МИНИСТАРСТВО ВОЈСКЕ И МОРНАРИЦЕ
ВОЈНИ ГЕОГРАФСКИ ИНСТИТУТ

КУРС АСТРОНОМИЈЕ

(ПРАКТИЧКИ ДЕО)

ОД ГЕОДЕТСКОГ ЂЕНЕРАЛА,

Dr. Н. Ј. ЦИНГЕРА,

РЕДОВНОГ ПРОФЕСОРА ГЕОДЕТСКОГ ОДЕЉЕЊА НИКОЛАЈЕВСКЕ ВИШЕ ШКОЛЕ ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ
И ХИДРОГРАФСКОГ ОДЕЉЕЊА ВИШЕ ШКОЛЕ ПОМОРСКЕ АКАДЕМИЈЕ У ПЕТРОГРАДУ.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

СА ДОПУНАМА

В. Г. ФЕСЕНКОВА.

ПРЕВОД С РУСКОГ

ОД

ГЕОДЕТСКОГ ЂЕНЕРАЛА,

СТЕВАНА П. БОШКОВИЋА,

НАЧЕЛНИКА ВОЈНОГ ГЕОГРАФСКОГ ИНСТИТУТА И ПРОФЕСОРА ГЕОДЕЗИЈЕ
НА ВИШОЈ ШКОЛИ ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ.

ШТАМПАНО У ВОЈНОМ ГЕОГРАФСКОМ ИНСТИТУТУ 1928. ГОДИНЕ, — БЕОГРАД

ПРЕДГОВОР

(за друго издање)

После 16 година од првог издања овога „Курса Астрономије“ исцрпљена је сва његова резерва за слушаоце Више Школе Импер. Николајевске Војне Академије и Више Николајевске Поморске Академије. Стога се у главноме и јавља потреба за ово друго његово издање. Уз то треба „практички део“ његов и допунити, пошто су за то време усавршени како неки од астрономских инструмената тако и методе посматрања.

Осим споменутих допуна, у овом је издању, више него пређе, истакнута стварна сличност између разних метода одређивања времена и ширинâ пасажним инструментом, које се по спољашњем изгледу веома разликују једна од друге.

Унеколико су само скраћене формуле за срачунавање дужинâ местâ из посматрања Месечевих растојања, које су у садање време већ изгубиле свој практички значај.

Н. ЦИНГЕР.

ПРЕДГОВОР

(за треће, најновије издање)

У овом издању Курса Астрономије Н. Ј. Цингера (практички део) уметнуо сам неколико нових чланова, а на име: испитивање објектива по Хартмановој методи, часовници са Рифлеровим клатном, сравњивање хронометара радиотелеграфским путем и астролабија са призмом. Сем тога, чинило ми се за умесно, да на крају књиге дам сталну ефемериду Сунца, позајмљену из Wirtz-ове књиге „Tafeln und Formeln aus Astronomie und Geodesie“; јер, због мале распрострањености астрономских годишњака код нас, ова ефемерида може бити од користи при приближном одређивању времена и ширине. Остали текст књиге репродукован је без измена са издања од 1915. године.

В. ФЕСЕНКОВ.

ПРЕДГОВОР ПРЕВОДИОЦА

Ево и друге књиге из т. зв. „Трилогије Цингерове“. Овај практични део Курса Астрономије нераздвојни је део прве књиге, која је изашла из штампе у моме преводу пре две године, па и треће књиге „Виша Геодезија“, која је сад у штампи. У овој је књизи пок. Dr. Цингер изложио својственим му кратким, јасним и очигледним начином све оно из Практичне Астрономије, што је неопходно потребно свима онима који се баве математичком географијом а нарочито онима, који раде на савременим научним геодетским радовима, где је потребно одређивати географске координате из астрономских посматрања, скоро на свакој тригонометриској тачци I реда, — ако не и више.

Да поновим, слично ономе што сам напоменуо у своме предговору у првој књизи: Ко добро изучи ово дело и по њему практички изради примере из свих одељака његових, сигурно се може рећи, да ће моћи сарађивати на решавању најкрупнијих проблема практичне астрономије.

децембра 1928. г.
Београд.

С. П. БОШКОВИЋ
ГЕОД. ЂЕНЕРАЛ.

САДРЖАЈ.

(СТРАНЕ СУ ОЗНАЧЕНЕ У ЗАГРАДИ)

ОДЕЉАК I.

ТЕОРИЈА И САСТАВ ПРЕНОСНИХ АСТРОНОМСКИХ ИНСТРУМЕНАТА

ГЛАВА VI.

Посматрања са часовницима и хронометрима.

ГЛАВА VII.

Пасажни инструмент и зенит-телескоп.

ГЛАВА VIII.

Преносни вертикални круг и универсални инструмент.

ГЛАВА IX.

Рефлекторни угломерни инструменти.

ОДЕЉАК II.

ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОГРАФСКИХ КООРДИНАТА МЕСТА ИЗ АСТРОНОМСКИХ ПОСМАТРАЊА.

ГЛАВА X.

Преглед метода за одређивање времена, ширине и правца меридијана.

ОДЕЉАК I.

ТЕОРИЈА И САСТАВ ПРЕНОСНИХ АСТРОНОМСКИХ ИНСТРУМЕНАТА.

УВОД

Практичној је *астрономији* задаћа да из астрономских посматрања одређује привидне координате небесних тела а исто тако и координате самога места посматрања. Какво значајно место заузима у науци та практична грана астрономије, види се из тога, што се на споменутим одређивањима заснивају сва наша знања о истинитим кретањима и облицима небесних тела а тако исто и о фигури и димензијама Земље.

Међутим, астрономска посматрања и мерења, — као и посматрања сваке друге врсте, — подлеже неизбежним грешкама, које потичу од многобројних, различитих узрока; а наиме: 1. од разних недостатака инструмената који се употребљују, 2. од несавршенстава чула самога посматрача и 3. од неповољности спољних погодаба, при којима се врше посматрања, као што су: колебање ваздуха, недовољно чврста подлога инструмента, утицаји температурних промена на инструмент итд. Према овим трима категоријама узрока и саме се грешке посматрања и мерења природно деле на *инструменталне, личне* и *спољашње*. По своме пак карактеру и прве, и друге, и треће деле се у две врсте: 1. *сталне грешке* или *систематске*, које се непромењиво понављају при једним и истим околностима тако, да се закон њихова деловања може открити и испитати, и 2. *случајне грешке*, које при свима, по изгледу идентичним, погодбама делују час у једну, час у другу страну, и бивају час веће, час мање, услед чега се о ступњу њиховог утицаја на резултат из посматрања може судити само на основу теорије вероватности.

Према томе достићи до најтачнијих резултата из астрономских посматрања и оценити онај ступањ поверења, које им треба поклонити, могућно је само брижљивим изучавањем како систематских, тако и случајних грешака, које постоје код разних астрономских инструмената и метода посматрања. А кад је то учињено и кад су показана разна средства за елиминисање систематских грешака из резултата мерења као најзначајнијих, онда практична астрономија утврђује, с практичке тачке гледишта, најбоље методе за одређивање координата небесних тела и места посматрања.

Пошто је овај курс намењен у главноме спреми геодета и хидрографа за њихове специјалне радове, — он садржи у себи само ове специјалне одељке практичне астрономије: 1. теорију преносних астрономских инструмената, који су највише у употреби и 2. методе одређивања географских координата места на Земљиној површини из астрономских посматрања са тим инструментима.

По самој задаћи астрономских инструмената, они су у највише случајева угломерни те треба да садрже у себи, — не гледећи на сву њихову разноликост, — извесне, за све њих опште саставне делове, као што су: дурбини, либеле, подељени кругови и др. Овим је одређен и ред излагања те је најприродније да се њега придржавамо у првом из напред споменутих одељака практичне астрономије — *теорији инструмената;* јер расматрање најпростијих делова посебице, треба, разуме се, да претходи опису и теорији компликованих справа. Пре него што бисмо пак говорили о дурбину и о разним оптичким саставним деловима инструмената, корисно ће нам бити, да расмотримо нешто темељније, него што се то чини у елементарним уџбеницима физике, како се наиме преламају светлосни зраци у сферним стаклима.

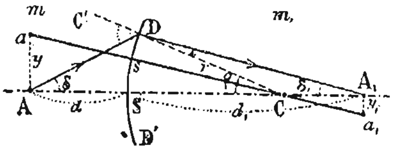
* * *

ГЛАВА I.

ПРЕЛАМАЊЕ ЗРАКОВА КРОЗ СФЕРНА СТАКЛАД.

1. Прелаз зракова из једне средине у другу.

Замислимо две провидне средине m и m_1 (сл. 1.), са индексима преламања m и m_1, које су раздвојене једна од друге сферном површином DSD′ радиуса $CS = r$ па нека светлосни зраци полазе из какве тачке A прве средине m. Централни ће зрак AC, који се сусреће са површином у тачци S под правим углом, проћи у другу средину не преломивши се; преломљени пак правац DA_1 свакога другог зрака AD одредиће се, по познатоме закону преламања, овако:



Сл. 1.

$$sin \sphericalangle CDA_1 = \frac{m}{m_1} sin \sphericalangle ADC'.$$

Кад означимо растојање AS са d а са d_1 растојање A_1S тачке A_1, у којој преломљени зрак DA_1 пресеца централни зрак ASC, и, кад претпоставимо, да су како лук $SD = h$, тако исто, разуме се, и угли $\sphericalangle DAS = \delta$, $\sphericalangle DA_1S = \delta_1$ и $\sphericalangle DCS = \rho$ толико мали, да се њихови квадрати и виши степени могу занемарити, онда ћемо добити уместо пређашње тачне формуле ову приближну:

$$m_1 (\rho - \delta_1) = m (\rho + \delta);$$

пошто ће пак, при учињеној претпоставци, бити:

$$\rho = \frac{h}{r}, \quad \delta = \frac{h}{d} \quad \text{и} \quad \delta_1 = \frac{h}{d_1},$$

то ће изаћи:

$$m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_1}\right) = m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

или

$$\frac{m_1}{d_1} + \frac{m}{d} = \frac{m_1 - m}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)'$$

Одатле се види, да ће се сви могућни зраци, који полазе из тачке A под врло малим углима према централном зраку AS, пресећи међусобно, — после преламања, — у једној и истој тачци A_1, која је одређена њеним растојањем $A_1S = d_1$.

Према знаку који се добије за d_1, та ће тачка A_1 бити или с друге стране површине или са исте стране, где се налази и тачка A. У првом ће случају A_1 бити *стварни оптички лик* тачке A а у другом — *уображени.*

Формула (1.)′ показује такође, да и обратно: тачка A треба да буде тачка сусрета свију зракова, који полазе из друге средине из A_1 под малим углима према централном правцу A_1CA; због тога се тачке A и A_1, исто тако као и њихова растојања d и d_1 зову *конјуговане (спрегнуте) међу собом* у односу према површини преламања, која се расматра.

Да примимо сада централну линију $ASCA_1$ за сталну осу па узмимо у равни Aa, која је перпендикуларна на ту осу, неку другу тачку a на тако малом удаљењу од осе $Aa=y$, да би се квадрати и виши степени угла $\sphericalangle aCA$ могли занемарити. Тада ће се у равни, која пролази кроз осу CA и тачку a, тј. на продужењу централне линије asC, — по предњем, — наћи тачка a_1, конјугована (спрегнута) са a, за коју ће бити:

$$\frac{m_1}{a_1s}+\frac{m}{as}=\frac{m_1-m}{r};$$

али пошто се (при постављеном услову маленкости угла $\sphericalangle aCA$) растојање as може узети као равно $AS=d$, то ће из сравњења последње једначине са (1)′ изаћи:

$$a_1s=d_1=A_1S,$$

тј. разним тачкама a, које су узете у истој равни Aa одговарају конјуговане тачке a_1, које се налазе у равни a_1A_1, која је такође перпендикуларна на осу ASC; због тога се и те саме равни могу назвати *конјугованим (спрегнутим) међу собом.*

Што се тиче растојања тачке a_1 од осе $A_1a_1=y_1$, то ће се однос између њега и y представити, на основу (1), у оваквом облику:

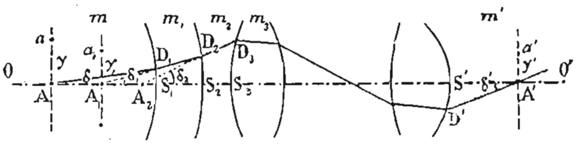
$$\frac{y_1}{y}=\frac{A_1C}{AC}=\frac{d_1-r}{d+r}=\frac{md_1}{m_1d} \quad \text{или} \quad m_1\delta_1y_1=m\delta y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2.)$$

при чему ће знак — или + код y_1 изаћи увек једнак са знаком угла δ_1, којим се одређује правац преламања зрака DA_1.

Да напоменемо још и ово: 1. ако двема каквим тачкама a и b прве средине одговарају конјуговане тачке a_1 и b_1 у другој средини, онда ће и зрак ab свакако проћи у другој средини кроз a_1 и b_1; због тога ће такви зраци ab и a_1b_1 бити такође *конјуговани (спрегнути)* међу собом. 2. Ако су каквим двама зрацима једне средине нађена два зрака, у другој средини, који су са њима конјуговани, — то ће и тачка пресека прва два зрака бити конјугована (спрегнута) са тачком пресека друга два.

2. Преламање зракова кроз систему средина.

Замислимо сада читав низ (систему) провидних средина, са индексима преламања $m, m_1, m_2 \ldots m'$, које су раздвојене једна од друге сферним површинама $S_1, S_2, S_3 \ldots S'$ (сл. 2.), чији су центри поређани по једној правој $OS_1S_2 \ldots S'O'$. Ова се права зове *оса системе* површина које преламају. Кад у таквој си-



Сл. 2.

стеми расматрамо пут каквога светлосног зрака $AD_1D_2 \ldots D'A'$, допустићемо, као и пређе, да су сви његови праволиниски елементи AD_1, $A_1D_1D_2$, $A_2D_2D_3$, .. $D'A'$ нагнути према тој оси OO' под тако маленим углима δ, δ_1, δ_2, ... δ', да се квадрати и виши степени њихови могу занемарити.

Тада ће свакој тачци A, узетој на оси у првој средини m, одговарати конјугована јој тачка A_1 друге средине m_1; за ову тачку A_1 наћиће се конјугована са њом тачка A_2 средине m_2, која затим иде итд.; напослетку, у последњој средини m' добиће се на оси OO' таква тачка A', која ће бити конјугована са свима пред њоме па разуме се и са почетном A. Замислимо затим у тачкама $A, A_1, A_2, \ldots A'$ равни које су перпендикуларне на осу па ћемо увидети, да ће свакој тачци a, — узетој у равни A на удаљењу од осе $Aa = y$, — одговарати у равни A_1 конјугована са њом тачка a_1 на удаљењу од осе $A_1 a_1 = y_1$, које задовољава, — како по знаку тако и по величини — једначину

$$m_1 y_1 \delta_1 = m y \delta;$$

за ту пак тачку a_1 добиће се на тај исти начин, у равни A_2 са њом конјугована тачка a_2 на удаљењу од осе $A_2a_2 = y_2$, при чему ће бити

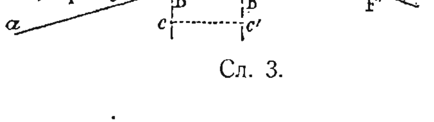
$$m_2 y_2 \delta_2 = m_1 y_1 \delta_1 = m y \delta$$

и тако даље. Најзад, у последњој средини m' добиће се у равни A' тачка a', која ће бити конјугована са пређашњим: $a, a_1, a_2, \ldots$ и биће са свима њима у једној и истој равни, која пролази кроз осу системе и кроз почетну тачку a; удаљење пак њено од осе $A'a' = y'$ биће везано за y једначином

$$m' y' \delta' = m y \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)'$$

у којој δ означава угао нагиба према оси ма кога зрака, који полази из A, а δ' угао нагиба завршног његовог правца у последњој средини m'. Одатле излази, да удаљења од осе разних тачака a и конјугованих с њима a' треба да се налазе у сталном односу једно према другоме, тј. да свака фигура у равни A и њен оптички лик у равни A' треба да буду слични међу собом.

За бескрајно удаљену тачку средине m, која шаље зраке паралелно са осом OO', треба да се добије гдегод на тој оси конјугована са њом тачка F' (сл. 3.) последње средине m'; исто тако и за обратни правац паралелних са осом зракова $\omega' b'$ који полазе из бескрајно удаљене тачке средине m', треба да постоји на тој истој оси тачка F, у којој ће се сви ти зраци сакупити, кад уђу у средину m. Такве две тачке F и F', зову се *фокуси* (*жиже*) те системе површина које преламају.



Сл. 3.

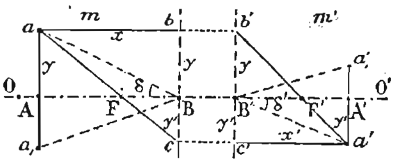
Кад се продужи ма какав зрак ωb, који иде паралелно са осом OO у првој средини m, до његова пресека у b' са завршним његовим правцем $b'F'$ у последњој средини m', и, кад замислимо њему директно супротни зрак $b'\omega'$ последње средине, која се пресеца са његовим завршним правцем bF у тачци b, добићемо две конјуговане међу собом тачке b и b', јер кроз њих пролазе пар по пар међу собом спрегнути зраци $(\omega b, Fb)$ и $(b' F', b' \omega')$. Према томе излази, да у свакој системи површина које преламају треба да постоје две такве међу собом конјуговане површине bBc и $b'B'c'$ у којима се сваке две узајамно одговарајуће тачке: b и b', c и c' налазе на истој страни од осе и на једнаком удаљењу од ње, $(Bb=B'b', Bc=B'c')$. Такве две конјуговане међу собом равни зову се *главне равни* системе а тачке њихових пресека B и B′ са осом OO′ зову се *главне тачке.* За њих се општа једначина (2.)′, услед једнакости $y=y'$, претвара у ову

$$m' \delta' = m \delta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)'',$$

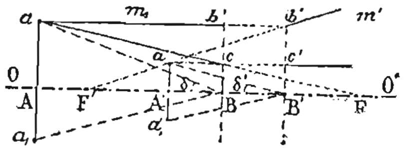
која показује, да се угао нагиба δ свакога зрака aB према оси, -- који улази у систему у правцу главне тачке B, — и угао нагиба δ' зрака $B'a'$, — који је са њим спрегнут и који излази из друге главне тачке B′, — налазе у сталном односу један према другоме, као $m : m'$

3. Конструкција ликова.

Ако је у ма каквој системи површина које преламају познат положај обеју главних тачака B и B′ и оба фокуса F и F′ (сл. *4. a,* и *4. b*), онда ће се за сваку тачку a прве средине m добити са њом спрегнута тачка a' последње средине



Сл. 4. *a*.



Сл. 4. *b*.

m' овом простом конструкцијом: Зрак ab, који је паралелан са осом OO′ и продужен до сусрета у b' са другом главном равни $B'b'$, изаћи ће дефинитивно из системе у правцу $b'F'$; зрак пак aF, који пролази кроз фокус F и који се сусреће са првом главном равни у тачци c, изаћи ће у правцу $c\,c'a'$, паралелно са осом OO′. Пресеком та два зрака $b'F'$ и $cc'a'$ и одредиће се тачка a', конјугована са a.

Узмимо једном за свагда да расматрамо разне тачке a прве средине у односу према првој главној равни B тако, да њихова растојања од ње $ab = x$ рачунамо као позитивна у лево; тачке пак a' последње средине расматраћемо у односу према другој главној равни B′, рачунајући њихова растојања $a'c' = x'$ као позитивна удесно. Кад означимо са f и f', — овако рачунајући, — растојања фокуса F и F′ од главних тачака B и B′, које њима одговарају, лако ћемо наћи из сличности образованих троуглова (abc са FBc и $b'c'a'$ са $b'B'F'$):

$$\frac{f}{x}=\frac{y'}{y+y'}, \qquad \frac{f'}{x'}=\frac{y}{y+y'},$$

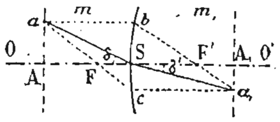
а одатле
$$\frac{f}{x}+\frac{f'}{x'}=1, \qquad \frac{fy}{x}=\frac{f'y'}{x'}.$$

Али пошто односи $\frac{y}{x}$ и $\frac{y'}{x'}$ представљају тангенсе малих углова $aBO=\delta$ и $a'B'O'=\delta'$, који су везани међу собом једначином (3), то ће нам последња једначина дати:

$$\frac{f}{f'}=\frac{\delta'}{\delta}=\frac{m}{m'}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)'$$

т.ј. у свакој системи средина које преламају, однос фокалних (жижиних) растојања f и f' раван је односу индекса преламања m и m' прве и последње средине.

Тако например, за две средине m и m_1, које су раздвојене сферном површином bSc (сл. 5), обе ће се главне тачке B и B′ поклопити са врхом те површине S зато што мали угли $\sphericalangle a\mathrm{SO} = \delta$ и $\sphericalangle a_1\mathrm{SO}' = \delta'$, које образују конјуговани зраци aS и a_1S, са осом OSO′, задовољавају закон преламања $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{m}{m_1}$ па према томе и услов (2)″ за главне тачке. Растојања пак оба фокуса F и F′ од S добиће се из једначине (1.)′, кад се у њој стави прво да је $d_1 = \infty$, при чему ће изаћи:



Сл. 5.

$$d = f = \frac{m}{m_1 - m}\, r,$$

а затим да је $d = \infty$, при чему ће изаћи:

$$d_1 = f' = \frac{m_1}{m_1 - m}\, r.$$

Напослетку, кад се замене величине m и m_1 са овим f и f' у једначини (1.)′, она ће постати, — као што то и треба да буде, — оваква:

$$\frac{f}{d} + \frac{f'}{d_1} = 1.$$

Ако је моћ преламања прве и последње средине подједнака, као што то обично и бива при употреби разних система сферних стаклади, то ће та једнакост $m' = m$ повући за собом и ову:

$$f = f' \text{ и } \delta = \delta'$$

Стога у свима сличним случајима излази просто:

1.) Растојања оба фокуса F и F′ од главних им тачака B и B′ једнака су међу собом.

2.) Сваки зрак aB (сл. 4.), који улази у систему у правцу ка првој главној тачци B, изаћи ће дефинитивно из друге главне тачке B′ у правцу B′a', паралелном са aB и обратно: ако су на оси системе нађене две тачке, које имају те особине, онда су то главне тачке.

3.) Сваки објект aa_1 и његов оптички лик у последњој средини $a'a'_1$ треба да се виде из главних тачака B и B′ под једнаким међу собом углима $\sphericalangle a\mathrm{B}a_1$ и $\sphericalangle a'\mathrm{B}'a'_1$.

4.) Зависност међу растојањима x и x' сваке две узајамно конјуговане тачке a и a' изражава се овом простом једначином:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

5.) Ова једначина показује, да ако је вредност f, — која се зове *фокално* (жижино) *растојање* системе, — позитивна, онда ће се зраци од ма какве тачке a са растојањем $x > f$ скупити са друге стране системе и даће *стварни* оптички лик њен a' (сл. 4,a); при негативној пак вредности f, растојање x' излази негативно за сваку позитивну вредност x, т.ј. зраци се по излазу из системе разилазе и дају *уображени* лик a' тачке a (сл. 4b). Због тога се системе прве врсте, које преламају, зову *сабирне* а друге, са обратним распоредом фокуса F и F′, — *расипне*.

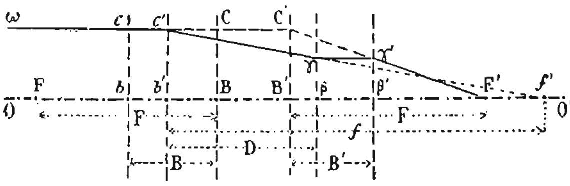
6.) За тако звано *увеличање* V, т.ј. однос величине оптичког лика $a'\,a'_1$ према величини самога објекта $a\,a_1$, — који се налази у равнини перпендикуларној на осу, — имаћемо, услед једнакости углова ∂ и ∂' и сличности троуглова $a\mathrm{B}a_1$ са $a'\mathrm{B}'a'_1$, свакав израз:

$$V = \frac{a'\,a'_1}{a\,a_1} = \frac{x'}{x} = \frac{f}{x-f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Тај израз показује: 1.) да је за стварне ликове код сабирне системе $V < 1$ при $x > 2f$, $V = 1$ при $x = x' = 2f$, $V > 1$ при $2f < x > f$ и $V = \infty$ при $x = f$; 2.) да ће се за уображене ликове, у тој истој системи, V мењати од $V = -\infty$ (при $x = f$) до $V = -1$ (при $x = 0$); 3.) да је код расипних система (са негативним f) бројна вредност увеличања V увек мања од јединице.

4. Комбиновање двеју система које преламају у једну.

Ако две системе, које преламају, — једна са фокалним растојањем f и главним тачкама у b и b' (сл. 6) а друга са фокалним растојањем φ и главним тачкама у β и β', — имају једну и исту, заједничку осу OO′, онда их можемо расматрати скупа, као једну систему са неким фокалним растојањем F и са главним тачкама B и B′, које стоје у односу према b и β' на растојањима: $\mathrm{B}b = \mathrm{B}$ и $\mathrm{B}'\beta' = \mathrm{B}'$.



Сл. 6.

Да бисмо одредили све те три непознате: F, B и B′ при даној вредности за растојање $b'\beta = \mathrm{D}$, замислимо зрак $\omega cc'$, који улази у прву средину споља паралелно са осом OO′ и сусреће главне равнине ове системе у тачкама c и c'. По излазу из ње, он ће поћи правцем $c'\gamma f'$, т.ј. правцем ка другом њеном фокусу f', који се налази од b' на растојању $b'f' = f$; затим, пошто пресече прву главну равнину друге системе $\beta\gamma$ у некој тачци γ, он ће изаћи најзад из конјуговане са њом тачке γ' друге равнине у правцу $\gamma'\mathrm{F}'$ ка траженом фокусу F′ комбиноване системе; а пошто су тачке f' и F′ конјуговане у односу према другој системи, то њихова растојања $f'\beta = -(f - \mathrm{D})$ и $\mathrm{F}'\beta' = +(\mathrm{F} - \mathrm{B}')$ треба да задовољавају једначину:

$$\frac{1}{\mathrm{F}-\mathrm{B}'} - \frac{1}{f-\mathrm{D}} = \frac{1}{\varphi}, \text{ одакле је } \mathrm{F} - \mathrm{B}' = \frac{\varphi\,(f-\mathrm{D})}{f+\varphi-\mathrm{D}}.$$

Али завршни правац тога зрака $\gamma'\mathrm{F}'$ треба да прође такође и кроз тачку C′, у којој паралелни са осом зрак $\omega c\mathrm{C}'$ сусреће другу главну равнину B′C′ комбиноване системе; због тога ћемо, из сличности троуглова C′B′F′ и $\gamma'\beta'\mathrm{F}'$ с једне стране и троуглова $c'b'f'$ и $\gamma\beta f'$ — с друге, имати:

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}-\mathrm{B}'} = \left(\frac{\mathrm{B}'\,\mathrm{C}'}{\beta'\,\gamma'} = \frac{b'\,c'}{\beta\,\gamma}\right) = \frac{f}{f-\mathrm{D}},$$

одакле је:
$$F = (F - B') . \frac{f}{f - D} = \frac{f \varphi}{f + \varphi - D}$$

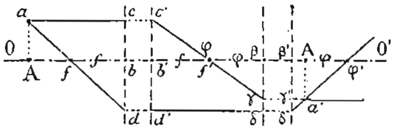
и
$$B' = F - \frac{\varphi . (f - D)}{f + \varphi - D} = \frac{D \varphi}{f + \varphi - D} = \frac{DF}{f} \quad \Bigg\} \quad \ldots\ldots \quad (6.)$$

На сличан бисмо начин и из расматрања зрака, који долази у систему паралелно са осом OO′ са супротне стране, — добили израз за трећу непознату B, симетричан са B′ т.ј.

$$B = \frac{Df}{f + \varphi - D} = \frac{D.F}{\varphi}.$$

Знајући замењивати две системе са једном, као њиховом резултантном, неће бити тешко изналазити резултантну и за три и за ма какав број даних система, које имају заједничку осу OO′.

Напомена. Изналажење фокалног растојања F и главних тачака B и B′ резултантне системе по формулама (6) постаје немогућно само при $D = f + \varphi$, т.ј. када се први фокус φ друге системе поклапа са другим фокусом f' прве системе. Али се и у том изузетном случају оптички лик a' ма какве тачке a лако добива непосредном конструкцијом (сл. 7.), при чему излази:

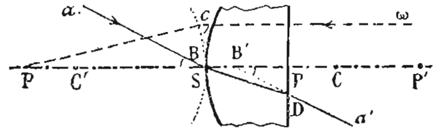


Сл. 7.

$$V = \frac{A'a'}{Aa} = \frac{\beta\gamma}{b'c'} = \frac{\varphi}{f} \text{ и } \frac{A'\varphi'}{Af} = \frac{\beta'\varphi' . A'a'}{\beta'\delta'} : \frac{fb . Aa}{bd} = \frac{\varphi}{f} . \frac{A'a'}{Aa} = \left(\frac{\varphi}{f}\right)^2.$$

Сферна стаклад (сочива).

Ради одређивања положаја главних тачака и фокуса код сферних стаклади (сочива) разнога облика, да узмемо пре свега *равно - испупчено* или *равно - угнуто* стакло, т.ј. које је ограничено с једне стране равнином P а с друге стране сферном површином радиуса CS = + r или пак C′S = — r (сл. 8.), при чему ће оса таквога стакла бити линија SPC (или C′SP), која пролази кроз центар C (или C′) сферне површине перпендикуларно на равну површину.



Сл. 8.

Јасно је, да ће сваки зрак aS, упућен врху S сферне површине, изаћи — као и код равног стакла — у правцу Da', који је паралелан са aS па због тога прва главна тачка B код тог стакла треба да се поклопи са S. Друга пак главна тачка B′ добиће се из пресека продуженог зрака Da' са осом, а растојање њено од P лако је одредити из троугла DSB′ са врло малим углима ∢ PSD и ∢ PB′D = ∢ aSC′, — овако:

$$\frac{B'P}{SP} = \frac{B'D}{SD} = \frac{\sin \sphericalangle PSD}{\sin \sphericalangle PB'D} = \frac{1}{\mu},$$

или
$$B'P = \frac{SP}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.)$$

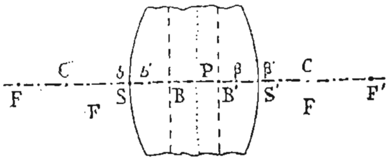
где је SP дебљина стакла а μ индекс његовог преламања.

Кад замислимо затим ма какав зрак ωc, који улази у стакло паралелно оси са стране његове равне површине, увидећемо, да ће он бити преломљен само његовом кривом површином, због тога ће се растојање $SF = f$ одредити из основне формуле (1.)′ ако у њој поставимо, да је $d_1 = \infty$, $d = f$ и $\frac{m_1}{m} = \mu$; на тај ће начин изаћи, да је:

$$f = \frac{r}{\mu - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.)$$

Ова нам вредност f и даје удаљења фокуса F и F′ стакла од главних његових тачака B и B′. Пошто је $\mu > 1$, то ће при позитивној′ вредности r стакло бити сабирно (равно - испупчено) а при негативној — расипно (равно - угнуто).

Код стакла које је са обе стране ограничено сферним површинама S и S′ (сл. 9.) радиуса $CS = r$ и $C'S' = r'$ и чија је дана дебљина $SS' = E$, рачунаћемо те радиусе r и r' за позитивне, када су површине испупчене споља. Ако представимо такво стакло као расечено са равнином P гдегод перпендикуларно на осу CC′, т.ј. као да је састављено из два priљубљена једно к другоме равно-испупчена стакла SP и PS′, онда ће код првога од њих, — као што смо мало час видели, — фокално растојање бити $f = \frac{r}{\mu - 1}$, једна главна тачка b у S а друга b' на растојању $Pb = \frac{PS}{\mu}$; код другог ће пак фокално растојање бити $\varphi = \frac{r'}{\mu - 1}$, једна главна тачка β на растојању $P\beta = \frac{PS'}{\mu}$ а друга β', која се поклапа са S′. По томе ће се фокално растојање F целога стакла и растојања $BS = B$ и $B'S' = B'$ главних његових тачака B и B′ од површина S и S′ наћи као резултанта двеју система, по формулама (6.), ако у њима ставимо у место D величину:



Сл. 9.

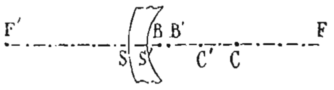
$$D = b'\beta = b'P + P\beta = \frac{SP + PS'}{\mu} = \frac{E}{\mu}.$$

На тај начин, кад означимо ради скраћења:

$$\frac{\mu - 1}{\mu} E = E_1, *)$$

$$\text{добићемо:} \quad F = \frac{rr'}{(\mu - 1)\,(r + r' - E_1)}, \quad B' = \frac{FE_1}{r}, \quad B = \frac{FE_1}{r'} \quad . \; . \; . \quad (9.)$$

Тако н. пр. за испупчено-угнуто стакло (сл. 10.) са радиусима $r = + 6$, $r' = - 3$, при $E = 1$ и $\mu = \frac{3}{2}$ излази: $E_1 = \frac{1}{3}$, $F = - 1.35$, $B = + 1.50$, $B' = - 0.75$.



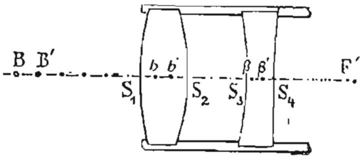
Сл. 10.

Знајући места фокуса и места главних тачака свакога посебног стакла, лако ће их бити наћи и за ма какву систему састављену из два или неколико стаклади. Да учинимо то, например, за објектив од 30 палаца великога рефрак-

---

*) При дебљини стакла E, која је вр. мала у сравнењу са радиусима r и r', величина E_1 изражава доста приближно растојање BB′ међу главним тачкама. Јер заиста, ако у тачном изразу $BB' = E - B - B' = \frac{\mu}{\mu - 1} E_1 - FE_1 \frac{r + r'}{rr'} = \frac{E_1}{\mu - 1} \left(\mu - \frac{r + r'}{r + r' - E_1}\right) = E_1 \cdot \frac{r + r' - E}{r + r' - E_1}$ занемаримо односе $\frac{E}{r + r'}$ и $\frac{E_1}{r + r'}$ у сравњењу са јединицом, онда ће за сва стаклад, независно од њиховог облика, при $\mu = \frac{3}{2}$ бити $BB' = E_1 = \frac{1}{3} E$.

тора Пулковске Опсерваторије. Тај је објектив састављен из два сферна стакла S_1S_2 и S_3S_4 на растојању једно од другога $S_2S_3 = 5.39$ палаца (сл. 11.): за спољње је стакло $r_1 = r_2 = 201.0$ палца, $S_1S_2 = 1.67$ пал. и $\mu = 1.53$; а за унутрашње $r_3 = -190.4$ пал., $r_4 = -5517.0$ пал., $S_3S_4 = 1.03$ пал., и $\mu' = 1.65$. За прво ће стакло по формули (9.) изаћи: $f = 189.90$ пал.; $b = S_1b = +0.55$ пал.; $b' = b'S_2 = +0.55$ пал.; за друго: $\varphi = -283.13$ пал.; $\beta = S_3\beta = +0.02$ пал.; $\beta' = \beta'S_4 = +0.61$ пал.; за систему пак од оба стакла заједно, по формулама (6.) наћи ћемо, да је:



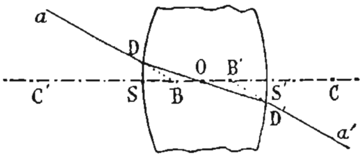
Сл. 11.

$$D = b'S_2 + S_2S_3 + S_3\beta = +5.69 \text{ палаца,}$$

$$F = B'F' = 542.0 \text{ пал.}; \quad B = bB = -11.41 \text{ пал. и } B' = B'\beta' = +17.00 \text{ палаца.}$$

На тај начин главне тачке објектива B и B′ испадају испред дурбина на растојањима од првог стакла: $BS_1 = S_1b + bB = -10.86$ пал. и $B'S_1 = S_1S_4 - \beta'S_4 - B'\beta' = -9.52$ пал.; дужина пак дурбина, рачунајући је од површине првог стакла S_1 до фокуса F', излази да је равна $S_1F' = F - S_1B' = 532.5$ пал. (скоро 14 метара).

Сви могућни зраци $aDD'a'$ (сл. 12.), који су упућени у правцу ка главној тачци стакла B и који излазе из њега правцем $B'D'a'$ паралелно са aDB, пресецају осу стакла CC' увек у једној и истој тачци 0, која се налази од главних тачака B и B′ а тако исто и од површина S и S′ на растојањима, која су пропорционална са радиусима r и r' тих површина; јер из сличности троуглова $BD0$ и $B'D'0$ излази:



Сл. 12.

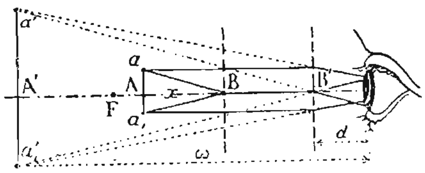
$$\frac{B'O}{BO} = \frac{D'O}{DO} = \frac{D'B'}{DB} = \frac{S'B'}{SB} = \frac{B'}{B} = \frac{r'}{r}.$$

Због тога тачка 0, — која се зове *оптички центар* стакла, — често служи за конструкцију оптичких ликова, сматрајући сваки зрак $aD0D'a'$, који кроз њу пролази, као праволиниски, т. ј. ту се занемарује његово неосетно скретање при малој дебљини стакла. Главне пак тачке, на које је први пут указао *Гаус,* дају тако исто просто средство за конструкцију ликова и код стакла ма какве дебљине и код ма какве сложене системе стакала.

6. Лупа.

Физиолошки је построј ока такав, да оно може разликовати посебне тачке некога предмета а да се оне не сливају само у том случају, када је видно угловно растојање међу њима веће од 30″. Због тога се, са приближењем предмета ка оку, сви детаљи његови пројашњавају све оштрије и оштрије; ово је ипак до извесног растојања ω, после којега се јасноћа виђења погоршава услед неспособности ока да се прилагоди ка блиским растојањима. За даљновидне очи даљина ω најјаснијега виђења је већа од 12 палаца (30 cm.), за нормално око — около 10 или 9 палаца (25 или 23 cm.) а за кратковидо — 7 палаца и мање (18 cm. и мање).

Али ако се гледа на предмет aAa_1 (сл. 13.) кроз сабирно стакло са главним тачкама B и B′ тако, да се зраци по излазу из њега разилазе (дивергирају) и дају уображени лик $a'A'a'_1$ и то на растојању ω од зенице ока, то ће се предмет представити у најјаснијем облику а увеличан у односу $V = a'a'_1 : aa_1$; другим речима, при истом најбољем растојању за виђење ω све ће се посебне тачке предмета видети под углима V пута већим него без стакла. Сабирна система, која служи тој сврси, зове се проста или сложена *лупа* према томе, да ли је састављена само из једнога или неколико стакала.



Сл. 13.

Кад означимо растојање предмета до прве главне тачке стакла B са x, растојање зенице од друге главне тачке B′ — са d а фокално растојање стакла са f, ми ћемо имати у таквом случају по основној формули (4.) ову зависност између x и $\omega - d$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\omega - d} = \frac{1}{f},$$

и за увеличање V — овакав израз:

$$V = \frac{a'a'_1}{aa_1} = \frac{\omega - d}{x} = \frac{\omega - d}{f} + 1 = \frac{\omega}{f} + 1 - \frac{d}{f} \quad . \; . \; . \; . \quad (10.)$$

Одатле се види, да је за добивање могућно већег увеличавања V боље увек држати лупу што ближе оку $(d = o)$; привидно пак по некад увеличање предмета при удаљењу ока од лупе само је оптичка обмана, која се објашњава тиме, што се сав виђени у стаклу простор при томе смањује.

Задаћа. Предмет, који се налази на равној површини равно-испупченог стакла, представља се оку, — које гледа кроз то стакло, — увеличан, као и код лупе. Каква треба да буде дебљина e таквога стакла и радиус r сферне његове површине па да се добије максимално увеличање предмета $V = 21$ при даљини јаснога вида $\omega = 10$ палаца?

Решење. При $d = o$ имамо $V = \frac{10}{f} + 1 = 21$, од куда $f = \frac{1}{2}$ палца и $r = \frac{1}{2} f = \frac{1}{4}$ палца (при $\mu = \frac{3}{2}$). Затим треба да буде $x = \frac{f\omega}{f + \omega} = \frac{10}{21}$ пал. $= b$; а пошто је $b = \frac{fe'}{r} = \frac{2}{3} e$, то је $e = \frac{3}{2} b = \frac{5}{7}$ палца.

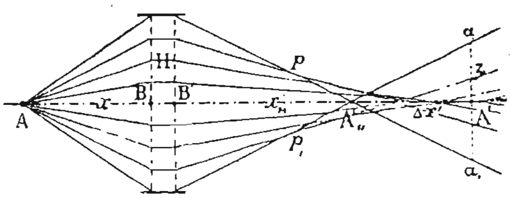
7. Сферна аберација.

Кад не бисмо, — при извођењу основне једначине (1.)′ за једну површину која прелама, — занемарили квадрате углова δ, δ_1 и ρ или, што је исто, квадрате мале линеарне величине $SD = h$ (сл. 1.), онда би се растојање d_h од површине до те тачке A_h, — у којој преломљени зрак DA_h пресеца централни зрак ACA_1, — добило очевидно овако:

$$\frac{1}{d_h} = \frac{1}{d_1} + kh^2,$$

где d_1 означава, као и пређе, растојање тачке A_1 пресека зракова, бескрајно блиских централноме, коефицијент пак k је нека функција величина: m, m_1, r и d.

Сличним ће се чланом са h^2 повећати и основна једначина (4.), која се односи на ма какву систему BB′ (сл. 14.) која прелама, када зраци из дане тачке A на истој оси пролазе кроз њу на знатној дистанцији h од те осе. Кад се означи са x'_h растојање тачке A'_h, — у којој ће се такви зраци сакупити, — од друге



Сл. 14.

главне тачке системе B' а растојање тачке A', — где се скупљају централни зраци, — по пређашњем са x', онда ћемо имати:

$$\frac{1}{x'_h} = \frac{1}{x'} + kh^2$$

где коефициент k треба да зависи како од разних константа, које одређују дану систему BB', тако и од растојања $\text{AB} = x$. На тај начин опште место пресека разних зракова, који полазе из A, биће не само једна тачка, већ цела површина $p\text{A}'p_1$, која се зове *каусчичка.*

Кад са H означимо радиус отвора системе, т.ј. величину h за најдаље зраке од осе, онда ћемо добити за те зраке разлику

$$\triangle x' = x' - x'_{\text{н}} = \text{KH}^2 x' x'_{\text{н}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11.)$$

која се зове *уздужна сферна аберација.* У равнини пак, која је перпендикуларна на осу у тачци A', добиће се оптички лик тачке A у облику целог кружића, чији ће се радиус $\text{A}'a = z$ изразити приближно овако:

$$\frac{z}{\triangle x'} = \frac{\text{H}}{x'_{\text{н}}} \qquad \text{или} \qquad z = \text{KH}^3 x' \quad . \; . \; . \; . \quad (12.)$$

Ова величина z одређује ступањ нејасности ликова и сразмерна је са кубом радиуса отвора H. Она се зове *попречна сферна аберација.* Ево главних резултата, који потичу из алгебарских израза коефицијента сферне аберације K код простих и сложених сферних стаклади:*)

1.) Код двојако-испупчених и равно-испупчених стаклади коефицијент је сферне аберације увек позитиван, т.ј. преломљени се крајњи зраци пресецају међу собом ближе стаклу него централни.

2.) Код двојако-испупченог стакла, за зраке који паралелно падају на њега или из њега излазе паралелно, сферна аберација излази најмања, кад су ра-

---

*) Кад за једну површину која прелама ставимо $cos\,\rho = cos\,\frac{h}{r} = 1 - \frac{h^2}{2r^2}$, имаћемо из троуглова ACD и CDA_1 (сл, 1.):

$$\text{AD} = \sqrt{(d+r)^2 + r^2 - 2r\,(d+r)\,cos\,\rho} = \sqrt{d^2 + \frac{d+r}{r}h^2} = d\left(1 + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{d+r}{d^2 r}\right)$$

$$\text{A}_1\text{D} = \sqrt{(d_1 - r)^2 + r^2 + 2r\,(d_1 - r)\,cos\,\rho} = \sqrt{d_1{}^2 - \frac{d_1 - r}{r}h^2} = d_1\left(1 - \frac{h^2}{2}\cdot\frac{d_1 - r}{d_1{}^2 r}\right)$$

$$\frac{sin \sphericalangle \text{ADC}}{sin\,\rho} = \frac{d+r}{\text{AD}} = \frac{d+r}{d}\left(1 - \frac{h^2}{2}\cdot\frac{d+r}{d^2 r}\right), \frac{sin \sphericalangle \text{CDA}_1}{sin\,\rho} = \frac{d_1 - r}{\text{A}_1\text{D}} = \frac{d_1 - r}{d_1}\left(1 + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{d_1 + r}{d_1{}^2 r}\right),$$

а пошто однос синуса углова $\sphericalangle$ ADC и $\sphericalangle$ CDA_1 треба да буде раван $\frac{m_1}{m} = \mu$, то ће изаћи:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d}\right) - \frac{h^2}{2d}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d}\right)^2 = \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_1}\right) + \mu\,\frac{h^2}{2d_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_1}\right)^2.$$

Таквом се једначином код сфер. стакла одређује растојање d_1 тачке пресека са осом неког зрака после његова прелома са првом површином. Потпуно сличан однос ће се добити и међу растојањима d' и d_1' тачака пресека са осом зрака, који пада у обратном правцу на другу површину стакла радиуса r' са удаљењем од осе h'; да би пак тај зрак био тачно у продужењу првога, при ништавној дебљини стакла, треба да буде $d_1' = -d_1$ и $h' = h$ па ћемо због тога имати још:

$$\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{d}\right) - \frac{h^2}{2d'}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{d'}\right)^2 = \mu\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{d_1}\right) - \mu\,\frac{h^2}{2d_1}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{d_1}\right)^2.$$

диуси његових кривина у односу један према другоме као 1 према 6 и када је притом испупчена површина окренута ка паралелним зрацима; при обратном пак положају површинâ, сферна аберација постаје $3\frac{1}{4}$ пута већа, што и треба имати увек у виду при употреби таквога стакла најбољег облика, као лупе.

3.) Код равно-испупченог стакла са таквим истим фокалним растојањем, као код стакла најбољег облика (1:6), сферна ће аберација повећати најмању свега за $\frac{1}{11}$ део њене вредности.

4.) Сферна се аберација не може потпуно уништити, али може да се учини да буде знатно мања од оне код стакла најбољега облика, ако се оно замени системом са истим фокалним растојањем, састављеном из два двојако-испупчена или равно-испупчена стакла.

5.) За потпуно уништење сферне аберације (т. ј. до другог степена H закључено) у системи из два стакла која се додирују, са даним фокалним растојањима f и f', неопходно је потребно да бар једна од површина буде издубљена; при томе се једним од четири полупречника r r' r'' или r''' може произвољно располагати, пошто они треба да задовољавају само три дана услова:

$$(\mu-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=\frac{1}{f}, \quad (\mu'-1)\left(\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}\right)=\frac{1}{f'} \quad \text{и } K=O.$$

Такве системе стаклади са уништеном сферном аберацијом у њима (за неко одређено растојање од светлосне тачке) зову се *апланатичке*.

Кад саберемо сад ову једначину са предидућом и означимо ради скраћења писања $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{s}$, онда ћемо добити:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{\mu-1}{s}+Kh^2,$$

где је

$$2K=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d}\right)^2+\frac{1}{d'}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{d'}\right)^2+\frac{\mu}{d_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d_1}\right)^2-\frac{\mu}{d_1}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{d_1}\right)^2;$$

кад пак овде заменимо приближно једнаке величине:

$$\frac{1}{d'}=\frac{\mu-1}{s}-\frac{1}{d} \qquad \text{и} \qquad \frac{\mu}{d_1}=\frac{\mu-1}{r}-\frac{1}{d},$$

и после разних скраћења, коефицијент ће K за једно стакло добити овај облик:

$$K=\frac{\mu-1}{2s}\cdot\left[\frac{\mu}{s}\left(\frac{\mu}{s}+\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{3\mu+1}{s}+\frac{2}{r}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d}\right)+\frac{3\mu+2}{\mu}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d}\right)^2\right].$$

При даним величинама μ, s и d овде нам остаје да располажемо произвољно само са једним од радиуса површинâ стакла, например са r па због тога ће за одређивање најмање вредности K_m сферне аберације послужити услов $\frac{\partial K}{\partial r}=O$. На тај се начин при $d=\infty$ и $\mu=\frac{3}{2}$, — сагласно са текстом, — добива:

$$\frac{1}{r}=\frac{(2\mu+1).\mu}{2(\mu+2)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{r'}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{s}, \qquad \frac{r}{r'}=\frac{1}{6}$$

$$K_m=\frac{\mu(\mu-1)(4\mu-1)}{8(\mu+2)}\cdot\frac{1}{s^3}=\frac{15}{112}\cdot\frac{1}{s^3};$$

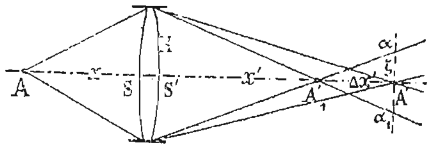
ако пак учинимо да буде $r'=\infty$, т.ј. $r=s$, то ће изаћи

$$K=\frac{(\mu-1)(\mu^3-2\mu^2+2)}{2\mu}\cdot\frac{1}{s^3}=\frac{7}{48}\cdot\frac{1}{s^3}=\frac{49}{45}K_m=\left(1+\frac{1}{11}\right)K_m$$

Најзад, за добивање коефицијента сферне аберације у системи из два вр. танка стакла, која се додирују, требало би предидућем изразу K додати исто такав сличан за друго стакло, ставивши у њему $\frac{1}{d'}=\frac{\mu-1}{s}-\frac{1}{d}$ уместо $\frac{1}{d}$.

8. Хроматичка аберација.

Други недостатак ликова произлази због разлагања белих зракова на разнобојне (у спектрал. бојама) при пролазу кроз сферно стакло. Кад се занемари дебљина стакла SS' у сравњењу са радиусима r и r' његових површина и кад се не узме у обзир сферна аберација, увидеће се, да ће се од зракова, који полазе из тачке A (сл. 15.) скупити само једнороди зраци, са индексом преламања m, у тачци A' на растојању од стакла x', које се одређује из израза



Сл. 15.

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}, \qquad \text{где је } \frac{1}{f} = (m-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right);$$

зраци пак друге боје, са индексом преламања $m' = m + \triangle m$, скупиће се у другој тачци A'_1, чије се мало удаљење $\triangle x'$ од A' зове *уздужна хроматичка аберација* и добива се, као диференцијална промена x', у оваквом облику:

$$\frac{\triangle x'}{x'^2} = \frac{\triangle f}{f^2} = -\frac{\triangle m}{m-1} \cdot \frac{1}{f} = -\frac{p}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (13.)$$

На тај се начин добива у равнини $\alpha A' \alpha_1$, перпендикуларној на осу стакла, уместо тачке A' обојени кружић, чији се радиус $A'\alpha = \zeta$ зове *попречна хроматичка аберација* и изражава се у зависности од радиуса H отвора стакла овако:

$$\zeta = \pm \triangle x' . \frac{H}{x'} = \frac{p}{f} . H . x' ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14.)$$

при чему ће бројна вредност односа $p = \frac{\triangle m}{m-1}$ за црвене и љубичасте зраке бити равна, приближно 0.04, као што то показује даље наведена таблица. Нејасност и обојеност, која отуд произлази, може се ослабити само смањењем отвора стакла H.

Замислимо сада два врло танка и приљубљена једно другоме стакла са различним индексима преламања m и μ и са фокалним растојањима f и φ за зраке какве год одређене боје. Међу растојањима x и x' постојаће тада, на основу формула (4.) и (6.), ова зависност:

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x}, \qquad \text{где је} \qquad \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi}.$$

За зраке пак друге боје, са индексом преламања $m_1 = m + \triangle m$ у првом стаклу и $\mu_1 = \mu + \triangle\mu$ у другом, диференцијалне ће промене вредности $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{\varphi}$ и $\frac{1}{x'}$ бити овакве:

$$\triangle\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\triangle m}{m-1} \cdot \frac{1}{f} = \frac{p}{f}; \qquad \triangle\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\triangle\mu}{\mu-1} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{\pi}{\varphi},$$

$$\triangle\left(\frac{1}{x'}\right) = \triangle\left(\frac{1}{F}\right) = \triangle\left(\frac{1}{f}\right) + \triangle\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{p}{f} + \frac{\pi}{\varphi}.$$

Одатле излази, да ће се оба обојена лика, које расматрамо, поклопити при свима могућним удаљењима x светлосне тачке, ако се испуни услов:

$$\frac{p}{f} + \frac{\pi}{\varphi} = 0$$

а за ово је потребно да односи $p = \frac{\triangle m}{m-1}$ и $\pi = \frac{\triangle \mu}{\mu-1}$ не буду једнаки, зато што би при једнакости њиховој изашло, да је $f = -\varphi$ и $F = \infty$, т.ј. система стаклади неби била ни сабирна, ни расипна.

Таквоме услову одговарају: *крон-стакло* (обично стакло) и *флинт-стакло* (чвршће, са додатком оловног оксида), јер су код њих, вредности m и μ за црвене, жуте, плаве и љубичасте зраке или пак тачније говорећи, за зраке, који одговарају Фраунхоферовим линијама спектра: B, D, F и H — овакве:

	Крон-стакло			**Флинт-стакло**			
	m	$\triangle m$	p	μ	$\triangle \mu$	π	$\frac{\pi}{p}$
B (црвено)	1·5258	0·0038	0·0072	1·6278	0·0073	0·0116	1·61
D (жуто)	1·5296	0·0065	0·0122	1·6351	0·0132	0·0206	1·69
F (плаво)	1·5361	0·0105	0·0194	1·6483	0·0228	0·0346	1·78
H (љубич.)	1·5466			1·6711			
За В и Н		0·0208	0·0388		0·0433	0·0667	1·72

На тај начин, ако се изради расипно флинт-стакло са фокалним растојањем φ за 1.69 пута већим од фокалног растојања f сабирнога крон-стакла, онда ће комбинована из њих система бити сабирна са фокалним растојањем

$$F = \frac{f.\varphi}{f+\varphi} = \frac{-1.69}{-0.69}\cdot f = +2.45 f$$

па ће давати ликове чији ће се зраци боја D и F тачно поклапати, један с другим.

Код комбиноване системе из два стакла није могућно потпуно уништити хроматичну аберацију, — т.ј. за све могућне зраке спектра; зато што однос $\frac{\pi}{p}$, — као што се види из таблице, — не остаје строго подједнак за све парове обојених зракова. Па ипак поклапајући једне са другим не оне крајње већ оне интезавније зраке, наиме наранџасте и плаве (C и F), двојно се стакло може учинити *скоро ахроматничким* а у исто време, — као што је било већ речено, — и *апланатичким*. Тако се наиме и израђују објективи дурбина и микроскопа па и лупа најбољега квалитета.

Ахроматизам се ликова достиже још стављањем двају кронових стакала на таквом растојању једно од другог, да *првим стаклом, разложени* разнобојни зраци падају на друго у различним удаљењима од осе и да најзад изађу из њега паралелно усљед различног деловања сферне аберације на њих. Такве се *ахроматичке системе* стаклади употребљују наиме код окулара дурбина и микроскопа, које ћемо расмотрити у глави, која за овом иде.

ГЛАВА II.

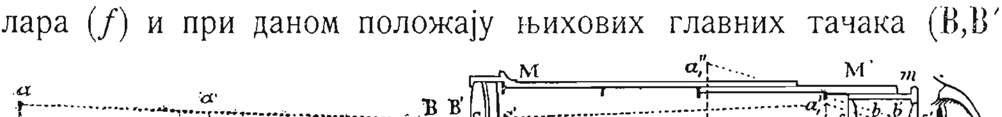
АСТРОНОМСКИ ДУРБИН.

9. Састав астрономског дурбина.

Дурбин се употребљује код астрономских и геодетских инструмената прво ради тога, да дâ увеличане ликове посматраних удаљених предмета и јасније него што их видимо голим оком и друго, за тачније визирање на те предмете при мерењу углова међу њима.

Када је 1609. године, знаменити Галилеј, тек начуо о нађеном у Холандији средству, да се удаљени предмети виде увеличани, он је одмах сâм пронашао потребну за то комбинацију сферних стаклади и, кад је тако конструисао дурбин од једнога двојако-испупченог и једнога двојако-угнутог стакла, он је помоћу њега први пут запазио Венеру у облику српа, тамне пеге на Сунцу, пратиоце Јупитерове и др. Затим је Кеплер у 1610. години показао, да се дурбин може конструисати из два сабирна стакла, од којих једно треба да даје стварне, смањене ликове предмета у изврнутом облику а друго, — које игра улогу лупе, — треба да служи за најјасније расматрање тих ликова у истом изврнутом облику. Коплеров је дурбин бољи од Галилејевог у главноме због тога, што се он може удесити за тачно визирање на предмете за посматрање, увођењем мреже кончића у њему на истом месту где се добивају стварни ликови предмета; али то је већ увео крајем XVII века Пикар и Озу у Француској. Од тога је доба Кеплеров дурбин добио назив *астрономског* дурбина и почео замењивати дотадање гледаче (диоптре) на геодетским и астрономским инструментима и тако постао њихов неопходно потребни саставни део.

Усавршени астрономски дурбин, који се сада употребљује, одликује се од Кеплеровог само тиме, што је састављен не само из два проста сфер. стакла, већ из две сабирне, ахроматичне системе: Система SS', која је окренута посматраноме предмету (објекту) aa_1 (сл. 16.) и кaја даје његов стваран лик $a'a'_1$ зове се *објктив;* система пак ss', која даје увеличан и уображен лик $a''a''_1$, на растојању јаснога виђења ω од ока, зове се *окулар.* Из чл. 3. ми већ знамо, како се конструишу ти ликови $a'a'_1$ и $a''a''_1$ при даним фокалним растојањима објектива (F) и окулара (f) и при даном положају њихових главних тачака (B, B' и b, b').

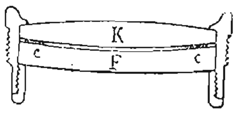


Сл. 16.

Дужина цилиндричне цеви MM, у којој је утврђен објектив, треба да буде приближно равна његовоме факалном растојању F и да садржи у своме другом крају покретну цев са окуларом *mm*, те да посматрач може тај окулар да поставља на најбољем растојању од лика предмета $a'a'_1$ према даљини својега јасног вида ω; код дурбина пак, који су намењени за посматрање земљишних предмета ово је покретање окулара неопходно потребно још и због тога, што се тада сам лик $a'a'_1$ добива на различитим удаљењима од објектива. У унутрашњости цеви утврђене су на неколико места прстенасте диафрагме у циљу, да задрже зраке, који су сувише нагнути према оси стакла а тако исто и друге, који би могли да се рефлектују са дуварова цеви у окулар те да само нашкоде јасности ликова посматраних предмета. Са најужом од њих, која се налази онде где се образују стварни ликови $a'a'_1$, и ограничен је простор, који се кроз дурбин види. У овој цеви утврђена је и мрежа кончића за тачно постављење дурбина (визирање) у правцу предмета, о чему ће бити речено даље (чл. 15.).

10. Објективи и окулари.

Јасноћа ликова, који се образују у дурбину, зависи од величине објектива. У том погледу је дурбин у толико бољи у колико му је објектив већи. Али, пошто са повећањем објектива расте и утицај сферне и хроматичне аберације и пошто се ни једна ни друга не може, строго говорећи, потпуно уништити никаквом системом стакала, — то постоји извесна граница за његов отвор (диаметар), преко које не треба ићи; наиме, диаметар објектива не треба да је већи од $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ или $\frac{1}{20}$ његовога фокалног растојања F, што опет зависи од каквоће системе његових стакала.



Сл. 17.

Објектив дурбинов је обично састављен из сабирног крон-стакла K и расипног флинт-стакла F (сл. 17.), која су уметнута у заједнички, метални прстен тако, да прво треба да буде окренуто предмету, који се посматра. Пошто се са једним од радиуса површина оба стакла може располагати произвољно (чл. 7.), то се предњој, издубљеној површини другога стакла даје обично таква иста кривина, као и задњој, испупченој првога па се стављају једно поред другога, одвајајући их само помоћу три танка листића (*c*) од калаја или стакала. При састављању објектива врло је важна операција, која се зове *центрирање* стакала и која се састоји у томе, да се променом дебљина тих листића и обртањем стакала око њихових оса изнађе такав њихов узајамни положај, при коме би се добили ликови најбоље каквоће.

Гаус је показао, да се оптичка каквоћа објектива побољшава стављањем крон-стакла и флинт-стакла на извесном растојању једно од другога, као код објектива, који смо расматрали у чл. 5., али се, — услед тешкоћа центрирања, — таквим објективима не снабдевају дурбини преносних инструмената.

При саставу се окулара обраћа главна пажња на уништење хроматичке њихове аберације, пошто је, услед незнатних њихових димензија, сферна аберација код њих сразмерно ништавна. У том смислу најбоље задовољавају најпростије системе окулара Хигенса и Рамсдена.

Окулар се *Хигенсов* састоји из два равно-испупчена крон-стакла *s* и *s'* (сл. 18.), чије су испупчене површине окренуте ка објективу дурбина и чија фокална растојања φ и φ' чине са растојњем $ss' = D$ ову пропорцију:

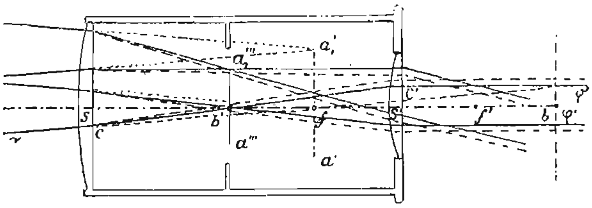
$$\varphi : D : \varphi' = 3 : 2 : 1,$$

тако, да се други фокуси оба стакла налазе у једној и истој тачци φ'. Кад се формуле (6.) прошле главе примене на ову систему и кад се занемари дебљина стакала, добиће се:

$$f = +\tfrac{3}{4} D, \qquad b = +\tfrac{3}{2} D \qquad \text{и} \qquad b' = +\tfrac{1}{2} D,$$

т.ј. распоред је главних тачака b и b' и фокуса f и f' код ове системе такав, да је

$$sb' = s'b' = \tfrac{1}{2} D,\ sf = fb = \tfrac{3}{4} D \text{ и } fs' = s'f' = \tfrac{1}{4} D.$$



Сл. 18.

Пошто ће зраци, који падају у око, излазити из окулара скоро паралелно, то лик предмета $a'a'_1$, који образује дурбинов објектив, треба да се налази у фокалној окуларној равнини системе f, т.ј. тај окулар треба да прима у себе конвергентне (сабирне), зраке. Али кад се узме ма који зрак oc од оних који се скупљају ка фокусу f, и кад се конструише даљи његов пут $c'o'$, по познатим нам правилима, увидећемо, да ће он проћи кроз прву главну равнину b и кроз друго стакло s' на растојању $bo' = s'c' = sc$ од осе (јер је $sf = fb$), тако, да ће се стварни лик предмета $a'''a_1'''$ налазити у равнини b'.

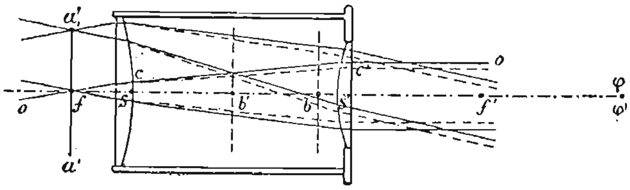
Окулар се *Рамсденов* састоји такође из два равно-испупчена крон-стакла s и s' (сл. 19.), али су испупчене њихове стране окренуте једна другој а међу фокалним растојањем њиховим φ и φ' и растојањем $ss' = D$ постоји овакав однос:

$$\varphi : D : \varphi' = 9 : 4 : 5$$

тако да се фокуси оба стакла и код овог окулара поклапају у тачци φ'. Код овога окулара, по формули (6.) излази:

$$f = \tfrac{9}{8} D, \qquad b = \tfrac{9}{10} D \qquad \text{и} \qquad b' = \tfrac{1}{2} D;$$

т.ј. распоред је главних тачака b и b', и, фокуса f и f' такав, да је $sb' = b's' = \tfrac{1}{2} D$, $fs = f - b = \tfrac{9}{40} D$ и $f's' = f - b' = \tfrac{5}{8} D$. Према томе се први фокус f налази са спољне стране првога стакла s а зраци од самога лика $a'a'_1$, посматранога предмета улазе у окулар дивергентно (расипно), стога се понекад он зове *позитивни*, за разлику од *негативног* Рамсденовог окулара, који у себе прима конвенгертне (сабирне) зраке.



Сл. 19.

Ако се подсетимо на речено у чл. 7., да зраци, који пролазе кроз сабирно стакло око крајева његових, пресецају осу ближе ка стаклу, него ли централни, то ћемо се по ходу зракова, показаноме на сл. 18. и 19., уверити, да се код оба ова окулара хроматичка аберација, по излазу зракова из првога стакла s, паралише различитим упливом на њих сферне аберације у другоме стаклу. То допушта, да се полупречник првога стакла s, и код једног и код другог окулара, доведе до $\frac{1}{2} f$ па чак и нешто више.

Хигенсов окулар, усљед мањег утицаја сферне аберације у њему, даје боље ликове од Ремсденовог па се због тога он сматра као бољи у случајима, када је потребно да се дурбином расматрају најситнији детаљи небесних или земаљских предмета. Али је он неподесан за тачна визирања на посматране предмете, пошто би се кончићи, који су постављени у истој равнини b', где се добивају и њихови стварни ликови $a''' a'''_1$ (сл. 18.), расматрали у њему само другим стаклом s' те би усљед тога изгледали нејасни и обојени; осим тога они при томе неби остајали непокретни при извлачењу и увлачењу целог окулара према даљини посматраних предмета. Због тога се дурбини угломерних инструмената снабдевају обично Ремсденовим окуларима, код којих нема тих незгода.

Код најновијих се преносних астрономских инструмената све чешће и чешће почиње да уводи Келнер-ов сложени окулар, који се зове *ортоскопски*. По положају фокуса f и f' он је сличан са Ремсденовим окуларом, али је оно стакло које је ближе оку, ахроматичко, т.ј. оно је само по себи састављено из два стакла; друго пак, које је двојако испупчено, у знатној мери ослабљује остатак сферне аберације зракова, који пролазе кроз објектив дурбина. Усљед тога је сад могућно, — при истом фокалном растојању F објектива, — отвор (пречник) његов D учини два пут већи него код пређашних дурбина.

11. Увеличање дурбина.

Кад се означи растојање од предмета aa_1 (сл. 16.) до прве главне тачке B објектива дурбиновог са X а растојање од зенице ока до друге главне окуларне тачке b' са d, онда ћемо имати, на основу формула (5.) и (10.) предње главе ове изразе за увеличање V и v објектива и окулара:

$$V = \frac{a' a'_1}{aa_1} = \frac{F}{X - F}, \qquad v = \frac{a'' a''_1}{a' a'_1} = \frac{\omega}{f} + 1 - \frac{d}{f}$$

Под *увеличањем* пак *дурбина* W, разуме се, да треба разумети однос величине лика $a'' a''_1$ не према апсолутној величини самога предмета aa_1 већ према оној величини његовој, која би се представљала ненаоружаном оку под тим истим углом $\sphericalangle \alpha B \alpha_1 = \sphericalangle a B a_1$ на растојању јасногa гледања ω, т.ј. према величини $\alpha\alpha_1 = aa_1 . \frac{\omega}{X}$; због тога ће се оно изразити овако:

$$W = \frac{a'' a''_1}{\alpha\alpha_1} = \frac{aa_1}{\alpha\alpha_1} \cdot \frac{a' a'_1}{aa_1} \cdot \frac{a'' a''_1}{a' a'_1} = \frac{X}{\omega} . V . v$$

Напоменућемо још, да је код окулара Хигенсовог и Рамсденовог растојање d неопходно веће од $s' b' = \frac{1}{2} D$, т.ј. веће од $\frac{2}{3} f$ код првог окулара и од $\frac{4}{9} f$ код другог; даље ћемо пак видети (чл. 12. и 13.), да је при гледању кроз дурбин, донекле чак и погодније држати око на удаљењу $d = f$ од главне тачке окулара b'. Кад се узме, на овим основама, $v = \frac{\omega}{f}$ и кад се занемари, сразмерно према X, мала вредност F, онда ћемо добити:

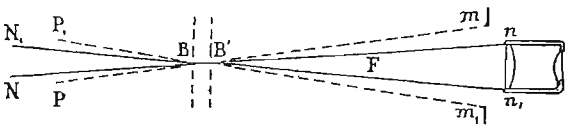
$$W = \frac{X}{\omega} \cdot \frac{F}{X} \cdot \frac{\omega}{f} = \frac{F}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Тако је увеличање астрономског дурбина приближно равно односу фокалнога растојања објектива према фокалноме растојању окулара и показује за колико су пута угли, — под којима се представљају у дурбину ситни детаљи посматраних предмета, — већи од посматраних голим оком.

Ипак не треба ићи сувише далеко са увеличањем дурбина, сувишним смањивањем окуларовога фокалнога растојања f, због тога што се уједно с тиме почињу да запажају различити недостаци ликова, због оптичких несавршенстава објектива.

12. Поље гледања и окуларно окно.

Кад означимо са d диаметар отвора nn_1 (сл. 20.) првога стакла и спојимо крајеве тога отвора са другом главном тачком B′ објектива правим линијама $B'n$ и $B'n_1$ па повучемо кроз прву главну тачку B паралелне им линије BN и BN_1, увидећемо, да се предмет, који се дурбином посматра, мора налазити у унутрашњости коничног простора NBN_1 те да би зраци од њега могли допрети до окулара без рефлекса са дуварова цеви. Угао $N = \measuredangle NBN_1 = nB'n_1$, — који служи као мера тог коничнога простора и који је приближно раван односу $\frac{d}{F}$, — зове се *дурбиново поље гледања*. Пошто је диаметар d окуларовог отвора увек око 2 пута мањи од фокалнога његова растојања f, то поље гледања N треба да се изражава у лучним минутама приближно овако:

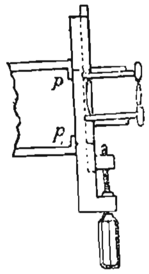


Сл. 20.

$$N = \frac{d}{F \, sin \, 1'} = \frac{f}{2F \, sin \, 1'} = \frac{1700}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

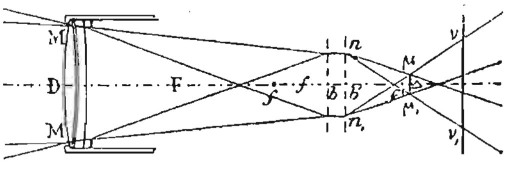
Например, за сразмерно мали дурбин, са увеличавањима 30 и 60 пута, приближно ће бити $N = 57'$ и $N = 28'$; код увеличања пак од 600 и 1000 пута, — која могу бити само код врло великих дурбина, — поље гледања излали мање од 3′ и 2′; због тога се, за визирање таквим дурбином на жељене предмете, на њему утврђује паралелно други, помоћни, мањи дурбин, који се зове *тражилац*.

Као што је напред речено, дијафрагма mm_1 у дурбину утврђује се у фокалној равнини објектива (сл. 20.). Њеним се диаметром $mm_1 = \delta$ одређује угао $\measuredangle PBP_1 = \measuredangle mBm_1 = \frac{\delta}{F}$ оног коничанога простора PBP_1, који се може назвати *пољем гледања* дурбина, због тога што би се све оно могло гледати (посматрати) одједном кроз непокретни дурбин, кад би окуларов отвор d био већи од δ. Али пошто обично бива, да је $d < \delta$, то је код некојих инструмената удешена справа (сл. 21.), за покретање окулара у правцу перпендикуларном на оптичку осу дурбина, ради делимичног посматрања целога његовог поља гледања.



Сл. 21.

Кад пропратимо путеве свих зракова, који допиру из објектива MM_1 у окулар nn_1 (сл. 22.), увидећемо, да они образују за окуларом спочетка конвергентни конус $n\mu\mu_1 n_1$ а затим дивергентни $\nu\mu\mu_1\nu_1$, тако, да кад се објектив окрене светлости, на екрану $\nu\nu_1$ — који је постављен гдегод за окуларом, — појавиће се осветљени кружић $\nu\nu_1$, који ће бити најмањи и потпуно јасан на ономе месту $\mu\mu_1$, где ће он бити стварни оптички лик отвора објектива. Овај најмањи округли простор $\mu\mu_1$, — кроз који пролазе сви окуларем примљени зраци, — зове се *окуларно окно*. Удаљење његово ξ од друге главне окулареве тачке b', — спрегнуто са удаљењем $(F+f)$ објектива од прве главне тачке b, — одређује се овако:



Сл. 22.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F+f} = \frac{F}{f.(F+f)} \qquad \text{или} \qquad \xi = f.\left(1 + \frac{1}{W}\right);$$

диаметар пак његов $\mu\mu_1 = \Delta$, — ако означимо диаметар отвора објектива са D, — биће

$$\Delta = D.\frac{\xi}{F+f} = D.\frac{f}{F} = \frac{D}{W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

Одатле излази, да ако је диаметар Δ окуларнога окна већи од диаметра зенице α, онда је погодније држати око не непосредно иза окулара, као уопште при употреби лупе, већ на удаљењу ξ од друге његове главне тачке b', приближно равном f, те да би у око падала највећа количина зракова.

13. Јасноћа ликова.

На очној мрежњачи (ретини) треба да се добије довољно јасан лик предмета, да би се он могао видети; например, јасноћа је звездâ 7. величине већ толико слаба, да их ни најоштрије око не може угледати ноћу без помоћи дурбина. Али ако је очна мрежњача раздражена још и светлосним зрацима, који долазе и с друге стране, онда ће се моћ разликовања предмета још више смањити, што увек зависи од самога лика предмета и оне позадине на којој се он представља. Па да видимо, какву улогу игра дурбин у томе смислу.

Кад предпоставимо да је дурбин управљен на звезду и да се зеница ока налази на најпогоднијем месту за њу, наиме у равнини окуларног окна, онда ћемо увидети, да ће при $\Delta > \alpha$ са звезде у око допрети не сва количина њених зракова, коју је примио објектив пропорционално квадрату његовога диаметра D, већ смањену у размери $\alpha^2 : \Delta^2$; због тога, кад означимо са I јасноћу звезде, гледану кроз дурбин, а са i — голим оком, — добићемо:

$$\frac{I}{i} = \frac{D^2 \alpha^2}{\Delta^2} : \alpha^2 = \frac{D^2}{\Delta^2} = W;$$

ако ли је $\Delta < \alpha$, то ће бити:

$$\frac{I}{i} = \frac{D^2}{\alpha^2} = W^2 \frac{\Delta^2}{\alpha^2} < W^2.$$

Према томе, заменом окулара слабога увеличања силнијим, јасноћа звезда, која се запажа у дурбину, треба да расте пропорционално са квадратом увеличања W, али само дотле док окно окуларово не буде равно зеници очној; после тога пак употреба врло силних окулара може постати некорисна, јер јасноћа $\frac{D^2}{\alpha^2}$ остаје непромењљива а поље се гледања смањује. Значи, да је за посматрање слабих звезда ноћу најпогоднији онај окулар, чије је окно једнако са зеницом ока.

Сасвим је друкчија ствар при расматрању предмета, чије се привидне димензије у дурбину мењају са увеличавањем W. Светлосни се зраци тада размештају по целој површини лика предмета пропорционално са квадратом увеличања па због тога ће се јасноћа I сваке посебне тачке лика добити деобом предњих израза са W^2, тако да ће изаћи:

при $\Delta > \alpha$ . . . . $\frac{\mathrm{i}}{i} = 1$

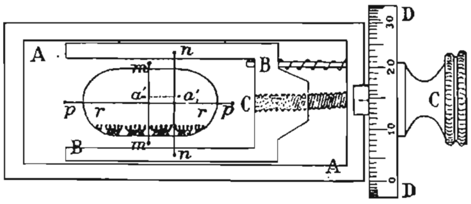
при $\Delta < \alpha$ . . . . $\frac{\mathrm{i}}{i} = \frac{\Delta^2}{\alpha^2} < 1$;

т.ј. за предмете, који имају осетне привидне димензије, јасноћа је ликова у дурбину увек мања него при посматрању голим оком; особито пак ако се узме у обзир губитак светлосних зракова од рефлекса и апсорбирања њиховим објективом и окуларом, који у једном сферном стаклу чини око $\frac{1}{6}$ а у дурбину са четири стакла — око $\frac{1}{2}$ свих зракова, који падају на објектив дурбина. Према томе, ако су предмети, који се посматрају сами по себи врло јасни, као што је: Сунце, Месец, велике планете и т. д. онда окулари са силним увеличањем могу бити погодни за расматрање детаља њихових; при посматрању пак комета, маглина, врло удаљених и рђаво осветљених земљишних предмета и т. сл. није корисно употребити окуларе чије је окно мање од зенице ока. Јасно је такође и то, зашто окулари са силним увеличањем помажу да се звезде виде и дању: јасноћа звезде, са смањењем окна остаје непромењена и равна $\left(\frac{D}{\alpha}\right)^2$, међутим јасноћа светле атмосферне позадине слаби у односу $\left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)^2$.

14. Микрометар.

Угао $\sphericalangle aBa_1$ (сл. 16.), под којим се представља посматрани предмет aa_1 из прве главне тачке B објектива, раван је углу $\sphericalangle a'B'a'_1 = \alpha$, под којим се представља стварни његов лик $a'a'_1$ из друге главне тачке B′, због тога кад се измери ма којим начином линеарна величина $a'a'_1$ и кад се она подели са растојањем од ње до тачке B′, — које је код астрономских посматрања тачно равно F, — онда се може врло тачно да одреди угловна вредност α предмета. Ради тога се у окуларни део дурбина ставља понекад справа за таква мерења, која се зове *микрометар*.

Он се састоји из правоугле кутијице AA (сл. 23.), у чијој се унутрашњости покреће напред и назад, помоћу фино нарезанога завртња CC, покретни рам BB са кончићем nn од паучине перпендикуларно на правац завртња CC; кончић се тај налази тачно у равнини лика предмета $a'a'$; на самој пак непомичној кутији AA затегнут је непокретни кончић pp у правцу завртња CC. Према томе, ако се обртањем кутијице постави кончић pp тако, да он пролази тачно кроз a' и a'_1, или, да буде паралелан са линијом $a'a'_1$, а микрометарним завртњем постави кочић nn прво на тачку a' а затим на a'_1, то ће учињени при томе број обрта и изразити тражено линеарно растојање $a'a'_1$. Округли број обрта, уколико се покренуо кончић nn, броји се помоћу ситних зубаца плочице rr, која се види у пољу гледања; ситни пак делови свакога обрта завртња читају се са великом тачношћу на издељеној цилиндричној површини добоша DD, који је утврђен споља за ручицу завртња.



Сл. 23.

Кад се означи ширина зареза микрометарног завртња са γ а прочитања његова, при стављењу кончића nn на тачке a' и a'_1, са M и M_1, онда ће се добити израз

$$\alpha'' = C.\,(M_1 - M)$$

за број секунди, који се садржи у напред реченом углу α. У том изразу се константна величина $C = \frac{\gamma}{F.\sin 1''}$ зове *вредност једнога обрта завртња* и може се одредити микрометарним мерењем какве већ познате угловне величине α, н.пр. померања Поларне звезде у току тачно познатог интервола времена.

У кутијици се AA обично затеже још један непокретан кончић mm паралелно са nn; кад се унапред одреди стално прочитање M_0, које се добива на добошу микрометра при поклапању покретног кончића nn са непокретним mm, онда се дурбин инструмента може ставити тако, да кончић mm дође тачно на тачку a', па је довољно ставити кончић nn помоћу завртња само на тачку a'_1, при чему ће изаћи

$$\alpha'' = C.\,(M_1 - M_0).$$

15. Мрежа кончића.

Ако се затегну два узајамно перпендикуларна кончића на дијафрагми, која се налази у фокалној равнини објектива, то ће тачка њихова пресека O и друга главна тачка B′ објектива означити у дурбину сталну линију OB′, која се зове *оптичка оса дурбина;* разуме се, да она може и да се не поклапа са оптичком осом објектива. Окрећући сад цео дурбин тако, да пресек (крст) кончића O поклопи прво лик a' какве удаљене тачке a а затим лик a'_1 друге тачке a_1 или, — како се то краће каже, — визирајући дурбином на a и на a_1, увидећемо, да ће се правац оптичке осе OB′ променити при томе тачно за онолики угао, под којим се виде тачке a и a_1 из тачке посматрања. На тај се начин дурбин може удесити на разним угломерним инструментима за визирање на предмете те да са огромном коришћу замени обичне гледаче (диоптре), јер ће се са његовим увеличањем W повећати и тачност визирања W пута. Тачност визирања голим оком кроз гледаче цени се по ономе најмањем углу гледања, под којим се две тачке, посматране голим оком, не сливају уједно. Та тачност може бити оцењена средњом грешком око $\pm 30''$. Из овога излази, да средња грешка ε визирања дурбином, — када су предмети јасни и када се не колебају услед немирног ваздуха, — треба да буде приближно оваква:

$$\varepsilon = \pm \frac{30''}{W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

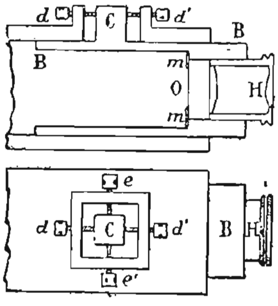
У дурбинима са незнатним фокалним растојањем F објектива и најтањи се кончић од паучине представља, из друге главне тачке B′ објектива, под углом од 2″, 3″ па чак и више, те каткад може и сасвим да заклони посматрани предмет, например звезду слабога сјаја. Због тога се понекад претпоставља, да се у дурбину има не један кончић већ пар блиских, паралелних кончића те да се посматрани предмет ставља тачно у средину међу њима. Код такве мреже кончића, *оптичка* ће *оса* дурбина бити линија B′O, која спаја другу главну тачку B′ са центром O правоугаоника, створеног пресеком од оба пара кончића. Најзад је код некојих астрономских посматрања корисно имати мрежу, која се састоји из читавог низа паралелних кончића, да би се на свима њима посматрала (привидно) покретна звезда или ма какво друго небесно тело при једном и истом, непромењљивом положају дурбина. Под *растојањем* између кончића, код ове врсте мрежа, подразумева се не линеарно растојање међу њима d већ угловно, под којим се они представљају из друге главне тачке објектива т.ј. угао

$$\frac{d}{F.\sin 1''}\,.$$

За израду мреже, паукови се кончићи претпостављају свима другима, због тога, што су изванредно танки и потпуно глатки. Бирају се обично из чаура паукових гњезда а усљед њихове знатне хигроскопности, затежу се на диафрагми у сасвим влажном стању те да се праволиниски облик њихов доцније неби мењао. Ради тога се прилепе воском на крајевима овако изабраног кончића мали оловни тегови (ситне сачме) па се пажљиво умеће у удубљења, која су нарочито за то урезана на потребним местима диафрагме; при томе диафрагма, разуме се, треба да буде извађена из дурбина и постављена хоризонтално на постамент те да се кончић сам затегне помоћу својих тегова, који висе са стране постамента. Кад су сви кончићи тако намештени на диафрагми, онда се за њу залепе копљицама лака.

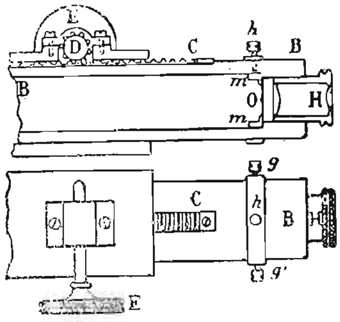
Код мањих је инструмената мрежа каткад гравирана танким цртицама на стаклу, које се затим ставља у диафрагму; али су такве црте знатно грубије од паукових кончића.

Дурбин треба увек да има справу за фино дотеривање диафрагме са мрежом кончића у ону равнину, где се добива од објектива стварни лик посматраног предмета. Ради тога у дурбинима инструмената, који су намењени у главноме за посматрање небесних тела, диафрагма је са кончићима mm смештена у засебној унутрашњој цеви BB (сл. 24.), од које упоље излази брадавица C па се она и покреће назад и напред помоћу завртњева d и d' до тачног довођења кончића до фокалне равнине објектива дурбиновог; бочним пак покретом завртњима e и e', цев се BB обрће око осе дурбинове, чиме се кончићи стављају у потребни правац.



Сл. 24.

Код дурбина пак некојих геодетских инструмената помоћу којих се посматрају и врло удаљени, и врло блиски предмети, мрежа кончића треба да се покреће дуж осе дурбина врло знатно ради њенога поклапања са ликом предмета у сваком од речених случајева; због тога се на унутрашњој цеви BB ставља дугачка зупчаница C (сл. 25.), која се покреће назад и напред зупчастим точкићем D помоћу ручице E; конћићи се пак стављају у потрбни правац обртањем саме диафрагме *mm*, ради чега треба да се олабаве завтњићи *g*, *g'* и *h* помоћу којих је она иначе учвршћена у цеви BB. Треба ипак напоменути, да се код таквих већих покрета цеви BB не може рачунати на потпуну сталност правца оптичке осе у дурбину, због тога што се, — усљед неког клаћења цеви BB и утицаја силе теже на њу, — центар кончића O може унеколико да премешта и наниже и устрану.



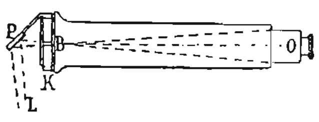
Сл. 25.

Приближавајући и удаљавајући од кончића окуларну цевчицу H према даљини јаснога вида и руководећи се једино и само привидном јасноћом лика посматранога предмета, врло је тешко и једва ли је могућно поставити мрежу кончића да се тачно поклопи са равнином тога лика; међутим, ако тога не буде, визирање дурбином могло би бити несигурно, због тога, што би тада она тачка лика, на коју се визира, скретала од кончића у једну или другу страну са премештањем ока у ту или другу страну. Овакво се непоклапање мреже кончића са равнином лика предмета зове *паралакса кончића*. Ради њеног уништења, треба пре свега поставити окулар H тако, да се кончићи довољно јасно виде а затим тек покретати сву цев B назад и напред све док не буде запажено ни најмање скретање посматране тачке према кончићу, кад се око помера. Тада ће мрежа кончића бити постављена тачно, и, разни посматрачи треба само да мењају положај окуларне цевчице H према својој даљини јаснога вида.

16. Осветљење поља гледања.

За време ноћних посматрања неопходно је потребно, да се вештачки осветли или поље гледаља у дурбину, како би се на њему могли видети тамни кончићи или пак да се осветле сами кончићи. Али се другоме начину прибегава само при посматрањима са великим дурбинима врло слабо осветљених предмета, који се неби могли видети на осветљеном пољу, као што су: магловите пеге, пратиоци планета и т.д.; у том се случају кончићи осветљавају помоћу малене призмице, која рефлектује на њих светлост од лампе са стране окулара. Поље пак гледања осветљава се у дурбинима на један од ових начина:

1.) Код сразмерно малих преносних инструмената на обод се објектива навлачи прстен K са малим металним огледалцем P (сл. 26.), које је постављено под извесним углом нагиба према дурбиновој оси BO; светлосни се зраци L од лампе, — коју држи посматрач унеколико са стране, — одбијају са огледалца па улазе у дурбин кроз објектив, исто онако као и при дневном осветљењу поља гледања.

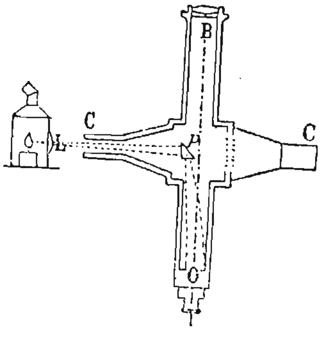


Сл. 26.

2) Код највише инструмената оса је CC (сл. 27.), — око које се дурбин окреће, — шупља, да би се кроз њу пропустила светлост са лампице L; затим се она одбија у правцу окулара са огледалца или призмице *p*, која је утврђена

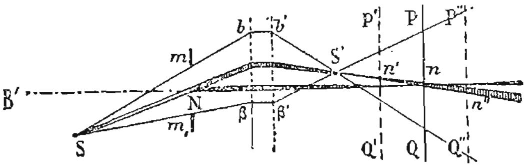
у унутрашњости дурбина нешто устрану од оптичке осе BO. Али, као што ћемо мало затим видети, много је боље, да се призмица постави тачно у оси дурбина те да осветљење поља гледања испадне симетрично према тој оси; губитак извесне количине светлосних зракова са посматраног предмета услед тога, скоро је неосетна за доста велике дурбине.

3.) Ради исте се сврхе, помоћу призмице *p*, пушта светлост са лампе L прво у правцу објектива а затим се она одбије са огледалца, — које је на њему утврђено, — у правцу окулара тачно по оси дурбина.



Сл. 27.

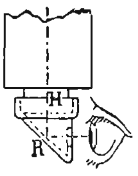
Недостатак осветљења поља гледања вештачком светлошћу, која је упућена не у правцу осе дурбина већ косо са стране, — састоји се у томе, што се при томе виђени положај кончића мења са извлачењем и увлачењем окулара. И заиста, нека је B′N (сл. 28) линија, која иде од друге главне тачке објектива B′ ка једноме од кончића N па нека се са стране налази неки извор светлости S, који шаље ка окуларној диафрагми mm_1 конус светлосних зракова mSm_1 ради осветљења поља гледања у дурбину. Кад уобразимо, ради простије конструкције оптичких ликова, две главне равнине $b\beta$ и $b'\beta'$ сабирне системе, која се састоји из окуларних стакала заједно са оком посматрачевим, као средине која такође прелама, — увидећемо, да ће сви светлосни зраци, пре него што ће да падну на мрежњачу ока PQ, проћи кроз тачку S′, која је спрегнута са S. Кончић пак N, који задржава некоје од светлосних зракова, треба да се представи на ономе месту мрежњаче, где се она сусреће са уским тамним конусом $S'n'nn''$, који има сасвим други правац него конус $B'Nn$, који би постојао при централном осветљењу. Пошто је тачка *n* пресека та два конуса конјугована са N, то ће кончић изгледати да је на истом месту као при централном осветљењу само у том случају, кад мрежњача PQ пролази тачно кроз ту тачку *n*, т.ј. кад је окулар постављен тачно по оку посматрачеву; ако ли последњи услов није тачно испуњен, онда ће лик кончића *n′* или *n″* бити померен устрану те ће посматрање звезде на њему бити погрешно.



Сл. 28.

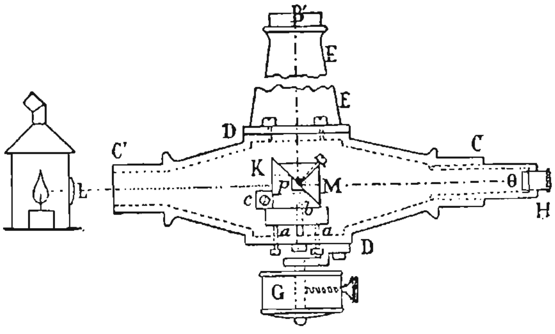
17. Преломљени дурбин.

Кад се посматра са малим преносним инструментима, незгодно је а некад и сасвим немогућно гледати кроз дурбин, када је управљен на небесно тело близу зенита. У таквим се случајима на окулар H намешта призмица R (сл. 29.). У највише пак случајева та се незгода отклања на тај начин, што се дурбини за те инструменте израђују не прави већ преломљени.



Сл. 29.

У преломљеном дурбину (сл. 30.) између објектива B′ и окулара H смештена је велика правоугла стаклена призма M са чије се хипотенузе одбијају сви зраци, који су прошли кроз објектив и упућују ка окулару. Разуме се, да таква



Сл. 30.

призма треба да буде израђена од врло доброг једнородног стакла а равне њене катете и хипотенуза треба да буду пажљиво полиране те да не искваре ликове, које даје објектив.

