294} \cos^2 \Theta\right).$$

Кад уобразимо на сфери међу тачкама А и В са поларним растојањима Θ и Θ_1 и са геогр. дужинама l и l_1 локсодромску линију па са σ означимо њену лин. дужину АВ а са α њен азимут, рачунат са севера на исток, имаћемо:

$$d\sigma \cdot \cos \alpha = -d\Theta \text{ па је према томе } \sigma = \frac{\Theta - \Theta_1}{\cos \alpha},$$

на Меркаторовој пак пројекцији, ако означимо дужину одговарајуће праве А'В' са σ' (сл. 75.), изаћи ће:

$$\operatorname{tg} \alpha = C \frac{l_1 - l}{\delta_1 - \delta}, \quad \sigma' = \frac{\delta_1 - \delta}{\cos \alpha}, \quad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\Theta - \Theta_1}{\delta_1 - \delta} \dots \dots \dots (h.)$$

Ове три формуле и служе за решавање (најчешће графичким путем на самој карти) основних задаћа навигације: 1.) одредити α и σ по даним Θ , Θ_1 и $(l_1 - l)$ и 2.) одредити Θ_1 и $(l_1 - l)$ по даним Θ , α и σ

Напоменућемо још, да локсодромија σ може знатно да надмаши најкраће растојање међу тачкама А и В, које је једнако са луком великог круга сфере АВ = s . Та разлика $\sigma - s$ постаје наиме највећом при $\Theta_1 = \Theta$, тј. када се сама локсодромија претвара у паралелу Θ ; тада излази, да је

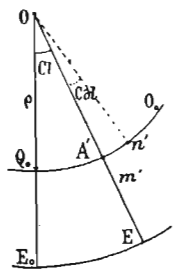
$$\sigma = (l_1 - l) \sin \Theta, \quad \sin \frac{s}{2} = \sin \frac{l_1 - l}{2} \sin \Theta.$$

Например, при $\Theta = 45^\circ$ и $(l_1 - l) = 90^\circ$ добиће се:

$$\sigma = \frac{90^\circ}{\sqrt{2}} = 63^\circ 8', \quad s = 60^\circ, \quad \sigma - s = 3^\circ 8' = 228 \text{ миља.}$$

93. Гаусова пројекција.

Поставићемо сад услов, да се мередијани помоћне сфере претстављају као праве ОЕ₀, ОЕ (сл. 76.), које полазе из једне и исте тачке О под углима ЕОЕ₀ = $C\theta$, пропорционалним са геогр. дужинама l , а свака паралела Θ као круг Q₀Q, описани из исте тачке О неким радиусом OQ₀ = ρ , па одредимо зависност $\rho = f(\Theta)$ тако, да би пројекција излазила конформна.



Сл. 76.

Елементи лукова меридијана и паралела у ма којој тачци пројекције А' биће у том случају $A'm' = d\rho$ и $A'n' = \rho \cdot C d\theta$; стога ће се за размере m и n добити овакви изрази:

$$m = \frac{A'm'}{Am} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad n = \frac{A'n'}{An} = \frac{C\rho}{\sin \Theta},$$

а услов $m = n$ даће:

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \frac{d\Theta}{\sin \Theta}, \quad \operatorname{lg} \frac{\rho}{k} = C \operatorname{lg} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \text{ и } \rho = k \operatorname{tg}^C \frac{\Theta}{2} \dots \dots \dots (i.)$$

Константна k , која ту улази, означава на пројекцији радиус круга, који одговара екватору, и, она другог стварног значаја и нема сем тога, што се њоме одређује општа размера карте. Од друге пак произвољне константне C зависиће

променљивост размере на разним паралелама

$$m = n = \frac{C \rho}{\sin \Theta}, \quad \dots \dots \dots (i')$$

при чему се најмања њена валичина добива за ону паралелу Θ_0 за коју излази*):

$$\frac{\partial \lg m}{\partial \Theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} - \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} = \frac{C - \cos \Theta}{\sin \Theta} = 0;$$

одакле је

$$C = \cos \Theta_0 \quad \dots \dots \dots (i'')$$

Услов, да најмања размера буде баш на даној паралели Θ_0 и може да послужи за одредбу C . Понекад пак C одређују тако, да на два даним паралелама Θ_1 и Θ_2 (на пример на онима које ограничавају просторију, која се претставља) размере m_1 и m_2 изађу једнаке**); тада излази

$$\frac{\lg \frac{C \Theta_1}{\sin \Theta_1}}{\frac{C \Theta_1}{\sin \Theta_1}} = \frac{\lg \frac{C \Theta_2}{\sin \Theta_2}}{\frac{C \Theta_2}{\sin \Theta_2}}, \quad \text{одакле } C = \frac{\lg \sin \Theta_2 - \lg \sin \Theta_1}{\lg \frac{\Theta_2}{\sin \Theta_2} - \lg \frac{\Theta_1}{\sin \Theta_1}} \quad \dots \dots \dots (i''')$$

Таква је Ламберт-Гаусова пројекција, изванредно погодна за претставу држава развучених у правцу земних паралела, као што је на пример сва Русија. Познате и распрострањене рус. карте Европске Русије у размери $\frac{1}{420.000}$, $\frac{1}{1.050.000}$ и $\frac{1}{1.680.000}$ (10, 25 и 40 врста у 1 енгл. палцу) израђене су такође у тој пројекцији. Код свију њих та *главна размера* одговара паралелама $\varphi_1 = 59^\circ$ и $\varphi_2 = 45^\circ$; компаративно с тиме на средњој се паралели $\varphi_0 = 52^\circ$ добива најмања размера **0.994**, на крајњој северној паралели ($\varphi_n = 68^\circ$) размера $m_n = \mathbf{1.041}$ а на крајњој јужној ($\varphi_s = 36^\circ$) размера $m_s = \mathbf{1.031}$.

94. Ламбертова и Алберсова еквивалентна пројекција.

Ако се при истом праволиниском облику паралела и меридијана и при истим ознакама као и код Меркаторове пројекције (чл. 92.) постави услов, да је на свима тачкама карте производ размера m и n једнак са константном величином $Q = k C$, то ће изаћи:

$$mn = - \frac{C}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Theta} = k C, \quad \text{одакле је } \delta = k \cos \Theta; \quad \dots \dots \dots (j)$$

*) У односу према земном елипсоиду општи ће израз за размеру m на основу (d') (чл. 89.) бити овакав:

$$m = \frac{C \rho}{\sin \Theta} (1 + c \cdot \cos^2 \Theta);$$

па је стога

$$\frac{\partial \lg m}{\partial \Theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} - \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} - 2c \cos \Theta \sin \Theta = \frac{C - \sin \varphi' - (\varphi - \varphi') \cos \varphi'}{\cos \varphi'} = - \frac{C - \sin \varphi}{\cos \varphi'};$$

тј. најмања ће размера m бити наиме на паралели φ_0 , за коју је $\sin \varphi_0 = C$.

***) Исто се тако и у простој коничној пројекцији (чл. 91.) може учинити, да коефицијент C при l не буде једнак са $\frac{\sin \Theta_0}{\varphi_0} = \cos \Theta_0$, већ га одредити тако, да једнакост $m = n$ има места на два паралелама Θ_1 и Θ_2 (пројекција Делилова).

а однос $\frac{n}{m}$, којим се одређује деформација бескрајно малих фигура, биће овакав

$$\frac{n}{m} = \frac{C}{\sin \Theta} : - \frac{\partial \delta}{\partial \Theta} = \frac{C}{k \sin^2 \Theta} \dots \dots \dots (j')$$

Овде k изражава жељену размену карте; величина пак C , којом се може располагати произвољно, може бити одређена тако, да бескрајно мале фигуре изађу сличне са стварним ($\frac{n}{m} = 1$) на ма којој паралели Θ_0 . Тако се при $\Theta = 90^\circ$, добива Ламбертова еквивалентна цилиндрична пројекција, претстављена на сл. 74. при чему је на њој показан и построј растојања δ разних паралела, сагласно формули (j.).

Да би се добила еквивалентна пројекција, на којој би се паралеле претстављале у облику концентричних кругова Q_0Q разних радиуса ρ а меридијани у облику радиалних правих OE_0, OE (сл. 76.) под углима $C1$, као у Гаусовој пројекцији (чл. 93.), означимо константну величину $Q = mn$ са k^2C па ћемо тада имати:

$$mn = \frac{C \rho}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} = k^2C, \text{ одакле је } \rho = k \sqrt{2} \sqrt{d - \cos \Theta}; \dots (k)$$

при чему ће k зависити само од узете размере карте.

Што се тиче произвољне величине d , која је уведена интегрирањем, то њу можемо учинити једнаку са 1, да би при $\Theta = 0$ било и $\rho = 0$, тј. да би тачка O на пројекцији претстављала пол сфере P , у којој (O) се скупљају сви праволиниски меридијани. Тада ће се за ρ добити прост израз

$$\rho = 2k \sin \frac{\Theta}{2}, \dots \dots \dots (l)$$

који показује, да је *радиус сваке кружне паралеле на пројекцији пропорционалан у том случају са шезивом која спаја шачку на паралели сфере са полом P* . Размере пак m и n претставиће се у облику

$$m = \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} = k \cos \frac{\Theta}{2}, \quad n = \frac{C \rho}{\sin \Theta} = \frac{C k}{\cos \frac{\Theta}{2}}, \quad \frac{n}{m} = \frac{C}{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}; \dots (l')$$

па стога константна C може бити одређена тако, да m и n буду једнаке међу собом на ма којој паралели Θ_0 . Тај је облик пројекције и изучио Ламберт.