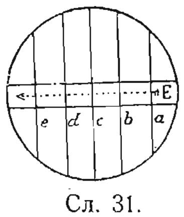
Окуларни део C преломљеног дурбина, њему симетрична шупља метална цев C′ и интервални међу њима паралелотипед DD представљају једну целину, која служи као хоризонтална оса за обртање дурбина. На томе је паралелотипеду утврђен: објективни део дурбина E, тег G као контрабаланс предњем делу и унутрашњи метални постамент K за призму M. Овај се постамент, — базирајући на три завртња *a*, — чврсто приљубљује к паралелопипеду завртњем *b*; помоћу ових завртања и помоћу још два побочна *c*, постамент треба да буде постављен заједно са призмом тако, да посматрани кроз окулар ликови предмета буду најјаснији. Али при томе треба имати у виду, да се са променом положаја постамента мења такође и правац зракова, који се добивају са призмине хипотенузе у правцу окулара па се према томе мења и *оптичка оса дурбина,* под којом код преломљеног дурбина треба подразумевати правац зрака B′M, који прелази кроз другу главну тачку објектива B′ па се одбија призмом тачно у правцу ка центру мреже кончића O.

Вештачко осветљење поља у преломљеном дурбину врши се помоћу лампице L, чија светлост долази до хипотенузе велике призме M кроз шупљину осе C′ и кроз канал на постаменту K, а да би та светлост могла продрети и кроз велику призму M ка окулару, на њеној се хипотенузи прилепљује друга врло мала призмица *p* или се на тој хипотенузи оставља неполиран један мали мат кружић.

18. Одређивање растојања међу кончићима.

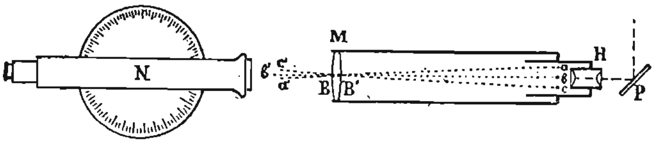
Најбоље методе које се употребљују за одређивање угловних растојања међу кончићима мреже, која је постављена у фокалној равни дурбина каквога инструмента, јесу:

1.) Ако су кончићи *a*, *b*, *c*,… (сл. 31.) поствљени вертикално, то се дурбин постави приближно у правцу меридијана, подигне се колико треба по висини, да би каква звезда E са познатом деклинацијом прошла кроз средину поља гледања перпендикуларно према кончићима *a*, *b*, *c*…. па се запажају по часовнику или по хронометру моменти пролаза звезде t_a, t_b, t_c…. кроз све те кончиће. Кад се изразе затим разлике: $t_b - t_a$, $t_c - t_b$…. у секундама звезданог времена па помноже са $\cos\delta$, добиће се угли, које је звезда прешла од једнога кончића до другог, изражени у секундама звезд. времена. Сасвим се сличним начином могу извести и растојања међу кончићима, који су хоризонтално постављени, кад се код њих посматра вертикално кретање какве звезде, т.ј. кад се она посматра у близини њене елонгације; али, добивена при томе угловна растојања *ab*, *bc*…. треба још корегирати разликом утицаја рефракције за разне висине, које одговарају кончићима *a*, *b*, *c*…



Сл. 31.

2.) Дурбин са кончићима *a*, *b*, *c*... (сл. 32.) постави се објективом M директно према дурбину N некога тачног угломерног инструмента а са стране окулара H пропусти се довољна количина светлости (н.пр. помоћу огледалца P). Тада ће се у фокалној равнини дурбина N добити јасни ликови кончића *a*, *b*, *c*,... као да се налазе на бескрајном удаљењу, због тога што ће разни зраци са њих изаћи из објектива M паралелно. При томе, по особини главних тачака објектива B и B', ови ће се кончићи видети у дурбину N у правцима *a*'B, *b*'B, *c*'B... паралелним са *a*B', *b*B', *c*B'...; због тога ће, измерени инструментом N, угли међу правцима *a*B', *b*B', *c*B'... и бити тражена угловна растојања међу кончићима *a*, *b*, *c*...



Сл. 32.

3.) Најпростије се одређују растојања међу кончићима у дурбину, када је он саставни део тачног угловног инструмента, зато што је у том случају довољно навизирати са њим на какав удаљени, јасни предмет, једно за другим са сваким од кончића *a*, *b*, *c*,..., после сваког извршити прочитање на непомичном кругу инструмента па добити тражена растојања међу кончићима, узевши просто разлике извршених прочитања.

Када се дурбином посматрају блиски земљишчи предмети, онда се, усљед извлачења цеви са мрежом кончића ради уништења паралаксе, напред нађена нормална угловна растојања Θ међу кончићима унеколико смањују и, као што је лако видати, постају равне $\Theta' = \Theta . \frac{F}{x'}$, — ако се са F означи фокално растојање објектива а са x' растојање од друге његове главне тачке до стварног лика посматраног предмета. — Ако се пак са x означи удаљење предмета од дурбина, онда ћемо имати

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x}$$

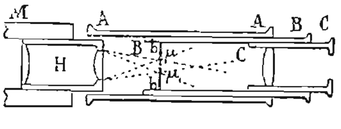
па према томе

$$\Theta' = \Theta \left(1 - \frac{F}{x}\right).$$

19. Одређивање увеличања дурбина.

Усљед незгоде и тешкоће да се посебно измере фокална растојања објектива дурбина F и окулара f, увеличање се његово W одређује не по формули $W = \frac{F}{f}$ већ другим простијим начинима:

1.) Најпростије се оно одређује из израза $W = \frac{D}{\Delta}$ (чл. 12.), што захтева само мерење диаметра D отвара објектива и окуларног окна Δ, при чему је потребно да се оно, као врло мало, измери врло тачно. За ту сврху постоје справе, које се зову *динаметри* (мерачи дурбинове силе). Од њих је највише у употреби *Рамсденов динаметар,* који се састоји из три цеви за извлачење A, B и C (сл. 33.): прва се A ставља на окулар H дурбина M који се испитује; средња B садржи у себи мат стакло *bb* са нарезаном на њему скалом ситних цртица; спољња пак C снабдевена је

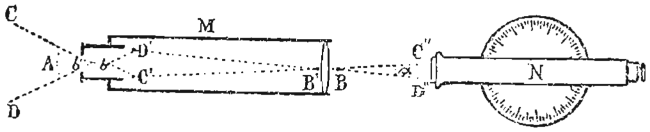


Сл. 33.

лупом. Пошто се постави цевчица C по оку те да се сасвим јасно виде цртице на скали, треба померати цев B назад и напред дотле, док се на мат стаклу *bb* не добије окуларно окно у облику јаснога кружића минималних димензија а у исто време и са најоштријом контуром, после чега се његов диаметар $\mu\mu_1 = \Delta$ лако одређује на скали са цртицама.

Кад се нема таква справа под руком, лик се окуларног окна може добити на екрану од хартије па диаметар његов Δ измери просто шестаром или издељеним ленирићем. При мерењу пак објективног отвора D, треба имати у виду, да је он понекад знатно већи од диафрагме која се налази позади објектива, због тога је најбоље ставити на објектив врхове отвореног шестара па их скупљати дотле, док се њихов лик не појави на окуларном окну, онда ће тај отвор шестара и бити тражена величина D.

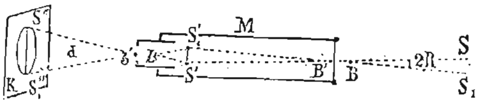
2.) *Гаусова* метода. Кад се дурбин M, (сл. 34.) чије увеличање треба одредити, окрене окуларом *bb′* у правцу два удаљена предмета C и D, који образују угао C*b*′D = A, то ће се они видети кроз његов објектив BB′ у смањеном облику под углом C″BD″ = α, који може бити измерен каквим угломерним инструментом, који се ставља непосредно пред дурбином M; угао пак A измери се тим истим инструментом директно. Али пошто су угли $\measuredangle$ C″BD″ и $\measuredangle$ C*b*′D респективно равни са углима $\measuredangle$ C′B′D′ и $\measuredangle$ C′*b*D′, под којима се оптички ликови C′ и D′ предмета представљају из главних тачака објектива (B′) и окулара (*b*) а однос тангенсâ половинâ последњих углова раван односу фокалних растојања F и *f*, то ће се тражено увеличање дурбина W наћи овако:



Сл. 34.

$$W = \frac{F}{f} = \frac{tg\frac{1}{2}A}{tg\frac{1}{2}\alpha},$$

3.) Кад се дурбином M навизира на Сунце SS_1 (сл. 35.) добива се на екрану K, — који је постављен на извесном растојању *d* иза окулара, — више или мање јасан лик Сунчева диска. По диаметру његовом $S''S''_1 = 2\rho$ и по истинитом радиусу Сунца R, — који се узима из астрономских таблица, — увеличање се дурбина W добива, као и у предњем случају, из израза:



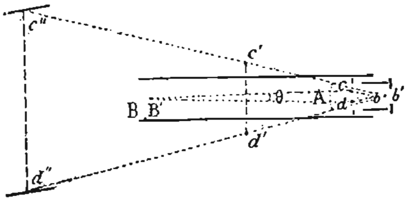
Сл. 35.

$$W = \frac{tg\frac{1}{2}S''b'S''_1}{tg R} = \frac{\rho}{d.\,tg R}.$$

4.) Ако се пред сразмерно малим дурбином постави на неколико метара довољно дугачка скала (летва) са подједнаком поделом па се једним оком гледа на њу кроз дурбин а другим непосредно, кад се затим изброји колики број подеока виђених голим оком стоји наспрам једнога, виђеног кроз дурбин, онда ће тај број приближно и изразити увеличање дурбина.

5.) Најзад, у оним случајима, када је сам дурбин снабдевен мрежом кончића и када су угловна растојања Θ међу њима позната, може се једним оком да гледа на два од њих н.пр. c и d кроз окулар, другим пак оком запазити њихове пројекције c'' и d'' на зиду, који је пред дурбином (сл. 36.). Кад се срачуна, по измереној дужини $c''d''$ и растојању од зида до ока, угао $\sphericalangle c''b'd'' = \sphericalangle cbd = A$, под којим се представљају та два конца у окулару, — онда ћемо добити за тај дурбин

$$W = \frac{tg \frac{1}{2} A}{tg \frac{1}{2} \Theta}$$



Сл. 36.

По себи се разуме, да код свију ових метода за одређивање увеличања дурбина треба његов окулар претходно поставити тако, да се врло удаљени предмети виде најјасније.

20. Испитивање оптичке каквоће дурбина.

Указали смо већ на разне околности (дебљина и кривина кончића, паралакса кончића, ексцентричност осветљења поља гледања, променљивост оптичке осе усљед покрета мреже), које могу при визирању дурбином да изазову грешке сталнога карактера те да увећају у већој или мањој мери средњу грешку ε свакога визирања, која иначе зависи од увеличања W (сл. 15.). Али по неки дурбин може да буде и сасвим неупотребљив усљед оптичког несавршенства његових стакала а нарочито објектива.

Каквоћа се дурбина у оптичком смислу најбоље оцењује посматрањем какве јасне звезде у њему. Кроз окулар са силним увеличањем таква звезда треба да изгледа као сјајан кружић, обавијен, — услед дифракције са крајева објектива, — целим редом концентричних сјајних прстенова; кроз рђав пак дурбин лик звезде изгледа неправилан и пропраћен једним или неколиким зрацима у облику репова, што произлази наиме од рђавог полирања и нееднородне масе стакала објектива а и призме, ако је дурбин преломљен. Затим, кад се окулар извлачи и увлачи, лик звезде треба да се расплињује подједнако на све стране, задржавајући симетричан облик; по обојеним крајевима, који се при томе појављују, може се судити о ступњу ахроматизма објектива. Најзад, апланатизам се објектива може проконтролисати покривањем час крајева, час средине његове, једно за другим, помоћу диафрагми од хартије, при чему лик звезде треба да остане подједнако јасно оцртан.

Врло блиске и довољно сјајне двојне звезде служе такође као одлично средство за оцену каквоће дурбина. Кроз добар се дурбин виде такве звезде јасно одвојене једна од друге а кроз рђав (са објективом исте величине) оне се сливају уједно. Са објективом н.пр. од 1 енгл. палца треба већ јасно да се представе као двојне звезде: ξ *Ursae Majoris* (растојање d међу обема звездама 14″) и γ *Andromedae* ($d = 11''$) а са објективом од $1^1/_2$ до 2 палца — α *Geminorum* ($d = 5''$) и η *Ursae Majoris* ($d = 4''$).

Ликови у дурбину понекад постану мутни и нејасни усљед тога, што се стакла објектива или окулара, а и призме код преломљених дурбина, покрију влагом (росом) или прашином. У тим случајима није тешко извршити чишћење окулара, који се лако растављa, као и спољних површина стакала објектива. Да се неби стакла озледила, треба их пре свега. очистити од прашине меком четкицом а затим тек брисати старом, чистом и меком крпицом или њежном јеленском кожом. А када је потребно одвајати стакла објектива једно од другога, да би се очистила од влаге, која је продрла унутра, онда је потребно забележити, где су се тачно налазили листићи, који су их раздвајали (чл. 10.), да би се затим поставили тачно на пређашњим местима, јер иначе ако се наруши центрирање стакала објектива, наступиће рђаво стварање ликова истим објективом. За чишћење пак катета и хипотенузе призме код преломљених дурбина, треба је извући из паралелопипеда заједно са постаментом (чл. 17.), — пошто се претходно скине објективни део дурбина; — при томе треба одвртати само оне завртње, помоћу којих се утврђује постамент, али никако не и оне, на које се он наслања, због тога што промена пређашњег положаја призме може да изазове не само знатну промену у правцу оптичке осе дурбина, већ да знатно смањи и каквоћу ликова, које дурбин даје.

20.а. Испитивање објектива по Хартмановој методи.

Објективи се могу испитивати на разне начине. Ми ћемо описати најтачнију методу, која се сада често употребљује и служи за једновремено одређивање константних објектива, т.ј. фокалног растојања његовог и положаја главних тачака и тачака чворова*), као и за одређивање сферне и хроматичке аберације. Ову је методу дао Хартман 1902. год. и употребљује се, између осталих, и код фирме К. Цајса у Јени.

Карактерна особина Хартманове методе састоји се у томе, што она не изискује посматрања тачних ликова, другим речима код ње није потребно вршити визирање на фокус, што је увек скопчано са знатним грешкама. Посматрања се изводе над ванфокалним ликовима те се положаји конјугованих и фокалних равнина одређују рачунским путем.

Метода се може применити на испитивању ма каквих објектива, и посматрања се изводе или фотографским или визуалним путем.

Суштина Хартманове методе састоји се у овоме:

Пред објективом, који се испитује, ставља се диафрагма, на којој су направљени мали округли отвори, поређани симетрично на разним концентричним круговима. На унутарњем, најмањем кругу може се направити, например, четири отвора, поређана кроз сваких 90°; на следећим круговима број отвора може да се повећа, ређајући их кроз сваких 45°, 30° или, најзад $22^1/_2$°. У сваком случају број отвора на сваком кругу не треба да буде мањи од 4. Општи центар тих кругова ставља се на оптичку осу објектива у непосредној близини од њега. Пред диафрагмом са округлим отворима на знатном растојању од објектива ставља се извор светлости у облику светле тачке. Ако се за такву узме каква јарка звезда, то ће посматрање одмах дати положај главне фокалне равнине објектива. У лабораторијама је удобније користити се вештачким извором светлости,

---

*) Тачке чворова или чворне тачке, као што је познато из физике, поклапају се са главним тачкама у случају кад зраци улазе из једне средине (ваздуха) у другу која прелама (стакла) па најзад излазе у исту средину (ваздух), као што је то у нашем случају (дурбин, микроскоп, лупа).

например, електричном лампицом или волтовим луком, чија се светлост пропушта кроз округли отвор на металној плочици, покривен млечним или мат-стаклом. У том случају растојање његово од објектива, који се испитује, не треба да буде мање од двојног фокалног растојања његовог. Светла се тачка такође ставља на оптичкој оси објектива.

Згодно је у том случају користити се оптичком справом, по којој се могу премештати сви речени делови по једној правој линији и тачно мерити растојања међу њима.

Зраци светлости, пошто падну на диафрагму поделиће се на онолико танких снопова, колико отвора има на диафрагми. Пошто прођу, затим, кроз објектив, сваки ће од њих дати лик светле тачке. Кад би објектив био сасвим без аберације, сви би се ти ликови поклопили у једној тачци на оптичкој осовини објектива; ако ли објектив има аберације, тога поклапања неће бити.

Пропуштањем зракова са извора светлости кроз филтар, који је прозрачан само за зраке одређене дужине таласа, можемо испитати ход светлосних снопова после пролаза њихова кроз разне делове објектива. То даје потпуну представу о сферној аберацији за зраке дане дужине таласа; скуп таквих испитивања за разне боје светлости одредиће хроматичку аберацију.

Кад се испитивање врши фотографским путем, осетљива се плоча експонира у положају између објектива и места где се добивају јасни ликови; друга се плоча ставља приближно на исто таквом растојању (неколико сантиметара) иза места јасних ликова па се поново експонира. На сваком се лику добива онолико округлих пега, колико је било отвора на диафрагми. Растојање, на које је потребно поставити плочу, одређује се тако, да се добивене пеге не сливају међу собом. По распореду кружића на оба снимка, могу се наћи они, који припадају једноме и истом танкоме снопу зракова. Растојање међу центрима свака два кружића, који леже на истом диаметру диафрагме, мере се помоћу микроскопа, сличног ономе, који служи за мерење спектрограма. Плоча се ставља на непокретан столић микроскопа; кончић се у пољу гледања постави на центар кружића; затим се обртањем микрометарног завртња цев микроскопа премешта по хоризонталној скали дотле, док тај исти кончић не поклопи центар симетричног кружића. Прочитања се узимају на скали и добошу завртња с тачношћу до хиљадитог дела милиметра. Ради тачног мерења неопходно је потребно, да се плоча на столићу микроскопа тачно оријентира.

Лако је увидети, на који се начин може наћи растојање између прстена објектива и тачке пресека снопова по познатим растојањима (A_1 и A_2) експонирања плоча од ма које тачке прстена објектива, а тако исто по растојањима (e_1 и e_2) међу симетричним кружићима при оба положаја плоча.

Тражено је растојање, очевидно, $A_1 + x$ (сл. 36. а).

Са слике имамо да је

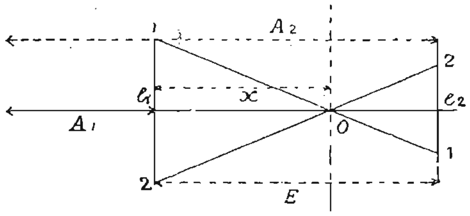
$$\frac{x}{A_2 - A_1 - x} = \frac{e_1}{e_2},$$

одакле је

$$x = \frac{(A_2 - A_1)\, e_1}{e_1 + e_2}$$

За сваки пар снопова, који одговарају симетричним отворима, изналазе се тачке њихова пресека О од прстена објектива. Назовимо то растојање словом А. Кад се осим тога измери растојање светле тачке од прстена објектива и занемари његова дебљина, добиће се у првом приближењу фокално растојање објектива f из формуле

$$\frac{1}{D}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f},$$



Сл. 36.а

Кад одредимо f за централне и крајње снопове, наћи ћемо величину сферне аберације; кад одредимо f за тачке, поређане на истом кругу, наћи ћемо грешке зона; кад одредимо, најзад, f за кружиће, поређане на истом кругу, али у узајамно перпендикуларним равнинама, наћи ћемо величину астигматизма и одредићемо правац меридијанске равнине, која одговара максималној вредности f. Полусума фокалних растојања за два пара снопова, који се налазе на перпендикуларним равнинама даје фокално растојање, ослобођено од астигматизма.

Кад одредимо f за основне монохроматичке боје светлости само по централним сноповима, наћи ћемо величину хроматичке аберације. Интерполовање, извршено, например, графичким путем, даје хроматичку аберацију за зраке ма које дужине таласа. Најзад, кад сравнимо величине f за разне боје зракова, — нађене како по централним, тако и по крајњим сноповима, — наћи ћемо хроматичке разлике сферне аберације. Уједно с тим сферно интерполовање омогућава, да се нађу границе поља гледања, у којима аберације не превазилазе извесну величину.

За одређивање нетачности конструкције објектива, као што се види, можемо се ограничити напред изложеним манипулацијама; али нам оне ипак не пружају могућности за срачунавање његових константних.

Главни типови објектива, који се израђују код Цајса имају сљедеће хроматичке и сферне аберације, нађене по методи Хартмановој.

Хроматичка је аберација изражена у $\frac{1}{100.000}$ деловима фокалног растојања.

Тип објектива:		Е	А	В
Дужина таласа	0.656 μ	— 19	— 9	+ 7
	0.578	— 65	— 16	— 2
	0.546	— 64	— 22	— 8
	0.486	0	0	0
	0.434	+ 193	+ 92	+ 48

Е означава ахроматички објектив из обичних силикатних стакала; А — дупли апохромат из стакала без другог (споредног) спектра; В — тројни апохромат без другог спектра.

Сферна аберација ни у једном случају не превазилази $\frac{1}{1000}$ део фокалног растојања.

За одређивање тачне величине фокалног растојања f треба знати положај главних равнина и чворних тачака објектива.

Прости, али уједно стим и довољно тачни начин за одређивање главних равнина састоји се у овоме:

Објектив за испитивање са његовим прстеном ставља се на стаклену скалу која лежи на столићу микроскопа за мерење. Скала се поклапа са пречником објектива а једна од њенних цртица са центром прстена објектива. Претпоставимо, да је прво на скалу постављен онај крај прстена, који је нормално окренут посматрачу.

Посматраћемо кроз микроскоп цртице скале, померајући га паралелно самоме себи и одређујући микрометарним завртњем величину тога померања. Изабраћемо два положаја микроскопа AP_1 и BP_2 на једнаким растојањима од центра објектива. Одговарајуће црте на скали, које се при томе виде кроз микроскоп, нека буду a и b. Пошто су зраци AP_1 и BP_2 паралелни, то зраци Aa и Bb по излазу из објектива треба да се пресеку у тачци F, која се налази у главној фокалној равнини. Приближно фокално растојање f већ нам је познато, и оно је у свима случајима велико у сравњењу са дебљином објектива. Назовимо растојање AB, измерено микрометарним завртњем, са d; растојање ab, узето по прочитањима скале, са d'. Из просте пропорције наћи ћемо растојање равнине AB од краја прстена. Наиме:

$$h = \frac{d - d'}{d} \cdot f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

Равнина AB, — на којој се паралелни сноп зракова, који ступа у објектив правцем оптичке осе, пресеца са зрацима, који излазе из главног фокуса F, — јесте друга главна равнина објектива, ако је она одређена на основу централних зракова. Ово се одређивање понавља за разне величине AB. Сваки се пут при томе добивају различите вредности за h, које имају систематски ход. Довољно је мало екстраполовање, да би се добила вредност h за светлосни сноп, који пролази кроз централну тачку објектива. Тиме ће се дефинитивно одредити положај друге главне равнине у односу према прстену објектива.

На слични се начин одређује и положај прве главне равнине у односу према предњем крају прстена, кад се објектив постави тим својим крајем на стаклену скалу. Знајући h и враћајући се предидућем испитивању, могу се тачним начином одредити величине D и d, читајући их не са крајева прстена већ са одговарајућих главних равнина.

По познатој формули

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

налазимо фокално растојање f за разне светлосне снопове.

Формула (*) показује, да се разлика $d - d'$ треба да одређује са највећом могућном тачношћу. И заиста, однос $\frac{f}{d}$ за зраке, блиске центру, може да надмаши 100. Ако грешка у $d - d'$ износи 0.001 *mm*, грешка ће у h у том случају доћи до 0.1 *mm*.

Да нађемо сад средњу грешку у одређивању A.

Растојање A места јасних ликова од прстена објектива зависи од четири величине A_1 A_2, e_1 и e_2, сагласно формули

$$A = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{e_1 + e_2} e_1 .$$

Кад ставимо уопште, да је

$$A = f\ (A_1,\ A_2,\ e_1,\ e_2),$$

наћи ћемо средњу грешку те функције у зависности од грешака мерених величина у облику

$$\triangle A = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A_1}\right)^2 \triangle A_1{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial A_2}\right)^2 \triangle A_2{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e_1}\right)^2 \triangle e_1{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e_2}\right)^2 \triangle e_2{}^2}$$

За посебне производне имамо:

$$\frac{\partial f}{\partial A_1} = \frac{e_2}{e_1 + e_2}\,;\ \frac{\partial f}{\partial A_2} = \frac{e_1}{e_1 + e_2}\,;\ \frac{\partial f}{\partial e_1} = (A_2 - A_1)\frac{e_2}{(e_1 + e_2)^2}\,;\ \frac{\partial f}{\partial e_2} = -\frac{(A_2 - A_1)\,e_1}{(e_1 + e_2)^2}\,.$$

Назовимо са $2r$ растојање међу симетричним отворима на диафрагми, постављеној пред објективом. Расматрани пар светлосних снопова, који падају на објектив, пролазе кроз њега на растојању $2r$ један од другога. Ако са F означимо растојање места најјаснијих ликова од друге главне равнине објектива, лако је видети, да је

$$\frac{2r}{F} = \frac{e_1}{x}\,,$$

где је, према раније нађеном

$$x = \frac{(A_2 - A_1)e_1}{e_1 + e_2}\,.$$

Према томе је

$$\frac{A_2 - A_1}{e_1 + e_2} = \frac{F}{2r}\,.$$

Стога је

$$\frac{\partial f}{\partial e_1} = \frac{F}{2r}\cdot\frac{e_2}{e_1 + e_2}\,;\ \frac{\partial f}{\partial e_2} = -\frac{F}{2r}\cdot\frac{e_1}{e_1 + e_2}\,.$$

Кад ставимо, најзад, да је $\triangle A_1 = \triangle A_2 = \alpha =$ тачности очитавања растојања фотографских плоча од прстена објектива, а $\triangle e_1 = \triangle e_2 = \varepsilon =$ тачности мерења под микроскопом одсечака e_1 и e_2, — тражена ће се средња грешка добити у облику:

$$\triangle A = \pm \sqrt{\left(\frac{e_2}{e_1 + e_2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{e_1}{e_1 + e_2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{F}{2r}\right)^2 \left(\frac{e_2}{e_1 + e_2}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{F}{2r}\right)^2 \left(\frac{e_1}{e_1 + e_2}\right)^2 \varepsilon^2}$$

или

$$\triangle A = \pm \sqrt{\left(\frac{e_2}{e_1 + e_2}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{e_1 + e_2}\right)^2}\cdot \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{F}{2r}\right)^2 \varepsilon^2}\,.$$

Одсечци e_1 и e_2 не разликују се много један од другога. Ако је, например, $e_1 = e_2$ то ће први радикал бити раван $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707$, и то је његова најмања вредност; ако ли је $e_1 = 2e_2$ или обратно $e_2 = 2e_1$, онда ће радикал бити раван 0.745.

На тај начин он ће у свима случајима, који се могу десити на пракси, сачувати скоро исту величину; стога се с довољном приближности може ставити:

$$\sqrt{\left(\frac{e_2}{e_1 + e_2}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{e_1 + e_2}\right)^2} = 0.73.$$

Величина A_1 и A_2 одређују се с тачношћу до $\alpha = 0.02$ mm; e_1 и e_2 с тачношћу до $\varepsilon = 0.003$ до 0.008 mm. Однос $\frac{F}{2r}$ мења се од 10 до 100. Услед великог фактора, $\left(\frac{F}{2r}\right)^2\varepsilon^2$ најчешће излази знатно веће од α^2. За те случаје, кад одбацимо први сабирак, добићемо ванредно просту формулу

$$\triangle A = \pm 0.36 \frac{F}{r} \varepsilon.$$

Таква је средња грешка за А. Види се, да се положај фокуса утолико тачније одређује, уколико је веће растојање међу симетричним отворима и уколико је мање фокално растојање објектива.

Конјуговани зраци, који пролазе кроз тачке чворова објектива, паралелни су међу собом. На тој је особини и заснована метода одређивања њиховог положаја. На знатном растојању од објектива у сравњењу с његовом дебљином поставимо диафрагму са два мала отвора, симетрична у односу према оптичкој оси објетива. Растојање (y) међу тим отворима, као и растојање D између диафрагме и предње површине објектива, могу се тачно измерити. Поставимо, затим, непосредно пред и уза сами објектив другу диафрагму с једним централним отвором на оптичкој оси. Зраци светлости са електричне мат-лампе, постављене иза прве диафрагме, пошто прођу кроз њена два отвора,ући ће у објектив кроз слободни отвор друге диафрагме, и даће на неком растојању од ње два лика. Према особини тачака чворова, отвори на диафрагми и прва чворна тачка образују троугао, сличан троуглу између ликова два отвора и друге чворне тачке. Растојање (y') међу ликовима мери се тачно микрометром. Основице оба троугла познате су, јер се могу тачно измерити. Висина првог троугла, т.ј. растојање од прве диафрагме до прве чворне тачке, такође је позната, пошто се она скоро ниуколико не разликује од величине D. Због тога се из просте пропорције може одредити висина другог троугла или растојање (d) између линије, која спаја ликове, и друге чворне тачке објектива. Имаћемо дакле, да је

$$d = \frac{y'}{y} . D.$$

Кад је познат положај равнине за мерење микроскопом у односу према прстену објектива, — одредићемо у односу према њој такође, положај и чворне тачке.

Кад преврнемо објектив задњом страном ка предмету (отворима диафрагме), можемо на такав исти начин да одредимо и положај прве чворне тачке.

По познатој нам већ формули

$$A = A_1 + x = A_1 + \frac{(A_2 - A_1)\, e_1}{e_1 + e_2},$$

одређује се растојање ликова светле тачке од прстена објектива, при чему су A_1 и A_2 непосредно измерена растојања фотографских плоча или равнина, у којима су постављени кончићи микрометра, од исте тачке прстена објектива. Кад је познат положај чворних тачака у односу према прстену објектива, у величинама се A и D могу сад унети корекције и добити тачна растојања од светле тачке и њених ликова до чворних тачака објектива. Кад назовемо та растојања са e и e', наћи ћемо тачну величину фокалног растојања F по формули

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{1}{F}.$$

За тачно одређивање нетачности састава објектива неопходно је потребно употребити монохроматичке изворе светлости. Они се могу добити помоћу електричне живине лампе, стављајући испред ње филтар, који пропушта само зраке одређене дужине таласа. Хартман препоручује ове филтре:

За $\lambda = 0.365\mu$ Methylviolett + Nitrosodimethylanilin.
0.405μ Methylviolett + Chininsulfat.
0.436μ Kobaltglas + Askulinlösung.
0.492μ Guineagrün + Chininsulfat.
0.546μ Echtgrün + Chrysoidin.
0.579μ Eosin + Chrysoidin.

Сем тога, при оптичким мерењима као извор светлости може да послужи и волтово-лучна лампа са угљима Сименса и Бремера, засићених солима разних метала, који стога дају одговарајуће им спектре. Можемо се такође користити и електричним варницама, које скачу међу металним електродама, израђених, например из кадмија. Спектар паре тога метала састоји се из неколико оштрих линија, посејаних по целој дужини виднога спектра, али раздвојених знатним интервалима.

За приближно испитивање објектива може се проћи и без монохроматичких извора светлости. За светлу се тачку може узети јарка звезда и то: у случају фотографског рефрактора, — ахроматизованог углавноме за зраке кратких дужина таласа, — звезду богату актиничким зрацима, као што је Вега, например; у случају пак визуалног рефрактора, — чија несавршенства излазе најмања за жуте зраке, — Арктура.

Таквим се испитивањем може добро одредити фокално растојање објектива, наћи његова општа сферна аберација и добити појам о хроматичкој аберацији.

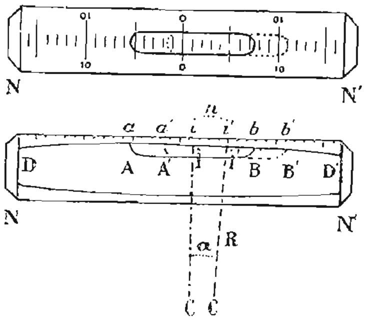
ГЛАВА III.

ЛИБЕЛА.

21. Састав и израда либеле.

За довођење разних делова астрономских и геодетских инструмената у потребни хоризонтални или вертикални положај а тако исто за мерење малих нагиба тих делова, употребљује се справа, која се зове *либела*.

Она се састоји из цилиндричне стаклене цевчице NN' (сл. 37.), која је напуњена алкохолом или етром па са оба краја заливена или херметички затворена. Мали простор AB, који остаје непопуњен течношћу и који се зове *мехур*, треба да садржи у себи само пару те течности, али никако не и ваздух, јер би се због њега ослабила потребна покретљивост мехура. Унутрашња је површина цевчице NN' брижљиво полирана тако, да уздужни пресек њен $D\dot{I}D'$ вертикалном равнином представља лук круга врло великога радиуса $R = \dot{I}C$; горња је пак површина издељена цртицама на једнаке делиће (од 1.5 до 2 mm), да би се по њима могао одређивати положај оба краја мехура A и B оценом од ока и десетих делова ових подеока.



Сл. 37.

Јасно је, да ће средини $\dot{I}$ мехура одговарати радиус уздужнога пресека $\dot{I}C$ цеви, који иде у вертикалном правцу, и, да ће се са нагибом либеле за врло мали угао α и она морати померити у $\dot{I}'$ за број подеока n, пропорционално са тим углом; према томе, ако је позната *вредност једнога подеока* (у лучним секундама) $\nu'' = \frac{1}{R.\ Sin\ 1''}$, тј. угао ν који одговара покрету мехура за један подеок, онда ће изаћи $\alpha'' = \nu''\ n$. Например, при $R = 400$ метара и при дужини једнога подеока скале $\tau = 2$ милиметра, добиће се $\nu = \frac{0.002}{400.\ Sin\ 1''} = 1''$ те ће либела откривати промене нагиба чак и мање од $1''$.

Подеоци скале либелине најчешће се нумаришу у обе стране од неке средње, нулте цртице па се рачунају у једну страну (удесно за посматрача који гледа у либелу) као позитивни а у другу (улево) као негативни. Тада ће се положај средине мехура $\dot{I}$ одредити из полусуме прочитања $-a$ и $+b$ крајева његових

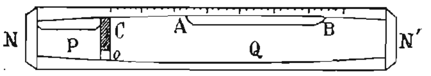
$$i = \left(\frac{b + (-a)}{2}\right)^{\tau} = (b - a)^{\frac{1}{2}\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Ту величину i, изражену у подеоцима скале τ или пак у њеним полуподеоцима $\frac{1}{2}\tau$, ми ћемо убудуће и називати *прочитањем* или *стањем либеле.*

Каквоћа либеле зависи пре свега од правилности полирања унутрашње површине њене цеви. Ова се деликатна и дуготрајна операција врши помоћу једне металне, мало искривљене шипке, којом се таре напред и назад руком све дотле, док се не добије подједнака кривина на целој њеној дужини. После тога се гравирају или нагризају цртице на једнаком растојању по горњој њеној површини, затим се напуни алкохолом или још боље сумпорним етром и најзад херметички затвори при тачци кључања течности те да се, после хлађења њеног, образује унутра мехур, који у себи не задржи ваздуха.

Заливати крај цевчице ватром помоћу дуваљке није препоручљиво, зато што се при томе, услед омекшања и развлачења стакла, кривина њена може искварити у близини крајева. Уместо тога се код бољих либела крајеви цеви полирају, затворе чврсто стакленим кружићима, облепе танком кожом од телећег мехура и најзад превуку лаком; ако пак у току времена пара етра почне да продире мало по мало кроз кожне поре напоље и мехур се почне сувише да издуљује, онда се иста либела поново пуни течношћу.

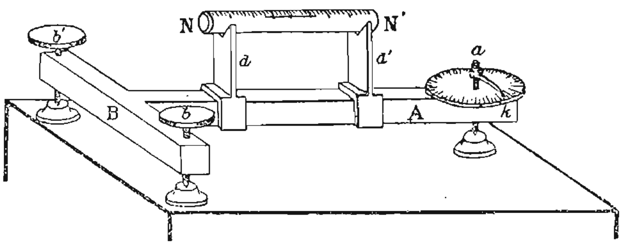
Врло велике су либеле незгодне за употребу ни при ниским температурама услед сувишног повећања дужине мехура, ни при врло високим, јер тада мехур постаје сувише мали и непокретљив. Да би се отклониле те незгоде понекад се израђује у цевчици NN′ (сл. 38.) стаклена преграда C са рупицом o на дну те да се, простим нагибом либеле, може да излије каква се жели количина течности из тако створене *резервне коморе* P у главну Q и обратно, и, да се на тај начин добије жељена дужина мехура AB.



Сл. 38.

22. Испитивање либеле.

За испитивање правилности кривине цеви либелине а у исто време и за тачно одређивање вредности њене поделе служи особита справа, која се зове *егзаминатор* или *испитивач* либелâ. Он се састоји из жељезне полуге A (сл. 39.) са кратким додатком B у облику слова T па се ослања на три завртња a, b и b' од којих је a *микрометарни* т.ј. врло тачно и брижљиво изрезан те да служи за мерење малих издизања и спуштања краја полуге A. Ради тога је глава завртња a снабдевена казаљком k, која се креће по подељеноме кругу те показује мале делове свакога обрта завртња. Жељезна је полуга A обично такве дужине, да се њен нагиб, од једнога пуног обрта завртња a, промени тачно за $2' = 120''$; круг је пак код завртња a подељен на 120 равних делова, да би покрету казаљке k за један подеок одговарала промена нагиба тачно за $1''$. Два носача d и d', који се покрећу независно један од другог, служе за намештање либеле NN′ која се испитује. Таква се справа, разуме се, ставља на чврст камени стуб, те да његова непомичност за време испитивања либеле буде загарантована.



Сл. 39.

Пошто се намести либела, која се испитује, на носаче, d и d' а њен мехур доведе завртњем a на сам крај цевчице, н.пр. леви, добива се неко читање на либели; затим се покрене казаљка k за неколико подеока па, — сачекав извесно време да се мехур умири, — изврши се ново читање либеле; после се понова покрене казаљка за исти број подеока те да се мехур помери још удесно и т.д. Пошто се постепено тако доведе мехур до деснога краја цевчице, све се то исто понавља у супротном правцу, да би се у средњем добили резултати, који не би зависили од постепених, могућних промена како у самој справи тако и у каменом стубу у току времена док се либела испитује. По тако нађеном односу бројева, за које се сваки пут покретала казаљка k, према добивеним разликама r из прочитањâ либеле и одређује се вредност ν једнога подеока либеле на разним местима њене цевчице; — с тим се у исто време открива и каквоћа њенога полирања.

Вредност се подеока ν либеле може унеколико да промени усљед температурне промене; због тога, ако се при различитим температурама t_1, t_2, $t_3, \ldots$ добију различите вредности $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ онда за ν треба примити овакав општи израз:

$$\nu = \nu_0 + \mu\,(t - t_0)$$

па одредити две константе ν_0 и μ, које овде улазе, по методи најмањих квадрата.

Пример. При испитивању једне либеле, које је извршено на егзаминатору опсерваторије у Пулкову, казаљка је k микрометарног завртња померана сваки пут за 5 подеока, чему је тачно одговарала промена нагиба од 5″. Усљед различитих промена, које су се при томе дешавале у справи и каменом стубу, либелина су се прочитања i, — која су се добивала при кретању мехура удесно, — разликовала од прочитањâ i', која су добивана при његову кретању улево, и то тим више уколико их је више делио већи интервал времена; средњи пак изводи $\frac{1}{2}(i + i')$, као и поступне разлике њихове $\frac{1}{2}(r + r')$, — које служе за оцену каквоће либеле, — могу се овде сматрати скоро исто тако сигурни као и при потпуној непромењљивости справе. Ево тог примера:

	При кретању мехура удесно			При кретању мехура улево.			
Подеоци егзамин.	Прочитања либеле	i	Разл. r	Прочитања либеле	i'	Разл. r'	$\frac{r + r'}{2}$
		$\frac{1}{2}\tau$			$\frac{1}{2}\tau$		
20	— 27.3 — 4.3	— 31.6	10.0	— 26.4 — 3.1	— 29.5	9.6	(9.8)
15	— 22.3 + 0.7	— 21.6	9.5	— 21.6 + 1.7	— 19.9	9.2	9.3_5
10	— 17.5 + 5.4	— 12.1	9.4	— 17.0 + 6.3	— 10.7	9.0	9.2
5	— 12.9 + 10.2	— 2.7	9.0	— 12.5 + 10.8	— 1.7	8.9	8.9_5
120	— 8.4 + 14.7	+ 6.3	9.0	— 8.0 + 15.2	+ 7.2	8.7	8.8_5
115	— 3.8 + 19.1	+ 15.3	8.9	— 3.6 + 19.5	+ 15.9	9.1	9.0
110	+ 0.7 + 23.5	+ 24.2	9.6	+ 0.9 + 24.1	+ 25.0	8.9	9.2_5
105	+ 5.3 + 28.5	+ 33.8		+ 5.4 + 28.5	+ 33.9		

У средњем $5'' = 9.1$

Вредност једнога подеока $\nu = \frac{5''}{9.1} = \mathbf{0''.55}$.

Не гледећи на то, што се кривина ове либеле показала непотпуно подједнаком на целој њеној дужини, ипак се она може сматрати као доста добра, под условом, да се при њеној употреби избегава крајњи положај мехура на оном месту, где разлика $\frac{r+r'}{2} = (9.8)$ сувише одступа од осталих шест.

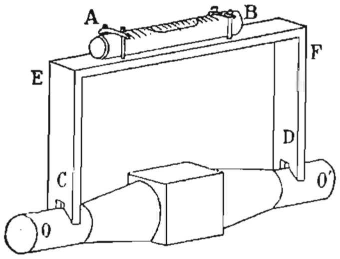
23. Разне справе са либелама.

Конструкција разних справа са либелама зависи од сврхе, којој она треба да послужи.

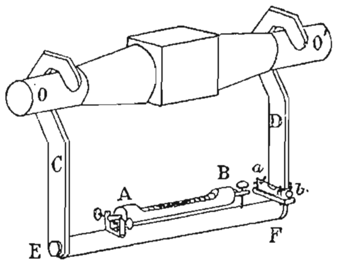
1.) Ако је справа намењена за довођење у хоризонталан положај какве равнине, онда се либела AB утврђује на металној равној основи правоуглог облика EF (сл. 41. а. и 41. б.) са којом се и ставља на дану равнину у потребни правац.

2. Код многих астрономских и геодетских инструмената либела је са својом металном справом чврсто спојена за један или други део инструмента (сл. 44.) те да покаже само мале промене његова нагиба; али она уједно стим служи и за постављање вертикалне обртне осе инструмента у потребни вертикални положај, као што ће се доцније о томе говорити.

3.) Ради довођења у хоризонтални положај и за одређивање малих углова нагиба какве обртне осе $00'$, либела се утврђује за металну полугу EF са двема ножицама C и D (сл. 40. а.), помоћу којих се и намешта на чепове 0 и $0'$ те осе, својим округлим или правоуглим урезима. Понекад се пак од металне полуге EF са либелом AB уздижу две ручице C и D (сл. 40. б.) те да се справа може да обеси о чепове 0 и $0'$.

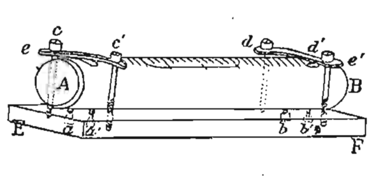


Сл. 40. а.

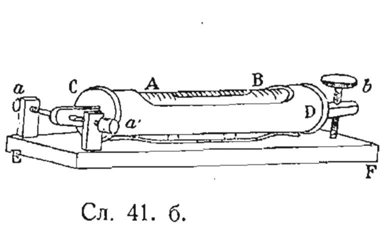


Сл. 40. б.

Али, ма каква била задаћа и конструкција справе са либелом, њена стаклена цевчица AB мора бити утврђена за металну своју основу EF тако, да се увек лако може корегирати њен положај. Најчешће се она намешта на четири завртњића a, a' и b, b', који су уврнути у основу EF (сл. 41. а.). Подизањем завртњића a и a' (или пак спуштањем b и b') подићи ће се и крај цевчице A; ако се пак један од завртњића a' или a издигне а други за толико исто спусти, онда ће се крај A цевчице померити нешто устрану, скоро не мењајући своју висину. Затим се помоћу четири завртња c, c', d и d', — који делују на две челичне опруге e и e', — цевчица AB пријубљује уз напред речене завртњиће те се на тај начин доста чврсто спаја са основом EF; да се пак ублажи притисак челичних опруга на цевчицу, она се од њих одваја листићима од печурке (пампура).



Сл. 41. а.



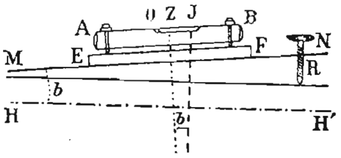
Сл. 41. б.

Каткад је цевчица AB либелина смештена у цилиндричну металну цев CD (сл. 41. б.) са дугачким прорезом. У том случају се један крај C те цеви може да обрће око два завртњића a и a' а други је крај D снабдевен завртњем b, којим се мења нагиб цевчице либелине; бочни се пак положај њен поправља покретом завртњића a и a' у једну или другу страну.

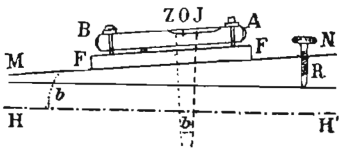
24. Нивелање хоризонталне равнине.

Одређивање помоћу либеле малих нагиба према хоризонту ма какве линије или равнине, зове се уопште *нивелање.*

Кад је линија MN (сл. 42. а.) ма чиме обележена на приближно хоризонталној равнини, која је снабдевена вертикалним завртњем R, онда се за нивелање те линије употребљује описана справа (сл. 41.) са равном основом EF а у њој, при строгој хоризонталности те основе, средина Z мехура либелиног може и да одступа од нулте тачке O скале за неку величину $OZ = \zeta$, која се зове *место нуле на либели.* На тај начин ако је b тражени нагиб линије MN према хоризонту HH′, — изражен у подеоцима либеле, — онда ће, — кад се справа положи на равнину по линији MN, — средина мехура J одступити од Z за број подеока $ZJ = b$ те ће се по томе добити прочитање



Сл. 42, а.



Сл. 42, б.

$$OJ = i = b + \zeta;$$

кад се пак справа преокрене за 180° (сл. 42. б.), добићемо прочитање

$$OJ' = i' = b - \zeta.$$

На тај се начин одређују обе непознате ζ и b по прочитањима i и i', која су извршена при два супротна положаја справе EF, — у оваквом облику:

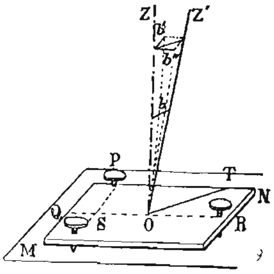
$$\zeta = \frac{i - i'}{2} \qquad \text{и} \qquad b = \frac{i + i'}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2.)$$

па ако је крај N нивелисане линије био с десне стране, онда ће знак + код b означавати, да је тај крај N виши од M.

Код овога што је изложено подразумева се већ, да су обе величине ζ и b тако мале, да се либела AB може прочитати при оба њена положаја; у противном пак случају то се достиже помоћу вертикалног завртња R (сл. 42. а. и 42. б.) на овај начин:

Пошто се справа постави дуж линије MN, завртњем се R доводи мехур тачно на средину цевчице тако, да буде $i = 0$ па ако се, после преокрета либеле за 180°, не буде видео цео њен мехур, онда треба избројати колико обрта треба учинити завртњем R, да би се понова добило $i = 0$. После тога треба тим истим завртњем R покренути мехур у пређашњу страну али тек за половину броја обрта те тим самим довести линију MN приближно у хоризонтални положај; мехур пак треба дефинитивно довести на средину корекционим завртњима либелине справе и тиме учинити место нуле ζ да буде врло мало. Овако се поступа на основу тога, што из израза (2.), кад је $i = 0$, излази:

$$\zeta = -\tfrac{1}{2}\, i' \qquad \text{а} \qquad b = +\tfrac{1}{2}\, i'.$$

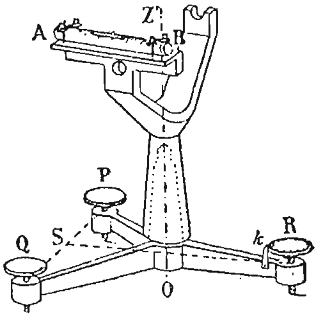


Сл. 43.

За нивелање равнине MN, која се ослања на три вертикална завртња P, Q и R (сл. 43.), треба поставити на њу либелу прво у правцу два завртња P и Q па обртањем њиховим учинити да линија PQ те равнине буде хоризонтална; затим је треба поставити у правцу линије RS, перпендикуларно на PQ, па обртањем сад само једнога завртња R, довести у хоризонталан положај и ту линију RS. Ако се обртањем либеле, по напред изложеноме, измере затим и мали остаци нагиба b' и b'' линије PQ и RS, — рачунајући их као позитивне када је страна Q виша од P а S виша од R, — онда ће се правац нормале OZ' на равнину MN одредити у односу према вертикалној линији OZ и хоризонталној OR помоћу углова $\sphericalangle ROT = a$ и $\sphericalangle ZOZ' = b$, при чему ће бити:

$$tg\, a = \frac{b'}{b''} \quad \text{и} \quad b = \frac{b'}{sin\, a} = \frac{b''}{cos\, \alpha} = \sqrt{b'^2 + b''^2}.$$

25. Нивелање вертикалне осе инструмента.



Сл. 44.

Као ослонац вертикалне осе OZ' (сл. 44.), око које се окрећу разни делови инструмента заједно са дурбином, служи увек троножна основа са вертикалним завртњима P, Q и R. Довођење те осе у приближно вертикални положај и одређивање после тога извесног остатка њена нагиба, врши се помоћу либеле AB, утврђене гдегод на деловима инструмента, који се окрећу, и, тај се посао по суштини ничим не разликује од већ описаног нивелања равнине; под местом нуле либеле AB треба у том случају подразумевати оно њено прочитање ζ, које се добива при строго вертикалном положају осе OZ'.

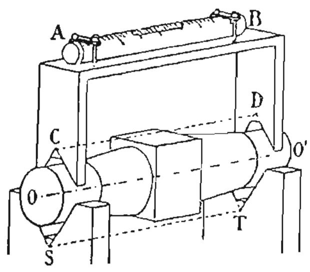
За одређивање тога места нуле ζ треба поставити горњи део инструмента тако, да правац цевчице AB буде приближно перпендикуларан на линију PQ па пошто се доведе мехур либеле на средину помоћу завртња R, окренути горњи део инструмента око осе OZ' за 180°. Ако се после тога на либели добије прочитање i, онда је $\zeta = \frac{1}{2}\, i$; ако ли се сав њен мехур не буде видео, онда то показује, да је ζ сувише велико те ће бити потребно да се изброји број обрта завртња R ради довођења мехура на средину цевчице AB. Кад се затим овај завртањ окрене за два пут мањи број обрта у супротну страну, остаће, да се корекционим завртњићима саме либеле (чл. 23.) учини њено прочитање приближно равно нули а у исто време и само место нуле ζ.

Да би се затим оси инструмента OZ' дао потребни вертикални положај и у правцу завртња PQ, треба либелу AB поставити паралелно са PQ и поставити јој мехур на средину, обрћући оба завртња P и Q у супротном правцу (т.ј. подижући једним а толико исто спуштајући другим), да се неби нарушила већ раније достигнута вертикалност осе OZ' правцем RS; за дефинитивно пак довођење осе OZ' у вертикални положај с таквом тачношћу, да се стање либеле скоро сасвим не мења при обртању у све могућне положаје, треба још једном поновити све то што је напред речено.

Напомена. Основа инструмента са њена 3 вертикална завртња P, Q и R (сл. 44.) може да послужи за одређивање средње вредности либелине поделе у случајима, кад се под руком нема егзаминатор. Ради тога треба поделити периферију круга једнога од тих завртања, н.пр. B, на неки број n једнаких делова, затим одредити по могућности што тачније средњу величину h његових ходова, — измеривши шестаром или лењиром неколико његових нареза одједном, — и, најзад, измерити висину $RS = l$ троугла PQR (обично равностраног). Тада ће се одредити и тражени угао $\frac{h}{n.l.Sin\,1''}$, за који се буде мењао нагиб линије RS при подизању или спуштању завртњем R за $\frac{1}{n}$ део његовог обрта.

26. Нивелање хоризонталне осе.

Хоризонтална оса, око које се обрће дурбин инструмента, ставља се са својим цилиндричним чеповима O и O' у лежишта S и T исто такве, полукружне или правоугле форме (сл. 45.) каква је и код уреза на ножицама C и D справе са либелом, која служи за нивелање те осе. Ми ћемо претпоставити, да су ти урези правоугли, како то увек и бива код пасажних инструмената (гл. VII), и, да радиуси кружних пресека чепова O и O' нису подједнаки, као што то и бива чак и при најбрижљивијем полирању чепова. Према томе под нагибом осе треба подразумевати нагиб b према хоризонту линије OO', која спаја центре O и O' кружних пресека чепова. Тај нагиб и треба одредити јахаћом или висећом либелом, с претпоставком, да су оба носача (хориз. осе) с лежиштима а према томе и замишљена линија ST, — која спаја врхове S и T правоуглих уреза на њима, — потпуно непомични.



Сл. 45.

Ако са ρ означимо онај непроменљиви и непознати нам угао међу линијама OO' и ST, — који се краткоће ради зове *неједнакост чепова*, — онда ће нагиб према хоризонту линије ST (сл. 46. а.) бити $(b-\rho)$; нагиб пак замишљене линије CD, — која спаја врхове правоуглих уреза на ножицама либеле, када се она постави или обеси на чепове, — биће $(b+\rho)$; због тога, кад се са i означи прочитање на либели AB и претпостави да је ζ *место нуле* либелине, — т.ј. прочитање њенога стања при потпуној хоризонталности линије CD, — онда ћемо имати

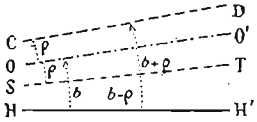
$$i = b + \rho + \zeta;$$

кад се преврне либела за 180° и са i' означи прочитано њено стање у том другом положају, — добићемо

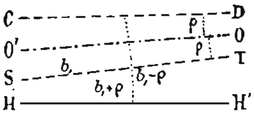
$$i' = b + \rho - \zeta,$$

тако да ће изаћи

$$\zeta = \frac{i - i'}{2} \qquad \text{а} \qquad b + \rho = \frac{i + i'}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.)$$



Сл. 46. а.



Сл. 46. б.

Што се тиче неједнакости чепова ρ, она ће се одредити превртањем целе осе 00′ у њеним лежиштима тако, да чеп 0′, који је био десно, легне у лево лежиште S а леви 0 у десно T (сл. 46. б.); при томе, — услед непромењљивости линије TS, — нови нагиб b_1 осе 00′ треба да се разликује од пређашњег b за 2ρ. Кад се узму и при овом положају два прочитања i_1 и i_1' на либели при два њена положаја CD и DC, имаћемо као и пређе

$$i_1 = b_1 - \rho + \zeta \qquad \text{и} \qquad i_1' = b_1 - \rho - \zeta;$$

одакле је

$$\zeta = \frac{i_1 - i'_1}{2} \qquad \text{и} \qquad b_1 - \rho = \frac{i_1 + i'_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (4.)$$

а пошто је $b_1 = b - 2\rho$, то ће се из (4.) и (3.) добити

$$4\rho = \left\{\frac{i + i'}{2}\right\} - \left\{\frac{i_1 + i'_1}{2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.)$$

Неможе се, уосталом, увек рачунати на потпуну непромењљивост нагиба линије ST у току напред изложених превртања либеле и саме осе 00′, јер се и нагиб самога стуба, на коме је инструмент, може мењати у току времена. Због тога, ради веће сигурности извода величине ρ, треба одмах поновити њено одређивање у обратном реду тако, да се другим превртањем осе 00′ оно поврати у свој први положај.

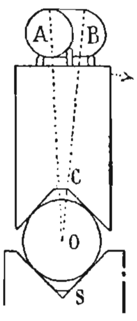
Кад је тако већ одређена неједнакост чепова ρ дате осе 00′, онда је за њено нивелање довољно ставити на њу либелу два пут и запазити при томе, да ли се дебљи чеп њен 0′ налази с десне или с леве стране; у првом ће случају нагиб осе бити

$$b = \frac{i + i'}{2} - \rho$$

а у другом

$$b_1 = \frac{i_1 + i'_1}{2} + \rho$$

Пре него што се приступи нивелању хоризонталне осе, неопходно је потребно уверити се прво у томе, да ли је либелина цев AB паралелна са том осом, због тога што ће се иначе прочитања мехура мењати услед и најмањег клаћења справе либелине на оси. И заиста, ако се при косом положају цевчице AB, — показаном на сл. 47., — цела либелина справа нагне у десно, онда ће се њен крај A издићи у сравњењу с другим B и због тога ће се мехур покренути у страну A; ако ли се справа нагне улево, десиће се обратно. На тај начин откривену неправилност положаја цевчице AB треба свакако исправити помоћу бочних завртњића нарочито за то удешених (чл. 23.). Да би се у сваком случају парализовао тај узрок грешака у читању стања либеле, треба увек ставити ножице јахаће справе симетрично у односу према извесним помоћним деловима, који су утврђени поред лежишта осе ради предохране либеле од пада; висеће се справе ради тога снабдевају малим *попречним либелама ab* (сл. 40. б.).



Сл. 47.

Пример. У овде изложеним посматрањима, која су извршена ради одредбе неједнакости чепова хоризонталне осе пасажног инструмента, *вредност* је ν једнога $\frac{1}{2}$ подеока либеле била равна 0″.55. Словима је W (запад) и O (исток) означено, на коју је страну био окренут онај крај осе, који служи као окуларни део дурбина инструмента; према томе су и средња прочитања либеле, — изражена у $\frac{1}{2}$-подеоцима њене скале, — означена са i_w и i_o а по њима изведени нагиби — са b_w и b_o. Посматрач је читао стање либелино, гледајући је увек са северне стране и обележавао у загради прочитање онога краја мехура, који се налазио са стране завртњића за бочно корегирање положаја либелиног.

Положај осе.	**Крајеви либеле.**	**Прочитања.**		$i_w - i_o$
W	− (11.8) + 11.9	+ 0.1	$i_w = +1.30$	+ 1.40
	− (10.6) + (13.1)	+ 2.5		
0	− 11.2 + (12.4)	+ 1.2	$i_o = -0.10$	
	− (12.6) + 11.2	− 1.4		
0	− (12.5) + 11.2	− 1.3	$i'_o = +0.05$	+ 1.45
	− 11.2 + (12.6)	+ 1.4		
W	− 10.3 + (13.4)	+ 3.1	$i'_w = +1.50$	
	− (11.9) + 11.8	− 0.1		

у средњем $i_w - i_o = +1.42.$

Неједнакост чепова $\rho = \frac{1}{4}(i_w - i_o) = +\mathbf{0.36}$ полуподеока.

$b_w = i_w - \rho = +0.94 = +\mathbf{0''.52}$ $\qquad b_o = i_o + \rho = +0.26 = +\mathbf{0''.14}$

$b'_w = i'_w - \rho = +1.14 = +\mathbf{0''.63}$ $\qquad b'_o = i'_o + \rho = +0.41 = +\mathbf{0''.22}$

Растојање l између чепова тога инструмента било је равно 22.5 палца (енгл.) а стране правоуглих уреза у лежиштима осе са странама правоуглих уреза на ножицама либелине справе образовале су заједно слику квадрата па је стога линеарна разлика у дебљини чепова била

$$\sqrt{2}\,.\,l\,.\,\rho\,.\,\nu\,.\,Sin\,1'' = \sqrt{2}\,.\,22{,}5\,.\,0{,}36\,.\,0{,}55\,.\,Sin\,1'' = \frac{1}{3300}$$ линије (енгл.).

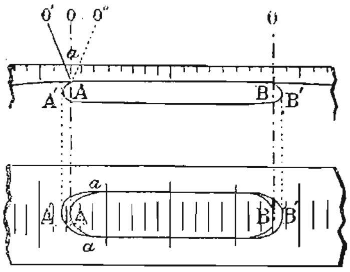
27. Правила за руковање либелом.

Са тако осетљивом справом као што је либела, треба да се рукује врло деликатно, како би се изводи из њених прочитања добивали сигурно. Ево општих правила, која треба имати у виду при употреби либеле:

1.) При читању положаја крајева мехура A и B треба гледати на сваки крај перпендикуларно на правац цевчице либелине а никако косо́, због тога што ће се, при знатној дебљини дуварова цевчице, прочитање краја A, које је извршено у косом правцу O′A или O″A (сл. 48.), разликовати од прочитања његова *a* у правцу OA, перпендикуларно на цевчицу. Тај *паралактички утицај* зидова цевчице постаје на тај начин узрок не само случајних грешака прочитањâ либеле него и *сталних личних разлика* у прочитањима разних посматрача; јер су једни навикли да гледају на либелу увек унеколико слева а други сдесна.

2.) Услед појаве капиларности у цевчици либелиној, сваки је крај мехура ограничен површином AA′ (сл. 48.), која се представља у пројекцији, — кад се гледа на либелу одозго, — као два лука: унутрашњи *aAa* и спољњи *aA′a*. И један и други се може узети за крај мехура, али је препоручљиво узимати први, због тога што је паралактички утицај на њега мањи; сем тога он изгледа јасније оцртан од другога, када је осветљен спреда.

3.) Положај се мехура може врло јако да измени услед нагревања цевчице, због тога либелу треба чувати од загревања лампом или других извора топлоте; због тога никако не треба цевчицу додиривати ни рукама нити се сувише њој приближавати ради очитавања; посматрања пак са либелом на сунцу постају потпуно немогућна, ако се она не заштити сунцобраном.



Сл. 48

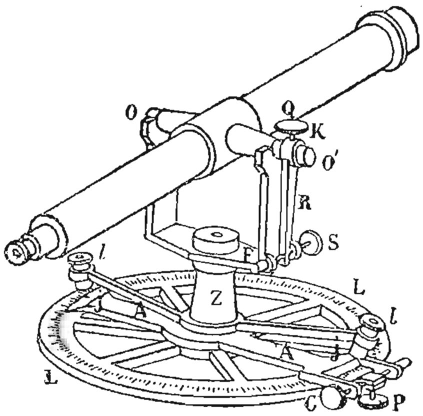
4.) При одређивању нагиба, превртање справе треба вршити са особитом пажњом, да се не би пореметио на њој положај цевчице либелине а читање вршити тек пошто се мехур потпуно умири; али се у исто време и сва операција нивелања треба да врши по могућности што брже, јер се место нуле на либели може изменити у току времена, особито у случајима када она није још стигла да потпуно прими температуру ваздуха, који је окружује.

ГЛАВА IV.

САСТАВНИ ДЕЛОВИ УГЛОМЕРНИХ ИНСТРУМЕНАТА.

28. Лимб и алхидадни круг.

Инструмент, намењен за мерење углова између видљивих тачака посматрања, треба да има тачно подељени круг L (сл. 49.), који се зове *лимб.* Код највише инструмената он остаје непокретан за време мерења углова; око осе Z, која је вертикална на круг L, окреће се заједно са дурбином или гледачом, за визирање на предмете — или лењир AA, који се зове *алхидада*, или потпуни *алхидадни* круг; при томе једна или неколико казаљки J, J, означених у виду танких цртица на крајевима алхидаде или алхидадног круга, крећући се по подели лимба, показиваће за колики се угао премешта визирна линија. Код неких се инструмената покреће сам лимб L заједно са утврђеним на њему дурбином а алхидада са казаљком J и J остаје непомична; али пошто та разлика нема никаква стварна значаја за мерење углова, то ћемо ми имати увек у виду само прву конструкцију.

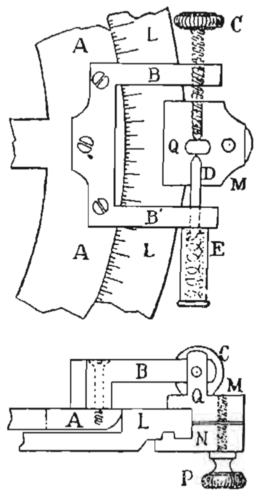


Сл. 49.

Према томе се мерење ма каквог угла дели на три различите радње: 1.) на *постављање лимба* инструмента у потребни положај, о коме ми за сада нећемо говорити, јер он зависи од задаће и посебних особина разних инструмената; 2.) на сукцесивно *визирање дурбином* или гледачом алхидаде на оне предмете, између којих треба измерити угао, и 3.) на *читање* положаја казаљки алхидаде у односу према подели лимба при сваком од извршених визирања.

Средња грешка визирања дурбином чак и са не баш великим увеличањем износи тек око $\pm 1''$ па и мање; ставити пак дурбин са таквом тачношћу, грубим ручним кретањем, није могућно; стога се лимб и алхидада увек спајају једно за друго *микрометарним завртњем*, помоћу којега се преносе на алхидаду па отуд и на дурбин врло равномерни и мали покрети.

Најобичнија конструкција тога спајања алхидаде са лимбом представљена је на сл. 50. Две плочице M и N, које могу да клизе по крају лимба L, једна одозго, друга одоздо, — чврсто се к њему приљубљују, као клеште, на ма ком месту помоћу завртња P. За алхидадни пак круг или за алхидаду A утврђена



Сл. 50.

је двокрака виљушка BB′, кроз чији један крак B прелази фино нарезани микрометарни завртањ C, који својим врхом упире на брадавицу Q, речених кљешта M; кроз други пак крак B′ пролази цилиндрична шипка D и притискује на исту брадавицу Q спиралом, која се налази у чаури E. На тај начин, када је завртањ P одврнут, алхидада се може слободно да креће по лимбу заједно са плочицама M и N; када је пак он уврнут, онда је могућно само ограничено покретање њено помоћу микрометарног завртња C.

Да би се дурбином навизирало на жељени предмет, треба ослободити (одврнути) завртањ P па покренути алхидаду тако, да се лик предмета покаже у пољу гледања дурбина у близини онога кончића, којим треба визирати на њега; затим пошто се завртањ P стегне (уврне), остаје само, да се микрометарним завртњем C доведе тај кончић до тачног поклапања са ликом прдмета. Али, при томе није свеједно, да ли ће се последње помицање кончића извршити тако званим *позитивним кретањем* завртња C, при којем он сам покреће алхидаду притискујући на спиралу E, или, *негативним,* при којем се алхидада повраћа у супротну страну једино снагом те спирале. У једном и у другом случају може да се деси, да положаји казаљки J и J у односу према подели лимба не буду потпуно подједнаки услед извесне гипкости саме алхидаде или спица алхидадногa круга; осим тога, при обртању микрометарног завртња у негативну страну, алхидада може да се помера под притиском спирале не равномерно већ малим скоковима.

Све то чини, да се узме као строго правило, — завршавати визирање кончићем на предмет *увек позитивним кретањем* микрометарног завртња; јер ће изгибање алхидаде утицати при томе увек у једном и истом смислу те ће се елиминисати у разлици извршених читања при визирању на разне предмете. Ако ли посматрач опази, да је последње, позитивно микрометарно кретње било сувишно те је кончић прешао преко посматране тачке предмета, онда га треба вратати негативним кретањем знатно уназад па понова извршити тачно визирање.

Друга врста направе за мале и равномерне покрета дурбина, која се такође често употребљује, показана је на сл. 49. Оса дурбина OO′ обухваћена је овде прстеном K и спаја се с њиме завртњем Q; од прстена пак K спушта се дуга полуга R, чији се крај може да покреће међу двема непокретним брадавицама помоћу микрометарног завртња S и јаке спирале F, која притискује на њега са супротне стране.

29. Вернијер или Нонијус.

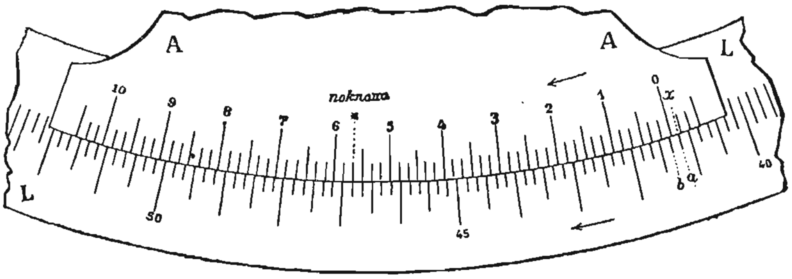
Тачност очитавања лимба угломерног инструмента не треба да буде мања од тачности визирања на предмете помоћу дурбина, иначе дурбин не би давао потребну корист. Међутим, положај се казаљке алхидадине J у интервалу међу цртицама лимбовим не може оцењивати тачније од $\frac{1}{10}$ дела тога интервала; сем тога, растајање међу цртицама лимбове поделе има своју природну границу, преко које би се суседне цртице почеле да сливају једна са другом (при радиусу лимба од $25^{cm.}$ дужина је лука од 1′ тек $0.07^{mm.}$) услед тога су за очитавање круга потребна нарочита средства, а на име: или *вернијер,* који се зове још и *но-*

нијус, или *микроскоп са микрометром.* Помоћу нонијуса, који је увек снабдевен лупом, очитавања се могу вршити с тачношћу до $\frac{1}{100}$ а са микроскопом до $\frac{1}{1000}$ дела једнога интервала међу цртицама лимбовим; код сразмерно малих кругова например, са 10′-ним интервалима међу цртицама, грешке се читања, извршених са лупом и вернијером, могу свести до 6″ а помоћу микроскопа до неколико десетих делова од секунде.

Ако се две цртице налазе приближно на продужењу једне према другој а крајевима се додирују, онда ће се оком лако запазити и најмање померање једне од њих у једну или другу страну. На тој особини ока, да с великом тачношћу оцењује слична поклапања цртица, и оснива се конструкција вернијера, т.ј. целога низа цртица, повучених на алхидади А на растојању i' једна од друге, које је за $\frac{1}{n}$ део мање од интервала i међу цртицама поделе лимба L (сл. 51.) тако, да је

$$i' = i - \frac{i}{n} \qquad \text{и} \qquad ni' = (n-1)\,i.$$

Тада, ако нулта цртица вернијера, — која управо и служи као казаљка J алхидаде, — падне гдегод на интервал међу двема суседним лимбовим цртицама a и b, онда ће се свакојако показати довољно блиско поклапање једне до даљих цртица вернијера, н.пр. по броју m-те, са одговарајућом цртицом лимба а то ће значити, да је нулта цртица помакнута од a за величину x, која је m пута већа од разлике $i - i' = \frac{i}{n}$, т.ј. тачно ће читање бити $a + m.\frac{i}{n}$.



Сл. 51.

Например, при подели лимба на 10′-не интервале, помоћу вернијера ће се моћи очитавати десетице секунада, ако се учини да буде $n = 60$, т.ј. ако се на алхидади узме лук од $(n-1)\,i = 59 \times 10' = 9^\circ 50'$ па се подели на 60 делова. Бројеви 1, 2, 3... до 10, који се поставе над 6-ом, 12-ом, 18-ом и т.д. цртицом вернијера, показиваће директно минуте, које се садрже у интервалу x, који се одређује. При поклапању цртица показаном на сл. 51. звездицом, излази, да је $x = 5'40''$ те ће читање на лимбу бити $41^\circ 15' 40''$.

Цртице треба да буду довољно танке и да се расматрају кроз лупу при довољном осветљењу, због тога, што при знатном броју n, (нпр. $n = 60$ или $n = 70$) треба да се јасно разликују оне две цртице, које се најбоље поклапају од осталих, које су близу поклапања, или, другим речима, да грешке читања неби превазилазиле теорно очекивани разломак $\frac{1}{n}$. Због тога се уза сваки вернијер ставља *илуминатор* од хартије или од беле staклене плочице, и, покретна цилиндрична цевчица *l* са лупом (сл. 49.). Неопходно је такође потребно, да се увек контролише оно нађено поклапање цртица, помоћу симетрије разилажења суседних цртица с једне и друге стране, а, да би се та контрола могла вршити и на самим крајевима вернијера, на њему је уцртано још неколико цртица до почетне нулте и иза последње n-те цртице, као што је то показано на сл. 51.

Ма како да је конструисана алхидада, било у облику ленира са заоштреним крајевима, који клизе по лимбу, било у облику потпунога алхидадног круга, намештеног у саму равнину круга, ипак није могућно достићи да се цртице вернијера потпуно додирују са цртицама лимба и да не буду једне изнад или испод других. Усљед тога је оцена поклапања отежана те излази различита у зависности од тога, да ли око гледа на цртице, које се поклапају, у правцу перпендикуларном на лимб или унеколико косо; ова околност, т.ј. неједнаки начин гледања на вернијер, може не само да повећа случајне грешке, него може да буде узрок и сталних *личних разлика* у читањима код разних посматрача. Да се по могућности смање сличне врсте грешака, треба цевчицу са лупом стављати увек тако, да цртице, које се поклапају, дођу на средину њенога поља гледања.

Ако при једном и истом положају алхидаде буду два лица a и b вршила читање по вернијеру, то ће се међу њиховим прочитањима појавити разлике

$$a_1 - b_1 = r_1, \; a_2 - b_2 = r_2, \; \ldots\ldots \; a_s - b_s = r_s$$

а средња ће величина

$$r = \frac{1}{s}(r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_s)$$

бити разлика њихових личних грешака или, као што се то краће каже, њихова *лична разлика;* одступања пак

$$v_1 = r_1 - r, \; v_2 = r_2 - r, \; \ldots\ldots \; v_s = r_s - r,$$

која зависе од средњих случајних грешака ε_a и ε_b, с којима су вршили читања једно и друго лице, — ако се још стави, да је $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon$, — даће

$$2\varepsilon^2 = \varepsilon_a{}^2 + \varepsilon_b{}^2 = \frac{\Sigma v^2}{s-1}.$$

Пример. Ова 32 прочитања a и b извршила су два лица на инструменту с лимбом, који је подељен од 10′ до 10′.

a	b	$a-b$	v	a	b	$a-b$	v
2° 16′ 15″	5″	+10″	+ 3	42° 47′ 20″	0″	+20″	+13″
17 41 40	25	+15	+ 8	47 2 50	45	+ 5	— 2
13 23 30	25	+ 5	— 2	52 54 5	5	0	— 7
18 0 55	45	+10	+ 3	58 9 30	20	+10	+ 3
22 32 10	5	+ 5	— 2	62 35 35	40	— 5	—12
27 58 20	25	— 5	—12	67 27 10	5	+ 5	— 2
32 11 45	30	+15	+ 8	72 14 15	0	+15	+ 8
37 26 0	0	0	— 7	78 18 40	30	+10	+ 3

$s = 16.$ Лична разлика $r = a - b = +7''$

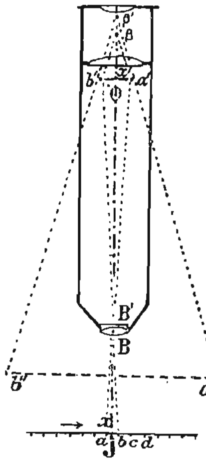
$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{2\times 15}} = \pm 5''\!.1, \qquad \varepsilon_r = \pm\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \pm 1''\!.8.$$

У читањима вернијера могу да се дешавају сталне грешке још и због тога, што број n његових подеока не одговара сасвим тачно броју $(n-1)$ лимбових подеока; због тога је, пре употребе каквога вернијера, неопходно потребно проконтролисати, да ли се заиста потпуно поклапа n-та цртица његова, када се његова нулта цртица поклопи са каквом цртицом лимба. Узмимо, например, да је, при неколико стављања нулте црте варнијера (какав је на сл. 51.) у положај до тачног поклапања с различитим цртицама лимба, — други крај његов показивао не тачно 10′0″, као што би то требало, већ 10′10″, 10′5″, 10′10″, 10′20″, 10′15″, 10′10″ тако, да је грешка у прочитању 10′0″ била у средњем $+12''$. Тада би свако друго читање m на таквом вернијеру, — изражено у минутима, — требало, очевидно, смањити за $12''.\frac{m}{10}$ или пак, што је простије, употребити таблицу поправака:

Читања:	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
Поправке:	—1″	—2″	—4″	—5″	—6″	—7″	—8″	—10″	—11″	—12″.

30. Микроскоп са микрометром.

Микроскоп се, слично астрономском дурбину, састоји из две сабирне системе стакала: ахроматичког објектива BB′ (сл. 52.), који даје изврнут, стварни лик $a'b'$ интервала ab међу подеоцима лимба, и, сложеног окулара $\beta\beta'$, који даје још више увеличан, али уображени лик $a''b''$ истога интервела, на растојању ω јаснога гледања. Кад се означе са F и са f фокална растојања објектива и окулара, добићемо за увелучање једнога и другога V и v ове изразе (чл. чл. 3., 6. и 11):



Сл. 52.

$$V = \frac{a'b'}{ab} = \frac{F}{X-F}, \qquad v = \frac{a''b''}{a'b'} = \frac{\omega}{f},$$

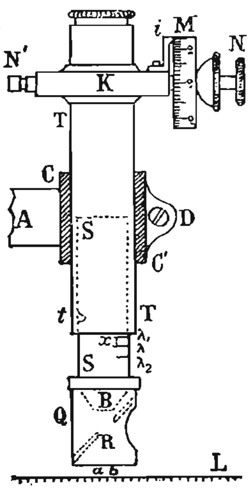
где X означава удаљење објектива од лимба, које је нешто веће од F; потпуно ће пак увеличање W бити:

$$W = \frac{a''b''}{ab} = V \,.\, v = \frac{F}{X-F} \cdot \frac{\omega}{f} \,.$$

Ради очитавања лимба, микроскоп се снабдева увек микрометром (чл. 14.) и утврђује за алхидаду тако, да стварни ликови лимбових цртица a, b, c и т.д. падну тачно у равнину покретног кончића микрометра и да буду паралелне с њиме. Овај кончић у нормалном своме положају 0, — којему одговара одређени обрт микрометарног завртња и прочитање на добошу $n = o$, — и замењује собом казаљку алхидаде J; због тога, за одређивање интервала x' од 0 до лика најближе цртице a' са мањом вредношћу (угловном), треба само још померити кончић да поклопи a' и помножити извршено при томе прочитање n са сталном вредношћу C једнога подеока добошевог, те да се интервал x' изрази и секундама лимба.

Али се, са извлачењем и увлачењем објектива у микроскопској цеви и мењањем, премо томе, удаљења целога мокроскопа од лимба, увек може доћи до таквога увеличања V објектива, када покрету конца за један потпуни обрт микрометра одговара на лимбу лук од 1′ или 2′, или уопште неколико минута. Ако је добош микрометра подељен на 60 делића, тада ће вредност C једнога таквог подеока бити равна или 1″ или 2″, или уопште извесноме целом броју секунди, чиме се одређивање интервала x' сасвим упрошћава.

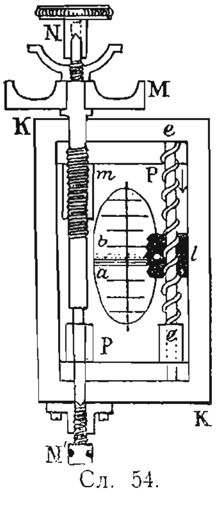
Уместо једнога покретног кончића боље је имати у микроскопу пар врло блиских паралелних кончића па их увек стављати тако, да посматрана цртица дође тачно у средину међу њима. Треба да буде још један кончић перпендикуларан на та два те да се њиме означи оно место цртице, на коме је треба обухватити паром покретних кончића. Тачка пресека O тога кончића и покретног (при читању на добошу $n = o$) и друга главна тачка објектива B′ одређују линију OB′, која се зове *оптичка оса микроскопа*.



Сл. 53.

Да расмотримо детаљније конструкцију микроскопа на великом, преносном вертикалном кругу Репсолдовом. Лимб L тога инструмента (сл. 59.), који служи за мерење висина небесних тела, има радиус од 146^{mm} а подељен је врло танким цртицама на интервале $ab = 4'$ тако да линеарна вредност сваког износи 0.17^{mm}. Микроскопова је цев T (сл. 53.) уметнута и чврсто стегнута завртњем D у цилиндричном отвору C на крају алхидаде A; његов пак објектив B намештен је на другој цеви S, која се може да покреће у унутрашњости цеви T а и да се учврсти за њу завртњићем t тако, да линеарна величина лика $a'b'$ интервала буде потпуно равна двама обртима (ходовима) завртња NN′. Да би тај услов био испуњен, при линеарној вредности једнога хода завртња од 0.34^{mm}, увеличање објектива V треба да буде равно 4. Тада ће вредност C једнога подеока добоша M, — који је подљен на 60 делова, — бити равна 2″.

Да би се цртице лимбове а и сами кончићи микрометра оцртавали јасно на довољно осветљеном пољу, надевена је на објективни крај микроскопа цевчица Q са рефлектором у облику беле мат плочице R, која рефлектује на лимб дневну или вештачку светлост, ради тога се та цевчица може слободно окретати те да се са својим отвором постави у страну светлости.



Сл. 54.

Слика 54. представља у пресеку металну кутијицу K микрометра. У њеној се унутрашњости покреће напред и назад, помоћу завртња NN′ плочица P са дугуљастим прорезом, на којој је и утврђен пар врло блиских кончића, перпендикуларно на правац завртња, и један кончић, паралелно с њиме; непокретни пак зупчићи l, чије је растојање равно једноме ходу завртња NN′, показују број његових обрта, који је учињен за покрет пара конаца од нормалног њиховог положаја наспрам средњега зупчића. Услед *мртвога хода завртњевог* у муфу са завојицама m, он би се при свакој промени правца његова обртања окретао за извесан део својега обрта не покрећући плочицу са кончићима. Тај се мртви ход паралише спиралом ee, која стално притискује муф m на зарезе завртња у правцу његова краја N′; поред свега тога дешава се, да, услед згушћавања мазива, слабљења еластицитета спирале и других узрока, прочитање на добошу M, добивено при стављању пара кончића *позитивним кретањем* завртња, (при коме он притискује на спиралу *ee*), буде више или мање различито од прочитања стављањем кончића *негативним кретањем;* због тога се и овде треба придржавати правила, да се свако стављање пара кончића на лимбову цртицу врши увек позитивним кретањем завртња.

31. Постављање микроскопа.

Грешке читања лимба помоћу микроскопа могу да се дешавају због ових узрока: 1.) због неправилно постављеног микроскопа, 2.) због нетачности стављања кончића на цртицу лимба, 3.) због нетачности одређивања вредности обрта завртњевог и 4.) због различитих несавршенстава микрометарне справе.

При учвршћивању микроскопа у отвору кљешта C, главна пажња треба да буде обраћена на постављање његово на таквом растојању од лимба, при којем би се цртице његове виделе исто тако јасно оцртане као и кончићи, т.ј. да се не запази ни најмање паралактичко скретање једних према другима при померању ока у страну; али, пошто од удаљења или приближења микроскопа ка лимбу зависи још и испуњење услова, да интервалу међу цртицама одговара жељени потпуни број обрта микрометарног завртња, то се једно и друго може да постигне само поступним приближавањем.

Кад се обележи цртицом λ_1 (сл. 53.), колико је наиме извучена цев S са објективом и кад се постави микроскоп у кљештама C тако, да не буде ни најмање паралаксе кончића, треба ставити пар покретних кончића једно за другим на две суседне цртице *a* и *b* па ако се разлика добивених прочитања $r_1 = n_b - n_a$ покаже већа од 120 делића добошевих (н.пр. $r_1 = 120 + 4.2$), онда треба увући цев S дубље, обележити њен нови положај цртицом λ_2, понова поставити микроскоп тако, да не буде паралаксе кончића па понова извршити два стављања кончића на исте цртице. Кад се добије у другом случају разлика прочитања r_2 (н. пр. $r_2 = 120 - 6.3$) и измери растојање *d* међу цртицама λ_1 и λ_2, већ ће лако бити обележити такву црту λ за положај цеви S, при којему ће разлика прочитања r изаћи скоро равно 120 делића; растојање x те тражене црте λ од λ_1 добиће се тада из пропорције:

$$\frac{x}{d} = \frac{r_1 - 120}{r_1 - r_2} \quad \left(\text{пример: } x = d.\ \frac{4.2}{4.2 + 6.3} = \frac{2}{5}\, d\right).$$

После тога треба, обртањем микроскопа око његове осе у кљештама C, поставити покретни пар кончића паралелно према цртицама лимба. Исто тако треба обратити пажњу и на то, да микроскоп буде приближно перпендикуларан на равнину лимба, да би се све цртице, које се виде у његову пољу гледања, подједнако јасно оцртавале.

Када је микроскоп постављен и дефинитивно утврђен, неопходно је потребно одредити *тачну вредност* једнога обрта микрометарног завртња, која се краће на енглеском зове *run*. Ради тога се микрометром мери неколико интервала *ab* међу цртицама лимба на разним местима његове периферије, да би се ослабио утицај на средњи извод не само случајних грешака постављања кончића већ и грешака саме поделе лимбове. Узмимо например, да је из многих мерења изашло у средњем:

$$ab = 4' = 2^{об.} + 1.^{\partial}5 = 120^{\partial}\left(1 + \frac{1.5}{120}\right) = 120^{\partial}\left(1 + \frac{1}{80}\right)$$

или

$$1 \text{ делић} = 2''\left(1 + \frac{1}{80}\right)^{-1} = 2''\left(1 - \frac{1}{80}\right);$$

тада сва прочитања извршена овим микроскопом, изражена у секундама, треба да буду смањена за $\frac{1}{80}$ део. Тако ће н.пр. прочитање $+1^{об.}\,31.^{\partial}7$ дати не $2' + 63''4 = 183''4$ већ $183''4\left(1 - \frac{1}{80}\right) = 183''4 - 2''3 = 181''1 = 3'\ 1''1$.

Већа или мања тачност стављања пара кончића микрометрових на цртицу лимба зависи: од увеличања W микроскопа (обично 40 пута), од растојања међу кончићима, од дебљине и правилности цртица лимбових, од интензивности његовог осветљења, од пажљивости с којом се врши стављање кончића и т. д. У сваком пак случају, о средњој се грешци ε једнога стављања може судити по међусобној сличности читања̂ микрометра, која се добивају стављањем кончића много пута на једну и исту црту. Код преносног вертикалног круга Репсолдовог она не прелази ± 0.3 дел. добоша, т.ј. $\pm 0''6$.

32. Испитивање неправилности микрометра.

Код сваког микрометра могу да постоје две врсте неправилности: *систематске,* које произлазе од непотпуне једнакости разних ходова завртњевих и *периодичке,* које се понављају при сваком обрту његову.

За откривање и одређивање неправилности прве врсте треба мерити разним деловима микрометарног завртња, — али при скоро подједнаким читањима на добошу, — сразмерно малу дужину $\alpha = ab$ (сл. 53.), која захтева приближно један обрт завртња за покрет кончића са a на b. Узмимо, да се је из неколико пута поновљених мерења добило за α, при обртима завртња 1, 2,.... $(n-2)$, $(n-1)$, величине $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots. \alpha_{n-1}, \alpha_n$, а у средњем $\alpha_o = \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n)$. Тада ће разлике $\delta_1 = \alpha_1 - \alpha_o$, $\delta_2 = \alpha_2 - \alpha_o$, ... $\delta_n = \alpha_n - \alpha_o$ и бити систематске грешке напред речених ходова, свакога посебице; поступним пак сумирањем њиховим одредиће се грешке у прочитањима стања микрометрових при разним његовим обртима:

обрти	грешке	обрти	грешке
0 . . .	0	. . . .	. . . .
1 . . .	δ_1	$n-2$ . . .	$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-2}$
2 . . .	$\delta_1 + \delta_2$	$n-1$ . . .	$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1} = -\delta_n$
3 . . .	$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$	n . . .	$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1} + \delta_n = 0$
. . . .	. . . . .		

Њих треба и додавати са обратним знаком тим прочитањима. Али, код микрометара, који на микроскопима служе за очитавање лимба, никада се не дешава, да се кончићи одводе сувише далеко од нормалнога њиховог положаја (код вертикалног круга Репсолдовог не више од 2 обрта у једну страну), због тога и није неопходно потребно одређивати у њима неправилности ове врсте.

Да би се испитале периодичке грешке микрометра микроскоповог, треба њиме извршити низ мерења извесне дужине при различитим прочитањима на добошу. Најбоље је прилепити привремено на лимб танку сребрну плочицу са тако блиским цртицама a и b, да би виђено растојање међу њима $a'b'$ било приближно равно или $\frac{1}{6}$, или $\frac{1}{8}$, или уопште $\frac{1}{s}$ део једнога обрта завртњевог.

Кад се постави добош микрометра на прочитање $0^{об.} 0^{д.}$, онда се покретом лимба уводи његова црта a у средину међу кончићима; затим се позитивним кретањем микрометра изврше тачна стављања кончића на обе црте a и b и добије разлика читања d_1, блиска $\frac{60}{s} = \sigma$. Затим се постави добош тачно на прочитање σ, уводи се поново лимбова цртица a у средину међу кончићима, стављају се тачно, микрометром, кончићи на њу и на b и добива сад већ нека друга разлика d_2; на сличан се начин, при даљим стављањима добоша на 2σ, 3σ,.....$(s-1)\sigma$, добивају разлике: d_3, d_4,....d_s. Ради тачности даљих извода треба поновити неколико пута та мерења, да би се добиле што тачније величине d_1, d_2,....d_s.

Кад се са d означи истинита величина мереног интервала ab а грешке подеока на добошу, означених 0, σ, 2σ, 3σ....$(s-1)\sigma$, респективно са $\triangle_0 (=0)$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$,...$\triangle_{s-1}$, онда ћемо имати овакве изразе:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = d + \triangle_1 - 0 \\ d_2 = d + \triangle_2 - \triangle_1 \\ d_3 = d + \triangle_3 - \triangle_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ d_{s-1} = d + \triangle_{s-1} - \triangle_{s-2} \\ \underline{d_s = d + \triangle_s - \triangle_{s-1}} \end{array}\right\} \text{одакле} \left\{\begin{array}{l} \triangle_1 = (d_1 - d) \\ \triangle_2 = (d_2 - d) + \triangle_1 \\ \triangle_3 = (d_3 - d) + \triangle_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \triangle_{s-1} = (d_{s-1} - d) + \triangle_{s-2} \\ \triangle_s = (d_s - d) + \triangle_{s-1} = 0 \end{array}\right.$$

у средњем $\frac{\Sigma d}{s} = d$.

По тако изведеним величинама $\triangle_1$, $\triangle_2 \ldots \triangle_{s-1}$ могу се интерполовањем одредити грешке $\triangle$ интервалних бројева делића добошевих и саставити таблица поправака за свако прочитање, које буде извршено овим микрометром. Грешка $\triangle$, која одговара ма коме прочитању m на добошу, може бити представљена и у облику периодичке функције:

$$\triangle_m = c + a_1 \sin u + b_1 \cos u + a_2 \sin 2u + b_2 \cos 2u + \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

где $u = 360^\circ . \frac{m}{60}$ означава угловну величину прочитања m, а c, a_1, b_1, a_2, b_2, и т.д. сталне коефицијенте, који треба да буду одређени по даним величинама $\triangle_1$, $\triangle_2$, ... $\triangle_{s-1}$ методом најмањих квадрата. Али се овакве грешке $\triangle_m$ изражавају довољно тачно и са прва три члана израза (1.) тако, да ће за свака два диаметрално супротна читања на добошу m и $m+30$ изаћи

$$\triangle_m + \triangle_{m+30} = 2c;$$

а ово, — као што ћемо видети у чл. 33., — директно указује на то, да се главни узрок периодичких грешака Δ_m скрива у непотпуном поклапању центра поделе (периферије) добоша са осом самога завртња.

На тој је основи у микроскопима вертикалнога круга Репсолдовог поред главнога покретног пара кончића додат још један пар на удаљењу од првога за $1\frac{1}{2}$ обрт завртња тако, да се при постављању тога другог пара на најближу цртицу лимба добива прочитање, које се увек разликује од прочитања помоћу првог пара приближно за 30 делића*) те се због тога у средњем из прочитања помоћу оба пара кончића потпуно уништава утицај ексцентричности добоша.