Али, имајући на расположењу у изразу (k.) величину d произвољно, може се много боље удесити пројекција за претставу какве просторије, удаљене од пола P , ако се учини, да се крајње величине односа $\frac{n}{m}$, — које одређују степен деформације претстава, — што је могућно мање разликују од 1. И заиста, изрази ће за m и n у том случају бити:

$$m = \frac{k \sin \Theta}{\sqrt{2} \sqrt{d - \cos \Theta}}, \quad n = \frac{Ck \sqrt{d - \cos \Theta}}{\sin \Theta} \cdot \sqrt{2}, \quad \frac{n}{m} = \frac{2C(d - \cos \Theta)}{\sin^2 \Theta}, \dots (k')$$

а најмања величина $\left(\frac{n}{m}\right)_0$ добиће се на паралели Θ_0 , за коју ће изаћи:

$$\frac{\partial\left(\frac{n}{m}\right)}{\partial\Theta} = 2C \cdot \frac{\sin^2\Theta - 2(d - \cos\Theta)\cos\Theta}{\sin^3\Theta} = 0, \text{ одакле } d - \cos\Theta_0 = \frac{\sin^2\Theta_0}{2\cos\Theta_0} (k'')$$

или
$$\left(\frac{n}{m}\right)_0 = \frac{C}{\cos\Theta_0} \dots \dots \dots (k''')$$

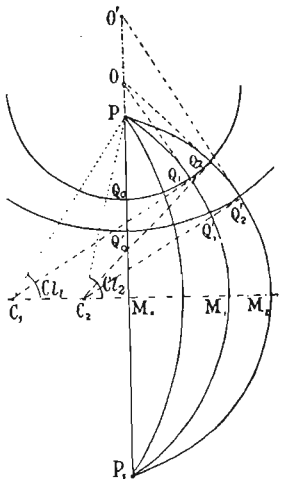
Према томе C и d се може одредити из тих једначина (k'') и (k''') тако, да дата најмања величина $\left(\frac{n}{m}\right)_0$ буде баш на даној паралели Θ_0 ; или пак из једначине (k') у комбинацији са овом

$$\frac{d - \cos\Theta_1}{\sin^2\Theta_1} = \frac{d - \cos\Theta_2}{\sin^2\Theta_2},$$

при чему се односи $\left(\frac{n}{m}\right)_1$ и $\left(\frac{n}{m}\right)_2$ на двама даним паралелама Θ_1 и Θ_2 могу учинити, да буду једнаки са 1. Ова еквивалентна пројекција, коју је предложио био Алберс, аналогична је са Гаусовом конформном пројекцијом. Облик је њен показан на сл. 74.

95. Пројекције са меридијанима у облику кругова.

Кад на пројекцији узмемо две тачке P и P_1 (сл. 77.) за полове а праву $PP_1 = 2h$ за средњи меридијан, од којег ће се рачунати географ. дужине l , — претставимо све остале сферне меридијане као кругове $PQ_1M_1P_1, PQ_2M_2P_1, \dots$, који са правом PP_1 на половима P и P_1 састављају угле Cl_1, Cl_2, \dots пропорционалне са геогр. дужинама l_1, l_2, \dots , тако да се центар C свакога од тих кругова налази на перпендикулару према линији PP_1 , — повученог кроз њену средину M_0 , — на растојању $M_0C = h \cotg Cl$. Кад повучемо затим из ма које тачке O , — узетој на продужењу линије PP_1 , — тангентне OQ_1, OQ_2, \dots на све те кругове, увидећемо, да ће дужине OQ_1, OQ_2, \dots , као средње пропорционалне међу OP и OP_1 , бити једнаке међу собом; стога ће све додирне тачке Q_1, Q_2, \dots припадати кругу $Q_0Q_1Q_2 \dots$, који је описан из центра O и који пресеца све кругове меридијанске системе под правим углима. На сличан се начин могу и из других тачака O', O'', \dots описати кругови, ортогонални у односу према меридијанским. Кад се узме та друга система кругова за сферне паралеле, може се наћи таква зависност растојања $OM_0 = d, O'M_0 = d'$ и т. д. од њима одговарајућих поларних растојања Θ, Θ' и т. д. те да се на свима тачкама карте сачува једнакост размера m и n .



Сл. 77.

Ако се узму узајамно перпендикуларне праве M_0P и M_0M_2 за осе координата X и Y , то ће се једначина круга, који претставља меридијан са географ. дужином l , претставити у облику

$$x^2 + (y + h \cotg Cl)^2 = h^2 \operatorname{cosec}^2 Cl \text{ или } x^2 + 2hy \cotg Cl + y^2 = h^2.$$

Кад пак означимо са $h \operatorname{tg} \delta$ радиус круга OQ , који одговара паралели Θ , имаћемо, да је $OM_0 = d = h \sec \delta$; стога ће једначина тога круга бити:

$$(h \sec \delta - x)^2 + y^2 = h^2 \operatorname{tg}^2 \delta \quad \text{или} \quad x^2 - 2hx \sec \delta + y^2 = -h^2.$$

Одатле ће се за координате x и y тачке Q , — која се налази на пресеку меридијана l са паралелом Θ , — добити овакви изрази:

$$x = \frac{h \cos \delta}{1 + \sin \delta \cdot \cos Cl}, \quad y = \frac{h \sin \delta \cdot \sin Cl}{1 + \sin \delta \cdot \cos Cl}.$$

Затим размера m , као однос бескрајно мале дужине меридијана на пројекцији према њему одговарајућем елементу $d\Theta$ на сфери, изразиће се овако:

$$m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \delta}\right)^2} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Theta} = \frac{y}{1 + \sin \delta \cos Cl} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Theta};$$

размера пак n , као однос бескрајно мале дужине паралеле према њој одговарајућем елементу $dl \cdot \sin \Theta$ на сфери, биће

$$n = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin \Theta} = \frac{h \sin \delta}{1 + \sin \delta \cdot \cos Cl} \cdot \frac{C}{\sin \Theta} \quad \dots \quad (m').$$

Према томе, да би се испунио услов конформности ($m = n$), неопходно је потребно, да буде

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Theta} = \frac{C \sin \delta}{\sin \Theta}, \quad \text{одакле је} \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \alpha \operatorname{tg} \frac{C \Theta}{2} \quad \dots \quad (m).$$

Из израза се (m') види, да размера $m = n$ излази најмања при $l = 0^\circ$, т.ј. на централном меридијану, а наиме на паралели Θ_0 , која се одређује из услова:

$$\frac{\partial \lg n}{h \partial \Theta} = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} - \frac{\cos \delta}{\sin \delta (1 + \sin \delta)} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Theta} = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} - \frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta} \cdot \frac{C}{\sin \Theta} = 0,$$

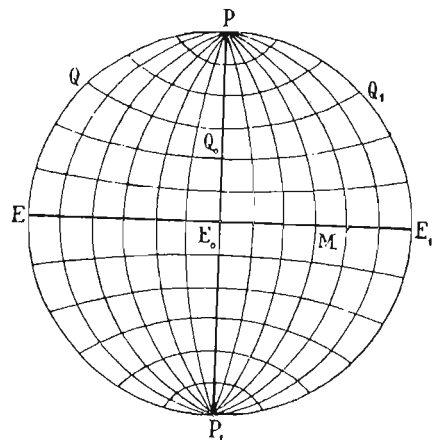
одакле је

$$\frac{\cos \Theta_0}{C} = \frac{\cos \delta_0}{1 + \sin \delta_0} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} = \frac{1 - \alpha \operatorname{tg} \frac{C \Theta_0}{2}}{1 + \alpha \operatorname{tg} \frac{C \Theta_0}{2}}.$$

Одатле константна величина α може бити одређена тако, да најмања величина размере буде баш у централној тачци просторије, која се претставља, ($\Theta = \Theta_0$ и $l = 0^\circ$). Притом, осим константне h , која зависи од опште размере карте, остаје још величина C , с којом располажући произвољно, можемо учинити, да промене размере правцем меридијана буду мање него ли правцем паралела, или пак обратно, према облику просторије, која се претставља.

Ова, изванредна пројекција, у сваком погледу, коју је предложио Лагранж, још није примењивана у картографији; само се *стереографска* пројекција (коју ћемо затим детаљније расматрати), као посебни њен случај при $C = 1$, често употребљује за претставу земних полукугли.

Од произвољних пројекција са кружним паралелама и меридијанима такође се често употребљује за претставу земних полукугли још и ова: Кад се у кругу PEP_1E_1 (сл. 78.) узму два узајамно перпендикуларна дијаметра PP_1 и EE_1 као централни меридијан и као екватор, онда се поделе како они, тако и сам круг на неколико равних делова; затим се кроз разне поделе M екватора, и кроз половине P и P_1 повуку кругови PMP_1 , који треба да претстављају меридијане на једнаком растојању по геогр. дужини на сфери; кроз разне пак поделе централнога меридијана Q_0 и кроз њима одговарајуће поделе круга Q и Q_1 повуку се кругови QQ_0Q_1 те да они претстављају паралеле на сфери на једнаком растојању по геогр. ширини.



Сл. 78.

96. Пројекције са меридијанима у облику разних кривих линија.

Пројекције са праволинимским или кружним паралелама и са меридијанима у облику ма каквих кривих линија изналажене су углавном с циљем, да се добију еквивалентне претставе целих земних полукугли или већих пространстава, која се знатно протежу у правцу меридијана, али да се притом добију по могућности што мање деформације.