Пример. При испитивању једнога микрометра са добошем, који је био подељен на 60 делића, растојање d међу цртицама a и b било је приближно равно $\frac{1}{8}$ делу обрта завртњевог ($s = 8$ и $\sigma = 7^d5$); због тога добивене грешке $\triangle_1$, $\triangle_2, \ldots \triangle_7$ одговарају прочитањима $m = 7^d5$, 15^d0, $22^d5, \ldots 45^d0$ и 52^d5.

1. ред мерења			**Средње разлике из 8 редова**	**Периодичке грешке**		
цртe		разл.		Изведене из мерења		Срачунате по формул.
a	b	d				
0.1	7.5	7.4	$d_1 = 7.29$	$d_1 - d = -0.06$	$\triangle_0 = 0.00$	(-0.01)
7.7	15.1	7.4	$d_2 = 7.53$	$d_2 - d = +0.18$	$\triangle_1 = -0.06$	(-0.07)
14.9	22.5	7.6	$d_3 = 7.70$	$d_3 - d = +0.35$	$\triangle_2 = +0.12$	$(+0.13)$
22.3	30.1	7.8	$d_4 = 7.63$	$d_4 - d = +0.28$	$\triangle_3 = +0.47$	$(+0.47)$
30.0	37.5	7.5	$d_5 = 7.42$	$d_5 - d = +0.07$	$\triangle_4 = +0.75$	$(+0.75)$
37.6	44.6	7.0	$d_6 = 7.15$	$d_6 - d = -0.20$	$\triangle_5 = +0.82$	$(+0.81)$
44.8	51.6	6.8	$d_7 = 6.99$	$d_7 - d = -0.36$	$\triangle_6 = +0.62$	$(+0.62)$
52.5	59.4	6.9	$d_8 = 7.08$	$d_8 - d = -0.27$	$\triangle_7 = +0.26$	$(+0.28)$

у средњем $d = \mathbf{7.35}$

Ако се сад по овде нађеним величинама $\triangle_0 = 0$, $\triangle_1, \triangle_2, \ldots \triangle_7$ одреде по методи најмањих квадрата први коефицијенти c, a_1 и b_1 израза (1.), онда ће се добити:

$$c = +0^d372, \qquad a_1 = -0^d243, \qquad b_1 = -0^d381$$

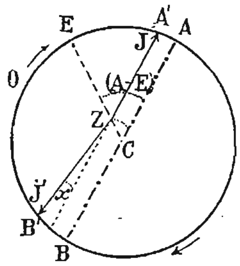
а све помоћу њих израчунате грешке $\triangle_m$, које су показане у загради, излазе скоро сасвим исте као и непосредно добивене.

33. Ексцентрицитет алхидаде.

При конструкцији угломерног инструмента не може потпуно да се постигне, да обртна оса Z алхидадина (сл. 55.) дође тачно у центар C лимбове поделе; стога увек треба претпостављати, да међу њима постоји мало расто-

---

*) Растојање међу срединама оба пара кончића, изражено у подеоцима добоша микрометровог, треба рачунати да је тачно равно $90^d + \delta$, где је δ врло мала величина. То се растојање врло лако одређује из разлике прочитањâ на добошу, која су извршена при стављању и једног и другог пара на неку, али једну и исту цртицу лимба; али, пошто та разлика може да буде поремећена периодичким грешкама микрометра, то треба поновити њено одређивање s пута тако, да читања на добошу, при стављању главног пара кончића на цртицу, буду приближно: $0, \sigma, 2\sigma, 3\sigma, \ldots (s-1)\sigma$, где је $\sigma = \frac{s}{60}$; тада ће средња величина њена бити ослобођена од тих грешака.



Сл. 55.

јање $CZ = e$, које се зове *ексцентрицитет алхидаде* и то у неком правцу CZE, које је одређено на лимбу његовом цртицом E (степени и т. д.). Тада ће, при сваком правцу алхидаде, казаљка њена J давати на лимбу прочитање A', које се више или мање разликује од истинитога прочитања A, које би требало да се добије при поклапању Z са C. И сад је лако видети, да ће, — при правцу степенских натписа (0°, 1°, 2°,.....358°, 359°) стрелом показаном, — изаћи

$$A' = A - e''\, sin\, (A - E) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

где $e'' = \frac{e}{r.\, sin\, 1''}$ означава угловну величину ексцентритета e за лимб данога радиуса r.

Да би се читања A' ослободила од тих грешака, — које зависе од величине e'', — на алхидади се намешта још једна казаљка J', диаметрално супротно према првој J. При поклапању Z са C она би требала да даје истинито прочитање $B = A + 180°$; али пошто се угао JZJ' у самој ствари може разликовати од 180° још и за неку врло малу величину x, то ће прочитање по тој другој казаљци бити у ствари

$$B' = A + 180° + e''\, sin\, (A - E) + x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2')$$

те ће се у средњем из A' и $B' - 180°$ добити

$$\frac{A' + B' - 180°}{2} = A + \frac{x}{2};$$

т. ј. средње из прочитања по обема казаљкама алхидаде неће ни уколико зависити од ексцентричног њеног положаја, али ће се разликовати од истинитог прочитања A на лимбу само за сталну величину $\frac{x}{2}$, која нема никаквога утицаја на измерене угле међу разним предметима. При томе треба напоменути још, да тачност мерења углова на тај начин неће ниуколико пострадати чак ни од извесне промењљивости величине e'' и E услед клаћења осе алхидадине.

С друге стране, разлике d прочитања B' и A' по двема супротним казаљкама алхидаде, које се мењају са променом њена положаја на лимбу и које имају овакав облик

$$d = (B' - 180°) - A' = x + 2e''\, sin\, (A - E) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

пружају могућност, да се на најпростији начин одреде: величина ексцентрицитета e, његов правац E и напред речени мали угао x. Ради тога је најбоље обићи алхидадом целу периферију лнмбову, померајући је s пута на равне интервале $\sigma = \frac{360°}{s}$ тако, да прочитања по првој казаљци J изађу приближно овакви: $A_0 = 0$, $A_1 = \sigma$, $A_2 = 2\sigma, \ldots.. A_{s-1} = (s - 1)\sigma$. Ако се сад стави

$$2e''\, cos\, E = y \qquad \text{а} \qquad 2e''\, sin\, E = z,$$

онда ће се добити s једначина облика

$$d_i = x + y\, sin\, A_i - z\, cos\, A_i, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)'$$

из којих је лако срачунати по методи најмањих квадрата (теорни део, Глава VIII) највероватније вредности за x, y и z, а затим ће се по y и z одредити и e'' и E.

Разуме се, да све што је овде речено вреди и за случај, када је алхидада са казаљкама J и J′ непомична при мерењу углова, а креће се сам лимб око осе Z, који се не поклапа потпуно са центром C његове поделе.

Пример. Ради одређења ексцентрицитета алхидаднога круга на малом универсалном инструменту са лимбом од 5.5 палаца (енгл.) у диаметру (чл. 65.), овај се круг померао за 30° ($s = 12$) тако, да су прочитања A_i по првом његовом вернијеру била приближно: 0°, 30°, 60°,.....300° и 330°. Разлике прочитања по другоме и првоме вернијеру $d = (B' - 180°) - A'$, које су се добиле у средњем из 4 таква потпуна обиласка целога лимба, — показане су у овој таблици:

A	d	d′	d—d′	A	d	d′	d—d′
0°	+ 10.″0	+ 8.″3	+ 1.″7	180°	+ 55.″0	+ 48.″8	+ 6.″2
30	+ 2.5	+ 6.2	— 3.7	210	+ 50.0	+ 50.9	— 0.9
60	+ 15.0	+ 10.1	+ 4.9	240	+ 42.5	+ 47.0	— 4.5
90	+ 20.0	+ 19.0	+ 1.0	270	+ 42.5	+ 38.1	+ 4.4
120	+ 25.0	+ 30.4	— 5.4	300	+ 25.0	+ 26.7	— 1.7
150	+ 40.0	+ 41.3	— 1.3	330	+ 15.0	+ 15.8	— 0.8

Кад се сада, са тима даним величинама d, реше једначине (3)′ по методи најмањих квадрата, лако се добивају прво вредности за x, y и z а наиме:

$$x = \frac{\Sigma d}{12} = +28.''5,\ y = \frac{\Sigma d \sin A}{6} = -9.''6 \text{ и } z = -\frac{\Sigma d \cos A}{6} = +20.''3,$$

а помоћу њих затим излази: $E = +115°$ и $2e = 22.''4$. Разлике пак између d и d', које су срачунате помоћу нађених вредности за x, y и z, дају $\Sigma(d - d')^2 = 154$ па због тога средње грешке самих величина d и по њима добивених x, y, z, $2e$ и E излазе овакве:

$$\varepsilon_d = \sqrt{\frac{154}{12-3}} = \pm 4.''1,\ \varepsilon_x = \pm \frac{4.''1}{\sqrt{12}} = \pm 1.''2,\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{2e} = \pm \frac{4.''1}{\sqrt{6}} = \pm 1.''7 \text{ и } \varepsilon_E = \pm \frac{1.''7}{2e \sin 1^{\circ}} = \pm 4.^{\circ}3.$$

34. Случајне грешке поделе лимбове.

Да расмотримо још један узрок нетачности мерења углова, који је општи за све угломерне инструменте и који се састоји у нетачности саме поделе лимбове.

За дељење кругова на степене и на још мање делиће (подеоке) служе нарочите *машине за дељење*. Код једних се на подељеноме кругу, који служи као образац, учвршћује круг на коме треба гравирати поделу, па кад се под непомични микроскоп поступно доводе разне црте круга-обрасца, онда се помоћу нарочитог механизма са ножем повлаче цртице на кругу који се дели. Код других пак цела је периферија круга-обрасца изрезана у облику зупчаника на ситне и подједнаке зупчиће. Тај се круг покреће за по 5′ или 10′ помоћу бескрајног завртња, који тангира његову периферију; после свакога таквог покрета врши се зарез на кругу који се дели и који је утврђен за круг-образац.

У сваком случају подела данога круга изискује много времена, у току којега, усљед температурних промена и усљед потреса, могу да се десе поступне промене у релативном положају оба круга и разних делова машине за дељење, и то ће проузроковати поступно нагомилавање грешака на цртицама, које се гравирају, поред оних, које већ постаје на подели обрасца. Овакве грешке цртица, које се простиру по целој дужини круга по извесном, више или мање правилном закону, зову се *систематске грешке*. За неколико блиских цртица оне се могу сматрати као подједнаке.

Али, усљед клаћења ножа за гравирање, усљед нетачности постављања кончића микроскопа на цртице круга-обрасца, усљед неправилности његових зубаца и усљед разних других узрока такође случајнога карактера, — неминовно ће се десити још нека већа или мања грешка на свакој цртици, која се гравира, али потпуно независно од сличних грешака на осталим цртицама. Овакве грешке у подели лимба, које се појављују без икаквог одређеног закона, зову се *случајне*.

Вештина је дељења кругова сада достигла до таквога савршенства, да систематске грешке цртица код бољих уметника не надмаша 2″, случајне пак — неколико десетих делова од секунде; због тога, да се открију како једне тако и друге грешке, потребно је, испитивања вршити очитавањем лимба једино помоћу микроскопа.

Да би се добио појам о величини случајних грешака поделе, треба изабрати на каквом месту лимба неколико интервала међу цртицама ab, cd, ef.... и измерити их једним и истим деловима микрометра и добоша. Кад се, из нађених n величина: $ab = d_1$, $cd = d_2$, $ef = d_3$, ... d_n, узме средње d и одступања од њега: v_1, v_2, v_3 ..... v_n па са ε означи средња грешка стављања пара кончића микрометра на цртицу, а, са α средња случајна грешка самих цртица, онда ћемо имати

$$\frac{\Sigma v^2}{n-1} = 2\alpha^2 + 2\varepsilon^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

Да би се одавде издвојила величина ε^2, најбоље је поновити мерења истих интервала још једном. Тада ће, понова добивене величине: $ab = d'_1$, $cd = d'_2$, $ef = d'_3 \ldots d'_n$ и одступања њихова: v'_1, v'_2, $v'_3 \ldots . v'_n$ од средњега d', дати још једном

$$\frac{\Sigma v'^2}{n-1} = 2\alpha^2 + 2\varepsilon^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)'$$

разлика пак $(d'_1 - d_1)$, $(d'_2 - d_2)$, $(d'_3 - d_3) \ldots . (d'_n - d_n)$, неће, очевидно, зависити од погрешака поделе већ само од средње грешке ε стављања кончића на цртице; због тога ће се ова и добити из њих овако:

$$4\varepsilon^2 = \frac{\Sigma(d' - d)^2}{n},$$

после чега ће у општој суми (4) са (4)′ изаћи

$$4\alpha^2 = \frac{\Sigma v^2 + \Sigma v'^2}{n-1} - 4\varepsilon^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

Напоменућемо ипак, да, ако је α знатно мање од ε (код преносног вертикалног круга Репсолдовог $\alpha = \pm 0.''2$ т.ј. скоро трипут мање од ε), то се, при ограниченом броју n мерења, може лако десити, да се из израза (5.) добије за α величина уображена.

35. Систематске грешке поделе лимбове.

Узмимо, као и раније у чл. 32., да представимо величину $\triangle(u)$ систематске грешке цртице u, и њој суседних на лимбу, у облику периодичке функције

$$\left.\begin{aligned} \triangle(u) = c &+ a_1 \sin u + a_2 \sin 2u + \ldots. + a_i \sin iu + \; . \; . \; . \; . \\ &+ b_1 \cos u + b_2 \cos 2u + \ldots. + b_i \cos iu + \; . \; . \; . \; . \end{aligned}\right\} . \; (1.)$$

где c, a_1, b_1, a_2, b_2, ... a_i, b_i .... представљају за дани лимб неке сталне количине, и, предпоставимо, да алхидадни круг има s казаљки, постављених на једнаком растојању једно од другога $\sigma = \frac{360^\circ}{s}$ тако, да систематска грешка $\triangle_s(u)$ средњега из прочитањâ по свима тим казаљкама буде

$$\triangle_s(u) = \frac{\triangle(u) + \triangle(u+\sigma) + \ldots. + \triangle(u + [s-1]\sigma)}{s}.$$

У овоме ће изразу за $\triangle_s(u)$ сви чланови са једнаким коефицијентима a_i и b_i саставити суме:

$$\frac{a_i}{s}\Big[\sin iu + \sin i\,(u+\sigma) + \sin i\,(u+2\sigma) + \ldots. + \sin i\,(u + [s-1]\sigma)\Big]$$

$$\text{и} \quad \frac{b_i}{s}\Big[\cos iu + \cos i\,(u+\sigma) + \cos i\,(u+2\sigma) + \ldots. + \cos i\,(u + [s-1]\sigma)\Big]$$

које ће (по познатој особини сумâ синусâ и косинусâ лукова, који се протежу у аритмет. прогресији дуж целе периферије) бити равне нули а само ће чланови са $i = s$, $i = 2s$, $i = 3s$ и т.д. (за које је сам производ $i\sigma$ раван 360° или 2, 3, 4... пута 360°) дати суме, које нису равне нули; због тога ће изаћи

$$\left.\begin{aligned} \triangle_s(u) = c &+ a_s \sin su + a_{2s} \sin 2\,su + a_{3s} \sin 3\,su + \; . \; . \\ &+ b_s \cos su + b_{2s} \cos 2\,su + b_{3s} \cos 3\,su + \; . \; . \end{aligned}\right\} . \; . \; (6.)$$

Например, у случају два вернијера или микроскопа, остаће само парни чланови са $i = 2$, $i = 4$, $i = 6$ и т.д.

Одатле се види, да се са повећањем броја казаљки на алхидадином кругу може ослабити до ког желимо ступња утицај систематских грешака лимбове поделе на мерене угле; ипак се никада не ставља више од 4 казаљки већ се то исто достиже *мерењем више пута* непознатог угла међу предметима A и B на разним местима на лимбу те да се у исто време ослаби и утицај случајних грешака визирања дурбином на те предмете. И заиста, ако се лимб инструмента ставља тако, да прочитања u, при визирању на A, буду: A при првом мерењу, $(A + \sigma)$ при другом, $(A + 2\sigma)$ при трећем,... и најзад $(A + [s - 1]\sigma)$ при последњем, s-том мерењу, — при чему је $\sigma = \frac{360^o}{s}$, — то ће одговарајућа прочитања, при визирању на други предмет B, бити: B, $(B + \sigma)$, $(B + 2\sigma)$,....$(B + [s - 1]\sigma)$ тако, да када се узме средња величина из свих s, нађених за угао α, онда ће се (на сасвим истој основи, као и у случају s казаљки) добити грешка тога извода у облику

$$\triangle_s(B) - \triangle_s(A) = a_s\,(sin\, s\, B - sin\, s\, A) + a_{2s}\,(sin\, 2\, s\, B - sin\, 2\, s\, A) + \ . \ . \ .$$
$$+ b_s\,(cos\, s\, B - cos\, s\, A) + b_{2s}\,(cos\, 2\, s\, B - cos\, 2\, s\, A) + \ . \ . \ .$$

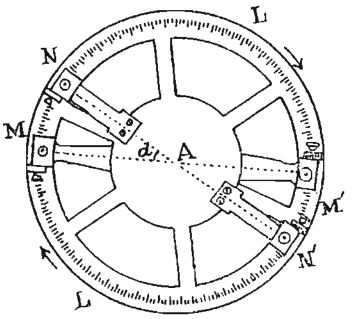
Разуме се, да је у случају двеју, диаметрално супротних казаљки довољно премештати лимб сваки пут свега за $\sigma^o = \frac{180^\circ}{s}$.

Систематске се грешке лимбове поделе могу једном брижљиво испитати, да би се затим могли увек исправити нетачни угли, добевени при појединим мерењима. При сталној употреби двеју диаметрално супротних казаљки за ово је довољно, разуме се, одредити за сваку црту само средњу величину $D(u)$ из њене властите грешке $\triangle(u)$ и грешке $\triangle(u + 180^o)$ њој дијаметрално супретне цртице, — при чему ће се то средње $\frac{1}{2}\,[\triangle(u) + \triangle(u + 180^o)]$ изразити редом

$$\left.\begin{aligned} D(u) = c + a_2\, sin\, 2\, u + a_4\, sin\, 4\, u + a_6\, sin\, 6\, u + \ . \ . \ . \\ + b_2\, cos\, 2\, u + b_4\, cos\, 4\, u + b_6\, cos\, 6\, u + \ . \ . \ . \end{aligned}\right\} \ . \ . \ (7.)$$

Такво испитивање није особито тешко извршити, ако је круг L снабдевен за очитавање са два микроскопа M и M′ и ако се на алхидади A могу привремено да утврде још два помоћна микроскопа N и N′ (сл. 56.).

Кад утврдимо микроскопе N и N′ на алхидади на растојању MN и M′N′, приближно равно $\sigma = \frac{360^o}{s}$ (где је s неки округли број), ставимо под микроскоп M спочетка нулту црту поделе лимба, извршимо тачна прочитања на сва 4 микроскопа и узмемо средње $\frac{M + M'}{2}$ и $\frac{N + N'}{2}$, онда ћемо добити неку разлику $d_1 = \frac{N + N'}{2} - \frac{M + M'}{2}$; ставимо затим под микроскоп M црту лимба са натписом σ (степени), извршимо поново прочитања на свима микроскопима и нађимо сада већ другу разлику d_2; продужавајући тако и при даљем стављању микроскопа M на цртице 2σ, 3σ... $(s - 1)\,\sigma$, добићемо разлике d_3, d_4....d_s. Поновимо сад све то у обрнутом реду, да би средњи изводи из свију разлика d_1, d_2,...d_s били ослобођени од утицаја поступних промена температуре на узајамни положај микроскопа и на сами круг. Ако се сад са d означи истинити угао $\frac{1}{2}(\sphericalangle\, MAN + \sphericalangle\, M'AN')$ међу микроскопима и узме да је грешка почетне (нулте) црте лимба $D(0)$ равна нули, то ће нам нађених s разлика дати:



Сл. 56.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = d + \mathfrak{D}(\sigma) \quad - 0 \\ d_2 = d + \mathfrak{D}(2\sigma) \quad - \mathfrak{D}(\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{s-1} = d + \mathfrak{D}([s\text{-}1]\sigma) - \mathfrak{D}([s\text{-}2]\sigma) \\ d_s = d + \quad 0 \quad - \mathfrak{D}([s\text{-}1]\sigma) \end{array}\right\}; \text{ одакле је } \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}(\sigma) \quad = (d_1 - d) \\ \mathfrak{D}(2\sigma) \quad = (d_2 - d) + \mathfrak{D}(\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{D}([s\text{-}1]\sigma) = (d_{s-1} - d) + \mathfrak{D}([s\text{-}2]\sigma) \\ \quad 0 \quad = (d_s - d) + \mathfrak{D}([s\text{-}1]\sigma) \end{array}\right.$$

$$\text{сред. } \frac{\Sigma d}{s} = d$$

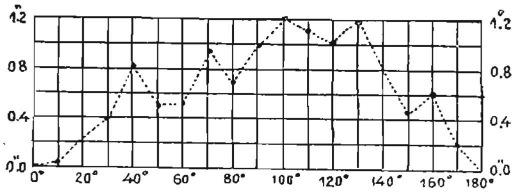
При врло великом броју s, напред наведени би низ посматрања захтевао, разуме се, и сувише много времена, usљед чега изводи $\mathfrak{D}(\sigma)$, $\mathfrak{D}(2\sigma)$ и ост. неби били довољно поуздани; стога је боље спочетка одредити грешке $\mathfrak{D}$ само за мали број цртица, н.пр. $\mathfrak{D}(30^\circ)$, $\mathfrak{D}(60^\circ), \ldots \mathfrak{D}(150^\circ)$, (при $s = 6$), па затим тек на основу њих одредити у свакоме од ових интервала и грешке $\mathfrak{D}$ интервалне поделе. Тако например, кад се утврде помоћни микроскопи $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ на растојању $\sigma = \frac{30^\circ}{6} = 5^\circ$ од главних $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ и микроскоп $\mathfrak{M}$ буде стављао сукцесивно на цртице означене са 60°, 65°, 70°, 75°, 80°, и 85°, онда ћемо наћи по пређашњем, из прочитања оба пара микроскопа, разлике: $d'_1, d'_2, \ldots d'_6$, које ће дати:

$$\left.\begin{array}{l} d'_1 = d' + \mathfrak{D}(65) - \mathfrak{D}(60) \\ d'_2 = d' + \mathfrak{D}(70) - \mathfrak{D}(65) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d'_5 = d' + \mathfrak{D}(85) - \mathfrak{D}(80) \\ d'_6 = d' + \mathfrak{D}(90) - \mathfrak{D}(85) \end{array}\right\} \text{одакле је } \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}(65) = \mathfrak{D}(60) + (d'_1 - d') \\ \mathfrak{D}(70) = \mathfrak{D}(65) + (d'_2 - d') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{D}(85) = \mathfrak{D}(80) + (d'_5 - d') \\ \mathfrak{D}(90) = \mathfrak{D}(85) + (d'_6 - d') \end{array}\right.$$

На сл. 57. представљен је графички ход систематских гешака $\mathfrak{D}(u)$ на меридијанском кругу пулковске опсерваторије, Репсолдове израде. Оне су испитане на напред изложени начин од 10 до 10 степени и, као што се види, достижу свега до 1″2.

Ако конструкција инструмента не допушта, да се за алхидаду утврди пар помоћних микроскопа, или се под руком не налазе, онда се грешке лимба $\mathfrak{D}(u)$ могу испитати на сасвим сличан начин, — али, разуме се, са много мањом тачности, — мерењем са тим инструментом на разним деловима његова лимба једнога и истог угла α, приближно од $\sigma = \frac{180^\circ}{s}$ · Ради тога је најбоље поставити две вештачке белеге m и n на блиском и подједнаком растојању од инструмента тако, да визирање на њих дурбином подлежи што мањим случајним грешкама; при томе померати лимб тако, да прочитања за белеге m и n, при првом мерењу угла α, буду приближно равни 0° и σ°, при другом σ° и $2\sigma^\circ$, при трећем $2\sigma^\circ$ и $3\sigma^\circ$ и т.д. Тада ће се, по s нађених величина $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_s$ за угао α, одредити систематске грешке поделе лимба сасвим онако, као и мало час.

На тај су начин, например, биле испитине систематске грешке хоризонталнога круга на универсалном инструменту Траутона и Симса, који ће бити описан у глави VIII. Спочетка су, мерењем угла $\alpha = 30^\circ$, биле одређене грешке $\mathfrak{D}(u)$ за цртице поделе, означене са 0°, 30°, 60°, 90°, 120° и 150° а затим, мерењем угла $\alpha = 6^\circ$, и



Сл. 57.

за остале интервалне цртице од 6 до 6 степени. Ако се по свима од ових 30 вредности за D(*u*), — које су наведене даље у таблици, — израчунају по методи најмањих квадрата (теор. део, гл. VIII) коефицијенти израза (7.), онда ће изаћи:

$$c = -1''99, \quad a_2 = -1''27, \quad a_4 = +0''49,$$
$$b_2 = +1.20, \quad b_4 = +0.64,$$

и, величине D′(*u*), срачунате само са тих пет првих чланова израза (7.), изаћи ће већ довољно сличне са датим D(*u*), јер је средња грешка, с којима су ове одређене, могла досезати до ± 0″3.

u	D(*u*)	D′(*u*)	*u*	D(*u*)	D′(*u*)	*u*	D(*u*)	D′(*u*)
0°	0″0	—0″1	60°	—4″9	—4″4	120°	—1″8	—1″4
6	—0.4	—0.3	66	—4.6	—4.3	126	—0.9	—1.4
12	—0.3	—0.6	72	—3.8	—4.0	132	—1.6	—1.4
18	—1.4	—1.1	78	—3.2	—3.5	138	—1.2	—1.3
24	—1.9	—1.7	84	—3.1	—3.0	144	—0.9	—1.2
30	—2.7	—2.4	90	—2.4	—2.5	150	—0.8	—1.0
36	—2.6	—3.0	96	—1.8	—2.1	156	—0.9	—0.8
42	—3.3	—3.6	102	—2.0	—1.8	162	—0.4	—0.5
48	—4.1	—3.9	108	—2.0	—1.5	168	—0.3	—0.3
54	—4.4	—4.4	114	—1.2	—1.4	174	—0.3	—0.2

ГЛАВА V.

ЧАСОВНИЦИ И ХРОНОМЕТРИ.

36. Клатно и балансир.

Звездани или средњи *дан* (од 24 часа) је природна *јединица* времена; за мерење пак времена овом јединицом и њеним деловима: *часовима*, *минутама* и *секундама*, служе *часовници* и *хронометри*.

Код ових инструмената треба разликовати четири главна дела: регулатор, преносни механизам, бројаник и покретач. *Регулатор* или *клатно* је покретно тело, које врши, под утицајем неке постојане силе, низ једноликих покрета подједнакога трајања. *Преносни механизам* (echappement, Hemmung) служи за пренос тих покрета на *бројаник,* т.ј. на систему зупчаних точкића, који покрећу казаљке по циферблату (cadran-у). *Покретач* је неопходно потребан за давање сталних удараца регулатору и за савлађивање отпора̂, које чине покретни делови напред реченога механизма.

Код зидних часовника, који стоје стално на истом месту, као покретач и као сила, која управља покретима регулатора, служи потпуно постојана сила *теже;* код преносних пак џепних часовника и код хронометара, та је сила у *еластичности челичне спирале,* која је нешто променљива у зависти од разних погодаба; због тога је код првих и сва конструкција простија те и показања њихова уопште бивају тачнија. За тачна се астрономска посматрања употребљују увек на сталним опсерваторијама зидни *часовници* најтачније израде; за мерења пак времена на експедицијама на суву и на мору, употребљују се *хронометри*, који се по својим димензијама разликују на *асталске* и *џепне.*

Клатно се часовника састоји из тешкога тега P (сл. 59. а. и 59. б.) облика сочива или цилиндричног на сразмерно танком пруту OH, који је обешен о непокретну хоризонталну осу O, око које оно и врши своје размахе. Трајање се њихово τ, — ако им угловна величина 2α није велика, — изражава овако

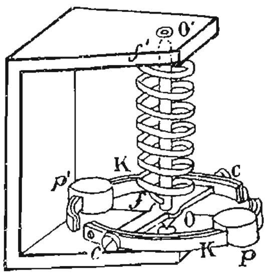
$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{Sin^2\alpha}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

где g означава убрзање теже у 1 секунди а l растојање центра C клатновог клаћења од осе вешања O, које зависи од момента инерције клатна Σmr^2 односно осе O, од масе M целога клатна, од растојања a његова центра тежишта G од O и делимично још од утицаја отпора ваздуха на кретање клатна; у безваздушном пак простору треба да буде*)

$$l = 0C = \frac{\Sigma mr^2}{Ma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

Код астрономских се часовника употребљава увек клатно, које врши један пуни размах у току времена $\tau = 1^s$ а за то дужина l треба да буде приближно равна 1 метру (јер је $g = 9.8$ метра а $\pi^2 = 9.9$). При томе ће како димензије клатна, тако и утицај отпора ваздуха на његово кретање бити најмање онда, када се оно по своме облику највише приближује простоме математичком клатну, т.ј. кад се састоји углавном из тешкога тега облика сочива (сл. 59. а.) или пак цилиндра (сл. 59. б.), који је обешен о осу 0 помоћу сразмерно танког металног прута, који се не изгиба.

Код хронометара као регулатор служи *балансир*. То је тело K котурастог облика са малим теговима p и p' (сл. 58.), које се креће час у једну час у другу страну око вертикалне осе $00'$ силом еластичне челичне спирале ff', чији је један крај f' утврђен за тело хронометра а други f за саму ту осу. Кад се балансир удаљује од својега положаја равнотеже у једну страну, онда се завојице спиралине скупљају, у другу пак страну оне се шире.



Сл. 58.

Незнатна маса балансира (у сравњењу са масом клатна код часовника) треба, разуме се, да се надокнађује брзином његова кретања, т.ј. врло великим амплитудама 2α његових размаха. За срећу се и из огледа показало, да се извесном променом дужине спирале и неким савијањем њених крајева f и f' може да постигне, да сила њеног еластицитета порасте пропорционално са углом удаљења балансира од његова положаја равнотеже а у том случају, по теорији,**) трајање његова размаха τ треба да буде независно од величине размаха и да се изражава овом формулом

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{N}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

где је Σmr^2 момент инерције балансира а N момент силе еластицитета спирале, који је обрнуто пропорционалан са њеном дужином.

---

*) Извод формула (1.) и (2.) може се наћи у сваком курсу механике а тако исто у нашем курсу више геодезије (Гл. IX).

**) При истим ознакама, као и у гл. IX „курса више геодезије", диференцијална једначина кретања балансира под утицајем силе NΘ, — која је пропорционална са углом Θ скретања његова од положаја равнотеже, — добија се у облику

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{\Sigma mr^2} . \Theta$$

и, после интегрирања, даће

$$\omega^2 = \frac{N}{\Sigma mr^2} (\alpha^2 - \Theta^2);$$

а затим ће се добити

$$dt = \frac{d\Theta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{N}} \cdot \frac{d\Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} \cdot$$

и

$$\tau = \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{N}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{N}}$$

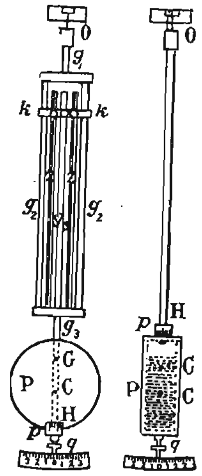
Код великих хронометара, који се зову *асшалски* (или *марински*) димензије се спирале и самога балансира израђују тако, да се сваки размах његов од 300° до 400° изврши у току од $\frac{1}{4}$ секунде а код џепних хронометара у току од $\frac{1}{5}$ секунде.

37. Конпенсација клатна и балансира.

Променљивост температуре је главни од узрока, који могу да мењају трајање τ клаћења клатна и балансира. Тако н.пр. при повишењу температуре за 1° C. дужина би се l жељезног клатна повећала за $\Delta l = \frac{11}{1000000} l$ а то би изазвало промену $\triangle\tau = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} \tau = \frac{11.\tau}{2000000}$ те би се за цео дан накупило $\frac{11 \times 86400^s}{2000000} = 0^s48$, тј. часовник би изостао приближно за $\frac{1}{2}$ секунде. Да би дужина l остала непроменљива, израђују се *компенсирана* (уједначена) клатна на овај начин:

1.) Прут се клатна OH израђује тако, да буде састављен из жељезних полуга g_1, g_2 и g_3, које се при повишењу температуре издужују наниже, и, из цинканих z, које се издужују навише (сл. 59. а.); ако при томе дужина $(g_1 + g_2 + g_3)$ буде толико исто пута већа од z, колико је пута коефицијент ширења жељеза мањи од коефицијента ширења цинка, — тј. скоро $2\frac{3}{4}$ пута, — онда ће центар клаћења C клатна остати при свакој температури на непроменљивом удаљењу l од осе O; то се пак још тачније достиже огледом, премештањем навише и наниже попречне полуге kk, која спаја крајеве полугâ z са g_3.

2.) Главни се тег P клатна израђује у облику жељезног и стакленог цилиндра, напуњеног до извесне висине живом (сл. 59. б.), која се са повишењем температуре издиже у цилиндру и тиме премешта центар C клаћења клатна навише тачно за толико за колико се он спустио због издужења жељезног прута HO. Ова су живина компенсирана клатна боља од првих због тога, што се на сталност коефицијента ширења цинка не можемо ослонити.



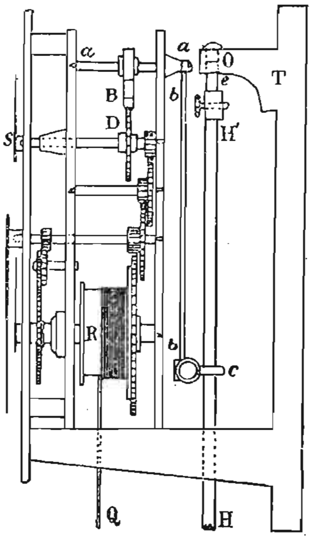
Сл. 59. а. и Сл. 59. б.

3.) Благодарећи проналаску *инвара* (легура од челика и никла) са изванредно малим коефицијентом ширења, у последње време од њега са великим успехом израђују клатна. За доњи крај оваквог инварнога прута OC надева се врло кратка месингана цев, на коју се обично и утврђује обични тег P облика сочива; при повишењу температуре, она ће, својим знатним ширењем, и то навише, потпуно конпенсирати оно врло мало издужење целога прута наниже.

Код хронометара се сила еластицитета спирале а отуд и момент њен N, смањује са повишењем температуре за 1° C толико много, да би се само од тог узрока време кретања τ балансира требало да повећа више него за $\frac{1}{8000}$ његов део а то би изнело у току целога дана око 11 секунада. Због тога се балансир израђује тако, да се његов момент инерције Σmr^2, — који улази у бројитељ форм. (3.), — не повећава са повишењем температуре, већ да се смањује. Ради тога се његов котур K израђује из два посебна лука (сл. 58.), притврђујући сваки од њих само једним његовим крајем за диаметралну спицу, која се зове *барет;* други пак крај са малим тегом p (или p') остављља се слободан.

Промене ваздушнога притиска не утичу осетно на трајање клаћења балансира, али приметно утичу на клатно, успоравајући, наиме, његово кретање од $0^{s}3$ до $0^{s}4$ на дан при пењању барометра за 25^{mm}; због тога је потребно пратити стање барометра, да би се уводиле потребне корекције у показањима астрономских часовника. Каткад се клатну додаје мали живини манометар, који компенсира напред речени утицај тиме, што се њиме врши одговарајућа промена дужине l клатна (чл. 36.)

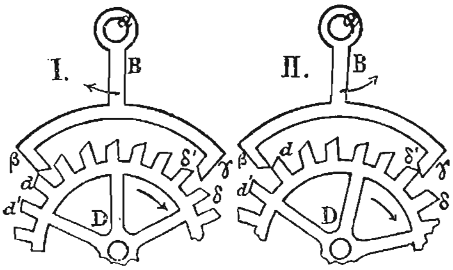
38. Преносни механизам и покретач.



Сл. 60.

Échappement или *преносни механизам* код часовника и хронометара има двојаку задаћу: 1.) помоћу изохроних клаћења клатна он регулише равномерност покрета системе зупчаних точкића бројаника, на коју дејствује сила покретача, и, 2.) преноси на клатно или на балансир са истог покретача лаке и једнолике ударце.

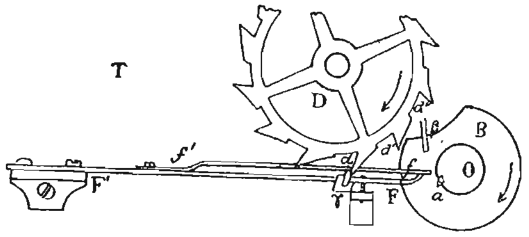
Код астрономских се часовника прут HH′ клатна (сл. 60.) веша о непокретни носач T помоћу танке и еластичне плочице *e*, која се олако прегиба за време његова клаћења; наспрам те тачке вешања O налази се оса *aa* са виљушком *bb*, која својим крајевима *c* обухвата прут HH′; на истој је оси и котва (ленгер) B, која је представљена и на сл. 61. Помоћу те виљушке *bb* наизменична се клаћења клатна преносе на осу *aa* и на котву B, при чему два зупца њена β и γ долазе наизменично у додир са зупцима *секундног точкића* D (roue d'échappement); овај пак, пошто је везан целим низом зупчаних точкића са калемом R покретача Q, стално је принуђен да се окреће у једну и исту страну, означену на слици стелицом. Овај се точкић назива секундни зато што је непосредно за његову осу учвршћена секундна казаљка *s*, која се креће по кадрану (циферблату).



Сл. 61.

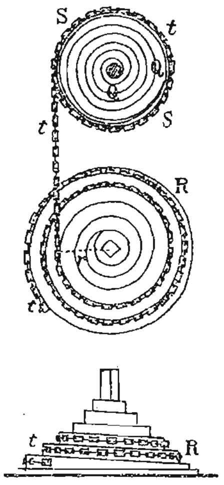
У положају I (сл. 61.), када се котва B креће заједно с клатном улево, неки ће зубац *d* секунднога точкића додиривати равнину левога његовог зупца β па ће клизити по њој, саопштавајући котви, а уједно с тим и клатну, слаби ударац за покрет улево; у том моменту други крај котве γ остаје слободан у интервалу међу зупцима δ и δ' точкића. Када се пак зубац *d* ослободи од котве, точкић ће D, под утицајем силе покретача Q, учинити мали скок, али ће се одмах зауставити, зато што ће његов зубац δ' ударити у десни крај котве γ. Тада почиње, — као што је показано у положају II, — кретање котве заједно са клатном удесно, док се зубац δ' не ослобди од котве и точкић не учини нови скок до сусрета његовога зупца d' са левим крајем котве β, и т.д.

Код хронометара је преносни механизам нешто комплициранији, зато што он треба да дâ балансиру потпуну слободу те да врши врло велике размахе. Као најбољи се сматра *échappement libre,* који је овако удешен: Зупци пренонога точкића D, — који је помоћу покретача стално принуђен на кретање у страну показану стрелицом на сл. 62. — сусрећу на својем путу задржавач γ, који се налази на праволиниској опрузи FF', чији је крај F' непомично утврђен за тело хронометра T. Са том је пак опругом FF' спојена код f' друга опруга ff', тако танка и слаба, да се она, при притиску на њен крај f одоздо, (како је то показано стрелицом), скоро без отпора одваја од F; када се пак на њу притисне одозго, она преноси тај притисак на опругу F, услед чега се ова изгиба и тада задржавач γ ослобађа зубац d точкића D, који је био наслоњен на њега. Када се балансир B креће у страну, показану стрелицом, онда ће зупчић a на његовој оси o, при сусрету са крајем опруге f, лако издићи тај крај f и проћи не чинећи никаква утицаја на точкић D; при обратном пак размаху балансира, притискујући на опругу f, тај ће зупчић a померити заједно с њоме и опругу F са задржавачем γ. При томе, чим се започне речено кретање точкића D, трећи зубац његов d'' сустиже закачку β на диску B, који је навучен на осу балансира, и саопштава овоме ударац ради одржања континуитета размахâ. На тај начин, интервали времена међу ударцима зубаца точкића D на задржавач γ, па према томе и међу скоковима секундне казаљке на кадрану дупло је већи од трајања једнога размаха балансира, т.ј. они износе 0.5 секунде код асталских (маринских) и 0.4 секунде код џепних хронометара, због чега се ови последњи и зову понекад *четиридесетни.*



Сл. 62.

Не заустављајући се на опису системе точкића, којима се покреће минутна и часовна казаљка на кадрану, — прећићемо на покретач. Код часовника за то служи тег, који делује увек с постојаном силом на калем R (сл. 60.) помоћу струне Q, која се обавија око њега. Код хронометра пак као покретач служи јака опруга, која је у облику јаке спиралне пантљике уметнута у добош SS те помоћу ланчића t, утврђеног на добош, дејствује на ваљак R а преко њега и на цео часовни механизам на сличан начин као и тег код часовника. Али, пошто се са увијањем спирале повећава и сила Q њеног еластицитета, то се ваљку R даје облик пужа, да би производ из силе Q и његовог полупречника r остао увек приближно један и исти.



Сл. 63.

38. а. Часовник са Рифлеровим клатном.

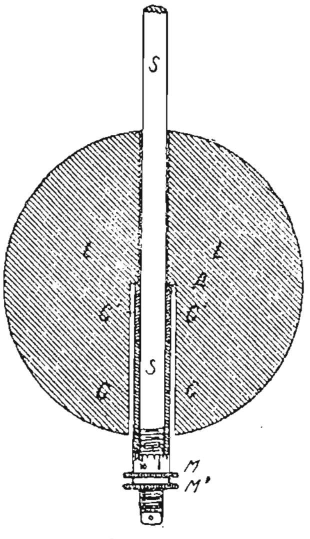
Да опишемо са извесним детаљима часовник са Рифлеровим клатном, који је сада у употреби на многим опсерваторијама.

Клатно и његова компенсација за температуру. Рифлер је употребио за прут клатна, шупљу цев попречнога пресека од свега 16 *mm* са дебљином њених дуварова од 1 *mm*. До на $^2/_3$ њене дужине она је била напуњена живом. Сочиво клатна било је израђено од никлованог жељеза и чврсто спојено са прутом тако, да је овај пролазио кроз центар тежишта сочива. Општа тежина прута заједно са сочивом достизала је до 6 килограма. При повишењу температуре дужина се клатна повећавала, али се у исто време и стубић живе издизао те је сва система регулисавана тако, да је положај центра тежишта остајао непромењљив. То се може остварити у доста широким границама, јер се коефицијент ширења може представити у линиској зависности од температуре. Осим простоте конструкције, клатно има и ове добре особине: усљед знатне количине живе, која се налази на великој дужини његовој, оно брзо прима промене температурне; из истих узрока неравномерни распоред температуре на разним висинама показује мањи утицај; отпор ваздуха дејствује само на прут те стога није велики. Треба напоменути још, да је сочиво израђено пљоште.

Испитивања са оваквим клатном дала су добре резултате. Не гледећи на силна колебања температуре, промене се у дневноме ходу показале свега око 0^s0008 за 1° C.

Па ипак нова Рифлерова клатна имају још савршенију конструкцију. Dr. Гијом, директор међународног биро-а за мере и тегове у Севру нашао је, да легура од 64.3°/₀ челика и 35.7°/₀ никла има коефицијент ширења 12 пута мањи него челик, 18 пута мањи него месинг и 23 пута мањи него алуминиум. Платина се шири мање од свију познатих метала, али је и њен коефицијент ширења 6 пута већи од коефицијента ширења нађене легуре, која је стога названа *инвар*. Благодарећи томе проналаску, омогућено је било и даље усавршавање технике конструисања часовника.

Рифлер израђује клатна од инвара. Усљед ништавног коефицијента ширења инвара, компенсација се удешава на овај начин: на доњем крају инварнога прута SS (сл. 63. а.) навучене су две цеви CC′ од метала, који имају релативно знатна ширења, например, од челика и алуминија, или, од никлованог месинга и челика. На крајевима спољне цеви ставља се сочиво LL, као што је показано на сл. 63. а. Обе се цеви на доњем крају клатна ослањају на главу завртња, на чијој је периферрји изгравирана скала од 100 једнаких подеока. Та се глава може увртати и одвртати и тиме мењати положај сочива на пруту, што служи за претходно грубо регулисавање часовника.



Сл. 63. а.

Сочиво је навучено на инварни прут тако, да по њему може да клизи без колебања. Центар сочива налази се код краја цеви C′. Када се инварни прут издуљује, сочиво се спушта, али се усљед издуљивања цеви CC′ — на којима лежи, — помера у исто време навише.

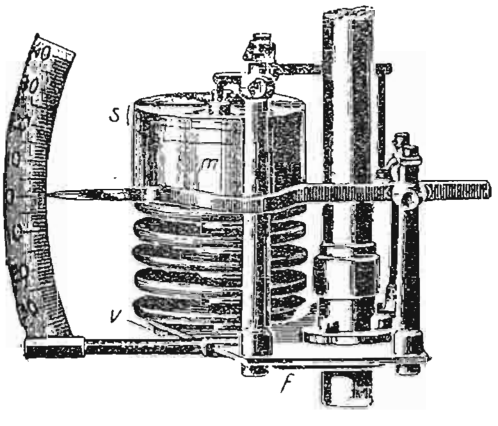
Због тога што разни инварни прутови имају различите коефицијенте ширења, згодније је увести наиме две цеви опште дужине око 10 см. Дужина се њихова удешава у зависности од ширења инвара тако, да при даној дужини инварног прута и при општој дужини цевчица C и C′ буде потпуна компенсација клатна.

Ако је потребна нарочито савршена компенсација, онда се узима чак само једна цев C од метала који се јаче шири, например, од алуминија, при чему се њена дужина узима, према потреби, и већа од 10 см. Напред описаним начином достиже се скоро потпуна компенсација за температуру.

У новије доба Рифлер је додао клатну часовника још једну конструкцију да би искључио утицај неравномерног распореда температуре на разним висинама. Код таквога је клатна компенсација удешена на предњем делу прута, који је ради тога разрезан на два дела.

Цев од метала који се више шири навучена је на горњу половину прута а својим доњим крајем она се ослања на гајку завртња заврнутог на доњем крају средњега дела. Споља је та цев обухваћена другом цеви од инвара, која је спојена са првом на горњем делу. Доња половина прута спојена је са том спољном цеви. При повећању дужине прута са повишењем температуре, унутрашња се цев издуљује навише те издиже сву доњу половину клатна, компенсирајући на тај начин ефект температуре. Сочиво је у том случају облика цилиндричног од инвара такође и утврђено је на продуженој гајци завртња M на своjем центру тежишта. Испитивања Кинле-а, која је вршио у Минхену 1917.—18. године, показала су, да је такво клатно потпуно ослобођеног од штетног утицаја неравномерности температуре.

Компенсација за притисак ваздушни. Кад се притисак ваздуха повећава, његова густина расте; клатно постаје лакше услед прираштаја хидростатичког притиска, упућеног навише, те се период клаћења повећава и часовник почиње да изостаје. За Рифлерово клатно то изостајање досеже до $0^{s}01$ на дан за сваки милиметар промене барометарског притиска. Према напред показаној тачности хода часовника, то излази много те је потребна допунска конпенсација. Справа, коју је Рифлер конструисао ради тога, састоји се у овоме: На растојању $\frac{1}{4}$ дужине прута од тачке вешања утврђене су анероидне кутијице са тегом одозго (сл, 63. b.). При повећању притиска тег се спушта наниже ка средини прута и тиме убрзава његово клаћење. Врх стрелице те справе, помоћу система полуга, показује на скали одговарајући притисак.



Сл. 63. b.

Тег се састоји из два дела: главнога *m* и додатка *s*, који служи за дефинитивну регулацију. Посматрања, вршена у току од 2 године на часовнику Рифлера No 49., постављеном на кенигсбергској опсерваторији са таквом справом, нису открила никакав ход, који зависи од промена атмосферског притиска. Још савршеније средство за искључивање ефекта промене притиска састоји се у томе, што се цео часовник, са механизмом, цифербатом и клатном ставља под херметички затвореним стакленим звоном.

Ако константна притиска (дневни ход клатна у секундама за 1 *mm* притиска) износи $0^{s}018$, клатно ће се регулисати тако, да изостаје на дан око $2^{s}7$. Кад се затим ваздух до извесног степена испумпа и притисак доведе до 610 *mm* — 630 *mm*. ход ће се клатна убрзати толико, да ће се показати као потпуно правилно регулисан.

Такво средство не само што допушта да се часовник потпуно ослободи од ефекта атмосферског притиска, већ омогућава и тачно регулисање хода часовника.

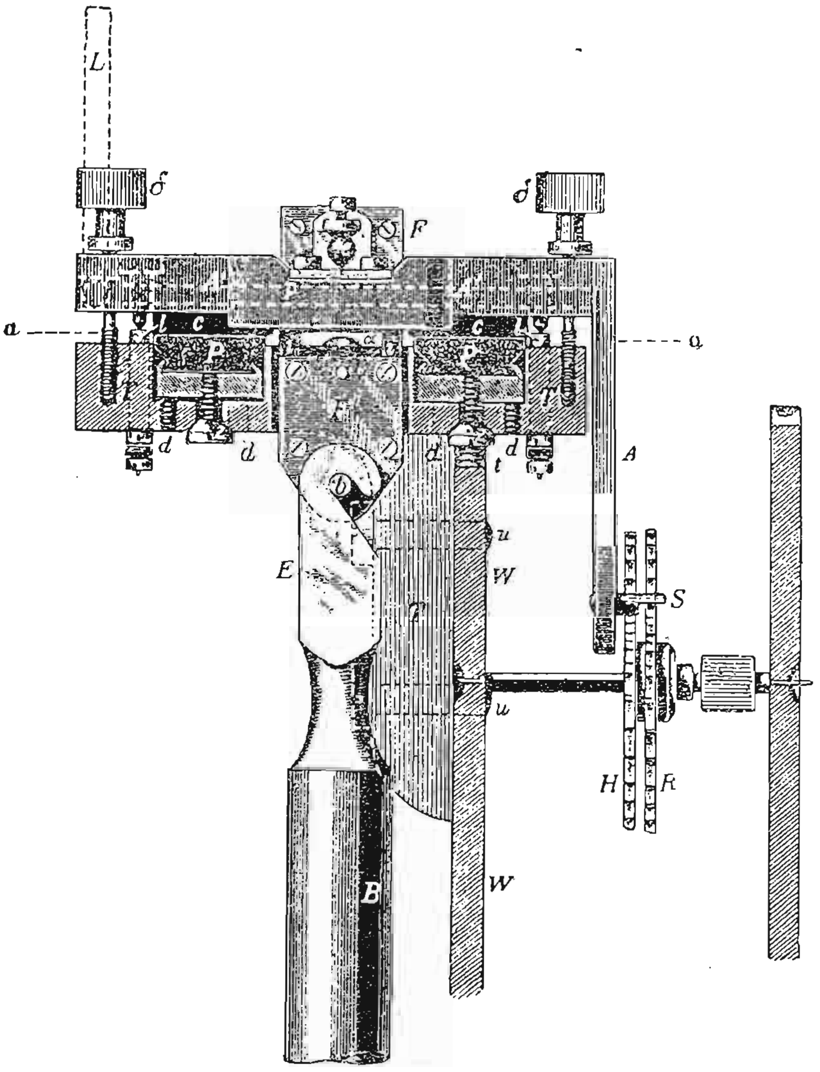
Регулисавање часовника. Прво, грубо регулисавање клатна достиже се помоћу гајке завртња на доњем крају прута, чијим се увртањем и одвртањем може да издиже и да спушта сочиво клатна. Тим се начином може да доведе ход часовника до $0^{s}5$. После тога тек настаје тачно регулисавање додавањем допунских малених тегова. Тег, додат на тачци вешања или на математичкој тачци тежишта, очевидно, неће изменити ход часовника. На интервалним пак местима утицај ће његов бити највећи. Величина силе убрзавања може се графички представити у облику параболе. На Рифловом се часовнику максимално деловање тега достиже у тачци на растојању 49.7 см. од тачке вешања. Практички се то достиже на овај начин: На пруту клатна навучен је прстен са плочицом, на коју се стављају (за извесно време) допунски мали тегови; да се при том стављању неби утицало на ход часовника, најбоље је стављати тег десном руком у оном моменту, када клатно достиже своје крајње скретање у десну страну. Најсавршенијим пак начином то се достиже на часовнику Рифлера под стакленим звоном помоћу оваквог електричног устројства: На задњем дувару звона налазе се два електромагнета на чијим котвама висе о танким кончићима два мала тега, сваки од по 2 грама. Први тег стално лежи на плочици а леви виси слободно. Плочица се налази на 27 см испод тачке вешања. Ако часовник изостаје, ток се *везује* те се леви тег спушта на плочицу, убрзавајући тиме ход чосовника за $0^{s}1$ на час времена. Ако, например, часовник изостаје за $+0^{s}6$, то се електромагнети *везују* на 6 часова. Ако часовник иде напред, то, везујући ток другога елекромагнета, десни ће се тег издићи са плочице те ће се ход успорити. Оваква система има ту добру страну, што омогућава регулисање часовника и са великог растојања, чак и не улазећи у локал, у коме је часовник постављен.

Преносни механизам. Код часовника пређашњих конструкција, зупчани точкићи добивали су покрет тегом, и преносили импулс клатну помоћу *котве* утврђене на *пруту* клатна. За такав се пренос каже на није слободан, јер се клатно не клати независно од котве и сложене системе точкића. Свака неравномерност у њиховом кретању утицаће на клаћење клатна те при рђавом преносу и најбоље клатно губи сваку вредност.

На новим Рифлеровим часовницима примењен је „слободни“ пренос. Скупа са напред описаним клатном од инвара тај пренос осигурава високу тачност хода часовника. Клатно је везано за часовни механизам само помоћу две танке еластичне плочице о које је оно и обешено. Помоћу тих плочица оно добива инпулсе, неопходно потребне за одржавање његова клаћења. То се достиже на тај начин, што плочице при сваком клаћењу клатна, усљед једновременог померања котве, добивају мало изгибање. Силом натезања, коју при томе добивају плочице, оне саопштавају клатну неопходно потребни инпулс. Изгибање плочица врши се тачно по оси, која се поклапа са осом клаћења клатна. Сем тога, импулс се саопштава клатну у оном моменту, када оно пролази кроз положај равнотеже те стога има и највећу резерву живе силе. Усљед тога, сем потпуне слободе клаћења, имамо и ту добру страну, што никаква неравномерност у ходу часовних точкића не утичу на равномерност клаћења клатна.

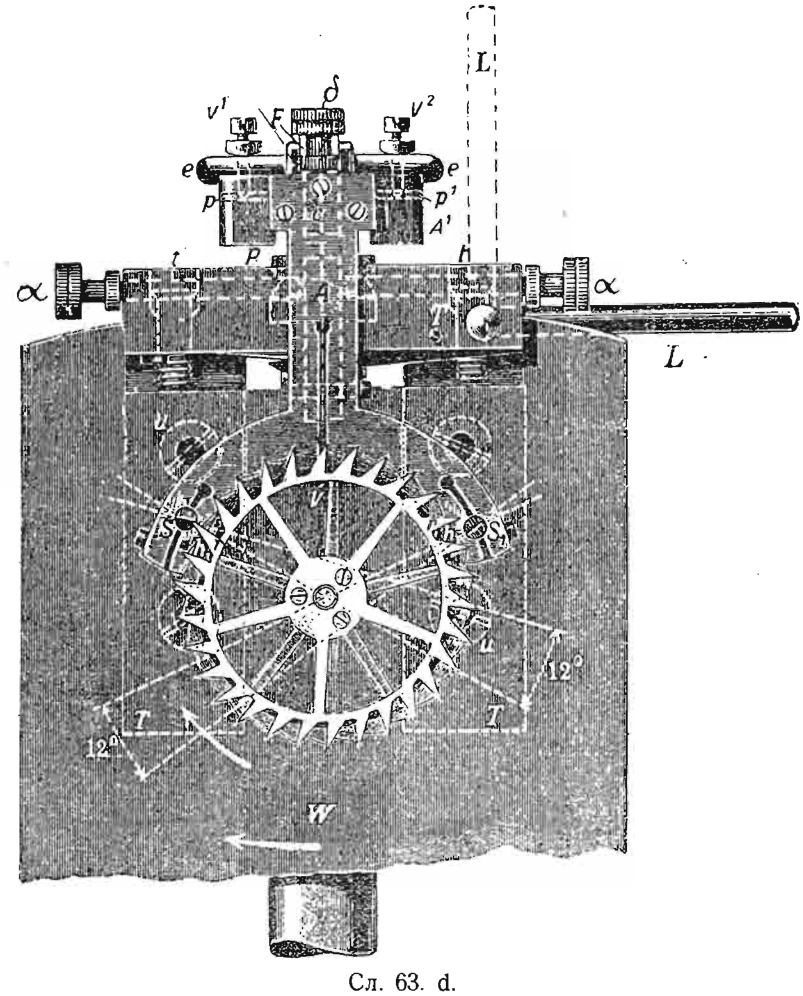
Сам пренос састоји се у овоме:

Клатно се ставља на брадавице *b* и спаја са котвом помоћу две танке и еластичне плочице. Котва је постављена на 2 тврда камена P, с којима је у контакту помоћу два челична ножа, који се налазе у истој равнини са обе стране од плочица вешања клатна. Оса клаћења клатна лежи на линији *a a* (сл. 63. с.) нешто ниже од онога места где су плочице спојене са котвом. Услед клаћења клатна, котва такође почиње да се клати на својим ножевима. Неопходно је потребно проконтролисати инструмент у томе, да се оса клаћења *a a* налази на истом ниво-у са линијом ослонаца ножева. То се достиже помоћу два звртњића *v′ v′*.



Сл. 63. с.

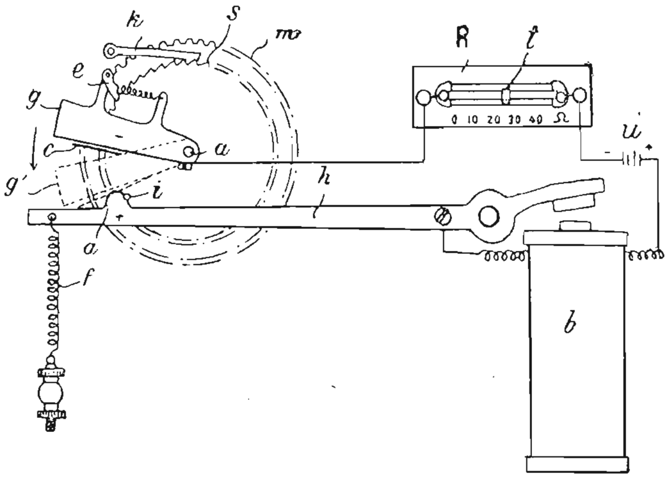
Преносни механизам овако је конструисан: На оси, чврсто утврђеној на футроли часовника, налазе се два точкића, први H (сл. 63 с.) служи за давање импулсâ клатну а други R за периодичко задржавање клаћења котве. На сл. 63. с. и 63. d. представљен је момент, када је оштри зубац *r* другог точкића наслоњен на равну површину краја брадавице котвине S. У том моменту су оба точкића непокретни. Чим се клатно покрене, па разуме се, и котва улево, зубац се *r* ослобођава, зупчани се точкић покрене даље у правцу кретања часовне казаљке. Брадавица S_1 својом цилиндричном површином долази у контакт са нагнутим зупцем *h* првога точкића. При обратном пролазу клатна кроз положај своје равнотеже та брадавица, усљед обртања реченог точкића, добива неки импулс у обратном правцу, који се преноси на клатно преко еластичних плочица вешања. Одмах затим равна површина брадавице долази у контакт са оштрим зупцем r_1 другога точкића, усљед чега се кретање точкића зауставља. Даље кретање клатна ослобађа зубац, брадавица S притисне на нагнути зубац h_1, добива од њега нови импулс, и појава се даље понавља истим редом. Та клаћења виљушке котвине тек нешто су већа од 1° у обе стране од положаја равнотеже. На осталом делу клатно се клати потпуно слободно. Клаћења самога клатна достижу до 3° на једну и на другу страну и зависе само од напрезања у плочицама вешања. Отпор, који осећа клатно усљед описане везе са осталим деловима механизма, изванредно је мали и састоји се само у трењу ножева о површину каменова, на којима они леже, а тако исто и у трењу, које се јавља при контакту брадавица S и S_1 виљушке са зупцима точкића H и R.



Сл. 63. d.

Електрични покретач часовника. За покрет Рифлеровог часовника употребљује се електрични покретач. Тешка полуга *g* (сл. 63. е.) падајући, повлачи за собом зупчани точкић *s* а тако исто и точкић *m*, који је на истој оси. Точкић даје са своје стране покрет напред споменутим точкићима (1.) и (2.), на чијој је општој оси навучена секундна казаљка. На оси точкића *m* и *s* налази се зупчаник, који саопштава кретање минутној казаљки. На тај начин примена покретача на точкићу интервалном између минутног и секундног, допушта да се уведе сразмерно врло мали тег (10 грама) у сравњењу са обичним теговима ($1^1/_2$—2 кг.), који покрећу ваљак часовне казаљке.

Када се полуга *g* спусти и дође у додир са полугом *h* у тачци *i*, ток ће се везати, као што се види на сл. 63. е. Електромагнет ће привући котву те ће

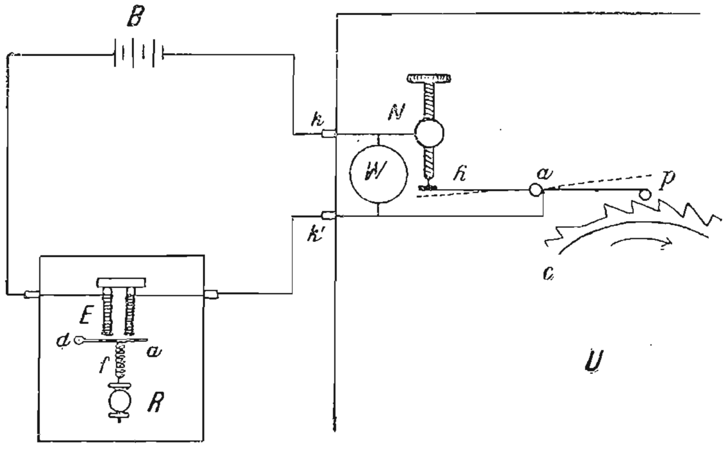


Сл. 63. е.

полуга *h* одбацити *g* навише. Међутим осе су обртања полуга *g* и *h* различите; стога ће тачка *i* при издизању клизити по површини полуге. При највишем њеном положају тачка ће *i* сићи са контакта, ток ће се прекинути те ће полуга *h* пасти. Полуга *g* почиње понова лагано да пада, повлачећи за собом зупчани точкић *s* па према томе и цео механизам.

Према сили батерије и полуга *g* достиже већу или мању висину. При силном току издизање се врши сваких 38—40 секунди, при слабом — сваких 20—22 сек. Помоћу реостата (отпор између 0 и 50 Ω) неопходно је потребно регулисавати отпор тако, да се издизање врши сваке 32—34 сек.

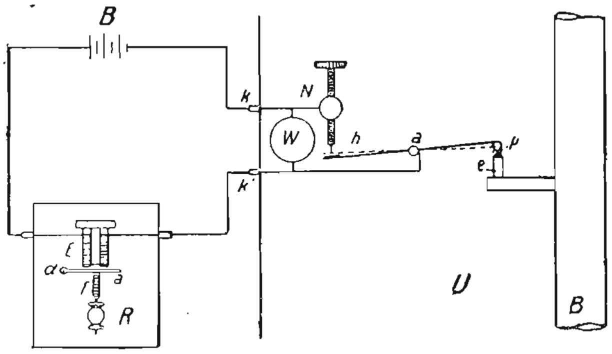
Електрични секундни контакт. Најзгоднији је *контакт са прекидима*, при коме перо хронографа црта ломљену линију. Контакти се дају или точкићем, навученим на исту осу точкића преносног механизма, или пак нарочитом справом на самом пруту клатна.



Сл. 63. f.

У првом случају (сл. 63. *f.*) зупци точкића сваке секунде издижу и спуштају крај полужице *p*. Други крај њен *h* долазећи у додир с контактом, периодички *везује* и *кида* ток. Електромагнет E привлачи перо *d* и тера га да црта ломљену линију на покретној пантљици.

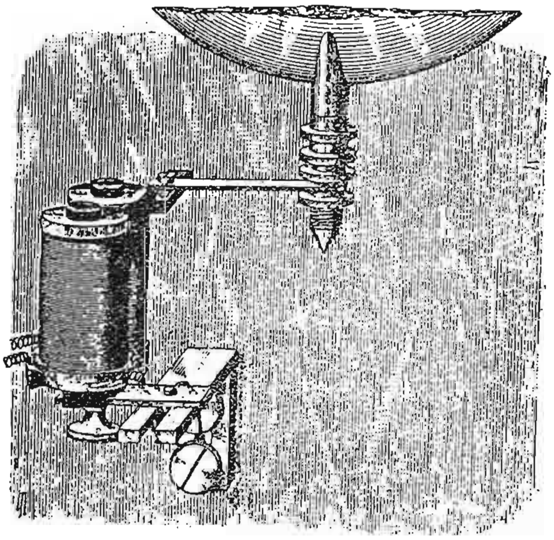
У другом случају, контакт се врши помоћу прутића, утврђеног на самом клатну (сл. 63. g.). У линију је уведен Румкорфов калем ради тога да би се прекиди контакта ослободили од варница и тиме сачували контакти од квара.



Сл. 63. g.

Трећи облик електричног контакта састоји се у овоме: На прут клатна B утврђена је танка шипка, који сваки пут, када клатно пролази кроз положај своје равнотеже, долази у додир са живином капљицом. Она се налази у танком каналићу пречника од 2^{mm} и одржава се на потребној висини помоћу завртња за регулисавање, који улази у завојице истог канала.

Синхронизација главнога часовника са часовником за рад. За цељи синхронизације служи конструкција, јасна на слици 63. *h.* На клатно часовника за рад утврђена је котва елекромагнета. Са главног часовника иде ток помоћу прекидног контакта, као што је напред описан. Електромагнет привлачи котву у моменту подилажења к њој а затим је ослобођава. За синхронизацију је довољан ток од 4—8 милиампера; међутим за покрет механизма главног часовника 12 милиампера. Показања часовника неће потпуно одговарати једно другоме. Остаје нека фаза ($0^{s}2$), која се одређује сравњењем часовника. За синхронизацију је довољно, да се ход часовника за рад у слободном стању разликује од хода главног часовника за 1^{s}—2^{s}



Сл. 63. *h*.

Тачност хода часовника. И најмањи ударац може да изазове издуљење клатна те и успорење његова хода за $0^{s}1$, приближно на дан. Тек после више недеља клатно се постепено враћа на своју првобитну дужину. Повећању дужине клатна од 0.002 *mm.* одговара промена дневнога хода од $0^{s}1$. Услед тога се главни часовник монтира у подземним просторијама, где је температура сталнија а главно, где је изолован од сваких потреса. Под повољним погодбама (нпр. у централном биро-у за мере и тегове у Петрограду) на часовнику су констатоване промене дневнога хода мање од 0^s008. По свој вероватности то ће бити крајња граница тачности часовника. Даље повећавање тачности једва ли је могућно, јер стални *потреси на Земљиној кори* изазивају веће неправилности у ходу часовника.

D^r. *Ерберт* је испитивао утицај магнетизма на клатно. Убрзање силе магнетизма 2335 пута је мање од убрзања силе теже. Услед магнетног привлачења клатно се брже клати за 0^s0067 на дан. Промене земнога магнетизма мале су, и ретко достижу $1^0/_0$ па услед тога и неправилности у ходу клатна не могу бити веће од 0^s00007 на дан.

39. Неопходне обазривости при руковању са хронометрима.

Ако центар тежишта балансира не пада потпуно тачно на осу OO', онда вертикалност њена (а то је исто што и хоризонталност циферблата хронометра) постаје неопходна погодба, да се изохроност клаћења не поремети услед утицаја силе теже на балансир. Због тога се извођење хронометра из његовог нормалног, хоризонталног положаја допушта само за врло кратко време, например за време навијања. На поморским пак бродовима, сваки је хронометар обешен у својој кутији, — слично компасу, — о прстен, који се слободно окреће, и помоћу којега он задржава увек свој хоризонтални положај, сем случаја, када је клаћење брода сувише велико.

Пошто разни ударци и потреси штетно утичу на клаћење балансира, то хронометре треба увек транспортовати на колима са федерима и у сандуцима са еластичним опругама. Исто тако и при преносу хронометара на рукама треба избегавати врло брзе покрете и обрте, због тога што се балансиру при томе може дати силни размах те да секундни точкић одједном прескочи и два зупца.

Разуме се, да се сталност дејства Q опруге покретача не достиже до потпуног савршенства пужним обликом ваљка R; због тога, — не гледећи на то, што та опруга допушта да хронометар ради и више од два дана, — боље је навијати га сваки дан у одређени час до исте силе затезања, да би он бар у току свакога дана радио при подједнаким погодбама.

Ма како да је добар хронометар, на правилност се његова хода при температурама око 0° већ не можемо ослањати стога, што се тада јако згусне уље, којим су подмазане осовине и остали делови механизма ради ублажавања трења; на мразу пак, када се оно потпуно охлади, хронометар може и сасвим да стане. То изазива потребу, да се хронометар брижљиво чува од дужег утицаја хладноће при посматрањима с њиме зими на отвореном простору. Неопходно је потребно штитити га и од нагревања сунчаног, јер се конпенсација температурног утицаја, — као што ћемо даље видети, — достиже само приближно и у извесним само границама.

После сваке три или четири године неопходно је потребно давати хронометре на чишћење доброме механичару; јер се, због постепенога испарења уља, могу десити веће неправилности у његову ходу па чак и повреде у његову механизму.

40. Оцена каквоће хронометара.

Према цељи, која се има у виду при употреби часовника, дужина се њиховог клатна регулише тако, да оно врши 86400 секундних размаха у току једнога средњег или пак звезданог дана, тако да часовник иде по средњем или по звезданом времену. То се достиже покретањем на више и наниже тешкога тега P клатна помоћу за то удешенога завртња p (сл. 59. a. и 59. b.) а дефинитивно, само премештањем мале гајке q на самоме крају клатна. За исту сврху код балансира хронометра служе завртњићи c и c' (сл. 58.), који се налазе наспрам барета.

Ако је A показање хронометра (или часовника) у извесном моменту S звезданога времена, или, у моменту T средњега времена, онда се разлика $u_s = S - A$ зове *поправка (корекција)* тога хронометра *односно звезданог времена* а разлика $u_t = T - A$ је *поправка* његова *односно средњега времена.* Промена пак поправке у току одређене јединице времена (у току дана, часа, минуте) зове се ход хронометра односно звезданог или пак средњега времена тако, да тај ход излази позитиван, када се поправка у току времена повећава, т.ј. када хронометар изостаје.

Нека су u_1 и u_2 поправке некога хронометра, одређене из астрономских посматрања у моментима A_1 и A_2 по томе хронометру; онда ће ход његов бити

$$\omega = \frac{u_2 - u_1}{A_2 - A_1}$$

и послужиће за извод поправке u у ма којем моменту A који затим наступи, на овај начин

$$u = u_2 + \omega\,(A - A_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

Одатле се види, да тачно регулисавање хода хронометровог по овоме или ономе времену нема значаја, оно доставља само извесну практичку удобност. Стварна се каквоћа хронометра, међутим, одређује једино ступњем колебања његова хода ω или, тачније говорећи, величином одступања

$$\triangle\omega_1 = \omega_1 - \omega, \;\; \triangle\omega_2 = \omega_2 - \omega, \;\; \ldots . \;\; \triangle\omega_n = \omega_n - \omega$$

стварних дневних ходова његових $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots . \omega_n$ од општег $\frac{\Sigma\omega}{n} = \omega$ за доста велики број дана n. Оваква се одступања у његову ходу морају дешавати усљед разних недостатака његова механизма па макар како биле повољне спољне околности, тј. потпуна мирноћа и стална температура, при којима би се налазио хронометар за све време његове употребе. Пошто је апсолутно немогућно испитати и узети у рачун све те узроке одступања $\triangle\omega_1, \triangle\omega_2 \ldots . \triangle\omega_n$, остаје нам једино, да их сматрамо просто за *случајне* и да за оцену каквоће хронометра употребимо величину

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\triangle\omega^2}{n - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)$$

Код добрих астрономских часовника то средње колебање ε дневнога хода износи највише $\pm 0^s03$; код најбољих пак хронометра оно достиже $\pm 0^s10$ до $\pm 0^s20$.

Релативна се вредност часовника и хронометара одређује такође бројевима $g = \frac{k}{\varepsilon^2}$, који су обратно пропорционални са ε^2 и који се зову *тежине* (важине), при чему величина k остаје потпуно произвољна; она је управо средње квадратно колебање ε_0^2 таквога хронометра, чија је тежина условно примљена за јединицу тежинâ. Кад се например тежина хронометра $\varepsilon_0 = \pm 0^s.10$ узме за јединицу, онда ћемо за часовник, са напред наведеном величином $\varepsilon = \pm 0^s.03$, добити тежину $g = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} = \left(\frac{0.10}{0.03}\right)^2 = 11$, а то значи, да је тачност његова хода равна тачности средњег хода из 11 таквих хронометара.

Неопходно је потребно овде напоменути, да израз (5.), због ограниченог броја n, даје увек само грубу вредност за ε^2 а наиме са вероватном грешком у њему самоме $\pm \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{n}}$*); због тога се, чак и при $n = 100$, може с једнаком вероватности рећи, да су нађене вредности за ε^2 и ε веће од стварних за $\frac{1}{10}\varepsilon^2$ и $\frac{1}{20}\varepsilon$, као и да су за толико исто мање од стварних. То увек треба имати у виду, како при оцени каквоће разних часовника и хронометара, тако и при оцени тачности посматрања ма какво врсте.

Узмимо за пример показања A и B двају хронометра у тачним средњим подневима ($T = 0^h\,0^m\,0^s$) за неколико дана узастопце, при чему ће, на основу напред реченога, поправке њихове у тим моментима бити $u_a = -A$ и $u_b = -B$.

У	Показања.		Ходови.		Одступања.	
$0^h0^m0^s$	A	B	ω_a	ω_b	$\triangle\omega_a$	$\triangle\omega_b$
1. дана	$23^h59^m20^s.50$	$6^h35^m40^s.60$	$-0^s.90$	$-3^m54^s.13$	$+0^s.36$	$+0^s.16$
2.	21.40	39 34.73	−1.40	−3 54.37	−0.14	−0.08
3.	22.80	43 29.10	−1.22	−3 54.26	+0.04	+0.03
4.	24.02	47 23.36	−1.03	−3 54.25	+0.23	+0.04
5.	25.05	51 17.61	−1.48	−3 54.38	−0.22	−0.09
6.	26.53	55 11.99	−1.11	−3 54.50	+0.15	−0.21
7.	27.64	59 6.49	−1.66	−3 54.26	−0.40	+0.03
8.	29.30	7 3 0.75	−1.27	−3 54.15	−0.01	+0.14
9.	30.57	6 54.90				

$n = 8$; $\sqrt{n} = 2.8$. Средњи ходови $\omega = -1^s.26$ и $-3^m54^s.29$

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{\Sigma\triangle\omega^2{}_a}{7}} = \sqrt{0.0621} = \underset{\mp 4}{\mathbf{0.25}} \qquad \varepsilon_b = \sqrt{\frac{\Sigma\triangle\omega^2{}_b}{7}} = \sqrt{0.0153} = \underset{\pm 2}{\mathbf{0.12}}$$

$$\frac{g_a}{g_b} = \frac{\varepsilon^2{}_b}{\varepsilon^2{}_a} = \frac{0.0153}{0.0621} = \frac{1}{4}.$$

Али, пошто су и бројитељ и именитељ овога односа тежинâ $\frac{g_a}{g_b}$ подвргнути релативној вероватној грешци $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, то је релативна вероватна грешка саме тежине равна $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$, тј. доста је вероватно, да тај однос $\frac{g_a}{g_b}$ може бити: и $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$, као и $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

---

*) Теорни део курса астрономије, гл. VII.

41. Екстраполовање и интерполовање поправке хронометра.

Када је из хода хронометровог $\omega = \frac{u_2 - u_1}{A_2 - A_1}$, — из двеју поправки u_1 и u_2 за моменте A_1 и A_2, — срачуната по формули (4.) поправка u за ма који други момент A, онда ће она у себи увек садржати неку средњу случајну грешку ε_u, која зависи од средњег колебања хода ε. Да одредимо спочетка ту грешку у том случају, када је момент A дат изван интервала A_2 и A_1 т.ј. када се поправка u *екстраполује*.

Кад ставимо да је $A = A_2 + \tau$ а време τ замишљено поделимо на оне мање јединице, — дане или часове, — у којима се оно изражава, онда смо дужни да себи представимо истините ходове хронометра за те елементе времена у облику

$$\omega_1 = \omega + \triangle\omega_1, \ \omega_2 = \omega + \triangle\omega_2, \ \ldots\ldots \ \omega_\tau = \omega + \triangle\omega_\tau,$$

где је средње квадратно из случајнух колебања хода $\triangle\omega_1$, $\triangle\omega_2$, $\ldots\triangle\omega_\tau$ равно ε; стога ће се у изводу

$$u = u_2 + \omega.\tau$$

садржати апсолутна грешка

$$\triangle u = \triangle\omega_1 + \triangle\omega_2 + \ldots. + \triangle\omega_\tau$$

или пак средња грешка

$$\varepsilon_u = \pm\,\varepsilon\sqrt{\tau} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6.)$$

Тако ће, — у напред наведеном примеру, — поправке хронометара A и B у подне 15. дана и очекиване у њима средње грешке бити:

$$u_a = +\ 0^m 29^s\!.43 - 1^s\!.26 \times 6 = +\ 0^m 21^s\!.87 \text{ са ср. греш. } \varepsilon_a\sqrt{6} = \pm\, 0^s\!.61$$

$$u_b = -\ 7^h 6^m 54^s\!.90 - 3^m 54^s\!.29 \times 6 = -\ 7^h 30^m 20^s\!.64 \ \ „ \ \ „ \ \ „ \ \ \varepsilon_b\sqrt{6} = \pm\, 0^s\!.29$$

На сасвим сличан се начин одређује поправка u и њена средња грешка ε_u за момент $A < A_1$, ако се од поправке u_1 иде уназад.

У случају срачунавања поправке u за момент A, који се налази између A_1 и A_2, добићемо два израза за u:

$$u = u_1 + \omega\tau_1 \qquad \text{и} \qquad u = u_2 - \omega\tau_2,$$

где су скраћења ради са τ_1 и τ_2 означени интервали $A - A_1$ и $A_2 - A$. Средње ће грешке ових поправака, — на основу (6.), — бити $\varepsilon\sqrt{\tau_1}$ и $\varepsilon\sqrt{\tau_2}$. Узимајући у рачун у тим двама изразима и њихове релативне тежине $g_1 = \frac{1}{\tau_1}$ и $g_2 = \frac{1}{\tau_2}$, добићемо по познатим правилима највероватнију вредност за u у оваквом облику

$$u = \frac{(u_1 + \omega\tau_1)\, g_1 + (u_2 - \omega\tau_2)\, g_2}{g_1 + g_2} = \frac{u_1\tau_2 + u_2\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}$$

са тежином $g_u = g_1 + g_2$ и са средњом грешком

$$\varepsilon_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_u}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_1 + g_2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)$$

Као што се види, највећа се вредност за ту грешку добива при $\tau_1 = \tau_2$ т.ј. кад је $A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$.

Ако замислимо у нашем примеру, да су поправке хронометара A и B биле одређене само у подне 1. и 9. дана, онда би се поправке u_a и u_b за подне 5. интервалног дана нашле интерполовањем овако:

$$u_a = + \quad 0^m 39^s.50 - \quad 1^s.26 \times 4 = + \quad 0^m 34^s.46 \text{ са ср. греш. } 0^s.25 \sqrt{\frac{4 \times 4}{8}} = \pm 0^s.35$$

$$u_b = - 6^h 35^m 40^s.60 - 3^m 54^s.29 \times 4 = - 6^h 51^m 17^s.76 \quad \text{,, \; ,, \; ,,} \quad 0.12 \sqrt{\frac{4 \times 4}{8}} = \pm 0^s.17$$

при чему би се оне разликовале од истинитих $u_a = + 0^m 34^s.95$ и $u_b = 6^h 51^m 17^s.61$ прва за $- 0^s.49$ а друга за $- 0^s.15$.

Напомена. Формула (6.) показује, да се са скраћењем n пута оне јединице, у којој је изражен интервал τ, треба да смањи и средње колебање хода ε, које одговара тој јединици, и то у односу $1 : \sqrt{n}$. Тако ће нпр. средња колебања ε'_a и ε'_b часовних ходова хронометара A и B у примеру чл. 40. бити:

$$\varepsilon'_a = \pm \frac{0.25}{\sqrt{24}} = \pm 0^s.05 \quad \text{и} \quad \varepsilon'_b = \pm \frac{0.12}{\sqrt{24}} = \pm 0^s.02_5.$$

42. Сравњивање показања хронометара.

Услед тога што се средње или звездано време, које је срачунато по ходу само једнога хронометра, може да покаже недовољно поузданим, потребно је употребљавати неколико хронометара па изводити тражено време по ходовима свију њих, узимајући у обзир релативне њихове тежине. У том се случају из астрономских посматрања одређују поправке и апсолутни ходови само једнога од њих, за остале пак добивају се из сравњења њихових показања са њиме.

Ако два хронометра иду приближно по једноме и истом времену, средњем или звезданом, онда, бројећи *слухом* ударе једнога од њих и *гледећи* на други, лако је запазити и записати њихове одговарајуће минуте и секунде; што се тиче делова секунде међу сваким ударом првога и њему најближега на другом, то грешка у оцени њиховој слухом може досезати до $\pm \frac{1}{10}$ од секунде, а то би било и сувише грубо. Несравњено је згодније и скоро 10 пута тачније вршити сравњивање двају хронометра, када један од њих иде по средњему а други по звезданом времену, због тога, што се тада може сачекати момент потпунога поклапања њихових полусекундних удараца, што се понавља кроз свака 3 минута (убрзање звезданог времена према средњем равно је приближно 10^s за 1 час), а пошто је уво у стању већ доста јасно да разликује двојност јасних и не сувише јаких удара, ако је интервал међу њима већи од $0^s.01$, то се средња грешка сравњења двају хронометра смањује до $\pm$ **$0^s.005$.** При томе се чује узастопце 6 до 7 удара, који се подједнако добро поклапају, сасвим слично ономе, како изгледа да се потпуно добро поклапа и неколико средњих цртица лимба са цртицама верниjера, кад теориска тачност његова пређе потребну границу.

За врло брзо сравњивање више хронометара међу собом, који иду како по средњем тако и по звезданом времену, употребљује се помоћни т. зв. *тринаестударни* хронометар, чија два размаха балансира трају $\frac{6}{13} = 0^{s}.461$.., тј. са секундном казаљком која чини 13 а не 12 скокова у току од 6 секунада. Према томе при сравњивању са њиме ма кога другог хронометра, мора да се деси кроз сваких 6 секунада по једно поклапање удараца, које је тачно бар до половине разлике интервала од $0^{s}.50$ и од $0^{s}.46$ међу њиховим ударима, тј. бар до $\pm 0^{s}.02$; уопште пак средња грешка таквога сравнивања не треба да је већа од $\pm$ **$0^{s}.01$**. Ако слухом будемо бројали ударе тринаестударног хронометра од 0 до 12 почињући са ма којег броја његових секунада који је дељив са 6, а на други будемо гледали, то ће се, по запаженоме и записаном удару 13-ударног хронометра, наћи интервал времена, који је протекао од почетка бројања, помоћу ове таблице:

1. удар $= 0^{s}.46$	5. удар $= 1^{s}.31$	9. удар $= 4^{s}.15$
2. „ $= 0.92$	6. „ $= 2.77$	10. „ $= 4.62$
3. „ $= 1.38$	7. „ $= 3.23$	11. „ $= 5.08$
4. „ $= 1.85$	8. „ $= 3.69$	12. „ $= 5.54$

Тако например, ако запазимо поклапање 8. удара 13-ударног хр. после запаженог на њему почетног броја 36^{s} онда ћемо записати

$$36^{s} + 8 \text{ уд.} = 36^{s} + 3^{s}.69 = 39^{s}.69.$$

Кад треба сравнити међу собом већи број хронометара: A, B, C, D . . . ., од којих је један, рецимо A тринаестударни, онда се сви они с њиме сравњују један за другим па се затим понови све то у обратном реду; тј. одређује се показање B_1 хронометра B у моменту A_1 по A, затим показање C_2 хронометра C у моменту A_2 по A, D_3 у моменту A_3 и т.д.; а у обратном реду D'_3, C'_2, B'_1 у моментима A'_3, A'_2 и A'_1 по A. Да би се сад добила показања B_0, C_0, D_0... тих хронометара, која одговарају некоме, једном и истом моменту A_0 по A, треба знати, уколико сваки од њих иде напред или изостаје у односу према A; ови пак *релативни ходови*: $(b—a)$, $(c—a)$,.... лако се одређују из сличних сравњења тих истих хронометара, која су раније извршена или у току једнога или неколико дана. Срачуната показања B_0, C_0,.. по тима ходовима $(b—a)$, $(c—a)$... за момент A_0 биће:

из сравњивања напред:

$$B_0 = B_1 + (A_0 — A_1) + (A_0 — A_1)\,(b — a)$$
$$C_0 = C_2 + (A_0 — A_2) + (A_0 — A_2)\,(c — a)$$
$$D_0 = D_3 + (A_0 — A_3) + (A_0 — A_3)\,(d — a)$$

. . . .

из сравњивања назад:

$$B'_0 = B'_1 + (A_0 + A'_1) + (A_0 — A'_1)\,(b — a)$$
$$C'_0 = C'_2 + (A_0 + A'_2) + (A_0 — A'_2)\,(c — a)$$
$$D'_0 = D'_3 + (A_0 + A'_3) + (A_0 — A'_3)\,(d — a)$$

. . . .

Јасно је, да, ако за A_0 буде изабран момент близу $\frac{1}{2}(A_1 + A'_1)$, тј. близу средини између првог и последњег сравњења, то средњи резултати $\frac{1}{2}(B_0 + B'_0)$, $\frac{1}{2}(C_0 + C'_0)$ и ост. скоро неће ни зависити од некоје нетачности узетих ходова $(b—a)$, $(c—a)$, $(d—a)$... ради тих израчунавања.

Таква сравњивања свију хронометара, са којима располаже посматрач, треба да се врше како пре одређивања поправке некога од њих, тако и после, а осим тога још и сваког дана, регуларно у одређени час, зато што се, по скупљеним подацима на тај начин, најбоље открива (чл. 43.) релативна каквоћа (тежина) свакога од тих хронометара.

43. Релативне тежине хронометара.

Претпоставимо, да су, као и мало пре, извршена сравњивања извесног броја s хронометара A, B, C, D,... свакодневно, у току $n+1$ дана и да су из разлика њихових показања: $B_i - A_i$, $C_i - A_i$, $D_i - A_i$, ... — приведених увек ка једноме и истом моменту по A, — добивени ови дневни релативни ходови:

$(b_1 - a_1), (b_2 - a_2), \ldots. (b_n - a_n)$ а у средњем за n дана $(b - a) = \frac{1}{n} \Sigma\, (b_i - a_i)$,

$(c_1 - a_1), (c_2 - a_2), \ldots. (c_n - a_n)$ „ „ „ „ „ „ $(c - a) = \frac{1}{n} \Sigma\, (c_i - a_i)$,

. . . .

тако да ће се одступање ових ходова од средњих, који њима одговарају, представити таблицом бројева оваквога облика:

$$\left.\begin{array}{llcl}
\text{За хрон. A} \ldots & 0 & = & (a_i - a) - (a_i - a) \\
\text{„ „ B} \ldots & (b_i - a_i) - (b - a) & = & (b_i - b) - (a_i - a) \\
\text{„ „ C} \ldots & (c_i - a_i) - (c - a) & = & (c_i - c) - (a_i - a) \\
\ldots & \ldots & & \ldots
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8.)$$

Тражи се сад, да се по овим даним разјасни каквоћа свакога хронометра посебице, т.ј. да се одреди вредност средњих квадратних одступањâ (чл. 40.):

$$\varepsilon_a^2 = \frac{\Sigma\,(a_i - a)^2}{n-1}, \qquad \varepsilon_b^2 = \frac{\Sigma\,(b_i - b)^2}{n-1}, \qquad \varepsilon_c^2 = \frac{\Sigma\,(c_i - c)^2}{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (9.)$$

Ако се ради тога узме за сваки вертикални стубац таблице (8.) средња вредност из његових бројева

$$\frac{(a_i - a) + (b_i - b) + (c_i - c) + \ldots.}{s} - (a_i - a)$$

а затим одступања њихова (појединих бројева) од те средње вредности, онда та друга одступања неће већ зависити, као пређе, само од једне и исте случајне грешке $(a_i - a)$ у ходу хронометра A, већ ће се све представити у оваквом симетричном облику:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{За хрон. A} \ldots {}_i v_a = \frac{1}{s}\,[(s-1)\,(a_i - a) - (b_i - b) - (c_i - c) - \ldots.] \\
\text{„ „ B} \ldots {}_i v_b = \frac{1}{s}\,[(s-1)\,(b_i - b) - (a_i - a) - (c_i - c) - \ldots.] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10.)$$

Узмимо суму квадрата из свију n одступања v_a за хронометар А. Кад напоменемо, да ће највероватнија вредност суме производа из разних случајних одступања: $(s-1)$ (a_i-a), (b_i-b), $(c_i-c)\ldots$ међу собом, подељена са $s^2(n-1)$, бити равна нули, онда ћемо на основу израза (9.) добити:

$$\frac{\Sigma v_a^2}{n-1}=\frac{1}{s^2}\left[(s-1)^2\varepsilon_a^2+\varepsilon_b^2+\varepsilon_c^2+\ldots\right]=\frac{1}{s^2}\left[s(s-2)\varepsilon_a^2+(\varepsilon_a^2+\varepsilon_b^2+\varepsilon_c^2+\ldots)\right];$$

ако се означи

$$\frac{1}{s}(\varepsilon_a^2+\varepsilon_b^2+\varepsilon_c^2+\ldots)=\mu^2,$$

онда ће изаћи

$$\left.\begin{array}{l}\text{за хроном. А}\ldots(s-2)\,\varepsilon_a^2=s\,\dfrac{\Sigma v_a^2}{n-1}-\mu^2\\ \text{за хроном. В}\ldots(s-2)\,\varepsilon_b^2=s\,\dfrac{\Sigma v_b^2}{n-1}-\mu^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(11.)$$

исто тако

Али у општем средњем из ових израза (11.) треба да изађе

$$(s-2)\,\mu^2=\frac{1}{n-1}\left[\Sigma v_a^2+\Sigma v_b^2+\Sigma v_c^2+\ldots\right]-\mu^2,$$

због тога је

$$\mu^2=\frac{\varepsilon_a^2+\varepsilon_b^2+\varepsilon_c^2+\ldots}{s}=\frac{\Sigma v_a^2+\Sigma v_b^2+\Sigma v_c^2+\ldots}{(n-1)(s-1)}\quad\ldots\ldots\quad(12.)$$

На тај се начин, по таблици (10.) других одступања ${}_iv_a$, ${}_iv_b$, ${}_iv_c\ldots$, може одредити средња вредност μ^2 тражених ε_a^2, ε_b^2, $\varepsilon_c^2,\ldots$ па и свака од њих посебице из изразâ (11.)*). Па ипак се они (11.) не могу сматрати као погодни за

---

*) Може се поступити још и овако. Кад се свако од првобитних одступања таблице (8.) подигне на квадрат и кад узмемо скраћене ознаке: (a, b), (a, c), $(a, d),\ldots$ за суме по хоризонталним редовима од тих квадрата подељене са $n-1$, онда ћемо имати, на пређашњим основама:

$$\varepsilon_a^2+\varepsilon_b^2=(a,b),\qquad\varepsilon_a^2+\varepsilon_c^2=(a,c),\qquad\varepsilon_a^2+\varepsilon_d^2=(a,d).\quad\ldots\ldots\ldots\quad(8.)'$$

Кад се затим из исте таблице (8.) испишу ходови хронометара у односу према В, т.ј.

$$(c_i-b_i)-(c-b)=(c_i-c)-(b_i-b)$$
$$(d_i-b_i)-(d-b)=(d_i-d)-(b_i-b)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

после подизања њиховог на квадрат, добићемо на сличан начин:

$$\varepsilon_b^2+\varepsilon_c^2=(b,c),\qquad\varepsilon_b^2+\varepsilon_d^2=(b,d)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8.)''$$

Поступајући на тај начин и даље са ходовима хронометара С, D и др., имаћемо још

$$\varepsilon_c^2+\varepsilon_d^2=(c,d)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8.)'''$$

и т.д.