Кад узмемо тачку P за пол а праву PP_1 за централни меридијан (сл. 79.), пренесимо у извесној размери дужине PQ, PQ', \dots , једнаке са луцима θ, θ', \dots меридијана сфере, па, кад узмемо праве $QQ_1, Q'Q'_1, \dots$, перпендикуларне на PP_1 , за паралеле, пренесимо на свакој од њих дужине

$$QA = y = l \sin \theta, \dots (n.)$$

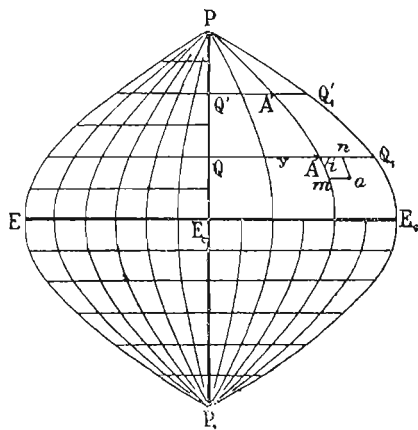
које одговарају разним геогр. дужинама l . Тада ће се меридијани сфере претставити у облику кривих $PA'AP_1$, које се одређују том једначином, т.ј. у облику *синусоида*. Ту је пројекцију предложио прво Сансон а после њега Флемстид. Она излази еквивалентна, зато што је површина $An \cdot Am \cdot \sin i$ свакога бескрајно малог њеног паралелограма $Aman$ једнака са површином њему одговарајућег правоугаоника на сфери: $\partial l \sin \theta \cdot \partial \theta$.

Деформације малих фигура, које се одређују углима $90^\circ - i$, изаћи ће, уопште говорећи, нешто мање, ако се меридијан PEP_1E_1 са геогр. дужином $l = \pm 90^\circ$ претстави у облику круга таквог радиуса $E_0P = E_0E_1$ (сл. 80.), да би површина његова $\pi (E_0P)^2$ била равна половини површине сфере, т.ј.

$$\pi (E_0P)^2 = 2\pi$$

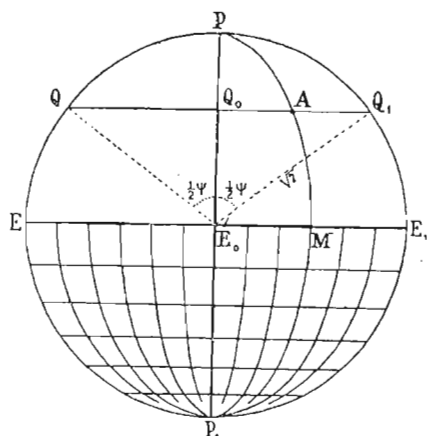
одакле је

$$E_0P = E_0E_1 = \sqrt{2},$$



Сл. 79.

па се повуку праволиниске паралеле θ тако, да би површина свакога кружног сегмента PQQ_1 излазила једнака са њој одговарајућом површином сферног полусегмента: $\pi (1 - \cos \theta) = 2\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Кад означимо угао QE_0Q_1 са ψ , имаћемо тада:



Сл. 80.

$$PQQ_1 = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \psi - 2 \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} = 2\pi \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

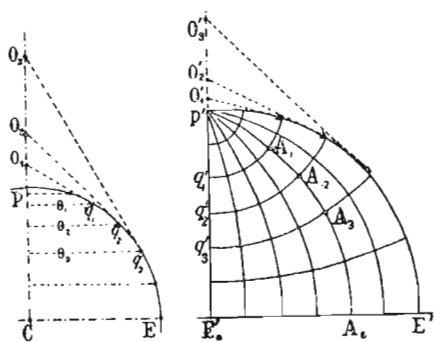
стога ће се угао ψ , који одређује тражену тетиву QQ_1 , наћи из једначине

$$\psi - \sin \psi = 2\pi \sin^2 \frac{\theta}{2} \dots (o)$$

на сличан начин, као што се из познате Кеплерове једначине изналази ексцентрична аномалија по даној средњој (в. теор. део курса астрономије). Кад поделимо све такве тетиве QQ_1 на подједнак број једнаких делова и кад спојимо тачке, А, М и ост., које одговарају истим геогр. дужинама l , непрекидним кривим линијама $РАМР_1$, добићемо Молвејде-Бабине-ову еквивалентну пројекцију са системом меридијана, који ће, очевидно, бити елипсе.

За еквивалентну претставу какве посебне државе, много је боље претставити земне паралеле не у облику правих линија, већ у облику концентричних кругова, као код просте коничне пројекције (чл. 91.) па на свакој од њих пренети од средњег праволиниског меридијана истините лукове земних паралела, као код Сансонове пројекције. Такву је пројекцију предложио у Француској Бон, и она је доста распрострањена те ћемо је одмах размотрити детаљније.

Американски пак и енглески картографи претпостављају понекада да претстављају подједнако удаљене сферне паралеле $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ круговима $q'_1 A_1, q'_2 A_2, q'_3 A_3, \dots$ (сл. 81.), описаним из разних центара O'_1, O'_2, O'_3, \dots радиусима $O'_1 q'_1, O'_2 q'_2, O'_3 q'_3, \dots$ једнаким са изводницама $O_1 q_1, O_2 q_2, O_3 q_3, \dots$ оних конуса, који тангирају сферу на одговарајућим паралелама $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$. Кад се затим пренесу од средњег праволиниског меридијана $P'E_0$ луци $q'_1 A_1, q'_2 A_2, \dots$, једнаки са луцима паралела сфере $l \sin \theta_1, l \sin \theta_2, \dots$ и саставе тачке A_1, A_2, \dots непрекидном кривом или

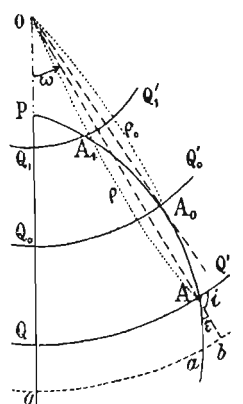


Сл. 81.

пак, кад се повуку меридијанске криве $РА_1 A_2 A_3 \dots$ тако, да се све оне пресеку са напред реченом системом кругова паралела под правим углима, тада се добија такозвана *поликонична пројекција*: *проспа и оршогонална*, које немају никаквих нарочитих преимућстава пред осталим произвољним пројекцијама.

97. Бонова пројекција.

На Боновој пројекцији, као и на простој коничној, све се паралеле Θ претстављају у облику кругова QQ' (сл. 82.), чији се радиуси $OQ = OQ' = \rho$ разликују од радиуса $OQ_0 = OQ'_0 = \rho_0 = tg \Theta_0$ средње паралеле Θ_0 за величину лука $s = \Theta - \Theta_0$; али се на свакоме од тих кругова преносе од тачке Q средњег меридијана OQ_0Q лин. дужине $QA = l \sin \Theta$, једнаке са луцима те исте паралеле на сфери, са углима, који им при центру O одговарају:



Сл. 82.

$$\sphericalangle QOA = \omega = \frac{QA}{OQ} = l \frac{\sin \Theta}{\rho} \quad \dots \quad (p.)$$

Добивене на тај начин тачке A, A_0, A_1, \dots на разним паралелама и одређују на карти криволиниски меридијан географ. дужине l .

Да бисмо изближе размотрили облик криве AA_0A_1, \dots , одредићемо угао $aAb = \epsilon$, који заклапа бескрајно мали њен елемент Aa са радиус-вектором OAb . Пошто се тачка a налази на кругу qab радиуса $Ob = OA + Ab = \rho + \partial\theta$, то је

$$qb = QA \cdot \frac{\rho + \partial\theta}{\rho} = l \sin \Theta + l \frac{\sin \Theta}{\rho} \cdot \partial\theta;$$

по услову пак конструисања је

$$qa = l \sin (\Theta + \partial\theta) = l \sin \Theta + l \cos \Theta \cdot \partial\theta;$$

према томе је

$$tg \epsilon = \frac{ab}{AB} = \frac{qb - qa}{\partial\theta} = l \left(\frac{\sin \Theta}{\rho} - \cos \Theta \right) \quad \dots \quad (p')$$

То показује, да сви меридијани на пројекцији (са изузетком само средњег) пресецају под правим углом једино средњу паралелу Θ_0 , за коју је $\rho_0 = tg \Theta_0$. Са удаљењем пак од ње, како у једну, тако и у другу страну, угао се ϵ све више и више увеличава. То ће се простије показати, ако се ограничимо приближним његовим изразом за сразмерно мала растојања $s = \Theta - \Theta_0$, тако, да би се, — занемарујући s^3 и више степене од s , — могло узети, да је $\cos s = 1 - \frac{1}{2} s^2$ и $\sin s = s$. Тада ће бити:

$$\frac{\sin \Theta}{\rho} = \frac{\sin (\Theta_0 + s)}{\rho_0 + s} = \frac{\sin \Theta_0 (1 + s \cotg \Theta_0 - \frac{1}{2} s^2)}{tg \Theta_0 (1 + s \cotg \Theta_0)} = \cos \Theta_0 - \frac{s^2}{2} \cos \Theta_0$$

$$\cos \Theta = \cos \Theta_0 - s \sin \Theta_0 - \frac{s^2}{2} \cos \Theta_0$$

па према томе

$$tg \epsilon = \epsilon = s \cdot l \sin \Theta_0 \quad \dots \quad (p'')$$

чиме се и доказује напред речено.

Даље, кад означимо као и у чл. 87. размере лин. дужина на пројекцији у правцу меридијана и паралела са μ и ν , имаћемо са потпуном тачности:

$$\mu = \frac{Aa}{Ab} = \frac{1}{\cos \epsilon}, \quad \nu = 1 \quad \text{и} \quad \mu\nu \sin i = \mu\nu \cos \epsilon = 1,$$

што показује, да је Бонова пројекција *еквивалентна*. Кад угли ϵ нису тако велики, може се сматрати, да је размера μ скоро једнака са размером ν ; стога ће угао ϵ и претстављати максималну деформацију на свакој њеној тачци, одређеној координатама s и l . Највећа пак и најмања размера m и n на тој тачци, који се одређују (на основу изложенога у чл. 87.) једначинама:

$$mn = \mu\nu \sin i = 1 \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} = \operatorname{tg} \frac{i}{2} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\epsilon}{2} \right) = \frac{1 + \frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{\epsilon}{2}} = 1 + \epsilon,$$

биће овакви:

$$m = 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{и} \quad n = 1 - \frac{\epsilon}{2} \dots \dots \dots (p''')$$

Из приближне једнакости μ и ν излази још, да те максималне деформације треба да буду наине у азимутима:

$$\frac{i}{2} = 45^\circ + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{и} \quad \frac{i}{2} + 90^\circ = 135^\circ + \frac{\epsilon}{2}.$$

У тој је пројекцији конструисана *топографска карта Европске Русије* размере 1:126 000 (3 врсте у 1 енгл. палцу). На крајњим њеним углима, удаљеним за $\pm 12^\circ$ по геогр. ширини од средње паралеле $\Theta = 35^\circ$ ($\sin \Theta_0 = 0.57$) и за $\pm 20^\circ$ по геогр. дужини од централног меридијана, добива се по формулама (p'') и (p'''):

$$\epsilon = \pm \frac{12}{57} \times \frac{20}{57} \times 0.57 \quad \text{или} \quad \epsilon^\circ = \pm 2.4;$$

$$m = 1 + \frac{1.2}{57} = 1 + \frac{1}{48} \quad \text{и} \quad n = 1 - \frac{1}{48}.$$

За мању пак државу, као што је на пример Француска, при $\Theta_0 = 47^\circ$ и при удаљењу крајњих угловних тачака од централне $s = \pm 3^\circ$ и $l = \pm 6^\circ$, деформације излазе једва осетне, а наине:

$$\epsilon^\circ = \pm \frac{3 \times 6}{57} \times 0.73 = 0.23;$$

$$m = 1 + \frac{1}{500} \quad \text{и} \quad n = 1 - \frac{1}{500}.$$



ГЛАВА XIII.

ЗЕНИТНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ.

98. Конформна (стереографска) пројекција.

На свакој ће се зенитној пројекцији вертикали, који полазе из централне тачке A_0 сфере под разним азимутима α , претставити (као што је већ било речено у чл. 90.) у облику радиалних правих A'_0A' с тим истим азимутима α (сл. 72.) а улмукантарати z у облику концентричних кругова радиусâ $A'_0A' = \rho = f(z)$. Стога су највеће и најмање размере у свакој тачци такве пројекције увек упућени: једна m у правцу вертикала $A'A'_0$ а друга n у правцу алмукантарата, те се изражавају наине овако:

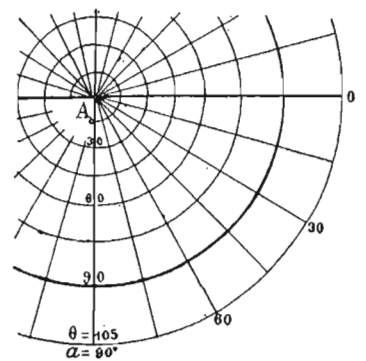
$$m = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad n = \frac{\rho \cdot \partial \alpha}{\sin z \cdot \partial \alpha} = \frac{\rho}{\sin z}.$$

Према томе, да би зенитна пројекција била конформна ($m = n$), треба да буде:

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial z}{\sin z}, \quad \text{т.ј. } \rho = 2k \operatorname{tg} \frac{z}{2}; \quad \dots \quad (q.)$$

при чему ће константна произвољна величина $2k$ претстављати радиус круга, који одговара алмукантарату $z = 90^\circ$. Размера пак $m = n$, која све више и више расте са удаљењем од централне тачке карте, претставиће се у облику

$$m = \frac{k}{\cos^2 \frac{z}{2}}; \quad \dots \quad (q')$$



Сл. 83.

тако, да ће при $z = 90^\circ$ постати двапут већа него у централној тачци (сл. 83.).

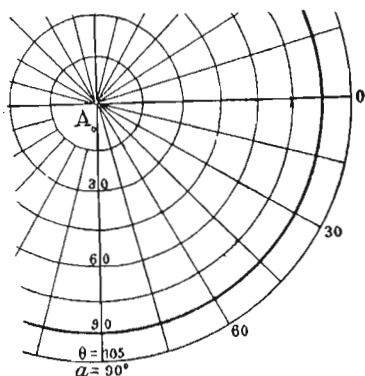
Као што ћемо даље видети, та пројекција припада перспективним пројекцијама, те, осим конформности, она има још и ту значајну особину, што сви могући кругови на сфери, како велики, тако и мали, излале на њој такође као кругови. Она се зове *стереографска пројекција*.

99. Еквивалентна (Ламбертова) пројекција.

Да би зенитна пројекција била еквивалентна, треба да се испуни услов:

$$mn = \frac{\rho}{\sin z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = k^2, \quad \text{одакле} \quad \frac{\rho^2}{2} = k^2 (d - \cos z);$$

пошто пак константна величина d треба да буде једнака са 1, да би при $z = 0$ било и $\rho = 0$, то излази просто:



Сл. 84.

$$\rho = 2k \sin \frac{z}{2} \quad \dots \quad (r.)$$

На тај начин на тој пројекцији, коју је први пут дао Ламберт, радиуси конценшричних кругова ρ пропорционални су са шезивама AA_0 , које затежу лукове сфере $AA_0 = z$ (сл. 72. I), што, уосталом, проистиче директно и из тога, што површина таквога круга $\pi \rho^2$ треба да буде пропорционална са њој одговарајућом површином сферног елемента $2\pi (1 - \cos z) = 4\pi \sin^2 \frac{z}{2}$.

Деформације бескрајно малих фигура на тој пројекцији одређују се односом

$$\frac{n}{m} = \frac{\rho}{\sin z} : \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{k}{\cos \frac{z}{2}} : k \cos \frac{z}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{2}}, \quad \dots \quad (r')$$

који показује, да се бескрајно мали круг сфере, претставља у тачци A' пројекције као елипса, утолико спљоштенија у правцу ка централној тачци A'_0 , уколико A' даље отстоји од A'_0 ; тако да, на пример, при $z = 90^\circ$ излази, да је $\frac{n}{m} = 2$ (сл. 84.)

100. Произвољне зенитне пројекције.

За претставу на карти целе половине или и још већег дела сфере конформна зенитна пројекција излази незгодна у том смислу, што се размера и растојања међу алмукантаратима исувише увећавају на крајевима карте; на еквивалентним пак, обратно, на крајевима карте та се растојања исувише смањују и пропраћају сувише великим деформацијама контура малих фигура. Да би се по могућности измирило прво неудобство конформне пројекције, са другим — еквивалентне пројекције, често се прибегава построју произвољних зенитних пројекција са таквом зависности ρ од z , која би претстављала нешто средње међу

$$\rho = 2k \operatorname{tg} \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \rho = 2k \sin \frac{z}{2}$$

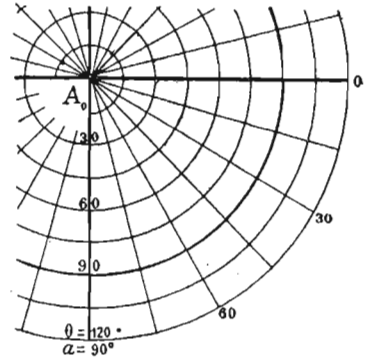
Најпростија од тих пројекција добива се, ако се допусти да буде

$$\rho = kz \quad \dots \quad (s.)$$

при чему ће изаћи

$$m = k, \quad n = \frac{kz}{\sin z} \quad \text{и} \quad \frac{n}{m} = \frac{z}{\sin z} \dots \dots \dots (s')$$

т.ј. сваки бескрајно мали круг сфере претвара се тада у елипсу са знатно мањом спљоштеношћу $\rho = \frac{n-m}{n}$ него на еквивалентној пројекцији, али зато са површином $mn = k^2 \frac{z}{\sin z}$, која расте са повећањем z у односу $\frac{z}{\sin z}$, тако да, на пример, при $z = 90^\circ$ излази $\frac{n}{m} = \frac{mn}{k^2} = 90^\circ \cdot \sin 1^\circ = 1.57$ (сл. 85).



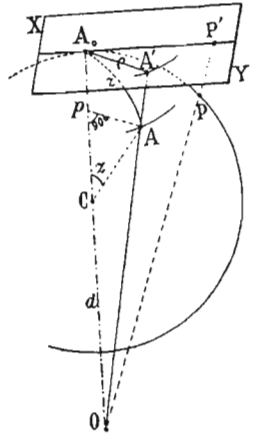
Сл. 85.

Како ова пројекција са алмуканшарашима на једнаком расшојању, тако и стереографска употребљују се, између осталог, за израду звезданих карата целих небесних полукугли.

101. Разни облици перспективних пројекција.