За s тражених ε_a^2, ε_b^2, $\varepsilon_c^2,\ldots$ саставиће се на тај начин $(s-1)+(s-2)+\ldots+2+1=\frac{s(s-1)}{2}$ условних једначина (8.)′, (8.)″, (8.)‴,.... а оне ће по методи најмањих квадрата дати s оваквих нормалних једначина:

$$\begin{array}{llll}(s-1\ \varepsilon_a^2+ & \varepsilon_b^2+ & \varepsilon_c^2+\ldots= & a,b\ +(a,c)+(a,d)+\ldots=\mathrm{N}_1\\ \varepsilon_a^2+(s-1)\ & \varepsilon_b^2+ & \varepsilon_c^2+\ldots= & (a,b)+\ b,c\ +\ b,d)+\ldots=\mathrm{N}_2\\ \varepsilon_a^2+ & \varepsilon_b^2+\ s-1) & \varepsilon_c^2+\ldots= & a,c\ +(b,c\ +\ c,d\ +\ldots=\mathrm{N}_3\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

ту циљ, јер при врло великом броју n и при неповољној комбинацији случајних грешака ${}_iv_a,\ {}_iv_b,\ {}_iv_c, \dots$ они могу да доведу до врло малих па чак и до негативних вредности некојих од величина $\varepsilon_a^2,\ \varepsilon_b^2,\ \varepsilon_c^2, \dots$ Боље је допустити, да те непознате треба да буду приближно пропорционалне са сумама: $\Sigma v_a^2,\ \Sigma v_b^2,\ \Sigma v_c^2, \dots$, које њима одговарају па ће се тада коефицијент K те пропорционалности добити на основу (12.) овако:

$$\mu^2 = \mathrm{K}\,\frac{\Sigma v_a^2 + \Sigma v_b^2 + \dots}{s} = \frac{\Sigma v_a^2 + \Sigma v_b^2 + \dots}{(n-1)(s-1)}\,,\ \text{тј. } \mathrm{K} = \frac{s}{(n-1)(s-1)}\,,$$

стога ће бити

$$\varepsilon_a^2 = \frac{s}{s-1}\cdot\frac{\Sigma v_a^2}{n-1}\,,\qquad \varepsilon_b^2 = \frac{s}{s-1}\cdot\frac{\Sigma v_b^2}{n-1}\,,\qquad \varepsilon_c^2 = \frac{s}{s-1}\cdot\frac{\Sigma v_c^2}{n-1}\,,\quad .\ .\ (13.)$$

а релативна ће се каквоћа хронометара A, B, C... одредити средством њихових тежина

$$g_a = \frac{k}{\varepsilon_a^2}\,,\qquad g_b = \frac{k}{\varepsilon_b^2}\,,\qquad g_c = \frac{k}{\varepsilon_c^2}\,, \dots\dots$$

Пример. Ради разјашњења изложеног, употребићемо сравњења 4 хронометра A, B, C и D од оних којима се служио Смислов 1859. год. („Репсолдов круг и хронометри“ 1863.). Разлике њихових показања (већ сведене за сваки дан на један и исти момент по A), биле су овакве:

Јула	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
A—B=	9^m16^s00	13^m14^s14	17^m12^s87	21^m12^s10	25^m10^s50	$29^m\ 8^s98$	$33^m\ 8^s58$	$37^m\ 7^s09$
A—C=	9 51.39	13 49.90	17 48.14	21 47.64	25 46.77	29 46.13	33 45.74	37 44.56
A—D=	6 17.69	10 14.73	14 11.83	18 9.29	22 6.87	26 4.67	30 2.63	33 59.63

Пошто је хронометар A ишао по звезданом времену а остали по средњему, то, — пошто се стави да је његов дневни ход био раван $-3^m56^s56 + a$, — наћи ћемо одатле овакве релативне ходове њихове:

Јула	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	Средњи
$b-a=$	1^s88	1^s87	2^s67	1^s84	1^s92	3^s04	2^s05	2^s18
$c-a=$	1.95	1.68	2.94	2.57	2.80	3.05	2.26	2.46
$d-a=$	0.48	0.54	0.90	1.02	1.24	1.40	0.44	0.86

Одатле ће се лако добити

$$\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \dots = \frac{\Sigma \mathrm{N}}{2(s-1)}$$

и

$$(s-2)\,\varepsilon_a^2 = \mathrm{N}_1 - \frac{\Sigma \mathrm{N}}{2(s-1)}\,,\ (s-2)\,\varepsilon_b^2 = \mathrm{N}_2 - \frac{\Sigma \mathrm{N}}{2(s-1)}\,,\ (s-2)\,\varepsilon_c^2 = \mathrm{N}_3 - \frac{\Sigma \mathrm{N}}{2(s-1)}\ \dots.$$

Овај начин извода средњих квадратних грешака у ходовима хронометара дао је проф. ђенерал Д. Д. Сергијевски (Записке вој. Топогр. Управе Гл. ЂШт. 1905.). Ако се у томе открије потребним начином тачни састав сумâ $\mathrm{N}_1,\ \mathrm{N}_2,\ \mathrm{N}_3, \dots$ и наших $\Sigma v_b^2,\ \Sigma v_b^2,\ \Sigma v_c^2, \dots$ видеће се, да и тај начин доводи до потпуно истих израза и бројних вредности за $\varepsilon_a^2,\ \varepsilon_b^2,\ \varepsilon_c^2, \dots$ као и (11.). Тај начин ма да је сложнији од нашега текста ипак је он општији за примену и у оним случајима, кад број хронометара који се сравњују не остаје исти за свих $(n+1)$ дана; у том случају треба само уводити у условне једначине (8.)′, (8.)″, (8.)‴,... разне тежине према броју тих дана, те да оне послуже за извод величина (a, b), (a, c), $(a, d), \dots (b, c)$, (b, d), и ост.

за	A	0	0	0	0	0	0	0	
„	B	—0.30	—0.31	+0.49	—0.34	—0.26	+0.86	—0.13	
„	C	—0.51	—0.78	+0.48	+0.11	+0.34	+0.59	—0.20	по форм. (8.)
„	D	—0.38	—0.32	+0.04	+0.16	+0.38	+0.54	—0.42	
Средња:		—0.30	—0.35	+0.25	+0.02	+0.12	+0.50	—0.19	

$v_a =$	+0.30	+0.35	—0.25	+0.02	—0.12	—0.50	+0 19	$\Sigma v_a^2 = 0.576$
$v_b =$	0.00	+0.04	+0.24	—0.31	—0.38	+0.36	+0.06	$\Sigma v_b^2 = 0.433$
$v_c =$	—0.21	—0.43	+0.23	+0.13	+0.22	+0.09	—0.01	$\Sigma v_\tau^2 = 0.355$
$v_d =$	—0.08	+0.03	—0.21	+0.18	+0.26	+0.04	—0.23	$\Sigma v_d^2 = 0.206$

Кад се сад одреде по формули (13.) вредности за ε_a^2, ε_b^2, ε_c^2 и ε_d^2 (при $s = 4$ и $n = 7$) и узме $k = 0.100$, онда ће се добити и релативне тежине хронометара A, B, C и D са њиховим релативним грешкама:

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_a^2 = \frac{4}{18} \times 0.576 = 0.128 & \varepsilon_a = 0^{s}.36 & g_a = \frac{100}{128} = \mathbf{0.8} \pm 0.2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \pm \quad 48 & \qquad \pm \quad 7 & \\
\varepsilon_b^2 = \frac{4}{18} \times 0.433 = 0.096 & \varepsilon_b = 0.31 & g_b = \frac{100}{96} = \mathbf{1.0} \pm 0.4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \pm \quad 36 & \qquad \pm \quad 6 & \\
\varepsilon_c^2 = \frac{4}{18} \times 0.355 = 0.079 & \varepsilon_c = 0.28 & g_c = \frac{100}{79} = \mathbf{1.3} \pm 0.5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \pm \quad 30 & \qquad \pm \quad 5 & \\
\varepsilon_d = \frac{4}{18} \times 0.206 = 0.046 & \varepsilon_d = 0.21 & g_d = \frac{100}{46} = \mathbf{2.2} \pm 0.8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \pm \quad 17 & \qquad \pm \quad 4 &
\end{array}$$

44. Систематске промене у ходовима хронометара.

Главни узроци, чији се утицај на ход хронометара може да запази и да се узме у рачун, јесу ови: а) потреси хронометара за време њихова транспорта, б) постепено отирање точкића и њиховог механизма а тако исто и згушћавање уља, којим се они подмазују ради ублажавања трења, в) температурне промене.

а) Не гледећи на опрезности, и чување хронометра од ударaца и потреса при његовом транспорту, средњи му ход постаје друкчији и подвргнут је већим случајним колебањима него кад стоји на једноме месту. Најчешће се при томе позитивни ход повећава (каткад више од 1^s на дан). Због тога је при изводу поправке хронометра потребно увек одвајати време његова транспорта од времена када је био на миру па за та разна времена узимати и различите ходове, ако се за извод њихов могу добити потребни подаци.

б) Усљед отирања (шљифовања) точкића, осовина и њихових лежишта, ход се хронометра у току времена, унеколико убрзава и то бива особито приметно код нових хронометара у прво време после њихове израде; због згушњавања пак уља ход се успорава те према томе, који од ова два узрока преовлада, излази, да се ход понекад постепено убрзава а понекад успорава. У току времена $T - T_0 = \tau$, који није већи од два месеца, може се рачунати на равномерну промењљивост хронометровог хода ω_τ т.ј.

$$\omega_\tau = \omega + \tau . \delta\omega,$$

где $\delta\omega$ означава промену хода за јединицу времена, у којој се изражава τ. Тада ће се поправка u_τ добивати у оваквом облику:

$$u_\tau = \int_0^\tau \omega_\tau\, d\tau = u_0 + \omega\tau + \delta\omega.\frac{\tau^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14.)$$

в) Компенсација балансира хронометровог не може бити потпуно савршена не само стога што је врло тешко поставити тегове на потребним местима са жељеном тачношћу (чл. 37.) већ и због тога, што се кривљење његових двеју плочица из разнородних метала не повећава потпуно пропорциорално са повишењем температуре. Услед тога, ако је ω_0 дневни ход хронометра при некој температури t_0, онда се његов ход ω при свакој другој температури t (која не излази из граница $+5^\circ$ и $+30^\circ$ C.), може доста добро да изрази оваквом емпиричком формулом:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0) + \beta\,(t - t_0)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15.)$$

где су α и β неки стални коефицијенти, који се зову *коефицијенти компенсације.*

Са променом положаја тегова на балансиру, мења се само коефицијент α; коефицијент пак β, који зависи од саме системе компенсације, остаје при томе непромењљив и излази чак приближно подједнак код свију хронометара, који су међу собом слични по конструкцији; код асталских (маринских) он бива у средњем око $+$ **0^s010** (од $+0^s007$ до $+0^s013$) т.ј. *повећава* дневни ход за целу секунду како при повишењу, тако и при понижењу нормалне температуре t_0 за 10° C. У сваком случају, кад се једном изврши испитивање ходова хронометра при различитим температурама од $+5^\circ$ до $+30^\circ$ C, лако је онда за њега извести величине α и β па затим узимати у рачун утицај температурних промена на његов ход овим начином:

Ако замислимо, да је време $(T_2 - T_1)$, које је протекло међу двама одређивањима поправака хронометра u_1 и u_2, подељено на доста мале интервале $\triangle\tau_1$, $\triangle\tau_2$, $\triangle\tau_3, \ldots \triangle\tau_n$ и да је за све њих посматрана температура $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ на термометру, који се налази код хронометра, онда ће на основу (15.), ходови хронометра у тим интервалима времена бити овакви:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega_0 + \alpha\,(t_1 - t_0) + \beta\,(t_1 - t_0)^2 \\
\omega_2 &= \omega_0 + \alpha\,(t_2 - t_0) + \beta\,(t_2 - t_0)^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega_n &= \omega_0 + \alpha\,(t_n - t_0) + \beta\,(t_n - t_0)^2;
\end{aligned}$$

због тога, множећи сваки од њих са $\triangle\tau$ који њему одговара, добићемо у суми

$$\Sigma\omega.\triangle\tau = u_2 - u_1 = \omega_0\,(T_2 - T_1) + \alpha\sum_{T_1}^{T_2}\triangle\tau.(t - t_0) + \beta\sum_{T_1}^{T_2}\triangle\tau.(t - t_0)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16.)$$

Одатле ће се одредити средњи ход хронометра ω_0, какав је постојао за све време $(T_2 - T_1)$ и који одговара нормалној температури t_0 а после тога добиће се поправка u, која одговара ма коме даноме моменту T, на овај начин:

$$u = u_1 + \omega_0\,[T - T_1] + \alpha\sum_{T_1}^{T}\triangle\tau.(t - t_0) + \beta\sum_{T_1}^{T}\triangle\tau.(t - t_0)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (17.)$$

Пример. Поправке једнога хронометра са коефицијентима компенсације $\alpha = + \mathbf{0.114}$ и $\beta = + \mathbf{0.0095}$, који одговарају нормалној температури $t_0 = + 15°$ C. у $T_1 = 0^h$ и у $T_2 = 24^h$ тј. равно кроз цели дан, били су $u_1 = + \mathbf{40^s{.}78}$ и $u_2 = + \mathbf{38^s{.}36}$. По тима даним да одредимо његову поправку u у 10^h, кад су му температуре t', које су се посматрале кроз свака 2 часа, биле онакве, како су показане у овој таблици.

	t'	t	$(t-15^0)$	$(t-15)^2$		t'	t	$(t-15^0)$	$(t-15)^2$
0^h	$+19°5$	$+19°9$	$+4°9$	24.0	12^h	$+10.5$	$+10°0$	$-5°0$	25.0
2	20.3	19.8	$+4.8$	23.0	14	9.6	9.5	-5.5	30.2
4	19.2	18.3	$+3.3$	10.9	16	9.4	10.1	-4.9	24.0
6	17.5	16.6	$+1.6$	2.6	18	10.8	12.1	-2.9	8.4
8	15.7	14.2	$+0.8$	0.6	20	13.5	14.7	-0.3	0.1
10	12.8	11.6	-3.4	11.6	22	16.0	17.0	$+2.0$	4.0
12	10.5				24	18.0			

Кад се узме за средину свакога интервала $\triangle\tau = 2^h$ температура t као средња из посматраних t', добићемо по тој таблици и по формули (16.) за цели дан:

$$\sum_0^{24} \triangle\tau\,(t-15) = -6.2 \times \frac{2}{24} = -0.517, \qquad \sum_0^{24} \triangle\tau\,(t-15)^2 = +164.4 \times \frac{2}{24} = +13.7$$

$$\omega_0 = (38^s{.}36 - 40^s{.}78) + 0.114 \times 0.517 - 0.0095 \times 13.7 = -\mathbf{2^s{.}49};$$

затим, после сумирања $(t-15)$ и $(t-15)^2$ за првих пет иитервала, наћи ћемо и тражену поправку u за 10^h по формули (17.) овако:

$$\sum_0^{10} \triangle\tau\,(t-15) = +13.8 \times \frac{2}{24} = +1.15, \qquad \sum_0^{10} \triangle\tau\,(t-15)^2 = +61.1 \times \frac{2}{24} = +5.09$$

$$u = +40^s{.}78 - 2^s{.}49 \times \frac{10}{24} + 0.114 \times 1.15 + 0.0095 \times 5.09 = +\mathbf{39^s{.}92}.$$

Кад се пак промене температурне неби узимале у рачун, добило би се:

$$\omega_0 = -\mathbf{2^s{.}42} \text{ и } u = +40^s{.}78 - 2^s{.}42 \times \frac{10}{24} = +\mathbf{39^s{.}77},$$

При транспорту хронометара за време хронометарских експедиција, не гледећи на све обазривости, они су подвргнути каткад врло брзим температурним променама, а, пошто ти хронометри примају те промене нешто иначе него њихови термометри, то се у тим случајима циљ не достиже потпуно, чак ни при врло честим посматрањима температуре. Тада је много простије и сигурније пратити температурно стање хронометара по сравњењу њихових ходова са ходом *некомпенсиранога хронометра*, који је исте каквоће као и сви остали али му је само балансир израђен од једноставног месинганог обода уместо описанога у чл. 37. Дневни је ход N таквога некомпенсиранога хронометра раван нули при некој нормалној температури t_0, али се он увеличава приближно за 11^s при повишењу температуре за 1° C. и изражава се овако:

$$N = 100\,n = A\,(t - t_0).$$

Ако у изразу (15.) ставимо $\frac{100\,n}{A}$ уместо $(t—t_0)$, онда ће се дневни код ω свакога другог хронометра представити у оваквом облику:

$$\omega = \omega_0 + \xi\, n + \eta\, n^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15.)'$$

при чему коефицијенти $\xi = \frac{100}{A}\alpha$ и $\eta = \left(\frac{100}{A}\right)^2 \beta$ могу бити одређени, као и пређе, из специјалних огледа за ту сврху.

Кад представимо време $(T_2—T_1)$, које је протекло од једнога до другог одређивања поправака хронометра u_1 и u_2, подељено на мале интервале $\triangle\tau_1$, $\triangle\tau_2 \ldots.$ и кад са U_1 и U_2 означимо поправке некомпенсираног хронометра у моментима T_1 и T_2 а ходове његове за те исте интервале са $100\,n_1$, $100\,n_2, \ldots.$ имаћемо уместо формула (16.) и (17.) ове:

$$u_2 - u_1 = \omega_0\,(T_2 - T_1) + \xi n_0\,(T_2 - T_1) + \eta \sum_{T_1}^{T_2} n^2 \triangle\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16.)'$$

и

$$u = u_1 + \omega_0\,(T - T_1) + \xi n_0\,(T - T_1) + \eta \sum_{T_1}^{T} n^2 \triangle\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17.)'$$

где $100\,n_0 = \frac{U_2 - U_1}{T_2 - T_1}$ представља средњи ход некомпенсираног хронометра за време $T_2 — T_1$. То значи, да треба знати само тај средњи ход, да би се срачунао утицај првога члана компенсације на тражену хронометрову поправку u; за срачунавање пак другога члана са коефицијентом η, довољно је сравњивати некомпенсирани хронометар са обичним не више од три до четири пута на дан.

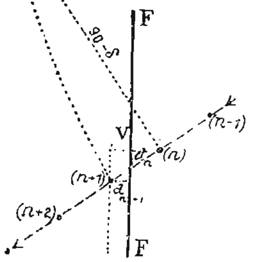
ГЛАВА VI.

ПОСМАТРАЊА СА ЧАСОВНИЦИМА И ХРОНОМЕТРИМА.

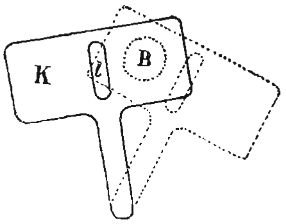
45. Посматрања момената пролаза звезда преко кончића дурбина слухом.

Када се одређује зенитно растојање или азимут какве звезде, чији се привидни положај у пољу гледања дурбина брзо мења, било би врло незгодно вршити на њу тачно визирање дурбином углемерног инструмента онако исто, као и при посматрању непомичног предмета (чл. 28.), због тога, што би у том случају требало завршити покрет дурбина позитивним покретом микрометарног завртња тачно у оном моменту, када се угледа, да се звезда налази тачно на кончићу па у исто време запазити и тај сами момент по хронометру. Много је међутим простије и сигурније сачекати неколико секунди те да сама звезда прође преко кончића па оценити по часовнику или хронометру тачни момент њена пролаза.

Бројећи у памети секундне ударе (откуцаје) часовника (или хронометра) па пошто запази два удара између којих се десио пролаз звезде преко кончића, — посматрач би могао оценити слухом и делове тога секундног интервала; али уместо тога сви астрономи (почевши још од Брадлеја) претпостављају овакав поступак: Запажају се и одржавају у памети она растојања d_n и d_{n+1}, у којима се налази звезда од кончића FF (сл. 64.) у секундним ударима часовника: (n) — непосредно пред пролазом њеним преко кончића и $(n+1)$ — који непосредно за њим долази. Тражени пак делић секунде, који треба да буде додат ка (n), добива се *оценом одока* растојања d_n у односу према $(d_n + d_{n+1}) = 1$. Например, по положајима звезде (n) и $(n+1)$ на сл. 64. овај делић излази 0^s6. На тај начин се делићи интервала времена мере помоћу линеарних делића звездинога пута, који су пропорционални са тим делићима интервала времена; разуме се, да ће се то одредити са већом тачношћу ако посматрач, при употреби хронометра, броји полусекундне његове ударе.



Сл. 64.



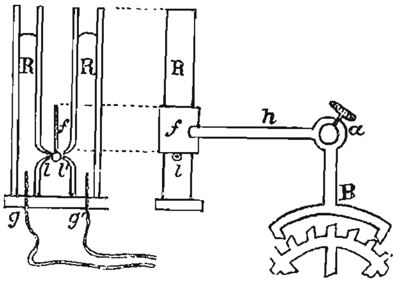
Сл. 65.

Напомена. Да би почетник брже схватио методу посматрања пролаза и да би се научио да оком лови положаје покретне (привидно) звезде у моментима удара часовника, корисно је почети са огледима ове врсте: друго једно лице нека држи пред објективом B дурбина (сл. 65.) екран K од картона са дугуљастим прорезом l и нека га брзим покретом руке покреће с једне на другу страну тачно у моментима секундних удара часовника, да би се у дурбину појављивали ликови звезде само у тим моментима $(n-1)$, n, $(n+1)$ и т.д. Тада ће посматрачу кроз дурбин несравњено лакше бити да запамти и да оцени растојања d_n и d_{n+1} од звезде до кончића.

46. Хронографска посматрања пролаза.

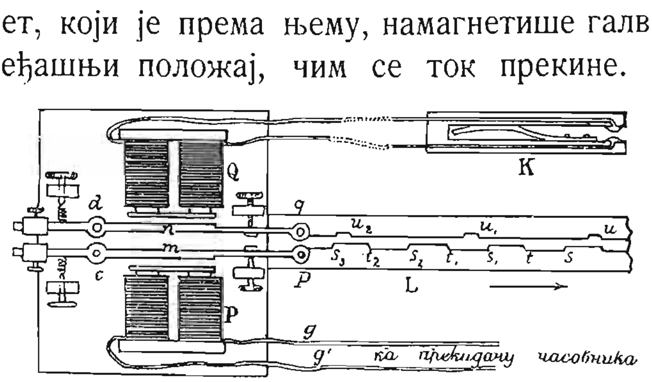
Тачније се унеколико одређују моменти пролаза звезда преко кончића дурбина *хронографским* путем, т.ј. помоћу нарочитог апарата — *хронографа* и справе у часовнику за периодично прекидање и везивање галванског тока. Тада се секунде часовника обележавају на хронографу извесним знацима на једнаком растојању један од другога; поред њих добивају се знаци посматрача, који са нарочитом контактном справом у руци везује други ток тачно у моментима пролаза посматране звезде преко кончића. Само одређивање тих момената у односу према оним првим знацима (секундним) на хронографу врши се доцније.

Прекидач се галванскога тока на часовницима удешава различито, например овако: Поред часовног механизма намештају се две стаклене цеви R и R′ (сл. 66.) са живом, које су спојене помоћу жицâ g и g' са слабом галванском батеријом. Кроз врло уске отворе l и l' жива у њима, не просипајући се, долази само у контакт и на тај начин везује галвански ток. За осу пак a котве часовника утврђена је полужица h са танком плочицом f од лискуна, која пролазећи слободно међу отворима l и l', прекида ток на једну секунду при свака два размаха клатна.



Сл. 66.

Помоћу тога и системе зупчаних точкића са регулатором на хронографу пушта се у равномерно кретање пантљика L (сл. 67.) од хартије, коју додирују два пера (или игле) p и q; ова су опет утврђена за полуге m и n, које се обрћу око оса c и d а привлаче се помоћу електромагнета P и Q тако, да свако перо одмах скрене устрану чим се електромагнет, који је према њему, намагнетише галванским током; затим се опет врати у пређашњи положај, чим се ток прекине. Галванска батерија,



Сл. 67.

која везује и прекида ток помоћу прекидача часовника и дејствује на електромагнет P, приморава перо p да исписује по пантљици зупчасту линију $s\ t\ s_1\ t_1\ s_2\ t_2 \dots$

која представља секунде часовника; друга пак галванска батерија, која делује на електромагнет Q и која се везује помоћу контакта K у руци посматрача само за тренутак, приморава перо q, да скрене за тај тренутак па да се понова врати у свој нормални положај. Положај знакова тога пера: u, u_1, $u_2, \ldots$, који означују посматране моменте пролаза звезде преко кончића дурбина, одређује се у односу према секундним знацима са тачношћу до $\frac{1}{50}$ па чак и $\frac{1}{100}$ дела секунде, помоћу лењирића или специјалне справе, намењене за то мерење.

Ако се веже електромагнет Q са оном истом батеријом, која се прекида и везује за часовник, онда ће оба пера, p и q, исписивати секунде часовника; на тај се начин открива међусобно одступање једних и других знакова, које зове *паралакса перâ* (или игала) и које затим, разуме се, треба узимати у рачун. Посматрач може такође, помоћу контакта K, да учини неколико знакова пером q у моментима секундних удара часовника по слуху и да на тај начин одреди одступање тих удара од секундних знакова s, t, s_1, $t_1, \ldots$. на хронографу, што зависи од конструкције и положаја прекидача на часовнику.

У последње су време почели да снабдевају пасажне инструменте (чл. 52. и 53.) нарочитим микрометрима, који се зову *безлични контактни регистрирни микрометри*. Помоћу система зупчаних точкића, покретни се кончић микрометров (сл. 29.) може да покреће завртњем CC врло глатко и са истом брзином с којом се креће у дурбинову пољу гледања посматрана звезда те да остане на њој тачно постављен у току од десетак и више секунада, што зависи од брзине кретања саме звезде; у извесним пак моментима, који одговарају одређеним прочитањима на добошу (10·, 20·0, 30·0 и т.д.), *контакти*, који на том добошу постоје, везују тренутно галвански ток, који дејствује на иглу (перо) хронографа. На тај се начин исписују на хронографу, — независно већ од посматрача, — моменти пролаза кончића, па разуме се, и звезде кроз она места дурбинова поља гледања, којима одговарају напред речена одређена прочитања на добошу микрометровом.

47. Случајне грешке посматрања пролаза.

Ма којим начином да се одређује момент t пролаза звезде преко кончића у дурбину, тај ће момент увек бити подвргнут извесној случајној грешци $\triangle t$ па због тога, ако са V означимо угловну брзину кретања звезде у току од 1^s у правцу перпендикуларном на кончић, истинито место звезде у моменту t (оцењеном по слуху или помоћу хронографа) неће бити тачно на кончићу већ на извесном растојању од њега

$$\triangle s = V . \triangle t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

За звезду са деклинацијом δ, која пресеца кончић под углом q (сл. 64.), та ће се брзина изразити овако:

$$V = cos\, \delta\, sin\, q; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)'$$

угао пак q биће раван звездином паралактичком углу p, ако су кончићи хоризонтални, и, $(90^0 — p)$, ако су они вертикални.

Средња квадратна величина за ε_s различитих случајних грешака $\triangle s$ треба разуме се, да буде знатно већа од средње грешке

$$\varepsilon = \pm \frac{30''}{W} = \frac{2^s}{W}$$

стављања дурбиновог кончића (визирања) на непомични предмет (чл. 15.), јер се ка узроцима, од којих зависи величина ε (увеличање дурбина, каквоћа ликова, оштрина гледања) додаје још један, који зависи како од брзине кретања звезде V, тако и од саме методе посматрања пролаза. По томе се за ε_s може узети овакав приближни израз:

$$\varepsilon_s = \sqrt{\varepsilon^2 + (V.\,e)^2}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

где e означава неку количину, која је стална за једну и исту методу посматрања. Тада ће се средња грешка ε_t, у оцени момента t, представити у облику

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_s}{V} = \sqrt{e^2 + \left(\frac{\varepsilon}{V}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

Узмимо да у дурбину има n паралелних кончића на извесном растојању $f_1 = 0, f_2, f_3, \ldots . f_n$ од првога (чл. 18.) и да су запажени моменти пролаза звезде преко њих: $t_1, t_2, t_3, \ldots . t_n$; онда ће се за момент њена прелаза преко првог кончића добити n вредности: t_1, $t_2 - \frac{f_2}{V}$, $t_3 - \frac{f_3}{V}, \ldots . t_n - \frac{f_n}{V}$; одступања пак њихова v_1, $v_2, \ldots . v_n$ од средњега из свију њих даће

$$\varepsilon_t^2 = \frac{\Sigma v^2}{n-1}\;;$$

из посматрања пак m звезда са приближно истом брзином V добиће се много тачније

$$\varepsilon_t^2 = \frac{\Sigma v'^2 + \Sigma v''^2 + \Sigma v'''^2 + \ldots .}{m\,(n-1)}$$

По вредностима за ε_t', ε_t'', ε_t''', ..., које су нађене за различите брзине V′, V″, V‴, ... звезда, сваки посматрач може да изведе за себе и за инструмент, којим се служи, највероватнију вредност за константне ε и e, које улазе у формулу (3.) и да се убеди, да ли се њоме доста добро изражава повећање средње грешке ε_t са смањењем брзине V кретања звезде. Огледом је доказано, да је та формула доста добра за приближну оцену тачности посматрања.

Обично излази, да је ε око $\frac{3^s0}{W}$, тј. да је већа од средње грешке визирања на непомични предмет (чл. 15.), што долази највише због немирног стања атмосфере. Величина пак e, која зависи од саме методе посматрања, излази код извесних посматрања од $\pm\,\mathbf{0^s.10}$ до $\pm\,\mathbf{0^s.12}$, кад се броје секунде; око $\pm\,0^s.08$, кад се броје полусекундни удари хронометра, и, око $0^s.07$ при посматрањима са хронографом и помоћу контактног регистрирног микрометра. Тачност посматрања прелаза преко кончића једнога или другог краја Сунца а тако исто и осветљенога краја Месеца скоро је исто таква као за зведе.

Даље означене бројне вредности за ε_s, — које су добивене по формули (2.) са претпоставком увеличања дурбина $W = 60$, тј. $\varepsilon = 0^{s}05 = 0''75$, — очигледно показују, да је хронографска метода ($e = 0^{s}07 = 1''05$) осетно боља од обичне методе по слуху ($e = 0^{s}10 = 1''50$) само при брзинама V од 1 до 0.25:

Брзине V		**1**	**0.50**	**0.25**	**0.10**
ε_s	по слуху	1''68	1''06	0.84	0.76
	по хроногр.	1.29	0.91	0.80	0.76

48. Личне грешке посматрања пролаза.

Та околност, што је случајна грешка ε_s при посматрању пролаза звезде преко кончића знатно већа него при визирању тим кончићем на непомични предмет, сама по себи неби била од особитог значаја, јер би се у средњем из посматрања на n кончића, она морала смањити у односу као 1 према $\sqrt{n}$ па се на тај начин може учинити и врло малом. Много је, међутим, важније и најгоре то, што су та посматрања подвргнута сталним *личним грешкама*, врло знатним по својој величини, које су различите не само код разних лица него су доста промењљиве чак и код једног и истог лица, тако да им и сам термин „сталне“ није потпуно коректан. Појава њихова потиче из саме суштине посматрања пролаза.

Одређујући момент пролаза звезде преко кончића Брадлејевом методом, посматрач слуша удар часовника па се стара да тачно оцени положај звезде према кончићу, који одговара моменту тога удара; али, пошто је за то потребно извесно време, у току којега звезда успе већ да оде *унапред*, то одређени момент треба да испадне увек у толико *раније* од истинитог, колико времена употреби посматрач на напред речену оцену. То утрошено време је врло неједнако код разних лица и зависи од стечене навике посматрача и од темперамента његова, што је сасвим неприметно за њега самога; али оно, разуме се, не може да надмаша интервал времена између два сукцесивна удара часовника, јер је са сваким новим ударом посматрач приморан, да обрати сву своју пажњу на оцену већ новога положаја звезде. Према томе, оваква би стална *негативна лична грешка* могла у сасвим крајњем случају достићи *целу секунду* при бројању секундних удара и *0.5 секунде* при полусекундним ударима хронометра.

Код хронографске методе, напротив, посматрач везује руком галвански контакт тек после момента, кад му је изгледало да је звезда на кончићу, и стога, због већег или мањег задоцњавања у тој ручној радњи, и лична његова грешка треба да излази *позитивна*. Осим напред речених узрока и код једне и код друге методе, на величину личне грешке могу да утичу још и други, чисто физиолошки узроци, као што су: већа или мања брзина примања утисака оком и увом, консервација утиска у оку за извесно време после прекида дејства светлости и т. д.

На некојим опсерваторијама (пулковској, париској, лајденској) удешене су биле специјалне справе код којих су се на хронографу исписивали *истинити моменти* пролаза *вештачке звезде* преко кончића дурбина, па, из сравњења тих момената са онима које је посматрач одређивао, добијала се његова *апсолутна* *лична грешка* при једној или другој методи посматрања. Много се простије, међутим, одређује разлика личних грешака двају посматрача или, како се краће, каже, њихова *лична разлика* или *лична једначина.* Ради тога им је потребно да обојица посматрају једну и исту звезду наизменично — један на првим кончићима мреже дурбинове а други на последњим, или пак обратно; пошто се и једна и друга од тих посматрања сведу на један и исти кончић, код првога ће се добити у средњем момент t_a а код другога t_b и тада ће $(t_b—t_a)$ и бити њихова лична разлика. Разуме се по себи, да им је за ту сврху потребно посматрати не једну већ више звезда.

На сасвим сличан начин може сваки посматрач да открије промену своје личне грешке с прелазом од једне методе посматрања пролаза на другу. Ако он буде посматрао пролаз звезде преко кончића једне половине мреже обичном методом а кроз другу са помоћником, који би моментално закривао и откривао објектив дурбинов у моментима удара часовника (као што је било речено у напомени чл. 45.), онда ће разлика међу добивеним резултатима дати доста приближан појам о апсолутној величини његове личне грешке, пошто се у другом случају главни узрок њен уклања.

Све што је овде речено à priori, потврђује се огледима, који су до сад извршени ради одређивања апсолутних вредности личних грешака и личних разлика код разних астронома и посматрача те доводи до ових закључака*):

1. Личне грешке у посматрањима пролаза слухом бивају уопште *негативне,* у хронографским пак оне су *позитивне.*

2. При посматрањима слухом са бројањем целих секунада, личне су грешке код некојих астронома и посматрача достизале до $-0^{s}8$ па чак и до 1^{s}, као што је то био случај код чувенг астронома Бесела.

3. Крупне негативне личне грешке постају приближно *два пут* мање, када исти посматрач употреби хронометар те одбројава полусекундне ударе њихове.

4. Личне грешке у хронографским посматрањима ретко су кад превазилазиле $+0^{s}3$.

5. Код многих се посматрача лична грешка мењала доста правилно из године у годину те је достизала до знатне величине тек постепено.

6. Осим ових систематских промена, опажају се увек и извесна, већа или мања, неправилна колебања личне грешке из дана у дан па чак и с часа на час.

Несталност личне грешке посматрача чини, да тачност средњега резултата из неколико посматрања (па тицало се то броја кончића, или броја звезда посматраних за једно вече, или пак и неколико вечери посматрања) никад није тако висока, каква би се могла очекивати, судећи по величинама случајних грешака и по броју посматрања. Најновија метода посматрања пролаза помоћу регистрирног микрометра (чл. 46.) представља у том погледу несумњива и врло знатна преимућства, зато што се том методом не само смањују до неколико стотих делова секунде како апсолутне личне грешке посматрања тако и личне разлике разних посматрача, него при томе оне у исто време постају и знатно постојаније.

---

*) Н. Цингер. „О личним грешкама код астрономских посматрања". Записке В. Топогр. Одељења Гл. ЂШтаба 1873.

49. Посматрања тренутних светлосних појава.

При посматрањима каквих тренутних светлосних појава, као нпр. при покривању и откривању звезде тамним крајем месеца, посматрач, бројећи слухом секундне или полусекундне ударе хронометра, запажа, међу којим се ударима десила посматрана појава и одређује тачни момент њен оценом делова тога интервала слухом.

На тај се исти начин посматрају и разни вештачки светлосни сигнали, који се понекад употребљују за међусобно сравњивање хронометра, који се налазе на тачкама доста удаљених једна од друге. Светлост од обичне петролеумске лампе, снабдевене рефлектором, довољна је, да би се видела ноћу у дурбину са даљине од 30 км. па и више; дању се пак могу упућивати са једне тачке на другу сунчани зраци помоћу справа са једним или са два огледала, које се зову *хелиотропи.*

На једној се од тих тачака светлост лампе или хелиотропа зракова и открива лаким екроном тачно у моментима извесних удара хронометара A_1, A_2, A_3,.... а са друге се запажају по хронометру времена B_1, B_2, B_3,.... тих исчезавања и појављивања светлости. У средњем из многих таквих посматрања добиће се тражена разлика показања оба хронометра $(B - A)$ доста тачно а по одступањима појединих бројних вредности $(B_1 - A_1)$, $(B_2 - A_2)$.... од тога средњега $(B - A)$, одредиће се и средња грешка самих посматрања, која обично излази од $\pm 0\overset{s}{.}12$ до $\pm 0\overset{s}{.}15$ при бројању секундних удара хронометра и од $\pm 0\overset{s}{.}08$ до $0\overset{s}{.}10$ при бројању полусекундних удара његових*). Да слухом процењивани делови секунада неби излазили подједнаки код свију посматраних момената B_1, B_2, и т.д. најбоље је употребити, за давање сигнала, тринаестударни а не обичан хронометар.

Изводећи те исте огледе и на блиском растојању и одређујући тада разлику $(B - A)$ потпуно тачно из непосредних сравнења хронометара, — лако је одредити посмтрачеву личну грешку у оцени тренутних појављивања или ишчезавања светле тачке. Ове *личне грешке* су обично *негативне* и могу да дођу код извесних лица до $- 0\overset{s}{.}2$ па чак и до $- 0\overset{s}{.}3$ а објашњују се тиме, што при тим посматрањима треба примати и упоређивати међу собом два сасвим разнородна утиска: светлосни и звучни; и затим, при оцењивању на слични наиин момената звучних појава, — као што су нпр. јасни и не сувише јаки удари, — личне грешке бивају несразмерно мање. Може се још напоменути, да се ишчезавање светлосне тачке посматра увек сразмерно доцније него ли њено појављивање (за $0\overset{s}{.}1$ и више), услед конзервирања светлосног утиска у оку у току извесног времена.

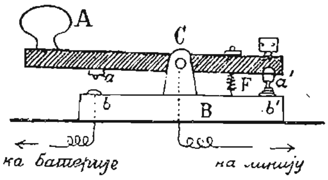
50. Сравњивање хронометара телеграфским путем.

Када су две тачке везане међу собом телеграфом, онда се њихови часовници или хронометри могу сравњивати врло лако и врло тачно помоћу апарата, којих увек има на телеграфским станицама, а то су: *Морзе-ов кључ и реле.*

---

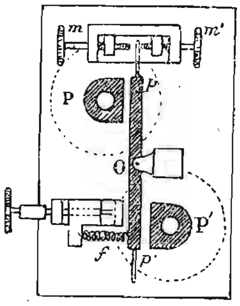
*) Таква би приближно била и средња грешка посматраних момената пролаза звезда преко кончића, кад би се ти моменти ценили непосредно слухом; Брадлеровом пак методом она излази (чл. 47. нешто мања.

Кључ се Морзе-ов састоји из месингане полуге која се може да окреће око осе C ручицом A (сл. 68.); на полузи су утврђена два испупчења *a* и *a'* од платине а наспрам њих на другој дашчици B платинске плочице *b* и *b'*, које се зову *контакти*. Предњи је контакт *b* везан жицом за батерију а преко ње за земљу; оса пак C везана је за линију (телеграф. жицу), која води ка другој станици. На тај начин, кад се руком притисне на ручицу A, испупчење ће *a* ударити о контакт *b*, ударац се чује и галвански је ток на целој линији везан; чим се пак рука одмакне, ток се одмах прекида, јер јака опруга F враћа полугу у њен првобитни положај, присиљујући при том њено друго испупчење *a'* да удари о задњи контакт *b'*.



Сл. 68.

Морзе-овим кључем везани линиски ток пролази на другој станици кроз *реле*, који се сатоји из електромагнета PP' са котвом *pp'* (сл. 69.), која се окреће око осе O. Полови P и P' електромагнета привлаче ту котву те она удара својим крајем *p* о завртњић *m*; чим се прекине ток, она се силом спирале *f* враћа у свој првобитни положај и тада удари о завртњић *m'*. На тај се начин сви удари, учињени кључем на једној станици, понављају скоро у истим тренутцима на реле-у друге. Главна се задаћа реле-а на телеграфској станици састоји, уосталом, не у репродукцији тих звукова, већ у томе, да везује и прекида сталнији ток локалне батерије, помоћу којега и ради регистрирни апарат на тој станици.



Сл. 69.

Момент свакога појединог сигнала, који је дат кључем у извесном тренутку удара хронометра A на једној станици и репродукован на реле-у друге, може се на њој оцењивати са њеним хронометром B са средњом случајном грешком, не мањом од $\pm 0\overset{s}{.}08$; према томе, одређивање разлика показања (B—A), које је засновано на таквим посматрањима, било би тек нешто тачније од онога из посматрања светлосних сигнала. Несравњено је тачније и простије употребити за ту сврху тринаеступарни хронометар, тј. везивати и прекидати ток кључем у парне ударе његове 13 или 14 пута узастопце; на другој пак станици посматрати *поклапање* једнога од одговајућих удара реле-а са ударима обичног хронометра. Није тешко извежбати се у давању тих сигнала по парним ударима, руководећи се за то пропуштањем непарних удара тринаестударног хронометра, који се и поред удараца кључа ипак чују. Онда средња грешка сравњења хронометра само по једноме опаженом поклапању неће надмашити $\pm 0\overset{s}{.}03$; из неколико пак низова таквих сигнала разлика показања хронометара може да буде одређена скоро са истом тачношћу, као и из обичних, непосредних њихових сравњења (чл. 42.).

Узмимо например, да је показање тринаестударног хронометра A, у моменту почетног (нултог) удара кључем, било $10^h\ 2^m\ 24^s$ а на другој станици запажено поклапање шестог удара реле-а са ударом $19^h\ 27^m\ 43\overset{s}{.}5$ хронометра B. Пошто је интервал међу 6. и 0. ударом раван $6\frac{12}{13} = 5\overset{s}{.}54$ (табл. чл. 42.), то је показање A, у запаженом моменту поклапања, равно $10^h\ 2^m\ 24^s + 5\overset{s}{.}54$ те отуд

$$B—A = 19^h\ 27^m\ 43\overset{s}{.}5 - 10^h\ 2^m\ 29\overset{s}{.}54 = 9^h\ 25^m\ 13\overset{s}{.}96.$$

Што се тиче извесне грешке, која постоји у овим телеграфским сравњењима хронометара и која произлази од задоцњавања радње реле-а и од непотпуно тренутног простирања тока по линији, — када је растројање међу станицама врло велико, — њу је лако открити и елиминисати обратним давањем сигнала са друге и посматрањем њиховим на првој. О томе, као и о сравњивању часовника преносом хронографских знакова телеграфским путем, биће још речи у чл. 128 глава XVI.

50. а. Сравњивање хронометара радио-телеграфским путем.

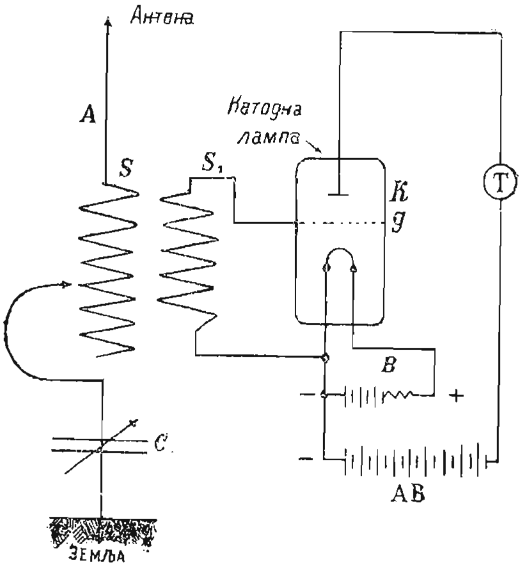
Давање тачнога времена радио-телеграфским путем извршено је било први пут у Америци 1904. године. После две године по тој је методи већ било извршено одређивање разлика географ. дужина између Потсдама и Брокена, на растојању око 200 километара. Прва правилна служба времена организована је била у Халифоксе-у 1907. године. Од 1910. године почеле су функционисати главне немачке и француске радио-телеграфске станице. Сад има око 40 станица на најразличнијим тачкама Земље, које дају часовне сигнале свакодневно у одређено време. Такви се сигнали у Русији дају, по часовнику Пулковске опсерваторије, са московске, ходинске и лењинградске (петроградске) радиостанице.

Апарати, који се употребљују за радио-телеграфске циљеве, врло су комплицирани и стално се усавршавају; стога ћемо указати у најглавнијим цртама карактерне особине њихова устројства.

Слично ономе, како чекић обичног електричног звонца производи ваздушне таласе, које примамо преко ушне бубне опне, исто тако и удари електрона у систему *спроводника* дају почетак електричних треперења, која се простиру на разне стране брзином светлости тј. 300.000 километара у секунди времена. Број треперења у секунди одређује дужину електричних таласа. У радио-телеграфији употребљују се таласи дужине око 3 *km*. Свако *испражњавање варницом* даје у секунди 100.000 треперења, али то траје за тако кратко време, да се не може примити на *станици за примање*.

Кад се пак у секунди произведе 500—1000 варничних испражњивања, они се могу примити на станици за примање помоћу особитога апарата детектора те се могу чути на телефону, као звук дужег или краћег трајања. *Често та* испражњавања одређује висину звука, који се чује. Број треперења, па према томе, и дужина таласа зависе од *капацитета и самоиндукције* системе апарата за шиљање. *Примач* треба да буде удешен (штимсван) у зависности од дужине таласа, који се примају, тако, да се дејство њихово потенцира дејством резонанса.

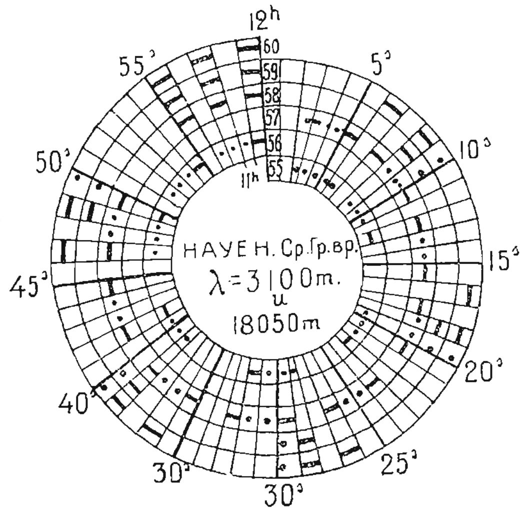
За примање радио-телеграфских сигнала препоручљивија је употреба једне или неколико катодних цевчица *за појачање*. Њихов се састав углавном састоји у овоме: Лампица *усијавања*, осим спирале од тантала, има још два електрада, решетку *g* и катод *k*. Акумулаторска батерија B усијава спиралу, из које при повољно висиком *разређењу* излећу електрони, који пролазе кроз решеткине отворе и падају на катод. Ако се сад уведе катод *k* и решетка *g* у ланац нове батерије акумулаторâ AB, у који је уведен и телефон, онда ће по



Сл. 69. *a*.

том истом ланцу проћи слаби ток услед тога, што ће потоци електрона учинити, да унутрашњи простор лампе постане спроводник електрицитета. Најмањи електрични таласи, који дођу до антене за примање, изазивају ток у калему S а по индукцији и у калему S_1. Тада произлази тренутно појачање тока и на телефону се јасно чује звук.

Ова је система детектора знатно осетљивија од прећашњих. Применом више таквих цевчица, може се радити чак и без високе антене, тј. може се употребити антена специјалне израде, која се састоји из квадратног рама, око којега је обвијено неколико стотина омота спроводника. Таква антена може само тада да прима сигнале, када је њена површина оријентирана перпендикуларно на правац простирања таласа. Усљед тога, кад поставе две такве антене знатно удаљене једна од друге, може се одредити положај радиотелеграфске станице, која даје сигнале.

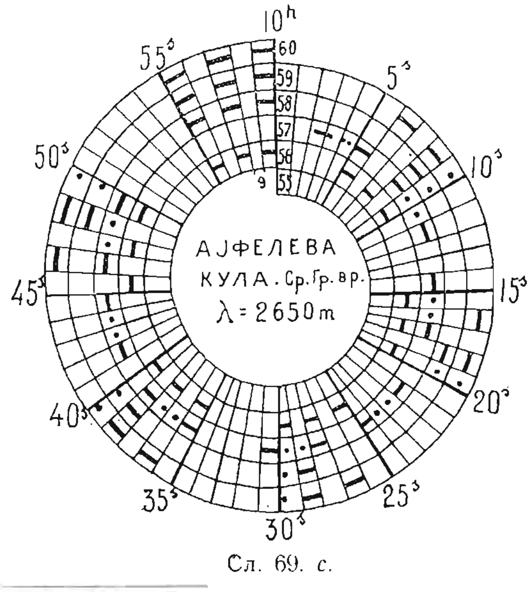


Сл. 69. *b*.

Шема давања сигнала састоји се у произвођењу испражњавања по извесној ритмичкој поступности на станици за шиљање и у регистровању њихову на станици за примање, слухом или хронографски.

Свака станица шаље таласе одређене дужине. Например Ајфелова кула — 2650 *m*, Науен — 3100 *m*. и 18050 *m*. и т.д.

На показаним графиконима (сл. 69. *b*. и 69. *c*.) представљена је шема давања времена са станице у Науену и са Ајфелове куле у Паризу*). Прво се даје конвенционално слово за удешавање (штимовање) примача. Сигнали времена састоје се из три серије, при чему се пред сваком од њих дају кључем неколико ударaца за предупређење. За пет секунада пре давања сигнала времена, сигнали се за предупређење завршавају и почињу сигнали времена, који се састоје из три дугачке „црте“, свака трајања од једне секунде. На крају сваке од три сукценсивне минуте, између 55^s и 60^s дају се по три серије таквих сигнала.



Сл. 69. *c*.

Кад се саслуша низ сигнала за предупређење, треба сконцентрисати пажњу само

---

*) Од 1.-IX.-1926. г. Ајфелова кула даје сигнале у 9^h 26^m и у 21^h 26^m. Преводилац.

на секундну казаљку часовника, — чију поправку желимо да добијемо, — па запазити број секунада у оном моменту када се на телефону зачује почетак прве од три црте, које представљају сигнале времена. Затим се уписује број минута и часова са циферблата. Друга и трећа серија служе за контролу извршеног сравнивања. Тачност таквога сравнивања за хронометре достиже $0\overset{s}{.}1$ до $0\overset{s}{.}2$, што је недовољно за циљеве астро-геодетских радова. Неопходно је потребно повисити тачност сравнивања до $0\overset{s}{.}01$ — $0\overset{s}{.}02$. То се достиже употребом тако званих часовника-нониуса, чији је ход краћи од хода обичних часовника. Ако часовник-нониус иде на дан за цели 1 час напред, секунде ће тога часовника бити у толико краће, да ће се сваких 25 секунада откуцаји таквих часовника поклапати са откуцајима обичног часовника. Слушајући сигнале часовника-нониуса, који се дају сваке секунде, а једновремено и откуцаје полусекундног хронометра, запазићемо, да се сваких $12\overset{s}{.}5$ ти откуцаји поклапају, а у интервалу међу поклапањима ритмички се сигнали и откуцаји хронометра спочетка разилазе а затим приближују, док се опет не поклопе после $12\overset{s}{.}5$. То омогућава сравнивање часовника-нониуса са хронометром с тачношћу до $0\overset{s}{.}02$.

Лакше се врши сравнивање, када су радио-сигнали краткога трајања тј. „тачке“, које се примају као откуцаји хронометра те се с њиме лако могу сравњивати. На великим је растојањима ипак препоручљивије имати сигнале са извесним трајањем, тј. „црте“, зато што се „тачке“ због слабости сигнала тешко разликују од лаких удара, који се врше у телефону усљед атмосферских испражњивања.

Поред примања сигнала слуховном методом сада се примењује њихова аутоматска регистрација. Спочетка су за ту сврху употребљивани осетљиви електрични апарати, например, фотографски галванометри, у које је улазио слаби ток из примача. У тај се апарат може да упути ток и са локалног ланца, који се везује и прекида прекидачем те да се на тај начин мери интервал времена, који раздваја сигнале обе врсте. За контролу сталности обртања добоша, на који је навучена светлосноосетљива хартија, на њему се исписују још и вибрације камертона. Таква је регистрација била употребљена при одређивању разлике географ. дужина Париз—Вашингтон. Она је компликована и изискује много лабораторних средстава. Много је удобнија примена механичке регистрације. Таква се регистрација већ врши на знатном броју станица за примање и даје већу тачност од примања сигнала слухом ($0\overset{s}{.}01$). Осим тога, у даном је случају довољно ограничити се само са неколико ритмичких сигнала.

ГЛАВА VII.

ПАСАЖНИ ИНСТРУМЕНТ И ЗЕНИТ-ТЕЛЕСКОП.

51. Улога пасажног инструмента.

У теорном делу курса астрономије имали смо задаће о дневном кретању небесних тела, чије решење показује, да одређивање како локалнога звезданог времена, тако и ширине места, може бити засновано или на посматрањима пролаза даних звезда кроз један и исти вертикал, или пак кроз један и исти алмукантарат. За прву врсту посматрања употребљују се специјално за то намењени инструменти, који се зову *пасажни* а за посматрања друге врсте — *зенит-телескопи*. Ови су инструменти најпростије конструкције, јер су без тачно подељених кругова.

Пасажни се инструмент састоји управо из дурбина, чија оптичка оса описују *вертикалну равнину*, јер је перпендикуларна на *хоризонталну* обртну *осу* дурбина. Постојанство те равнине у току свега онога времена, које је потребно ради посматрања извесних звезда, т. ј. *солидност постављања* пасажног инструмента прва је и неопходна погодба за сигурност извода из таквих посматрања. Неопходно је такође потребно, да чепови хоризонталне осе, на којима се она обрће у својим лежиштима заједно са дурбином, представљају у попречном пресеку правилне кругове. Остале неправилности у кострукцији и постављању пасажног инструмента од мањег су значаја, јер се лако даду одредити и узети у рачун; у ове спадају: *неједнакост чепова* и *нагиб хоризонталне осе*, које се одређују врло тачно помоћу *либеле* (чл. 26.), и најзад, неперпендикуларност оптичке осе дурбина на обртну осу, која се зове *колимациона грешка* а одређује се *превртањем* дурбина у лежиштима.

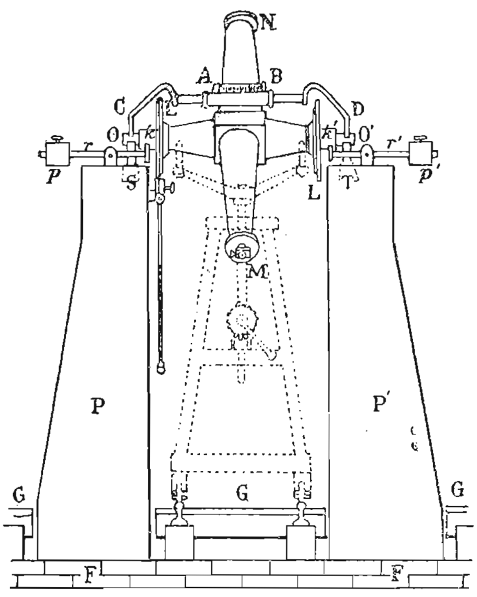
Мрежа кончића у дурбину пасажног инструмента треба да се састоји из неколико вертикалних кончића (7, 9, 11), како би се момент пролаза небесног тела кроз *средњи* кончић одредио што је могуће тачније; пошто пак растојање међу њима треба да буде не мање од $2\overset{\prime}{.}5 = 10\overset{s}{.}$, — те да би се имало довољно времена за записивање момента по хронометру слухом запажених пролаза звезде, која брзо пролази, — то проширено на тај начин поље гледања изискује скоро увек помицање окулара (чл. 12.). За посматрање пак звездâ које лагано пролазе ($V = 0.25$ и мање), као и за хронографска посматрања момената пролаза, који могу следовати и кроз 3 до 4 секунде једно за другим, у средњем се делу мреже стављају интервални кончићи међу напред реченим.

При постављању пасажног инструмента не у меридијан већ у који други вертикал, извесне ће звезде пресецати кончиће под врло оштрим углима те ће бити потребно врло много времена за пролаз од једнога до другог. Ради веће удобности посматрања таквих звезда, мрежи се додаје *микрометар са покретним кончићем*.

52. Стални пасажни инструменти.

На опсерваторијама се пасажни инструменти постављају или у меридијан, ради одређивања ректасцензија небесних тела, или пак, — што је ређе, — у први вертикал, ради одређивања деклинација које се мало разликују од ширине места. Дурбини су код тих инструмента врло велики, дужине од 1.5 до 2.5 метра и са објективом од 10 до 15 сантиметара у пречнику.

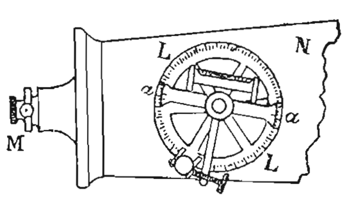
При стављању инструмента у меридијан, дурбинова се оса OO' (сл. 70.) наслања на два стуба P и P′, озидана на дубоком фундаменту F и изолована од пода G, на коме се налази посматрач. S и T су месингана лежишта за чепове хоризонталне осе, и она су утврђена на стубовима у нарочитим справама, које допуштају да се једно лежиште може да покреће назад и напред ради тачнога стављања дурбина у меридијан, а друго — навише и наниже ради корегирања нагиба осе OO', који се одређује јахаћим (или висећим) прибором CD са либелом AB. Та се оса ослања још и на точкиће k и k' двеју полуга r и r' са контрабалансима p и p' помоћу којих се смањује притисак осе на лежишта и тиме чува њене чепове од сувишног трења.



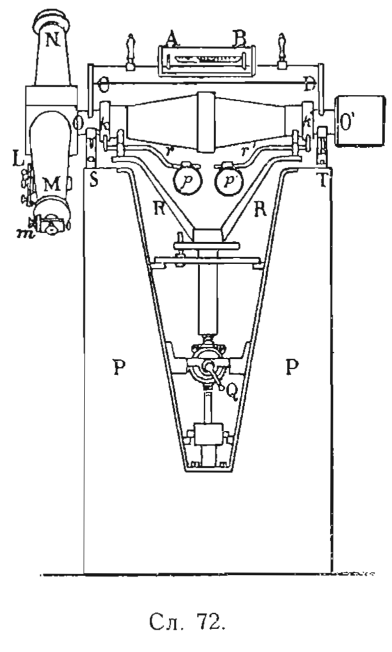
Сл. 70.

Да се дурбин стави на жељену висину служи мали круг L, који је утврђен или на обртној оси дурбина OO' (сл. 70.) или пак на самом дурбину MN (сл. 71. и 72.). У овом другом случају он је снабдевен алхидадом *aa* са либелом.

Ради превртања дурбина у лежиштима, подвлачи се по шинама машина за издизање, која је показана на сл. 70. тачкастим линијама; помоћу ње се дурбин издиже и одвачи уназад; затим се ван стубова обрне за 180°, понова се увлачи међу стубове и понова спуштају у лежишта чепови осе, али већ при супротном њиховом положају. Ова операција изискује доста времена и врши се ради одређивања колимационе грешке дурбина само изретка. Јер ради тога служи иначе *меридијанска*



Сл. 71.



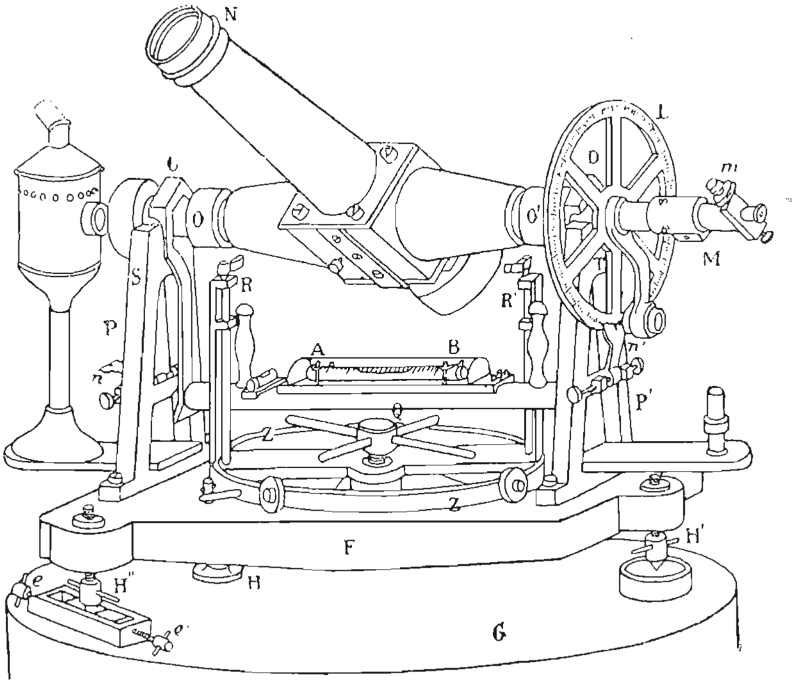
Сл. 72.

белега, која се ставља на растојању од неколико десетака метара од инструмента, тако удешена, да се може тачно да посматра кроз дурбин. Лако је разумети, да ће померање лика те белеге према средњем кончићу после превртања дурбина у лежиштима и дати дуплу величину колимационе грешке. Ова стална меридијанска белега служи у исто време и за откривања промена̂ азимута дурбиновог, ако би се евентуално десиле у току времена.

Сасвим је друкчија конструкција пасажнога инструмента, који је на Пулковској Опсерваторији постављен у првом вертикалу. Дурбин његов MN (сл. 72.), — снабдевен микрометром *m*, — постављен је на самом крају обртне осе 00′, усљед чега прибор CD са либелом AB не смета његовоме кретању по висини и допушта, да се при томе стално прате све промене нагиба осе 00′. На усеченом стубу PP удешена су лежишта S и T за чепове хоризонталне осе дурбинове, која се може да издигне и да се преврне помоћу машине за издизање RQR, удешене под осом у усеку стуба; при томе се дурбин преврне на другу страну тако брзо, да се успе да посматра при оба положаја дурбина чак и звезда, која се доста брзо креће.

53. Преносни пасажни инструменти.

Преносни пасажни инструмент бив. пулковског механичара Брауера снабдевен је преломљеним дурбином MN (сл. 73.) са објективом око 7^{cm} у пречнику те се помоћу њега могу да посматрају ноћу, при вештачком осветљењу његова поља гледања, и звезде до 7. па чак и 8. величине. Солидни месингани носачи P и P′, који држе хоризонталну осу 00′ тога дурбина, чврсто су утврђени за таблу F од ливеног жељеза, која се са своја три завртња H, H′ и H″ ставља на зидани стуб G. Под конични врх једнога завртња H ставља се плочица са малим коничним издубљењем, под други H′ — плочица са равном површином, по којој врх завртњев може слободно да клизи, под трећи пак H″— челични



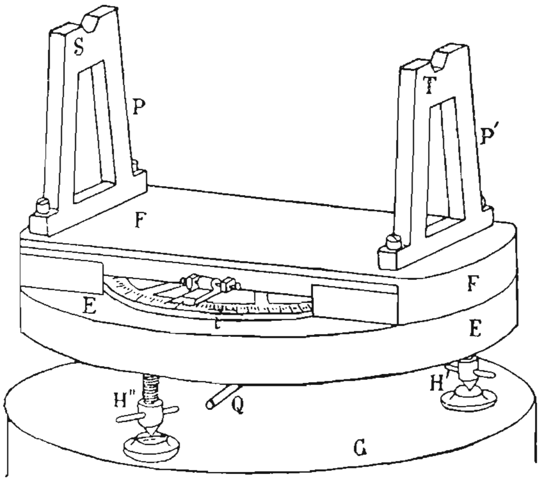
Сл. 73.

комад, са попречном удубљеном цртом, који се може да покреће у правоуглом раму помоћу завртњева *e* и *e′*. Помоћу свега овога дурбин инструмента може да се постави у жељени азимут; тај азимут може да се мења у границама ± 4°, не премештајући плочице, и оса OO′ може да се доведе у потребни хоризонтални положај.

На плочи F удешен је механизам за издизање и превртање осе, који се састоји из жељезног прстена Z са два носача R и R′, који, обртањем ручица Q подухватају осу OO′ и издигну је из њених лежишта тако, да се затим, окретањем прстена Z на точкићима за 180°, и оса за толико преврне те се затим, при том положају, пажљиво спушта поново у своја лежишта помоћу ручица Q. Висећа справа CD са либелом AB не скида се са осе OO′ ни при томе превртању нити за време посматрања звездâ. За стављање дурбина на потребну висину, на окуларном је његовом делу M утврђен круг L а на носачима P и P′ значке *n* и *n′* на шарнирима; дурбин се међутим никаквим завртњем не утврђује по висини већ слободно лежи у својим лежиштима S и T, не мењајући своју висину, пошто је добро уравнотежен.

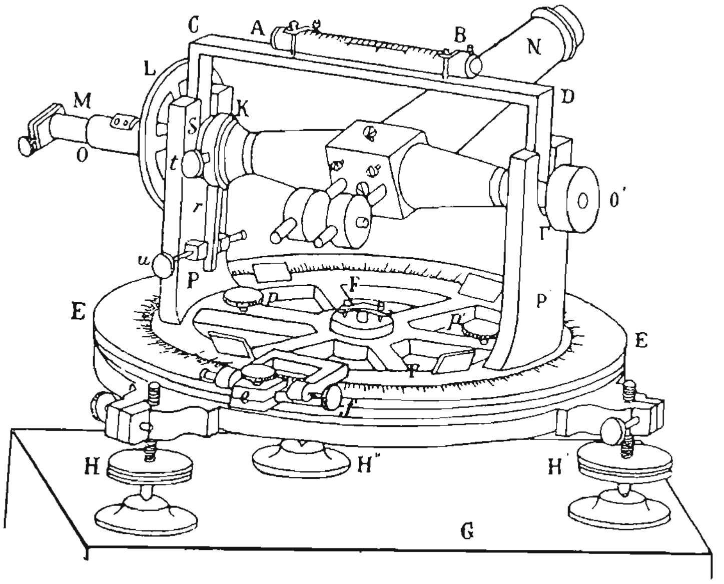
Окулар је снабдевен микрометром *m* са покретним паром врло блиских кончића за посматрање извесних звезда у средини међу њима; мрежа сталних пак кончића састоји се из девет вертикалних и 2 хоризонтална кончића. Покретом окуларне дијафрагме, на којој су ти кончићи утврђени, може се, помоћу нарочитих завртњића, да промени правац оптичке осе дурбина и да се на тај начин смањи колимациона грешка, ако је она доста велика, што је лако открити на овај начин: покретом целога инструмента треба ставити средњи кончић на какав удаљени земни предмет па, преврнувши дурбин, погледати, остаје ли он и тада на истом кончићу или је отишао устрану; помоћу микрометра пак може се измерити то скретање, које је равно дуплој вредности колимационе грешке. Уосталом, она се тачније одређује из самих посматрања звезда пасажним инструментом, о чему ће бити речи у глави XIV.

Пасажни инструменти, које је израђивао механичар Хербст по инструкцијама пулковског астронома Делена, одликује се од напред описанога тиме, што се код њих дурбин не вади из лежишта ради превртања, већ се сама плоча F са носачима P и P′ (сл. 74.) обрће приближно за 180°, после чега азимут инструмента излази, разуме се, унеколико друкчији. Циљ је ове конструкције, да сачува чепове дурбина од удараца, који се не могу избећи чак ни при најпажљивијем спуштању чепова у лежишта S и T. Као основа инструмента служи масивни круг од ливеног жељеза EE са три завртња H, H′ и H″ и са лимбом *l*, за приближно стављање дурбина у жељени азимут. Ради тога се плоча F, — која је иначе чврсто приљубљена уз основу E својом тежином, — олако издиже, помоћу полуге Q, за незнатну висину па се тада обрне око вертикалне осе за жељени број степени.



Сл. 74.

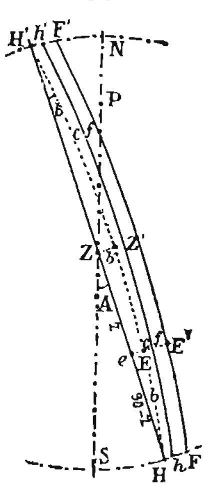
Код преносних пасажних инструмената, који нису намењени за посматрања високе тачности, нема микрометра са покнетним кончићем. Такав је например инструмент Ертлове конструкције, сл. 75. који још не излази из употребе ма да у многоме које чему не задовољава потребу. Диафрагма са кончићима његова окулара непомична је па се стога поправљање колимационе грешке врши само помоћу промене положаја призме (чл. 17.), што очевидно иде на штету како стабилности тога положаја, тако и каквоће ликова у дурбину. Носачи P и P′ за осу OO′ постављени су на унутрашњем, алхидадном кругу F, који се спаја са још масивнијим кругом E помоћу плочица (као кљешта) и завртња за спајање *e* са микрометарним завртњем *f*, и, помоћу још два завртња за спајање *p* и *p′*. Помоћу полуге *r* са завртњем за спајање *t* и микрометарног завртња *u* фиксира се такође положај дурбина по висини. Превртање дурбина у лежиштима S и T врши се просто рукама те изискује особиту пажњу и вештину, да се каквим неочекиваним ударом неби повредили чепови и да се неби изменио азимут инструмента. Јахаћа справа CD са либелом AB не допушта да се дурбин преводи кроз зенит те се стога мора скидати са осе при посматрању звезда око зенита.



Сл. 75.

54. Утицај инструменталних грешака.

Кад неби било никаквих грешака на пасажном инструменту, оптичка би оса његовог дурбина требала да описује на небесној сфери велики круг HZH′, који пролази кроз зенит Z места посматрања (сл. 76.) и састављала би са меридијаном места SZPN неки угао $\sphericalangle HZS = A$, који се назива *азимут пасажног инструмента.* Ако ли пак постоји извесан мали нагиб *b* обртне осе дурбинове према хоризонту, онда ће за толики исти угао $ZZ' = b$ да скрене од вертила HZH′ и велики круг HZ′H′, који у том случају описује оптичка оса дурбина. Тада ће се звезда E, у моменту њенога посматрања *на средњем кончићу,* налазити од вертикала HZH′ на растојању E*e*, које ће се (због вр. мале вредности *b*) изразити овако:



Сл. 76.

$$Ee = b \cos z,$$

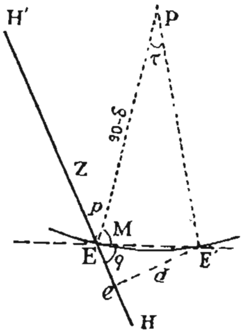
где *z* означава зенитно растојање звезде, које је увек доста добро познато.

Замислимо сад још и то, да угао између оптичке осе дурбина и његове обртне осе није раван 90° већ се разликује од 90° за вр. малу величину *c*, која се, — као што је већ раније речено, — зове *колимациона грешка* дурбина;

тада ће оптичка оса описивати на небесној сфери мали круг hh', паралелан са великим $HZ'H'$. Исто ће тако и свака друга линија визирања, која је у дурбину одређена којим *побочним кончићем* и која се налази на даном угловном растојању f од средњега, описати мали круг $FE'F'$ на растојању $(f+c)$ од великог круга $HZ'H'$. Због свега ће се тога растојање звезде E' од вертикала инструмента HZH', у моменту t' њенога посматрања на побочном кончићу, изразити (због малих вредности b, c и f) овако:

$$E'e = d = f + c + b \cos z \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (1.)$$

Да би се овако комплициране задаће одређивања времена или ширина из посматрања звезда у једном и истом вертикалу довеле на најпростији облик, треба, по датим t' и d срачунати онај момент t, када звезда E' сама дође до вертикала инструмента HZH', тј. када дође у положај E (сл. 77.). Кад замислимо кроз E, E' и пол P лукове великих кругова и кад означимо деклинацију звезде са δ, паралактички њен угао ∢ PEZ са p а угле ∢ EPE' и PEE' са τ и M, онда ћемо добити из троуглова EPE' и $EE'e$:



Сл. 77.

$$\sin EE' \sin M = \cos\delta \sin\tau$$

$$\sin EE' \cos M = \sin\delta \cos\delta \, (1 - \cos\tau)$$

$$\sin d = \sin EE' \sin (M + p) = \sin EE' \sin M \cos p + \sin EE' \cos M \sin p =$$

$$= \cos\delta \cos p \sin\tau + 2 \sin\delta \cos\delta \sin p \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

одакле

$$\sin\tau = \frac{\sin d}{\cos\delta \cos p} - 2 \sin\delta \, tgp \sin^2 \frac{\tau}{2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (2.)$$

а затим ће изаћи $\qquad t = t' + \tau.$

Као што се види, одређивање траженога размака времена τ постаје незгодно а понекад и сасвим немогућно за звезде, које секу кончиће дурбина или сам вертикал HZH' под врло оштрим углима $q = 90° - p$. У тим изузетним случајима решење напред споменутих задаћа захтева нарочите поступке, које ћемо расмотрити у XIV глави. Уопште пак, због мале вредности d, која не превазилази $15' = 1^m$, за рачунање ће τ довољни бити, — обзиром на бројне вредности коефицијената $\sec\delta \sec p$ и $\sin\delta \, tg\, p$, — ови приближни изрази, који произлазе врло просто из развијања у ред $\sin\tau$ и $\sin\frac{\tau}{2}$ у тачној формули (2.):

$$\tau = \tau_0 \ . \qquad (2.)'$$

$$\tau_0 = \frac{d}{\cos\delta \cos p} \ ; \ \tau = \tau_0 - \tfrac{1}{2} \sin\delta \, tgp \, \tau_0^2 \sin 1^s \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (2.)''$$

$$\tau = \tau_0 - \tfrac{1}{2} \sin\delta \, tg\, p \, \tau_0^2 \sin 1^s + \tfrac{1}{6} \tau_0^3 \sin^2 1^s \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (2.)'''$$

Формуле се $(2.)''$ и $(2.)'''$ понекад морају употребити за *свођење* посматрања̂ звезде, — која су извршена на побочним кончићима (E′), — на *средњи кончић* (E), због тога што $d = f$ може понекад да достигне до $1^m = 60^s$; за исправку пак момента t' због утицаја величина c и $b \cos z$, — које су увек вр. мале, — потпуно је довољна формула $(2.)'$. Може се напоменути још, да се све те формуле упрошћују при стављању пасажног инструмента у меридијан, пошто ће тада бити $p = 0$.

Што се тиче других погрешности пасажнога инструмента, осим нагиба b хоризонталне његове осе и колимационе грешке c, напоменућемо ово: Правилни, кружни облик пресека чепова од истог је значаја овде, као што је и савршенство поделе кругова код угломерних инструмената, због тога, што ако та погодба није задовољена, оптичка би оса требала да описује на небесној сфери неку вијугаву линију. Грешке које отуд произлазе и које се увећавају у току времена због поступног квара чепова, обично се рачунају просто као случајне, пошто их је врло тешко испитати и узети у рачун.

Услед утицаја силе теже на хоризонталну осу, на сам дурбин, а ако је преломљен (на лакат) то и на његову призму, могу да се десе разне промене у правцу оптичке осе дурбина, при разном његовом нагнућу, — што се уопште зове *бочним изгибањем* дурбина. Оно утиче на сличан начин као и неправилности чепова хоризонталне осе.

Најзад свака мала промена $\triangle A$ у азимуту A пасажног инструмента, која произлази од недовољне солидности његове подлоге, мора да изазове промену у напред реченом растојању звезде d:

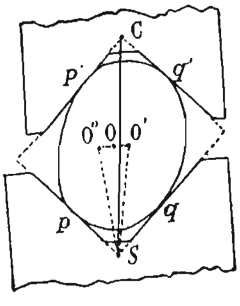
$$\triangle d = \triangle A . \sin z$$

која повећава случајну грешку посматрања звезде. Као што се види, посматрања звезда која су ближа зениту сигурнија су у том погледу од осталих.

55. Испитивање правилности чепова.

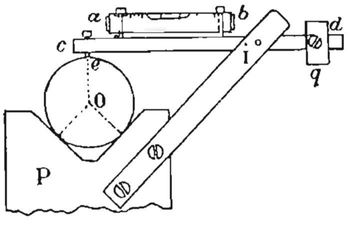
Из чл. 26. ми већ знамо како се одређује неједнакост пречника чепова хоризонтане осе пасажног инструмента помоћу јахаће либеле његове и како се то узима у рачун при изводу њеног нагиба b; али је пре свега потребно испитати, да ли су ти чепови довољно правилни. То се може извршити, или помоћу исте справе са либелом која служи за одређивање нагиба осе, или помоћу помоћне справе са попречном либелом, или, најзад, помоћу нарочито за то удешеног микроскопа.

Ако се дурбину буду давали различити угли нагиба па се при сваком таквом његовом положају буде очитавало стање јахаће (или висеће) либеле, онда ће различитост тих очитавања и послужити за оцену неправилности чепова. Али, обрнуто, судити о правилном кружном облику чепова, по непромењивом стању те либеле још је немогућно, јер пресек једнога чепа може бити, на пример, елипса те при обртању осе чини осетна колебања њена само по азимуту, не показујући у исто време никаквог осетног утицаја на либелу. И заиста, правоугли урези у лежишту и у ножици либеле образују међу собом правоугаоник $Spp'Cq'q$ (сл. 78), који тангира чеп својим странама; дијагонала пак CS правоугаоника, описаног око елипсе помоћу полуоса a и b (као што се то доказује у аналитичкој геометрији), увек је равна сталној вредности $\sqrt{a^2+b^2}$; према томе, при обртању елиптичког чепа с малом спљоштеношћу $\frac{a-b}{a} = c$, како њен центар 0, тако и ножица $p'Cq'$ јахаће либеле премештаће се осетно само у хоризонталном правцу али по висини ниуколико. Одатле излази да је испитивање чепова пасажног инструмента помоћу његове либеле недовољно.



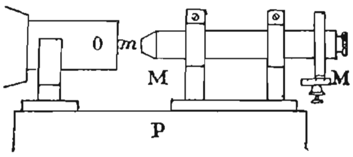
Сл. 78.

Много се лакше можемо убедити о правилности свакога чепа посебице, ако привремено утврдимо за носач P пасажног инструмента једну обртну око осе I полугу cd са либелом ab сл. 79. и са против-тегом (контра балансом) q, тако, да њено дугменце e додирује чеп 0, не притискујући га сувише. При различитим зенитним растојањима дурбина под то ће дугменце e подилазити различите тачке попречнога пресека чеповог те ће и показања либеле ab бити више или мање различита, ако тај пресек није круг. На тај се начин могу открити најфиније неправилности чепова, која изазивају угловна колебања осе $00'$ свега $\pm 0''.1$.



Сл. 79.

По каткад се неправилности чепова великих пасажних инструмената испитују помоћу микроскопа MM, који се утврђује за камени стуб P, који држи обртну осу (сл. 80.). Помоћу микрометра микроскоповог одређује се с великом тачношћу облик криве линије, коју описује ма каква тачка m равнога краја осе 0; по тој се пак кривој може потпуно тачно судити о resp. колебањима како осе $00'$, тако и оптичке осе дурбина пасажнога инструмента.



Сл. 80.

56. Одређивање растојања међу кончићима.

Места где треба да буду кончићи од паучине означују се увек на окуларној диафрагми удубљеним цртицама помоћу машине за поделу; због тога се скоро увек може гарантовати за међусобну паралелност њихову, као и за перпендикуларност попречних кончића. Посматрачу остаје само да постави ту диафрагму у фокалној равнини објектива дурбиновог (чл. 15.) тако, да кончићи заузму потребан за њих правац а затим да што тачније одреди угловна растојања свију побочних вертикалних кончића од средњега.

Вертикалност се ма ког кончића лако контролише на тај начин, што се њиме навизира на какав удаљени земни предмет (или на скоро непокретну поларну звезду) па се при кретању дурбина по висини гледа, да ли тај предмет непрестано остаје на кончићу или од њега одступа; ако ли је инструмент постављен у меридијану онда је лако проконтролисати и хоризонталност попречних кончића по кретању дуж њих какве звезде са незнатном деклинацијом. Уосталом мали нагиб кончића неће рђаво утицати на резултате посматрања, ако се само пролаз звезда преко кончића буде увек посматрао у оном малом размаку међу попречним кончићима.

Кад је инструмент постављен у меридијан, онда се растојање од побочних кончића до средњега одређује обично из посматрања пролаза многих звезда са датом деклинацијом δ, као што је то већ изложено у чл. 18. Из посматрања једне звезде, која се креће са брзином $V = \cos\delta$, растојање се f од каквог побоч. кончића до средњега добива наиме, на основу формуле (2.) чл. 47. са средњом грешком

$$\varepsilon_s \sqrt{2} = \sqrt{2}\ \sqrt{\varepsilon^2 + (Ve)^2} \text{ па, према томе са тежином } g = \frac{1}{{\varepsilon_s}^2};$$

а из многих вредности $f_1, f_2, f_3, \ldots . f_m$, које су нађене из посматрања n звезда са деклинацијама $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots . \delta_n$ добиће се

$$f = \frac{g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots . + g_n f_n}{g_1 + g_2 + \ldots . + g_n}$$

По изразу за тежину g могло би се закључити, да је за ову сврхуповољније користити се звездама које се крећу са врло малом брзином V, тј. циркумполарним. Али, ако се узме у обзир, да је за пролаз такве звезде преко целе мреже кончића потребно тако много времена (при $V = \frac{1}{50}$, као нпр. за Поларну, и при $f = \pm 12'$ оно износи око $1\frac{1}{3}$ часа), да се увек не може гарантовати за постојанство азимута инструмента у току свега тога времена; ако се затим узме у обзир још и то, да се за исто време може испосматрати неколико звезда, које се брже крећу, то излази, да су најпогодније звезде са средњим брзинама V од $\frac{2}{3}$ до $\frac{1}{3}$*), тј. са деклинацијама δ од 50° до 70°. Уопште говорећи, довољно је употребити око 4 часа на посматрање таквих звезда, да би се сва тражена растојања f одредила се средњим грешкама, које не би премашале $\pm 0\overset{s}{.}015$.

57. Зенит-телескоп.

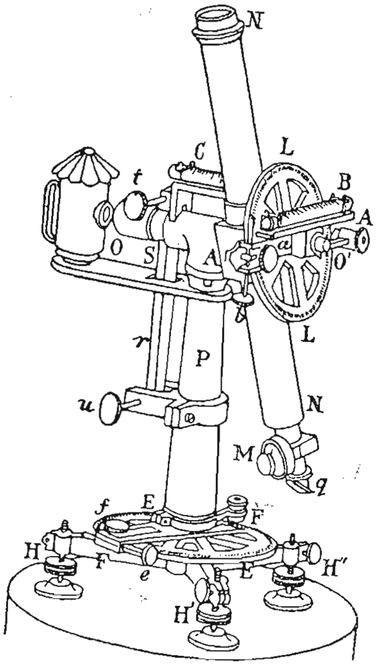
Добар астр. дурбин, — прав или преломљен, — са привремено за њега утврђеном осетљивом либелом, — то су главни саставни делови *зенит-телескопа,* који је намењен за посматрање звезда, чије су висине у извесном моменту приближно подједнаке. Све је остало у његовој конструкцији од другостепене вредности и служи само ради олакшања самих посматрања.

---

*) Заиста, ако претпоставимо, да је за одређивање растојања међу кончићима потребно утрошити извесно време T и да ће посматрања n звезда, — које се крећу са неком брзином V, — тећи једно за другим без прекида, онда бисмо имали да је $n = V . T$; због тога би се свако од растојања f добило са средњом квадратном грешком

$$\varepsilon_f^2 = \frac{2\varepsilon_s^2}{n} = \frac{2}{T}\left(\frac{\varepsilon^2}{V} + V.e\right),$$

која би била најмања при $V = \frac{\varepsilon}{e}$. На тај начин, при сразмерно малом увеличању дурбина $W = 56$ и при посматрању пролаза по слуху са бројањем полусекунд. удара хронометра, добило би се на основу реченога у чл. 47. да је $V = \frac{3\overset{s}{.}0}{56 \times 0\overset{s}{.}08} = \frac{2}{3}$ а при $W = 75$ и $e = \pm 0\overset{s}{.}12$ да је $V = \frac{3\overset{s}{.}0}{75 \times 0\overset{s}{.}12} = \frac{1}{3}$.



Сл. 81.

Прав дурбин NN (сл. 81.) са утврђеним за њега вертик. кругом тражиоцем L за постављање дурбина по висини, окреће се око кратке хоризонталне осе OO', коју држи стуб P; овај се пак окреће око вертикалне осе непокретне основе са азимуталним кругом-тражиоцем E, што све почива на три завртња H, H' и H''. Алхидада FF, која је у вези са тим стубом, завртањ f за спајање покретне алхидаде са непомичним лимбом и микрометарни завртањ e служе за постављање дурбина у вертикал под жељеним азимутом и за фине азимуталне покрете, како би посматрана звезда остајала увек у средини поља гледања. Ради боље угодности при посматрању звезда, на окулар се дурбина NN намешта мала призма q (чл. 17.).

По кругу се L премешта алхидада A са либелом B ради стављања дурбина на жељено зенитно растојање; ради тога треба поставити ту алхидаду на потребно прочитање круга помоћу завртња за фиксирање a и микрометарног b па обртати дурбин по висини дотле, док мехур либелин не дође на средину. За утврђивање (фиксирање) дурбина у том положају служи завртањ t, којим се везује за осу OO' прстен S од којега наниже иде полуга r са микрометарним завртњем u. Овим се завртњем u и доводи увек дурбин са либелом B у првобитни положај, чим се он промени услед извесне нестабилности стуба или статива на коме је постављен инструмент. Најзад, мала јахаћа либела C на оси OO' служи за довођење осе стуба P у потребни вертикални положај, на начин како је то било објашњено у чл. 35. гл. III.

Дурбин зенит-телескопа треба да буде снабдевен мрежом од неколико хоризонталних кончића за посматрање пролаза звезда, које се крећу по висини доста брзо, затим треба да има микрометар M са покретним кончићем за посматрање звезда у близини меридијана, при чему се хоризонталност кончића контролише на исти начин као и код пасажног инструмента. Угловна се растојања међу кончићима могу одредити из пролаза звезда преко њих, које се крећу приближно у перпендикуларном правцу према хоризонту (чл. 18.); али, као што ћемо даље (гл. XI) видети, тачно знање тих растојања обично није ни потребно. Што се тиче вредности обрта микрометарног завртња M, то се она може одредити, независно од њих, из посматрања напред речених звезда око момената њихових елонгиција. Ради тога је најпростије померати један за другим покретни кончић микрометра за извесни цели број обрта завртња па при сваком његовом положају запажати по хронометру тачно момент пролаза изабране звезде преко тог кончића, очитавајући при томе и стање либеле B, пошто у висини дурбина могу да произађу веће или мање промене услед недовољне стабилности инструмената. Из многих таквих посматрања могу да се изнађу и систематске неправилности у ходовима микрометарног завртња M (чл. 32.), ако оне постоје, и, онда их треба узимати у обзир при свима даљим мерењима помоћу тог микрометарног завртња.

58. Релативна корист од посматрања зенит-телескопом.

Зенит-телескопом се посматра увек само извесан пар звезда, које се налазе у неком моменту на једној и истој висини; ради тога треба само окренути његов дурбин око вертикалне осе, да би се одмах после посматрања прве звезде (тог пара) на неколико кончића (или пак микрометром) одмах затим извршила слична посматрања и друге звезде. При томе ће се и најмање промене у висини дурбина открити, прочитањем стања либеле, која је у чврстој вези с њиме па то са потпуном тачности узимати у обзир при даљим бројним срачунавањима резултата из тих посматрања; због тога се тај инструмент може да поставља и на просте дрвене стативе.

Према томе, *мала разлика висина* двеју како треба изабраних звезда, која се мери зенит-телескопом, — ослањајући се само на стабилност привремене везе либеле B за дурбин и на познавању вредности поделе либеле а у извесним случајима и на познавању вредности обрта микрометра M, — не подлежи никаквим другим инструменталним грешкама. Услед тога, како одређивање времена, тако и ширине места помоћу тог инструмента треба, уопште говорећи, да буду сигурније него ли помоћу пасажнога инструмента са дурбином исте оптичке силе и подједнаке каквоће.

ГЛАВА VIII.

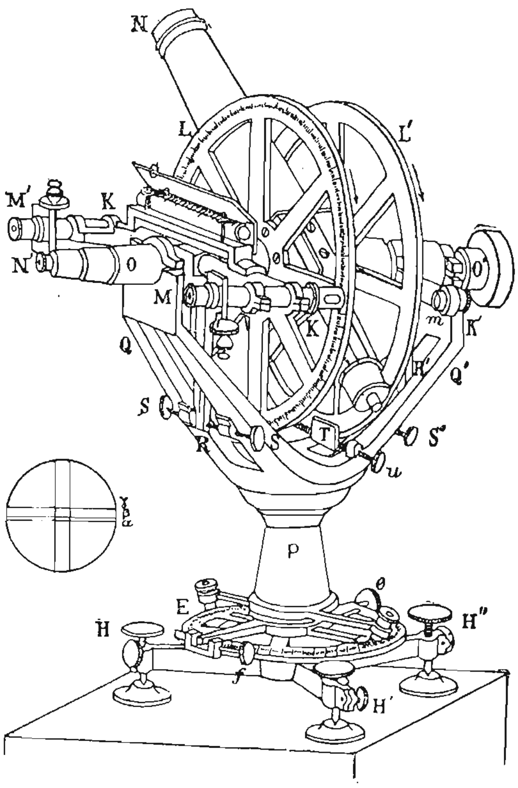
ПРЕНОСНИ ВЕРТИКАЛНИ КРУГ И УНИВЕРСАЛНИ ИНСТРУМЕНТ.

59. Репсолдов вертикални круг.

Бивши директор Пулковске Опсерваторије О. **Струве** први је дао идеју о изради преносног инструмента, који би служио специјално за тачна мерења зенитних растојања звездâ, у циљу одређивања времена и ширине места. **Репсолд** је по тој идеји конструисао вертикални круг, којим су се са великим успехом служили руски астрономи, геодете и хидрографи за одређивање географ. положаја великог броја тачака.

На солидном троношцу HH′H″ (сл. 82.) са азимуталним кругом-тражиоцем E, подељеном цртицама од 10′ до 10′, окреће се око вертикалне осе стуб P, снабдевен алхидадом са два нонијуса и нарочитим рукавцем са завртњем *e* за спајање горњега покретног за доњи непокретни део инструмента и микрометарног *f*, који служе за стављање покретног дела инструмента у жељени азимут. Над стубом се P уздижу масивни носачи Q и Q′ са урезима за чепове хоризонталне осе OO′, око које се окреће преломљени дурбин NN′ са објективом од 4—5 cm. у пречнику (увеличања око 50 пута). Са обе стране дурбина утврђена су два круга L и L′, од којих је један, који је окренут окулару N′ и намењен мерењу углова, подељен цртицама на растојању од 4′ до 4′ једна од друге; други пак L служи за приближно стављање дурбина на жељено зенитно растојање и подљен је крупније тј. од 10′ до 10′.