Обратимо се сад ономе делу зенитних пројекција, које се зову *перспективне* (чл. 90.) и које се добивају пројектовањем површине сфере зрацима посматрача из какве тачке O на *пројекциону равнину* XY (сл. 72. I), која је перпендикуларна на централни зрак OA_0 ; пошто ће од положаја те равнине зависити само апсолутна величина претставâ а не и њихов облик, то ћемо ради веће простоте претпоставити, да она тангира сферу у тачци A_0 (сл. 86.); тада ће размера претставâ у централној тачци пројекције A_0' бити једнака са 1.

Повуцимо зрак OA ка некој тачци A на сфери, која се одређује у односу према A_0 координатама $A_0A = z$ и $\sphericalangle PA_0A = a$, па га продужимо до продора кроз равнину XY у тачци A' . Кад уобразимо у равнини OA_0A перпендикулар $Ap = \sin z$ на централни зрак OA_0 и означимо растојање тачке посматрања O од центра сфере C са d , добићемо из правоуглих троуглова $OA'A_0$ и OAp ову пропорцију



Сл. 86.

$$\frac{A'A_0}{Ap} = \frac{OA_0}{Op} = \frac{d+1}{d+\cos z},$$

из које излази

$$\rho = (d+1) \frac{\sin z}{d+\cos z} \dots \dots \dots (l)$$

за размере пак m и n добиће се овакви изрази:

$$m = \frac{\partial \rho}{\partial z} = (d+1) \frac{d \cos z + 1}{(d+\cos z)^2}, \quad n = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{d+1}{d+\cos z} \dots \dots \dots (l')$$

У зависности од положаја тачке посматрања O добивају се разни облици перспективних пројекција. Када је она бескрајно удаљена, тј. када је $d = \infty$, из (l.) и (l') излази:

$$\rho = \sin z, \quad m = \cos z, \quad n = 1.$$

У таквој нам се пројекцији *ортографској* претстављају, на пример, сви детаљи

површине Месеца и планета на њиховим дисковима. Као што се види, размера се m лин. дужина, упућених ка централној тачци A_0 , смањује у њој по мери једнака са повећавања z врло брзо, и постаје једнака са 0 при $z = 90^\circ$.

Ако се стави $d = 1$, тј. ако се узме тачка посматрања O на самој сфери, то ће изаћи:

$$\rho = \frac{2 \sin z}{1 + \cos z} = 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad m = n = \frac{2}{1 + \cos z} = \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{2}};$$

а то значи, да се перспективна пројекција претвара у том случају у зенитну конформну или стереографску (чл. 98. $k = 1$).

При $d = 0$, када се тачка посматрања буде налазила у самом центру C сфере, из (t.) и (t') добиће се:

$$\rho = \operatorname{tg} z, \quad m = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad n = \frac{1}{\cos z}.$$

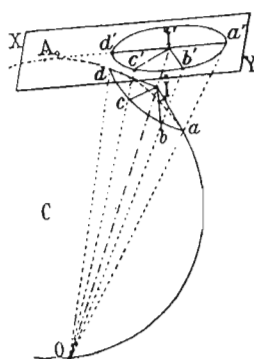
Према томе у тој се пројекцији, која се зове *централна*, обе размере m и n брзо увећавају по мери удаљења од централне тачке A_0 , а претставе се све више и више издуљују у правцу ка њој ($m > n$). Тако би нам се претставило, например, звездано небо при пројектовању његовом на равнину паралелну са хоризонтом места посматрања.

Перспективне пројекције, које се добивају при положајима тачке O интервалним међу напред реченим, имају и интервалне особине. Од њих су у употреби само пројекције са величинама d нешто већим од 1, а наиме: $d = 1.37$ (Кларкова), $d = 1.50$ (Џемсова), $d = 1.59$ (Паранова) и $d = 1.71$ (Лаирова); зато што се у тим случајима ни размера бескрајно малих фигура не увећава са удаљењем од централне тачке A_0 тако брзо као при $d = 1$, нити су деформације њихове тако знатне.

102. Облици меридијана и паралела.

Не обзирући се на опште формуле (f) чл. 90., којима се одређује облик меридијана и паралела на ма каквој зенитној пројекцији, можемо непосредно видети, да на перспективним пројекцијама и једни и друге треба да буду уопште елипсе или хиперболе, а у специјалним случајима кругови, пароболе и праве линије; зато што сви зраци који иду из O ка разним тачкама ма каквог малог или великог круга сфере, — образујући коничну површину са кружном основом, — могу давати у пресеку својему са равнином само криве другог степена.

У том смислу стереографска пројекција има ту врло важну особину, што

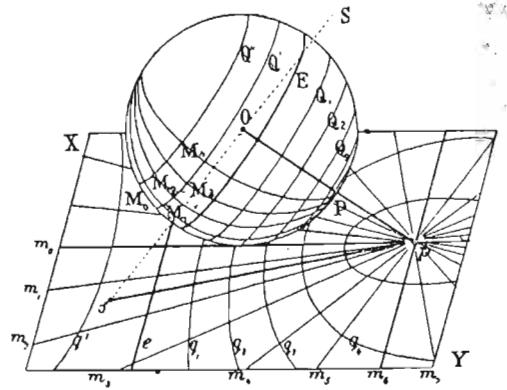


Сл. 87.

се сваки круг сфере претставља на њој такође у облику круга. То ће се најпростије доказати, ако уобразимо прави кружни конус $abc \dots$ (сл. 87.) који тангира сферу по маломе њеном кругу $abc \dots$. Пошто су све изводнице $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dots$ перпендикуларне на елементе тога круга, то и на пројекционој равнини XY , на основу конформности стереографске пројекције, праволинијске њихове пројекције $\dot{a}', \dot{b}', \dot{c}', \dots$ треба да остану нормалне на криву $a'b'c' \dots$, која претставља пројекцију круга abc ; а због тога што се све те нормалне $\dot{a}', \dot{b}', \dot{c}', \dots$ скуп-

љају у једној тачци I' (пројекцији врха I конусовог), излази непосредно, да крива $a'b'c'$... треба у свима својим тачкама да има исту кривину, тј. треба да буде круг. Али је разумљиво, да центар тога круга I' неће бити, уопште говорећи, ни пројекција центра круга abc ..., нити пројекција пола његова.

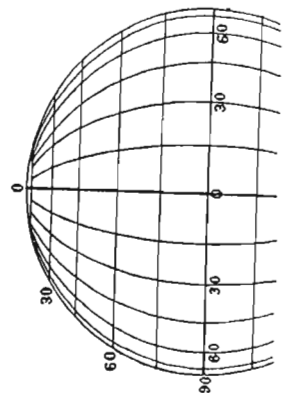
На централној перспективној пројекцији меридијани се и сви уопште велики кругови сфере претстављају у облику правих линија, зато што равнине тих кругова пролазе тада кроз саму тачку посматрања. Та нарочита особина централне пројекције и чини је погодном за употребу у извесним случајима. Тако на пример, ако бисмо зажелели претставити на каквој равнини XU (сл. 88.) све промене дужине и правца сенке гномона Op , постављеног паралелно са осом Земљиним, то бисмо на крају његову O могли уобразити сферу произвољног радиуса па пројектовати из центра O разне њене деклинационе кругове PM_0, PM_1, PM_2, \dots и паралеле $Q_2, Q_1, E, Q', Q'', \dots$ на равнини XU . На њој ће се тако и добити мрежа централне перспективне пројекције са деклинационим круговима у облику правих pm_0, pm_1, pm_2, \dots , који одговарају разним часовним углима Сунца: O, t_1, t_2, \dots , и са паралелама $q_2, q_1, e, q', q'', \dots$ у облику хипербола и елипса, које одговарају разним деклинацијама Сунца: $\delta_2, \delta_1, O, \delta', \delta'', \dots$. На тај би начин дужина и правац сенке ps гномана за све дате величине δ и t били потпуно одређени; па разуме се и обратно: по дужини и правцу те сенке ps могло би се одредити како истинито сунчано време t , тако и сама деклинација Сунчева δ .



Сл. 88.

Услед те примене централне перспективне пројекције на конструкцију сунчаних часовника, она је одавна добила назив *гномонске*. Исто тако она може да игра извесну улогу и у морепловству за одређивање најкраћег пута међу каквим двама тачкама, јер се тај пут на њој претставља у облику праве линије.

Према томе, каква је тачка A_0 сфере узета за централну на карти, перспективна пројекција, као и свака зенитна, може да буде или *поларна* (у случају $\Theta = 0$), или *екваторијална* (када је $\Theta_0 = 90^\circ$), или *хоризонтална* (када је пројекциона равнина XU паралелна са хоризонтом тачке A_0 , узете на ма којој паралели Θ_0). На поларним је пројекцијама, разуме се, најпростији облик мреже меридијана и паралела; јер се меридијани претстављају у тим случајима увек у облику правих линија, а паралеле у облику концентричних кругова. Исто су тако претстављене паралеле у облику правих линија на ортогоналној екваторијалној пројекцији, као што се то види на сл. 89.; меридијани пак на њој добивају се у облику елипса.

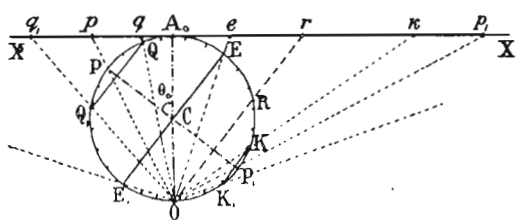


Сл. 89.