Два микроскопа M и M′ са микрометрима, који служе за очитавање круга L (детаљно су описани у чл. 30, сл. 53. и 54.), усађени су на хоризонталном вратилу KK, које је својим тулцем навучено на осу OO′ и које се, помоћу дугачке полуге R са микрометар. завртњем S, доводи увек у хорилонтални положај, што се констатује либелом C, која је на њему утврђена. За очитавање пак круга — тражиоца L′ служе два нонијуса *m* и *m′*, који су утврђени на сличноме вратилу K′ (само без либеле) са полугом R′ и микрометр. завртњем S′, помоћу којега се прочитања на томе кругу могу да доведу у потпуну сагласност са прочитањима главнога круга. Круг се L′ утврђује клештама T помоћу завртња *t*, који се налази са задње стране инструмента па се стога на цртежу и не види; на тај се начин утврђује по висини и сам дурбин NN′; помоћу микрометарног пак завртња *u*, који пролази кроз клешта T, дурбин се, после тога, може само лагано, фино и равномерно кретати по висини.



Сл. 82.

Дурбин је снабдевен мрежом од два вр. блиска кончића α и β (са углавним растојањем од 15″ до 20″), за тачно стављање посматраног објекта у средину између њих, и из два вертикална кончића на знатном растојању један од другога, који служе само за ограничење простора. поља гледања, где треба тај објект да се посматра. Уосталом, ако се жели, да се тај инструмент употреби и као зенит-телескоп, онда се, за посматрање звезда, које се брзо крећу по висини, поред α и β додаје још (као што је показано на сл. 82. са стране) и трећи, паралелни са њима, кончић γ а каткад и неколико хоризонталних кончића.

У конструкцији се тога инструмента открива на пракси само један мали недостатак, који се састоји у томе, што је вратило KK са либелом и са микроскопима навучено на обртну осу OO′ па због тога, при свакој промени зенитнога растојања дурбина, оно не остаје потпуно непокретно, већ га та оса својим трењем унеколико повлачи за собом и тиме више или мање мења стање либелино. Код сличних пак инструмената мањих димензија, које Репсолд у последње време израђује, овај је недостатак потпуно отклоњен тиме, што су микроскопи са либелом утврђени непосредно за носач Q, који држи обртну осу OO′ дурбина. Вертикални је круг на инструментима тога новога типа подељен на 10-минутне интервале; један обрт микрометар. завртња код сваког микроскопа раван је приближно $5' = 300''$, нормална пак вредност једнога делића његова добоша, подељеног на 100 делова, равна је 3″.

60. Мерење зенитних растојања.

Ма како да је постављен вертикални круг, на каменом стубу или на масивном дрвеном стативу, стање се либеле C алхидаднога вратила KK може више или мање да промени; због тога, да би се, по прочитањима микроскопа M и M′, могло судити о положају лимба L и дурбина N по висини, треба увек *сводити средње од тих прочитања на* такво *нормално*, које би се добило при положају мехура либеле C строго на средини њене цевчице. Па пошто за посматрача, који се налази на страни окулара, позитивно прочитање либеле *i* означава повишење деснога микроскопа M и понижење левога M′, онда је — при растућој подели лимба у правцу стреле на сл. 82. — потребно то прочитање *i*, — изражено у луч. секундама, — додавати прочитању извршенсме на лимбу, непосредно са његовим знаком.

Нека је нпр. вредност полуделића либеле равна $1''.2$ а вредност једнога обрта микрометра код оба микроскопа*) равна $2' = 120''$ (чл. 31.) па нека је посматрач извршио посматрања:

на либели	на микроскопу M	на микроскопу M′
$-12.5 + 9.3$	први пар кончића $48' + 1^{об.}\, 31^{\partial}.3$	$48' + 0^{об.}\, 52^{\partial}.4$
$i = \overset{1/2\partial}{-3.2}$	други „ „ 2.1	22.3

а на кругу-тражиоцу $57°50'$.

Тада ће се тачно прочитање вертикалнога круга добити овако:

средње прочитање са микроскопом M . . .	$57°48' + 1^{об.}\, 31^{\partial}.70$
„ „ „ „ M′ . . .	$48 + 0 \quad 52.35$
у средњем . . .	$57°50' \quad 24''.05$
поправка за прочитање либеле	-3.84
дефинитивно тачно прочитање	**$57°50'\ 20''.2$**

Претпостављајући, да су прочитања лимба на овај начин увек исправљена, да видимо сад, како ће се наиме добити зенитно растојање z каквога непокретног предмета, пошто се пре тога вертикална оса инструмента доведе у потребни вертикални положај (чл. 25.) помоћу алхидадне либеле C са завртњима H, H′ и H″. Оно прочитање на кругу, које би се добило при строго вертикалном правцу оптичке осе дурбина, назваћемо *местом зенита* и означићемо га са Z.

Ако се предмет налази с леве стране посматрача, који гледа кроз дурбин, онда је за визирање на њега потребно нагнути дурбин такође улево за угао z; због тога ће се добити прочитање $L = Z + z$. Ако затим посматрач пређе на другу страну инструмента, окрене горњи део инструмента око вертикалне осе за 180° и изврши визирање на исти предмет спуштањем дурбина, сад већ у

---

*) Услед потреса и других узрока, којима је подвргнут инструмент при транспортовању са једнога места на друго, вредност се обрта микрометр. завртања свакога од његових микроскопа може изменити доста осетно. Као контрола њене сталности а у исто време и као средство за њено одређивање, — не помоћу специјалних испитивања као у чл. 31. већ из самих посматрања, која су извршена са тим инструментом, — може да послужи разлика између прочитања a добошевог, које се добива стављањем првог пара кончића на какву цртицу лимба n и прочитања $b = b_1 - 30^{\partial}$, које се добива стављањем другога пара кончића на какву цртицу $n + 4'$, пошто се растојање међу самим паровима кончића, — изражено у подеоцима добоша и равно $90\partial + \delta$ (чл. 32.), — може сматрати као непромењљиво. Заиста, ако се ослободе прочитања a и b од периодичких грешака добоша микрометровог (чл. 32.), онда би строго требало да изађе:

$$4' = 240'' = [a - b + (90 + \delta)]\, \mu = [120 + \delta + (a - b_1)]\, \mu,$$

где μ означава вредност једнога делића добошевог; због тога, ако се из доста знатнога броја s таквих дуплих стављања парова кончића, добије у средњем $\frac{1}{s} \Sigma (a - b_1) = c$, онда ће се μ одредити овако

$$\mu = \frac{240''}{120 + \delta + c} = 2'' \left(1 + \frac{\delta + c}{120}\right)^{-1} = 2'' \left(1 - \frac{\delta + c}{120}\right).$$

Ради објашњења реченога, претпоставимо, да је у наведеном нашем примеру код микроскопа M растојање међу паровима кончића било равно $91^{\partial}.1$ тј. да је $\delta = +1^{\partial}.1$, тада ће се добити: $b_1 = b + 30 = 32^{\partial}.1$, $a - b_1 = c = 0^{\partial}.8$, $\delta + c = +0^{\partial}.3$ и

$$\mu = 2'' \left(1 - \frac{0.3}{120}\right) = 2'' \left(1 - \frac{1}{400}\right).$$

десну страну, онда ће се добити прочитање $R = Z - z$. Из таква ће се два визирања, према томе, и одредити обе непознате:

$$Z = \frac{L+R}{2} \quad \text{и} \quad z = \frac{L-R}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1.)$$

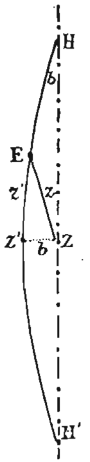
Што се тиче средње случајне грешке E_z, која се садржи како у L тако и у R, то она зависи од грешака у причитањима либеле и круга помоћу оба микроскопа (чл. 31. и чл. 60.) а највише од средње грешке визирања дурбином на посматрани предмет, која (чл. 15.), при увеличању дурбина $W = 50$, треба да буде око 0.″6; према томе, код великог преносног круга Репсолдовог, вредност се за E_z треба да креће од ± 0.″7 до ± 1.″0, што зависи од каквоће ликова и њиховог оцртавања.

Да би се резултати мерења z ослободили од утицаја малих поступних промена места зенита Z, који произлазе највише због непотпуне сталности места нуле на либели C, и, да би се ослабио такође и утицај случајних грешака визирања и прочитања на те резултате, — обично се врши једно или 2 визирања дурбином на предмет при положају инструмента L, затим 2 или 4 визирања при положају R и понова једно или 2 при положају L, — или у обрнутом реду: R, L, L и R.

Како се из посматрања добивају зенитна растојања звезда и небесних тела, која се мењају више или мање брзо у току времена, — о томе ће бити речи у глави XI и XII.

Осим напред споменутих случајних грешака, на мерено зенитно растојање z могу утицати још и различите инструменталне грешке, наиме: 1.) нагиб b хоризонталне обртне осе дурбина $00'$, 2.) колимациона грешка c, тј. неперпендикуларност оптичке осе дурбина на обртну осу $00'$, 3.) неперпендикуларност равнине лимба L на осу $00'$, 4.) систематске грешке лимбове поделе и 5.) деловање теже на дурбин.

61. Утицај нагиба и колимационе грешке.



Сл. 83.

Ако је обртна оса дурбинова нагнута према хоризонту за мали угао b, оптичка ће оса дурбина, која је перпендикуларна на обртну осу, описивати на небесној сфери, уместо вертикала HZH', велики круг $HZ'H'$ (сл. 83.), чија се највиша тачка Z' налази од истинитог зенита места посматрања Z на растојању $ZZ' = b$; стога се инструментом у том случају мери не истинито зенитно растојање $EZ = z$ предмета E, већ лук $EZ' = z'$ нешто мањи од z. Та разлика између хипотенузе z и катете z' правоуглог троугла $ZZ'E$, — због мале катете b и угла E који наспрам ње лежи, — изразиће се у лучним секундама приближно овако:*

$$z - z' = \frac{E^2 \sin 1''}{4} \sin 2z = \frac{b^2}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} z$$

или

$$z - z' = \frac{b'^2}{115} \operatorname{cotg} z, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2.)$$

где b' означава нагиб, изражен у лучним минутама.

---

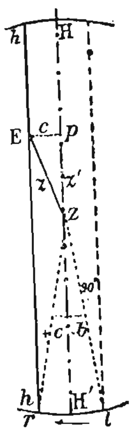
*) Теорни део Курса Астрономије, — глава III. —

Према томе за зенитна растојања, која су већа од 5° ($cotg\ z < 10$) и при $b' < 1'$, грешке ће $(z—z')$ бити мање од $\frac{1''}{10}$, тј. потпуно неосетне; пошто, се пак код инструмената, који су изашли из руку добрих механичара, можемо ослонити на тачност до $1'$ у перпендикуларности хоризонталне осе OO' на вертикалну, то је пре сваког посматрања потребно увек довести вертикалну осу тачно у вертикални положај, да би се пренебрегла грешка $(z—z')$. Уосталом, уз вертикални круг Репсолдов иде увек и јахаћа либела за непосредно одређивање нагиба b а и за одређивање неједнакости чепова осе OO', као и на пасажном инструменту, што је у ствари потребно само за азимутална посматрања, која се понекад врше и тим Репсолдовим инструментом. Овом се јахаћом либелом посматрач може и уверити, да ли је обртна оса заиста хоризонтална, када је вертикална доведена довољно тачно у вертикални положај.

Претпоставимо сад, да је оса OO' тачно хоризонтална али да постоји само колимациона грешка дурбина c, усљед које оптичка оса дурбинова описује на небесној сфери мали круг hEh' (сл. 84.), паралелни са вертикалом HZH'. Тада ће уместо истинитог растсјања $ZE = z$ инструментом бити измерен лук $Zp = z'$, који се рачуна по кругу HZH' до перпендикуларне $Ep = c$, те ће се, слично са пређашњим, разлика $(z—z')$ изразити из троугла EpZ овако:

$$z—z' = \frac{c''^2}{2} sin\ 1''\ cotg\ z = \frac{c'^2}{115} cotg\ z\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (3.)$$

Према томе ће и утицај колимационе грешке, — ако је она мања од $1'$, — бити потпуно неосетна при $z > 5^\circ$. Њу је увек лако смањити премештањем дијафрагме са кончићима помоћу завртњића нарочито за то удешених; да се пак приближно одреди и њена величина, довољно је навизирати дурбином на какав земни предмет ($z = 90^\circ$) при два супротна положаја инструмента, па ће разлике прочитања r и l (сл. 84.) хоризонталнога круга-тражиоца дати удвојену величину c.



Сл. 84.

Из реченога излази, да је при мерењу зенитних растојања (а тако исто и при посматрањима са зенит-телескопом) потребно увек, да се предмет посматра тачно у средини онога простора, који је ограничен двама вертикалним кончићима мреже.

На тај начин, мали нагиб b хоризонталне осе и незнатна колимациона грешка c дурбина могу имати осетна утицаја на мерена зенитна растојања само у оним вр. ретким и изузетним случајима, када су сама та зенитна растојања врло мала.

62. Утицај лимбових погрешака.

Утицај неперпендикуларности лимба L на обртну осу OO' на тачност његових очитавања још је мања од утицаја колимационе грешке и нагиба осе OO'. И заиста, ако је лимб нагнут према вертикалној равнини, која пролази кроз посматрани предмет, под незнатним углом α и пресеца је по линији, којој одговара прочитање A на кругу, онда ће се сваки лук $(L — A)$ или пак $(R — A)$, рачунат од те линије, разликовати од његове пројекције на вертикал за величину

$$x'' = \frac{\alpha''^2 \sin 1''}{4} \sin 2\,(\mathrm{L} - \mathrm{A}) = \frac{\alpha'^2}{229} \sin 2\,(\mathrm{L} - \mathrm{A}), \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (4.)$$

која чак при $\alpha = 5'$ не превазилази $\frac{1}{9}''$. Али се такав знатан нагиб лимба према оси $00'$ никако не може претпоставити код добро израђених инструмената; ако би се пак он и показао као такав, усљед непажљиво насађеног лимба на осу, онда би се то лако открило помоћу микроскопа M и M′, по променљивости вредности обрта њихових микрометара при разним нагибима дурбина (чл. 31.).

Систематске грешке лимбове поделе на Репсолдовим круговима не превазилазе $\pm 2''$ Утицај би се њихов могао још ослабити мерењем зенитнога растојања у шест различитих положаја лимба L (чл. 35.), јер је он утврђен за осу дурбина са 6 завртања, који образују међу собом правилни шестоугаоник (код најновијих Репсолдових кругова он се може померати и на произвољан број степени). Али се тако обично и не поступа, јер се при одређивању времена и ширине места, како систематске грешке поделе, тако и грешке, које произлазе од повијања дурбина, много простије искључују самим методама одређивања, као што ћемо то видети у главама XI и XII.

63. Утицај повијања дурбина.

Код правог дурбина, чим је он у неколико нагнут, сила ће теже повијати оба његова краја наниже. Кад би се оптички центар објектива спуштао при томе за толико исто за колико и центар мреже кончића, онда би правац оптичке осе дурбина остајао исти, као да повијање и не постоји; међутим, строго говорећи, то се не може очекивати ни при потпуно једнаком спољњем изгледу објективне и окуларне половине дурбина. Код преломљеног пак дурбина то померање оптичке осе, које зависи од нагнућа дурбина, може да буде доста велико, јер сила теже делује углавноме на објективни део бурбина а тако исто и на призму.

Грешке $\triangle$, које отуд произлазе у мереним зенитним растојањима z, уопште говорећи, доста се добро изражавају формулом

$$\triangle = g \,.\, \sin z \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5.)$$

где g означава величину максималног повијања при хоризонталном положају дурбина; понекад пак овакав израз за $\triangle$ излази недовољан те је потребно да му се додаје још и члан $f \,.\, \cos z$. Исто тако усљед деловања теже треба да произађу и неке деформације на самоме кругу, којим се мере вертикални угли; али се оне запажају само на великим круговима инструмената, који се употребљују на опсерваторијама. Тада се грешка $\triangle$, која произлази од укупног деловања повијања и дурбина и круга, изражава још сложнијом периодичком функцијом, која садржи чланове са синусима и косинусима удвојених и утројених лукова z, па се помоћу њих одређују стални коефицијенти у њима, или из посматрања звезда у *вештачкоме живином хоризонту,* при чему мерено зенитно растојање излази равно $180° - z$, или пак помоћу тако званих *колиматора,* тј. помоћу два помоћна дурбина, који се стављају са обе стране инструмента који се испитује тако, да им се оптичке осе потпуно поклапају. У том случају, из визирања дурбином инструмента на хоризонталне кончиће једнога и другога колиматора треба да се добију зенитна растојања, која се разликују међу собом равно за 180°. Ова се друга метода може понекад доста добро да примени на преносни инструмент за одредбу коефицијента *g* у изразу (5.).

64. Теодолити и универсални инструменти.

Преносни инструмент, који је намењен за тачна мерења хоризонталних углова између небесних тела или између разних земних предмета, зову се *теодолити*. Стварни са̂ставни његови делови су ови: добро подељени хоризонтални круг, постављен на троношцу са три завртња и алхидадни круг са нинијусима или микроскопима, за очитавање лимба, који се окреће око вертикалне осе заједно са правим или преломљеним дурбином, за визирање на предмете који се посматрају, и са јахаћом либелом, за одређивање нагиба хоризонталне, обртне осе дурбина, сличне оној на пасажном инструменту. Троножац, који на себи држи лимб, снабдевен је — ма да не и увек — тако званим *контролним дурбином* ради контролисања непомичности положаја лимба при визирању главним дурбином на разне предмете. Али, ако се на горњем, алхидадином делу теодолита налази још и вертикални лимб са алхидадом и њеном либелом, за тачно мерење зенитних растојања, онда такав теодолит добива назив *универсалног инструмента* или *алтазимута* (за мерење и висина и азимута).

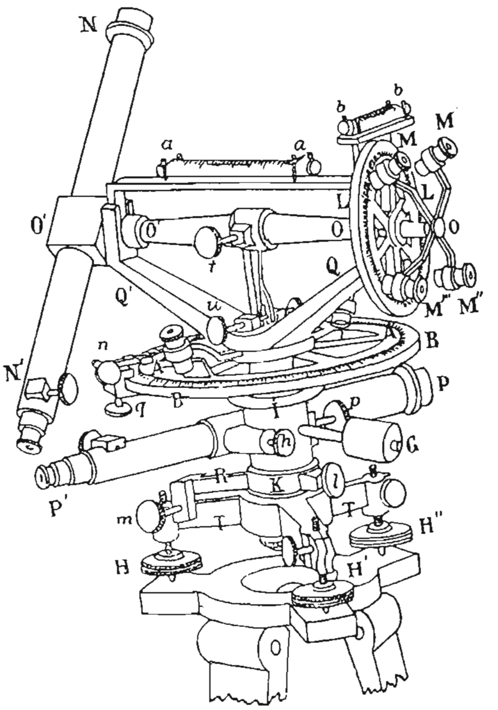
Код великих универсалних инструмената главни (горњи) је дурбин намештен увек на хоризонталној оси централно па је понекад прав а понекад преломљен; код малих пак инструмената прав се дурбин намешта с бока на једном крају хоризонталне осе, ради згоднијег посматрања небесних тела. За очитавање хоризонталних и вертикалних кругова новији су инструменти, чак и малих димензија, снабдевени микроскопима, али ипак још не излазе из употребе и они, на којима се читања врше помоћу нонијуса. Контролни дурбин, помоћу којега је потпуно осигурана тачност мерења хоризонталних углова чак и при несолидној основи на којој се стaвља инструмент, чини неопходни саставни део теодолита и универсалних инструмената, које употребљују руски астрономи и геодете; у другим пак земљама посматрачи се задовољавају и без њега, претпостављајући, да постављају инструмент, слично пасажноме, на камени или врло солидни дрвени стуб и рачунајући да је тада контролни дурбин излишан.

Уосталом суштина се ствари при мерењу углова не мења због ових или оних детаља у конструкцији инструмената; због тога ћемо се у даљем излагању задовољити описом само једнога од малих универсалних инструмената са вернијерима, за очитавање кругова, и једнога већег, који је снабдевен ради тога са микроскопима.

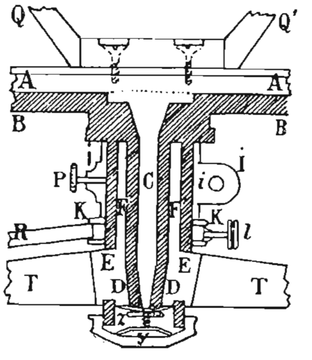
65. Мали универсални инструмент.

Слика 85. даје очигледну представу о спољњем облику малог универсалног инструмента, који је израђивао бивши механичар пулковске опсерваторије Брауер и који је још и сада доста у употреби у Русији; на слици пак 86. представљен је у пресеку доњи његов део, да би се јасније показала унутрашња конструкција разних делова.

Од троношца TT, који стоји на три завртња H, H′ и H″, уздиже се месингани цилиндрични тулац FF, који на себи држи дупли и изнутра шупљи такође месингани цилиндар EDDE са чврсто са њиме спојеним хоризонталним лимбом BB. Доњи део спољњега цилиндра EE обухваћен је прстеном K са завртњем за спајање *l* и са полугом R, која се пружа у правцу краја једне ноге троношца, ослањајући се на њу с једне стране микрометарним завртњем *m* а с друге опругом, која делује на супрот томе завртњу; на средини пак цилиндра EE окреће се цев II, која се спаја са њиме завртњем *p* и која држи осу *i* контролнога дурбина PP′. На тај начин, кад се ослободи завртањ *l* прстена K, лимб се може слободно окретати те се и почетак његове поделе може поставити у жељени положај према предметима који се посматрају; када је пак стегнут и тај завртањ и завртањ *p* контролнога дурбина, којим је навизирано на какву сталну белегу, онда ће се и најмања промена у положају лимба (због несолидности основе на којој је инструмент постављен) запазити на промени правца контролнога дурбина; због тога ако се њиме понова навизира на исту непомичну белегу помоћу микрометарног завртња *m*, то ће бимб доћи понова у свој првобитни положај. G је контрабаланс контролноме дурбину а *h* завртањ, којим се тај дурбин фиксира по висини.



Сл. 85.



Сл. 86.

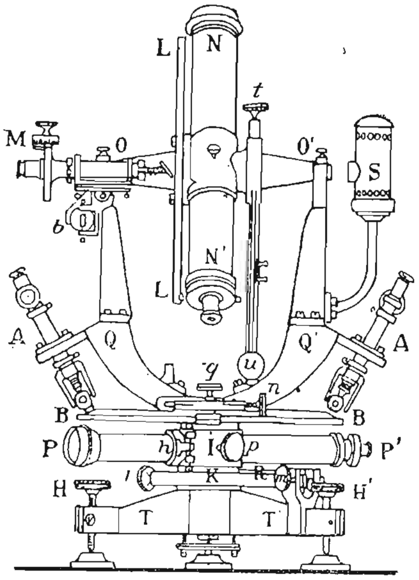
Шупљина је унутрашњег тулца DD на горњем и доњем делу конична и у њу улази челична оса C горњега дела инструмента са алхидадним кругом AA и са носачима Q и Q′ за главни дурбин NN′. За смањење притиска и трења осе C о дуварове тулца, она се одоздо ослања на опругу *y*; гајка пак *z*, која је на њу заврнута, не допушта да се та оса издигне навише. Хоризонтални је круг BB (око 15 см. у пречнику) подељен од 10′ до 10′ а очитавања се врше с тачношћу до 10″ помоћу два диаметрално супротна вернијера, који се налазе на алхидадном кругу AA. Алхидадни се круг спаја са лимбом кљештама са завртњем за спајање *q* и микрометарним завртњем *n*, чија је конструкција и употреба била детаљно објашњена у чл. 28. (сл. 50.).

Главни је дурбин NN′ код тог инструмента прав и утврђен је са стране на крају челичне хонизонталне осе OO′, која лежи са својим чеповима у урезима носача Q и Q′. Објектив је дурбина од 2.5 см. у пречнику са незнатним увеличањем W — око 20 пута. Мрежа се кончића састоји обично из једног пара врло блиских (на растојању од 30″ до 50″) вертикалних кончића и исто таквога пара хоризонталних, да би се, како при мерењу хоризонталних углова, тако и зенитних растојања, посматрани предмет уводио у средину између два кончића. Али се понекад поред ових намешта још и неколико паралелних кончића, за посматрање небесних тела, која се брзо крећу.

На другом је крају хоризонталне осе утврђен алхидадни круг са четири вернијера M, M′, M″ и M‴, који се крећу по унутрашњем ободу непокретнога вертикалног круга LL, који је учвршћен за носач Q и снабдевен либелом *bb*, која има исту улогу при мерењу зенитних растојања, као и либела C на вратилу са микроскопима Репсолдовог вертикалног круга. Овај круг LL, који је свега 10 см. у пречнику, подељен је такође од 10′ до 10′. По висини се дурбин NN′ фиксира спојним завртњем *t*, после чега се може полако и равномерно да покреће микрометарним завртњем *u*. Најзад, за тачно одређивање нагиба хоризонталне осе OO′, при азимуталним посматрањима небесних тела, служи јахаћа либела *aa*, која увек може да стоји на оси, јер не смета кретању дурбина по висини.

66. Универсални инструмент са микроскопима.

Као образац великог универсалног инструмента, за тачно мерење хоризонталних углова и зенитних растојања, може нам послужити инструмент енглеских механичара Траутона и Симса, који је израђен за Пулковску Опсерваторију. Сви поједини његови делови означени су на приложеном цртежу (сл. 87.) истим словима, као и они на маломе универсалном инструменту, на сл. 85. па је стога непотребан и посебни опис. Стварне су пак разлике у његовој конструкцији ове:



Сл. 87.

Главни дурбин NN′ са објективом од 4.5 см. у пречнику, који допушта увеличање W = 60, утврђен је на хоризонталној оси OO′ централно и лако се преврће у лежиштима носача Q и Q′, као и код пасажног инструмента. На нашем цртежу није представљена само јахаћа справа са либелом *aa* за нивелање осе OO′, намештајући је са њеним дугачким ножицама на чеповима те осе.

Вертикални круг LL (око 30 см. у пречнику), који је утврђен за осу дурбина као и Репсолдов круг, подељен је од 5′ до 5′ и очитава се помоћу два непомична микроскопа M и M′, учвршћена на крајевима вратила са либелом *b*; два пак микроскопа A и A′, који су утвђени на носачима Q и Q′, служе за очитавање хоризонталнога круга BB, кои је такође подељен од 5′ до 5′. Вредност једнога обрта микрометара на микроскопима приближно је равна 1′, вредност једнога делића њихових добоша равна је 1″ а средња грешка стављања покретних кончића на цртицу лимба, — како хоризонталног, тако и вертикалног, — равно је око ± 0″.5. За посматрање звезде са незнатним зенитним растојањима, обични се окулар замењује преломљеном окуларном цеви.

67. Тачност посматрања.

Све што је речено о мерењу зенитних растојања помоћу Репсолдовог вертикалног круга и о утицају различитих инструменталних грешака на та мерења, вреди подједнако и за слична мерења, која се врше ма каквим универсалним инструментом. Само ће случајне грешке E_z тих мерења зависити углавноме од оптичке моћи дурбина и тачности очитавања вертикалнога круга, пошто либела код тога лимба мора бити толико осетљива, да се утицај нетачности њенога очитавања, једва може осетити.

Тако например, код инструмента Траутона и Симса вредност E_z треба да буде, — па тако и излази, — нешто мања него код Репсолдовог вертикалног круга (чл. 60.). Код описаног пак малога универсалног инструмента са увеличањем дурбина $W = 20$ (чл. 65.), — са претпоставком, да се сваки од 4 верниjера вертикалнога круга очитава са средњом грешком $\pm 7''5$, — добива се за средњу грешку E_z визирања на предмет, како при положају круга L тако и R (чл. 60.), при најбољим погодбама оваква вредност

$$E_z = \sqrt{\left(\frac{30''}{20}\right)^2 + \frac{(7''5)^2}{4}} = \pm 4''0.$$

Приближно ће таква иста бити и средња грешка E_a азимуталнога посматрања (L или R) са тим инструментом; зато што је његов азимутални круг већих димензија, те и ако се очитава само помоћу два верниора, ипак је тачност очитавања на свакоме од њих већа и износи око $\pm 5''0$. На тај ће начин изаћи за њега приближно:

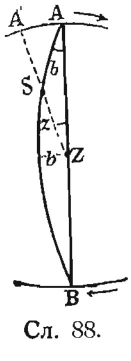
$$E_a = \sqrt{\left(1''5\right)^2 + \frac{(5''0)^2}{2}} = \pm 3''8.$$

Благодарећи највише очитавању кругова помоћу микроскопа, код инструмента Траутона и Симса, како E_a тако и E_z излазе свега $\pm 0''5$ до $\pm 0''8$, што зависи од каквоће ликова посматраних предмета.

Да расмотримо сад какве ће разне утицаје на прочитане азимуталне правце показати разне сталне грешке универсалнога инструмента:
1.) нагиб хоризонталне осе, 2.)неједнакост и неправилности њених чепова, 3.) колимациона грешка дурбина, 4.) ексцентрични положај његов 5.) нагиб лимба и 6.) систематске грешке његове поделе.

68. Утицај нагиба хоризонталне осе.

Ако је обртна оса дурбинова нагнута према хоризонту под углом b, онда ће перпендикуларна на њу оптичка оса дурбинова описивати на небесној сфери велики круг ASB (сл. 88) који пресеца хоризонт места посматрања у тачкама A и B и који је нагнут према вертикалу AZB под углом $\sphericalangle SAZ = b$; истинити пак вертикал посматранога предмета S јесте A'SZ. Услед тога ће прочитање на хоризонталном кругу инструмента изаћи погрешно за угао $\sphericalangle A'ZA = \triangle A_b$. који ће се, због мале величине b, добити овако:



Сл. 88.

$$\triangle A_b = b \cdot \frac{\sin SA}{\sin SZ} = b \cdot \frac{\cos z}{\sin z} = b \cdot cotg\, z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.)$$

Са претпоставком, да посматрач врши читање либеле, — која одређује нагиб b, — окренут увек лицем ка посматраноме предмету, та се поправка $\triangle A_b$ треба да одузима од прочитања A на хоризонталноме кругу, јер натписи поделе његове расту увек у страну која је показана стрелицом на сл. 88. За земне предмете, код којих је z близу око 90°, та се поправка обично пренебрегава; при посматрању пак небесних тела, она мора бити врло знатна па је стога потребно врло тачно одређивати нагиб b.

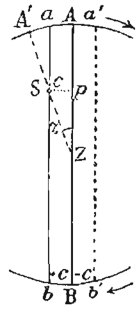
Под нагибом b овде треба подразумевати показање либелино, поправљено за место њене нуле и још за нејаднакост чепова осе, ако она постоји (чл. 26.) Та неједнакост чепова (као и одступање пресека чепова од правилног кружног облика) може бити испитана код некојих универсалних инструмената (нпр. код инструмента Траутона и Симса) исто онако као и код пасажног инструмента, превртањем хоризонталне осе у њеним лежиштима; али у томе обично нема потребе, пошто при посматрањима каквога небесног тела S у оба супротна положаја (R и L) инструмента, неједнакост чепова утиче, очевидно, са супротним знацима те се само собом искључује у средњем резултату посматрања.

69. Утицај колимационе грешке и ексцентричног положаја дурбина.

Кад постоји колимациона грешка c, онда оптичка оса дурбина описује на небесној сфери мали круг aSb (сл. 89.), који је паралелан са вертикалом инструмента AZB; због тога истинитоме вертикалу A'SZ посматранога небесног тела S треба да одговара азимутално прочитање, које се разликује од стварнога прочитања хоризонталног круга за величину угла $\sphericalangle A'ZA = \triangle A_c$, који се изражава, из правоуглог троугла ZSp, овако:

$$\triangle A_c = \frac{Sp}{\sin SZ} = \frac{c}{\sin z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)$$

Али ако се изврши и друго посматрање предмета S, пошто се претходно обрне горњи део инструмента за 180°, то ће колимациона грешка c утицати са супротним знаком те ће се у средњем резултату из оба посматрања потпуно искључити (са претпоставком да се зенитно растојање z не мења).



Сл. 89.

За земне пак предмете, када се z мало разликује од 90°, грешка $\triangle A_c$ постаје равна $\pm c$; због тога, ако означимо са R и L прочитање хоризонталнога круга при визирању дурбином на такав предмет у оба положаја инструмента, онда ће се добити

$$c = \frac{R - (L \pm 180°)}{2}$$

У случају пак ексцентричног положаја дурбина, тј. кад је он на неком растојању l од вертикалне осе инструмента (код већ описаног малог универсалног инструмента $l = 15^{cm}$), прочитање ће се R, — при положају дурбина с десне стране, — смањити за величину малог угла $\frac{l}{d \sin 1''}$ где d означава растојање до посматраног предмета, а прочитање L, — при положају дурбина с леве стране, — за толико ће се исто повећати; према томе колимациона се грешка у том случају треба да одређује из израза:

$$c = \frac{R-(L\pm180^\circ)}{2} + \frac{l}{d\,sin\,1''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.)$$

70. Утицај погрешака азимуталнога круга

Када се вертикална оса универсалног инструмента дотера довољно тачно у вертикални положај, помоћу либеле која је за то на њему удешена и помоћу завртања троношца H, H′ и H″, онда ће перпендикуларни на њу хоризонтални круг заузети сам по себи потребан хоризонтални паложај; али ако он, због конструктивног несавршенства инстумента, и неби био потпуно перпендикуларан на вертикалну осу, због тога би произашле при мерењу хоризонталних углова такве исто ништавне грешке, као и у зенитним растојањима услед нагиба α вертикалнога круга [чл. 62. (4)].

Главни се узрок нетачности хоризонталних углова, мерених теодолитом или универсалним инструментом, крије увек у систематским грешкама лимбове поделе; али пошто њихово испитивање није увек лако извршити, то се њихов утицај ослабљује увек на тај начин, што се један и исти угао мери неколико пута на разним деловима лимба, што се врши или по *Струве-овој методи* (méthode de la réiteration) или по *репетиционој методи* (méthode de la répétition), по идеји немчкога астронома XVIII века Табиаса Мајера.

Струвеовом се *методом* хоризонтални угао α, између ма каква два предмета A и B, мери са неколико раздела, померајући лимб помоћу завртњева m и l (сл. 85. и 87.) тако, да прочитања на њему, при визирању дурбином на леви предмет A, буду у s разних сукцесивних раздела: $0, \sigma, 2\sigma, \ldots. (s\text{-}1)\sigma$, где је $\sigma = \frac{180^\circ}{s}$ (в. чл. 35.). Потпуни се пак раздео, при сваком од тих положаја лимба, састоји из визирања дурбином на предмете A и B при оба супротна положаја R и L горњега дела инструмента при чему ће се прочитања лимба добивати у оваком реду: R_a, R_b а затим L_b, L_a или пак L_a, L_b а затим R_b, R_a, тако да се у средњем добива:

$$A = \frac{R_a + (L_a \pm 180^\circ)}{2}, \quad B = \frac{R_b + (L_b \pm 180^\circ)}{2} \quad \text{и} \quad \alpha = B - A.$$

Број раздела s бива врло различит, што зависи од тачности поделе лимба и од тачности, која се жели да постигне у дефинитивном изводу угла α. Понекад се узима $s = 12$, помицањем лимба за 15°, понекад се пак ограничавају и са три или са два раздела, помицањем лимба за 60° или 90°. До кога се ступња при томе треба да ослаби утицај систематских грешака поделе, објашњено је већ у чл. 35.; утицај пак случајних грешака мерења (визирања дурбином на предмет, читања лимба, случајних грешака његове поделе и др.) ослабљује се у средњем резултату из s раздела пропорционално $\sqrt{s}$.

Када је потребно да се измере угли између много предмета: A, B, C, ..., који се виде са тачке посматрања, као што је то случај при геодетским мерењима (триангулацијама), онда се у сваком посебном разделу визира дурбином једно за другим на A, B, C, ... а при супротном положају инструмента —

у обратном реду, тј. на .... C, B, A. Тада се из прочитањâ лимба: R_a, R_b, R_c, ... и .... L_c, L_b, L_a добивају у средњем, — као и малочас, — истинита прочитања A, B, C, ... *праваца* на све предмете; из тих пак праваца изводе се и тражени угли: (B—A), (C—A), (C—B) и ост. Пример таквих мерења са оценом њихове тачности наведен је у глави III нашега „Курса Више Геодезије“.

Репетиционом пак *методом* не мере се правци на све предмете једно за другим, већ се мери угао α између свака два предмета A и B посебице и то на овај начин: Навизира се дурбином прво на леви предмет A а затим на десни B, при чему нека буду прочитања на лимбу R_0 и R_1; затим се, — остављајући дурбин у чврстој вези са лимбом, — обртом овога улево, понова навизира на леви предмет A помоћу микрометарног завртња m, тако да се при томе не промени последње прочитање R_1. Када се, после тога, навизира дурбином на предмет B, покретом само горњег, алхидадног дела инструмента и помоћу његовога микрометарног завртња q, — при чему се добије већ ново прочитање R_2, — онда се дурбином навизира опет на A, али покретом лимба, и помоћу његовога микрометарног завртња m; и т. д. На тај начин треба да изађе: $(R_1—R_0) = \alpha$, $(R_2—R_0) = 2\,\alpha$, $(R_3—R_0) = 3\,\alpha$ и т. д. тако да ће се из n извршених репетиција добити

$$\alpha = \frac{R_n — R_o}{n}$$

Према томе ће на тачност тога извода утицати само n-ти део погрешака, првог и последњег прочитања и n-ти део разлике грешака поделе R_n и R_o; интервална се пак прочитања R_1, R_2, ... R_{n-1} могу и да не врше, ради добитка у времену. Што се тиче утицаја колимационе грешке, ексцентричности дурбина, неједнакости чепова и др., то за елиминисања њихова треба извршити сличан низ n таквих истих репетиција при супротном положају инструмента.

Јасно је одатле, да при рђавој подели лимба, који је за очитавање снабдевен вернијерима а не микроскопима, ова *репетициона* метода даје боље резултате од предидуће са више раздела. Контролни дурбин при томе служи само за контролисање непомичности лимба при премештању горњега дурбина са једнога предмета на други; али би он могао бити удешен и за визирање на те исте предмете у циљу убрзања посматрања, као што је то и било код пређашњих инструмената врло различите конструкције, као што су били: Бордов *репетициони круг*, Рајхенбахов *репетициони теодолит*, Ертлов *астрономски теодолит* и др. Ипак су они постепено изашли из употребе одонда одкад је В. Струве јасно открио узроке знатних сталних грешака, које су се дешавале при мерењу углова услед саме конструкције тих инструмената; са усавршавањем пак тачности поделе кругова сада је и сама репетициона метода изгубила свој пређашњи значај те се врло ретко и употребљује

71. Употреба контролног дурбина.

Тачност мерења хоризонталних углова Струвеовом методом (са више раздела) врло много зависи од тога, како се при тим мерењима употребљује контролни дурбин. Најбоље је ради тога поставити на каквом непомичном предмету, неда-

Сл. 90.

леко (80-100 m) од инструмента нарочиту белегу, која се састоји нпр. из црне вертикалне бразде такве ширине, да се њен лик једва тек може да увуче између два вертикална конца контролнога дурбина, као што је то показано на сл. 90 Тада ће визирање контролним дурбином бити несравњено тачније од визирања главним дурбином на врло удаљене предмете, не гледећи на то што су његове димензије знатно веће од контролнога; због тога ће повећање средње случајне грешке E_a (чл. 67.), због корегирања положаја лимба помоћу контролног дурбина, бити потпуно ништавно.

Кад се инструмент ставља не на камени стуб већ на недовољно стабилну основу, као нпр. прости троножни статив, онда је неопходно потребно, да се, при сваком визирању главним дурбином на овај или онај посматрани предмет, контролише положај белеге контролним дурбином; пошто је пак једноме посматрачу то немогућно вршити једновремено, то је потребно, да се код контролног дурбина налази други посматрач, који ће микрометром m (сл. 85. и 87.) корегирати положај лимба и то у моменту, када први посматрач визира главним дурбином.

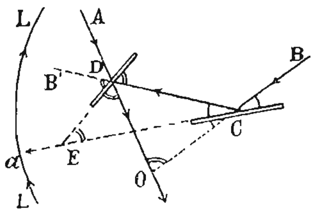
Чак и онда када се инструмент налази на каменом стубу или и дрвеном, који је дубоко и чврсто укопан у земљу, не може се сматратити, да је контролни дурбин некористан, зато што се усљед ма каквог непажљивог притиска на стуб или покрета посматрачевих око њега могу понекад да десе осетне промене у положају лимба. Треба имати на уму и то, да се чак и на каменим стубовима могу десити осетне промене у току времена због утицаја сунчаних зракова и на њих и на тле; увијање пак дрвенога стуба, од тога узрока, бива понекад тако велико, да се у току од пола часа азимутални положај инструмента на таквом стубу може да измени за неколико секунди. Краће речено, контролни дурбин има сличну улогу при мерењу хоризонталних углова са улогом либеле вертикалнога круга при мерењу зенитних растојања.

ГЛАВА IX.

РЕФЛЕКТОРНИ УГЛОМЕРНИ ИНСТРУМЕНТИ.

72. Конструкиија секстанта.

На мору, са палубе брода који се стално клати, немогућно је вршити посматрања нити уопште мерење углова са инструментом, који изискује више или мање чврсту подлогу. Мора се тада прибећи тако званим *рефлекторним инструментима*, помоћу којих и ако се не достиже висока тачност углова ипак је она за навигацију потпуно довољна. Конструкција је свију тих инструмената основана на овој особини двају равних огледала C и D (сл. 91.): сваки зрак BC, који се налази у равнини перпендикуларној на равнину оба огледала, после двогубе рефлексије (одбијања) са њих добива правац DO, који састаља са првобитним правцем BCO угао $\sphericalangle$ DOB, *два пут већи* од угла $\sphericalangle$ DEC међу самим огледалима. И заиста, кад уобразимо интервални правац зрака CDB′ после рефлекса са првог огледала C, онда ћемо имати из троуглова DOC и DEC:



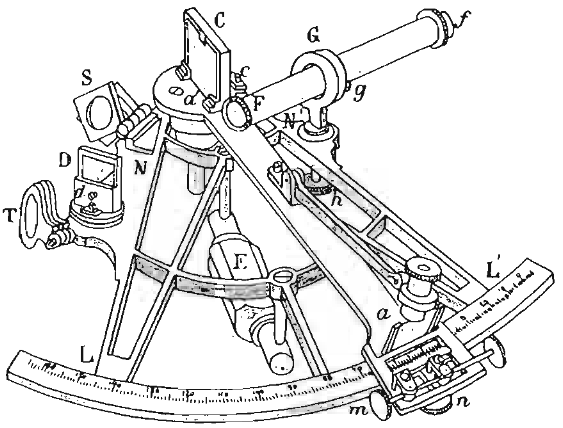
Сл. 91.

$$\sphericalangle \mathrm{DOB} = \sphericalangle \mathrm{B'DO} - \sphericalangle \mathrm{DCO} = 2. \sphericalangle \mathrm{B'DE} - 2. \sphericalangle \mathrm{DCE} = 2. \sphericalangle \mathrm{DEC}$$

На тај начин, ако се двогубо рефлектирани (одбијени) зрак OD, са предмета B, поклопи са правцем OA на неки директно виђени предмет A, онда ће угао $\sphericalangle$ AOB између A и B бити двапут већи од угла E међу огледалима

Сад преставимо себи да је огледало D утврђено перпендикуларно на равнину лимба LL′ а огледало C на равнину алхидаде C*a*, чија се обртна оса C поклапа са центром лимбове поделе, — онда ће се покретом такве алхидаде по лимбу и мерити угао међу огледалима па према томе и међу прдеметима A и B кад им се ликови поклопе. Сва је ствар овде у томе, што се такав инструмент може држати просто у руци, зато што ће се, при дрхтању руке, једном већ поклопљени ликови предмета A и B разилазити и колебати само у правцу перпендикуларном на равнину лимба, По овој је оштроумној идеји и конструисан, скоро још пре два века, специјални морнарички инструмент—*секстант*; због тога се почео често употрљавати и за посматрања при путовањима кроз географски непознате пределе.

Секстант се састоји; 1.) из месинганог сектора $NLL'N'$ са подељеним луком LL' (сл. 92.), нешто већим од 70°; 2.) из алхидаде aa', која се окреће око центра C, са завртњем за спајање n, микрометарним завртњем m, са верниером и лупом за очитавање лимба LL' и са *већим огледалом* C, које је на њој чврсто утврђено; 3.) из непокретног *мањег огледала* D, које је учвршћено на радиусу сектора NL; 4.) из малог дурбина F са увеличањем око 12 пута; у правцу мањег огледала он је уврнут у прстен G, који се налази на другом радиусу сектора $N'L'$; 5.) из обојених стакала T и S, која се стављају испред оба огледала ради ослабљења сувише јаког бљеска Сунчевих и Месечевих ликова, када се мере угловна растојања између ових небесних тела и мање јасних предмета; 6.) из дрвене ручице E за држање инструмента руком.



Сл. 92.

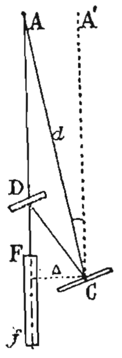
Стакло је мањега оглледала нагнуто према правцу дурбина под углом β око 75° а амалганисано је само на доњем делу тако, да зраци одбијени од њега улазе у доњу половину дурбиновог објектива, директни пак зраци са предмета пролазе кроз прозрачни његов део и улазе у горњу половину објектива. Непотпуна перпендикуларност огледала C и D на равнину лимба може се корегирати завртњићима c и d; корекционим пак завртњићем g може се променити нагиб прстена G ако се покаже, да оптичка оса дурбина није паралелна са том равнином. Осим тога помоћу завртња h издиже се или се спушта прстен G заједно са дурбином ради изједначавања јасности ликова предмета, — онога који се види директно и онога који се добива рефлексом са огледала C и D.

Лимб је секстантов обично подељен од 5′ до 5′, али је испис степени на њему двапут увеличан, те да директно даје величину измереног угла међу предметима; верниером пак угли се очитавају с тачношћу до 10″.

73. Одређивање колимационе грешке.

Од прочитања на лимбу, које се добива при мерењу каквога угла, треба увек одузети извесно прочитање c, које одговара паралелноме положају оба огледала и које се зове грешка алхидадиног индекса или *колимациона грешка секстанта.* Она се добива поклапањем рефлексног лика врло удаљенога предмета са директно виђеним; за ову сврху најбоље је користити се Сунцем, доводећи крајеве директно виђеног и рефлексног диска у тачни спољни контакт један са другим, при чему ће се у једном случају добити прочитање, веће од колимационе грешке за величину угловног диаметра Сунчева диска, а у другом — за толико исто мање; полусума пак њихова даће тражену величину c. У тим се случајима блесак директнога и рефлексног лика Сунчевог ослабљује не помоћу споменутих обојених стакала S и T већ много простије, тј. једним тамним стаклом, које се ставља на окулар дурбина.

Ноћу се колимациона грешка c може одредити по некој, не сувише јасној, звезди; дању пак, кад Сунца нема, — по јасно виђеноме земном предмету. Али, у последњем случају добивена величина c' може осетно да се разликује од истините c услед тога што између осе дурбина Ff и центра секстанта C (сл. 93.) постоји растојање $\triangle$, које износи око 5 cm. Заиста, ако су огледала C и D паралелна при посматрању бескрајног удаљеног предмета A, онда при коначном растојању до њега $AC = d$ треба окренути огледало C још уназад за угао $\frac{1}{2} \sphericalangle ACA' = \frac{1}{2} \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \frac{\triangle}{d \sin 1''}$, да би се рефлексни лик предмета A поклопио са директно виђеним; због тога је



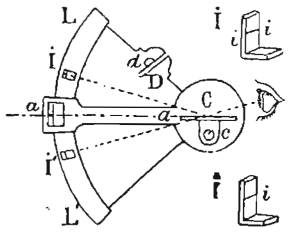
Сл. 93

$$c = c' + \frac{\triangle}{d \sin 1''} \cdot$$

кад је $d = 1$ км. онда та корекција величине c' износи око 10″. —

74. Верификација положаја огледала и дурбина.

Пре него што би се употребио секстант за мерење углова, треба се убедити, да ли су довољно правилно постављена оба огледала и дурбин према равнини лимба. Гледећи у веће огледало C под оштрим углом, лако је запазити, да ли рефлексирани део лимба LL′ пада тачно у продужењу директно виђенога; откривени пак прелом међу њима показује непотпуну перпендикуларност огледала према лимбу. Ова се верификација тачније врши помоћу нарочитих *глетки* I и I′ (сл. 94.), које се постављају на лимб секстанта LL′ симетрично са обе стране алхидаде aa': хоризонтална црта ii, која се види на глетки I′ директно, треба да буде тачно продужење рефлектиране црте ii друге глетке I. Нагиб огледала C, који је откривен једним или другим начином, корегира се помоћу његовога завртњића c (сл. 92.).



Сл. 94.

После верификације великога огледала, довољно је убедити се у паралелност мањег огледала са њим при одређивању колимационе грешке: ако се запази, да директно кроз дурбин виђени лик предмета пролази поред рефлексног, не поклапајући се потпуно са њиме, то значи, да мање огледало D није паралелно са већим; тада треба постићи потпуно поклапање тих ликова корегирањем нагиба огледала помоћу завртњића d.

Поклапање ликова двају предмета у дурбину, директно виђенога и рефлексног, врши се увек у средини пара паралелних кончића, који се налазе у окуларној цевчици, чијим се обртањем стављају одока паралелно са равнином лимба. Треба само проконтролисати, да ли је паралелна са лимбом оптичка оса дурбина, која је одређена средином тих кончића. Ради тога се секстант постави у хоризонталан положај на каквој чврстој подлози па се помоћу напред поменутих глетки, или просто одока, посматра какав удаљени предмет, који пролази кроз хоризонталну равнину лимба: ако се он буде видео и у дурбину на средини међу кончићима, онда је оптичка оса дурбина паралелна са лимбом; ако ли не, онда нагиб прстена G треба корегирати завртњићем g.

75. Тачност мерења углова.

Пошто се од прочитања M, — које се добива при поклапању (коинциденцији) оба лика предмета, — одузима колимциона грешка c, то ће средња случајна грешка угла α, који се мери секстантом, бити оваква:

$$\varepsilon_\alpha = \sqrt{\varepsilon_м^2 + \varepsilon_c^2}\,.$$

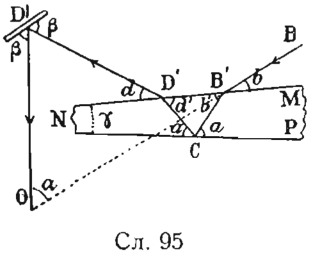
Али је средња грешка посматрања поклапања (коинциденције) двају предмета помоћу дурбина знатно већа од нормалне њене вредности $\pm \frac{30''}{W} = \pm 2''.5$, при увечању дурбина $W = 12$ пута; јер она зависи још и од јасноће посматраних предмета и од колебања њихова у дурбину при држању инструмента у руци; због тога њену вредност треба сматрати уопште од $\pm 3''$ до $\pm 4''$. Приближно је исто толика грешка и читања вернијером. На тај ће начин, за средњи извод из *два поклапања*, $\varepsilon_м$ и ε_c изаћи такође око $\pm 4''$, и тражени ће се угао α добити са средњом ε_α која је тек нешто већа од $\pm 5''$.

Несразмерно већа нетачност мерених углова секстантом може да произађе због разних сталних грешака, својствених томе инструменту, а наиме: 1.) због ексцентричног положаја обртне осе алхидаде према центру поделе лимбове, 2.) због систематских грешака те поделе, 3.) због призматичности великог огледала, 4.) због непотпуно правилнога положаја оба огледала према равнини лимбовој и 5.) због призматичног облика тамних стакала S и T, када се она употребљују.

Пошто се ексцентричност алхидаде секстанта не искључује, као код других инструмената, помоћу два диаметрално супротна вернијера, то је она најзначајнији узрок нетачности мерених углова помоћу тог инструмента. Потребне корекције за то, — које зависе од ексцентрицитета e алхидаде и његова правца E (чл. 33.), — могле би се одредити из мерења неколико већ унапред тачно измерених углова α разне величине; али пошто на резултате тих мерења морају утицати и остали, споменути узроци грешака, то се помоћу таквих испитивања открива управо укупно деловање свију њих заједно, о чему ће бити речи у чл. 78. Сада пак, приступићемо расматрању тих осталих узрока нетачности секстанта.

76. Утицај призматичности великог огледала и тамних стакала.

Претпоставимо, да спољња стаклена површина MN великог огледала C (сл. 95.) и унутрашња амалгамирана PN, — остајући перпендикуларне према равнини лимба, — нису потпуно паралелне међу собом већ састављају неки врло мали угао $MNP = \gamma$. Зрак од предмета B, пошто падне на прву равнину MN под углом $BB'M = b$, преламиће се и заузеће у стаклу правац $B'C$; затим, пошто се одбије са равнине NP под углом $NCD' = B'CP = a$, он ће се у тачци D' понова преломити па ће поћи ка маломе огледалу D секстанта правцем $D'D$ који треба да саставља са тим огледалом стални угао β, раван приближно 75°.



Сл. 95

Кад означимо индекс преламања стакла са μ а угле $NB'C$, $MD'C$ и $ND'D$ са b', d' и d, имаћемо по закону преламања:

$$\cos b = \mu \cos b' \quad \text{и} \quad \cos d = \mu \cos d',$$

одакле

$$\cos b - \cos d = 2 \sin \frac{d-b}{2} \sin \frac{d+b}{2} = 2\,\mu \sin \frac{d'-b'}{2} \sin \frac{d'+b'}{2};$$

а пошто је

$$d' = a + \gamma \quad \text{и} \quad b' = a - \gamma,$$

то је

$$\sin \frac{d-b}{2} = \mu \sin \gamma \, \frac{\sin \frac{d'+b'}{2}}{\sin \frac{d+b}{2}}.$$

Ако (због маленкости угла γ) ставимо овде:

$$\sin \gamma = \gamma, \qquad \frac{d'+b'}{2} = b', \qquad \frac{d+b}{2} = b \qquad \text{и заменимо}$$

$$\sin \frac{d'+b'}{2} = \sin b' = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 b}{\mu^2}} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\sin^2 b + (\mu^2 - 1)},$$

онда ће, при $\mu = \frac{3}{2}$, изаћи дефинитивно:

$$d - b = \triangle \mathrm{M} = 2\gamma \sqrt{1 + \frac{4}{5} \operatorname{cosec}^2 b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

За ту ће величину $\triangle \mathrm{M}$ и бити нетачно прочитање М на лимбу, при мерењу угла $\alpha = \mathrm{AOB}$ међу предметима А и В, услед призматичности γ великог огледала. При одређивању пак колимационе грешке, када је приближно $b = \beta$, прочитање c изаћи ће погрешно за величину

$$\triangle c = 2\gamma \sqrt{1 + \frac{5}{4} \operatorname{cosec}^2 \beta}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

па ће стога грешка $\triangle \alpha$ у углу $\alpha = \mathrm{M} - c$ бити оваква:

$$\triangle \alpha = \triangle \mathrm{M} - \triangle c = 2\gamma \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4} \operatorname{cosec}^2 b} - \sqrt{1 + \frac{5}{4} \operatorname{cosec}^2 \beta} \right), \quad . \; . \; . \quad (3.)$$

тј. она ће бити све већа уколико је α веће, јер је

$$b = \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

Нпр. при $\alpha = 120^\circ$ добиће се: $b = 15^\circ$, $\operatorname{cosec}^2 b = 14.93$, $\operatorname{cosec}^2 \beta = 1.07$ и

$$\triangle \alpha = 2\gamma \left(\sqrt{19.66} - \sqrt{2.34} \right) = \mathbf{5.8}\, \gamma.$$

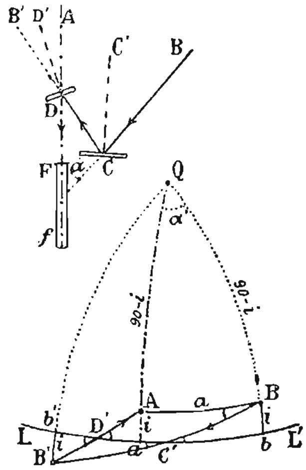
На тај начин грешке у углима могу да испадну врло знатне и при врло ништавној призматичности великог огледала. Ради њена открића, треба помоћу нарочитог силног дурбина посматрати у том огледалу под врло оштрим углом какав врло јасни предмет, например диск Сунца или Месеца; тада ће се у дурбину одбијати зраци и са спољне и са унутрашње равнине стакла, те ће се лик предмета дуплирати, ако те две равнине нису паралелне.

Пошто правац зракова, који пролазе кроз горњу половину малога огледала D а тако исто и одбијених са доње његове половине, остаје увек један и исти, то призматичност тога малог огледала ниуколико не утиче на мерење углова секстантом. На њихову тачност може штетно да утиче само још призматичност тамнога стакла, које служи за апсорпцију зракова са сувише јарких предмета, али је справа тога стакла израђена тако, да се може обрнути за 180°, после чега призматичност стакла утиче у обрнутом смислу; због тога се утицај његов потпуно уништава у средњем из два таква мерења свакога угла.

77. Утицај нагиба огледала и дурбина.

Помоћу оних простих средстава, о којима је било речи у чл. 74., оба се огледала и дурбин секстанта могу поставити према равнини његова лимба тако тачно, да нагиб њихов, који после тога још остане, никако неће бити већи од ± 5′. Тада ће утицај те нетачности на мерене угле, који се изражава {слично дејству колимационе грешке дурбина и нагиба хоризонталне осе код вертикалног круга на мерење зенитних растојања њиме [чл. 61. (2.) и (3.)]} тек малим величинама другога ступња, бити потпуно неосетан при и иначе врло незнатној тачности самих посматрања секстантом. За то ћемо одредити само утицај нагиба дурбина, да бисмо запазили наиме, од коликог је значаја околност, да треба поклапати ликове двају предмета у самој средини дурбинова поља гледања.

Нека лук LL′ на помоћној сфери представља равнину лимба секстантова, тачка C′ на њој — правац нормале CC′ према великом огледалу C, тачка D′ — правац нормале DD′ према маломе огледалу D, који је узет у супротну страну (сл. 96.), и, тачка A — правац оптичке осе дурбина, којим се посматра неки непосредно гледани предмет A. Ако се други предмет B, који се од A налази на угловном растојању AB = α види у дурбину поклопљен са A, онда зрак од њега, после одбијања са великог огледала, треба да заузме у равнини BC′B′ такав правац B′, да би било B′C′ = C′B; а да би се он поклопио са правцем на A после другог одбијања са малог огледала D, треба да буде B′D′ = D′A.



Сл. 96.

Кад замислимо сад на LL′ перпендикуларне лукове Aa, Bb, B′b', од којих први представља нагиб i дурбина према лимбу, онда ћемо увидети (из једнакости троуглова BC′b са B′C′b' и B′D′b' са AD′a), да су сви они равни i; због тога кад их продужимо до сусрета у полу Q великога круга LL′ и кад означимо добивени на секстантовом лимбу угао aQb = ab са α', ми ћемо добити из равнокраког сферног троугла AQB;

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha'}{2}\cdot\cos i \quad \text{или} \quad \sin\frac{\alpha'}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha'}{2}\cdot\sin^2\frac{i}{2},$$

одакле ће, због маленкости i, изаћи просто:

$$\alpha' - \alpha = i^2 \sin 1'' \, tg \frac{\alpha}{2} = \frac{i'^2}{57} \, tg \frac{\alpha}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

где је нагиб i' изражен у минутама а разлика $(\alpha' - \alpha)$ у секундама лука.

Према томе, чак и за највећи угао $\alpha = 144^\circ$ $(tg \frac{\alpha}{2} = 3)$, који се може измерити секстантом, грешка ће $(\alpha' - \alpha)$ достићи до $1''$ тек при $i = 4 \frac{1}{2}'$. Али, ако се поклапање предмета врши не на средини међу кончићима дурбина, већ на извесном растојању $\pm \triangle$ од те средине, онда ће произаћи грешка

$$\alpha' - \alpha = \frac{(i' \pm \triangle)^2}{57} \, tg \frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

која при $\triangle > 15'$ може да надмаши $10''$.

Одатле, између осталог, произлази довољно просто и тачно средство за одређивање нагиба i дурбина. Треба нарочито поклопити ликове двају предмета на крајевима поља гледања дурбинова: прво доле, при чему ће се на лимбу добити прочитање α'_1, а после горе, при чему ће прочитање бити α'_2; тада ћемо, — подразумевајући под $\triangle'$ радиус поља гледања, — добити из формуле (5,):

$$(\alpha'_1 - \alpha) - (\alpha'_2 - \alpha) = (\alpha'_1 - \alpha'_2) = \frac{4 \, i' \, \triangle'}{57} \, tg \frac{\alpha}{2} \quad , \; . \; . \; . \quad (6.)$$

одакле ће се одредити i'. — Ако је нпр. $\alpha = 136^\circ$ $(tg \frac{\alpha}{2} = 2.5)$, $\triangle' = 1^\circ = 60'$ и изађе $(\alpha'_1 - \alpha'_2) = + 30''$, онда је

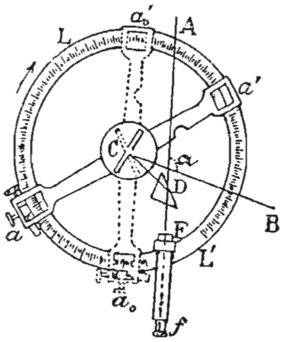
$$i' = + 30 \times \frac{57}{600} = + 2'.9.$$

78. Општи закључак о употреби секстанта

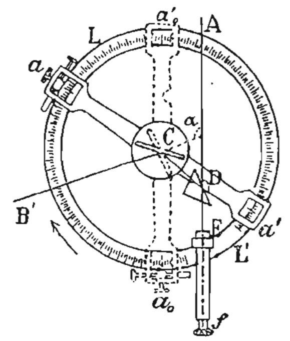
Из овога прегледа разних грешака секстанта види се, да је врло тешко испитати утицај сваке од њих посебице. Због тога је најбоље, проконтролисати пре свега положај дурбина и огледала, па затим емпирички испитати укупни утицај осталих најглавнијих грешака (ексцентрицитета, поделе лимба и призматичности великог огледала), а наиме мерењем неколико тачно познатих углова $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots..$ (од 10° до 140°) међу сјајним звездама или углова међу тригонометриским тачкама, који су већ раније измерени помоћу тачних инструмената, Кад се одреде из таквих многих мерења грешке секстанта $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \ldots.$, лако ће се, интерполовањем или графички, саставити *таблица поправака* (корекција), које ће се затим додавати свима углима који се буду мерили тим инструментом. Посматрачу после тога остаје само да, при пажљивој употреби инструмента, од времена на време прати исправност положаја огледала и дурбина на њему.

79. Писторов круг са призмом и огледалом.

Ради уништења грешака секстанта, које произлазе од ексцентрицитета његове алхидаде, конструишу се рефлекторни кругови са два диаметрално супротна вернијера. Најчешће је од њих у употреби *Писторов круг са призмом* *и огледалом.* Мало непокретно огледало секстанта замењено је на њему призмом D (сл. 97. а.) тако, да зраци са непосредно посматраног предмета A прелазе изнад ње и уллазе непосредно у објектив дурбина Ff; зраци пак са другога предмета B доспевају у тај дурбин, пошто се прво одбију са малог огледала C, које је постављено у центру алхидаде а затим и са хипотенузе призмине под сталним углом β, који је приближно раван 20°.



Сл. 97. а.



Сл. 97. б.

Пошто се у дурбину поклопе ликови A и B добива се по прочитању оба вернијера a и a' средње аритметско R, те угао α међу предметима A и B излази раван

$$\alpha = R - c \quad . \quad . \quad . \quad (7.)$$

при чему колимациона грешка c може бити одређена исто онако као и код секстанта. Али ако се алхидада помери даље у страну растуће вредности поделе лимба, онда ће се са огледала C добити у дурбину зраци са предмета B', који се сад већ не налази са десне стране посматрача него са леве, као што је показано на сл. 97. б; тада ће се за предмет B' добити угао $\alpha = L - c$, већи од 180°. Према томе ако се инструмент изврне, онда ће се моћи на тај начин да посматра и прећашни предмет B; али пошто ће при томе изаћи, да је $\alpha = 360° - \alpha'$, то ће се добити

$$\alpha = (360° - L) + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.)$$

што скупа са (7.) даје

$$\alpha = \frac{R + (360° - L)}{2} \quad \text{и} \quad c = \frac{R - (360° - L)}{2}.$$

Према томе, код Пистоinstallовог круга може колимациона грешка c и да се не одређује посебно, већ да се елиминише, као и код осталих угломерних инструмената, мерењем траженога угла α при оба положаја круга: R и L. К сажаљењу, овај се тачнији начин мерења може применити само за угле α од 100° до 135°, јер при прочитању $L = 360° - 100° = 260°$ (кад је лимб изврнут) алхидада aa' већ удара у лежиште призме D (сл. 97. б.) те се даље не може кретати; за угле пак $\alpha > 135°$ зраци са предмета B не могу да доспу до огледа C у правом положају инструмента (сл. 97. а.), јер их заклања сама призма D.

Лако је увидети, да при мерењу угла α, при обичном положају круга R, зрак од предмета B пада на огледало C под углом $b = \beta + \frac{\alpha}{2}$ (сл. 97. а.); због тога, на основу формуле (3.) чл. 76. призматичност ће тог огледала γ произвести грешку

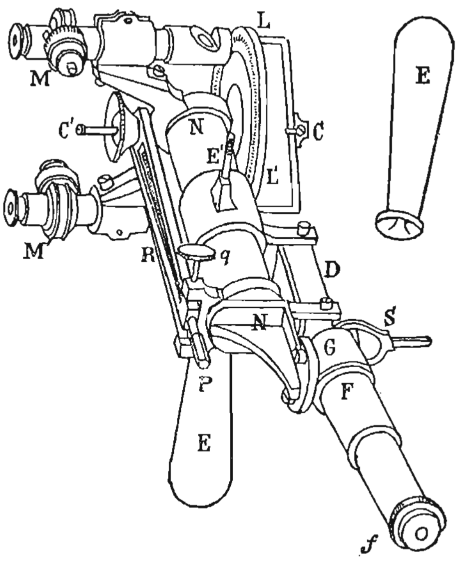
$$\Delta\alpha_R = 2\gamma \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4} cosec^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)} - \sqrt{1 + \frac{5}{4} cosec^2 \beta} \right),$$

која је, при $\alpha = 120°$, равна $2\gamma\,(1.5 - 3.4) = -3.8\,\gamma$, тј. један пут и пô мања него код секстанта· Она постаје још мања у средњем изводу угла α из мерења при оба положаја круга: R и L.

8. Репсолдов рефлекторни инструмент.

Да на кругу Писторовом неби ни призма ни дурбин сметали кретању алхидаде по целоме лимбу, требало би их ставити на супротној његовој страни. Репслд је тако и урадио на своме рефлекторном инструменту, заменивши при томе вернијере двама непокретним микроскопима M и M′ (сл. 98.) и утврдивши огледало C за лимб LL′, које се обрће око осе CC′. На основном масивном цилиндру NN, који држи ту осу, утврђени су и микроскопи M и M′, и призма D, и прстен G, у који се уврће дурбин Ff, и најзад, две ручице E и E′ за држање инструмента у руци; за кочење пак осе CC′ и за њено фино и равномерно кретање служи полуга R са завртњем P за затезање и микрометарни завртањ *q*.

Тиме што су вернијери замењени микроскопима омогућено је, да круг LL′ буде незнатних димензија (свега 3 енгл. палца у диаметру) и да се у исто време тачност читања круга повећа до ± 2″. Овим се инструментом, при изврнутом положају L, не могу мерити само угли *α*, који су мањи од 50°, јер је тада огледало C окренуто према призми D својом полеђином.



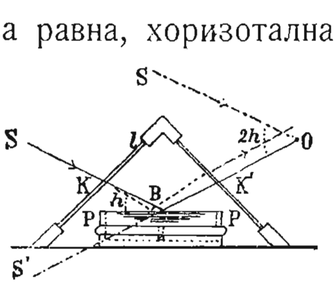
Сл. 98.

На тај начин, преимућства Писторовог и Репсолдовог круга над секстантом састоје се у овоме: 1.) у ништењу утицаја ексцентрицитета алхидаде, 2.) у могућности мерења некојих углова при оба положаја инструмента без посебног одређивања колимационе грешке, која повећава нетачност мерених углова, 3.) у слабљењу утицаја призматичности огледала и, најзад 4.) у повећању јасноће лика предмета, — усљед замене малога огледала призмом. Корист пак секстанта у сравњењу са Писторовим кругом састоји се у мањој његовој тежини при нешто јачем дурбину, што је од особитог значаја при посматрању инструментом у руци.

81. Мерење висина небесних тела рефлекторним инструментима.

Рефлекторним се инструментом мере висине небесних тела на суву помоћу тако званих *вештачких хоризоната,* а на мору помоћу *видног морског хоризонта* или пак помоћу *колиматора.*

Под вештачким се хоризонтом подразумева ма каква равна, хоризотална, огледална (рефлекторна) површина PP (сл. 99.), која одбија зраке SB са небесног тела S у правцу BO, при чему инструментом мерени угао SOB између директно видног небесног тела S и рефлектованог његовог лика S′ даје удвојену његову висину $\sphericalangle SOS' = \sphericalangle SBS' = 2h$. Као вештачки хоризонт може да послужи или тамно добро шљифовано стакло, снабдевено са 3 вертикална завртња, која служе да се рефлекторна равна површина стакла доведе у хоризонтални положај помоћу либеле намештене на њој (чл. 24.), или суд са уљем или живом.



Сл. 99.

Живин хоризонт даје најјасније рефлекторне ликове небесних тела; али пошто је њена површина колебљива од најмањег поветарца, то се она скоро увек мора заштићавати поклопцем од прозрачних листића K и K′ лискуна (сл. 99.). Обично стакло за те поклопце није потпуно употребљиво, јер најмањи недостатак у његовом шљифовању може штетно утицати на правац зракова одбијених са хоризонта па према томе и на мерену висину небесног тела. Уосталом, ако би површине стакала K и K′ биле потпуно равне а недостатци им се ограничили само на непаралелности њиховој, онда би промена правца BO зрака, који кроз њих пролази, могла бити уништена обртањем поклопца за 180°. И заиста, ако претпоставимо, да је стакло K призматичног облика са оштром ивицом l, окренутом навише, увидећемо, да зрак SB, пошто се преломи кроз њу наниже, пада на површину хоризонта PP под углом нешто већим од истините висине h небесног тела; после обрта пак поклопца за 180° угловна ће се висина зрака BO за толико исто смањити услед призматичности истога стакла K.

На мору се висина Сунца мери поклапањем горњега и доњег краја његова диска са видним морским хоризонтом, при чему се од добивене висине одузима тако звано *спуштање привидног хоризонта* η, које се изражава, у зависности од висине H тачке посматрања над морском површином, приближно овако (теор. део курса астрономије гл. IX):

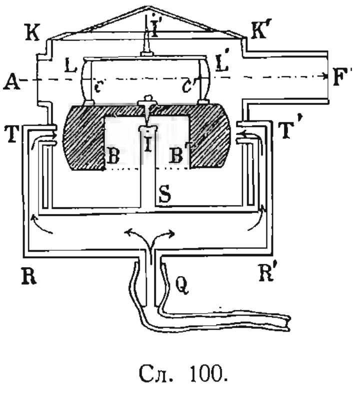
$$\eta = 60 \sqrt{H}$$

и добива се у лучним секундима, ако је H изражено у енгл. стопама.

Али ноћу а каткад и дању линија морског хоризонта не може да се види, услед чега постају немогућна посматрања висина небесних тела, које су тако важне у морепловству за одређивање положаја брода. Због тога су се не једном предлагале и испитивале разне справе, које се уопште зову *колиматори*, помоћу којих би се оси дурбина секстанта могао дати хоризонтални правац. Овај је проблем доста успешно решио француски поморац Флерије.

82. Флерије-ов колиматор.

Тај је колиматор основан на примени *гироскопа*, тј. чигре. За лимб секстанта, испред дурбина F и малог огледала D, утврђена је метална цилиндрична кутија KRR′K′ (сл. 100.) у чијој се унутрашњости налази чигра BB′; врх њене осе İ, који се ослања на стожер S, налази се тек нешто изнад центра тежишта целе масе те чигре, да би се при њеном обртању вршило и конично прецесионо кретање њене осе İ İ′ са трајањем целога обрта од 2 до 1 минуте. Кад се кроз каучукову цев Q напумпа ваздух, он онда пада кроз цевчице T и T′ на дубоке бразде у тело чигре, те јој саопштава врло брзо ротационо кретање, које се затим, већ по инерцији, наставља са довољном брзином у току од 8 или 10 минута.



Сл. 100.

На горњој површини чигре утврђена су диаметрално супротно два стакла L и L′ на растојању LL′, које је потпуно равно њиховом фокалном растојању тако, да се хоризонталне црне црте c и c' на њима представљају у фокалној равнини дурбина секстантова потпуно јасне па ма које од стакала L или L′ било окренуто ка дурбину; при великој пак брзини обртања чигре, обе се црте стално виде те изгледају сливене. Али усљед прецесионог кретања чигре ти ликови црта у дурбину зауземају разне нагибе па се крећу час навише, час наниже, представљајући се тачно хоризонтално тек у моменту када оса $\dot{I}\dot{I}'$ чигре пролази кроз вертикал небесног тела, које се посматра кроз дурбун помоћу рефлекса са огледала. У тим моментима, вишега и нижега положаја црте, посматрач и треба да поклапа с њиме, — помоћу микрометарног завртња алхидаде, — ликове посматраних звезда или крајеве Сунчева диска.

Ако m_1, m_2 и m_3 буду прочитања на лимбу при три сукцесивна положаја црте: вишем, нишем и опет вишем (или нижем, вишем и опет нижем), онда ће средње

$$m = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 + m_3}{2} + m_2\right] = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{4}$$

бити прочитање, које одговара висини небесног тела над истинитим хоризонтом у средњем моменту та три посматрања $T = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$, пошто је ту већ узета у обзир и промена висине небесног тела у току времена, и промена угла скретања осе чигрине од вертикалне линије усњед опадања брзине обртања.

По огледима, који су вршени са том справом на бродовима, грешке при одређивању њиме висинâ Сунца и звезда не излазе из граница ± 4′, што се за практичне циљеве навигације може сматрати као довољно тачно.

ОДЕЉАК II.

ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОГРАФСКИХ КООРДИНАТА ИЗ АСТРОНОМСКИХ ПОСМАТРАЊА

ГЛАВА X.

ПРЕГЛЕД МЕТОДА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ВРЕМЕНА, ШИРИНЕ И ПРАВЦА МЕРИДИЈАНА.

83. О одређивању локалног времена и ширине уопште.

Као што је познато, географском ширином и временом, — које се рачуна у извесном моменту на каквом месту Земљине површине, — потпуно је одређен положај зенита тога места на небесној сфери; и обратно, ако је дат положај зенита Z каквога места у извесном моменту у односу према звездама некретницама, онда је тиме одређен како положај меридијана PZ тога места, т. ј. локално време S у томе моменту, тако и ширина места $\varphi = 90^\circ - PZ$. Положај пак зенита на небесној сфери може се одредити или помоћу растојања његових $E_1Z = z_1$ и $E_2Z = z_2$ од ма каква два дана небесна тела E_1 и E_2, или помоћу вертикалних равнина, које полазе кроз та небесна тела, тј. помоћу њихових азимута a_1 и a_2.

У оба се случаја одређивање двеју непознатих φ и S упрошћује обично тиме, што су оне унапред познате, макар и врло грубо, тако да обично треба тачно да се одређује поправка (корекција) часовника при приближно познатој ширини φ, или обратно. Тада из најпростијег геометриског расматрања постаје јасно, да нетачност ширине φ не утиче на одредбу времена S, ако се оно одређује по зенитном растојању звезде, која се налази у првом вертикалу; нетачнст пак поправке часовника не утиче на одредбу ширине, ако се посматрана звезда налази у меридијану. При азимуталним пак посматрањима биће обрнуто.

Али да би се судило како треба о релативној каквоћи овога или онога резултата тражених непознатих, неопходно је још потребно, да се узме у обзир и нетачност самих посматрања. Тога ради послужиће нам ови изрази делимичних приraштаја Δz и Δa зенитног растојања z и азимута a небесног тела E, када се његов часовни угао t и ширина φ промене за малу величину Δt и $\Delta\varphi$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta t} &= \cos\delta\sin p\\ &= \cos\varphi\sin a\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (1.)_z$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta\varphi} = \cos a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)_z$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta a}{\Delta t} &= \frac{\cos\delta\sin p}{\sin z}\\ &= \sin\varphi + \cos\varphi\cos a\,\mathrm{cotg}\, z\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)_a$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta\varphi} = -\sin a\,\mathrm{cotg}\, z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)_a$$

Ове се формуле, (у којима се t и a рачунају од јужне стране меридијана ка западу, а β означава паралактички угао небесног тела), лако добивају из елементарних троуглова (теорни део курса астрономије), који се образују при сферном троуглу PZE, кад се једноме његовом елементу, $\sphericalangle ZPE = t$ или пак $PZ = 90^\circ - \varphi$ дода мали прираштај, остављајући други елемент и $PE = 90^\circ - \delta$ без промене. Што се тиче координата небесних тела, ректасцензије α и деклинације δ, ми ћемо их за сада сматрати за тачне; утицај пак њихових грешака $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ на одређивање времена и ширине, расмотрићемо доцније (чл. 88.).

84. Апсолутна мерења зенитних растојања.

Кад се добије каквим инструментом зенитно растојање z дане звезде E, које одговара моменту T њеног посматрања и кад је оно ослобођено од рефракције, па кад се означи поправка хронометра у односу према звезданом времену са u, имаћемо за одредбу u при даној ширини φ, или обратно, познату формулу.

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

где је

$$t = \mathrm{T} + u - \alpha.$$

Грешке пак Δu и $\Delta\varphi$ тих резултата одредиће се у зависности од грешака Δz и $\Delta\mathrm{T}$ из ове формуле, која се добија у суми из $(1.)_z$ и $(2.)_z$:

$$\triangle z = (\triangle \mathrm{T} + \triangle u) \cos\varphi \sin a + \triangle\varphi \cos a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

Из ње излази, да је:

$$\triangle u = - \triangle \mathrm{T} + \frac{\triangle z}{\cos\varphi \sin a} - \frac{\triangle\varphi}{\cos\varphi \, tg\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)_u$$

или пак

$$\triangle\varphi = \frac{\triangle z}{\cos a} - (\triangle \mathrm{T} + \triangle u) \cos\varphi \, tg\, a \quad . \; . \; . \quad (4.)_\varphi$$

Овде ми можемо подразумевати увек, да се стална лична грешка (чл. 48.) посматрача у запаженом моменту T његова посматрања пролаза звезде краз кончић дурбина садржи већ у $\triangle u$; тада ће $\triangle\mathrm{T}$ представљати само случајну грешку, чија ће се средња вредност, за посматрање на једном кончићу, представити (чл. 47.) у облику:

$$\varepsilon_{\mathrm{T}}^2 = e^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{V}}\right)^2, \qquad \text{где је} \qquad \mathrm{V} = \cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin a.$$

Грешка пак $\triangle z$ садржаће у себи случајну грешку читања вертикалног круга, систематску грешку његове поделе, повијања дурбина и нетачност таблица рефракције.

Изрази $(4.)_u$ и $(4.)_\varphi$, потврђујући речено у чл. 83., — да су посматрања у првом вертикалу најпогоднија, кад се одређује u, а у меридијану кад се одређује φ, — показују још, да и утицај грешке $\triangle z$ у измереном зенитном растојању звезде излази тада минимални. Уосталом, ако се у тим случајевима и одступи од првог вертикала или меридијана чак и за 30°, то ће мало оштетити тачност резултата, јер именитељи, $\sin a$ у првом и $\cos a$ у другом случају, повећавају грешку $\triangle z$ само у односу $\frac{1}{\cos 30^\circ} = 1.15$, тј. само за $\frac{1}{7}$ њене вредности.

При једновременом одређивању ширине φ и поправке хронометра u из измерених зенитних растојања двеју различитих звезда или само једне али у различитим временима T_1 и T_2, ове се непознате могу одредити из двеју једначина (3.); грешке пак њихове одредиће се из двеју једначина (4.). Кад се означе у разним посматрањима грешке $\triangle z$ и $\triangle T$ а исто тако и азимути значкама $_1$ и $_2$ па се ради скраћења стави још

$$\triangle T_1 \cos\varphi \sin a_1 = n_1 \qquad \text{и} \qquad \triangle T_2 \cos\varphi \sin a_2 = n_2$$

онда ћемо имати

$$\left.\begin{aligned} \triangle u \cos\varphi \sin a_1 + \triangle\varphi \cos a_1 &= \triangle z_1 - n_1 \\ \triangle u \cos\varphi \sin a_2 + \triangle\varphi \cos a_2 &= \triangle z_2 - n_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

одакле је

$$\triangle u \cos\varphi = \frac{(\triangle z_1 - n_1)\cos a_2 - (\triangle z_2 - n_2)\cos a_1}{\sin(a_1 - a_2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)_u$$

и

$$\triangle\varphi = \frac{(\triangle z_2 - n_2)\sin a_1 - (\triangle z_1 - n_1)\sin a_2}{\sin(a_1 - a_2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)_\varphi$$

Ови изрази $\triangle u$ и $\triangle\varphi$ показују, да, за најпогодније једновремено одређивање ширине и времена, азимути a_1 и a_2 двеју посматраних звезда могу и да не буду блиски 0° и 90°, већ треба само да се разликују један од другога приближно зу 90°.

85. Одговарајуће (једнаке) висине звезда.

Напред изложена одређивања поправке хронометра u и ширине места φ, која су основана на мерењу зенитних растојања звездâ, уопште говорећи, не могу се сматрати за врло сигурна, због тога што у величину $\triangle z$ улазе, често врло знатне, систематске грешке различитог порекла. Да би се оне потпуно елиминисале треба посматрати две звезде ($\alpha_1\, \delta_1$) и ($\alpha_2\, \delta_2$) на једнаким зенитним растојањима $z_1 = z_2$, тако, да би било $\triangle z_1 = \triangle z_2$. Тада ће се из двеју једначина (3.) добити

$$\left.\begin{aligned} &\sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos(T_1 + u - \alpha_1) \\ = &\sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cos(T_2 + u - \alpha_2) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6.)$$

а одатле ће се одредити u кад је позната φ, или обратно. Зависност пак међу грешкама $\triangle u$ и $\triangle\varphi$ наћи ће се у том случају из двеју једначина (5.) у оваквом облику:

$$\triangle u \cos\varphi (\sin a_1 - \sin a_2) + \triangle\varphi (\cos a_1 - \cos a_2) = n_2 - n_1, \quad . \; . \quad (6.)'$$

при чему ће разлика $(n_2 - n_1)$ бити подвргнута само случајним грешкама $\triangle T_1$ и $\triangle T_2$ момената T_1 и T_2 посматрања по хронометру.

Види се, да ће се поправка хронометра u добити на тај начин са минималном грешком при $a_2 = - a_1 = 90^\circ$, тј. при посматрању једне звезде на источној страни првог вертикала а друге на западној, и да уопште она неће ниуколико зависити од познавања ширине места; ова пак погодба заједно са $z_2 = z_1$ изискује, да деклинације звезда δ_1 и δ_2 буду једнаке. Ширина пак места одредиће се најбоље и независно од познавања поправке u, када је $a_2 = 180^\circ - a_1$, тј. када се посматране звезде буду налазиле близу меридијана на једнаким азимуталним удаљењима од њега али с једне и исте стране његове.

Таква најтачнија одређивања времена и ширине по строго једнаким висинама двеју звезда одликују се у исто време и највећом простотом самих посматрања, јер су мерења зенитних растојања сасвим искључена. Приближно се таква иста тачност достиже и мерењем врло малих разликâ висина двеју звезда помоћу зенит-телескопа (чл. 58.).

Посматрања трију звезда на једној и истој висини довела би, очевидно, ка двема једначинама (6.) са двема непознатим φ и u, а грешке њихове $\triangle\varphi$ и $\triangle u$ одређујући их из двеју једначина:

$$\left.\begin{aligned} \triangle u \cos\varphi\,(\sin a_1 - \sin a_2) + \triangle\varphi\,(\cos a_1 - \cos a_2) &= n_2 - n_1 \\ \triangle u \cos\varphi\,(\sin a_1 - \sin a_3) + \triangle\varphi\,(\cos a_1 - \cos a_3) &= n_3 - n_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7.)$$

добиле би се у облику:

$$\triangle u \cos\varphi = \frac{(n_2 - n_1)(\cos a_1 - \cos a_3) - (n_3 - n_1)(\cos a_1 - \cos a_2)}{\sin(a_1 - a_2) + \sin(a_2 - a_3) + \sin(a_3 - a_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (7.)_u$$

$$\triangle\varphi = \frac{(n_3 - n_1)(\sin a_1 - \sin a_2) - (n_2 - n_1)(\sin a_1 - \sin a_3)}{\sin(a_1 - a_2) + \sin(a_2 - a_3) + \sin(a_3 - a_1)} \quad . \quad . \quad (7.)_\varphi$$

Према томе обе непознате φ и u одредиће се у том случају најбоље при растојањима међу азимутима трију звезда —

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = a_3 - a_1 = 120^\circ$$

јер је у том случају именитељ израза $(7.)_u$ и $(7.)_\varphi$ максималан.

Оваква се метода једновременог одређивања ширине места и времена, — на коју је указао Гаус, — врло ретко досад примењивала услед разних њених практичких незгода, од којих се најглавнија састоји у тешкоћи одабирања погодних звезда за посматрање, и, што је много простије одредити време по одговарајући висинама двеју звезда приближно једнаких деклинација, а ширину по једнаким висинама другог пара звезда, које се налазе око меридијана.

86. Азимутална посматрања небесних тела.

Да се обратимо сада методама за одређивање правца меридијана на каквом месту и за одређивање времена и ширине из азимуталних посматрања небесних тела.

Ако се универсалним инструментом измери хоризонтални угао M међу каквим непокретним земним предметом, чији је азимут A, и небесним телом E у извесном моменту T по хронометру, онда ће се за азимут тога небесног тела $a = A + M$ добити из сферног троугла PZE познати израз

$$cotg\, a = cotg\, (A \pm M) = \frac{\sin\varphi \cos\delta \cos(T + u - \alpha) - \cos\varphi \sin\delta}{\cos\delta \sin(T + u - \alpha)} \quad . \quad . \quad (8.)$$

који ће и послужити за одредбу φ, или u, или A, када су две од тих величина већ познате. Зависност пак међу грешкама $\triangle A$, $\triangle M$, $\triangle T$, $\triangle\varphi$ и $\triangle u$ представиће се, на основу формула $(1.)_a$ и $(2.)_a$ у оваквом облику:

$$\triangle a = \triangle A \pm \triangle M = (\triangle T + \triangle u) \frac{\cos\delta \cos p}{\sin z} - \triangle\varphi \frac{\sin a}{tg\, z} \quad . \quad . \quad . \quad (8)'$$

Ово показује, да ће се азимут A земног предмета или правац меридијана на даном месту одредити, независно од познавања ширине φ, из посматрања каквог небесног тела, које се налази у меридијану; грешка пак $\triangle u$ имаће при томе утолико мањи утицај, уколико је небесно тело ближе полу ($\cos\delta = 0$), као нпр. Поларна звезда (*α Ursae minoris*). Таква се звезда може посматрати и у близини њене елонгације ($\cos p = 0$), да резултат A неби ниуколико зависио од грешке $\triangle u$; тада ће се, у средњем из њених посматрања на западној ($+ a$) и источној ($- a$) елонгацији, елиминисати и утицај грешке $\triangle\varphi$.

Пошто се у формули $(8.)'$ коефицијент код $\triangle\varphi$ претвара у нулу још и при $z = 90^\circ$, то, при довољно познатој поправци u часовника, азимут A земнога предмета може бити доста добро одређен из посматрања Сунца у близини његова рађања или заласка; при томе ће утицај грешке $\triangle u$ увек бити један и исти, а наиме: $\triangle a = \triangle u \sin\varphi$, јер је тада $\cos\delta \cos p = \sin\varphi$.

Када је по каквој од напред изложених метода одређен азимут A каквога земног предмета, или пак просто, одређено прочитање M_0 на хоризонталном кругу инструмената, које одговара правцу меридијана, онда се из сљедећих затим азимуталних посматрања небесних тела могу већ тачно да одређују по формули (8.) или поправке u хронометра или ширине φ, при чему ће се грешке њихове изразити из $(8.)'$ овако:

$$\triangle u = - \triangle T + \frac{1}{\cos\delta \cos p} (\triangle a \sin z + \triangle\varphi \sin a \cos z) \quad . \quad . \quad . \quad (8.)'_u$$

$$\triangle\varphi = \frac{1}{\sin a \cos z} \Big[- \triangle a \sin z + (\triangle T + \triangle u) \cos\delta \cos p \Big] \quad . \quad . \quad (8.)'_\varphi$$

Одатле се види, да се u добива независно од познавања ширине φ из посматрања звезде у меридијану ($a = 0$); ако је она при том још и близу зенита, онда ни утицај грешке $\triangle u$ неће бити осетан. За одређивање пак ширине φ увек је боље посматрати зенитну звезду у првом вертикалу, јер ће тада $\cos\delta \cos p = \sin\varphi \sin z$ бити врло мало.

87. Посматрања пасажним инструментом.