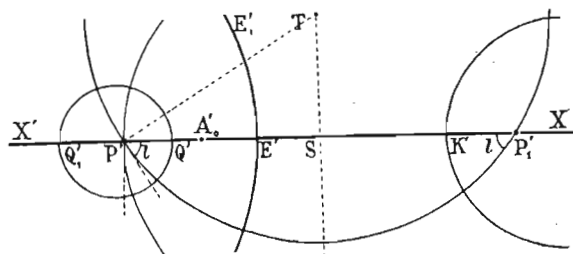
103. Построј стереографске пројекције.

Благодарећи томе, што се на стереографској пројекцији сваки круг сфере претставља такође у облику круга, постој се мреже меридијана и паралела врши на њој изванредно просто. Да извршимо то за неко поларно растојање Θ_0 централне тачке A_0 , узевши за меридијан те централне тачке A'_0 праву $X'X$ (сл. 90. *b.*).

Кад повучемо у равнини меридијана A_0POP_1 тачке A_0 (сл. 90. *a.*) тангенту XA_0X и саставимо тачку посматрања O са половима P и P_1 правим OPp и OP_1p_1 , добићемо дужине A_0p и A_0p_1 , које и треба да буду пренесене на линију $X'X$ од тачке A'_0 те да се на пројекцији добију положаји P' и P'_1 оба пола. Кад сад поделимо полукругове PA_0EP_1 и PE_1OP_1 на онолико равних делова, колико основних паралела желимо да имамо на пројекцији, повуцимо опет кроз сваки пар поделе Q и Q_1 , K и K_1, \dots , — који одговарају једним и истим паралелама, — зраке посматрања OQq и OQ_1q_1 , OKk и OK_1k_1 и т. д. Кад пренесемо



Сл. 90. *a.*

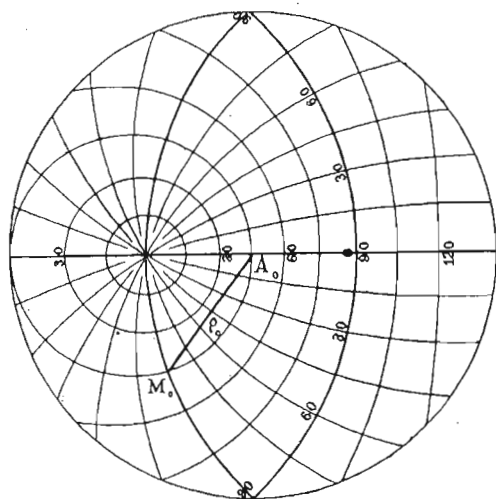


Сл. 90. *b.*

затим на правој $X'X$ од тачке A'_0 дужине $A'_0Q' = A_0q$ и $A'_0Q'_1 = A_0q_1$ па опишемо из средине Q' и Q'_1 круг радиусом $\frac{1}{2} Q'Q'_1$, добићемо на пројекцији претставу паралеле QQ_1 . Исто ће се тако добити претстава и свих осталих паралела KK_1, \dots , и екватора EE_1 . Паралела пак OR , која пролази кроз саму тачку посматрања O , претставиће се у облику перпендикулара ST , подигнутог из средине $P'P'_1$; стога што из међусобне једнакости углова $rp_1O = pOA_0 = rOp_1$ и $rOp = Op_1r$ излази, да је $rp = rO = rp_1$, па је стога и $SP' = SP'_1$.

Што се тиче меридијана, они ће се сви претставити у облику кругова,

који пролазе кроз тачке P' и P'_1 , и који треба код P' и P'_1 да образују са централним меридијаном угле, једнаке са геогр. дужи-нама l , које се од њега рачунају; стога, кад се из тачке P' повуку праве PT под углима $P'_1P'T = 90^\circ - l$ до пресека њиховог са на-пред реченим перпендикуларом ST и опишу из тих тачака пресека T кружни луци ра-диусима TP' , добићемо претставу меридијана са различитим геогр. дужинама l^*). На тај је начин постројена на сл. 91. за целу полу-куглу мрежа меридијана и паралела у *хори-зоншалној стереографској пројекцији* при поларном растојању централне тачке $\Theta_0 = 45^\circ$.



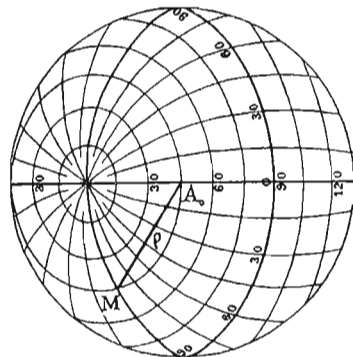
Сл. 91.

*) Да ће се на тај начин постројени меридијани пресецати са раније постројеним паралелама под правим углима, то је геометриски тако исто јасно као и код још општије Лагранжове пројекције (чл. 95.).

104. Построј зенитних пројекција.

Када већ имамо мрежу меридијана и паралела у стереографској пројекцији за какву централну тачку A_0 (сл. 91.), онда нам је лако постројити по тачкама ту исту мрежу и у ма каквој другој зенитној пројекцији [$\rho = f(z)$] са истом централном тачком A_0 . И заиста, на таквој ће пројекцији азимут α ма које тачке M са даном географ. дужином l и поларним растојањем Θ (сл. 92.) остати исти као и на одговарајућој јој тачци M_0 пројекције стереографске; само ће се растојање $M_0A_0 = \rho_0 = 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}$, узето са стереографске, променити на

$$MA_0 = \rho = \rho_0 \frac{f(z)}{2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}}.$$



Сл. 92.

За одређивање пак односа $f(z) : 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}$, који овде улази, лако је саставити малу таблицу или, још простије графички размерник.

На тај се начин може потпуно избећи срачунавање координата α и z тачке M по формулама ($f.$) чл. 90. Тако је, например, помоћу сл. 91. и постројена на сл. 92. (за исту централну паралелу $\Theta_0 = 45^\circ$) мрежа меридијана и паралела еквивалентне зенитне пројекције (Ламбертове), за коју је

$$f(z) = 2 \sin \frac{z}{2}.$$

ГЛАВА XIV.

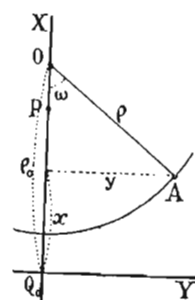
РЕЛАТИВНА КАКВОЋА РАЗНИХ ПРОЈЕКЦИЈА.

105. Построј мрежâ меридијана и паралела.

Кад смо рассмотрели карактерне особине разних картографских пројекција, да их сравнимо међу собом прво у смислу лакоће построја мреже меридијана и паралела, а затим у смислу веће или мање променљивости размере (код конформних) или пак деформација малих фигура (код еквивалентних).

У смислу графичких построја најпростије су, разуме се, оне пројекције, на којима се како меридијани, тако и паралеле претстављају у облику правих линија или кругова (цилиндричне, коничне, стереографске). Али та простота има стварну вредност при претстави знатних просторија земне површине (планисфере) у ситној размери; зато што се на детаљним картама (у крупној размери) кругови сувише великих радиуса не цртају помоћу штангенциркла, већ помоћу тачака, које се преносе на карту по срачунатим за њих правоуглим координатама.

За коничне пројекције правоугле координате x и y какве тачке A (сл. 93.), која одговара тачци пресека дане паралеле θ на сфери са меридијаном дане геогр. дужине l (која се рачуна од меридијана централне тачке просторије која се претставља), срачунавају се врло просто. Кад узмемо централну тачку карте Q_0 ($\theta = \theta_0$ и $l = 0$) за почетак координата а за осу X централни меридијан Q_0PO , на коме се налази и општи центар O свих кружних паралела, и са $\rho = f(\theta)$ означимо радиус OA паралеле θ , са $\rho = f(\theta_0)$ радиус OQ_0 а са ω угао Q_0OA , који одговара географ. дужини l , — добићемо наине:



Сл. 93.

$$x = \rho_0 - \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega \quad \dots \dots \dots (u.)$$

Тако ће за Гаусову пројекцију (чл. 93.) бити:

$$\rho_0 = k \operatorname{tg}^c \frac{\theta_0}{2}, \quad \rho = k \operatorname{tg}^c \frac{\theta}{2}, \quad \omega = Cl;$$

за просту коничну пројекцију изаћи ће (при ма каквој величини C):

$$\rho_0 = k \operatorname{tg} \theta_0, \quad \rho = \rho_0 - k(\theta_0 - \theta), \quad \omega = Cl;$$

ритама размере m у свакој другој тачци (Θ, l) карте, — при развијању његову у ред по степенима од s и t , — представити у облику:

$$lg m = lg m_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 lg m}{\partial \Theta^2} \right)_0 s^2 + \left(\frac{\partial^2 lg m}{\partial \Theta \cdot \partial t} \right)_0 st + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 lg m}{\partial t^2} \right) t^2 + \dots;$$

јер су, по услову $m_0 = \text{minimum}$, коефицијенти $\left(\frac{\partial lg m}{\partial \Theta} \right)_0$ и $\left(\frac{\partial lg m}{\partial t} \right)_0$

при првим степенима s и t једнаки са нулом. Ради упрошћења, ми ћемо се у овом реду задовољити само исписаним члановима другог степена, као што смо то већ чинили и при расматрању особина Бонове пројекције (чл. 97.).

На тај ће се начин за Гаусову пројекцију добити из израза (i') и (i'') чл. 93:

$$\frac{\partial lg m}{\partial \Theta} = \frac{\cos \Theta_0 - \cos \Theta}{\sin \Theta}, \quad \frac{\partial^2 lg m}{\partial \Theta^2} = \frac{1 - \cos \Theta_0 \cos \Theta}{\sin^2 \Theta}, \quad \left(\frac{\partial^2 lg m}{\partial \Theta^2} \right)_0 = \frac{1 - \cos^2 \Theta_0}{\sin^2 \Theta_0} = 1,$$

а пошто m не зависи од геогр. дужине l , то ће изаћи просто:

$$lg \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} s^2.$$

За зенитну пак стереографску пројекцију (чл. 98.) по свима азимуталним правцима из централне тачке изаћи ће подједнако:

$$\frac{\partial lg m}{\partial z} = tg \frac{z}{2}, \quad \frac{\partial^2 lg m}{\partial z^2} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}; \quad \left(\frac{\partial^2 lg m}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{2},$$

а пошто се у том случају с тачношћу до величина другог степена може примити, да је $z^2 = s^2 + t^2$, то ће бити

$$lg \frac{m}{m_0} = \frac{1}{4} z^2 = \frac{1}{4} (s^2 + t^2).$$

То показује, да стереографска пројекција даје двапут мање увеличање размере m на крајевима просторије кружног облика радиуса $z = s$, него Гаусова пројекција; за просторију квадратног облика са странама $2s$ и $2t = 2s$, она даје у тачкама сва четири угла исто увеличање размере, као и Гаусова пројекција на крајњим паралелама; само при већем ширењу просторије по геогр. дужини она излази већ мање погодна. Тако на пример, кад се за претставу Европске Русије у Гаусовој пројекцији узму за крајње паралеле $\varphi_s = 36^\circ$ и $\varphi_n = 70^\circ$, т.ј. $s = 17^\circ$, имаћемо приближно:

$$lg \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{57} \right)^2 = \frac{1}{22};$$

при претстави пак њеној у стереографској пројекцији највећа величина за s била би једнака 18° па стога би изашло:

$$lg \frac{m}{m_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{18}{57} \right)^2 = \frac{1}{40},$$

т.ј. скоро двапут мање.

Као једно од преимућстава Гаусове пројекције, као и њеног специјалног случаја — Меркаторове пројекције, сматра се то, што је величина размере

m указана на свакој тачци карте паралелом те тачке; али пошто се и на свакој другој конформној пројекцији размера m непосредно и очигледно одређује на сваком месту растојањем међу суседним паралелама мреже, то напред реченом преимућству не треба придавати великог значаја

Проблем о најпогоднијој конформној претстави какве дане просторије поставио је још познати рус. математичар Чебишов. Показавши знатне користи, које пружа у том погледу Лагранжова пројекција, он је изрекао опште решење тога проблема у оваквој форми: *најпогоднија је пројекција за претставу какве просторије она, код које размера дуж целе границе просторије остваје једна и иста*. Али је стварни доказ те теореме дао руски професор петроградског универз. Dr. Д. А. Граве, који ју је стварно применио у том случају, када је дата просторија за претставу ограничена каквим двама меридијанима и двама паралелама. Применом на Европску Русију, пројекција би Граве-ова дала на крајевима увеличање размере за $\frac{1}{4}$ део мање него стереографска пројекција.

107. Деформација фигура код еквивалентних пројекција.

Релативна каквоћа разних еквивалентних пројекција за претставу дане просторије условљава се тиме, колика је на њима максимална деформација малих фигура или, што је исто, колико се у разним њиховим тачкама разликује од јединице однос q највеће и најмање размере m и n један према другоме. Кад се са q_0 означи најмања величина тога односа за централну тачку просторије ($\Theta = \Theta_0$ и $l = 0$) и кад се развије, као и мало пре, $lg q$ у ред по степенима од $s = \Theta - \Theta_0$ и $t = l \sin \Theta_0$, добићемо за ма коју пројекцију уопште:

$$lg q = lg q_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 lg q}{\partial \Theta^2} \right)_0 s^2 + \left(\frac{\partial^2 lg q}{\partial \Theta \cdot \partial t} \right)_0 st + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 lg q}{\partial t^2} \right)_0 t^2 + \dots$$

Тако смо већ видели (чл. 97.), да код Бонове пројекције, — ако се ограничимо само са другим степенима велачина s и t , — излази:

$$q_0 = 1, \quad q = \frac{m}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2} \varepsilon}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon} = 1 + \varepsilon = 1 + st;$$

према томе је

$$q = st;$$

а то показује, да се све тачке са једнаком деформацијом малих фигура (чл. 87.) налазе на кривим линијама, сличним са хиперболама, којима као асимптоте служе средњи меридијан и средња паралела просторије, која се претставља.

За Ламбертову зенитну пројекцију (чл. 99.) из израза (r') добиће се:

$$lg q = lg \frac{n}{m} = -2 lg \cos \frac{z}{2}, \quad \frac{\partial lg q}{\partial z} = tg \frac{z}{2}, \quad \frac{\partial^2 lg q}{\partial z^2} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}$$

а пошто је у централној тачци $q_0 = 1$ и $\left(\frac{\partial^2 lg q}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{1}{2}$, то ће,

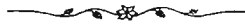
као и код стереографске пројекције, изаћи, да је

$$lg q = \frac{1}{4} z^2 = \frac{1}{4} (s^2 + t^2).$$

Тако сад видимо, да код еквивалентне претставе просторије кружног облика радиуса z Ламбертова пројекција даје двапут мање деформације него Бонова (код ове при $s = t = \frac{z}{\sqrt{2}}$ излази да је $lg q = \frac{1}{2} z^2$). Тако би за Европску Русију и за Француску прва пројекција била погоднија од друге.

За Алберсову пројекцију (као и за Ламбертову цилиндричну) из израза (k') лако би се добило $lg q = s^2$, ако би се учинило, да однос q_0 на средњој паралели буде једнак са јединицом; ако би се пак узимало, да q_0 буде толико исто мањи од јединице, колико максимална величина q на крајњим паралелама буде већа од јединице, то би се добило $lg \frac{q}{q_0} = \frac{1}{2} s^2$. Према томе, у смислу деформације претстава, преимућство је на страни Ламбертове пројекције према Алберсовој (при малом протезању просторије по геогр. дужини) потпуно онако исто као и стереографске према Гаусовој пројекцији у смислу промењљивости размере. Уопште изгледа, да за еквивалентне претставе треба да важи слично правило, као и правило Чебишова за конформне претставе, а наиме: на најпогоднијој еквивалентној претстави неке просторије максимална деформација фигура треба да буде подједнака дуж целе њене границе.

На закључку нашега кратког прегледа картографских пројекција, онима, који желе да се упознају са разним методама преноса детаља земљишта са топографских планова на мрежу меридијана и паралела карте, као и са техничким радњама на гравирању и штампању карата, препоручићемо већ споменуто у уводу књигу „Практическая Геодезія“ Витковскога.



РАДИУСИ КРИВИНА ЗЕМНОГ ЕЛИПСОИДА.

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{и} \quad N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

по Кларковим елементима:

$$a = 2989\,457 \text{ саж.} \quad \text{и} \quad c = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{293.5}$$

$$(\lg a = 6.4755\,923) \quad e^2 = 0.00680027$$

Ка датим у таблицама $\lg M$ и $\lg N$ (у сажњевима) треба додавати:

0.0392 894 — те да се добију M и N у тоазима

или 0.3291 091 „ „ „ „ „ „ у метрима

φ	$\lg M$	$\lg N$	φ	$\lg M$	$\lg N$	φ	$\lg M$	$\lg N$
	6.47	6.47		6.47	6.47		6.47	6.47
0° 0'	26 279	55 923	6° 0'	26 763	56 085	12° 0'	28 195	56 562
20	26 280	55 924	20	26 818	56 103	20	28 301	56 597
40	26 285	55 925	40	26 876	56 123	40	28 410	56 634
1 0	26 292	55 928	7 0	26 937	56 143	13 0	28 522	56 671
20	26 303	55 931	20	27 001	56 164	20	28 636	56 709
40	26 316	55 936	40	27 068	56 186	40	28 753	56 748
2 0	26 333	55 941	8 0	27 137	56 210	14 0	28 873	56 788
20	26 352	55 948	20	27 210	56 234	20	28 995	56 829
40	26 375	55 955	40	27 285	56 259	40	29 120	56 871
3 0	26 400	55 964	9 0	27 363	56 285	15 0	29 248	56 913
20	26 429	55 973	20	27 444	56 312	20	29 378	56 957
40	26 460	55 984	40	27 528	56 340	40	29 511	57 001
4 0	26 494	55 995	10 0	27 615	56 369	16 0	29 647	57 046
20	26 532	56 008	20	27 705	56 399	20	29 784	57 092
40	26 572	56 021	40	27 797	56 430	40	29 925	57 139
5 0	26 615	56 036	11 0	27 892	56 461	17 0	30 068	57 187
20	26 662	56 051	20	27 990	56 494	20	30 213	57 235
40	26 711	56 067	40	28 091	56 528	40	30 361	57 284
6 0	26 763	56 085	12 0	28 195	56 562	18 0	30 512	57 334
	6.47	6.47		6.47	6.47		6.47	6.47