Од грешке се $\triangle M$ у мереном углу M међу небесним телом и земним предметом, и уопште, од грешке се $\triangle a$ у одређиваном азимуту тога небесног тела можемо потпуно ослободити, ако се посматрају две звезде ($\alpha_1\ \delta_1$) и ($\alpha_2\ \delta_2$) у једном и истом вертикалу a, помоћу пасажног инструмента, доста стабилно постављеног. Тада ће се, за одредбу поправке u хронометра при познатој ширини φ или обратно, добити из једначина (8.) ово:

$$\frac{\sin\varphi\cos\delta_1\cos(\mathrm{T}_1+u-\alpha_1)-\cos\varphi\sin\delta_1}{\cos\delta_1\sin(\mathrm{T}_1+u-\alpha_1)}=\frac{\sin\varphi\cos\delta_2\cos(\mathrm{T}_2+u-\alpha_2)-\cos\varphi\sin\delta_2}{\cos\delta_2\sin(\mathrm{T}_2+u-\alpha_2)}; \quad (9.)$$

два пак израза (8.)′ за вредност $\triangle a$, која је општа за обе звезде, даће овакву зависност грешака $\triangle u$ и $\triangle\varphi$ од $\triangle\mathrm{T}_1$ и $\triangle\mathrm{T}_2$:

$$(\triangle\mathrm{T}_1+\triangle u)\frac{\cos\delta_1\cos p_1}{\sin z_1}-\triangle\varphi\frac{\sin a}{tg\, z_1}=(\triangle\mathrm{T}_2+\triangle u)\frac{\cos\delta_2\cos p_2}{\sin z_2}-\triangle\varphi\frac{\sin a}{tg\, z_2}.$$

Кад се ради скраћења означи

$$\triangle\mathrm{T}_1\cos\delta_1\cos p_1=\triangle s_1 \quad \text{и} \quad \triangle\mathrm{T}_2\cos\delta_2\cos p_2=\triangle s_2,$$

и замени овде

$$\frac{\cos\delta_1\cos p_1}{\sin z_1}=\sin\varphi+\frac{\cos\varphi\cos a}{tg\, z_1} \quad \text{и} \quad \frac{\cos\delta_2\cos p_2}{\sin z_2}=\sin\varphi+\frac{\cos\varphi\cos a}{tg\, z_2},$$

онда ћемо имати

$$\frac{\triangle s_1}{\sin z_1}-\frac{\triangle s_2}{\sin z_2}+(\triangle u\cos\varphi\cos a-\triangle\varphi\sin a)\left(\frac{1}{tg\, z_1}-\frac{1}{tg\, z_2}\right)=0$$

или

$$\triangle u\cos\varphi\cos a-\triangle\varphi\sin a=\frac{\triangle s_1\sin z_1-\triangle s_2\sin z_1}{\sin(z_1-z_2)}.$$

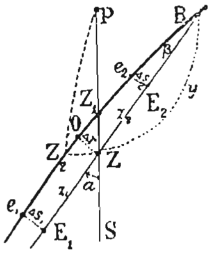
Али се овде зенитна растојања z_1 и z_2 рачунају за обе звезде по вертикалу a са једне и исте стране од зенита; ако их пак будемо рачунали као позитивне у супротном правцу, — што је боље, — онда ћемо добити

$$\triangle u\cos\varphi\cos a-\triangle\varphi\sin a=\frac{\triangle s_1\sin z_2+\triangle s_2\sin z_1}{\sin(z_1+z_2)}=\triangle r \quad . \quad . \quad . \quad (9.)'$$

Ово је основна формула за преносни пасажни инструмент[1]). Сагласно са напред реченим о азимуталним *посматрањима уопште*, — она показује, да је за одредбу поправке хронометра најпогодније поставити инструмент у меридијану,

---

[1]) Неће бити сувишно, да се овде објасни геометриска вредност величине Δr. Положај се на небесној сфери вертикала $\mathrm{E}_1\mathrm{Z}\mathrm{E}_2$ (сл. 101.), у коме је постављен пасажни инструмент, одређује положајем E_1 и E_2 двеју звезда у моментима посматрања T_1 и T_2; али пошто су ти моменти запажени са грешкама $\Delta\mathrm{T}_1$ и $\Delta\mathrm{T}_2$, којима одговарају (чл. 47.) растојања $\mathrm{E}_1 e_1=\Delta s_1=\Delta\mathrm{T}_1\cos\delta_1\cos p_1$ и $\mathrm{E}_2 e_2=\Delta s_2=\Delta\mathrm{T}_2\cos\delta_2\cos p_2$, то ће истинити положај напред реченога вертикала бити велики круг, који пролази кроз тачке e_1 и e_2; због тога и зенит места посматрања треба да се налази гдегод на њему а не у тачци Z, која одстоји од њега на неком растојању. $\mathrm{ZO}=x$. Замислимо, да се кругови $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$ и $e_1 e_2$ пресецају међу собом у тачци B, па кад означимо $\mathrm{ZB}=y$ и $\sphericalangle e_1\mathrm{BE}_1=\beta$, онда ћемо имати:



Сл. 101.

$$\Delta s_1=\beta\sin(y+z_1)=\frac{x}{\sin y}\sin(y+z_1)=x\cos z_1+x\sin z_1\, cotg\, y$$

$$\Delta s_2=\beta\sin(y+z_2)=\frac{x}{\sin y}\sin(y+z_2)=x\cos z_2+x\sin z_2\, cotg\, y,$$ стога је

$$\frac{\Delta s_1}{\sin z_1}+\frac{\Delta s_2}{\sin z_2}=x(cotg\, z_1+cotg\, z_2)=x\frac{\sin(z_1+z_2)}{\sin z_1\sin z_2},$$ одакле је

$$x=\frac{\Delta s_1\sin z_2+\Delta s_2\sin z_1}{\sin(z_1+z_2)}=\Delta r.$$

На тај начин Δr представља растојање погрешнога положаја зенита Z од вертикала $e_1\mathrm{O}e_2$ у коме су се налазиле две звезде у моментима T_1 и T_2. Ако је поправка u часовника (па према томе и положај меридијана PZS на небесној сфери) тачно позната, онда ће се истинити зенит налазити у тачци Z_1 на пресеку PZ са $e_1\mathrm{O}e_2$ и тада ће $\mathrm{ZZ}_1=\frac{\Delta r}{\sin a}$ представљати грешку $\Delta\varphi$, с којом се одређује ширина места φ; ако ли је тачно дата ширина места, онда ће се истинити зенит налазити у тачци Z_2 на пресеку перпендикуларне на PZS са кругом $e_1\mathrm{O}e_2$ и тада ће угао $\mathrm{Z}_2\mathrm{PZ}=\frac{\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}}{\cos\varphi}=\frac{\Delta r}{\cos\varphi\cos a}$ представљати грешку Δu с којом се добива тражена поправка u часовника.

а за одредбу ширине места, — у првом вертикалу. Тада ће тачност тих одредаба зависити од вредности $\triangle r$, која опет зависи од грешака $\triangle s_1$ и $\triangle s_2$ с којима се добива (у средњем из посматрања на неколико кончића) положај обеју звезда у односу према средњем кончићу инструмента (чл. 47.)· Најприродније је допустити, да је средња вредност тих грешака за обе звезде подједнака и равна ε_s; тада ће се средња вредност ε_r грешке $\triangle r$ изразити овако:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_s \frac{\sqrt{sin^2 z_1 + sin^2 z_2}}{sin (z_1 + z_2)} = (C)\varepsilon_s, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.)''$$

и лако је видети, да ће она за сваку дану вредност $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = z$ изаћи минимална при $z_1 = z_2 = z$, а наиме:

$$\varepsilon_r\,(min) = \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{cos\, z} \cdot$$

Бројне пак вредности множитеља (C) при ε_s уопште су овакве:

$$(C) = \frac{\sqrt{sin^2 z_1 + sin^2 z_2}}{sin (z_1 + z_2)}$$

z_2 \ z_1	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
0°	0.71	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10	1.00	0.75	0.77	0.83	0.87	0.91	0.94
20	1.00	0.77	0.76	0.79	0.84	0.89	0.94
30	1.00	0.83	0.79	0.81	0.87	0.93	1.00
40	1.00	0.87	0.84	0.87	0.93	1.00	1.10
50	1.00	0.91	0.89	0.93	1.00	1.10	1.23
60	1.00	0.94	0.94	1.00	1.10	1.23	1.41

Према томе за одредбу пасажним инструментом како ширине, тако и времена најпогодније је израбрати на разним странама од зенита две звезде са зенитним растојањима z_1 и z_2 приближно подједнаким и по могућности што мањим.

Једначина (9.)′ показује још да је немогућно једновремено одређивање времена и ширине пасажним инструментом без промене његова азимута, зато што коефицијенти код $\triangle u$ и $\triangle \varphi$ у тој једначини остају непромењљиви за све звезде, ма колико њих посматрали.

На завршетку свега реченога у овој глави о одређивању времена треба напоменути, да је у формулама (4,), (5.), (6.)′, (7.) и (9.)′ грешка $\triangle u$ увек пропраћена коефицијентом $cos\, \varphi$, који показује, да средња грешка ε_u поправке часовника, која се одређује даном методом и даним инструментом, треба да излази утолико већа уколико је већа и ширина φ места посматрања. То и треба увек имати у виду при сравњивању једно с другим резултата посматрања, извршених на разним ширинама.

88. Утицај нетачности координата звезда.

Случајне грешке $\triangle\alpha$ и $\triangle\delta$, којима су подвргнуте ректасцензије α и деклинације δ усљед нетачности одређивања тих координата на астрономским опсерваторијама, различите су за разне звезде; средње пак њихове вредности ε_α и ε_δ, — које треба сматрати као независне једна од друге, — за фундаменталне звезде првих пет величина приближно су овакве:

$$\varepsilon_\alpha \cos\delta = \varepsilon_\delta = \pm 0^s.02 = \pm 0''.3.$$

Али пошто нетачност $\triangle\alpha \cos\delta$ у положају звезде на њеној паралели и нетачност $\triangle\delta$ у положају њеном на кругу деклинације дају у сваком изабраном правцу, који саставља с тим кругом деклинације угао μ, грешке $\triangle\alpha \cos\delta \sin\mu$ и $\triangle\delta \cos\mu$, то ће средња грешка $_*\varepsilon$ у положају звезде бити једна и иста у сваком изабраном правцу, а наиме:

$$_*\varepsilon = \sqrt{(\varepsilon_\alpha \cos\delta \sin\mu)^2 + (\varepsilon_\delta \cos\mu)^2} = \pm 0''.3 \sqrt{\sin^2\mu + \cos^2\mu} = \pm 0''.3.$$

На тај ће начин зенитно растојање звезде z и њен азимут a бити подвргнути грешкама

$$_*\varepsilon_z = \pm 0''.3 \quad . \;.\; . \quad (10.) \qquad \text{и} \qquad _*\varepsilon_a = \frac{\pm 0''.3}{\sin z} \quad . \;.\; . \quad (11.)$$

Одатле се, на основу формула $(4.)_u$ и $(4.)_\varphi$, директно добивају овакве средње грешке $_*\varepsilon_u$ и $_*\varepsilon_\varphi$ у извођењу зенитног растојања звезде:

$$_*\varepsilon_u = \frac{_*\varepsilon_z}{\cos\varphi \sin a} = \pm \frac{0^s.02}{\cos\varphi \sin a} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \quad (10.)_u$$

$$_*\varepsilon_\varphi = \frac{_*\varepsilon_z}{\cos a} = \pm \frac{0''.3}{\cos a} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;. \quad (10)_\varphi$$

а на основу формула $(8.)'_u$ и $(8.)'_\varphi$ добивају се сред. грешке тих истих извода из азимуталних посматрања универсалним или пасажним инструментом:

$$_*\varepsilon_u = \frac{_*\varepsilon_a \sin z}{\cos\delta \cos p} = \pm \frac{0^s.02}{\cos\delta \cos p} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \quad (11.)_u$$

$$_*\varepsilon_\varphi = \frac{_*\varepsilon_a \sin z}{\sin a \cos z} = \pm \frac{0''.3}{\sin a \cos z} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \quad (11.)_\varphi$$

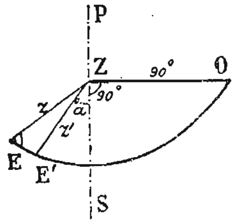
За већину преносних инструмената ове су грешке $_*\varepsilon_a$ и $_*\varepsilon_\varphi$ скоро неосетне у сравњењу са грешкама самих посматрања а у знатном степену се још смањују у резултатима, основаних на посматрањима неколико различитих звезда.

89. Утицај дневне аберације.

Као што је познато из теорног дела курса астрономије, дневна аберација помера истинито место свакога небесног тела Е на небесној сфери у правцу источне тачке 0 хоризонта (сл. 102.) за величину

$$EE' = \gamma \sin E0, \qquad \text{где је} \qquad \gamma = 0''.31 \cos\varphi \quad . \;.\; . \;. \quad (12.)$$

Да видимо, како то утиче на мерено зенитно растојање и мерени азимут небесног тела.



Сл. 102.

Ако је у неком моменту T по хронометру измерено зенитно растојање $ZE' = z'$ привиднога места небесног тела E', онда је зенитно растојање $ZE = z$ истинитог његовог места E било равно z' раније од T за врло мали интервал времена

$$\triangle T = \frac{z - z'}{\cos\varphi \sin a};$$

али пошто је

$$z - z' = EE' \cos \sphericalangle ZEO = 0.''31 \cos\varphi \sin EO \cos \sphericalangle ZEO,$$

а из троугла ZEO са страном $ZO = 90^\circ$ и углом $OZE = 90^\circ + a$ излази

$$\sin EO \cos \sphericalangle ZEO = \sin a \cos z$$

то ћемо имати:

$$\triangle T = 0.''31 \cos z = 0.^{s}021 \cos z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12.)_z$$

Ту вредност $\triangle T$ и треба увек одузимати од посматраних момената T или пак, што је исто, додавати је добивеној поправци хронометра u, да би се узео у рачун утицај дневне аберације на мерена зенитна растојања небесних тела.

Што се тиче разлике међу азимутима a и a' истинитог и привидног места небесног тела E и E', то се она добива из елементарног троугла ZEE' у облику:

$$(a - a') \sin z = EE' \sin \sphericalangle ZEO = \gamma \sin EO \sin \sphericalangle ZEO = \gamma \sin (90^\circ - a)$$

или

$$a - a' = \gamma \frac{\cos a}{\sin z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12.)_a$$

Према томе, кад је $a = \pm 90^\circ$, излази да је $a = a'$. У близини пак меридијана ($\cos a = 1$) све звезде треба да скрећу услед дневне аберације у перпендикуларном правцу на њега за једну и исту величину $(a - a') \sin z = \gamma$, као што се то види и из израза (12.); због тога, да би се то узело у рачун при посматрањима са пасажним инструментом, који је постављен у меридијану, најпростије ће бити ако се његова колимациона грешка промени баш за ту величину (чл. 54.)

90. Постављање преносних инструмената за посматрање.

Пре него што пређемо на детаљно изучавање метода за одређивање времена, ширине и азимута, које смо расмотрили само у општим цртама, да кажемо једном за свагда о томе, како се приближно одређује правац меридијана на хоризонталном кругу ма каквог преносног инструмента, кад се он поставља за посматрања на месту, чија је ширина φ приближно позната. То је неопходно потребно, ради нахођења дурбином оних звезда, које посматрач жели да посматра, али не од ока већ помоћу *ефемерида,* тј. помоћу раније срачунатих таблица азимута и висина звездâ за разна времена.

Ако се инструмент поставља ноћу, онда ће се место меридијана M_0 на хоризонталном кругу његовом одредити најпростије визирајући дурбином на Поларну звезду. Прочитано при томе M на кругу треба само поправити за малу величину азимута a те звезде, а њега је лако срачунати (ако немамо њене ефемериде) с тачношћу до $1'$ или $2'$ по приближној формули

$$a = \frac{\triangle \sin t}{\cos(\varphi + \triangle) \cos t},$$

која се добива из троугла PZE са даном малом страном $PE = \triangle$ и са познатим часовним углом $ZPE = t$.

Када се пак жели, да се инструмент постави благовремено, дању, да би се могло приступити посматрању звезда још за време сутона, онда је довољно, да се при оба положаја инструмента (R) и (L) навизира дурбином по једанпут на центар Сунчева диска. Тада ће се, по запаженим при томе моментима T_r и T_l по хронометру, по прочитањима R и L вертикалнога круга и по прочитањима хоризонталнога круг M_r и M_l, наћи не само азимут Сунца a и место меридијана M_0 са жељеном тачности до $2'$, већ и поправка хронометра u с тачношћу до неколико секунда времена, ако она с таквом тачности још није позната.

Сва неопходно потребна за то срачунавања извршиће се одмах на лицу места са логаритмима од 4 децимале по овим формулама, у којима $\triangle$ означава поларно растојање Сунца а $\Theta = 90° - \varphi$ (теорни део курса астрономије, гл. II):

$$T = \tfrac{1}{2}(T_r + T_l) \qquad m^2 = \frac{\sin(s-z)\sin(s-\Delta)\,\mathrm{siu}(s-\Theta)}{\sin s}$$

$$z = \tfrac{1}{2}(L - R) \qquad tg\frac{a}{2} = \frac{m}{\sin(s-\Delta)}$$

$$s = \tfrac{1}{2}(z + \triangle + \Theta) \qquad tg\frac{t}{2} = \frac{m}{\sin(s-z)}$$

$$M_0 = \tfrac{1}{2}(M_r + M_l) - a \qquad u = (t + \alpha) - T$$

Пример. $\frac{14}{26}$ августа 1990. г. у с. Токсову ($\varphi = 60°11'$) око 6 часова у вече посматрано је Сунце ($\alpha = 10^h 20^m 59^s$, $\delta = +10°17'.8$) ради тачног постављања малога зенит-телескопа. У моменту $T = 16^b 21^m 12^s$ по хронометру, који је ишао по звезданом времену, привидно зенитно растојање центра Сунчевог било је $z' = 80°51'$ а истинито $z = z' + \text{refr.} = 80°57'$; прочитање пак хоризонталног круга било је $M = 96°30'$. По тим даним срачуната је поправка хронометра u и место меридијана M_0 на кругу на овај начин:

$$\underbrace{\begin{array}{rlrl}
2s = & 190°\,28' & & \\
\Delta = & 79\;\;42 & s - \Delta = & 15°\,32' \\
z = & 80\;\;57 & s - z = & 14\;\;17 \\
\Theta = & 29\;\;49 & s - \Theta = & 65\;\;25 \\
s = & 95\;\;14 & \Sigma = & 95\;\;14
\end{array}}
\qquad
\underbrace{\begin{array}{rr}
lg\,2m = 8.7805 & \\
lg\sin(s-\Delta) = 9.4278 & lg\,cotg\frac{a}{2} = 9.9624. \\
lg\sin(s-z) = 9.3922 & lg\,tg\frac{t}{2} = 9.9980. \\
lg\sin(s-\Theta) = 9.9587 & lg\,tg\frac{p}{2} = 9.4315. \\
\text{доп. } lg\sin s = 9.0018 & lg\sin s = 9.9982 \\
lg\,m = 9.3902 & \Sigma = 9.3902.
\end{array}}$$

контрола

$$\frac{a}{2} = 47°\,29' \qquad \frac{t}{2} = 44°\,52'$$

$$a = 94\;\;58 \qquad t = 89\;\;44$$

$$M = 96\;\;30$$

$$M_0 = +\mathbf{1°32'}$$

контрола

$$t^h = 5^h\,58^m 56^s \qquad t + \alpha = 16^h\,19^m 55^s$$

$$\alpha = 10\;\;20\;\;59 \qquad T = 16\;\;21\;\;12$$

$$u = -\;\mathbf{1^m 17^s}$$

ГЛАВА XI.

ОДРЕЂИВАЊЕ ВРЕМЕНА ПО ВИСИНАМА НЕБЕСНИХ ТЕЛА.

91. Мерење зенитних растојања звезде.

При мерењу зенитног растојања какве звезде, која је погодна за одређивање времена по њој, на њу се врше при оба положаја инструмента (R) и (L) по неколико визирања, како ради тога да се ослаби утицај случајних грешака посматрања на тачност извођења поправке часовника, тако и ради тога да се има потребна контрола свију записа посматрања у журналу. При томе је још корисно, да се прелаз са једнога положаја инструмента на други врши два пут у оваквом симетричном реду:

2 посматратања звезде при кругу R (или L)
4 „ „ „ „ L (или R)
2 „ „ „ „ R (или L)

зато што ће се тада искључити у средњем резултату утицај поступних промена места нуле на либели и других промена на инструменту, које се врше пропорционално времену. Стање барометра и термометра треба такође записивати како до, тако и после посматрања, јер је то неопходно потребно за доцније срачунавање утицаја рефракције на мерена зенитна растојања звезде.

Свако поједино посматрање звезде при кругу (R) или пак (L) састоји се: 1.) у приближном постављању дурбина по висини, позитивним обртањем микрометарног завртња, те да пролаз звезде преко хоризонталног кончића буде тек после неколико секунада (5 до 10), што је неопходно потребно ради умирења мехура либеле при вертикалном кругу; 2.) у тачној оцени момента T, по хронометру, прелаза звезде преко кончића; 3.) у прочитању либеле одмах затим, и, најзад, 4.) у прочитању вертикалног круга помоћу оба микроскопа или нониуса. Добро је такође записивати и приближно прочитање хоризонталнога круга, да бисмо потпуно уверени били, да се заиста посматра жељена звезда а не каква друга.

Да означимо средње из прочитања микроскопâ или нониусâ, — поправљено још и за стање либеле (чл. 60.), — за неко посматрање при кругу с десна са R, а при кругу с лева са L, па нека истинито место зенита на кругу буде $Z = Z_0 + \triangle Z_0$, где Z_0 означава његову приближну величину, која је већ унапред позната. Тада ће сва изведена зенитна растојања звезде

$$z' = Z_0 - R \qquad \text{и} \qquad z' = L - Z_0$$

бити при једном положају круга смањена а при другом повећана за једну и исту малу величину $\triangle Z_0$; стога ће се и часовни угли њени t, који тим зенитним растојањима одговарају, добити једни мањи а други већи од истинитих за величину

$$\frac{\triangle Z_0}{\cos\varphi \sin a_m},$$

где a_m означава средњи из азимута звезде за време посматрања. На средњи пак резултат поправке хронометра из свију тих посматрања грешка $\triangle Z_0$ неће ниуколико утицати.

Зенитна растојања z' треба затим да буду исправљена за величине рефракције, које им одговарају; али је њу довољно срачунати само за прво и последње посматрање, за интервална пак добиће се простим интерполовањем. Посматрани пак по хронометру моменти T_1, $T_2, \ldots$ T_8, који одговарају дефинитивно изведеним зенитним растојањима звезде z_1, $z_2, \ldots$ z_8, треба да се поправе приближно познатим ходом ω хронометра у односу према звезданом времену, да би се тражена његова поправка u рачунала према неком одређеном, макар и произвољном, моменту T_0, например, према средњем моменту из свију посматрања.

92. Срачунавање поправке хронометра.

За часовне угле звезде $t = T + u - \alpha$, који одговарају нађеним зенитним растојањима њеним z, добива се из основне једначине (3.) пређашње главе овакав израз:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta};$$

али за срачунавања он добива овакав преображај:

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2} = \frac{\cos\zeta - \cos z}{2\cos\varphi\cos\delta} = K\left(1 - \frac{\cos z}{\cos\zeta}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

где су $\zeta = \varphi - \delta$ и $K = \frac{\cos\zeta}{2\cos\varphi\cos\delta}$

величине сталне за цели низ посматрања звезде. Помоћу логаритамских таблица сума и разлика и „поморских таблица“*), у којима се $tg \sin^2\frac{t}{2}$ дају са 6 децимала, најудобније се врше срачунавања углова t у секундама времена, по аргументу t израженоме како у степенима, тако и у часовима. Понекад се изразу $\sin^2\frac{t}{2}$ даје и овај лагаритамски облик:

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(z - \zeta)\sin\frac{1}{2}(z + \zeta)}{\cos\varphi\cos\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)'$$

при чему формулар за срачунавање излази нешто сложенији.

Са нађеним часовним углима t величине ће $(\alpha) = T \mp t$, — са знаком минус за западне звезде и са плус за источне, — изражавати момент кулминације звезде по хронометру, и, оне треба да се разликују међу собом у појединим посматрањима, извршених при једном и истом положају круга (R) или (L),

---

*) „Мореходныя таблици“

само усљед случајних грешака тих посматрања; због тога, ако се узму средње вредности $(\alpha)_r$ и $(\alpha)_l$ из свију посмтрања при кругу (R) и при кругу (L) а затим њихова полусума:

$$[\alpha] = \tfrac{1}{2}[(\alpha)_r + (\alpha)_l],$$

онда ће се дефинитивно добити:

$$u = \alpha - [\alpha] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

Заједно с тим одредиће се и поправке $\triangle Z_0$ раније приближно узетога места зенита Z_0 из израза:

$$\triangle Z_0 = \cos\varphi \sin a_m \frac{(\alpha)_r - (\alpha)_l}{2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

али се она исто тако може одредити и из пропорције:

$$\frac{\triangle Z_0}{\frac{1}{2}[(\alpha)_r - (\alpha)_l]} = \frac{z_n - z_1}{t_n - t_1} = \left(\frac{\triangle z}{\triangle t}\right)_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)'$$

где су t_1 и t_n часовни угли звезде, срачунати за зенитна растојања z_1 и z_n првога (1) и последњега (n) посматрања.

Ако се најзад узму одступања v појединих резултата (α) од средњих $(\alpha)_r$ и $(\alpha)_l$, то ће се по суми њихових квадрата (vv) срачунати средња случајна грешка једнога посматрања звезде:

$$E_T = \sqrt{\frac{(vv)}{n-2}}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

али је за повољно њено одређивање потребно, разуме се, доста знатан број звезда, посматраних при истим околностима. Теорна пак њена вредност, — пошто је комбинована из средње случајне грешке ε_T у запаженом моменту T пролаза звезде преко хоризонталног кончића у дурбину (чл. 84.) и грешке E_z у прочитању вертикалног круга (чл. 60. и чл. 67.), — треба да буде оваква:

$$E_T^2 = \varepsilon_T^2 + \left(\frac{E_z}{\cos\varphi \sin a}\right)^2 = e^2 + \frac{\varepsilon^2 + E^2{}_z}{\cos^2\varphi \sin^2 a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

Тако нпр. на ширини $\varphi = 60^\circ$, при $a = 90^\circ$ и $e = \pm 0^s10$, за Репсолдов вертикални круг (чл. 60.) при повољним околностима за посматрање треба да буде: $\varepsilon = \pm \frac{2^s5}{50} = \pm 0^s050$, $E_z = 0''6 = \pm 0^s040$ и

$$E_T = \sqrt{(0.10)^2 + 4\,(0.05)^2 + 4\,(0.04)^2} = \sqrt{0.0264} = \pm 0^s16;$$

а за мали универсални инструмент (чл. 67.) $\varepsilon = \pm \frac{2^s5}{20} = \pm 0^s12$, $E_z = \pm 4''0 =$ $= \pm 0^s27$ и

$$E_T = \sqrt{(0.10)^2 + 4\,(0,12)^2 + 4\,(0.27)^2} = \sqrt{0.3592} = 0^s60.$$

Кад се најзад узме, да је ради одредбе времена звезда посматрана у оба случаја 8 пута, и, кад се узме у обзир средња грешка $_*\varepsilon_u$ у координатама звезде (чл. 88.), која је при $a = 90^\circ$ и $\varphi = 60^\circ$ равна $\pm 0^s40$, онда се у изводу резултата поправке часовника из тих 8 посматрања може очекивати у првом случају средња случајна грешка

$$E_u = \sqrt{(0.04)^2 + \frac{0.0264}{8}} = \sqrt{0.0049} = \pm 0\overset{s}{.}07,$$

а у другом

$$E_u = \sqrt{(0.04)^2 + \frac{0.3592}{8}} = \sqrt{0.0465} = \pm 0\overset{s}{.}22$$

Пример. 18. јуна 1859. год. у Пулкову ($\varphi = 59^\circ 46' 20\overset{''}{.}0$) посматрана је звезда η *Ursae majoris* ($\alpha = 13^h 42^m 1\overset{s}{.}94$, $\delta = 50^\circ 1' 4\overset{''}{.}1$), помоћу Репсолдовог преносног вертикалног круга*) па су у моментима T по хронометру добивена, са приближним местом зенита $Z_0 = 359^\circ 58' 50\overset{''}{.}0$, ова зенитна растојања z, поправљена за рефракцију. Константне величине $lg\, cos\, \zeta$ и $lg\, K$, које улазе у срачунавање часовних углова t, срачутате су доле, засебно.

	T	z	$lg\, cos\, z$	д. $lg\left(1 - \frac{cs\, z}{cs\, \zeta}\right)$	$lg\, sin^2 \frac{t}{2}$	t	$(\alpha) = T - t$	v
L	$17^h 5^m\ 5\overset{s}{.}2$	$29^\circ 49' 47\overset{''}{.}8$	9.938272	0.921657	9.261135	$3^h 22^m 17\overset{s}{.}30$	$13^h 42^m 47\overset{s}{.}90$	$+0\overset{s}{.}13$
	7 12.0	30 5 42.5	.937113	.913232	.269560	24 24.06	47.94	+0.17
R	10 32.2	30 30 59.6	.935246	.900039	.282753	27 45.62	46.58	—0.09
	12 30.1	30 45 45.9	.934141	.892443	.290349	29 43.42	46.68	+0.01
	14 6.0	30 57 45.9	.933235	.886326	.296466	31 19.20	46.80	+0.13
	15 51.4	31 10 59.2	.932229	.879645	.303147	33 4.80	46.60	—0.07
L	18 54.6	31 33 47.7	.930472	.868259	.314533	36 7.09	47.51	—0.26
	21 16.2	31 51 27.9	.929092	.859556	.323236	38 28.48	47.72	—0.05
			9.993676	0.182792			$(\alpha)_l = 13\ 42\ 47.77$	

$\zeta = 9^\circ 45' 15\overset{''}{.}9$

$lg\, cos\, \zeta = 9.993676$

$lg\, sec\, \delta = 0.192093$

$lg\, 2\, cos\, \varphi = 0.002977$

$lg\, K = 0.182792$

$\frac{1}{2}[(\alpha)_r - (\alpha)_l] = -0\overset{s}{.}55$

$z_8 - z_1 = 122'$

$t_8 - t_1 = 16\overset{m}{.}2$

$\triangle Z_0 = -4\overset{''}{.}1$

$\mathbf{Z = 359^\circ 58' 45\overset{''}{.}9}$

$(\alpha)_r = 46.67$

$(\alpha) = 13\ 42\ 47.22$

$\alpha = 13\ 42\ 1.94$

днев. абер. $+0.02$

$u = -\mathbf{45\overset{s}{.}26}$

$$E_T^2 = \frac{(vv)}{8-2} = 0.0243 \qquad E_T = \pm 0\overset{s}{.}16$$

$$E_u^2 = (0.04)^2 + \frac{0.0243}{8} = 0.0046 \qquad E_u = \pm 0\overset{s}{.}068$$

93. Посматрања Сунца.

Кад се посматра Сунце или каква планета чија се деклинација брзо мења, онда се, као и за звезду, могу срачунавати сви часовни угли t за поједина посматрања са једном и истом деклинацијом δ_m небесног тела, која одговара средњему моменту посматрања T_m а после им додавати само мале корекције $\triangle t_\delta$ за њихово привођење на праве деклинације δ. Кад се у сферном троуглу ZPE оставе без промене $PZ = 90^\circ - \varphi$ и $ZE = z$ а промени само страна $PE = 90^\circ - \delta$, лако је добити за те поправке израз:

$$\triangle t_\delta = (\delta - \delta_m) \frac{cotg\, p_m}{cos\, \delta_m},$$

---

*) „Репсолдовъ кругъ и хронометры“ П. Смыслова, стр. 97.

у коме се средња величина паралактичног угла p_m може срачунати чак и помоћу логаритама од три децимале по формули

$$sin\, p_m = \frac{cos\, \varphi\, sin\, t_m}{sin\, z_m}.$$

Што се тиче истинитих зенитних растојања z центра Сунчева диска, по којима треба срачунавати његове часовне угле t, они ће се разликовати од посматраних зенитних растојања горњега и доњега краја његова за величину одговарајућих корекција: 1.) за утицај рефракције, 2.) за угловну величину радиуса Сунчева, која се може узети из Naut. Almanac-а, и 3.) за утицај Сунчеве паралаксе $\pi_\odot$, који је изражен познатом формулом:

$$z' - z = \pi_\odot\, sin\, z'.$$

94. Спајање неколико посматрања у једно средње.

Ради скраћења срачунавања понекад се неколико једно за другим измерених зенитних растојања каквога небесног тела z_1, $z_2 \ldots . z_n$ спајају у једно средње $z_m = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \ldots .. + z_n)$, претпостављајући, да ће оно одговарати средњему из момената посматрања, тј. $T_m = \frac{1}{n}(T_1 + T_2 + \ldots .. + T_n)$. Да видимо сад, колика може бити занемарена при том грешка у z_m?

Кад се са z_0 означи зенитно растојање небесног тела, које тачно одговара моменту T_m а са Z'_m и Z''_m посебне вредности производних $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$ при $T = T_m$, онда ћемо по Тејлоровом реду добити ове изразе:

$$\begin{aligned}
z_1 - z_0 &= Z'_m (T_1 - T_m) + \tfrac{1}{2} Z''_m (T_1 - T_m)^2 \\
z_2 - z_0 &= Z'_m (T_2 - T_m) + \tfrac{1}{2} Z''_m (T_2 - T_m)^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_n - z_0 &= Z'_m (T_n - T_m) + \tfrac{1}{2} Z''_m (T_n - T_m)^2,
\end{aligned}$$

који ће у средњем дати

$$z_m - z_0 = \tfrac{1}{2} Z''_m \cdot \frac{\Sigma (T - T_m)^2}{n}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6.)$$

на основу формула пак $(1.)_z$ и $(1.)_a$ главе X излази:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)}{dt} = cos\, \varphi\, cos\, a \frac{da}{dt} = cos\, \varphi\, cos\, a \frac{cos\, \delta\, cos\, p}{sin\, z}$$

или

$$Z''_m = cos\, \varphi\, cos\, \delta \frac{cos\, a_m\, cos\, p_m}{sin\, z_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6.)'$$

Овај множитељ Z''_m који улази у израз разлике $(z_m - z_0)$, постаје врло мали за звезде, које су блиске полу ($\delta = 90^\circ$), тако исто и за оне које се посматрају близу првог вертикала ($a_m = 90^\circ$) или око њихових елонгација ($p_m = 90^\circ$); уопште пак његова величина може бити доста знатна. Узмимо например, да је

$Z''_m = \frac{1}{2}$ и да је извршено само два посматрања у интервалу времена од $T_2 - T_1 = 2^m$; тада би разлика $(z_m - z_0)$ изашла у секундама оваква

$$z_m - z_0 = \tfrac{1}{4}\,\frac{\Sigma(T - T_m)^2}{2}\,sin\,1'' = \frac{(1^m)^2 + (1^m)^2}{2} \cdot \frac{sin\,1''}{4} = \frac{15^2.60^2}{800\,000} = 1''\!.0$$

па према томе она се не би могла занемарити при посматрањима велике тачности. Али, ако би, при истој вредности $Z''_m = \frac{1}{2}$, било извршено чак пет посматрања звезде у интервалима од $15^s = \frac{1}{4}^m$, онда би грешка изашла незнатна, а наиме:

$$z_m - z_0 = \tfrac{1}{4}\,\frac{\Sigma(T - T_m)^2}{5}\,sin\,1'' = \left[(\tfrac{2}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{2}{4})^2\right]\frac{sin\,1''}{20} = 0''\!.12$$

На тај начин, при спајању неколико посматрања у једно средње, занемарити разлику $(z_m - z_0)$ или, што је исто, допустити пропорционалност промена зенитних растојања интервалима времена, — допуштено је само у оним случајима, када се та посматрања врше у току врло кратког времена, као например, при пролазу источне или западне звезде преко неколико хоризонталних кончића у дурбину зенит-телескопа.

95. Посматрања западних и источних звезда.

У прошлој је глави (чл. 85.) било већ напоменуто, да се утицај систематске грешке $\triangle z$ у мереном зенитном растојању звезде на поправку хронометра u потпуно искључује при посматрању двеју звезда, западне и источне, на једнаким зенитним растојањима z_w и z_0. Али је довољна и приближна једнакост њихова па да се систематске њихове грешке $\triangle z$ могу сматрати за једнаке, и тада, ако се претпостави, да је ширина φ места посматрања позната са довољном тачности, кад се са њоме срачунате поправке хротометра означе са u_w и u_0, и кад се са a_w и a_0 означе бројне вреоности азимута, онда ћемо добити за одређење $\triangle z$ и истините поправке хронометра u две једначине:

$$u + \frac{\triangle z}{cos\varphi\,sin\,a_w} = u_w, \qquad u - \frac{\triangle z}{cos\varphi\,sin\,a_0} = u_0 \quad . \; . \; . \; . \quad (7.)$$

из којих ћемо наћи, да је

$$u = \frac{u_w\,sin\,a_w + u_0\,sin\,a_0}{sin\,a_w + sin\,a_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)_u$$

$$\triangle z = (u_w - u_0)\,cos\,\varphi \cdot \frac{sin\,a_w\,sin\,a_0}{sin\,a_w + sin\,a_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)_{\triangle z}$$

У тако изведеној поправци u остаје само неизбежна стална лична грешка посматрачева и још нека нетачност услед недовољне тачности ширине места φ, која се потпуно поништава само при потпуној једнакости a_w и a_0. Средња пак случајна грешка E'_u резултата u приближно ће бити равна

$$E'_u = \frac{E_u}{\sqrt{2}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)'$$

где E_u означава средњу грешку резултата поправке по једној звезди (чл. 92.).

Ако се тим истим инструментом буде посматрало много таквих парова звезда на разним зенитним растојањима z', z'', z''', то ће се по формули $(7.)_{\triangle z}$ добити и систематске грешке $\triangle z'$, $\triangle z''$, $\triangle z'''$,.... које тим зенитним растојањима одговарају. Као што ћемо видети у идућој глави, те се грешке тако исто добивају из одређивања ширинâ помоћу истог инструмента. На тај се начин могу затим ослободити од њих и посебна мерења зенитних растојања звездâ.

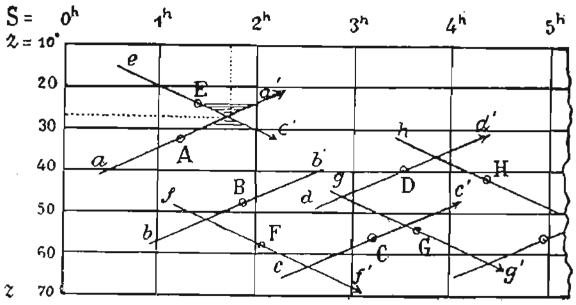
Припрема, на даној ширини места, приближних ефимерида за посматрање звезда у близини првог вертикала олакшава се тиме, што се и зенитна растојања, и азимути мењају тада за све звезде подједнако а наиме, у 10 минута звезданог времена за

$$dz = \pm 150' \cos\varphi \qquad \text{и} \qquad da = +150' \sin\varphi; \quad . \;\; . \;\; . \quad (8.)$$

затим остаје само, да се за сваку звезду (α, δ) приближно срачуна зенитно њено растојање z_0 и звездано време S_0 при $a_0 = 90^\circ$ по овим простим формулама:

$$\cos z_0 = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \qquad \cos t_0 = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi} \qquad \text{и} \qquad S_0 = \alpha \mp t_0. \quad . \;\; . \quad (8.)'$$

Затим је лако графички одредити онај момент S када ће се нека од западних звезда налазити у близини првога вертикала на једној и истој висини са неком источном, да би се око тога момента посматрале непосредно једна за другом. Кад се ради тога пренесу на квадрираној хартији по хоризонталним линијама (сл. 103.) звездана времена S а по вертикалним зенитна растојања звездâ па се по напред срачунатом, за разне звезде A, B, C,..., временима S_a, S_b, S_c,.... и зенитним растојањима z_a, z_b, z_c,.... пренесу тачке A, B, C,... и кроз њих повуку праве aAa', bBb', cCc',...., које изражавају напред споменуте промене (8) зенитних растојања звездâ у току времена, онда ће за источне звезде (A, B, C,....) те праве ићи одоздо навише а за западне (E, F, G,...) одозго наниже. Тачка пресека каквих двеју од њих, например aAa' са eEe', и одредиће онај моменат $(S = 1^h 44^m)$, када се звезде A и E налазе у близини првога вертикала на једнаким зенитним растојањима $(z = 27^\circ 45')$.



Сл. 103.

Кад се жели, да се на сваку звезду изврши 8 визирања, зашта је петребно око 16 минута, онда, разуме се треба почети са посматрањем једне звезде (A или E) за 16 минута до тога момента заједничке им висине $(S = 1^h 44^m)$ а посматрања друге завршити за 16 минута после њега. Тада ће измерена зенитна растојања обеју звезда и изаћи приближно једнака.

96. Формуле за одређивање времена по одговарајућим висинама звездâ.

Да расмотримо сада најтачнију и у исто време најпростију методу одређивања времена по строго једнаким, одговарајућим висинама двеју звезда, источне (α_0, δ_0) и западне (α_w, δ_w). Претпоставићемо, да висина дурбина зенит-телескопа (или каквога другог инструмента) остаје за време посматрања обеју тих звезда непромењена и да су запажени по хронометру моменти пролаза њихова преко једнога од хоризонталних кончића били респективно: T_0 и T_w. По тим даним, при познатој ширини места φ, тражена ће се поправка хронометра u одредити из једначине

$$sin\,\varphi\, sin\,\delta_0 + cos\,\varphi\, cos\,\delta_0\, cos\, t_0 = sin\,\varphi\, sin\,\delta_w + cos\,\varphi\, cos\,\delta_w\, cos\, t_w,$$

коју смо имали у чл. 85., на овај начин:

Ако се овде под t_0 и t_w буду подразумевале позитивне бројне вредности часовних углова звезда, т.ј.

$$t_0 = \alpha_0 - (T_0 + u) \qquad \text{и} \qquad t_w = (T_w + u) - \alpha_w,$$

онда, кад се означи

$$\frac{t_w + t_0}{2} = \frac{T_w - T_0}{2} + \frac{\alpha_w - \alpha_0}{2} = t, \qquad \frac{\delta_w + \delta_0}{2} = \delta,$$

$$\frac{t_w - t_0}{2} = u + \frac{T_w + T_0}{2} - \frac{\alpha_w + \alpha_0}{2} = y, \qquad \frac{\delta_w - \delta_0}{2} = \varepsilon,$$

имаћемо, да је

$$sin\,\delta_w - sin\,\delta_0 = 2\, sin\,\varepsilon\, cos\,\delta,$$

$$cos\,\delta_0\, cos\, t_0 - cos\,\delta_w\, cos\, t_w = 2\, sin\,\varepsilon\, sin\,\delta\, cos\, t\, cos\, y + 2\, cos\,\varepsilon\, cos\,\delta\, sin\, t\, sin\, y;$$

стога ће се наша основна једначина, — пошто се подели са $2\, cos\,\varphi\, cos\,\varepsilon\, cos\,\delta\, sin\, t$, — претворити у ову

$$sin\, y + \frac{tg\,\varepsilon\, tg\,\delta}{tg\, t}\, cos\, y = \frac{tg\,\varepsilon\, tg\,\varphi}{sin\, t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.)$$

Кад се сад стави, да је

$$tg\, m = \frac{tg\,\varepsilon\, tg\,\delta}{tg\, t} \qquad \text{и} \qquad sin\, n = \frac{tg\,\varepsilon\, tg\,\varphi}{sin\, t}\, cos\, m, \quad . \; . \; . \quad (10.)$$

онда ћемо наћи, да је

$$\left.\begin{array}{c} y = n - m \\ u = \frac{\alpha_w + \alpha_0}{2} - \left(\frac{T_w + T_0}{2} - y\right) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11.)$$

То су тачне формуле, по којима се одређује поправка хронометра u при ма каквим деклинацијама звезда δ_w и δ_0; али, као што је већ речено у чл. 85. нетачност ширине φ неће имати утицаја на тај резултат u само онда, када је разлика $(\delta_w - \delta_0)$ врло мала.

Кад је бројна вредност $(\delta_w - \delta_0)$ мања од 4°, помоћни ће угли m и n бити тако мали, да ће се стачунати много простије помоћу логаритамских поправка $\mathfrak{S}(x)$ синуса малих углова x (теорни део курса астрономије, глава III) по формулама:

$$\left.\begin{aligned} lg\,m &= lg\,\varepsilon + lg\,\frac{tg\,\delta}{tg\,t} + 2\,\mathfrak{S}(\varepsilon) - 2\,\mathfrak{S}(m)\\ lg\,n &= lg\,\varepsilon + lg\,\frac{tg\,\varphi}{sin\,t} + 2\,\mathfrak{S}(\varepsilon) - 3\,\mathfrak{S}(m) + \mathfrak{S}(n)\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (10)'$$

у случајима пак кад је $(\delta_w - \delta_0) < 30'$, срачунавање се њихово може извршити чак и по овим најпростијим формулама:

$$m = \varepsilon\,\frac{tg\,\delta}{tg\,t}, \qquad\qquad n = \varepsilon\,\frac{tg\,\varphi}{sin\,t}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (10.)''$$

Величину y, која улази у израз (11.) тражене поправке хронометра u, и, која се претвара у нулу при потпуној једнакости деклинација $\delta_w = \delta_0$, — ми ћемо звати свођењем полусуме посматраних момената T_w и T_0 на најпростији случај $\delta_w = \delta_0$, или пак, краткоће ради, просто *свођењем.*

Да претпоставимо сад, да су посматрани били по хронометру још и моменти T'_0 и T'_w пролаза тих истих двеју звезда још и преко другог каквог хоризонталног кончића мреже дурбинове. Величина свођења y', која њима одговара, врло ће се мало разликовати од y, које је већ срачунато за први кончић, стога ће се добити помоћу диференцијалне формуле

$$\left.\begin{aligned} y' - y &= \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)(t' - t),\\ \text{где је}\qquad (t' - t) &= \tfrac{1}{2}\,[(T'_w - T'_0) - (T_w - T_0)];\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (12.)$$

за одредбу пак бројне вредности диференцијалног коефицијента $\frac{\partial y}{\partial t}$ може да се узме, у место (9.), приближни израз

$$y\,sin\,t = \varepsilon\,tg\,\varphi - \varepsilon\,tg\,\delta\,cos\,t$$

из којега излази

$$\partial y\,sin\,t + y\,cos\,t\,.\,\partial t^s\,sin\,1^s = \varepsilon\,tg\,\delta\,sin\,t\,.\,\partial t^s\,sin\,1^s$$

па отуд

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = sin\,1^s\,(\varepsilon\,tg\,\delta - y\,cotg\,t)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (12.)'$$

На тај начин, кад се пар звезда посматра и на неколико кончића мреже, поправка се хронометра u може извести посебно за сваки кончић.

Друга погодба, која је врло значајна, како ради удопства посматрања звезда на одговарајућим висинама, тако и ради сигурности извода поправке хронометра u из њих, састоји се у томе, да интервал времена међу посматрањима западне и источне звезде буде по могућности што мањи, т. ј. да се оне посматрају око онога момента S, када се налазе на једној и истој висини. Тај се момент лако одређује са неопходно потребним, макар и грубим приближењем, по формулама (11.) и (10.)'', кад се у њима стави: $T_0 = T_w = S$, $t = \frac{1}{2}\,(\alpha_0 - \alpha_w)$ и $u = 0$; затим је већ лако приближно срачунати опште зенитно растојање z и азимуте a_0 и a_w за обе звезде у томе моменту, што је неопходно потребно за стављање дурбина у потребни положај пред самим посматрањем. Треба само још нешто мало изменити те величине z, a_0 и a_w те да се започне посматрање једне звезде изабраног пара за $2^{1}/_{2}$ до 3 минуте до момента S, а друге за неколико после њега.

Када је први пут испитивана ова метода одређивања времена 1874. г. на Пулковској Опсерваторији[1]), изабрано је било 160 парова најсјајнијих звезда̂ (до $3^{1}/_{2}$ вел.), погодних ($\varepsilon < 2^0$) за посматрања у северним ширинама од 30^0 до 70^0, па су за сваки пар биле дате помоћне величине за олакшање срачунавања S, z, a_0 и a_w у даној ширини места φ. Доцније су астрономи Кортаци[2]) и Витрам[3]) још више упростили те помоћне таблице а број пари звезда до $4^{1}/_{2}$ величине допунили до 200; Геод. пуковник пак Н. О. Шчеткин[4]) и астроном П. Н. Долгов[5]) издали су опширне таблице за те парове звезда, помоћу којих се припрема за посматрање врши без икаквих срачунавања сем простога интерполовања.

97. Посматрања одговарајућих висина звезда.

Посматрања одговарајућих висина звезда, разуме се, да је најзгодније вршити зенит-телескопом, али се врло добро могу вршити и преносним вертикалним кругом и универсалним инструментом, ако су њихови дурбини снабдевени мрежом од неколико хоризонталних кончића.

Пошто се постави и укочи дурбин на потребном зенитном растојању z за 3 до 4 минуте до напред реченога момента S, за избрани пар звезда, и, кад се нађе у пољу гледања дурбина прва од њих, онда се посматра по хронометру пролаз њен преко свију хоризонталних кончића у простору ограниченом двама вертикалним кончићима, ради чега је потребно лагано покретати дурбин по азимуту помоћу азимуталног микрометарног завртња инструмента. Стање висинске либеле, која показује мале промене висине дурбина, треба записивати како до, тако и после посматрања звезде, а када је подлога (статив) инструмента недовољно стабилна, онда и неколико пута у интервалима времена прелаза њеног преко разних кончића. Кад се затим обрне инструмент око вертикалне његове осе и у пољу гледања дурбина нађе друга звезда, онда се на исти начин посматра и њен пролаз преко свију кончића у обратном реду.

Претпоставимо да су за неки кончић прочитања либеле при посматрањима западне и источне звезде била i_w и i_0 и да већему од њих например i_w одговара и већа висина дурбина. Јасно је, да је за свођење висина обеју звезда на једнакост потребно, да се запаженоме моменту T_w за западну звезду дода време

$$\triangle T_w = \frac{i_w - i_0}{\cos\varphi \sin a_w}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (13.)$$

---

[1]) Н. Цингеръ. — „Объ опредѣленіи времени по соотвѣтствующимъ высотамъ различныхъ звѣздъ“. — 1874. г.

[2]) J. Kortazzi. — „Hülfstafeln zur Berechnung oertlicher Ephemeriden für die Zeitbestimmungen nach der Zinger' schen Methode“. 1891.

[3]) Dr. Witram. „Tables auxiliaires pour la détermination de l'heure par des hauteurs correspondantes de différentes étoiles“. 1892.

[4]) Н. Щеткинъ. — „Эфемериды звѣздъ для опредѣленія времени по способу проф. Н. Цингера“ (для зоны отъ 39-ог до 61-го град. сѣв. широты). 1902.

[5]) П. Догловъ. — „Таблицы эфемеридъ звѣздъ для опредѣленія времени по соотв. высотамъ“ (для зоны отъ 59-го до 71-го град. сѣверной широты). 1915.

које би она употребила за пролаз по висини угловне величине ($i_w - i_0$). Ако ли је инструмент постављен стабилно те се стање либеле мења врло мало, онда је простије и сасвим је допуштено, да се та поправка сматра као једна и иста за све кончиће.

На основу реченога у чл. 94, могло би се, ради простоте, допустити, да се сви посматрани моменти обеју звезда преко једних и истих кончића споје у опште средње моменте T_w и T_0 ради тога, да би се срачунавање, по њима, свођења y и поправке хронометра u вршило свега један пут а не посебно за сваки кончић, али би тада извршена посматрања остала без потребне контроле те се не би могло судити о случајним њиховим грешкама, од којих зависи тачност самога резултата u. Теорна пак средња случајна грешка E'_T посматрања пара звезда на једном кончићу, сагласно са формулом (5), — ако се у њој под E_z буде подразумевала релативно ништавна грешка у прочитању либеле, — треба да буде оваква

$$E'^2_T = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2_T + \tfrac{1}{2}\,\frac{E_z^2}{cos^2\varphi\, sin^2\, a} = \tfrac{1}{2}\,e^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2 + E_z^2}{cos^2\varphi\, sin^2\, a}\ ,$$

респективна пак средња грешка E''_u у резултату u из посматрања на n кончића биће

$$E''_u = \sqrt{\tfrac{1}{2}{*}\,\varepsilon^2_u + \tfrac{1}{n}\cdot E'^2_T}\cdot$$

Тако нпр. при $n = 6$ и при истим бројним вредностима за φ, a, e и ε, као и у чл. 92. за Репсолдов ће вертикални круг ($E_z = \pm 0''.15 = \pm 0^s.01$) изаћи, да је

$$E'_T = \sqrt{\tfrac{1}{2}(0.10)^2 + 2\,(0.05)^2 + 2\,(0.01)^2} = \pm 0^s.10$$

$$\text{и}\ \ E''_u = \sqrt{\tfrac{1}{2}(0.04)^2 + \tfrac{1}{6}\,(0.10)^2} = \pm 0^s.05\,;$$

а за мали универсални инструмент ($E_z = \pm 0''.45 = \pm 0^s.03$) :

$$E'_T = \sqrt{\tfrac{1}{2}(0.10)^2 + 2\,(0.12)^2 + 2\,(0.03)^2} = \pm 0^s.19$$

$$\text{и}\ \ E''_u = \sqrt{\tfrac{1}{2}(0.04)^2 + \tfrac{1}{6}\,(0.19)^2} = \pm 0^s.08\,.$$

Ипак треба увек имати у виду, да се сигурност оваквога резултата u заснива углавноме на непромењљивости спајања либеле за дурбин и на постојаности места њене нуле за све време посматрања пара звезда; стога је потребно, ради елиминације утицаја поступних промена места нуле на либели, које могу бити каткад и знатне, да се одмах после првог пара звезда посматра други пар али у обрнутом реду, т. ј. почети посматрања са западном звездом, ако се је посматрање код првог пара почињало са источном, или обратно, Овакво ће одређивање времена из два пара звезда бити *потпуно.*

Пример. 6. фебруара 1874. г. на Пулковској су Опсерваторији ($\varphi = 59^\circ\ 46'\ 21''\ 5$) били посматрани по хронометру, који је ишао по звезданом времену, даље означени моменти пролаза преко 6 кончића Репсолдовог вертикалног круга звезда: β *Andromedae* ($\alpha_w = 1^h2^m39^s.55$, $\delta_w = +34°57'12''.1$) на западу и Θ *Aurigae* ($\alpha_0 = 5^h51^m8^s.49$, $\delta_0 = +37°12'15''.0$) на истоку, са азимутима: $a_w = +56°$, $a_0 = -64°$ и $z = 32°46'$. Вредност једнога полуподеока ($\frac{1}{2}\tau$) либеле била је равна $1''.1$ и већем позитивном њеном прочитању одговарала је и већа висина дурбина.

Кончићи	T_w	i_w $\frac{1}{2}\partial.$	T_0	i_0 $\frac{1}{2}\partial.$	$\frac{1}{2}(T_w + T_0)$	$T_w - T_0$
I	$3^h\,14^m\,14^s.6$	-2.2	$3^h\,19^m\,59^s.8$	-0.3	$3^h\,17^m\,7^s.20$	$-5^m45^s.2$
II	14 23.0		19 51.8		7.40	—5 28.8
III	14 36.6		19 39.6		8.10	—5 3.0
IV	14 43.8		19 32.7		8.25	—4 48.9
V	14 51.2		19 26.1		8.65	—4 34.9
VI	15 5.6	-2.4	19 12.9	-0.6	9.25	—4 7.3
Средњи		-2.30 $\frac{1}{2}\partial$		-0.45	3 17 8.14	—4 58.3
$i_w - i_0 = -1.85 = -2''.03$					$\frac{1}{2}\triangle T_w = -0.16$	$\triangle T_w = -0.3$
по форм. (13) $\triangle T_w = -4''.85 = -0^s.32$					3 17 7.98	—4 58.3

Срачунавање m, n, y, u и $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ по форм. (10.)′, (11.) и (12.)′, за средње вредности

$$\tfrac{1}{2}(T_w + T_0) = 3^h17^m7^s.98 \text{ и } \tfrac{1}{2}(T_w - T_0) = -2^m29^s.15.$$

$\frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_w) = 2^h\,24^m\,14^s.47$
$\frac{1}{2}(T_w - T_0) = -\ 2\ 29.15$
$t^h = 2\ 21\ 45.32$
$t^0 = 35^0 26' 20''$
$\delta = \frac{1}{2}(\delta_w + \delta_0) = 36\ \ 4\ 43.5$
$\delta_w - \delta_0 = -135\ 2.9$
$\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta_w - \delta_0) = -270^s.10$

$lg\,(-\varepsilon\, tg\,\delta) = 2.2940$
$lg\,(-y\, cotg\, t) = 2.8665$
табл. разн. 0.1353
$lg\,(\varepsilon\, tg\,\delta - y\, cotg\, t) = 2.7312_n$
$lg\,\frac{1}{2}\, sin\, 1^s = 5.5607$
$lg\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 8.2919_n$

$lg\, tg\,\delta = 9.86251$
$lg\, cotg\, t = 0.14771$
$lg\,(-\varepsilon) = 2.43152$
$+2\,\mathfrak{S}(\varepsilon) = +6$
$lg\, tg\,\varphi = 0.23459$
$lg\, cosec\, t = 0.23670$

$lg\,(-m_0) = 2.44180$
$-2\,\mathfrak{S}(m) = -6$

$lg\,(-n_0) = 2.90287$
$-3\,\mathfrak{S}(m) = -9$
$+\mathfrak{S}(n) = +24$

$lg\,(-m) = 2.44174$
$lg(-n) = 2.90302$

$lg\left(\frac{n}{m}\right) = 0.46128$
д. $lg\left(1 - \frac{m}{n}\right) = 0.18423$

$lg\,(-y) = 2.71879$
$y = -8^m43^s.34$
$\frac{1}{2}(T_w + T_0) = 3^h\,17\ \ 7.98$

$\frac{1}{2}(T_w + T_0) - y = 3\ 25\ 51.32$
$\frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_0) = 3\ 26\ 54.02$
днев. абер. $= +0.02$

У $3^h\,17^m$ по хронометру $u = +\mathbf{1^m2^s.72}$

Случајне грешке посматрања:

Кончићи	$(T_w - T_0) - (T_w - T_0)_{cp.}$	*log.*	$y - y_{cp.}$	$\frac{1}{2}(T_w + T_0) + (y - y_{cp.})$	v
I	$-47^s.2$	1.6739^n	$+0^s.92$	$3^h\,17^m 8^s.12$	$-0^s.02$
II	—30.8	1.4886^n	+0.60	8.00	—0.14
III	—5.0	0.6990^n	+0.10	8.20	+0.06
IV	+9.1	0.9590	—0.18	8.07	—0.07
V	+23.1	1.3636	—0.45	8.20	+0.06
VI	+50.7	1.7050	—0.99	8.26	+0.12
		$lg\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 8.2919_n$		3 17 8.14	

$$E'_T = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{6-1}} = \sqrt{\frac{0.0465}{5}} = \pm\, 0^s.096$$

98. Одговарајуће висине Сунца.

При посматрањима одговарајућих висина звезда секстантом, свака се звезда може посматрати неколико пута, померајући његову алхидаду за округли број минута, н.пр. за 10′ или 20′, према томе с каквом се брзином звезда привидно креће по висини, али, услед дуготрајности ових посматрања, сад се већ не може допустити пропорционалност промене висине звезде са временом (чл. 94.) већ треба срачунавати свођење y по формулама (10.) и (11.) за неколико положаја алхидадиних посебно, интервалне пак вредности могу се узети интерполовањем.

Како секстантом, тако и рефлекторним кругом најчешће се посматрају јутарње и вечерње висине Сунца, при чему се у свакоме низу узима подједнак број посматрања горњега и доњега краја његова. При томе је потребно такође записивати и стање барометра и термометра, јер је доста велики интервал времена између оба низа посматрања те се температура ваздуха и притисак његов могу толико изменити, да деловање рефракција r_w и r_0 на западне и источне висине изађе различито. Тада треба свима моментима T_w, посматраним на западу, додавати поправку, сличну са (13.):

$$\triangle T_w = \frac{r_w - r_0}{\cos\varphi \sin a_w} .$$

Часовни угли Сунца t_0 и t_w, при равним висинама његовим на истоку и на западу, излазе неједнаки услед промене његове деклинације δ у току времена $T_w - T_0 = 2\,t$; стога, ако се ова промена за 1 час означи са $\triangle\delta$, онда ће изаћи, да је

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\delta_w - \delta_0) = \triangle\delta \,.\, t^h,$$

а свођење y, — за чије су срачунавање довољни и приближни изрази (10″.), — изразиће се у секундама времена овако:

$$y = \frac{\triangle\delta}{15}\left(\frac{t^h}{\sin t}\, tg\,\varphi - \frac{t^h}{tg\,t}\, tg\,\delta\right) = \triangle\delta\,(A\, tg\,\varphi - B\, tg\,\delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \; (14)$$

Срачунавања се по овој простој формули олакшавају још и тиме, што су у „поморским таблицама“ дати логаритми величина:

$$A = \frac{t^h}{15 \sin t} \qquad \text{и} \qquad B = \frac{t^h}{15\, tg\, t}$$

за разне интервале времена $(T_w - T_0) = 2\,t$.

Затим, пошто се за посматрања Сунца употребљује обично хронометар, који иде по средњему времену, то је и поправку његову u згодније одређивати такође у односу према средњем времену, користећи се *једначином времена*, чије се вредности дају у „Nautical Almanac“-у. Тада ће полусума $\frac{T_0 + T_w}{2}$, поправљена са свођењем y и са једначином времена, изражавати показање хронометра у моменту кулминације средњега Сунца $(0^h 0^m 0^s)$; стога ће се u добити овако:

$$u = -\left(\frac{T_0 + T_w}{2} - y - \text{једн. вр.}\right)$$

$$u = \text{једн. вр.} + y - \frac{T_0 + T_w}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14.)'$$

Свођење се y у томе случају зове *полудневна поправка*.

ГЛАВА XII.

ОДРЕЂИВАЊЕ ШИРИНЕ МЕСТА ПО ВИСИНАМА НЕБЕСНИХ ТЕЛА.

99. Свођење измерених висина на мередионалне.

При мерењу зенитних растојања каквога небесног тела у близини меридијана, у циљу одређивања географске ширине места, треба се уопште придржавати истих правила, као и при одређивању времена, т. ј. посматрати то тело неколико пута, симетрично, при оба положаја вертик. круга инструмента (R) и (L) (чл. 91.); да би пак грешка у изводу ширине $\triangle\varphi = - \triangle u \cos\varphi \, tg \, a$, која произлази од грешке $\triangle u$ [која је ушла у поправку хронометра при њеном срачунавању (чл. 84)], била неосетна, треба цео низ посматрања распоредити, по могућности, што симетричније у односу према меридијану, т. ј. треба мерити толико исто зенитних растојања небесног тела до његове кулминације (при негативним азимутима), колико и после (при позитивним азимутима). У осталом, за циркум-поларне звезде, због незнатних им азимута, та грешка $\triangle\varphi$ неће бити велика ни при посматрањима тих звезда и сједне само стране меридијана. Тако например, у ширини $\varphi = 60^\circ$, при $\triangle u = \pm 1^s$ и при средњем азимуту $a = 2^\circ$, излази, да је $\triangle\varphi$ свега око $\pm 0.''25$.

На истим основама као и при изводу поправке часовника (чл. 92.), треба да се из основне једначине

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t, \quad \text{где је } t = T + u - \alpha,$$

изводи и тражена ширина φ посебно за свако посматрање а наиме овим посредним путем, који на послу излази и као најпростији: Пошто се стави, да је

$$\varphi - \delta = \zeta \quad \text{и} \quad z - \zeta = r,$$

онда ћемо добити из формуле (1.)′ чл. 92. за малу величину r, — која се назива *свођењем* посматраног зенитног растојања z на меридионално ζ, — тачни израз:

$$\sin\frac{r}{2} = \sin\frac{z - \zeta}{2} = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + \zeta)} \sin^2\frac{t}{2},$$

а ако r не превазилази $1\frac{1}{2}^\circ$, онда, с тачношћу до $0.''1$, излази просто

$$r = \frac{2\cos\varphi\cos\delta}{\sin 1'' \sin\frac{1}{2}(z + \zeta)} \sin^2\frac{t}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

Као што се види, за срачунавање r по овој формули, треба већ унапред знати приближне вредности за φ_0 и $\zeta_0 = \varphi_0 - \delta$ понекад тачније него до $1'$; у противном случају није тешко срачунати их с том тачношћу, пошто се спочетка грубо срачуна r_0.

Затим, пошто се има цео низ од n зенитних растојања: $z'_1, z'_2, z'_3, \ldots . z'_n$, још не ослобођених од рефракције, то је згодније срачунати само једанпут величину

$$k = \frac{2 \cos \varphi_0 \cos \delta}{\sin 1'' \sin \frac{1}{2} (z_m + \zeta_0)},$$

која одговара

$$z_m = \frac{1}{n} (z'_1 + z'_2 + z'_3 + \ldots \ldots + z'_n) + \text{рефр.},$$

те да се затим нађу сва свођења: $r_1, r_2, r_3, \ldots . r_n$ овако:

$$lg\, r = lg\, sin^2 \frac{t}{2} + lg\, k + (z'_m - z') \frac{dif.\, lg\, sin \frac{1}{2} (z_m + \zeta_0)}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)',$$

при чему се $dif.$ промена логаритма синуса угла $\frac{1}{2}$ $(z_m + \zeta_0)$ при промени тога угла за $1'$ узима директно из тригонометриских таблица а $lg\, sin^2 \frac{t}{2}$ наћи ће се, као и у чл. 92, у специјалним за то таблицама.

Понекад се свођење на меридијан r срачунава помоћу развијања његова у ред; ако се при томе ограничимо са другим степенима од r и означимо

$$\frac{\cos \varphi_0 \cos \delta}{\sin \zeta_0} = k_0,$$

онда ће изаћи, да је

$$r = k_0 \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''} \cdot \frac{\sin \zeta_0}{\sin \left(\zeta_0 + \frac{r}{2}\right)} = k_0 \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''} \left(1 - \frac{r \sin 1''}{2} cotg\, \zeta_0\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{или} && r = k_0\, C - k_0^2\, cotg\, \zeta_0 \,.\, D, \\ &\text{где је} && C = \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''} \quad \text{и} \quad D = \frac{2 \sin^4 \frac{t}{2}}{\sin 1''} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)''$$

То је нарочито згодно при спајању неколико посматрања у једно средње, јер се тада директно добива:

$$\varphi - \delta = \zeta = \frac{\Sigma (z - r)}{n} = \frac{\Sigma z}{n} - \frac{k_0}{n} \cdot \Sigma C + \frac{k_0^2\, cotg\, \zeta_0}{n} \cdot \Sigma D;$$

Вредности пак C и D дају се у „поморским таблицама“ по аргументу t, израженоме временом.

100. Извод ширине места.

На основу реченога у чл. 91. и чл. 99. установљен је овај ред за извод ширине места φ из низа измерених зенитних растојања какве звезде:

1.) Из свију n прочитања R и L, извршених при кругу с десна и при кругу с лева, изведе се, с приближно познатим местом зенита Z_0, приближна (до десетих делова минуте) зенитна растојања:

$$z' = L - Z_0 \qquad \text{или} \qquad z' = Z_0 - R$$

2.) За средње из њих $z'_m = \frac{1}{n}(z'_1 + z'_2 + \dots z'_n)$ срачунава се рефракција па се тако добије

$$z_m = z'_m + \text{рефр.}$$

3.) Са приближно познатим вредностима φ_0 и $\zeta_0 = \varphi_0 - \delta$ срачунава се $lg\,k$ и свођење r по формули (1.)′ за свако посматрање посебно.

4.) Кад се додаду са потребним знаком вредности r извршеним тачним прочитањима (R) и (L), онда се добију тако звана *меридионална прочитања* (R) и (L), тј. таква, каква би се добила при посматрању зенитног растојања звезде на самоме меридијану.

5.) Кад се узму средње вредности (R) и (L), онда се изведе тачно привидно меридионално растојање ζ' звезде а тако исто и тачно место Z зенита на кругу из израза:

$$\zeta' = \frac{(L)-(R)}{2} \qquad \text{и} \qquad Z = \frac{(L)+(R)}{2}.$$

6.) Кад се томе ζ' дода тачна вредност рефракције, која одговара средњему из посматраних зенитних растојања z'_m (а ако је посматрана планета или Сунце, онда и утицај паралаксе $\pi \sin z_m$), онда се добије истинито меридионално зенитно растојање ζ и, најзад, тражена ширина

$$\varphi = \delta + \zeta.$$

Код овога се израза претпоставља, разуме се, да је $\delta < \varphi$; ако ли је $\delta > \varphi$, онда ће меридионално зенитно растојање небесног тела бити $\zeta = \delta - \varphi$ а

$$\varphi = \delta - \zeta.$$

У случају пак посматрања небесног тела у близини његове доње кулминације, часовне његове угле треба рачунати од момента те кулминације, тј. уместо t стављати $t' = T + u - (\alpha + 180^\circ)$ а, респективно томе, у место деклинације δ стављати $\delta' = 180^\circ - \delta$; у том ће случају тада изаћи

$$\varphi = \delta' - \zeta,$$

знак ће се пак свођења r променити, као што то и треба да буде, на негативни.

По одступањима v меридионалних прочитања (R) и (L) од њихових средњих резултата, изводи се средња случајна грешка једнога посматрања

$$E_z = \sqrt{\frac{(vv)}{n-2}},$$

која, због маленкости азимута a посматране звезде, треба да буде скоро исто толика, колика излази и при визирању дурбином на непомични предмет, тј. приближно $\pm 1.''0$ за Репсолдов вертик. круг и $\pm 4.''0$ за мали универсални инструмент (чл. 67.). Кад се пак претпостави, да се ширина φ изводи из n визирања на звезду при средњем азимуту $a = 0^\circ$, и, кад се узме у обзир грешка ${}_*\varepsilon_\varphi = \pm 0.''3$ која произлази из нетачности координата звезде (чл. 88.), онда ћемо добити за средњу грешку E_φ оваквога извода ширине — величину

$$E_\varphi = \sqrt{(0.''3)^2 + \frac{1}{n}E_z^2} \qquad \dots\dots\dots \qquad (2.)$$

Тако нпр. при $n = 8$, за Репсолдов ће вертик. круг изаћи приближно

$$E_\varphi = \sqrt{0.09 + \frac{1.00}{8}} = \sqrt{0.215} = \pm\, 0''46,$$

а за мали универсални инструмент

$$E_\varphi = \sqrt{0.09 + \frac{16.00}{8}} = \sqrt{2.09} = \pm\, 1''45.$$

Примери. 2. јануара 1870. г. на Пулковској Опсерваторији ($\varphi_0 = 59°46'21''4$) посматрана су била Репсолдовим вертик. кругом у близини меридијана зенитна растојања звезда: β *Pegasi* ($\alpha = 22^h57^m27^s1$, $\delta = +27°22'43''3$) и *Polaris* ($\alpha = 1^h11^m30^s1$, $\delta = 88°37'12''0$). Поправка хронометра била је $u = -23^s3$ а приближно место зенита на кругу $Z_0 = 0°2'0''$.

У 22^h50^m: спољ. терм. $t = -4°9$ R; баром. 29.55 енгл. палац., $t' = +12°2$ R.
„ 23 40: „ „ „ — 5.2 „ „ 29.70 „ „ „ + 12.0 „

I β *Pegasi*. — Момент кулминације по хроном. $(\alpha) = \alpha - u = 22^h57^m50^s4$.

	T по хроном	Прочитања круга	z'	$(z' - z'_m)$	$lg\,sin^2\frac{t}{2}$	попр.	Свођење r	Меридион. прочит.	v
L	$22^h55^m49^s$	32°25′ 6″3	32°23′1	— 1′9	5.2897		0′ 6″7	32°24′59″6	0″0
	58 7	25 0.3	23.0	— 2.0	3.557		0 0.1	60.2	+ 0.6
R	23 1 0	327 38 49.0	23.2	— 1.8	5.6769		0 16.4	327 39 5.4	+ 0.4
	3 59	38 4.4	23.9	— 1.1	6.2543		1 1.8	6.2	+ 1.2
	5 51	37 18.9	24.7	— 0.3	6.48480	+ 3	1 45.1	4.0	— 1.0
	7 26	36 33.9	25.5	+ 0.5	6.64145	— 5	2 30.7	4.6	— 0.4
L	10 49	32 29 35.3	27.6	+ 2.6	6.90379	— 26	4 35.5	32 24 59.8	+ 0.2
	12 37	30 55.8	28.9	+ 3.9	7.01658	— 39	5 57.2	58.6	— 1.0

$(\alpha) = 25\ 57\ 50.4$ $z'_m = 32\ 25.0$ $lg\,k = 5.53666$ (L) = 32 24 59.6
рефр. + 0.6 (R) = 327 39 5.0

$\zeta_0 = 32°23'38''$ $lg\,\frac{2\cos\varphi_0}{\sin 1''} = 5.31740$ Z = 0 2 2.3
$z_m = 28\ 59\ 45$ $lg\,\cos\delta = 9.94841$ $\zeta' =$ 32 22 57.3
$\frac{1}{2}(\zeta_0 + z_m) = 28\ 55\ 17$ $lg\,\sin\frac{1}{2}(\zeta_0 + z_m) = 9.72915$ рефр. = + 39.0
$lg\,k = 5.53666$ $\zeta =$ 32 23 36.3
$dif.\ lg\,k$ за 1′ . . . . 10.0 $\varphi =$ **59 46 19.6**

$(vv) = 4.16$; $E_z^2 = \frac{4.16}{8-2} = 0.69$; $E_z = \pm\, 0''83$.

II. *Polaris*. — Момент горње кулминације по хроном. $(\alpha) = \alpha - u = 1^h11^m53^s4$.

	T по хроном.	Прочитања круга	z'	$(z' - z'_m)$	$lg\,sin^2\frac{t}{2}$	попр.	Свођење r	Меридион. прочит.	v
L	$23^h19^m\ 3^s$	29° 2′30″7	29° 0′5	+ 1′3	8.77371	— 15	10′14″0	28°52′16″7	— 1″1
	20 52	2 15.3	29 0.2	+ 1.0	.75989	— 11	9 54.8	18.5	+ 0.7
R	23 51	331 2 25.7	28 59.6	+ 0.4	.73669	— 4	9 24.0	331 11 49.7	+ 1.3
	25 37	2 42.5	59.3	+ 0.1	.72263	— 1	9 6.1	48.6	+ 0.2
	27 17	2 58.6	59.0	— 0.2	.70915	+ 2	8 49.4	48.0	— 0.4
	28 59	3 14.9	58.8	— 0.4	.69515	+ 4	8 32.6	47.5	— 0.9
L	32 34	29 0 15.5	58.2	— 1.0	.66487	+ 11	7 58.2	28 52 17.3	— 0.5
	35 10	28 59 52.6	57.9	— 1.3	.64218	+ 15	7 33.9	18.7	+ 0.9

$(\alpha) = 25\ 11\ 53.4$ $z'_m = 28\ 59.2$ $lg\,k = 4.01462$ (L) = 28 52 17.8
рефр. + 0.6 (R) = 331 11 48.4

$$
\begin{array}{rlrlrl}
\zeta_0 = & 28^\circ 50' 49'' & lg\,\frac{2\,cos\,\varphi_0}{sin\,1''} = & 5.31740 & Z = & 0^\circ\ 2'\ 3''1 \\
z_m = & \underline{28\ 59\ 45} & lg\,cos\,\delta = & 8.38171 & \zeta' = & 28\ 50\ 14.7 \\
 & & lg\,sin\,\frac{1}{2}(\zeta_0 + z_m) = & 9.68449 & \text{рефр.} = & \underline{+\ 33.9} \\
\frac{1}{2}(\zeta_0 + z_m) = & 28\ 55\ 17 & lg\,k = & 4.01462 & \zeta = & 28\ 50\ 48.6 \\
 & & dif.\,lg\,k \text{ за } 1' \ldots\ldots & 11.4 & \varphi = & \mathbf{59\ 46\ 23.4}
\end{array}
$$

$$(vv) = 5.46; \qquad E_z^2 = \frac{5.46}{8-2} = 0.91; \qquad E_z = \pm\,0''96.$$

101. Таблице висинâ Поларне.

Због тога што се Поларна звезда E налази недалеко од пола P (PE $= \triangle =$ $= 1^\circ 15'$), и њена се висина $h = 90^\circ - ZE$ увек мало разликује од ширине места $90^\circ - PZ = \varphi$, стога за добивање ширине, треба тој висини h додавати само малу поправку, чији се приближни израз лако добива на овај начин:

Кад се подели сферни троугао PZE луком Ep, перпендикуларним на PZ, на два правоугла, PEp и EZp, па означе: $\sphericalangle$ ZPE $= S - \alpha = t$, $\sphericalangle$ PZE $= a$ и P$p = x$, онда ћемо из првога од њих добити, уместо тачнога израза $tg\,x = tg\,\triangle\,cos\,t$, — овај:

$$x = \left(\triangle + \frac{\triangle^3}{3}\right) cos\,t - \frac{x^3}{3} = \triangle\,cos\,t + \frac{\triangle^3}{3}\,cos\,t\,sin^2\,t,$$

у коме се други члан са $\triangle^3$ може занемарити, јер највећа његова вредност (при $t = 90^\circ \pm 35^\circ$) не превазилази $\pm\,0''3$. У троуглу пак EZp врло мала разлика између хипотенузе $ZE = 90^\circ - h$ и катете $Zp = 90^\circ - \varphi - x$ изразиће се, — због маленкости угла a (теорни део курса астрономије), — овако:

$$ZE - Zp = \varphi - h + x = \frac{a^2\,sin\,1''}{2}\,sin\,h\,cos\,h = \frac{sin\,1''}{2}\left(\frac{\triangle\,sin\,t}{cos\,h}\right)^2 sin\,h\,cos\,h;$$

због тога је

$$\varphi = h - \triangle\,cos\,(S - \alpha) + \frac{\triangle^2}{2}\,sin\,1''\,sin^2\,(S - \alpha)\,lg\,h, \quad \ldots \quad (3.)$$

где h представља посматрану висину Поларне, ослобођену од рефракције, а S звездано време њенога посматрања.

За одређивање φ по тој формули, у „Nautical Almanac"-у се дају сваке године помоћне таблице, при чему се оба њена члана дају спочетка за неке средње вредности α_0 и $\triangle_0$ координата α и $\triangle$; утицај пак промена $(\alpha - \alpha_0)$ и $(\triangle - \triangle_0)$ на главни први њен члан уводи се у облику ове диференциалне његове поправке:

$$\partial\,(I) = -\,(\triangle - \triangle_0)\,cos\,(S - \alpha_0) - \triangle_0\,(\alpha - \alpha_0)''\,sin\,1''\,sin\,(S - \alpha_0),$$

којој се додаје још 1′, да би она увек излазила позитивном. На тај се начин добива:

$$\varphi = (h - 1') + (I) + (II) + (III), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.)'$$

где је:

$$(I) = -\,\triangle_0\,cos\,(S - \alpha_0), \quad (II) = \frac{\triangle_0^2\,sin\,1''}{2}\,sin^2\,(S - \alpha_0)\,tg\,h, \quad (III) = 1' + \partial\,(I).$$

Прва се поправка (I) висине h изналази у таблицама по једноме само аргументу S, друга (II) по аргументима S и h а трећа (III) по аргументима S и даноме дану у години. У таблицама „Nautical Almanac“-а може се наћи и пример за објашњење употребе тих таблица, помоћу којих се ширина φ добива с тачношћу до $1''$. —

102. Посматрања висинâ Сунца.

Ради одређивања ширине места помоћу секстанта најчешће се мере висине горњега и доњега краја Сунчева диска, када је оно око меридијана. Када се те висине поправе за угловну величину Сунчева радиуса и кад се сведу на меридијан по формули (1.)′, онда добивеним меридионалним растојањима центра Сунчева: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots\ldots \zeta_n$ треба додати тачне вредности његових деклинација: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots\ldots \delta_n$, које одговарају моментима посматрања: $T_1, T_2, T_4, \ldots\ldots T_n$. Али, ма како да је просто неопходно за то интерполовање деклинација Сунца, ипак се оно обично замењује другом, Гаусовом методом, која је заснована на томе, што су у близини меридијана висине Сунца увек симетричне у односу према моменту највеће његове висине.

У чл. 98. видели смо, да су, у времену двеју једнаких висина Сунца, — источне и западне, — часовни угли његови t_0 и t_w овакви:

$$t_0 = t - y \qquad \text{и} \qquad t_w = t + y,$$

где је

$$y = \triangle\delta\,(A\,tg\,\varphi - B\,tg\,\delta).$$

У близини пак меридијана, због маленкости $t = \frac{1}{2}(T_w - T_0)$, оба коефицијента A и B постају равни константноме броју

$$\frac{t^h}{15\,t^{\circ}\,sin\,1^{\circ}} = \frac{57}{15 \times 15} = \frac{1}{4} \text{ (приближно);}$$

стога полудневна поправка y, изражена у секундама, прима овај облик

$$y_0 = \frac{\triangle\delta}{4}(tg\,\varphi - tg\,\delta) = \frac{\triangle\delta\,sin\,(\varphi - \delta)}{4\,cos\,\varphi\,cos\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.)$$

и показује тада, у колико је момент највеће висине Сунца доцнији (при деклинацијама, које расту) од истинитога поднева. Према томе, ако се рачунају часовни угли t_0 и t_w тачно од тога момента и с њиме рачунају сва свођења: $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$, онда се полудневна деклинација Сунца δ може већ сматрати као непромењива. У томе се и састоји оштроумна Гаусова метода.

Што се тиче незнатне разлике између највеће висине Сунца H и меридионалне h_0, то се она одређује по општој формули (1.) за свођење на меридијан, — на овај начин:

$$H - h_0 = \frac{2\,cos\,\varphi\,cos\,\delta}{sin\,1''\,sin\,\zeta_0}\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 sin^2\,1^s = \left(\frac{\triangle\delta}{170}\right)^2 \frac{sin\,(\varphi - \delta)}{cos\,\varphi\,cos\,\delta}$$

па ће при $\delta = 0$, $\triangle\delta = 59''$ и $\varphi = 70^{\circ}$ $(tg\,\varphi = 2.7)$, изаћи равна свега $\frac{1}{3}''$; с тога се она при посматрањима секстантом може занемарити.

103. Посматрања јужних и северних звезда.

Кад су ради одређивања ширине места посматране две звезде, једна са деклинацијом δ_s на јужној страни меридијана а друга са деклинацијом δ_n (или $180^\circ - \delta_n$) на северној, онда ће два извода ширине

$$\varphi_s = \delta_s + \zeta_s \qquad \text{и} \qquad \varphi_n = \delta_n - \zeta_n$$

бити погрешни и то, први за величину систематске грешке $\triangle z_s$, којој је подвргнуто средње z_s из измерених зенитних растојања јужне звезде, а други за величину исто такве грешке $\triangle z_n$, која одговара средњему z_n из измерених зенитних растојања северне звезде; због тога, кад се означи са φ истинита ширина места, имаћемо, да је:

$$\varphi_s = \varphi + \triangle z_s \qquad \text{и} \qquad \varphi_n = \varphi - \triangle z_n\,,$$

одакле је

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi_s + \varphi_n) + \frac{\triangle z_n - \triangle z_s}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

Ако су z_s и z_n скоро једнака, онда се може сматрати, да је $\triangle z_s = \triangle z_n = \triangle z$, и тада излази просто, да је

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi_s + \varphi_n) \qquad \text{а} \qquad \triangle z = \tfrac{1}{2}(\varphi_s - \varphi_n).$$

Тако нпр. ако у напред изложена два примера (чл. 100.) допустимо, да су измерена зенитна растојања $z_s = 32^\circ$ (β *Pegasi*) и $z_n = 28^\circ$ (*Polaris*) била подвргнута истој систематској грешци $\triangle z_{30}$, која одговара $z = 30^\circ$, онда ћемо добити, да је дефинитивно

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(59^\circ\,46'\,19''\!.6 + 59^\circ\,46'\,23''\!.4) = 59^\circ\,46'\,21''\!.5$$

и

$$\triangle z_{30} = \tfrac{1}{2}(59^\circ\,46'\,19''\!.6 - 59^\circ\,46'\,23''\!.4) = \qquad -1''\!.9.$$

На тај се начин из многих парова јужних и северних звезда, са приближно једнаким зенитним растојањима, одређује не само ширина места φ са великом тачношћу већ и систематске грешке $\triangle z$, које одговарају разним вредностима z; при томе се ове грешке $\triangle z$ добивају, — као што је лако запазити, — са нешто већом тачности него из одређивања времена, тим истим инструментом, по западним и источним звездама (чл. 95.).

Пошто се из посматрања двеју звезда, северне и јужне, изводи тражена ширина из израза

$$\varphi = \frac{\varphi_s + \varphi_n}{2} = \frac{\delta_s + \delta_n}{2} + \frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.)$$

у који улази само разлика $(\zeta_s - \zeta_n)$, која управо зависи од разлике измерених зенитних растојања z_s' и z_n', поправљених за њихова свођења на меридијан r_s и r_n и за рефракцију ρ_s и ρ_n, — онда то значи, да је у ствари потребно тачно одредити само ту разлику $(z_s' - z_n')$ а не и саме вредности z_s' и z_n'. Стога је, како у смислу брзине, тако и у смислу удопства посматрања, погодније посматрати обе звезде при једном и истом, ма којем, положају круга (R) или (L), јер се грешка због приближно примљеног места зенита Z_0 на кругу потпуно искључује при изводу $(z'_s - z'_n)$. Тако нпр. ако би у примерима чл. 100. обе звезде, β *Pegasi* и *Polaris,* биле посматране само при кругу (L), по четири пута свака, онда би се тражена ширина одредила из њих на овај начин:

$$\begin{array}{lll}
\beta\ \textit{Pegasi} \ldots\ \delta_s = 27^\circ\,22'\,43''\!.3 & (\mathrm{L})_s = 32^\circ\,24'\,59''\!.6 & \rho_s = 39''\!.0 \\
\textit{Polaris} \ldots\ \delta_n = 88\ \ 37\ \ 12.\ 0 & (\mathrm{L})_n = 28\ \ 52\ \ 17.\ 8 & \rho_n = 33.\ 9 \\
\hline
\tfrac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) = 57\ \ 59\ \ 57.\ 6_5 & \tfrac{1}{2}[(\mathrm{L})_s - (\mathrm{L})_n] = +1\ \ 46\ \ 20.\ 9 & (\rho_s - \rho_n) = +5.\ 1 \\
\tfrac{1}{2}(\zeta_s - \zeta_n) = +1\ \ 46\ \ 23.\ 4_5 & \tfrac{1}{2}(\rho_s - \rho_n) = \qquad +2.\ 2_5 & \\
\hline
\varphi = \mathbf{59\ 46\ 21.1} & &
\end{array}$$

Да би се нашла у пољу гледања дурбина она звезда (α, δ), која се жели да посматра у близини меридијана за t минута пре њене кулминације, т. ј. у моменту $S = \alpha - t$, онда треба меридионалноме зенитном растојању њеном $\zeta = \varphi - \delta$ додати ову приближну вредност свођења r, изражену у лучним минутама:

$$r = \frac{2\,cos\,\varphi\,cos\,\delta}{sin\,1'\,sin\,\zeta}\left(\frac{t}{2}\,sin\,1^m\right)^2 = r_0\left(\frac{t}{10}\right)^2,$$

где је r_0 величина свођења за часовни угао t_0, који је раван 10 минута времена. Приближни пак азимут a звезде за исти момент S добива се у степенима овако:

$$a = -\triangle a_0\left(\frac{t}{10}\right), \quad \text{где је} \quad \triangle a_0 = 2^\circ\!.5\,\frac{cos\,\delta}{sin\,\zeta}.$$

На тај је начин, за одређивање z и a за посматрање разних звезда, довољно имати малу таблицу вредности r_0 и $\triangle a_0$ у облику ове, која је састављена за ширине φ око 60°:

δ	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$
r_0	1'. 7	1'. 9	2'. 1	2'. 4	2'. 8	3'. 7
$\triangle a_0$	2°. 6	2°. 9	3°. 2	3°. 6	4°. 3	5°. 6

Нека је, например, за посматрање звезде β *Pegasi* $(\delta = +27^\circ 23')$ у Пулкову $(\varphi = 59^\circ 46')$ потребно знати z и a за 12 минута до њене кулминације $(\alpha = 22^h 57^m)$. Пошто се нађу из те таблице за $\delta = 27^\circ\!.4$ вредности $r = 2'.7$ и $\triangle a_0 = 4^\circ.1$, онда ћемо добити за $S = \alpha - 12^m = 22^h 45^m$:

$$r = r_0\,(1.2)^2 = 2'.7 \times 1.44 = 3'.9, \qquad z = \zeta + r = 32^\circ 23' + 4' = 32^\circ 27',$$

$$a = -\,4^\circ.1 \times 1.2 = \qquad -\ 4^\circ.9.$$

104. Посматрања зенит-телескопом.

Све ово што је речено у прошлом члану води најпростијој и најтачнијој методи одређивања ширине места наиме помоћу зенит-телескопа (чл. 57.), коју је смислио Толкот 1834. г. у Сједињеним Државама, специално за ту циљ.

Бирају се наиме две такве звезде, јужна и северна, које кулминирају једна за другом после малог интервала времена, а чија се меридионална зенитна растојања, $\zeta_s = \varphi - \delta_s$ и $\zeta_n = \delta_n - \varphi$, разликују једно од другога не више од величине поља гледања дурбина зенит-телескопа. Пошто се постави и укочи дурбин приближно на средњем привидном зенитном растојању $z' = \frac{1}{2}(\zeta'_s + \zeta'_n)$, онда се врше прво на једну звезду, око самога момента њене кулминације, неколико стављања покретног кончића микрометровог1), запажајући сваки пут момент T по хронометру и стање i либеле, чврсто спојене са дурбином; затим се изврши исто толико стављања покретног кончића и на другу звезду. Замислимо, да већему прочитању m на добошу микрометра и већему прочитању i на либели одговара веће зенитно растојање звезде; затим, ако за јужну звезду узмемо, да m_s буде средње из свију прочитања микрометра, i_s — средње из прочитања̂ либеле, r_s — средња величина свођења r на меридијан и ρ_s — утицај рефракције на зенитно растојање ζ'_s; за северну пак звезду нека исте сличне вредности буду: m_n, i_n, r_n и ρ_n. Тада ће се по формули (6.) чл. 103. добити тачно:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) + \tfrac{1}{2}(m_s - m_n) + \tfrac{1}{2}(i_s - i_n) - \tfrac{1}{2}(r_s - r_n) + \tfrac{1}{2}(\rho_s - \rho_n) \quad . \qquad (6.)'$$

Таква се баш посматрања и врше непрекидно још од 1900. г. на шест тачака Земљине паралеле + 38° (од њих се руска налази у Чарџују, у Централној Азији) ради испитивања периодичних *промена̂* шинина̂ φ свију места на Земљи, које достижу свега до $\pm$ 0″.20. Нетачност деклинација посматраних звезда немају никаква утицаја на та одређивања, јер се један и исти пар звезда посматра стално у току много дана једно за другим.

Уопште пак, апсолутна вредност шинине φ, која се одређује Толкотовом методом, не може бити и особито тачна, јер услов блиске једнакости меридионалних зенитних растојања ζ_s и ζ_n повлачи за собом неопходност употребе, у највише случајева, ситних звезда 6. 7. величине, чије деклинације још нису довољно тачно одређене. Ништа ипак не смета, — ако је поправка хронометра u добро одређена, — да се зенит-телескопом мере разлике зенитних растојања z_s и z_n двеју звезда, јужне (α_s, δ_s) и северне (α_n, δ_n) при доста знатним њиховим азимутима само ако они не излазе из граница $\pm$ 30° за јужне звезде и 180° $\pm$ 30° за северне; јер се у том случају може наћи доста крупних звезда (до 5. величине закључно) за састав довољног броја парова звезда са тачним деклинацијама.

---

1) Због незнатних величина часовних углова звезде $t = T + u - \alpha$, формула (1.) за свођење r на меридијан прима у том случају најпростији облик

$$r = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin 1''}{2 \sin\zeta} t''^2$$

Када је пак, ради удопства посматрања, дурбин постављен непокретно у самом меридијану, онда, при стављању кончића микрометровог на звезду, ова треба да се налази од средњег вертикалног кончића дурбина на растојању $c = t'' \cos\delta$; због тога ће, на основу формуле (3.) чл. 61., микрометром добивена прочитања m бити, као и у случају мерења зенитних растојања, мања од истинитих за величину $\Delta z = \frac{c^2}{2} \sin 1'' \cot g\, \zeta$ те ће бити потребне, — заједно са свођењем r на меридијан, — овакве поправке:

$$\triangle z - r = \frac{\sin 1'' \cos\delta}{2 \sin\zeta} (\cos\delta \cos\zeta - \cos\varphi)\, t''^2 = \pm \frac{\sin 1''}{4} \sin 2\delta\, t''^2$$

а наиме са знаком + за јужне звезде а са — за северне.

При томе само могу да буду незгодна срачунавања великих свођења r на меридијан по формули (1.) због знатних вредности часовних углова звездâ: $t_s = T_s + u - \alpha_s$ и $t_n = T_n + u - \alpha_n$; због тога, и не вршећи та свођења, боље је и простије поступати овако:

Нека T_s буде средње из момената од неколико сукцесивно једно за другим извршених стављања покретног кончића на јужну звезду, m_s нека буде средње из добивених при том прочитања микрометра а поправљено још за стање либелино i и поправком (6.) чл. 94.; T_n и m_n нека буду сличне величине за северну звезду. Кад се још срачунају и утицаји рефракција ρ_s и ρ_n на приближно позната зенитна растојања звезда z_s и z_n, онда ћемо за разлику $z_s - z_n$ добити тачну величину

$$q = \tfrac{1}{2}(z_s - z_n) = \tfrac{1}{2}(m_s - m_n) + \tfrac{1}{2}(\rho_s - \rho_n), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)$$

кад се пак означи ради скраћења $\frac{1}{2}(z_s + z_n) = z$, онда ћемо имати две једначине:

$$\cos z_s = \cos(z + q) = \sin\varphi \sin\delta_s + \cos\varphi \cos\delta_s \cos t_s$$

$$\cos z_n = \cos(z - q) = \sin\varphi \sin\delta_n + \cos\varphi \cos\delta_n \cos t_n$$

чија ће разлика дати

$$2 \sin q \sin z = \sin\varphi (\sin\delta_n - \sin\delta_s) + \cos\varphi (\cos\delta_n \cos t_n - \cos\delta_s \cos t_s);$$

одатле пак ако се стави

$$tg\,\varphi_0 = \frac{\cos\delta_s \cos t_s - \cos\delta_n \cos t_n}{\sin\delta_n - \sin\delta_s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)'$$

онда ће изаћи

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = 2 \sin q \sin z \frac{\cos\varphi_0}{\sin\delta_n - \sin\delta_s}$$

или, због маленкости q, просто

$$\varphi = \varphi_0 + 2\,q \frac{\sin z \cos\varphi_0}{\sin\delta_n - \sin\delta_s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)''$$

За срачунавање φ_0 боље ће бити, да се у изразу (7.)$'$ изврши замена

$$\cos t_s = 1 - 2 \sin^2 \frac{t_s}{2} \qquad \text{и} \qquad \cos t_n = 1 - 2 \sin^2 \frac{t_n}{2};$$

кад се тада стави, да је

$$\tfrac{1}{2}(\delta_n + \delta_s) = \delta, \qquad \tfrac{1}{2}(\delta_n - \delta_s) = \varepsilon, \qquad \varphi_0 = \delta + \mu$$

и кад се, ради скраћења, означи

$$\frac{1}{\sin\varepsilon}\left(\cos\delta_n \sin^2 \frac{t_n}{2} - \cos\delta_s \sin^2 \frac{t_s}{2}\right) = \mathfrak{M}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8.)$$

онда ћемо имати, да је

$$tg\,\varphi_0 = tg\,(\delta + \mu) = \frac{tg\,\delta + tg\,\mu}{1 - tg\,\delta\,tg\,\mu} = tg\,\delta + \frac{M}{cos\,\delta},$$

одакле је

$$tg\,\mu = \frac{M\,cos\,\delta}{1 + M\,sin\,\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.)'$$

На дај начин, уместо (7.)′ и (7.)″, изаћи ће по формулама (8.) и (8.)′ дефинитивно, да је

$$\varphi = \delta + \mu + \Delta\varphi, \qquad \text{где је} \qquad \Delta\varphi = q\,\frac{sin\,z\,cos\,\varphi_0}{sin\,\varepsilon\,cos\,\delta} \quad . \; . \; . \quad (8.)''$$

105. Једнаке висине северних и јужних звезда.

Лако је видети, да се пар звезда, изабраних по напред изложеноме за извођење ширине, може посматрати не само зенит-телескопом већ и вертикалним кругом или пак универсалним инструментом са мрежом од неколико хоризонталних кончића, исто онако као и при одређивању времена по одговарајућим висинама источне и западне звазде, тј. треба само посматрати моменте пролаза јужне и северне звезде преко једних и истих кончића (чл. 97.); при томе ће у формули (8.)″ величина q представљати тада само незнатну полу разлику стања i_s и i_n либеле, спојене са дурбином. Мора се само знатно на сузи избор звезда због погодаба: 1.) да разлика зенитних растојања z_s и z_n буде равна нули и 2.) да оштри азимути, не излазећи из граница $\pm 30°$, не буду ни сувише мали (мањи од 10°), јер би у том случају посматрање пролаза звезде преко хоризонталних кончића било немогућно или би за то требало и сувише много времена.

Узмимо, ради примера, посматрања Репсолдовим вертикалним кругом, која су извршена ради огледа 18. марта 1882. г. на геодетској опсерваторији у Пулкову, која је $\varphi = 59°46'21''.5$. У посматраним по хронометру моментима T_n и T_s пролаза северне звезде α *Cassiopeiae* ($\delta_n = 124°6'28''.0$) и јужне β *Virginis* ($\delta_s = +2°25'27''.5$) преко шест хоризонталних кончића дурбина (приближно $z = 60°26'$) часовни су угли тих звезда $t_n = T_n + u - (\alpha_n + 12^h)$ и $t_s = T_s + u - \alpha_s$ били као што је то показано даље у ступцу t_n и t_s, исто су тако показана и прочитања либеле i_n и i_s (вредност $\frac{1}{2}\tau = 1''.1$) и вредности за $M\,sin\,\varepsilon$, које су срачунате за сваки кончић посебно:

Кончићи	t_n	$i_n \frac{\tau}{2}$	t_s	$i_s \frac{\tau}{2}$	$lg\,sin^2 \frac{t_n}{2}$	$lg\,sin^2 \frac{t_s}{2}$	$M\,sin\,\varepsilon$
I	$-2^h34^m\ 2^s.63$	-0.2	$-1^h37^m42^s.74$	-0.5	9.036451	8.650885	-0.105704
II	33 27.93	-0.3	38 11.44	-0.5	.033308	.655062	. 696
III	32 55.93	-0.3	38 38.74	-0.8	.030397	.659016	. 705
IV	32 30.13	-0.4	38 59.04	-0.9	.028043	.661943	. 689
V	31 58.83	-0.5	39 25.24	-0.9	.025176	.665707	. 694
VI	31 22.43	-0.6	39 54.94	-1.4	.021831	.669952	. 692
		-0.38		-0.83	(9.748771_n $lg\,cos\,\delta_n$	9.999610) $lg\,cos\,\delta_s$	**-0.105697**

$$q = \tfrac{1}{2}(i_s - i_n) = -0.22 = -0''.25$$

Са нађеним овде средњим вредностима: $M\,sin\,\varepsilon = -0.105697$ и $q = -0''.25$, даље ће се срачунавање ширине φ извршити по формулама (8.)′ и (8.)″ помоћу логаритамских таблица сума и разлика, — овако:

$\delta = 63^\circ 15' 57''.7_5$	доп. $lg\, M \sin\delta = 0.966186_n$	$lg\, q = 9.398_n$
$\varepsilon = 60\ 50\ 30.2_5$	$lg\, M \cos\delta = 8.735977_n$	$lg \cos\varphi_0 = 9.702$
$lg \sin\varepsilon = 9.941152$	доп. $lg\,(1 + M \sin\delta) = 0.049682$	$lg \sin z = 9.939$
$lg\, M \sin\varepsilon = 9.024063_n$	$lg\, tg\, \mu = 8.785659_n$	$lg \sin\varepsilon \cos\delta = 9.594$
доп. $lg \sin\delta = 0.049097$	$\mu = -\ 3^\circ 29' 36''1$	$lg\, \Delta\varphi = 9.445_n$
$lg\, M = 9.082911_n$	$\delta + \mu = 59\ 46\ 21.6_5$	$\Delta\varphi = -0''.28$
$lg \cos\delta = 9.653066$	$\varphi =$ **59 46 21.4**	

На тај је начин геодетски пуковник Миочински одређивао у 1882. и 1883. год. ширине многих тачака на Уралу¹); али се та метода почела код нас (у Русији) ширити тек доцније, благодарећи геодет. пуковнику Пјевцову, који је дао извесне помоћне таблице за изналажење парова звезда са тим условом, да се сваки пар северне и јужне звезде налази, у моментима њихових посматрања, са једне и исте стране меридијана (чл. 85.), јер у том случају нетачност поправке хронометра најмање утиче на извод тражене ширине.²) Још боља средства за избор парова звезда дали су доцније астрономи Витрам³) и Орлов⁴); геодетски пак пуковник Сиљверстов издао је простране и потпуне таблице *ефемерида* оваквих парова,⁵) погодних за одређивање ширина од 40° до 60°; код њих је бројна вредност оштрих азимута звезда већа од 10° и мања од 40°.

---

¹) „Jahresbericht dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte“. — 1882.—1883.—1884.

²) М. Пѣвцовъ. „Объ опредѣленiи географ. широты по соотвѣтственнымъ высотамъ двухъ звѣздъ“. — 1887.

³) Ѳ. Витрамъ. „О прiисканiи звѣздныхъ паръ для опредѣленiя широты...“. — 1898.

⁴) A. Orloff. „Graphishe Methode zur Auswahl der Sternpaare für die Breitenbestimmung nach der Methode gleicher Zenithdistanzen“. — 1909.

⁵) И. Сильверстовъ. „Эфемериды звѣздъ для опредѣленiя широты по соотвѣтствующимъ высотамъ“. — 1912.

ГЛАВА XIII.

ЈЕДНОВРЕМЕНО ОДРЕЂИВАЊЕ ШИРИНЕ МЕСТА И ВРЕМЕНА ПО ВИСИНАМА ЗВЕЗДА.

106. Срачунавање ширине места и времена поступним приближењима.

При одређивању географског положаја местâ у непознатим пределима, а тако исто и положаја брода на мору, дешавају се случаји, да се из извршених посматрања висина небесних тела изводе једновремено и ширина места φ и поправка хронометра u, кад су и једна и друга познате само доста грубо. Тада се једновремена њихова одредба врши поступним приближењима.

Само се по себи разуме, да се за напред наведену циљ треба да изврше бар два низа посматрања висина једнога и истог или разних небесних тела при довољно различним средњим азимутима a_m и a'_m (чл. 84.). Већа или мања повољност тих азимута и одредиће онај ред срачунавања, којим ће се тачне вредности тих непознатих добити и брже и простије. У сваком случају треба сматрати, да је ход хронометра доста добро познат те да би се моменти свију посматрања могли поправити тако, као да су они били запажени по хронометру, чији је ход односно звезданог времена врло мали.

I. Ако се у претпостављеној ширини места φ_0 не може очекивати већа трешка од 2′, онда се одмах може почети са тачним срачунавањем низа висина, најближих првоме вертикалу (са средњим азимутом a'_m) ради извода поправке хронометра u_1 по правилима чл. 92. Из другога пак низа висина, најближих меридијану (са средњим азимутом a_m) треба затим са том поправком u_1 тачно срачунати ширину φ_1 по правилима чл. 100. Кад се на тај начин већ добије разлика између φ_1 и φ_0, онда остаје само, да се нађеној вредности u_1 дода диференциална поправка $\triangle u_1$ по познатоме изразу за њу из чл. 84.:

$$\triangle u_1 \cos \varphi_1 = -(\varphi_1 - \varphi_0) \operatorname{cotg} a'_m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)_u$$

те да се дефинитивно добије $u = u_1 + \triangle u_1$; добивеној пак ширини φ_1 треба додати сличну поправку:

$$\triangle \varphi_1 = -(u - u_1) \cos \varphi_1 \, tg \, a_m, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)_\varphi$$

те да се дефинитивно добије $\varphi = \varphi_1 + \triangle \varphi_1$.

Ако ли је унапред приближно била позната поправка хронометра u_0, онда би требало почети са срачунавањем φ_1 из низа висина, блиских меридијану; затим, из другог низа висина срачунати поправку хронометра u_1 и, најзад, додати нађеним вредностима φ_1 и u_1 диференциалне поправке:

$$\triangle\varphi_1 = -(u_1 - u_0)\cos\varphi_1 \, tg \, a_m \qquad \text{и} \qquad \triangle u_1 \cos\varphi_1 = -(\varphi - \varphi_1) \, cotg \, a'_m .$$

Што се тиче приближних азимута небесних тела a_m и a'_m у средњим моментима посматрања T_m и T'_m, то се они добивају непосредним читањем хоризонталног круга за време посматрања; али се они лако могу и срачунати с приближном тачношћу по формулама:

$$\sin a_m = \sin t_m \frac{\cos\delta}{\sin z_m} \qquad \text{и} \qquad \sin a'_m = \sin t'_m \frac{\cos\delta'}{\sin z'_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \; (1.)_a$$

II Када су и ширина места φ_0 и поправка хронометра u_0 познати унапред врло грубо, тада је боље узети спочетка у свакоме низу висина средње из једнога само посматрања при кругу R и једнога при L па одредити по тим средњим приближне вредности φ_1 и u_1 помоћу логаритама од 4 децимале свега; затим, с нађеним φ_1 и u_1, приступити тачноме срачунавању свију посматрања на начин, како је напред речено.

III Најзад, ако је сасвим несигурна претпоставка о величинама φ_0 и u_0, и, ако је и сам низ посматраних висина сувише удаљен од меридијана и првог вертикала, онда није згодно изналазити приближне величине φ_1 и u_1 по напред изложеном начину поступних приближења, јер би их у том случају морало бити неколико, већ на овај начин: Кад се у низу висина небесног тела (α, δ) узме, као и мало пре, средње из једнога посматрања при кр. R и једнога при кр. L па се поправи за рефракцију, онда ће се добити приближно зенитно растојање z, које одговара средњему моменту T по хронометру; из низа пак висина другога небесног тела (α', δ') на сличан ће се начин добити z' за момент T'; затим ће се са претпостављеним φ_0 и a_0 срачунати зенитна растојања z_0 и z'_0 тих небесних тела по формулама:

$$\left.\begin{aligned} \cos z_0 &= \sin\varphi_0 \sin\delta + \cos\varphi_0 \cos\delta \cos(T + u - \alpha) \\ \cos z'_0 &= \sin\varphi_0 \sin\delta' + \cos\varphi_0 \cos\delta' \cos(T + u - \alpha') \end{aligned}\right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Кад се тада добију разлике $z - z_0 = \triangle z$ и $z' - z'_0 = \triangle z'$, онда ће се, за изналажење поправака $\triangle\varphi$ и $\triangle u$ претпостављених φ_0 и u_0, моћи да саставе познате нам већ из чл. 84. две једначине:

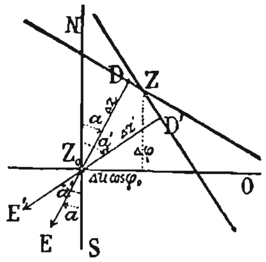
$$\left.\begin{aligned} \triangle\varphi \cos a + \triangle u \cos\varphi_0 \sin a &= \triangle z \\ \triangle\varphi \cos a' + \triangle u \cos\varphi_0 \sin a' &= \triangle z' \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)'$$

из којих ће, као и пређе, изаћи, да је

$$\triangle\varphi = \frac{\triangle z' \sin a - \triangle z \sin a'}{\sin(a - a')}, \qquad \triangle u \cos\varphi_0 = \frac{\triangle z \cos a' - \triangle z' \cos a}{\sin(a - a')} \quad . \quad . \quad (2)''$$

После тога, са нађеним величинама $\varphi_1 = \varphi_0 + \triangle\varphi$ и $u_1 = u_0 + \triangle u$, могу већ бити извршена и тачна срачунавања оба низа посматрања ради дефинитивног извода φ и u.

Ма којом од ових метода да је достигнут резултат за φ и u, који би тачно задовољавао оба дата низа посматраних висина, ипак треба увек имати у виду неизбежне грешке тих резултата, које произлазе од разних, сталних и случајних нетачности, својствених апсолутним мерењима зенитних растојања небесних тела (чл. 84. и чл. 85.).



Сл. 104.

Да обратимо овде пажњу на геометриско значење једначине (2)'. Кад се на равнини узме тачка Z_0 (сл. 104.) за почетак правоуглих координатних оса, и то: Z_0N за разне вредности $\triangle\varphi$ и Z_0O за вредности $\triangle u \cos\varphi_0$ па се повуку из Z_0 под углима $\sphericalangle NZ_0D = a$ и $\sphericalangle NZ_0D' = a'$, дужи $Z_0D = \triangle z$ и $Z_0D' = \triangle z'$, онда ћемо увидети, да ће прва од једначина (2.)' представљати праву, перпендикуларну на Z_0D, а друга — другу праву, перпендикуларну на Z_0D'. Координате тачке Z, у којој се те праве секу, и биће тражене величине $\triangle\varphi$ и $\triangle u \cos\varphi_0$; сама пак тачка Z биће тачни положај зенита данога места у односу према приближноме његовом положају Z_0, који одговара претпостављеној, приближној ширини места φ_0 и таквој истој поправци хронометра u_0. Запазити се може још, да ће се, на оваквом цртежу, посматрана небесна тела налазити на правцима Z_0E и Z_0E', који заклапају са меридијаном NZ_0S угле $\sphericalangle SZ_0E = a$ и $\sphericalangle SZ_0E' = a'$.

107. Пример за објашњење.

Ради објашњења изложенога, користићемо се даље изложеним измереним зенитним растојањима *Поларне* ($\alpha = 1^h1^m23^s.8$, $\delta = 88°26'29''.4$) и *Арктура* ($\alpha = 14^h8^m15^s.22$, $\delta = +20°2'0''.0$), која су мерена 14. јула 1837. г. на Александровској Станици астрономским теодолитом („Приложеніе практической астрономіи къ географическому опредѣленію мѣстъ“ Савича. Т. I, стр. 227.). Моменти посматрања T' запажали су се по хронометру, који је ишао приближно по средњему времену те је у односу према звезданом времену имао ход $\omega = +3^m56^s.56\left(1 - \frac{1}{39}\right)$, с којим су и сведена, доле означена, његова показања T' на момент $T_0 = 10^h40^m$.

Полож. инстр.	Моменти T' по хрон.	Своћ. на $10^h\,40^m$	Поправљени моменти T	Измерена z'	Рефр.
			Polaris ($a_m = -178°0'$)		
(R)	$9^h\,54^m\,0^s$	$-7^s.6$	$9^h\,53^m\,52^s.4$	46° 17′ 52″.3	0′57″.2
	9 57 53	−6.9	9 57 47.1	16 20.6	
(L)	10 7 10	−5.4	10 7 4.6	12 40.7	
	10 11 19	−4.7	10 11 14.3	11 7.7	
			α *Bootis* ($a'_m = +88°15'$)		
(L)	10 31 11.5	−1.45	10 31 10.05	57 0 32.8	1′24″.5
	37 59.5	−0.33	37 59.17	58 13 41.9	1 28.7
(R)	44 21.0	+0.72	44 21.72	59 22 7.2	1 33.0
	48 47.0	+1.44	48 48.44	60 9 48.5	1 36.1

Кад претпоставимо, да нам нису познате ни ширина места нити поправка хронометра, онда ћемо за ширину φ_0 узети прво посматрану висину *Поларне*

$90^\circ - 46^\circ 15' = 43^\circ 45'$ па ћемо с њоме срачунати приближну поправку хронометра u_0 из два само, средња посматрања *Аркшура* по формулама (1.)′ и (2.) чл. 92. а затим ширину φ_1 из два средња посматрања *Поларне* по формули (1.) чл. 99.

$$\alpha\ \textit{Bootis:}\ \mathrm{T} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3) = 10^{\mathrm{h}}41^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}}.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= 43^\circ 45' \\
\tfrac{1}{2}(z_2 + z_3) = z &= 58\ \ 49 \\
\varphi_0 - \delta = \zeta &= 23\ \ 43 \\
\tfrac{1}{2}(z + \zeta) &= 41\ \ 16 \\
\tfrac{1}{2}(z - \zeta) &= 17\ \ 33
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
lg\ sec\ \varphi_0 &= 0.1412 \\
lg\ sec\ \delta &= 0.0271 \\
lg\ sin\ \tfrac{1}{2}(z + \zeta) &= 9.8193 \\
lg\ sin\ \tfrac{1}{2}(z - \zeta) &= 9.4793 \\
lg\ sin^2 \tfrac{t}{2} &= 9.4669
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t &= \ \ 4^h\ 22^m\ 11^s \\
\mathrm{T} - t &= \ \ 6\ \ 19\ \ \ 1 \\
\alpha &= 14\ \ \ 8\ \ 15 \\
u_0 &= +\mathbf{7^h\,49^m 14^s}
\end{aligned}$$

$$\textit{Polaris:}\ \mathrm{T} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3) = 10^{\mathrm{h}}\,2^{\mathrm{m}}\,26^{\mathrm{s}}$$

$$\begin{aligned}
\text{доњ. кулм. } \zeta &= 47^\circ 49' \\
\tfrac{1}{2}(z_2 + z_3) = z &= 46\ \ 15 \\
\tfrac{1}{2}(z + \zeta) &= 47\ \ \ 2 \\
\mathrm{T} + u_0 &= 17^h\,51^m\,40^s \\
\alpha + 12^h &= 13\ \ \ 1\ \ 24 \\
t &= \ \ 4\ \ 50\ \ 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
lg\ cos\ \varphi_0 &= 9.8588 \\
lg\ cos\,(180 - \delta) &= 8.4344_n \\
lg\ \tfrac{2}{sin\ 1''} &= 5.6155 \\
\text{доп. } lg\ sin\ \tfrac{1}{2}(z + \zeta) &= 0.1356 \\
lg\ k &= 4.0443_n \\
lg\ sin^2 \tfrac{t}{2} &= 9.5443
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
lg\ r &= 3.5886_n \\
r = z - \zeta &= -1^\circ\ \ 4'\ \ 38'' \\
z &= \ \ 46\ \ 15\ \ 28 \\
\zeta &= \ \ 47\ \ 20\ \ \ 6 \\
180 - \delta &= \ \ 91\ \ 33\ \ 31 \\
\varphi_1 &= \mathbf{44^\circ\,13'\,25''}
\end{aligned}$$

Са том, већ доста тачном, ширином места $\varphi_1 = 44^\circ 13' 25''$ тачна ће срачунавања свих посматрања α *Bootis* [по форм. (1.) чл. 92.] а затим и *Polaris*, дати ове вредности за u_1 и φ_2:

$$\alpha\ \textit{Bootis:}\ \zeta = \varphi_1 - \delta = 24^\circ 11' 25.''0,\ \alpha = 14^{\mathrm{h}}8^{\mathrm{m}}15.^{\mathrm{s}}22$$

		$lg\,cos\,z$	$д.lg\left(1 - \frac{cos\,z}{cos\,\zeta}\right)$	$lg\,sin^2\frac{t}{2}$	t	$(\alpha) = \mathrm{T} - t$
$lg\,\frac{1}{2} = 9.698970$	1.)	9.735728	0.394205	9.436665	$4^h12^m\ 9.^s60$	$6^h19^m\ 0.^s45$
$lg\,sec\,\varphi_1 = 0.144709$	2.)	.721126	.373476	.457394	18 58.85	0.32
$lg\,sec\,\delta = 0.027106$	3.)	.706824	.354710	.476160	25 21.33	0.39
$lg\,sec\,\zeta = 9.960085$	4.)	.696464	.341968	.488902	29 47.83	0.61
$lg\,\mathrm{K} = 9.830870$		9.960085	9.830870		ср. $(\alpha) =$	6 19 0.44
					$u_1 =$	$+\mathbf{7\ 49\ 14.78}$

$$\textit{Polaris:}\ \zeta = 47^\circ 20' 6'',\quad z_m = 46^\circ 15' 28'',\quad \tfrac{1}{2}(\zeta + z_m) = 46^\circ 47' 47''$$

		t	$lg\,k\,sin^2\frac{t}{2}$	r	ζ'
$lg\,\frac{2}{sin\,1''}\,cos\,\varphi_1 = 5.47075$	1.)	$4^h41^m43.^s5$	3.56435 — 20	$-1^\circ 1'\ 5.''7$	$47^\circ 18' 58.''0$
$lg\,cos\,(180 - \delta)^\circ = 8.43444_n$	2.)	45 38.2	.57475 — 11	— 2 35.2	55.8
$lg\,sin\,\frac{1}{2}(\zeta + z_m) = 9.86268$	3.)	54 55.7	.59874 + 11	— 6 10.5	51.2
$lg\,k = 4.04251_n$	4.)	59 5.4	.60916 + 20	— 7 47.8	55.5

dif. за 1′ . . . 6.0

ср. $\zeta' = 47\ \ 18\ 55.1$

$180 - \delta = 91^\circ 33' 30.''6$

$\zeta = 47\ \ 19\ 52.3$

$\varphi_2 = \mathbf{44\ 13\ 38.3}$

Најзад, по азимутима *Аркшура* и *Поларне*, који се рачунају позитивно од југа ка западу, добиће се поправке $\triangle u_1$ и $\triangle\varphi_2$ овако нађених u_1 и φ_2 на овај начин:

$$\triangle u_1 = -(\varphi_2 - \varphi_1)\,\frac{cotg\,(+88^\circ 15')}{cos\,\varphi} = -13''\!.3\;\frac{0.030}{0.72} = -0''\!.55 = \mathbf{-0^s\!.04} \quad \text{и}$$

$$\triangle\varphi_2 = -\triangle u_1\, cos\,\varphi\; tg\,(-178^\circ 0') = -0''\!.55 \times 0.72 \times 0.035 = \quad \mathbf{0''\!.01};$$

тако, да ће дефинитивно бити:

$$u = u_1 + \triangle u_1 = +\,\mathbf{7^h 49^m 14^s\!.74} \text{ у моменту по хрон. } 10^h 40^m \text{ и}$$

$$\varphi = \varphi_2 + \triangle\varphi_2 = \quad \mathbf{44^\circ 13' 38''\!.3.}$$

Да бисмо применили формуле (2.) и (2.)″ треће методе ради добивања приближних вредности φ_1 и u_1, допустићемо, да је претпостављена поправка хронометра u_0 била $+\,\mathbf{7^h 44^m 0^s}$. Тада бисмо, са том истом првобитном ширином $\varphi_0 = \mathbf{43^\circ 45'\!.0}$, нашли [помоћу логаритама са 5 децимала, по форм. (2.)] за та иста средња посматрања *Поларне* и *Арктура* у моментима $T = 10^h 2^m 26^s$ и $T' = 10^h 41^m 10^s$ ове вредности:

$$z_0 = 46^\circ 46'\!.2 \qquad \text{и} \qquad z'_0 = 57^\circ 51'\!.7;$$

а пошто је из самих посматрања у тим моментима излазило:

$$z = 46^\circ 15'\!.5 \qquad \text{и} \qquad z' = 58^\circ 49'\!.4,$$

то бисмо по добивеним отуд разликама

$$\triangle z_0 = -30'\!.7 \qquad \text{и} \qquad \triangle z'_0 = +57'\!.7$$

и по приближним вредностима: $sin\,a_m = -0.035$, $cos\,a_m = +0.999$, $sin\,a'_m = +0.999$, $cos\,a'_m = +0.030$ и $sin\,(a_m - a'_m) = sin\,(-266^\circ 15') = +0.998$ а по формулама (2.)″ — добили:

$$\triangle\varphi_0 = \frac{-57.7 \times 0.035 + 30.7 \times 0.999}{0.998} = +28'\!.7, \qquad \text{тј. } \varphi_1 = \quad \mathbf{44^\circ 13''\!.7} \text{ и}$$

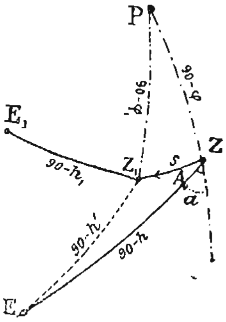
$$\triangle u_0 = \frac{-30.7 \times 0.030 + 57.7 \times 0.999}{0.998\, cos\,\varphi_0} = +78'\!.6 = +5^m 14^s, \text{ тј. } u_1 = +\,\mathbf{7^h 49^m 14^s},$$

што се од тачних вредности φ и u врло мало разликује.

108. Одређивање времена и ширине на мору.

За време навигације, када се једновремено одређују и ширина места и време из два низа измерених висина небесних тела, од особитог је значаја што већа могућна брзина свих срачунавања; тачност пак резултата тих непознатих од другостепене је вредности, због тога, што положај брода на мору није потребно знати са већом тачности од 1′ па чак и 2′ по ширини и дужини, ради чега су довољна и најгрубија мерења висина небесних тела секстантом. Услед тога се увек допушта, да се, ради скраћења срачунавања, споје неколико, једно за другим измерених висина (чак и близу меридиана) у једну средњу, допуштјући још, да ће њој одговарати и средњи из посматраних момената по хронометру. При томе поморци ретко прибегавају посматрању висинâ звездâ, рачунајући, да је боље и згодније на мору посматрати Сунце; пошто пак неопходна брзина одређивања положаја брода покаткад не допушта, да се сачекају најбоље погодбе за посматрања Сунца, тј. у меридијану и у првом вертикалу, то ће се непознате изналазити поступним приближењима по III методи чл. 106., уопште говорећи, брже него ли по II.

Треба узети у обзир још и ту околност, што брод може знатно да промени своје место у току времена између два низа посматрања висина. Замислимо, да је на једном месту, којему на небесној сфери одговара зенит Z, меридијан ZP и шинина $\varphi = 90^\circ - ZP$ (сл. 105.), била нађена у моменту T по хронометру, истинита висина $h = 90^\circ - ZE$ ма каквог небесног тела E, при приближно познатом му азимуту $a = 180^\circ - \sphericalangle PZE$; после извесног времена пак а наиме у моменту T_1 по истоме хронометру била је добивена висина $h_1 = 90^\circ - Z_1E_1$ истога или другога каквог небесног тела E_1, али сад већ на другом месту, којему одговара зенит Z_1 и ширина $\varphi_1 = 90^\circ - PZ_1$. При томе ће број минута у луку $ZZ_1 = s$ бити раван броју морских миља, које је брод прешао у току времена $T_1 - T$, азимут пак тога лука $A = 180^\circ - \sphericalangle PZZ_1$ одредиће се курсом (правцем пловљења) по компасу.



Сл. 105.

Лако је видети, да ако је у моменту T небесно тело E посматрано на другом месту, онда његова висина тамо треба да изађе равна $90^\circ - Z_1E = h'$, при чему ће, — због маленкости $ZZ_1 = s$, — из елементарног сфер. троугла ZZ_1E изаћи просто

$$h' - h = ZE - Z_1E = s \cos (A - a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)$$

Према томе, треба само да се са том малом разликом поправи висина h, која је посматрана са првога места, да би се затим оба посматрања могла већ сматрати, као да су извршена у моментима T и T_1 са другога места Z_1 па извести за то друго место и његову ширину φ_1 и поправку хронометра u_1, као и обично.

109. Доуес-ова метода.

За случај, када су у моментима T и T′ по хронометру измерене висине h и h' (поправљене за рефракцију) једнога и истог небесног тела (α, δ) па ни једна ни друга од њих није ни близу меридија ни првог вертикала, — холандски је поморац Доуес предложио методу извода ширине места φ и поправке хронометра u, која се састоји у овоме:

Кад се одузму једна од друге основне једначине

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (T + u - \alpha)$$

$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (T' + u - \alpha),$$

онда излази

$$\sin h - \sin h' = 2 \sin \frac{h - h'}{2} \cos \frac{h + h'}{2} = 2 \cos \varphi \cos \delta \sin \frac{T' - T}{2} \sin \left(\frac{T + T'}{2} + u - \alpha \right);$$

одакле је

$$sin\left\{\frac{T+T'}{2}+u-\alpha\right\}=\frac{sin\,\frac{1}{2}(h-h')\,cos\,\frac{1}{2}(h+h')}{cos\,\varphi_0\,cos\,\delta\,sin\,\frac{1}{2}(T'-T)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)_u$$

где φ_0 означава претпостављену ширину места. Кад се с њоме срачуна по тој формули поправка u, онда ће се тачније ширина места φ наћи из измерене висине h која је ближе меридијану, на овај начин:

$$cos\,(\varphi-\delta)=sin\,h+2\,cos\,\varphi_0\,cos\,\delta\,sin^2\,\tfrac{1}{2}(T+u-\alpha); \quad . \; . \; . \quad (4.)_\varphi$$

ако ли се при томе φ буде врло много разликовала од φ_0 онда срачунавање треба поновити по тим истим формулама $(4.)_u$ и $(4.)_\varphi$.

На тај се начин долази брже до приближења (апроксимације) правоме резултату него ли изводом једно за другим u и φ из измерених висина h и h' посебице (чл. 106.); при посматрању пак Сунца, деклинација се његова δ, која је узета за средњи моменат $\frac{1}{2}(T+T')$, може сматрати као непромењљива, и не узимати ректасцензије Сунца α већ исправљати моменте T и T′ само за величине једначине времена.

Да применимо Доуесову формулу $(4.)_u$ за случај, када је измерено неколико зенитних растојања некога небесног тела у близини меридијана у циљу одређивања ширине места, и, када за извод поправке u нема никаквих других података сем тога низа измерених зенитних растојања. Узмимо само једно од првих посматрања тога низа (T, z) и једно од последњих (T′, z'). Због претпостављене близине меридијану и због маленкости интервала (T′ — T), — који обично није већи од $20^m=5^\circ$, — у формули се $(4.)_u$ може сматрати, да су синуси углова $\frac{1}{2}(h-h')=\frac{1}{2}(z'-z)$, $\frac{1}{2}(T'-T)$ и $\left[\frac{T+T'}{2}+u-\alpha\right]$ пропорционални са самим углима; због тога ћемо, — изражавајући први угао у лучним секундама а последња два у временским секундама, — имати просто

$$u=\alpha-\tfrac{1}{2}(T+T')+k\,\frac{z'-z}{T'-T},\ \text{где је}\ k=\frac{sin\,\frac{1}{2}(z+z')}{(15)^2\,sin\,1''\,cos\,\varphi_0\,cos\,\delta} \quad . \; . \quad (4.)'$$

Јасно је, да се поправка хронометра u на тај начин не може одредити са већом тачности од 1^s, па макар посматрања вршили и Репсолдовим вертикалним кругом, али зато тај резултат неће ниуколико зависити од систематске грешке $\triangle z$ измерених зенитних растојања z и z'.

Пример: Кад претпоставимо, да је, у наведеном нашем примеру чл. 100. од 8 посмотрања у близини меридијана звезде β *Pegasi* ($\alpha=22^h\,57^m\,27^s\!.1$, $\delta=+\,27^\circ\,22'\,43''\!.3$), поправка хронометра u била сасвим непозната, и, кад се она срачуна помоћу логаритама од 4 децимале по формули (4.)′ из 1. и 8. и из 2. и 7. посматрања, онда ћемо доћи до ових резултата:

№ посматр:	**1.** и **8.**	**2.** и **7.**
$\frac{1}{2}(T+T')=$	$23^h\,4^m\,13^s$	$23^h\,4^m\,28^s$
$z'-z=$	$5'\,49''\!.5$	$4'\,35''\!.0$
$T'-T=$	$16^m\,48^s$	$12^m\,42^s$
$lg\,(z'-z)=$	2.5434	2.4393
$lg\,(T'-T)=$	3.0035	2.8820
$lg\,k\,\frac{z'-z}{T'-T}=$	2.5814	2.5988
$k\,\frac{z'-z}{T'-T}=$	$+\,6^m\,21^s\!.4$	$6^m\,37^s\!.0$
$\alpha-\frac{1}{2}(T+T')=$	$-\,6\ \ 45.\,9$	$-\,7\ \ 0.\,9$
$u=$	$-\ \ 24.\,5$	$-\ \ 23.\,9$

За **1.** и **8.** посм. $\frac{1}{2}(z+z')=32^\circ\,26'\!.6$
„ **2.** „ **7.** „ $32\ \ 25.\,9$
ср. $\frac{1}{2}(z+z')=32\ \ 26.\,3$
$lg\ sin\,\frac{1}{2}(z+z')=9.7295$
$lg\ sec\,\varphi_0=0.2981$
$lg\ sec\,\delta=0.0516$
доп. $lg\,(15)^2\,sin\,1''=2.9623$
$lg\,k=3.0415$

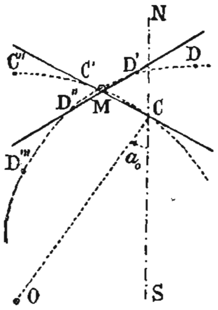
У средњем $u=-\,\mathbf{24^s\!.2}$;

тачна пак вредност за u у примеру чл. 100. била је . . $-\,23.\,3$.

110. Сомнерова метода.

У 1843. години Сомнер је предложио најпрактичнију, графичку методу за одређивање положаја брода директно на карти.

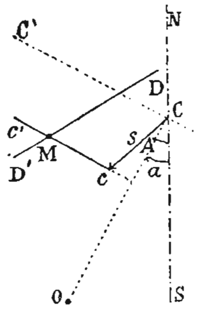
Ако имамо само једно посматрање висине h каквога небесног тела (α, δ) у моменту T по хронометру, онда је са претпостављеном ширином места φ_0 лако срачунати часовни угао његов t_0 а с њиме и поправку хронометра u_0, при чему ће она представљати дужину места l_0 од полазне тачке, нпр. од Гринвича, ако хронометар (са потребном поправком за његов ход) задржава за све време пловидбе локално време те полазне тачке. На тај ће се начин за неколико претпоставака о ширини места: φ_0, φ'_0, $\varphi''_0, \ldots$ наћи и различите дужине: l_0, l'_0, l''_0,..., што ће на карти дати цели низ тачака: C, C', C'', . . . (сл. 106.), на којима се посматрано небесно тело требало да појављује у моменту T на једној и истој висини h. Та крива $CC'C''\ldots$ на Земљиној површини (ако је будемо сматрали за куглу) треба да буде, очевидно, мали круг са центром или полом O на оној тачци Земљиној, где се у томе моменту T небесно тело појављује у зениту; ширина је њена равна δ а дужина равна $\alpha - T$.



Сл. 106.

Сличним ће начином и другој висини h_1 каквога небесног тела (α_1, δ_1), — која је измерена на истом месту у моменту T_1, — одговарати на карти друга крива $DD'D''D'''\ldots$; тачка пак пресека њеног M са $CC'C''\ldots$ треба да буде тражени положај брода. Пошто је пак тражено место скоро увек познато с тачношћу бар до 1° или 2°, то је сасвим довољно, ако се добије за сваку од тих кривих само по две тачке: C и C' и D' и D'' па сматрати праве CC' и $D'D''$ за елементе тих кривих. Те су праве добиле у навигацији назив *Сомнерових линија*. Сваку од њих нпр. CC' можемо узети и као тагенту на криву која њој одговара па, одредивши на њој само једну тачку C, повући саму линију CC' по њеноме азимуту $\sphericalangle SCC'$, који се разликује од азимута посматраног небесног тела $\sphericalangle SCO = a_0$ равно за $\pm 90°$ (претпоставља се, да је карта у Меркаторовој пројекцији, која не деформише угле); тај се пак азимут a_0 за тачку C лако срачунава једновремено са часовним углом t_0 небесног тела.

Ако би Сомнерове линијеCC' и DD' (сл. 107.) биле конструисане за два посматрања, која су раздвојена једно од другога знатним интервалом времена ($T_1 - T$), у току којега је брод променио место својега положаја, онда би требало само, — на основу формуле (3.) чл. 108., — повући по даноме азимуту A премештај брода $Cc = s$ у миљама и затим повући праву cc' паралелно са CC', како би та нова линија одговарала другоме месту посматрања. На тај ће начин тачка M пресека линија cc' и DD' и бити тражено место брода у моменту другога посматрања.



Сл. 107.

Сомнерова је метода згодна у практичном погледу особито стога, што се линија за свако посматрање небесног тела конструише на карти сасвим независно од посматрања која затим сљедују па због тога, чак кад ових и не би било, она доноси извесну корист, јер показује, да се је брод морао гдегод на њој налазити. Ради олакшања срачунавања часовних углова небесних тела и њихових азимута, неопходно потребних за повлачење Сомнерових линија, постоје специјалне помоћне таблице[1]), због којих је употреба логаритама сасвим непотребна.

Лако је видети, да се праве линије, које смо конструисали у чл. 106. (сл. 104.) ради приближног одређивања φ и u из два низа посматраних висина једног и истог или и два разна небесна тела, — ничим у ствари не разликује од Сомнерових линија. Конструкција ових линија се каткад корисно употребљује за време експедиција по непознатим пределима ради одређивања географ. положаја тачака; јер, ако посматрач није успео да на каквој од тих тачака одреди и ширину и дужину њену (по ходу хронометра) већ само једно од тога, то ће Сомнерова линија, која одговара извршеном посматрању помоћи, заједно са повученом на карти линијом итинерера, да се одреди и друго.

111. Посматрања трију и већег броја звезда на истој висини.

У чл. 85. ми смо укратко већ изложили методу једновременог одређивања и ширине места и времена из посматрања трију звезда на једној и истој висини. У примени те методе употребљаван је обично секстант, којим су се три изабране звезде посматрале једна за другом на исти начин, као и при посматрању двеју звезда на одговарајућим једнаким висинама (чл. 98.); разуме се, да су се ретко кад могле наћи три погодне и крупне звезде такве, да интервал између посматрања ових на изабраној висини не буде сувише велики.

У последње су се време почели међутим да изналазе инструменти са дурбинима јаче оптичке моћи за посматрање чак и ситних звезда 5. и 6. величине на једној и истој непроменљивој висини H, што знатно упрошћује проблем о једновременом одређивању времена и ширине места. Такав је, например, инструмент Клода и Дриенкура, који је ушао у употребу од 1900. у Француској под називом *„Astrolabe à prisme“*. Код тога је инструмента пред објективом приближно увек хоризонталног дурбина, утврђена непомично тространа стаклена призма тако, да с једне стране преломљени кроз њу непосредни зраци са какве звезде на висини $H = 60^\circ$ уђу у дурбин, с друге пак стране једновремено с тим такође кроз њу улазе у дурбин и зраци са исте звезде али који се рефлектују са живиног хоризонта, постављеног непосредно испод призме. На тај се начин овим инструментом тако исто као и секстантом могу посматрати два лика исте звезде, који се крећу један другоме на сусрет и који се поклапају (коиндицирају) у оном моменту кад звезда пролази кроз алмукантарат $H = 60^\circ$.

Узмимо, да се истинито зенитно растојање тога сталнога алмукантарата разликује од претпостављенога $Z = 90^\circ - H$ за извесну непознату малу величину $\triangle Z$, тј. нека је то зенитно растојање равно $Z + \triangle Z$; поправке пак за приближно познату ширину φ_0 и за поправку хронометра u_0 нека буду $\triangle\varphi$ и $\triangle u$. Пошто се тачно срачунају, помоћу тих φ_0 и u_0 за моменте T, T', T'',.... разних звезда (α,δ), (α',δ'), (α'',δ''),.... зенитна њихова растојмња z_0, z'_0, z''_0,..... а тако исто и приближне величине њихових азимута a, a', a'',..... — ако они раније нису били познати, — онда ћемо имати као и у чл. 106., са добивеним разликама:

---

[1]) „Таблицы для нахожденія высотъ и азимутовъ“. Изданіе Главнаго Гидрографическаго Управленія Морского Министерства, 1901. Петроградъ.

$$Z - z_0 = \triangle z, \qquad Z - z'_0 = \triangle z', \qquad Z - z''_0 = \triangle z'', \ldots\ldots$$

ове једначине:

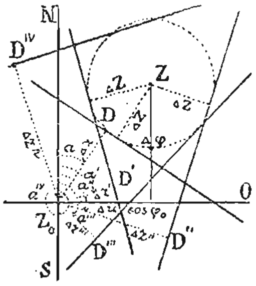
$$\left.\begin{array}{l} \triangle\varphi \cos a + \triangle u \cos\varphi_0 \sin a = \triangle Z + \triangle z \\ \triangle\varphi \cos a' + \triangle u \cos\varphi_0 \sin a' = \triangle Z + \triangle z' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (5.)$$

У случају, када су посматране само три звезде, онда се за $\triangle\varphi$ и $\triangle u \cos\varphi_0$ добивају одавде (после елиминисања $\triangle Z$) изрази, слични онима $(7.)_\varphi$ и $(7.)_u$ из чл. 85.; када је пак посматран већи број звезда, највероватнија ће се вредност за $\triangle\varphi$, $\triangle u \cos\varphi_0$ и $\triangle Z$ наћи из већег броја једначина (5.) по методи најмањих квадрата.

Ако се конструишу на исти начин, као и у чл. 106. праве линије D, D′, D″,..., које одговарају једначинама:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\varphi \cos a + \triangle u \cos\varphi_0 \sin a = \triangle z \\ \triangle\varphi \cos a' + \triangle u \cos\varphi_0 \sin a' = \triangle z' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (5.)'$$

а које се разликују од (5.) само тиме, што у њима нема непознате $\triangle Z$, — онда се место истинитог зенита Z треба да налази на једном и истом растојању $\triangle Z$ (сл. 108.) од свију тих линија; због тога ће, у случају посматрања трију звезда, тачка Z бити центар круга, који тангира три праве D, D′ и D″; радиус ће његов бити раван $\triangle Z$, а помоћу координата тачке Z одредиће се непознате $\triangle\varphi$ и $\triangle u \cos\varphi_0$; у случају пак посматрања више звезда, тачка се Z мора изналазити покушајима тако, да се растојања њена од свију правих D, D′, D″, D‴.... по могућности што мање разликују међу собом.



Сл. 108.

Ова се је метода једновременога одређивања времена и ширине тим инструментом почела у последње време често примењивати у Француској. Може се само напоменути, да би за ту сврху много простије било удесити *зенит-телескоп*, чији би дурбин са учвршћеном на њему либелом стајао стално и чврсто на жењеној висини H; тада би и ту висину боље било смањити, нпр. на 45°, јер би се у том алмукантарату нашао за посматрање већи број звезда исте величине, него ли при H = 60°.

111.a. Астролобија са призмом.

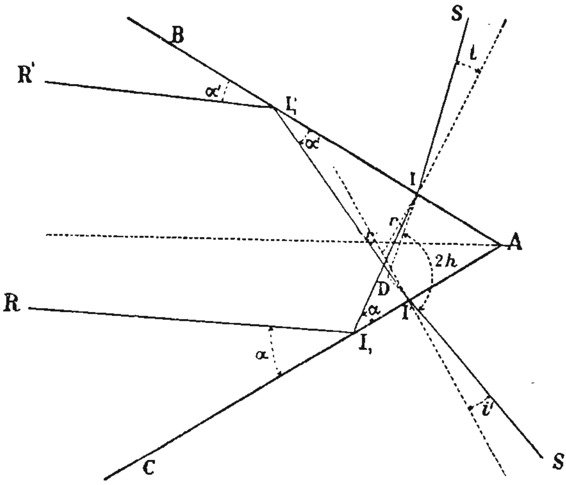
Принцип конструкције. Констукција је инструмента „Astrolobe à prisme“ заснована на овој особини призме са преломним углом од 60°:

Кад два зрака SI и S′I′ падају на две призмине стране па се после преламања у њој одбију са супротних страна тако, да потом пођу паралелно један према другоме, онда ће угао међу упадним зрацима бити раван 120° тј. удвојеном углу призме.

За доказ тога, — што има места само за призму са углом од 60°, — обратимо се слици 108.a., чија је равнина перпендикуларна на преломну ивицу A.

Нека је SII_1R пут првога зрака а $S'I'I'_1R'$ пут другог зрака. Пошто су одбијени зраци RI_1 и $R'I'_1$ паралелни међу собом, то је сума углова α и α' равна 60° тј.

$$\alpha + \alpha' = A = 60^\circ$$



Сл. 108. а.

Означимо са D замишљену тачку пресека продужених праваца упадних зракова SI и $S'I'$. У четвороуглу $AIDI'$ сума унутрашњих углова равна је 360° тј.

$$A + 2h + 90^\circ - i + 90^\circ - i' = 360^\circ$$

где $2h$ означава унутрашњи угао четвороугла код тачке D а i и i' упадне угле, тј. угле, које упадни зраци образују са нормалама на странама призме.

Одатле је $$2h = 120^\circ - (i + i').$$

За ову је призму сума $(i + i')$ равна нули. И заиста, из троуглова II_1A и $I'I'_1A$ имамо, да је

$$\alpha + A + 90^\circ - r = 180^\circ$$

или

$$\alpha + A - r = 90^\circ$$

и

$$\alpha' + A - r' = 90^\circ.$$

Пошто је пак

$$\alpha + \alpha' = A$$

то је

$$\frac{r + r'}{3} = A - 60^\circ = 0.$$

Према томе су угли преламања r и r' равни међу собом, само имају супротне знаке. То исто вреди и за упадне угле i и i', уколико је индекс преламања n за сву унутрашњост призме константан, као што се то види из познатог односа

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i'}{\sin r'} = n.$$

Отуд је и $i + i' = 0$ и $2h = 120^\circ$, што је и потребно било доказати.

Одатле такође излази, да кад зраци, после преламања у тачкама I и I' и одбијања у тачкама I_1 и I'_1, пођу паралелним правцима, то ће бити $i = - i'$ и $r = - r'$. Лако је видети, да је тај услов не само неопходан, већ да је и довољан.

Уопште говорећи, таква призма може да замени два огледала, нагнута једно према другоме под углом од 60°, која служе за једновремено посматрање два предмета, на које правци заклапају двојни угао тј. 120°.

Напред нађена особина призме са преломним углом од 60° вреди, очевидно, и у том случају, када су упандни угли равни нули, тј. $i = i' = 0$. Угли преламања такође су равни нули, па је стога, на основу предњих израза $\alpha = \alpha'$.

Уосталом ово је очевидно и из узрока симетрије. Правци зракова, одбијени са страна призме, у том случају су паралелни са бисектрисом преломног угла призме. То вреди за зраке свих дужина таласа, стога ћемо у даном случају видети јасни лик два предмета, на које се правци разликују за 120°.

Замислимо да обрћемо призму око њене ивице за некакав угао. Увек ћемо тада имати, да је

$$i = -i' = w.$$

С друге стране је

$$\alpha = 90^\circ - A + r,$$

где се r одређује из односа

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

одакле је

$$r = arc\sin\frac{\sin w}{n}.$$

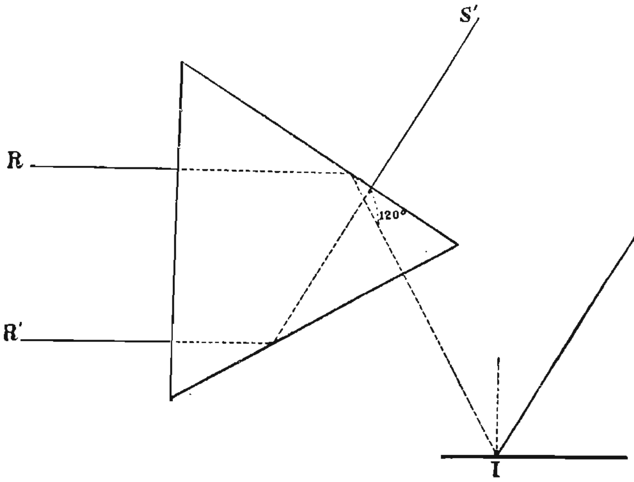
Кад се одбаце чланови другог и виших степена у односу према w, имаћемо

$$r = arc\sin\left(\frac{w}{n} + \dots\right) = \frac{w}{n}.$$

За величину тога угла је произашло обртање општега правца одбијених зракова у односу према бисектриси преломнога угла A. Потпуно обртање тих зракова је, очевидно,

$$w + \frac{w}{n}.$$

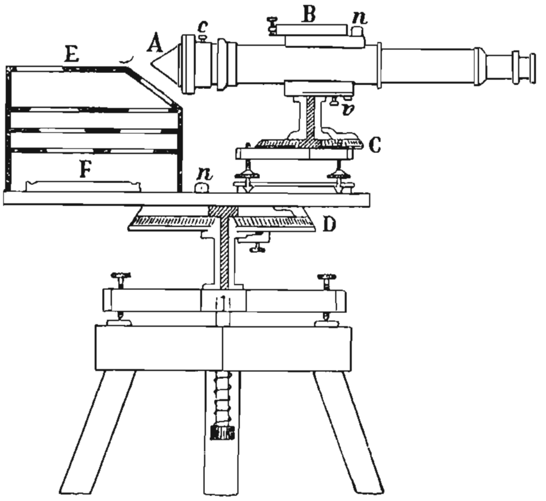
Одатле се види, да ће само за монохроматичку светлост лик предмета остати оштар при произвољном упадном углу на страну призме. Замислимо сада, да уместо призме са неодређено великим протезањем имамо призму пресека равностраног троугла, сл. 108. б. Зраци, који падају на њене стране под правим углима, не трпе никакву дисперсију. Кад се одбију са супротних страна, они излазе опет под правим углима према основици. Кад уђу, као паралелни сноп у објектив дурбина, који је постављен пред призмом, они дају јасне ликове оба предмета, који се поклапају.



Сл. 108, б.

Кад нешто ниже испод призме поставимо суд са живом и замислимо, да светлост са звезде, на висини од 60° над хоризонтом, улази у призму кроз њену горњу страну, а с друге стране, после одбијања са живине огледалне површине, такђе кроз доњу страну, то ћемо у пољу гледања дурбина увидети два лика те исте звезде. Ако је угао призме тачно раван 60° и ако је равнина његове бисектрисе хоризонтална, ликови ће се звезде поклапати, ако јој је привидна њена висина равна 60°. До тога момента ликови ће се звезде налазити са обе стране центра поља гледања. У току времена ликови ће се приближавати или удаљавати са брзином нешто већом од двојне брзине промене висине.

Из напред изложеног јасан је принцип конструкције астролабије са призмом. Она се на тај начин састоји (сл. 108. в.) из равностране призме A, утврђене испред објектива дурбина тако, да његова оптичка оса буде перпендикуларна на основицу призме. Дурбин се заједно са призмом може обртати око вертикалне осе на коју он треба да буде перпендикуларан, што се достиже корекционим завртњем v (сл. 108. в.). Вертикална обртна оса верификује се помоћу либеле, као што се то ради при постављању универзалног инструмента. Пред инструментом ставља се на истој платформи суд F са живом, који је смештен под поклопцем E са три реда преграда са отворима правцем могућних углова упадања и одбијања. Таква конструкција поклопца добро заштићује површину живе од ветра те омогућава посматрање под свима погодбама. Ради оријентације целе системе у ма којем азимуту за посматрање небесног тела, које се налази на повољној висини, платформа, која на себи носи дурбин са целом његовом конструкцијом и живини суд, утврђена је на вертикалној оси те се може обртати око ње, при чему се угао обртања очитава на лимбу D. Вертикалност осе контролише се либелом n, која је утврђена на платформи, те се може корегирати обртањем подножних завртњева.



Сл. 108. в.

Инструмент се ставља на стуб или на статив. На дурбину је утврђена осетљива бусола B, која служи за оријентирање како дурбина, тако и живиног суда у односу према равнини меридијана. Пошто је инструмент постављен на стубу и проконтролисана вертикалност обртне осе, дурбинова се цев доводи у потребан положај према живином суду па се затим цела платформа обрће дотле, док бусолина стрелица не дође у равнину меридијана (магнетну деклинацију при томе треба узети у обзир). После тога се, — остављајући инструмент у истом положају, — уништавају погрешке индекса оба лимба, обрћући их руком тако, да се нулте црте оба лимба поклопе са цртама одговарајућих индекса. Доњи лимб, који носи сву систему, служи за њено оријентирање у извесном азимуту, према раније срачунатој ефемериди. Помоћу горњег, мањег лимба доводи се инструмент у нормални положај према живином суду, што је неопходно потребно, да бисмо се могли користити ефемеридом. Инструмент има два окулара: један са увеличањем од 25 пута а други од 65 пута; поље гледања је код првог 1°15′ а код другог 28′.

Инструменталне грешке. Да би угао међу директним и одбијеним зрацима био тачно раван 120°, неопходно су потребне ове погодбе:

1.) Призма треба да буде од потпуно једнородне стаклене масе са једнаким индексом преламања у целој маси; да су стране њене потпуно равне; да су ивице паралелне međусобом и да преломни угао A буде раван тачно 60°.

2.) Да оса дурбина буде перпендикуларна на ивице призмине.

У садање се време израђују призме, доста великих димензија скоро сасвим једнородног састава са странама без осетне кривине; али грешка у преломном углу (60°) може да достигне до једне минуте.

Кад са узму формуле, које изражавају услов паралелности одбијених зракова и вредности $2h$, угла између упадних зракова, а наиме:

$$\alpha + \alpha' = A; \qquad \frac{r + r'}{3} = 60^\circ - A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

и

$$2h = 180^\circ - A - (i + i'), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

лако је видети, да ако се угао A разликује од 60°, паралелизам одбивених зракова није више доказ сталности угла $2h$.

Кад се диференцирају формуле (1.) и (2.) и поведе рачуна о односу $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, наћи ћемо, да ће, при $dA = 1'$, промена угла $2h$ бити мања од $0''.1$, ако упадни угао i није већи од $1^\circ 54'$.

Одатле излази, да ако упадни угао на страну призме није већи од 2°, она ипак пружа могућност за мерење угла, који и ако се разликује од 120°, ипак је сталне величине.

Ако ивице призмине нису паралелне међу собом, онда већ имамо тријedар те ће упадни зраци изаћи после преламања у правцу нагнутоме према ивицама. У резултату јавиће се нека дисперсија светлости те ће ликови изгубити од од своје оштрине. Па ипак справљање призама врши се са таквом тачности, да та нетачност не показује осетног утицаја на ликове.

Највеће старање треба да буде поклоњено томе, да оптичка оса дурбина буде перпендикуларна на ивице призме. Рачун показује, да тај услов треба да буде испуњен с тачношћу до $2'$, ако се жели, да промена у одређеном углу $2h$ не буде већа од $0.''1$. Кад су све те погодбе испуњене, с инструментом се могу посматрати небесна тела без икаквих поправака привидне висине, која је тада скоро стална и равна приближно 60°.

Постављање астролабије са призмом. Напред указане погодбе треба да буду извршене у механичкој радионици при изради инструмента. Да бисмо се при сваком посматрању могли ограничити само на нивелисање вертикалне осе инструмента и на оријентирање његових лимбова, неопходно је још потребно, проконтролисати испуњење ових погодаба:

1. Оса дурбина треба да буде перпендикуларна на обртну осу инструмента.
2. Призма пред објективом треба да буде оријентирана тако, да при вертикалности обртне осе, преломна ивица призме A буде хоризонтална, као и равнина, која дели преломни угао A на пола. Те је погодбе потребно проконтролисати само приближно. Пошто у дурбину нема мреже кончића, то се под оптичком осом његовом подразумева права, која спаја оптички центар објектива са центром поља гледања.

Пошто удаљимо призму и проконтролишемо вертикалност обртно осе, навизираћемо дурбином на хоризонтални колиматор. Лик његов треба да се добије у центру поља гледања. Завртањ *c* служи за регулисавање нагиба оптичке осе. Затим се за оријентирање призме поступа овако: Испред призме на повећем растојању од ње обеси се висак са тегом; посматрач удаљивши спочетка окулар, обрће призму дотле, док се ликови конца виска, који се добивају са горњег и доњег дела призме, не поклопе и не буду један у продужењу другога. Тачно пак регулисавање врши се за време самих посматрања: Призма се оријентира тако, да се оба лика звезде, — од којих један иде наниже а дрги навише, — поклопе у једној тачци. Поклапање треба да буде у центру поља гледања, ако је бисектрисина равнина призме паралелна са оптичком осом. Помоћу завртања за регулисавање, то се лако достиже.

Даље је изложен пример једновременог одређивања времена и ширине помоћу астролабије са призмом на тачци Шерага (Алжир) 1902. г.

По приближно узетим величинама:

$$\varphi_0 = 36^\circ 47' 20''$$

$$z_0 = z_A + \rho = 29^\circ 57' 20'' \quad ^{1)}$$

$$u_0 = -\, 4^m 40^s$$

срачунати су Z (па нађени и $\triangle z$) и a по формулама

$$\cos Z = \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos (T + u_0 - \alpha)$$ и

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\sin Z} \sin (T + u_0 - \alpha) \; ^{2)}$$ и по овом формулару

Станица Шерага (Алжир). 26.-XII-1902.

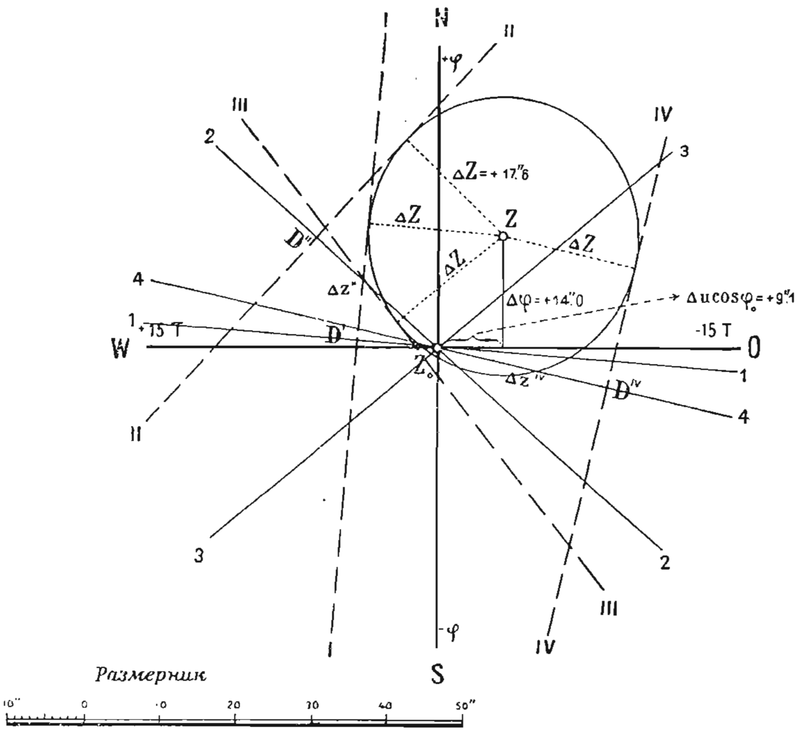
ЗВЕЗДЕ:	126. Gr. 1890. (5.3)	548. Gr. 1890. (2.7)	260. Gr. 1890. (5.0)	1869. Gr. 1890. (3.7)
T	$2^h 48^m 49^s.0$	$3^h\ 2^m 43^s.0$	$3^h 17^m 58^s.5$	$3^h 26^m 45^s.0$
u_0	— 4 40. 0	— 4 40. 0	— 4 40. 0	— 4 40. 0
α	0 25 0. 83	1 26 18. 42	0 43 21. 32	5 53 8. 60
$[T + u_0 - \alpha]^h$	2 19 8. 17	1 31 44. 58	2 29 57. 18	21 28 56. 40
$[T + u_0 - \alpha]^\circ$	34° 47′ 2″5	22° 56′ 8″7	37° 29′ 18″0	322 14 6. 0
φ_0	36 47 20. 0	36 47 20. 0	36 47 20. 0	36 47 20. 0
δ	29 13 11. 3	14 50 48. 5	50 26 37. 7	37 12 13. 6
$lg \sin \varphi_0$	9.777 331	9.777 331	9.777 331	9.777 331
$lg \sin \delta$	9.688 563	9.408 639	9.887 055	9.781 505
lg 1. члана	9.465 894	9.185 970	9.664 386	9.558 836
1. члан	0.292 344	0.153 451	0.461 728	0.362 106
$lg \cos \varphi_0$	9.903 550	9.903 550	9.903 550	9.903 550
$lg \cos \delta$	9.940 891	9.985 253	9.804 027	9.901 180
$lg \cos (T + u_0 - \alpha)^\circ$	9.914 506	9.964 232	9.899 535	9.897 918
lg 2. члана	9.758 947	9.853 035	9.607 112	9.702 648
2. члан	0.574 046	0.712 910	0.404 680	0.504 252
$\cos Z$	0.866 390	0.866 360	0.866 408	0.866 358
$lg \cos Z$	9.937 713	9.937 698	9.937 722	9.937 697
Z	29° 57′ 30″0	29° 57′ 42″2	29° 57′ 22″5	29° 57′ 43″0
z_0	29 57 20. 0	29 57 20. 0	29 57 20. 0	29 57 20. 0
$\triangle z = Z - z_0$	+ 10. 0	+ 22. 2	+ 2. 5	+ 23. 0
$lg \sin [T + u_0 - \alpha]^\circ$	9.756 31	9.590 73	9.784 33	9.787 05
$lg \cos \delta$	9.940 89	9.985 25	9.804 03	9.901 18
Compl. $lg \sin Z$	0.301 52	0.301 57	0.301 61	0.301 53
$lg \sin a$	9.998 72	9.877 55	9.889 97	9.989 76
a	94° 23′ 50″	131° 2′ 6″	50° 54′ 50″	282° 23′ 30″
$\sin a$	+ 0.997	+ 0.754	+ 0.776	— 0.977
$\cos a$	— 0.077	— 0.657	+ 0.631	+ 0.215

---

1) z_A = призмин прибл. угао; ρ = рефракција.

2) Где T означава посматране моменте поклапања ликова.

По тима a и $\triangle z$ конструисане су линије (сл. 108. г.) I I, II II, III III, и IV IV па је опитом конструктивним путем нађен центар Z круга, који најбоље тангира све те четири линије. Тако је на место претходно и привремено узетог зенита Z_0 нађен прави Z па отуд и поправке $\triangle\varphi = + 14''\!.0$ и $\triangle u \cos \varphi_0 = + 9''\!.1$ помоћу којих се исправљају привремено узете приближне величине за φ и u.



(Сл. 108. г.)

ГЛАВА XIV.

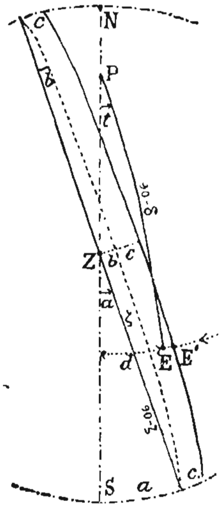
ОДРЕЂИВАЊЕ ВРЕМЕНА И ШИРИНЕ ПАСАЖНИМ ИНСТРУМЕНТОМ.

112. Употреба меридијанске марке.

Обраћајући се методама одређивања времена и ширине из азимуталних посматрања небесних тела, почећемо од најпростијих посматрања пасажним инструментом, која, као што је већ речено у чл. 86. и чл. 87. треба да дају тачније резултате, разуме се, при погодби, да азимут тога инструмента, који се свагда монтира на солидном стубу, остане непромењив за време посматрања.

Код сталних пасажних инструмената (чл. 52.) који на опсерваторијама служе како за одређивање времена, тако и ректасцензија небесних тела, монтажа је њихова у меридијану на зиданим стубовима толико стабилна, да није ни потребно често одређивати: ни нагиб осе b, ни колимациону грешку c, ни сами азимут инструмента a; последње пак две величине c и a увек се лако и згодно добивају из посматрања сталне *меридијанске марке.* Тада се поправка часовника u изводи из посматрања момента T пролаза преко средњег кончића неке звезде (α, δ) са незнатном деклинацијом δ, — на овај начин:

Ако будемо рачунали, — као што је то и уобичајено при употреби пасажног инструмента, — мале величине a, b и c а тако исто часовне угле звезда̂ t (сл. 109.) као позитивне од јужног дела меридијана ка истоку, и, ако означимо меридионално зенитно растојање звезде E са $\zeta = \varphi - \delta$ а скретање њено ка истоку усљед дневне аберације (чл. 89.) — са γ, онда ћемо добити на основу реченога у чл. 54:



Сл. 109.

$$t = \alpha - (\mathrm{T} + u) = d.\sec\delta = (a\sin\zeta + b\cos\zeta + c - \gamma)\sec\delta$$

а одатле, ако се ради скраћења означи

$$\sin\zeta\sec\delta = \mathrm{A}, \qquad \cos\zeta\sec\delta = \mathrm{B} \qquad \text{и} \qquad \sec\delta = \mathrm{C},$$

излази

$$u = \alpha - [\mathrm{T} + \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}(c - \gamma)]^{1)} \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Али је удешавање помоћне меридијанске марке за преносни пасажни инструмент скопчано са разним тешкоћама, од којих се најглавнија састоји у томе,

---

[1] Овој, Табиас Мајеровој формули дају још и други облик, који је погоднији за употребу на опсерваторијама са сталним пасажним инструментима, стављајући, као што је то Бесал радио,

$$b\cos\varphi + a\sin\varphi = m \qquad \text{и} \qquad b\sin\varphi - a\cos\varphi = n;$$

тада излази

$$a\sin\zeta + b\cos\zeta = m\cos\delta + n\sin\delta$$

и

$$\alpha = \mathrm{T} + u + m + n\,tg\,\delta + (c - \gamma)\sec\delta \quad \ldots\ldots \quad (1)'$$

што је просту марку, постављену недалеко од инструмента, немогућно јасно видети ни тачно посматрати у дурбину без нарочитих за то срестава. Придржавајући се у ствари истога поступка, као и напред реченога, због тих се незгода у том случају узима у помоћ кулминација какве циркумполарне звезде, која би због спорог својега кретања, — које се лако узима у рачун, — представљала природну марку за одређивање како колимационе грешке инструмента c, тако и његова азимута a. Али, утврђени при томе ред посматрања̂ и сама метода извода из њих поправке хронометра u излазе, као што ћемо одмах видети, и непрактични и нерационални.

113. Одређивање времена помоћу циркумполарне звезде.

Кад се изабере која од циркумполарних звезда, која кулминира приближно око онога часа, када се намерава да врши одредба времена, и када се унапред одреди с тачношћу до 1^m, када наиме она треба да пређе преко појединих кончића пасажног инструмента, постављенога довољно приближно у меридијану (чл. 90.), онда се бира из каталога још неколико звезда разних деклинација δ тако, да се једне од њих посматрају пре циркумполарне звезде а друге после ње, некад пак, — ако је то могућно; — и у интервалу између пролаза циркумполарне преко појединих кончића. При томе се још резервише и довољно времена за нивелање хоризонталне осе инструмента (са неопходним превртањем либеле), као и за превртање те осе у лежиштима, — један пут у средини свију посматрања. — Тражена поправка хронометра u изводи се из тако извршених посматрања на овај начин:

1.) Из прочитања либеле одреде се нагиби осе b_0 и b_w при положају круга инструмента Ost и West (чл. 26.).

2.) Са даним растојањима f између кончића срачунају се свођења τ посматраних момената пролаза сваке звезде на средњи кончић по приближној формули $\tau = f \sec \delta$, за циркумполарну пак звезду са корекционим чланом $\frac{1}{6}\tau^3 \sin^2 1^s$ (чл. 54.). па се изведу моменти T пролаза звезда преко средњег кончића са поправкама тих T за ход хронометра ω односно звезданог времена; за циркумполарну се звезду изведу на тај начин два момента: T_0 — из свију њених посматрања при кр. Ost и T_w — при кр. West.

3.) Пошто се поправе моменти T за нагиб b_0 или пак b_w, онда се добију

$$T' = T + Bb_0 \qquad \text{или пак} \qquad T' = T + Bb_w.$$

4.) За циркумполарну ће звезду ти моменти T'_0 и T'_w, очавидно, дати

$$T'_0 + Cc = T'_w - Cc,, \quad \text{тј.} \quad c = \frac{T'_w - T'_0}{2C},$$

где знак $+$ или $-$ код c одговара положају круга Ost.

5.) Са изведеном на тај начин вредношћу за c добивају се за све звезде по други пут поправљени моменти:

$$T'' = T' + C(c - \gamma) \text{ при кр. Ost} \qquad \text{и} \qquad T'' = T' - C(c + \gamma) \text{ при кр. West.}$$

6.) После тога циркумполарна звезда (α, δ) и која друга (α_1, δ_1) од посматраних дају за азимут инструмента a две једначине

$$u + Aa = \alpha - T'' \qquad \text{и} \qquad u + A_1 a = \alpha_1 - T_1''$$

одакле је
$$a = \frac{(\alpha - T'') - (\alpha_1 - T_1'')}{A - A_1};$$

ради контроле пак и ради веће тачности извода a може се узети још једна од посматраних звезда (α_2, δ_2) при супротном положају инструмента.

7.) Најзад се са нађеном вредношћу за a добију за све звезде времена њихова пролаза кроз меридијан
$$T''' = T'' + Aa$$
и онолико извода поправке хронометра
$$u_1 = \alpha_1 - T_1''', \qquad u_2 = \alpha_2 - T_2''', \qquad u_3 = \alpha_3 - T_3''', \; \ldots\ldots$$
колико је звезда било посматрано (изузев циркумполарне); средње пак аритметичко из њих узме се као дефинитивна вредност за u.

Пример. 7· Августа 1876. г. у Пулкову ($\varphi = 59^\circ 46'$) била су извршена посматрања малим Ертловим пасажним инструментом (чл. 53.) ради одређивања поправке хронометра, са дневним ходом $\omega = + 3^s.6$; посматране су биле: циркумполарна звезда δ *Ursae minoris* и још друге четири, које су у овоме примеру показане. Вредност полуподеока либеле била је равна $0''.55$ а поправка за неједнакост чепова осе $\rho = 0^{1/2\tau}.35$, са знаком (+) при кр. Ost и са (—) при кр. West.

	Звезде	Број конч.	T на сред. конч.	Свођење на 18^h10^m	Прочит. либеле
Кр. O	μ *Herculis.*	(9)	$17^h 39^m 13^s.30$	$-0^s.08$	у 17^h45^m $\left\{\begin{matrix} -\;9.6 + (13.7) \\ (-12.6) + 10.8 \end{matrix}\right\}$ $i_0 = +\overset{1/2\tau}{1.15}$
	γ *Draconis.*	(8)	17 51 24.64	-0.05	
	δ *Ursae min.*	(4)	18 11 42.80		$b_0 = i_0 + \rho = +\overset{1/2\tau}{1.50} = +0^s.055$
Кр. W	δ *Ursae min.*	(4)	18 10 51.68		у 18^h37^m $\left\{\begin{matrix} -\;9.0 + (14.5) \\ (-11.6) + 11.7 \end{matrix}\right\}$ $i_w = +\overset{1/2\tau}{2.80}$
	α *Lyrae.*	(9)	30 18.97	$+0.05$	
	β *Lyrae.*	(8)	43 4.01	$+0.08$	$b_w = i_w - \rho = +\overset{1/2\tau}{2.45} = +0^s.090$

Извод поправке хронометра

	кр. Ost.			кр. West.		
	μ *Herculis.*	γ *Draconis.*	δ *Urs. min.*	δ *Urs. min.*	α *Lyrae.*	β *Lyrae.*
$\delta =$	$+27^\circ 48'$	$+51^\circ 30'$	$86^\circ 36' 33''$		$+38^\circ 40'$	$+33^\circ 13'$
$\zeta =$	+31 58	+ 8 16	—26 50		+21 6	+26 33
$lg\, cos\, \zeta =$	9.9286	9.9955	9.9505		9.9699	9.9516
$lg\, C =$	0.0533	0.2058	1.2281		0.1075	0.0775
$lg\, sin\, \zeta =$	9.7238	9.1577	9.6546_n		9.5563	9.6503
$lg\, B =$	9.982	0.201	1.1786		0.077	0.029
$lg\, A =$	9.7771	9.3635	0.8827_n		9.6638	9.7278
$T =$	$17^h 39^m 13^s.22$	$51^m 24^s.59$	$18^h 11^m 42^s.80$	$10^m 51^s.68$	$30^m 19^s.02$	$43^m\ 4^s.09$
$Bb =$	+0.05	+0.09	+0.83	+1.36	+0.11	+0.10
$T' =$	39 13.27	51 24.68	11 43.63	10 53.04	30 19.13	43 4.19
$C(c \mp \gamma) =$	—1.70	—2.42	—25.48	+25.11	+1.90	+1.78
$T'' =$	39 11.57	51 22.26	11 18.15	11 18.15	30 21.03	43 5.97
$Aa =$	+5.97	+2.30	—1 16.14		+4.60	+5.33
$T''' =$	39 17.54	51 24.56	10 2.01		30 25.63	43 11.30
$\alpha =$	17 41 38.96	17 53 46.06	18 12 23.51		18 32 47.07	18 45 32.85
$u =$	+2 21.42	+2 21.50			+2 21.44	+2 21.55

У средњем $u = +\mathbf{2^m 21^s.48}$ у $18^h 10^m$ по хронометру.

$$\begin{array}{c}\text{Извод}\\ c\end{array} \left\{ \begin{array}{r} T'_w - T'_0 = -50\overset{s}{.}59(1.7041_n) \\ lg\, 2\sec\delta = 1.5291 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} c = -\mathbf{1\overset{s}{.}496} \\ \gamma = 0.011 \end{array} \quad \begin{array}{l} c-\gamma = -1\overset{s}{.}507\,(0.1781_n) \\ c+\gamma = -1.485\,(0.1718_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{Извод}\\ a\end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mu\ \mathit{Herculis}\ldots\ u + 0.598\,a = +2^m27\overset{s}{.}39 \\ \delta\ \mathit{Urs.\ min.}\ldots\ u - 7.633\,a = +1\quad 5.36 \\ \beta\ \mathit{Lyrae}\ldots\ldots\ u + 0.534\,a = +2\quad 26.88 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = +9\overset{s}{.}968 \\ a_2 = +9.982 \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} \text{ср. } a = +\mathbf{9\overset{s}{.}975} \\ lg\, a = 0.9989 \end{array}$$

Стварни су недостаци изложенога овде реда посматрањâ и извода из њих поправке хронометра *u*, ови:

1.) Одређивање времена из посматрања неколико јужних а само једне северне, циркумполарне звезде нема довољног основа, због тога, што, — као што је разјашњено у чл. 87., — посматрања северних звезда имају при томе потпуно исти значај као посматрања јужних.

2.) Колимациону грешку *c* инструмента, азимут његов *a* и саму поправку хронометра *u* требало би изводити из свију посматрања појединих звезда по методи најмањих квадрата, узимајући у обзир њихове тежине (чл. 47. и чл. 56.); тек тада би се могло са сигурношћу судити и о тачности средњега резултата *u*.

3.) Претпоставка, да су за све време посматрања, — тј. у току часа а понекад и дуже, — азимут и колимациона грешка остали без промене, не може вредети, уопште говорећи, и за преносни пасажни инструмент. Вероватне поступне промене, које у њему произлазе, требало би искључити симетричним распоредом посматрања, тј. дуплим превртањем дурбина у лежиштима; а то би се успело да постигне само са таквом северном звездом, која је врло близу пола, као што је нпр. *Поларна,* и то посматрајући је при томе не на сталним кончићима већ микрометром са покретним кончићем.

4.) Таква су одређивања времена особито сужена и том околношћу, што их ваља прилагођавати моменту кулминације какве довољно сјајне циркумполарне звезде, међутим њихов је број врло ограничен.

114. Посматрања у вертикалу Поларне.

Због ограниченог броја сјајних циркумполарних звезда астрономи су већ давно помишљали о томе, да се за одређивање времена преносним пасажним инструментом употреби једна и иста звезда 2. величине — *Polaris* ($\delta = 88°50'$, $\sec\delta = 50$) па да се инструмент ставља у исти вертикал у коме се и она налази у даном моменту. То води, разуме се, знатној компликацији срачунавања извода тражене поправке хронометра; затим је још потребно, да се унапред спреми *радни каталог звезда,* да би се знало, када ће се поједине од јужних звезда налазити у вертикалу Поларне; најзад је потребно, да инструмент буде снабдевен микрометром са покретним кончићем (или паром врло блиских кончића) за довођење његово на ту звезду, пошто посматрања Поларне на сталним кончићима постају потпуно немогућна у близини њене елонгације (око 7^h и 19^h звезданог времена). Али се све то рентира сигурношћу извода поправке хронометра и тиме, што се она може одредити, кад год се зажели. Ову је методу одређивања времена разрадио у свима детаљима пулковски астроном Делен ¹); за олакшање пак посматрачима при састављању раднога каталога, срачунате су биле и особите помоћне таблице. ²)

---

¹) W. Döllen. — „*Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns*“ 1874.

²) E. Block. — „*Hilfstafeln zur Berechnung der Polaris-Azimute....*“ 1875.

Што се тиче споменутог радног каталога, то се он може да састави доста просто помоћу ефемериде Поларне за дану ширину места φ и мале таблице променâ $\triangle a$ азимутâ звездâ разних деклинација за 1^m времена, коју смо дали у чл. 103. За сваку од јужних звезда наћи ће се спочетка, у моменту њене кулминације $S_0 = \alpha$, азимут Поларне a'_0; (који се рачуна од севера ка западу) а по њему и време $t_0 = \frac{a'_0}{\Delta a}$, које звезда употреби за пролаз тога азимута a'_0; затим се, по азимуту Поларне a'_1 за време $S_1 = S_0 - t_0$, срачуна још једном $t_1 = \frac{a'_1}{\Delta a}$ и већ доста приближно време $S = S_0 - t_1$, када звезда (α, δ) има исти азимут a'_1 као и Поларна (али, рачунајући га за њу од југа ка истоку, као што је то и уобичајено за пасажни инструмент у меридијану). За добивање пак зенитнога растојања z звезде у томе моменту, треба додати ка $\zeta = \varphi - \delta$ малу величину r свођења на меридијан, која се изналази из исте таблице чл. 103.

Да нађемо, например, када ће се у Пулкову ($\varphi = 59°46'$) налазити у једном и истом вертикалу са Поларном (1886. г.) звезде: α *Aurigae* ($\alpha = 5^h8^m.3$, $\delta = 45°53'$, $\triangle a = 40'$) и β *Tauri* ($\alpha = 5^h19^m.0$, $\delta = 28°30'$, $\triangle a = 25'$).

Ефемерида *Поларне*		
S	a'	z'
$4^h56^m.6$	$+2°10'$	$29°30'$
5 6.6	13	33
5 16.6	16	36
5 26.6	19	39
. . . .	. . . .	. . . .

		α *Aurigae*		β *Tauri*	
S_0	S_1	$5^h8^m.3$	$5^h4^m.9$	$5^h19^m.0$	$5^h13^m.5$
a'_0	a'_1	$+2°13'$	$+2°12'$	$+2°17'$	$+2°15'$
t_0	t_1	$+3^m.4$	$+3^m.3$	$+5^m.5$	$+5^m.4$
	S		$\mathbf{5^h5^m.0}$		$\mathbf{5^h13^m.6}$
ζ		$+13°53'$		$+31°16'$	
r		$+5$		$+3$	
	z		**13°58'**		**31°19'**

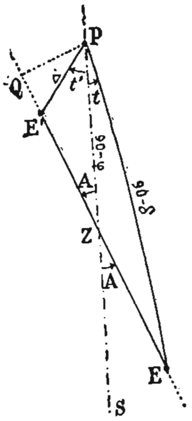
На тај се начин у радни каталог уносе ови подаци:

Звезде	велич.	S	z	a'	z'
α *Aurigae*	(1.)	$5^h\ 5^m.0$	$+13°58'$	$+2°12'$	$29°32'$
β *Tauri*	(2.)	5 13.6	+31 19	+2 15	29 35

Сама пак посматрања врше се пасажним инструментом са покретним кончићем у вертикалу Поларне на овај начин: За неколико минута до момента S, показанога у каталогу за какву од јужних звезда, постави се инструмент по азимуту тако, да се Поларна појави у дурбину недалеко од средњег кончића; изврши се микрометром једно за другим 2 или 3 постављања покретног кончића на њу ради одређења њенога растојања f' од средњег кончића у средњему од запажених по хронометру момената T'; изврши се, затим, посматрање пролаза изабране јужне звезде преко свих кончића мреже и либелом одреди нагиб хоризонталне осе инструмента; после тога се осовина преврне у лежиштима (а код Хербстовог инструмента окрене за 180°) па се понови то исто са другом јужном звездом. За потпуно одређење времена, — као што је то напред речено (чл. 113.), — треба сматрати оно, када је заједно са Поларном извршено посматрање још двеју јужних звезда са поновљеним превртањем хоризонталне осе.

115. Извод поправке хронометра.

Да изведемо спочетка поправку хронометра (u) из посматрања какве јужне звезде E (α, δ) (сл. 110.) у истоме азимуту A са Поларном E' (α', δ') са претпоставком, да се оне обадве налазе у моментима њихова посматрања T и T' на средњем кончићу дурбина ($f' = 0$) и да су како нагиб b осе инструмената, тако и колимациона грешка c дурбина равни нули. За звезду ће се E тај моменат T добити свођењем њенога посматрања на средњи кончић по формули



Сл. 110.

$$\tau = \frac{f}{\cos\delta \cos p}, \qquad \text{где је} \qquad \sin p = \cos\varphi \frac{\sin \mathrm{A}}{\cos\delta}.$$

Пошто ће часовни угли обеју звезда у моментима T и T' бити

$$t = \alpha - \mathrm{T} - (u) \qquad \text{и} \qquad t' = \mathrm{T}' + (u) - \alpha',$$

то ће у сферном троуглу EPE', са датим странама $\mathrm{EP} = 90^\circ - \delta = \triangle$ и $\mathrm{PE}' = 90^\circ - \delta' = \triangle'$, бити познат и угао између њих

$$\sphericalangle \mathrm{EPE}' = \beta = (t + t') = (\alpha - \alpha') - (\mathrm{T} - \mathrm{T}') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Кад уобразимо лук PQ, перпендикуларни на EZE' и означимо $\sphericalangle \mathrm{QPE} = 90^\circ - \mathrm{M}$, онда ћемо, из правоуглих троуглова PQE и PQE', имати

$$tg\, \mathrm{PQ} = cotg\, \delta \sin \mathrm{M} = tg\, \triangle' \sin(\mathrm{M} + \beta),$$

одакле је

$$tg\, \mathrm{M} = \frac{tg\, \triangle'\, tg\, \delta \sin\beta}{1 - tg\, \triangle'\, tg\, \delta \cos\beta}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)$$

из троугла пак QPZ, ако се означи $\sphericalangle \mathrm{QPZ} = 90^\circ - \mathrm{N}$, добиће се

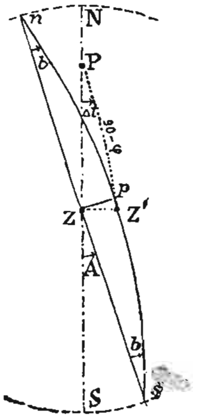
$$\sin \mathrm{N} = \frac{tg\mathrm{PQ}}{tg\,\mathrm{PZ}} = tg\, \varphi\, cotg\, \delta \sin \mathrm{M}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

а пошто је $t = \mathrm{N} - \mathrm{M}$, то ће се (u) одредити у облику

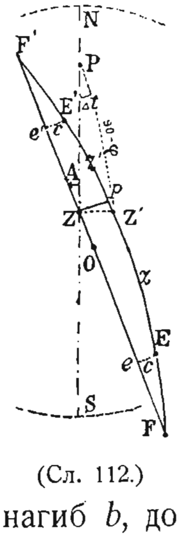
$$(u) = \alpha - \mathrm{T} + \mathrm{M} - \mathrm{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)$$

Ако постоји нагиб b, онда ће велики круг инструмента $n\mathrm{Z}'s$ (сл. 111.) скренути од истинитог вертикала $n\mathrm{Z}s$ за угао $\sphericalangle \mathrm{Z}s\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}p = b$ и часовни угао јужне звезде неће већ бити t него $t + \triangle t$, где је

$$\triangle t = \sphericalangle \mathrm{ZPZ}' = \frac{\mathrm{ZZ}'}{\cos\varphi} = \frac{\mathrm{Z}p}{\cos\varphi \cos \mathrm{A}} = \frac{b}{\cos\varphi \cos \mathrm{A}}; \quad . \quad (5)_b$$



Сл. 111.



(Сл. 112.)

због тога ту величину $\triangle t$ треба одузети од напред нађене (u), те да се узме у обзир нагиб b.

Ако ли постоји и колимациона грешка c, онда се места обеју звезда E и E' (сл. 112.) у моментима T и T' неће налазити на самом вертикалу инструмента FZF' већ на растојању од њега $\mathrm{E}e = \mathrm{E}'e' = c$; велики пак круг сфере EZ'E' пресећи ће га у двема тачкама F и F', које се налазе од средине 0 лука ee' на растојању $0\mathrm{F} = 0\mathrm{F}' = 90^\circ$. Ако се зенитна растојања $\mathrm{Z}e = z$ и $\mathrm{Z}e' = z'$ за обе звезде сматрају као позитивна, онда ће изаћи

$$\mathrm{F}e = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(z + z'), \qquad \mathrm{FZ} = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(z - z'),$$

за лук пак $\mathrm{Z}p$, — који је перпендикуларан на FZF', — и слични нагиб b, добиће се, из елементарних троуглова ZpF и EeF, овакав израз

$$\mathrm{Z}p = \sphericalangle \mathrm{ZF}p \,.\, \sin \mathrm{FZ} = \frac{\mathrm{E}e}{\sin \mathrm{F}e} \sin \mathrm{FZ} = c\, \frac{\cos\frac{1}{2}(z - z')}{\cos\frac{1}{2}(z + z')}\,.$$

Због тога од (u) треба одузети још и величину

$$\frac{Zp}{\cos\varphi\cos\mathrm{A}} = \mathrm{K}c, \quad \text{где је } \mathrm{K} = \frac{\cos\frac{1}{2}(z-z')}{\cos\varphi\cos\mathrm{A}\cos\frac{1}{2}(z+z')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)_c$$

С тим ће коефицијентом K (за чије се срачунавање зенитна растојања звездâ z и z' већ налазе у радном каталогу) ући у (u) и дневна аберација γ.

Најзад, ако Поларна у моменту T′ није посматрана на средњем кончићу, већ на растојању f' од њега, онда је најпростије померити и место јужне звезде E на то исто растојање f' од средњег кончића, тј. извршити срачунавање величина M, N и (u) помоћу момента T, који је претходно исправљен за величину $\tau' = -\frac{f'}{\cos\delta\cos p}$, те после тога колимациону грешку сматрати као да је равна $(c+f)$.

На основу свега реченога, истинита ће поправка хронометра u бити

$$u = (u) - \frac{b}{\cos\varphi\cos\mathrm{A}} - \mathrm{K}(c + f' - \gamma);$$

ако пак после превртања осе инструмента буде посматрана, — макар и у другом азимуту A_1, — заједно са Поларном и друга звезда (α_1, δ_1), онда ће се за одређивање непознатих u и c добити две једначине:

$$\left.\begin{aligned} u + \mathrm{K}\,c &= (u) - \frac{b}{\cos\varphi\cos\mathrm{A}} + \mathrm{K}\,\gamma - \mathrm{K}\,f' \\ u - \mathrm{K}_1 c &= (u)_1 - \frac{b_1}{\cos\varphi\cos\mathrm{A}_1} + \mathrm{K}_1\gamma - \mathrm{K}_1 f' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.)$$

Треба још напоменути, да се срачунавање углова M и N по формулама (3.) и (4.) олакшава тиме, што је величина $\triangle'$ за Поларну врло мала те се можемо користити логаритамским поправкама $\mathfrak{S}(x)$ синусâ малих углова x. Кад се ради скраћења означи

$$lg\,\triangle' + 2\,\mathfrak{S}(\triangle') + lg\,\sin\beta - lg\,(1 - tg\,\triangle'\,tg\,\delta\cos\beta) = \mathrm{L},$$

онда ћемо у место тих [(3.) и (4.)] формула добити ове:

$$lg\,\mathrm{M} = lg\,tg\,\delta + \mathrm{L} - 2\,\mathfrak{S}(\mathrm{M}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)'$$

$$lg\,\mathrm{N} - \mathfrak{S}(\mathrm{N}) = lg\,tg\,\varphi + \mathrm{L} - 3\,\mathfrak{S}(\mathrm{M}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)'$$

Коефицијенте пак K и K_1 код c, f и f'_1, — ако су те величине вр. мале, — довољно је срачунавати свега са три децимале, узимајући, да је приблажно $\cos\mathrm{A} = 1$, $z = \varphi - \delta = \varphi + \triangle - 90^\circ$ и $z' = 90^\circ - \varphi$, при чему ће изаћи просто

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 = \frac{\sin(\varphi + \frac{\triangle}{2})}{\cos\varphi\cos\frac{\triangle}{2}} = tg\,\varphi + tg\,\frac{\triangle}{2}\,\cdot$$

Као што се види, тачност резултата поправке хронометра u и колимационе грешке c из једначина (6.) зависи углавноме од тачности величина (u) и $(u)_1$, које се срачунавају по формулама (2.), (3.), (4.) и (5.) из посматраних момената T и T′, који су подвргнути случајним грешкама $\triangle$T и $\triangle$T′. Да би се одредила случајна грешка $\triangle(u)$, која отуд произлази у добивеној вредности за (u), није потребно изводити је диференцирањем тих формула, јер је у чл. 87. већ добивен био за њу општи израз (9.)′. Ако означимо, као и тамо,

$$\triangle\mathrm{T}\cos\delta\cos p = \triangle s \qquad \text{и} \qquad \triangle\mathrm{T}'\cos\delta'\cos p' = \triangle s'$$

и ако ширину места φ сматрамо за тачно познату а $\cos A$ да је раван 1, онда ћемо имати

$$\triangle(u)\cos\varphi = \frac{\triangle s \sin z' + \triangle s' \sin z}{\sin(z+z')};$$

ако је, затим, посматрање Поларне (у средњем из 2 или 3 стављања на њу микрометарног покретног кончића) подвргнуто приближно истој средњој грешци ε_s, каквој подлежи и посматрање јужне звезде (на неколико сталних кончића мреже), онда ће средња грешка $\varepsilon_{(u)}$ вредности за (u) теориски изаћи, — са усвојеном у чл. 87. ознаком $(\mathfrak{C})$, — оваква

$$\varepsilon_{(u)}\cos\varphi = (\mathfrak{C})\,\varepsilon_s.$$

Например, на ширини $\varphi = 60°$, за коју је приближно $z' = 30°$, најмања ће вредност коефицијента $(\mathfrak{C})$ бити 0.79 (при $z = 19°$); тада, с претпоставком $\varepsilon_s = \pm 0^s.030$, треба да излази

$$\varepsilon_{(u)}\cos\varphi = \pm 0^s.024.$$

Пример. — 9. марта 1886. г. извршена су била у Пулкову ($\varphi = 59°46'20''$), ради одређења поправке хронометра u доле означена посматрања звезда α *Aurigae* ($\alpha = 5^h 8^m 16^s.72$, $\delta = 45°52'50''$) и β *Tauri* ($\delta = 5^h 19^m 5^s.68$, $\delta = 28°30'30''$) у вертикалу *Поларне* ($\alpha' = 1^h 16^m 37^s.8$, $\triangle' = 1°17'48''.4 = 311^s.227$) Хербстовим пасажним инстументом. Поларна је посматрана на самом средњем кончићу ($f = 0$) а нагиб је осе b био: $-0^s.324$ при кр. West и $-0^s.018$ при кр. Ost.