φ	lg M	lg N	φ	lg M	lg N	φ	lg M	lg N
	6.47	6.47		6.47	6.47		6.47	6.47
18° 0'	30 512	57 334	30° 0'	37 367	59 620	42° 0'	46 151	62 547
20	30 665	57 385	20	37 591	59 695	20	46 408	62 633
40	30 820	57 437	40	37 817	59 770	40	46 666	62 719
19 0	30 978	57 490	31 0	38 045	59 846	43 0	46 924	62 805
20	31 138	57 543	20	38 274	59 922	20	47 182	62 891
40	31 300	57 597	40	38 504	59 998	40	47 440	62 977
20 0	31 465	57 652	32 0	38 735	60 076	44 0	47 698	63 063
20	31 632	57 708	20	38 968	60 153	20	47 957	63 150
40	31 801	57 764	40	39 202	60 231	40	48 216	63 236
21 0	31 973	57 821	33 0	39 437	60 310	45 0	48 474	63 322
20	32 146	57 879	20	39 674	60 389	20	48 733	63 408
40	32 322	57 938	40	39 912	60 468	40	48 992	63 494
22 0	32 501	57 997	34 0	40 151	60 548	46 0	49 250	63 581
20	32 681	58 057	20	40 391	60 628	20	49 509	63 667
40	32 863	58 118	40	40 632	60 708	40	49 767	63 753
23 0	33 048	58 180	35 0	40 874	60 789	47 0	50 025	63 839
20	33 235	58 242	20	41 118	60 870	20	50 283	63 925
40	33 423	58 305	40	41 362	60 951	40	50 541	64 011
24 0	33 614	58 369	36 0	41 607	61 033	48 0	50 799	64 097
20	33 807	58 433	20	41 854	61 115	20	51 056	64 182
40	34 002	58 498	40	42 101	61 197	40	51 313	64 268
25 0	34 199	58 563	37 0	42 349	61 280	49 0	51 569	64 354
20	34 397	58 630	20	42 598	61 363	20	51 825	64 439
40	34 598	58 697	40	42 847	61 446	40	52 081	64 524
26 0	34 800	58 764	38 0	43 098	61 530	50 0	52 336	64 609
20	35 005	58 832	20	43 449	61 613	20	52 591	64 694
40	35 211	58 901	40	43 601	61 697	40	52 845	64 779
27 0	35 419	58 970	39 0	43 853	61 783	51 0	53 099	64 863
20	35 629	59 040	20	44 106	61 866	20	53 352	64 948
40	35 840	59 111	40	44 360	61 951	40	53 604	65 032
28 0	36 053	59 182	40 0	44 615	62 035	52 0	53 855	65 116
20	36 268	59 253	20	44 870	62 120	20	54 106	65 199
40	36 485	59 325	40	45 125	62 206	40	54 356	65 283
29 0	36 703	59 398	41 0	45 381	62 291	53 0	54 606	65 366
20	36 923	59 471	20	45 637	62 376	20	54 854	65 449
40	37 144	59 545	40	45 894	62 462	40	55 102	65 531
30 0	37 367	59 620	42 0	46 151	62 547	54 0	55 349	65 613
	6.47	6.47		6.47	6.47		6.47	6.47

φ	lg M	lg N	φ	lg M	lg N	φ	lg M	lg N
	6.47	6.47		6.47	6.47		6.47	6.47
54° 0'	55 349	65 613	66° 0'	63 368	68 287	78° 0'	68 817	70 103
20	55 594	65 695	20	63 560	68 351	20	68 921	70 138
40	55 839	65 777	40	63 750	68 414	40	69 023	70 172
55 0	56 083	65 858	67 0	63 937	68 476	79 0	69 122	70 204
20	56 326	65 939	20	64 123	68 538	20	69 217	70 236
40	56 568	66 020	40	64 306	68 599	40	69 310	70 267
56 0	56 808	66 100	68 0	64 487	68 660	80 0	69 401	70 297
20	57 048	66 180	20	64 666	68 719	20	69 488	70 327
40	57 286	66 259	40	64 843	68 778	40	69 572	70 355
57 0	57 524	66 338	69 0	65 018	68 837	81 0	69 654	70 382
20	57 760	66 417	20	65 190	68 894	20	69 733	70 408
40	57 995	66 495	40	65 361	68 951	40	69 809	70 433
58 0	58 228	66 573	70 0	65 529	69 007	82 0	69 882	70 458
20	58 460	66 651	20	65 694	69 062	20	69 952	70 481
40	58 691	66 728	40	65 857	69 116	40	70 019	70 503
59 0	58 921	66 804	71 0	65 918	69 170	83 0	70 083	70 525
20	59 149	66 880	20	66 177	69 223	20	70 145	70 545
40	59 375	66 956	40	66 333	69 275	40	70 203	70 565
60 0	59 600	67 031	72 0	66 487	69 326	84 0	70 258	70 583
20	59 824	67 105	20	66 638	69 376	20	70 311	70 601
40	60 046	67 179	40	66 787	69 426	40	70 360	70 617
61 0	60 267	67 253	73 0	66 933	69 475	85 0	70 407	70 633
20	60 486	67 326	20	67 077	69 523	20	70 450	70 647
40	60 703	67 398	40	67 218	69 570	40	70 491	70 661
62 0	60 919	67 470	74 0	67 357	69 616	86 0	70 529	70 673
20	61 133	67 542	20	67 493	69 661	20	70 563	70 685
40	61 345	67 612	40	67 627	69 706	40	70 495	70 696
63 0	61 556	67 682	75 0	67 758	69 750	87 0	70 624	70 705
20	61 765	67 752	20	67 886	69 793	20	70 649	70 714
40	61 972	67 821	40	68 012	69 835	40	70 672	70 721
64 0	62 177	67 890	76 0	68 135	69 876	88 0	70 691	70 728
20	62 380	67 957	20	68 255	69 916	20	70 708	70 733
40	62 582	68 024	40	68 373	69 955	40	70 722	70 738
65 0	62 781	68 091	77 0	68 488	69 993	89 0	70 732	70 741
20	62 979	68 157	20	68 601	70 031	20	70 740	70 744
40	63 175	68 222	40	68 710	70 067	40	70 744	70 745
66 0	63 368	68 287	78 0	68 817	70 103	90 0	70 746	70 746
	6.47	6.47		6.47	6.47		6.47	6.47

Запажене грешке:

На страни	У врсти	Одштампано	Треба да буде
1.	9. озго	уображеној нивелирној нивоској	уображеној нивоској
12.	7. "	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
15.	Сл. 7, b.	на врху слике А	А'
"	" " "	q	q'
17.	2. озго	у последњем чл. $\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)^3$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)^3$
20.	4. и 6 "	Лежандрова	Лежандрова
22.	11. "	"	"
24.	18. "	већи	мањи
31.	2. оздо	sin IV	sin VI
33.	14. озго	sin IX	sin XI
37.	9. оздо	ω_3	$\omega_3 =$
37.	10. "	n_3	$n_3 =$
38.	12. "	- 1.194	+ 1.994
53.	1. "	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
54.	7. "	огледало постави	огледало pp постави
60.	6. озго	његове станае	његове f станае
71.	5. оздо	s^2	s^3
72.	7. озго	од А ка В	од В ка А
83.	9. оздо	Земље	Земље под географ. ширином φ
84.	4. озго	$g\varphi \delta_0$	$g\varphi \delta_0$
84.	6. оздо	$\frac{\Delta}{\delta}$	$\frac{\Delta}{\delta_0}$
90.	Сл. 49.	$\frac{1}{\sin B}$	$\frac{r}{\sin B}$
92.	5. озго	sin b _m	cos b _m
94.	16. оздо	A ₁	A'
97.	7. "	$\frac{3}{4} k^4$	$-\frac{3}{4} k^4$
98.	17. озго	В	М
99.	9. оздо	алипсоид	елипсоид
101.	15. озго	поправке	поправке
105.	1. оздо	$(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}$	$(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}$
106.	9. озго	cos ($\varphi_2 - \varphi_1$)	cos ($\varphi_2 + \varphi_1$)
"	10. "	"	"
"	10. "	cos 2 ($\varphi_2 - \varphi_1$)	cos 2 ($\varphi_2 + \varphi_1$)
112.	14. "	p q	p q r
"	7. оздо	(10.)	(11.)
"	12. "	(11.)	-

На страни	У врши	Одштампано	Треба да буде
119.	Сл 54	X (на врху)	Y
120.	12. озго	$\frac{1}{4343}$	$\frac{1}{0.4343}$
128.	10. „	знак	закон
140.	8. оздо	$6 \frac{yz}{r^2}$	$6 \frac{yz}{r^2}$
145.	2. „	П о р а т	П а р о т
149.	5. озго	$g =$	$g_0 =$
154.	9. „	елисоиду	елипсоиду
156.	17. „	еквивилентна	еквивалентна
„	Сл. 71.	$m - a'$	$m' - a'$
158.	15. оздо	еквивилентно	еквивалентно
161.	10. озго	(Сл. 73. б.)	(Сл. 73. б.)
163.	1. „	конформности потребно	конформности ($m = n$) потребно
„	2. „	$\sin \theta^2$	$\sin \theta$
„	13. оздо	разм.	разл.
164.	4. „	$\sin \theta'$	$\sin \theta$
„	6. „	$\partial \theta'$	$\partial \theta$
„	6. „	$\sin \theta'$	$\sin \theta$
166.	3. озго	размену	размеру
168.	9. „	y	h
171.	13. оздо	AB	A b
172.	9. „	θ	θ_0
173.	7. озго	улмакантарати	алмукантарати
177.	21. оздо	гномана	гномона
178.	3. озго	постој	построј
188.	11. оздо	61 783	61 782

Доцније запажене грешке.

На страни	У врши	Одштампано	Треба да буде
14.	15. оздо	њене тачке	њене три тачке