На средњем кончићу		кр. West.		кр. Ost.	
		Polaris	α *Aurigae*	*Polaris*	β *Tauri*
T'	T	$5^h 0^m 13^s.0$	$5^h 5^m 50^s.11$	$5^h 11^m 24^s.0$	$5^h 14^m 20^s.92$
$\alpha' - T'$	$\alpha - T$	$-3\ 43\ 35.2$	$+0\ 2\ 26.61$	$-3\ 54\ 46.2$	$+0\ 4\ 44.76$
β^h =	β^o	$+3\ 46\ 1.8 =$	$+\ 56°30'27''$	$+3\ 59\ 31.0 =$	$+59°52'45''$
$lg \sin\beta$	$lg \cos\beta$	9.921144	9.74180	9.937000	9.70052
$lg \triangle'$	$lg\, tg \triangle'$	2.493077	8.35482	2.493077	8.35482
$2\,\mathfrak{S}(\triangle')$	$lg\, tg\,\delta$	$+74$	0.01335	$+74$	9.73492
доп. $lg(1-\Sigma)$	$lg\,\Sigma$	0.005631	8.10997	0.002688	7.79029
$-2\,\mathfrak{S}(M)$	$lg\, M$	-56	2.433221	-16	2.167738
$lg\, tg\,\delta$	$lg\, N$	0.013351	2.654502	9.734915	2.667479
L	M	2.419926	271.157	2.432839	147.142
$lg\, tg\,\varphi$	N	0.234582	451.336	0.234582	465.028
$-3\,\mathfrak{S}(M)$	$M - N$	-84	-180.179	-25	-317.886
$+\mathfrak{S}(N)$	(u)	$+78$	$-\ 33.569$	$+83$	$-\ 33.126$
$\triangle$	$-b \sec\varphi \sec A$	$44°7'$	$+\ 0.643$	$61°30'$	$-\ 0.036$
$tg\frac{\triangle}{2}$	$K\gamma$	0.405	$+\ 22$	0.592	$+\ 24$
K	$u \mp Kc$	**2.12**	$-$ **32.90**	**2.31**	$-$ **33.14**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{кр. West:} & u - 2.12\,c = -32^s.90 \\ \text{кр. Ost:} & u + 2.31\,c = -33.14 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 4.43\,c = +0^s.24 \\ c = +\mathbf{0^s.054} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{у } 5^h 10^m \text{ по хрон.} \\ u = -\mathbf{33^s.01} \end{array}$$

116. Посматрања у меридијану разних звезда пар по пар.

Изложеном методом одређивања времена преносним пасажним инструментом у вертикалу Поларне потпуно се одстрањују побројани у чл. 113. недостаци одређивања времена у меридијану помоћу циркумполарне звезде, и то у главноме због тога, што се претпоставља непромењивост азимута само у току кратког времена између посматрања Поларне и једне од јужних звезда. Али, пошто тај азимут не игра никакву улогу у изводу поправке хронометра и пошто се ствар ниуколико не тиче тачне одредбе његове, — ради чега би Поларна била неопходно потребна, — то се поправка хронометра може одредити још на слични начин, али знатно простије па чак и унеколико тачније, на основу онога што смо казали у чл. 87. а наиме на тај начин, што ће се пасажним инструментом, постављеним у меридијану, посматрати ма каква звезда на северној страни од зенита у место циркумполарне.

Рецимо, да је у меридијану к југу од зенита посматрана звезда (α, δ) на зенитном растојању $\zeta = \varphi - \delta$, а к северу од њега звезда (α', δ') на зенитном растојању $\zeta' = \delta' - \varphi$. Кад се стави, ради згоднијега срачунавања, да је $u = u_0 + \triangle u$, где u_0 означава приближну величину поправке хронометра u, и кад се, ради скраћења, означи

$$[\alpha - (\mathrm{T} + u_0)] \cos\delta = s \qquad \text{и} \qquad [\alpha' - (\mathrm{T}' + u_0)] \cos\delta' = s'$$

где су T и T′ моменти пролаза речених звезда преко средњег кончића а добивених у средњем из посматрања тих звезда на неколико кончића, — онда ћемо добити, на основу формуле (1.) овакве две једначине са трима непознатим $\triangle u$, a и c:

$$\triangle u \cos\delta + a \sin\zeta + c - \gamma = s - b \cos\zeta$$

$$\triangle u \cos\delta' - a \sin\zeta' + c - \gamma = s' - b \cos\zeta'.$$

Кад елиминишемо из њега a и напоменемо, да је

$$\cos\delta' \sin\zeta + \cos\delta \sin\zeta' = \cos(\varphi + \zeta') \sin\zeta + \cos(\varphi - \zeta) \sin\zeta' =$$
$$= \cos\varphi \sin(\zeta + \zeta'),$$

онда ћемо имати

$$\triangle u \cos\varphi + (c - \gamma) \frac{\sin\zeta + \sin\zeta'}{\sin(\zeta + \zeta')} = \frac{s' \sin\zeta + s \sin\zeta'}{\sin(\zeta + \zeta')} - b$$

или

$$\left.\begin{array}{l} \triangle u \cos\varphi + \mathrm{K}c = r - b + \mathrm{K}\gamma, \\ \text{где је} \qquad \mathrm{K} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\zeta - \zeta')}{\cos\frac{1}{2}(\zeta + \zeta')} \qquad \text{и} \qquad r = \dfrac{s' \sin\zeta + s \sin\zeta'}{\sin(\zeta + \zeta')} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Ако се пак, после превртања дурбина у лежиштима, буде посматрао и други пар сличних звезда (α_1, δ_1) и (α_1', δ_1'), при чему се пређашњи азимут a и нагиб b могу и изменити, онда ћемо имати још

$$\left.\begin{array}{l} \triangle u \cos\varphi - K_1 c = r_1 - b_1 + K_1 \gamma, \\ \text{где је} \qquad K_1 = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_1')}{\cos\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_1')} \qquad \text{и} \qquad r_1 = \dfrac{s_1' \sin\zeta_1 + s_1 \sin\zeta_1'}{\sin(\zeta_1 + \zeta_1')} \end{array}\right\} ; \quad . \quad . \quad (7)'$$

стога ће се из (7.) и (7.)′ одредити како величина $\triangle u$, тако и c. Због маленкости $\triangle u$, a, b, c, s и s', за рачунање ће по тим формулама бити потребни само логаритми са 4 децимале.

Да би се резултат за u ослободио утицаја поступних промена колимационе грешке, треба посматрати четири пара звезда оваквим сименричним редом: први пар при кр. Ost, други и трећи при кр. West, а четврти понова при кр. Ost (или пак W, O, O, W). Овакво ће се потпуно *одређивање времена* дуљити не више од једнога часа и извршиће се без икаквих припремних срачунавања, већ само са доста подробним списком звезда у рукама, и то са подједнаким удопством за све ширине па чак и за екваторијалне.

У сравњењу са одређивањем времена у вертикалу Поларне, ова метода треба да даје, уопште говорећи, нешто тачније резултате. И заиста, једначине (7.) и (7.)′, које служе за извод $\triangle u$, имају онај исти облик, као и једначине (6.) у чл. 115. те случајне грешке посматрања

$$-\triangle T \cos\delta = \triangle s \qquad \text{и} \qquad -\triangle T' \cos\delta' = \triangle s'$$

улазе у r потпуно онако, као и раније у (u); стога ће средња грешка ε_r величине r бити

$$\varepsilon_r \cos\varphi = (C)\,\varepsilon_s.$$

Али пошто и једно и друго од зенитних растојања ζ и ζ' може бити близо нули, при чему ће изаћи $(C) = 0.71$, то ће се за ε_r уопште добити средња величина, нешто мања него за $\varepsilon_{(u)}$ а наиме, са пређашњом претпоставком да је $\varepsilon_s = \pm 0^{s}.030$, изаћи ће

$$\varepsilon_r \cos\varphi\,(min) = \pm 0^{s}.021.$$

Године 1880. поручено је било геодет. капетану Гедеонову[1]), да на Пулковској Опсерваторији, где се је он обучавао, стварно испита ту методу са Брауеровим пасажним инструментом (чл. 53.). Резултати његових посматрања потпуно су оправдали како удопство употребе те методе тако и очекивану тачност резултата.

Пример. — Изложена овде посматрања два пара звезда извршена су била 11. септембра 1880. г. у Пулкову ($\varphi = 59°46'$) Хербстовим пасажним инструментом. Нагиби осе при кр. Ost и West били су: $b_0 = +0^{s}.064$ и $b_w = +0^{s}.037$; приближна пак величина тражене поправке хронометра била је $u_0 = -1^{m}20^{s}$.

---

[1]) Гедеоновъ — „Объ опредѣленіи времени въ меридіанѣ переноснымъ пассажнымъ инструментомъ". Записки Военно-Топогр. Отдѣла Главнаго Штаба. 1884.

Положај инструмента		кр. Ost.		кр. West.	
Јуж. звезда	Сев. звезда	ζ *Cygni*	*Br.* 2777	g *Cygni*	α *Cephei*
δ	δ'	$+42°27'$	$+77°39'$	$+46°1'$	$+62°5'$
ζ	ζ'	16 19	17 53	13 45	2 19
α	α'	$21^h 0^m 37^s.70$	$7^m 55^s.90$	$25^m 5^s.14$	$15^m 46^s.61$
T	T′	21 1 56. 20	9 12. 02	26 26. 80	17 9. 09
$\alpha - T - u_0$	$\alpha' - T' - u_0$	$+$ 1. 50	$+$ 3. 88	$-$ 1. 66	$-$ 2. 48
lg	*lg*	0. 1761	0. 5888	$0.\ 2201_n$	$0.\ 3945_n$
lg cos δ	*lg cos* δ'	9. 8609	9. 3302	9. 8416	9. 6704
lg s	*lg s′*	0. 0370	9. 9190	$0.\ 0617_n$	$0.\ 0649_n$
lg sin ζ'	*lg sin* ζ	9. 4872	9. 4486	8. 6066	9. 3760
s sin ζ'	*s′ sin* ζ	$+0^s.3344$	$+0^s.2331$	$-0^s.0466$	$-0^s.2760$
$s' \sin\zeta + s \sin\zeta'$	*lg*	$+0^s.5675$	..... 9. 7540	$-0^s.3226$	..... $9.\ 5087_n$
$\zeta + \zeta'$	*lg sin*	$+34°12'$	..... 9. 7498	$+16°4'$	..... 9. 4421
r	*lg r*	$+1^s.010$	0. 0042	$-1^s.166$	$0.\ 0666_n$
$-b$		$-$ 64		$-$ 37	
$+K\gamma$	$r - b + K\gamma$	$+$ 11	$+\mathbf{0^s.957}$	$+$ 11	$-\mathbf{1^s.192}$
$\frac{1}{2}(\zeta - \zeta')$	*lg cos*	$-$ 0°47′	..... 0. 0000	$+$ 5°43′	..... 9. 9978
$\frac{1}{2}(\zeta + \zeta')$	*lg cos*	$+$ 17 6	..... 9. 9804	$+$ 8 2	..... 9. 9957
K	*lg* K	1.046	0. 0196	1.005	0. 0021

$$\left.\begin{array}{r} \triangle u \cos\varphi + 1.046\, c = +0^s.957 \\ \triangle u \cos\varphi - \underline{1.005}\, c = -\underline{1.\ 192} \\ +2.051\, c = +2.\ 149 \\ (0.3120) \qquad (0.3322) \end{array}\right\}$$

$$\triangle u \cos\varphi = -0^s.139$$

$$c = +\mathbf{1^s.048}$$

$$lg\ c = 0.0202$$

$$lg \triangle u \cos\varphi = 9.1430_n$$

$$lg \cos\varphi = \underline{9.7020}$$

$$lg \triangle u = 0.4410_n$$

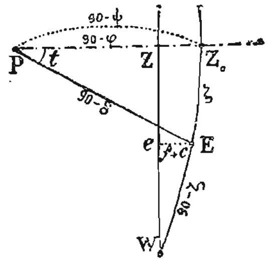
$$\triangle u = -\mathbf{0^s.28}$$

$$u = -\mathbf{1^m 20^s.28}$$

117. Посматрања зенитне звезде у првом вертикалу.

Када је пасажни инструмент постављен у првом вертикалу ради одређивања ширине места φ, онда најпогодније, циркумзениталне звезде пресецају вертикалне кончиће дурбина под врло оштрим углима па чак могу да прођу и мимо неких од њих; због тога те звезде треба посматрати помоћу микрометра са покретним кончићем. Усталићемо пре свега, да одређена на тај начин растојања f од средњега кончића а тако исто и колимациону грешку c рачунамо као позитивне к југу од првог вертикала; нагиб b хоризонталне осе као позитиван, када јој је северни крај виши од јужнога; под азимутом пак инструмента a подразумеваћемо у том случају мали угао, који се рачуна са западне стране првог вертикала ка југу.

Претпоставићемо спочетка, да је $a = 0$ и $b = 0$, па нека је некаква звезда E (α, δ) посматрана у моменту T по хронометру, — чија је поправка u позната, — на растојању f од средњег кончића, тј. на растојању $Ee = c + f$ од првог вертикала ZW (сл. 113.). Кад се замисли кроз E велики круг небесне сфере WEZ_0, који је перпендикуларан на меридијан PZ, и, кад се означи $PZ_0 = 90° - \psi$ и $EZ_0 = \zeta$, онда

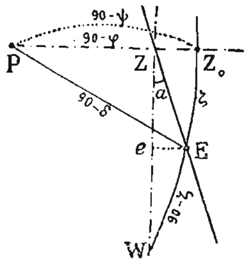


Сл. 113.

ћемо наћи из троугла PEZ_0 са познатим углом $t = T + u - \alpha$:

$$\left.\begin{aligned} cotg\,\psi &= cotg\,\delta\,cos\,t \\ sin\,\zeta &= \, cos\,\delta\,sin\,t \end{aligned}\right\} ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

при чему ће се ψ разликовати од ширине места φ за мали лук



(Сл. 114.)

$$ZZ_0 = \sphericalangle\, ZWZ_0 = \frac{Ee}{sin\,EW} = \frac{c+f}{cos\,\zeta}.$$

Али, ако, — при $c + f = 0$ и $b = 0$, — постоји само мало одступање пасажног инструмента од првог вертикала ZW за мали угао $\sphericalangle\, WZE = a$ (сл. 114.), онда величини ψ треба додати поправку

$$ZZ_0 = \sphericalangle\, ZWZ_0 = \frac{Ee}{sin\,EW} = \frac{a\,sin\,\zeta}{cos\,\zeta};$$

најзад, ако постоји само нагиб b хоризонталне осе, онда ће трећа поправка, очевидно, бити равна самој величини b. На тај начин укупно излази, да је

$$\varphi = \psi + (c + f)\,sec\,\zeta + a\,tg\,\zeta + b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Пошто зенитна звезда, — чија се деклинација δ врло мало разликује од ширине φ, — врло полако пролази преко свију вертикалних кончића пасажног инструмента, то се може успети, да се она посматра на неколико кончића, или пак помоћу микрометра, при разним положајима круга, Sud и Nord, прво на источној страни вертикала (t и ζ са знаком —) а затим на западној (t и ζ са знаком +). Кад се, тада, за свако њено посебно посматрање (T, f) срачунају величине ψ и ζ по формули (8.), кад се, затим, из свих n посматрања, при једном истом положају инструмента, добије средњи извод φ по формули (9.), и, кад се, најзад, ради скраћења означи

$$\frac{\Sigma\psi}{n} + \frac{\Sigma f sec\,\zeta}{n} + \frac{\Sigma b}{n} = F, \qquad \frac{\Sigma\, sec\,\zeta}{n} = C \quad \text{и} \quad \frac{\Sigma\, tg\,\zeta}{n} = A,$$

онда ћемо имати за одређивање φ, c и a четири једначине1):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{На источ. страни} \left\{ \begin{array}{l} \text{кр. Sud} \ldots \varphi - C_1 c - A_1 a = F_1 \\ \text{„ Nord} \ldots \varphi + C_2 c - A_2 a = F_2 \end{array} \right. \\ \text{На запад. страни} \left\{ \begin{array}{l} \text{„ Nord} \ldots \varphi + C_3 c - A_3 a = F_3 \\ \text{„ Sud} \ldots \varphi - C_4 c - A_4 a = F_4 \end{array} \right. \end{array}\right\} \; . \; . \; . \quad (10.)$$

---

1) Нетачност Δu поправке хронометра u улази скривено (са коефицијентом $sin\,\varphi\,tg\,\zeta$) у азимут a, који се одређује; али се заједно са овим потпуно искључује у изводу φ, ако је само распоред посматрања симетричан у односу према меридијану. И заиста, услед тога, што је за први вертикал у формули (8.)'φ чл. 86. $sin\,a = 1$ а $cos\,\delta\,cos\,p = sin\,\varphi\,sin\,\zeta$, — из те формуле излази, да је

$$\Delta\varphi = (\Delta u\,sin\,\varphi - \Delta a)\,tg\,\zeta.$$

Треба још напоменути, да је срачунавање величине ψ с тачношћу до $0''.1$ по строгој формули (8.), — која изискује логоритме са седам децимала, — удобније заменити индиректним срачунавањем мале разлике $(\psi - \delta)$, која се добива из (8.) формуле овако

$$cotg\,\delta - cotg\,\psi = \frac{sin\,(\psi - \delta)}{sin\,\psi\,sin\,\delta}\,2\,cotg\,\delta\,sin^2\frac{t}{2}$$

или

$$sin\,(\psi - \delta) = 2\,sin\,\psi\,cos\,\delta\,sin^2\frac{t}{2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.)'$$

при чему се, због маленкости c и b, на десној страни овога израза може ставити уместо ψ приближна величина $\psi_0 = \varphi_0 - f\,sec\,\zeta$ са приближно познатом већ ширином φ_0, а на левој пак њеној страни узети

$$lg\,sin\,(\psi - \delta) = lg\,(\psi - \delta) + lg\,sin\,1'' - \mathfrak{S}\,(\psi - \delta).$$

Кад је пасажни инструмент стабилно постављен, лако је видети, да би тачност извода ширине φ из напред изложених посматрања зенитне звезде, — зависећи једино од случајних грешака посматрања микрометром и очитавања либеле, — била потпуно онаква иста, као и тачност извода ширине из посматрања два пара звезда зенит-телескопом (чл. 104.) са дурбином исте оптичке моћи, ако би само деклинације посматраних звезда биле и у једном и у другом случају тачно познате. Ако је увеличање дурбина $W = 60$, средња ће грешка ε_s једнога стављања покретног кончића бити око $\pm\,0''.6$; и, ако је у свакоме од напред речена четири положаја инструмента извршено по 4 стављања покрет. кончића, онда средња грешка ε_φ извода ширине треба, због тога, да буде приближно оваква

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{4}\;\sqrt{4}} = \pm\,0''.15.$$

Овом се методом, управо рећи, одређују само разлике између ширине места и деклинације посматране звезде; због тога ако се на разним местима, чије се ширине мало разликују (не више од 1°, као што је то например при геодетским испитивањима локалних скретањâ вертикала), употреби једна и иста зенитна звезда, онда се разлика ширина тих места добива независно од нетачности њене деклинације. На једном и истом пак месту из оваквих се посматрања могу да открију и оне врло мале периодичне промене ширине φ, о којима је напоменуто у чл. 104.

Пример. — 28. новембра 1869. г. извршен је био у Пулкову ($\varphi = 59°46'20''$) Брауеровим инструментом (чл. 53.) помоћу микрометра велики низ посматрања зенитне звезде ($\alpha = 3^h18^m33^s.4$, $\delta = 59°29'12''.9$), при чему је поправка хронометра u била равна $-\,1^m13^s.6$. Ради краткоће, овде ћемо из целог тог низа изложити само четири посебна посматрања при положајима круга инструмента Sud, Nord, Nord и Sud.

	на источној страни		на западној страни	
	Sud	Nord	Nord	Sud
T	$2^h35^m20^s.5$	$2^h49^m\ 9^s.5$	$3^h45^m36^s.0$	$3^h54^m31^s.0$
$T + u - \alpha$	$-\ 0\ 44\ \ 26.5$	$-0\ 30\ \ 37.5$	$+0\ 25\ \ 49.0$	$+0\ 34\ \ 44.0$
t°	$-11^\circ\ 6'37''.5$	$-7^\circ39'22''.5$	$+6^\circ27'15''.0$	$+8^\circ41'\ \ 0''.0$
f	$-11\ \ 2.4$	$+\ 3\ 37.7$	$+7\ 31.3$	$0\ \ 0.0$
b	$-\ \ 2.5$	$-\ \ 3.8$	$-\ \ 1.0$	$+\ \ 0.4$
$lg\,sin\,t$	9.28488_n	9.12460_n	9.05080	9.17890
$lg\,sin\,\zeta$	8.99052_n	8.83024_n	8.75644	8.88454
ζ	$-5^\circ36'.4$	$-3^\circ52'.7$	$+3^\circ16'.3$	$+4^\circ23'.8$
$lg\,sec\,\zeta$	0.00208	0.00100	0.00071	0.00128
$lg\,f$	2.82113_n	2.33786	2.65446	—
$f\,sec\,\zeta$	$-11'\ \ 5''6$	$+3'38''.2$	$+7'32''.0$	$0'\ 0''.0$
$\psi_0 = \varphi_0 - f\,sec\,\zeta$	$59^\circ57\ \ 26$	$59^\circ42\ \ 42$	$59^\circ38\ 48$	$59^\circ46\ 20$
$lg\,sin\,\psi_0$	9.93734	9.93626	9.93597	9.93653
$lg\,sin^2\frac{t}{2}$	7.97179	7.64909	7.50092	7.75824
$lg\,\frac{2}{sin\,1''}\,cos\,\delta$	5.32109	—	—	—
$lg\,sin\,(\psi - \delta)\,\frac{1}{sin\,1''}$	3.23022	2.90644	2.75798	3.01586
$+\,\mathfrak{S}\,(\psi - \delta)$	$+\ 1$	0	0	0
$\psi - \delta$	$28'19''.2$	$13'26''.2$	$9'32''.8$	$17'17''.2$
ψ	$59^\circ57\ 32.1$	$59^\circ42\ 39.1$	$59^\circ38\ \ 45.7$	$59^\circ46\ \ 30.1$
F	$59\ 46\ 24.0$	$59\ 46\ 13.5$	$46\ \ 16.7$	$46\ \ 30.5$

	$sec\,\zeta \qquad tg\,\zeta$	F	φ
Sud . .	$\varphi - 1.005\,c + 0.0982\,a =$	$59^\circ46'24''.0$	$59^\circ46'21''.0$
Nord . .	$\varphi + 1.002\,c + 0.0678\,a =$	13.5	21.8
Nord . .	$\varphi + 1.002\,c - 0.0572\,a =$	16.7	21.0
Sud . .	$\varphi - 1.003\,c - 0.0769\,a =$	30.5	21.9

$c = -\mathbf{6''.13} \qquad a = -\mathbf{32''.3}$ ср. $\varphi = \mathbf{59^\circ46'21''.4}$

118. Посматрања звезда пар по пар у првом вертикалу.

Извршење целог низа посматрања зенитне звезде на источној и на западној страни првог вертикала ради потпуног искључења утицаја азимута a и грешке $\triangle u$ поправке хронометра на извод ширине φ може да траје чак око два часа, при малој разлици $\varphi - \delta = 1^\circ$; према томе, потребан је врло велики стабилитет пасажног инструмента, да би се могло рачунати на непромењивост његова азимута у току тако дугог времена. Примена је ове методе у самој ствари јако ограничена још и малим бројем звезда, чије би деклинације биле тек нешто мање од ширине места и које би биле тачно познате. Астроном Делен је стога предлагао, да се за ту сврху употребе звезде са деклинацијама нешто већим од ширине места па их посматрати у близини елонгација, обрнувши унеколико пасажни инструмент од првог вертикала[1]); али се ни ова метода не може употребити у сваком жељеном моменту времена.

---

[1]) У том случају заједно са главном звездом (α', δ'), која је посматрана у моменту T у близини њене елонгације помоћу микрометра на растојању f од средњег кончића, треба да се посматра у истом азимуту $90^\circ + a$ момент T прелаза преко средњег кончића мреже дурбина каква друга помоћна звезда (α, δ). Тражена ширина φ може да се изведе из оваквих посматрања сасвим онако исто, као и поправка хроно-

Међутим, много је простије и практичније посматрати у првом вертикалу на разним странама од зенита две звезде (α, δ) и (α', δ') са врло великим зенитним растојањима ζ и ζ', које једна за другом пролазе преко свију кончића дурбина доста брзо, да би им се услед тога свођење њихово τ на средњи кончић могло срачунати по формули (2.)″ чл. 54. У таквим звездама, уопште говорећи, неће бити недостатка. Услед тога пак што је у првом вертикалу

$$cos\,\delta\,cos\,p = sin\,\varphi\,sin\,\zeta \qquad \text{и} \qquad sin\,\delta\,tg\,p = cos\,\varphi\,cotg\,\zeta$$

ова ће формула (2.)″ примити овај облик

$$\tau = \tau_0 - \tfrac{1}{2}\,cos\,\varphi\,cotg\,\zeta\,\tau_0{}^2\,sin\,1'', \quad \text{где је} \quad \tau_0 = \frac{f}{cos\,\varphi\,sin\,\zeta}.$$

Кад се срачунају тада за сваку звезду по формули (8.) величине ψ и ζ, које одговавају моменту T прелаза њеног преко средњег кончића а затим $A = tg\,\zeta$, $C = sec\,\zeta$ и $F = \psi + b$ (са нагибом b хориз. осе за време посматрања), онда ће се добити, као и мало пре у чл. 117., при једном положају круга, нпр. Sud, две једначине:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{на источној страни вертикала} & \varphi - Cc - Aa = F \\ \text{на западној} \quad \text{„} \qquad \text{„} & \varphi - C'c - A'a = F' \end{array}\right\} \; ; \quad . \quad . \qquad (10.)$$

метра из посматрања звезде у вертикалу Поларне (чл. 115.).

И заиста, ако се претпостави, да су: $f = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, са часовним ће се углима $t = T + u - \alpha$ и $t' = T + u - \alpha'$ добити спочетка за прву приближну вредност (φ), — као и у чл. 87. — једначина

$$\frac{sin\,(\varphi)\,cos\,\delta\,cos\,t - cos\,(\varphi)\,sin\,\delta}{cos\,\delta\,sin\,t} = \frac{sin\,(\varphi)\,cos\,\delta'\,cos\,t' - cos\,(\varphi)\,sin\,\delta'}{cos\,\delta'\,sin\,t'}$$

из које ће изаћи, да је

$$tg\,(\varphi) = \frac{tg\,\delta\,sin\,t' - tg\,\delta'\,sin\,t}{(sin\,t' - t)}$$

Због утицаја пак нагиба b осе инструмента додаће се, затим, — као и у чл. 115. — добивеној вредности (φ) поправка $\dfrac{b}{cos\,a}$ а због колимационе грешке c и растојања f главне звезде додаће се још и поправка

$$\frac{cos\,{}^1/_2\,(z + z')}{cos\,a\,cos\,{}^1/_2\,(z' - z)}\,(c + f) = K\,(c + f),$$

где се зенитна растојања z и z' обеју звезда рачунају, као и њихови часовни угли, за позитивне ка западу а за негативне ка истоку; момент пак T пролаза помоћне звезде преко средњег кончића треба при томе да буде промењен за величину $f\,sec\,\delta\,sec\,p$. На тај ће начин изаћи

$$\varphi - Kc = (\varphi) + \frac{b}{cos\,a} + Kf.$$

Али те две исте звезде могу бити посматране једна за другом и по други пут при промењеном, унеколико, азимуту инструмената, јер се у близини првог вертикала азимути свих уопште звезда мењају у току кратког интервала времена τ за једну и исту величину $\tau\,sin\,\varphi$; ако је при поновном таквом посматрању оса инструмента била преврнута у својим лежиштима, онда ће се, због тога, за непознате φ и c добити и друга слична једначина

$$\varphi + K_1 c = (\varphi)_1 + \frac{b_1}{cos\,a_1} + K_1 f_1.$$

Кад се пак елиминира из њих a и кад се ради скраћења означе

$$\frac{A'C - AC'}{A' - A} = K \qquad \text{и} \qquad \frac{A'F - AF'}{A' - A} = R,$$

онда ће изаћи, да је

$$\varphi - Kc = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11.)$$

На сличан ће се начин, после превртања дурбина у лежиштима, тј. при кр. Nord, из посматрања друге звезде доћи до једначине

$$\varphi + K'c = R', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11.)'$$

из које ће се, заједно са (11.), одредити како тражена ширина φ, тако и колимациона грешка c.

Сигурност оваквих одређивања зависи од оне тачности, с којом се из извршених посматрања добивају величине F и F', које улазе у израз R; грешке пак $\triangle F$ и $\triangle F'$, ако се занемари ништавна грешка у нагибу b, биће равне $\triangle\psi$ и $\triangle\psi'$. Али, пошто грешци $\triangle T$ посматранога момента T пролаза звезде преко средњег кончића одговара у положају те звезде према кончићу грешка $\triangle s = \triangle T \cos\delta \cos p = \triangle T \sin\varphi \sin\zeta$ (чл. 47.), а пошто ће $\triangle s$ утицати на срачунату величину ψ потпуно онако, као и c, онда ће бити

$$\triangle F = \triangle\psi = \triangle s \sec\zeta \qquad \text{и} \qquad \triangle F' = \triangle\psi' = \triangle s' \sec\zeta';$$

због тога ће се грешка $\triangle R$ нађене из посматрања величине R добити у облику

$$\triangle R = \frac{A'\triangle F - A\triangle F'}{A' - A} = \frac{\triangle s \sec\zeta \, tg\zeta' - \triangle s' \sec\zeta' \, tg\zeta}{tg\zeta' - tg\zeta}$$

или

$$\triangle R = \frac{\triangle s \sin\zeta' - \triangle s' \sin\zeta}{\sin(\zeta' - \zeta)}.$$

Као што се види, у овом су изразу зенитна растојања ζ и ζ' пара звезда са супротним знацима, и излази, као што то и треба да буде, да је идентичан са изразом $\triangle r$, које улази у нашу основну формулу (9.)′ чл. 87. за пасажни инструмент. Због тога ће, као и тамо, — с претпоставком приближне једнакости ε_s код обеју звезда, — средња грешка величине R бити

$$\varepsilon_R = (C) \, . \, \varepsilon_s.$$

На тај начин, при истој вредности $\varepsilon_s = \pm 0^s.030 = \pm 0''.45$, — каква се је претпостављала и у чл. 115. и 116., — ε_R треба да изађе равна од $\pm 0''.32$ [при $(C) = 0.75$ за ζ и ζ' око 20°] до $\pm 0''.45$ [при $(C) = 1$ за ζ и ζ' око 50°].

За стварно извршење посматрања̂ у првом вертикалу, разуме се, да је потребно унапред спремити програм са приближно срачунатим моментима пролаза појединих звезда кроз тај вертикал (чл. 95.). Само пак постављање инструмента може да се изврши из посматрања какве сјајне звезде а која није врло близу зенита. Кад се ради тога навизира на њу дурбином инструмента за једно два минута пре момента њенога пролаза кроз први вертикал, треба само још померати инструмент азимутално тако, да она прође преко средњег кончића тачно у том моменту.

Методе одређивања времена и ширине места, које су изложене у овој глави, не гледећи на њихову спољашњу разноликост, као што видимо, потпуно су сличне међу собом у том смислу, што се утицај грешака посматрања на та одређивања изражава код њих једном и истом формулом (9)′ чл. 87.

ГЛАВА XV.

АЗИМУТАЛНА ПОСМАТРАЊА НЕБЕСНИХ ТЕЛА.

119. Одређивање азимута земнога предмета универсалним инструментом.

Азимут се земнога предмета одређује помоћу универсалног инсрумента мерењем хоризонталног угла између тога предмета и каквог небесног тела, чији се азимут за момент његова посматрања може лако срачунати, ако су само ширина места и поправка хронометра доста добро познате. При томе се уопште треба придржавати усвојених правила за мерење хоризонталних углова (чл. 68. до 71.), а наиме: користећи се контролним дурбином како ваља, извршити мерење при оба положаја верт. круга у више раздела (гируса) на разним партијама лимба, и т.д. При посматрању небесног тела, треба са највећом могућном тачности запажати по хронометру момент пролаза његова преко средњег вертикалног кончића дурбина (чл. 45.), за Сунце пак — пролаз оба његова краја, и, читати стање либеле, која је постављена на хоризонталну осу инструмента ради тачнога одређивања њенога нагиба; за земне пак предмете, чија се зенитна растојања уопште мало разликују од 90^0, читања либеле могу и да отпадну, ако је само вертикална оса инструмента доведена довољно тачно у вертикални положај. За време посматрања небесног тела корисно је узгред вршити и читања на вертикалном кругу инструмента, да би се избегло доцније срачунавање зенитних растојања тога небесног тела, од којих зависи утицај нагиба осе b и колимациона грешка дурбина c.

Из чл. 86. гл. X ми већ знамо, да је Поларна звезда најпогодније небесно тело за одређивање азимута на нашој северној полукугли Земљиној, јер је та звезда толико сјајна, да се може посматрати и дању, доста дуго после јутарњег и за дуго до вечерњег сутона, чак и кроз дурбине сразмерно малих преносних инструмената. Да би се очигледније показало преимућство њено у сравњењу са посматрањем Сунца за исту сврху, претпоставићемо, например, да се у датој ширини места $\varphi = 60^\circ$ садржи грешка $\triangle\varphi = 10''$ а у поправци хронометра u — грешка $\triangle u = \pm 1^s = \pm 15''$. Онда би грешка $\triangle a_\varphi$ и $\triangle a_u$ у срачунатим азимутима Поларне при положајима њеним око меридијана и на највећем удаљењу од њега, — на основу формула $(2.)_a$ и $(1.)_a$ чл. 83., — биле овакве:

у меридијану ($a_N = 0,\ p = 0,\ z = 30^\circ$)...... $\triangle a_\varphi = 0$ и $\triangle a_u \pm 0''7$

у елонгацији ($a_N = 2^\circ5,\ p = 90^\circ,\ z = 30^\circ$)... $\triangle a_\varphi = \pm 0''8$ и $\triangle a_u = \pm 0$;

при посматрању пак Сунца под најбољим погодбама, тј. у близини првог вертикала ($\delta = +10^\circ$, $p = 30^\circ\!.5$, $z = 78^\circ$), изишло би, да је

$$\triangle a_\varphi = \pm 2''\!.0 \qquad \text{и} \qquad \triangle a_u = \pm 13''\!.0.$$

Што се тиче грешке у одређиваном азимуту земнога предмета, која произлази од нетачности мерења угла између тог предмета и небесног тела, то ће она потпуно зависити од каквоће универзалног инструмента, који је употребљен и од броја раздела (гируса) при том мерењу, којим се ослабљује утицај систематских и случајних грешака у подели његовог хоризонталног круга, а тако исто, и утицај осталих случајних грешака посматрања. Најбоље ће се, разуме се, одредити азимут предмета, који лежи у близини меридијана, помоћу пасажног инструмента, који је снабдевен микрометром са покретним кончићем и који је постављен тако, да се предмет може посматрати заједно са Поларном, кад она пролази кроз његов вертикал.

120. Формуле и примери за објашњење.

Прочитања хоризонталнога круга универзалног инструмента, добивена у сваком разделу при положајима (R) и (L), означићемо за земни предмет са R и L а за небесно тело са R′ и L′; истините азимуте небес. тела, срачунате за моменте T_r и T_l његова посматрања и који се рачунају од југа ка западу, означићемо са a_r и a_l, привидне пак, тј. поправљене за утицај дневне аберације (чл. 89.) — са a'_r и a'_l; најзад, привидна зенитна растојања његова означићемо са z'_r и z'_l. Нагибе осе b_r и b_l, изведене из прочитања либеле и ослобођене од неједнакости чепова ρ, — ако је она позната (чл. 26), — рачунаћемо, као у чл. 68., за позитивне онда, када је за посматрача, окренутога лицем ка небесном телу, десни крај осе виши од левога. Претпоставићемо још, да је главни дурбин утврђен на хориз. оси инструмента ексцентрично (са супротне стране вертик. круга) на растојању l од вертикалне осе (чл. 69.). Нека c буде колимациона грешка дурбина, M_0 — истинито прочитање на хоризонталном кругу, које одговара јужноме правцу меридијана места посматрања, A — тражени азимут земнога предмета, који се рачуна (као и a_r и a_l) од југа ка западу, и, најзад, d — приближно познато растојање до тога предмета.

Тада ће два визирања на предмет, — чије је зенитно растојање приближно равно 90°, — при кр. (R) и кр. (L) дати:

$$\left.\begin{aligned} R &= M_0 + A + c + \frac{1}{d \sin 1''} \\ L \pm 180^\circ &= M_0 + A - c - \frac{1}{d \sin 1''} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

одакле је

$$c = \frac{R - (L \pm 180^\circ)}{2} - \frac{1}{d \sin 1''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)_c$$

и

$$A = \frac{R + (L \pm 180^\circ)}{2} - M_0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)_A$$

Из два пак посматрања небесног тела, на основу (6.) и (7.) чл. чл. 68. и 69., добиће се

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R}' &= \mathrm{M}_0 + a'_r + c\, coses\, z'_r + b_r\, cotg\, z'_r \\ \mathrm{L}' \pm 180^\circ &= \mathrm{M}_0 + a'_l - c\, cosec\, z'_l + b_l\, cotg\, z'_l \end{aligned}\right\} \; ; \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2.)$$

одакле, — кад се ради скраћења означи

$$\mathrm{R}' - a'_r - b_r\, cotg\, z'_r = \mathrm{N}_r \qquad \text{и} \qquad (\mathrm{L}' \pm 180^\circ) - a'_l - b_l\, cotg\, z'_l = \mathrm{N}'_l, \text{—}$$

излази

$$c = \frac{\mathrm{N}_r - \mathrm{N}_l}{cosec\, z'_r + cosec\, z'_l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2.)_c$$

и

$$\mathrm{M}_0 = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{N}_r + \mathrm{N}_l) + \tfrac{c}{2}\,(cosec\, z'_l - cosec\, z'_r) \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2.)_{\mathrm{M}}$$

При томе ће се истинити азимути небесног тела за поједине часовне угле његове $t = \mathrm{T} + u - \alpha$, који одговарају моментима T његова посматрања по хронометру, — срачунати са довољном тачности по познатој формули

$$tga = -\frac{cos\,\delta\, sin\, t}{sin\,\delta\, cos\,\varphi - cos\,\delta sin\,\varphi\, cos\, t} = \frac{-\, cotg\,\delta\, sec\,\varphi\, sin\, t}{1 - cotg\,\delta\, tg\,\varphi\, cos\, t} \quad . \quad . \quad . \qquad (3.)$$

За Поларну пак, због маленкости $90^\circ - \delta = \triangle$, азимут ће се a срачунати овако:

$$\left.\begin{aligned} &lg\, a + 2\,\mathfrak{S}\,(a) = lg\, sin\, t + lg\, m' - lg\,(1 - n'), \\ \text{где је} \quad &lg\, m' = lg\,\triangle + 2\,\mathfrak{S}\,(\triangle) + lg\, sec\,\varphi \qquad \text{а} \qquad n' = tg\,\triangle\; tg\,\varphi\, cos\, t \end{aligned}\right\} \ldots (3.)'$$

На тај ће се начин у сваком разделу мерења извести из посматрања небесног тела место меридијана M_0 на хориз. кругу, а с њиме по формули $(1.)_{\mathrm{A}}$ и тражени азимут A земнога предмета. Напоменућемо још, да се при изводу нагиба осе b_r и b_l, може и не узимати у рачун неједнакост њених чепова ρ, пошто ће се она, због приближне једнакости зенитних растојања z'_r и z'_l, сама по себи искључити у изводу $\mathrm{M}_0 = \frac{1}{2}\,(\mathrm{N}_r + \mathrm{N}_l)$; али тада две величине c, изведене из посматрања небесног тела по формули $(2.)_c$ и из посматрања предмета по формули $(1.)_c$, треба да се разликују једна од друге не само усљед случајних грешака посматрања већ још и за сталну величину

$$\rho\, \frac{cotg\, z'_r + cotg\, z'_l}{cosec\, z'_r + cosec\, z'_l} = \rho\, \frac{cos\,\frac{1}{2}\,(z'_r + z'_l)}{cos\,\frac{1}{2}\,(z'_r - z'_l)} \, .$$

Пример I. 10. августа 1876. г. за одређивање азимута стране AS у мрежи тригонометриске триангулације око Пулкова посматрани су универсалним инструментом Траутона и Симса (чл. 66.) са тачке A ($\varphi = 59^\circ 46' 15.''5$) сигнал S и *Поларна* * ($\alpha = 1^h 13^m 38.^s7$, $\triangle = 1^\circ 21' 8.''3$). Вредност једнога полуподеока $({}^{\tau}/_{2})$ јахаће либеле била је $0.''91$, а поправка u хронометра, који је служио за посматрања и ишао доста тачно по звезданом времену, била је — $6^m 0.^s4$. Овде су изложени резултати посматрања првога од шест потпуних раздела.

		T по хроном.	Прочитања круга	Прочитања либеле	*b*	*cotg z′* *z′* *coses z′*
(R)	S		$0^\circ\ 0'29''1_5$			
	*	$14^h46^m\ 9^s$	$160\ 19\ 35.9_2$	— 32.3 +(28.3)	— 3″64	1.632
	*	48 27	$160\ 21\ \ 3.4_2$	—(31.6)+ 28.8	— 2.55	31°29′
	S		$0\ \ 0\ 30.7_2$			1.915
(L)	S		$180\ \ 0\ \ 6.3_5$			
	*	14 56 56	$340\ 25\ 31.2_2$	— 32.3 +(27.5)	— 4.37	1.632
	*	59 0	$340\ 26\ 51.7_2$	—(30.9)+ 29.3	— 1.46	31°28′
	S		$180\ \ 0\ \ 4.2_5$			1.916

За срачунавање	$lg \triangle = 3.687377$	
азимута *a*	$+2\,\mathfrak{S}(\triangle) = \quad +80$	$lg\, tg \triangle = 8.37303$
Поларне	$lg\, sec\, \varphi = 0.298033$	$lg\, tg\, \varphi = 0.23456$
	$lg\, m' = 3.985490$	$lg\, tg \triangle\, tg\, \varphi = 8.60759$

	R_1	R_2	L_1	L_2
$T + u - \alpha$	$-10^h33^m30^s.1$	$-10^h31^m12^s.1$	$-10^h22^m43^s.1$	$-10^h20^m39^s.1$
t°	— 158°22′31″5	— 157°48′ 1″5	— 155°40′46″5	— 155° 9′46″5
$lg\, sin\, t$	9.566465_n	9.577301_n	9.614728_n	9.623290_n
$lg\, cos\, t$	9.96830_n	9.96655_n	9.95964_n	9.95785_n
$lg\, n'$	8.57589_n	8.57414	8.56723_n	8.56544_n
$lg\,(1 - n')$	0.016055	0.015992	0.015744	0.015680
$lg\, sin\, t + lg\, m'$	3.551955_n	3.562791_n	3.600218_n	3.608780_n
$lg\, a + 2\,\mathfrak{S}(a)$	3.535900_n	3.546799_n	3.584474_n	3.593100_n
$-2\,\mathfrak{S}(a)$	— 40	— 42	— 50	— 52
$a - 180^\circ$	+ 0°57′14″49	+ 0°58′41″75	+ 1° 4′ 0″83	+ 1° 5′17″86
$\gamma\, cosec\, z$	+ 0.30	+ 0.30	+ 0.30	+ 0.30
a'	180 57 14.79	180 58 42.05	181 4 1.13	181 5 18.16
прочит. — $b\, cotg\, z'$	160 19 41.86	160 21 7.58	160 25 38.36	160 26 54.11
N	— 20 37 32.93	— 20 37 34.47	— 20 38 22.77	— 20 38 24.05

Средње $N_r = -20^\circ37'33''70$ $\quad N_l = -20^\circ38'23''41$

Polaris $\begin{cases} N_r - N_l = +\ 49''71 \\ coses\, z'_r + coses\, z'_l = 3.831 \end{cases}$

$c = +$ **12.98**

$\frac{1}{2}(N_r + N_l) = -\ 20^\circ37'58''56$

$\frac{c}{2}(coses\, z'_r - coses\, z'_l) = 0.00$

$M_0 = -$ **20 37 58.56**

Сигнал S $\begin{cases} R = 0^\circ0'29''94 \\ L - 180^\circ = 0\ 0\ \ 5.30 \end{cases}$

$c = +$ **12.32**

$A + M_0 = \ 0\ \ 0\ \ 17.62$

$A = -$ **20 38 16.18**

Пример II. — 25. августа 1837. г. у близини станице Јекатеринодар ($\varphi = 43^\circ45'47''2$) била су извршена посматрања Сунца и планине Казбека универзалним инструментом са нониусима ($l = 0$) у циљу одређивања азимута A те планине. Вредност једнога полуподеока ($\tau/_2$) либеле била је 2″23, а поправка хронометра, који је ишао по средњем времену, у односу према истинитом сунчаном времену била је $+ 16^m54^s.1$ [1]).

---

[1]) Савичъ. — „Приложеніе практической астрономіи...“ Томъ I.

			T по хрон.	Прочитања круга	Прочитања либеле	b	$cotg\ z'$ z' $cosec\ z'$
(R)	Казбек			155°58′32″		$\tau/2$	0.142
	I крај	⊙	$5^h38^m27^s\!.5$	264 47 22	— 0.0 +(5.6)	+ 3.55	81°56′
	II „	⊙	41 35.5		—(2.1)+ 3.6	= + 7″.9	0.010
(L)	I „	⊙	44 34.0	85 49 8	— 2.5 +(3.2)	— 0.55	0.123
	II „	⊙	47 41.5		—(3.7)+ 1.9	= — 1″.2	83°0′
	Казбек			336 58 17			1.007

	(R)	(L)
$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$	$5^h40^m\ 1^s\!.5$	$5^h46^m\ 7^s\!.7_5$
t^h	5 56 55.6	6 3 1.8_5
t^o	89°13′54″.0	90°45′27″.7
δ	+ 10 43 31.8	+ 10 43 26.2
$lg\ sec\ \varphi$	0.141339	—
$lg\ sin\ t$	9.999961	9.999962
$lg\ cotg\ \delta$	0.722590	0.722655
$lg\ cos\ t$	8.1274	8.1214_n
$lg\ tg\ \varphi$	9.9812	—
$lg\ (cotg\ \delta\ tg\ \varphi\ cos\ t)$	8.8312	8.8253_n
$lg\ (1 - cotg\ \delta\ tg\ \varphi\ cos\ t)$	9.969509	0.028116
$lg\ (cotg\ \delta\ sec\ \varphi\ sin\ t)$	0.863890	0.863956
$lg\ tg\ a$	0.894381_n	0.835840_n
$a = a'$	97°16′ 4″	98°18′10″
прочит. — $b\ cot\ z'$	264 47 21	85 49 8
N	167 31 17	167 30 58

из посматр. Сунца

$N_r - N_l = \quad + 19''.0$

$cosec\ z'_r + cosec\ z'_l = \quad 2.017$

$c = \quad + \mathbf{9''.5}$

$M_0 = \frac{1}{2}(N_r + N_l) = \mathbf{167^\circ 31' 7.5}$

из посматр. Казбека

$$c = \frac{R - (L - 180^\circ)}{2} = \quad + \ 7''.5$$

$$\frac{R + (L - 180^\circ)}{2} =$$

$$= A + M_0 = \ 156\ 58\ 24.5$$

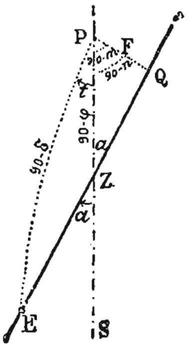
$$A = \mathbf{-10^\circ 32' 43''}$$

121. Азимутална посматрања за одређивање времена.

Када је ширина каквога места доста добро позната и на њему одређен азимут каквога земног предмета, онда се на основу тих даних може одредити поправка хронометра u из азимуталних посматрања небесних тела помоћу универзалног инструмента. Претпоставићемо, да је за ту сврху посматрано заједно са предметом, — као што је речено у чл. 120., — какво небесно тело (α, δ), по могућности у близини меридијана и зенита (чл. 86.). Онда ће се из прочитањâ круга R и L, извршених при визирању на предмет, добити по формулама $(1.)_A$ и $(1.)_c$, место меридијана M_0 на хориз. кругу инструмента и колимациона грешка дурбина c; затим из прочитања R′ и L′, извршених при посматрањима небесног тела, одредиће се по формулама (2.) његови азимути a'_r и a'_l за моменте T_r и T_l; срачунати пак по тим азимутима часовни угли небесног тела t_r и t_l даће, сваки од њих, тражену поправку хронометра u. Ради веће тачности одређивања момената T_r и T_l при сваком појединoм посматрању небесног тела, могу се запажати моменти пролаза његова преко неколико вертикалних кончића мреже дурбинове па их сводити на средњи кончић.

На врло знатним северним ширинама, при врло неповољним метеоролошким погодбама, а особито лети, када се само Сунце и најсјајније звезде могу посматрати, — ова се метода може претпоставити свакој другој.

Ради простијег срачунавања часовног угла t небесног тела E (сл. 115.) по азимуту његову a, одређеноме за моменте T по хронометру, — уобразићемо из пола P лук $PQ = F$, перпендикуларни на вертикал EZQ, и означићемо угао $\sphericalangle QPZ$ са $90^\circ - n$ а угао $\sphericalangle QPE$ са $90^\circ - m$; тада ћемо из правоугла троуглова QPZ и QPE наћи, да је



Сл. 115.

$$\sin F = \cos\varphi \sin a, \quad tg n = \sin\varphi\, tg a, \quad \sin m = tg F\, tg \delta, \ . \ . \quad (4)$$

а пошто је

$$t = T + u - \alpha = (90^\circ - m) - (90^\circ - n),$$

то ће изаћи, да је

$$u = \alpha - (T + m - n) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5.)$$

Пример. — 1826. г. 15. августа на острву Хохланду ($\varphi = 60^\circ 4' 27''.0$) универсалним инструментом ($l = 0$) била су извршена доле означена посматрања * *Арктура* ($\alpha = 14^h 7^m 45^s.71$, $\delta = +20^\circ 5' 29''.0$) и удаљеног тригонометриског сигнала C ($A = 155^\circ 56' 28''.5$). Хронометар, чију је поправку u требало одредити, имао је дневни ход $+3^m 51^s.46$ у односу према звезданом времену1).

		T по хроном.	Свођење на T_0	Прочитања круга	Нагиб b	Приближ. z'
(R)	C			$179^\circ 58' 51''.5$	$\tau/2$	
	*	$4^h\ 9^m 35^s.6$	$-2^s.30$	22 19 59.3	$+5.0 = +6''.7$	$40^\circ\ 3'$
	*	12 21.2	-1.86	23 20 45.3	$+4.6 = +6.1$	40 2
	C			179 58 47.0		
(L)	C			359 57 44.0		
	*	4 34 26.2	$+1.70$	211 23 33.0	$+0.8 = +0.1$	40 7
	*	39 14.4	$+2.47$	213 8 12.0	$+0.3 = +0.4$	40 13
	C			359 57 45.0		

сред. $T_0 = 4\ 23\ 54.3$ $\qquad R = 179\ 58\ 49.3$ $\quad A + M_0 = 179^\circ 58' 16''.9$

$c = +$ **32".4** $\qquad L - 180 = 179\ 57\ 44.5$ $\quad M_0 = +$ **24 1 48.4**

	R_1	R_2	L_1	L_2	
Почит. — M_0	$-1^\circ 41' 49''.1$	$-0^\circ 41'\ 3''.1$	$+7^\circ 21' 44''.6$	$+9^\circ\ 6' 23''.6$	
$-b\ cotg\ z'$	$-\ 8.0$	$-\ 7.3$	$-\ 1.3$	$-\ 0.5$	
$-c\ coses\ z'$	-50.4	-50.4	$+50.3$	$+50.2$	
$a\,(a')$	$-1\ 42\ 47.5$	$-0\ 42\ \ 0.8$	$+7\ 22\ 33.6$	$+9\ \ 7\ 13.3$	$lg \cos\varphi$
$lg \sin a$	8.47562_n	8.08710_n	9.108498	9.200054	9.097995
$lg\ tg\ a$	8.47581_n	8.08713_n	9.112107	9.205579	
$lg \sin F$	8.17362_n	7.78510_n	8.806493	8.898049	$lg \sin\varphi$
$lg\ tg\ F$	8.17367_n	7.78510_n	8.807386	8.899411	9.937855
$lg \sin m$	7.73689_n	7.34832_n	8.370603	8.462628	
$lg\ tg\ n$	8.41366_n	8.02498_n	9.049962	9.143434	$lg\ tg\ \delta$
m	$-0^\circ 18' 45''.4$	$-0^\circ\ 7' 40''.0$	$+1^\circ 20' 42''.5$	$+1^\circ 39' 45''.7$	9.563217
n	$-1\ 29\ \ 5.5$	$-0\ 36\ 24.7$	$+6\ 24\ \ 4.9$	$+7\ 55\ 15.5$	
$(m-n)^\circ$	$+1\ 10\ 20.1$	$+0\ 28\ 44.7$	$-5\ \ 3\ 22.4$	$-6\ 15\ 29.8$	
$(m-n)^h$	$+\ 4^m 41^s.34$	$+\ 1^m 54^s.98$	$-\ 20^m 13^s.49$	$-\ 25^m 1^s.99$	
T + своћ.	$+4^h\ 9\ 33.30$	12 19.34	34 27.90	39 16.87	у средњем
$T + m - n$	4 14 14.64	14 14.32	14 14.41	14 14.88	$4^h 14^m 14^s.56$

$\alpha = 14\ \ 7\ 45.71$

У $4^h 23^m 54^s.3$ по хронометру . . . $u = +$ **9 53 31.15**

1.) Савичъ. — „Приложеніе практической астрономіи . . .“ Томъ I, стр. 308.

Пошто се меридијанско место M_0 на хоризонталном кругу универсалног круга изводи непосредно и најбоље из посматрања *Поларне,* то се поправка хронометра u може врло добро одредити из напред речених азимуталних посматрања какве звезде заједно са Поларном, и не оснивајући се на знање азимута A каквога земног предмета. У том случају, са приближно претпостављеном поправком хронометра u_0, срачунаће се унеколико погрешни азимути a'_0 Поларне, а по њима из једначине $(2.)_M$ добиће се утолико исто погрешно место меридијана M_0 на хоризонталном кругу; али, када се из посматрања друге звезде (α, δ) одреде с тим местом меридијана M_0 њени азимути a_0, онда ће се по формулама (4.) и (5.) добити већ тачнија поправка хронометра u_1.

Не вршећи понова сва срачунавања, дефинитивна се тражена поправка хронометра u може наћи директно на овај начин: Кад се означе истинити азимути обеју звезда у моментима њихових посматрања са a' и a, диференцијалне пак њихове промене $\frac{da'}{dt'} = \frac{da'}{du}$ и $\frac{da}{dt} = \frac{da}{du}$ (које треба срачунати само грубо по њиховим изразима $(1.)_a$ из чл. 83.) — са k' и k, онда ћемо имати

$$a' - a'_0 = k'(u - u_0) \qquad \text{и} \qquad a - a_0 = k(u - u_1);$$

али пошто је

$$a - a_0 = a' - a'_0$$

то је

$$u - u_1 = \frac{a - a_0}{k} = \frac{k'}{k}(u - u_0) = \frac{k'}{k}(u - u_1) + \frac{k'}{k}(u_1 - u_0),$$

а одатле

$$u = u_1 + (u_1 - u_0)\frac{k'}{k - k'} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6.)$$

122. Азимутална посматрања за одређивање ширине места.

При одређивању поправке хронометра универсалним инструментом из азимуталних посматрања каквога небесног тела и земнога предмета, чији је азимут A дат, претпостављало се, — како је то изложено у прошлом члану, — да је ширина места φ позната. Али ће се исто тако лако одредити и ширина места φ из сличних посматрања каквога небесног тела (α', δ'), које није сувише удаљено од првог вертикала, ако је позната поправка хронометра u.

За тај ће случај у сферном троуглу PZE (сл. 114.), за момент T' посматрања небесног тела, бити познати: азимут његов $180° - \sphericalangle PZE = a'$, који се рачуна са јужне стране меридијана ка западу, часовни угао његов $\sphericalangle ZPE = t' = T' + u - \alpha'$ и $PE = 90° - \delta'$; због тога, кад се помоћу перпендикулара EZ_0 на меридијан подели тај троугао на два правоугла PEZ_0 и ZEZ_0 и кад се означе

$$PZ_0 = 90° - \psi, \qquad EZ_0 = \zeta \qquad \text{и} \qquad ZZ_0 = x,$$

онда ћемо добити из првога, као и у чл. 117.,

$$cotg\, \psi = cotg\, \delta' \cos t' \qquad \text{и} \qquad \sin \zeta = \cos \delta' \sin t';$$

а из другога

$$\sin x = tg\, \zeta\, cotg\, a',$$

после чега ће изаћи, да је

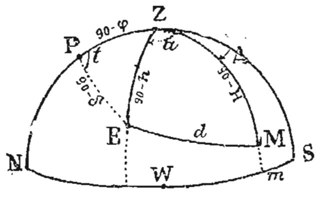
$$\varphi = \psi + x.$$

Овде ће нетачност $\triangle a' = \triangle A$ азимута a' небесног тела утицати само на величину x; али се и из простога цртежа може видети, да, ако се то исто или какво друго небесно тело буде посматрало са друге стране меридијана и при приближно истим величинама ζ и a' онда ће се у средњем из два таква одређивања ширине φ њен резултат ослободити грешке $\triangle A$ азимута земног предмета.

123. Одређивање азимута земног предмета рефлекторним инструментима.

Када се ради одређивања азимута каквога земног предмета нема ништа друго сем секстанта или круга са призмом и огледалом, онда се мере угловна растојања од тога предмета до центра Сунчева диска, из посматрања контакта и једнога и другога краја Сунца са предметом; при томе се, због незнатне тачности оваквих посматрања, допушта, да се неколико једно за другим измерених растојања споје у једно средње, које одговара средњему из запажених момената по хронометру.

Узмимо да је $\sphericalangle SZM = A$ тражени азимут земнога предмета M (сл. 116.), $Mm = H$ нека је угловна висина M над истинитим хоризонтом $NWmS$ места посматрања, $ME = d$ измерено угловно растојање од M до Сунчева центра E; при чему се како азимут његов $\sphericalangle SZE = a$, тако и привидна висина $90° — — ZE = h'$ могу лако срачунати за сваки моменат T кад је позната поправка хронометра u, кад је дата ширина места φ и кад су прочитана стања барометра и термометра за време посматрања.



Сл. 116.

Из сферног ће троугла EZM изаћи, да је

$$\cos d = \sin h' \sin H + \cos h' \cos H \cos (a - A),$$

а одатле

$$\cos (a - A) = \cos d \sec h' \sec H - tg\, h'\, tg\, H \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)$$

Према томе, разлика ће се $(a - A)$, која одређује A, најповољније добити, а при том и са најмањом зависности од H, ако је висина Сунца за време посматрања доста мала а само мерено растојање d близу 90°; приближна ће се пак вредност A_0 траженога азимута наћи из (7.), допуштајући да је $H = 0$, тј. из израза

$$\cos (a - A_0) = \cos d \sec h' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)'$$

Али пошто непозната висина H (секстантом се она не може измерити помоћу вештачког хоризонта) може досезати до 2 и више степена, то је потребно, да се измери још једно растојање d_1 од предмета M до Сунца, да би се из респективне једначине

$$\cos d_1 = \sin h'_1 \sin H + \cos h'_1 \cos H \cos (a_1 - A) \quad . \; . \; . \; . \quad (8.)$$

могла одредити H са најмањом зависности од A, а за то је потребно да буде приближно $a_1 = A$, тј. d_1 треба да се мери наиме око онога момента T_1, када

Сунце пролази кроз вертикал предмета. Кад се прими затим, да је у тој једначини $A = A_0$ и кад се ради згоднијег срачунавања стави, да је

$$cotg\, h'_1 \cos(a_1 - A_0) = cotg\, l,$$

онда ћемо добити приближну висину H_0 предмета M из израза

$$\cos(l - H_0) = \cos d_1 \operatorname{cosec} h'_1 \sin l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.)'$$

па ћемо с том H_0 срачунати по (7.) већ танчији његов азимут A_1. Оваквим се поступним приближењима може доћи до вредности за H и A, које би потпуно задовољиле обе једначине (7.) и (8.).

Али, ако све напред побројане најповољније погодбе за посматрања Сунца нису испуњене, онда би се морало вршити доста много оваквих поступних приближења; стога ће се много брже доћи до тражене величине H на овај начин:

Ако се у сферном троуглу ZME (сл. 116.) задрже као непроменљиве две стране $ZE = 90^\circ - h'$ и $EM = d$ а трећа страна $ZM = 90^\circ - H$ смањи за малу величину $\triangle H$ и, ако се ради скраћења писања, означи котангенс угла $\sphericalangle ZME = M$ са μ, онда ће се одговарајући прираштај угла $\sphericalangle EZM = (a - A)$ изразити овако:

$$\triangle (a - A) = - \triangle A = \frac{\mu}{\cos H} \triangle H; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.)$$

због тога, кад се срачунава A_0 са првом претпоставком $H = 0$, онда треба у (9.) ставити $\triangle A = A - A_0$ и $\triangle H = H$; при срачунавању пак H_0 из другога посматрања, када је $cotg \sphericalangle ZME_1 = cotg\, M_1 = \mu_1$, онда треба ставити $\triangle A = A - A_0$ и $\triangle H = H - H_0$; тада ће изаћи

$$(A_0 - A) \cos H = \mu H = \mu_1 (H - H_0) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.)'$$

а одатле

$$H = H_0 \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.)''$$

Оваква ће вредност за H бити довољно тачна за дефинитивно срачунавање азимута A по формули (7.); мање пак тачна његова вредност (A) добиће се из једначине (9.)' и она ће послужити као нека контрола извршних срачунавања. Што се тиче углова $\sphericalangle ZME = M$ и $ZME_1 = M_1$, то се они лако срачунавају по формулама:

$$\sin M = \frac{\cos h'}{\sin d} \sin (a - A_0) \quad \text{и} \quad \sin M_1 = \frac{\cos h'_1}{\sin d_1} \sin (a_1 - A_0) \quad . \; . \quad (10.)$$

Пример. — 27. децембра 1885. г. измерена су била секстантом на опсерваторији бечке политехнике ($\varphi = 48^\circ 11' 59''$) ради одређивања азимута A једнога земног предмета, — који се налази у југо-источном правцу, — ова његова растојања d од центра Сунчева диска[1]:

---

[1] „Lehrbuch der sphärichsen Astronomie“ von Herr und Tinter. 1887. стр. 550.

	Средње време T	Истинито сунч. време t	d	Темпер. ваздуха	Баром. mm	Темпер. баром.
1.)	$+3^h30^m27^s.3$	$+3^h28^m56^s.6$	$89^\circ15'51''$	$+3^\circ.0$ C.	758.5	$+2^\circ.7$ C.
2.)	$-1\ 5\ 47.7$	$-1\ 7\ 12.7$	30 11 6	$+2.4$	758.6	$+1.8$

Ми ћемо овде изложити само најглавније резултате срачунавања ових посматрања.

Азимути и висине Сунца.

	δ	a	h	рефр.	$\pi \cos h$	h'
1.)	$-23^\circ18'44''$	$+46^\circ44'47''$	$4^\circ34'49''$	$10'32''.6$	9.0	$4^\circ45'13''$
2.)	$-23\ 19\ 14$	$-16\ 6\ 31$	16 54 29	3 13.5	8.6	16 57 34

Азимути и висине предмета.

Из 1. посматрања	$a - A_0 = 89^\circ15'42''$	по формули 10.
по формули (7.)′	$A_0 = -42\ 30\ 55$	$lg \sin M = 9.99850$
Из 2. посматрања	$H_0 = 1\ 34\ 30$	$\mu = 0.08317$
по формулама	$H = 1\ 48\ 52$	$lg \sin M_1 = 9.92741$
(8.)′, (9.)′ и (9.).	$(A) = -42\ 39\ 59$	$\mu_1 = 0.63006$
Из 1. посматрања	$a - A = 89\ 24\ 44$	$\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu} = 1.15207$
по формули (7.)	$A = \mathbf{-42\ 39\ 57}$	

124. Посматрања одговарајућих висина небесних тела.

Када правац меридијана није потребно знати са већом тачности од $\pm 1'$, као што је то например при одређивању деклинације магнетне игле, онда се тај правац може најпростије да одреди по одговарајућим висинама какве звезде, при чему није потребно знати ни потребно време, ни ширину места, нити координате саме звезде.

Кад се помоћу јахаће либеле доведе хоризонтална оса теодолита или универсалног инструмента у хоризонталан положај, онда треба дурбином навизирати на звезду нешто пре њене кулминације па утврдивши дурбин по висини, кретати га микрометарним завртњем само у азимуталном смислу дотле, док звезда не дође тачно на пресеку средњега вертикалног кончића са једним од хоризонталних. Нека је при томе прочитање на хоризонталном кругу било N_1. На тај се исти начин може да изврши још неколико прочитања круга N_2, N_3....., ако се звезда, која се (до њене кулминеције) све више и више издиже, буде посматрала и на пресецима средњег вертикалног кончића са осталим хоризонталним. По истеку извесног времена, када се звезда (после њене кулминације) почне већ да спушта и да прелази преко истих кончића у обратном реду, онда треба опет извршити одговарајући низ прочитања круга N'_3, N'_2, N'_1.

Ако је инструмент био постављен доста солидно (или је положај његовог лимба корегиран посматрањима контролним дурбином), ако се висина дурбина није мењала а нагиб хоризонталне осе остајао за све време посматрања врло мали, онда ће средње из $\frac{1}{2}(N_1 + N'_1)$, $\frac{1}{2}(N_2 + N'_2)$ и т.д. [пошто се исправи од утицаја колимационе грешке ($c \operatorname{cosec} z$), која се унапред лако одређује] дати тражено прочитање M_0 правца меридијана на хоризонталном кругу. После тога се може запазити у том правцу и какав земни предмет.

Кад се не посматрају звезде већ Сунце, онда треба од тако добивених средњих прочитања одузети још величину $\triangle M_0$, која зависи од повећања деклинације Сунца у току интервала времена $T' - T = 2t^h$ међу посматрањима његовим до и после највеће висине (кад пак опадају деклинације Сунца, онда је треба додавати). Очевидно је, да ће се одговарајућа азимутална прочитања N' и N променити због тога за величину

$$\triangle N' = \triangle N = \triangle\delta \,.\, t^h \frac{da}{d\delta}, \quad \text{где је} \quad \frac{da}{d\delta} = \frac{1}{\sin z \sin p} = \frac{1}{\cos\varphi \sin t},$$

а $\triangle\delta$ је промена деклинације Сунца у току 1^h; због тога ће се напред речена поправка $\triangle M_0$, — ако интервал $2t^h$ није велики, — приближно изразити овако

$$\triangle M_0 = \tfrac{1}{2}(\triangle N' + \triangle N) = \frac{\triangle\delta \,.\, t^h}{coc\,\varphi \,.\, t^h \sin 1^h} = \frac{4\triangle\delta}{\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11.)$$

ГЛАВА XVI.

ОДРЕЂИВАЊЕ РАЗЛИКА ДУЖИНА МЕСТА.

125. О одређивањима дужинâ местâ у опште.

Разлика дужина двају места на Земљиној површини равна је разлици локалних времена, рачунајући их на обема тачкама у једном и истом моменту. Ако часовник на тачци M показује време T а поправка му је u па на другом месту M′ часовник показује у истом моменту време T′ а његова је поправка u', онда ће се дужина l другога места према првоме, — рачунајући је за позитивну ако је M′ источно од M — изразити овако.

$$l = (T' + u') - (T + u) = (T' - T) + (u' - u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Одређивање дужине се, према томе, распада на одређивање разлике (T′ — T), тј. на сравњивање часовника двају места и на одређивање поправака u и u' тих часовника за моменте T и T′.

За сравњивање часовника двеју удаљених тачака могу да послуже: а.) посматрања извесних небесних појава, које се свуда на Земљи виде у једном и истом моменту, б.) посматрања тренутних вештачких светлосних *сигнала* и других разних сигнала, који се саопштавају помоћу телеграфа, в.) транспортовање хронометара с једне тачке на другу и г.) разна посматрања Месеца. По тим се средствима, — врло различитих по својој тачности, — и разликују међу собом разне методе одређивања дужина. Поправке пак хронометара могу се одређивати ма којом од изложених метода у главама XI, XIV и XV; у том погледу треба овде учинити само неке опште напомене.

Одређивање поправке часовника биће увек подвргнуто већој или мањој личној грешци посматрача, с којом он оцењује моменте пролаза звездâ преко кончића дурбина. Ако узмемо да је A величина њена код посматрача, који се налази на тачци M, а B код посматрача на тачци M′, онда ће се у разлици $(u' - u)$ и у резултату дужине l појавити грешка $\triangle l = A - B$. Извод ће дужине бити од ње ослобођен на овај начин:

1.) Сваки посматрач може да испита апсолутну величину своје личне грешке помоћу једнога од изабраних за то специјалних справа (чл. 48.) али се том средству скоро никад не прибегава услед компликираности и недовољне тачности тих справа.

2.) Оба посматрача, пошто су се састали на једном и истом месту, могу да одреде непосредно своју личну разлику $A - B$ из сравњења њихових посматраних времена пролаза звезда на једном и истом инструменту или пак из сравњења поправака хронометра, које сваки од њих добија на своме инструменту.

3.) Најбоље је, да посматрачи, променивши своја места, одреде и по други пут дужину, зато што ће после промене места (заједно са инструментима) грешка у изводу l бити равна $\triangle l' = B - A$ те ће се у средњем из оба одређивања скратити са $\triangle l = A - B$.

Али се ни при томе не достиже потпуно оно што се жели, јер су личне грешке, уопште говорећи, врло променљиве (чл. 48.); стога је потребно извршити не само два већ неколико одређивања дужине, да тачност њена не би подлежала никаквој сумњи. У том погледу су најсигурнија она савремена одређивања дужине, при којима се за одређивање времена употребљују инструменти са регистрирним микрометром (чл. 48.).

Рузуме се, да је одређивање времена на обема тачкама M и M' немогућно извршити у оним истим моментима T и T', у којима се врши и сравњење часовника тих тачака, већ у другим каквим моментима T_0 и T'_0; због тога је потребно знати још и ходове ω и ω' оба часовника, да би се са поправака u_0 и u'_0, нађених за моменте T_0 и T'_0, могло прећи на u и u' по формулама

$$u = u_0 + \omega (T - T_0) \qquad \text{и} \qquad u' = u'_0 + \omega'(T' - T'_0).$$

Али, пошто су ходови часовника и хронометара подвргнути већим или мањим променама, то на свакој тачци треба време одређивати по могућности што ближе моменту сравњивања часовника па вршити одређивање времена и до и после тих сравњивања, да грешка од примљеног хода ω неби осетно утицала на средњи извод u. Разуме се, да при сваком одређивању времена посматрач треба да сравњује међу собом све хронометре, који су му стављени на расположење, те да добије поправку једнога од њих за ма који момент T, користећи се ходовима свих осталих.

126. Посматрања небесних појава.

У небесне појаве, које се са свих места на Земљи могу једновремено посматрати, улазе: месечева помрачења, помрачења Јупитерових пратилаца и звезде падалице.

Услед непотпуне оштрине граница сенке, у коју тоне Месец за време својега потпуног помрачења, почетак се и свршетак тога помрачења врло ретко може одредити тачније од једне минуте времена. Овакво грубо средство за сравњавања локалних времена давно је већ одбачено, као непотпуно за одређивање разлика дужина на Земљи.

Са већом се тачности посматра улазак у сенку јупитерову и излазк из ње пратилаца његових; али се ни моменти тих појава не могу оцењивати са већом тачности од 10 секунада, што зависи од оптичке моћи и каквоће дурбина помоћу којега се оне посматрају, као и од веће или мање близине привидног места пратиоца јаркоме диску Јупитера, и, од разних других околности. Ни то средство према томе, није довољно тачно за сравњивање локалних времена.

Појава звезда падалица на врло кратко време, обично мање од једне секунде, може се при повољним погодбама да посматра једновремено на доста знатној просторији; стога се разлика локалних времена може одредити доста повољно из поспатрања неколико звезда падалица са двеју тачака, удаљених једна од друге чак и преко сто километара. Али, ма да су били случаји примене оваквих посматрања за одређивање дужине, ипак се та метода не може сматрати за тако згодну и сигурну, да би се могла примењивати систематски.

127. Вештачки светлосни сигнали.

Узајамна посматрања вештачких сигнала са двеју не сувише удаљених тачака, о којима је било речи у чл. 49., омогућавају, да се тачно и кад год устреба сравњују хронометри, који се налазе на тим тачкама. Тачност њихова зависи од сразмерно мале величине случајних грешака $\triangle T$ у давању тих сигнала, тј. у покривању и откривању лампе или хелиотропског огледала, на једној тачци и од грешке $\triangle T'$ у посматрању појављивања и нестајања светлосне тачке са друге тачке. И заиста, ми смо већ тамо видели, да средња грешка у одређивању разлике $T' - T$ показања хронометара из једнога посматраног сигнала не превазилази $\pm 0^{s}.15$; у средњем пак изводу из низа више сигнала, датих с једне и друге стране, она никад не излази већа од оне средње случајне грешке, с којом се одређују и саме поправке u и u' хронометра.

Треба само увек имати у виду, да су посматрања светлосних сигнала скопчана са знатним сталним грешкама, које код неких лица досежу до $0^{s}.20$ па и више; исто се тако и у раду са екраном при давању сигнала појављују код разних лица њихове личне грешке, ма да релативно и много мање (чл. 49.). Ако те сталне личне грешке у посматрањима сигнала за посматрача A на тачци M означимо са a, а за посматрача B на тачци M′ са b; личне пак грешке њихове у давању сигнала — са α и β, онда ће разлика, $T' - T$ коју они добијају, у показивањима хронометра, изаћи погрешна за величину $(+ b - \alpha)$, кад A даје сигнале а B их посматра, и, на величину $(- \alpha + \beta)$, када их B даје а A посматра. При узајамној пак размени сигнала показаће се у средњем изводу разлика $(T' - T,)$ па према томе и у траженој дужини l, грешка

$$\triangle l = \frac{b - a}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Али, кад посматрачи A и B промене и своја места ради искључења њихових личних разлика (A — B) у одређивању времена (чл. 125.), онда ће разлике $(b - a)$ и $(\beta - \alpha)$ утицати на дужину l већ у супротном смислу те ће се у средњем њеном изводу искључити.

Пример. — 1878. г. одређивана је дужина Павловске метеоролошке опсерваторије према Пулковској1); за то употребљени хронометри X (у Пулкову) и Y (у Павловску), имали су односно звезданог времена дневне ходове $\omega_x = - 2^{s}.7$ и $\omega_y = + 6^{s}.3$. Међусобно њихово сравњивање вршило се ноћу из посматрања вештачких светлосних сигнала. Овде су показани резултати посматрања целог

---

1) Jahresbericht der Nicolai-Hauptsternwarte. 1880.

низа од 16 сигнала. Ти су сигнали дати 20. августа из Пулкова по тринаестударном хронометру A, који је имао према звезданом времену дневни ход $\omega_a = + 4^m8^s.8$. Посматрани су пак били из Павловска по хронометру Y. Добивене отуд разлике Y — A сведене су на средњи момент тога низа $A_0 = 9^h34^m30^s$ са ходом $\omega_a - \omega_y = + 4^m2^s.5$. По одступању v тих појединих разлика од средње њихове вредности $Y_0 - A_0$ (за појаву и нестајање светлости посебно) изведена је средња случајна грешка ε једнога посматрања.

Дато из Пулкова	Сведено	Посматр.	Y — A		v	v^2
по A	на A_0	по Y	појављ.	нестај.		
$9_h32^m\ 0^s + 0^{уд} = 0^s00$	$+0^s.41$	$19^h23^m30^s.9$	$9^h51^m31^s.32$		$+0^s.14$	0.020
$18 + 3 = 1.38$	$+ .37$	50.5		$31^s.49$	$+ .19$	.036
$36 + 9 = 4.15$	$+ .31$	24 11.0	.16		$- .02$	.000
$33\ \ 0 + 4 = 1.85$	$+ .25$	32.9		.30	.00	.000
$18 + 2 = 0.92$	$+ .20$	49.8	.08		$- .10$	.010
$36 + 5 = 2.31$	$+ .14$	25 9.6		.43	$+ .13$	.017
$54 + 11 = 5.08$	$+ .09$	30.3	.31		$+ .13$	.017
$34\ 18 + 0 = 0.00$	$+ .03$	49.1		.13	$- .17$	.029
$36 + 1 = 0.46$	$- .02$	26 7.5	.02		$- .16$	.026
$54 + 6 = 2.77$	$- .07$	28.1		.26	$- .04$	.002
$35\ 18 + 1 = 0.46$	$- .13$	49.8	.21		$+ .03$	.001
$36 + 4 = 1.85$	$- .19$	27 9.2		.16	$- .14$	.020
$54 + 7 = 3.23$	$- .24$	28.6	.13		$- .05$	.003
$36\ 18 + 2 = 0.92$	$- .30$	50.5		.28	$- .02$	.000
$36 + 0 = 0.00$	$- .35$	28 7.5_5	.20		$+ .02$	.000
$54 + 5 = 2.31$	$- .41$	28.1		.38	$+ .08$	.006
$A_0 = 9^h34^m30^s$		Средњи:	9 51 31.18	31.30		$\Sigma v^2 = 0.187$

$\varepsilon = \sqrt{\dfrac{0.187}{16 - 2}} = \pm 0^s.116,$ $\qquad Y_0 - A_0 = + \mathbf{9^h51^m31^s.24}$ са ср. греш. $\pm 0^s.029$

Непосредна пак сравњења хронометра A и X у Пулкову дала су:

A	X	свед. на A_0	X — A
$9^h25^m\ 0^s$	$19^h17^m15^s.80$	$+ 1^s.66$	$+ 9^h52^m17^s.46$
9 49 30	19 41 50.10	$- 2.62$	17.48
за $A_0 = 9\ 34\ 30$			$X_0 - A_0 = + 9\ 52\ 17.47$

Према томе

у $19^h26^m47^s$ по X разлика је $Y_0 - X_0 = - 46^s.23$ са ср. греш. $\pm 0^s.029$.

Из другога низа сигнала, датих одмах затим по тринаестударном хронометру из Павловска а посматраних из Пулкова по X, на сличан је начин добивено:

у $19^h36^m45^s$ по X разлика је $Y_0 - X_0 = - 46^s.17$ са ср. греш. $\pm 0^s.026$, тако да је у средњем изашло:

у $19^{h}31^{m}46^{s}$ по X разлика је $Y - X = -\mathbf{46^{s}.20}$ са ср. греш. $\pm 0^{s}.020$.

Поправке пак хронометара X и Y, које су биле одређене 20. августа у Пулкову и у Павловску и преведене са ходовима ω_x и ω_y на исти момент сравњивања $19^{h}31^{m}46^{s}$ по X, били су

$$u_x = -0^{m}9^{s}.34 \qquad \text{а} \qquad u_y = +1^{m}14^{s}.77;$$

према томе дужина l Павловска (још неослобођена од личних грешака посматрача) излази по формули (1.) оваква:

$$l = (Y - X) + (u_y - u_x) = -46^{s}.20 + 1^{m}24^{s}.11 = +\mathbf{37^{s}.91}.$$

128. Давање сигнала телеграфом.

Сравњивање показања хронометара постављених на двема макар и врло удаљеним тачкама једна од друге врши се са највећом тачности помоћу телеграфа, при чему дати сигнали могу бити или *звучни* или пак *хронографски*.

У чл. 50. било је већ објашњено, како треба давати звучне зигнале *Морзеовим кључем* по ударима (откуцајима) тринаестударног хронометра са једне станице, и, како треба посматрати *поклапања* (коинциденције) одговарајућих им удара *реле-а* на другој станици са ударима (откуцајима) обичнога хронометра, који се ту налази. Ова довољно тачна а у исто време и најпростија метода примењује се највише у Русији, при чему се *потпуно сравњивање* хронометра двеју станица врши овако:

Спочетка посматрач са једне станице даје 13 до 14 сигнала један за другим у парне ударе тринаестударног хронометра, а посматрач на другој станици запажа *поклапање* једнога од тих удара са каквим ударом својега обичног хронометра; после 12 или 18 секунада даје се на исти начин други низ од 13 до 14 сигнала, затим трећи и тако даље, — свега 8 или 9 низова, за шта је потребно од 3 до 4 минуте времена. После тога, обратно, посматрач са друге станице даје по своме тринаестударном хронометру две такве исте групе од по 8 или 9 низова сигнала у свакој, а посматрач на првој станици посматра поклапања по своме обичноме хронометру; најзад се све завршава четвртом групом сигнала, који се дају понова са прве станице. Из 36 поклапања, посматраних на тај начин у току од непуне четврти часа, резултат се сравњења хронометра добија са средњом случајном грешком (чл. 50.) око $\frac{0.03}{\sqrt{36}} = \pm 0^{s}.005$.

Главни узроци непотпуне тачности оваквих сравњивања лежи у овоме: 1.) код сваког лица, које даје сигнале, постоји склоност, или да их даје Морзе-овим кључем нешто раније од момената стварних удараца тринаестударног хронометра, или пак да задоцњава унеколико при томе, при чему ће лична грешка његова зависити делимично и од каквоће самога кључа; 2.) слично томе, постоје личне грешке у запажању поклапања реле-ових удара са ударима хронометра, које зависе од силине и оштрине удара тога реле-а; 3.) постоји веће или мање задоцњавање радње реле-ове, јер се сила електромагнета, — која савлађује разне отпоре кретању котве релеов, — прикупља тек постепено у зависности од дужине телеграфске линије, од силе батерије, која дејствује на тој линији и др. Али се све те сразмерно мале и сталне нетачности скоро сасвим искључују у изводу тражене дужине после тога, кад посматеачи промене своја места ради другог њеног одређивања и сваки при том узме собом како кључ Морзе-ов, којим је давао сигнале, тако и реле, којим се служио.

У неколико брже и нешто се тачније врши сравњивање времена двеју станица давањем *хронографских* сигнала телеграфским путем, ако се на обема станицама налазе часовници са *прекидачима* и *хронографи* (чл. 46.), који се средством помоћних реле-а могу везати за општу телеграфску линију.[1] Тада, ако се даде кључем или пак хронографским контактом (чл. 46.) прво са једне станице а затим са друге, низ сигнала у ма каквим произвољним моментима, онда ће се ти сигнали исписати (регистрирати) једновремено на хронографима обеју станица, упоредно са секундним знацима часовника, те ће се тражена разлика $T' - T$ у показањима часовника обеју станица добити непосредно. На тај се исти начин лако сравњује са часовником на станици и онај хронометар, који служи за одређивање времена.

Ма какви сигнали да се дају телеграфским путем, — звучни или хронографски, — између момента давања сигнала са једне станице M и момента T' његова пријема на другој M' увек прође извесан више или мање осетан интервал времена δT, који се обично зове *брзином шока*, ма да он зависи не само од брзине распростирања тока по линији, већ и од напред реченог задоцњавања радње реле-ове. Према томе, при подједнакој осетљивости реле-а на обема станицама, тражена разлика показања часовника $T' - T$ треба да излази за величину δT већа од истините у случају, кад се сигнали дају из M а посматају на M', а у толико исто мањи од истините у случају, кад се они дају из M' а посматрају на M; у средњем пак изводу $T' - T$ та ће се брзина тока δT искључити, па ће се и сама одредити из полуразлике двају одређивања $T' - T$, при чему за линију од 1000 км она излази око 0^s05.

Пример. — При одређивању дужине l Варшавске Опсерваторије према Пулковској 1875. године[2] за сравњење локалних времена телеграфским путем служила су само везивања линискога тока у моментима свакога четвртог ударца тринаестударног хронометра, који су се исписивали једновремено на обема станицама упоредно са секундним знацима часовоика P (у Пулкову) и W (у Варшави). Ево резултата из два низа таквих сравњивања, добивених 20. септембра:

---

[1] Врло нестални линијски ток делује увек прво на реле и оно већ везује ток оне слабе батерије која управља иглом хронографа, која исписује (регистрира) сигнале добивене са друге станице. За врло тачна пак одређивања дужинâ веома је важно, да и кроз то реле пролази ток једне и исте силе; ради тога се и линијскоме току дају два пута, од којих један закључује у себи то реле са бусолом, која мери силу тока, а други — реостат, којим се регулише и изједначује сила тока, која делује на реле.

[2] Н. Цингеръ. „Опредѣленіе разности долготъ Варшавы и Пулкова". Записки Военно-Топограф. Отдѣла Гл. Штаба 1879.

Сигнали из Пулкова				Сигнали из Варшаве			
P	W	P—W	v	P	W	P—W	v
$22^h43^m15^s.85$	$22^h5^m54^s.00$	$37^m21^s.85$	+3	$22^h46^m6^s.94$	$22^h8^m45^s.01$	$37^m21^s.93$	+2
17.67	55.87	.80	—2	8.79	46.89	.90	—1
19.53	57.70	.83	+1	10.66	48.78	.88	—3
21.40	59.58	.82	0	12.50	50.57	.93	+2
23.23	61.42	.81	—1	14.36	52.43	.93	+2
25.09	3.25	.84	+2	16.19	54.28	.91	0
26.93	5.12	.81	—1	18.02	56.09	.93	+2
28.79	6.99	.80	—2	19.87	57.96	.91	0
30.66	8.87	.79	—3	21.73	59.82	.91	0
32.50	10.67	.83	+1	23.59	61.69	.90	—1
34.36	12.54	.82	0	25.44	63.53	.91	0
36.20	14.38	.82	0	27.29	65.39	.90	—1
38.05	16.21	.84	+2	29.13	67.23	.90	—1
39.91	18.10	.81	—1	30.95	69.06	.89	—2
41.75	19.89	.86	+4	32.81	70.93	.88	—3
43.59	21.75	.84	+2	—	—	—	

Средње P — W = **37 21.823** Средње P — W = **37 21.907**

$$\text{Средња грешка једнога сравњења } \varepsilon = \sqrt{\frac{0.0059 + 0.0042}{(16+15)-2}} = \pm\, 0^s019.$$

$$\text{Брзина тока } \delta T = \tfrac{1}{2}[37^m21^s907 - 37^m21^s823] = \mathbf{0^s042}$$

Време је одређивао, исте вечери, Цингер у Пулкову а Савицки у Варшави па је нађено, да су поправке часовника P и W, сведене на средњи момент сравњивања $P_0 = 22^h45^m0$, биле овакве:

$$u_p = -0^m51^s765, \quad u_w = -0^m41^s411, \quad u_w - u_p = +\ 0^m10^s354;$$

а пошто је у средњем било $P - W = -\underline{37\ 21.865,}$

то је $l + r = -37\ 11.511,$

где r означава разлику личних грешака посматрачâ. На овај је начин, при истом положају посматрача, у средњем из четири вечери посматрања добивено било

$$l + r = -37^m11^s525.$$

Када су пак посматрачи затим променили своја места, онда је из две вечери посматрања добивено

$$l - r = -37^m11^s095;$$

те је отуд добивено $l = -\mathbf{37^m11^s310}$ и $r = -\mathbf{0^s215}$.

Средње грешке тих извода l и r (по њиховој сагласности за поједине дане) изашле су биле $\varepsilon_l = \varepsilon_r = \pm\, 0^s020$.

Као пример високе тачности, каква се може достићи при одређивању дужина, навешћемо резултате двају потпуно независних једно од другога одређења разлике l дужина Пулкова и Потсдама 1901. г. При томе су се два пулковска и два потсдамска астронома служи, за одређивање времена, преносним пасажним инструментима велике оптичке моћи (диаметар објектива дурбина 80^{mm} а увеличање $W = 115$) са ауторегистрирним окуларним микрометрима.[1] Први су посматрачи из 18 вечери (са променом својих места) добили

$$l = 1^h 9^m 2^s\!.504 \text{ са ср. грешком } \pm 0^s\!.005,$$

а други

$$l = 1\ 9\ 2.493 \quad „ \quad „ \quad „ \quad \pm 0.005.$$

У последње време, са развићем и усавршавањем радиотелеграфије, посматрачи су почели употребљавати безжични телеграф за одређивање разлика дужина места, на којима су инсталиране радио телеграфске санице. У Русији је, например, на тај начин била одређена дужина куле светиље Богшера (у Балтичком Мору према Мариехамну[2]). Ма да се апарати безжичне телеграфије и битно разликују од обичних (које смо описали у чл. 50.), ипак по спољњему облику система како давања, тако и пријема низа сигнала, ради сравњивања хронометара двеју станица, остаје и у том случају иста, стога што се радиотелеграфски сигнали могу да примају или непосредно, као звучни, или пак, — што је много боље, — регистрирним путем на хронографима обеју станица.

129. Одређивање дужина места превозом хронометара.

Предпоставимо, да је на тачци M одређена из посматрања поправка хронометра u у моменту његова показања T и да је затим тај исти хронометар превезен на другу тачку M', где му је поправка у моменту T' из посматрања изашла равна u'. Кад означимо са ω' дневни ход тога хронометра за време његова транспорта а са τ интервал времена $T' - T$, изражен у данима, онда ћемо добити за један и исти момент T' оваква локална времена, — рачуната на M и M':

$$T' + (u + \omega'\tau) \qquad \text{и} \qquad T' + u'$$

те ће се стога дужина l тачке M' у односу према M изразити овако

$$l = u' - u - \omega'\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

Она ће садржати у себи, осим грешака $\triangle u$ и $\triangle u'$, у одређивању поправака u и u', још и грешку $\triangle \omega'\tau$ од нетачнога познавања хода ω' и од неизбежних његових колебања.

При превозу хронометра ход његов ω' треба одређивати сасвим самостално, и никако га не мешати са оним нормалним његовим ходом ω, који има тај хронометар стојећи мирно на једном и истом месту. Ради тога је најбоље вратити се што је могућно пре са M' на M па понова тамо наћи из посматрања поправку хронометра.

---

[1] Th. Wittram und F. Renz. — „Telegraphische Längenbestimmung zwischen Pulkovo und Potsdam“. 1902.

[2] Капитанъ Матусевичъ. — „Опредѣленіе разности долготъ Мариехамнъ и маяка Богшеръ“. Записки по Гидрографіи Гл. Гидрогр. Управлениія. 1912.

Претпоставимо, да је на тачци M', после извесног времена, у моменту T'_1 била по други пут одређена поправка u'_1 а по повратку на M добивена поправка u_1 у моменту T_1. Кад се из целокупне промене поправке $(u_1 - u)$, која је произашла за све време $(T_1 - T)$, одузме она њена промена $(u'_1 - u')$, која се је показала за време стајања $(T'_1 - T')$, онда ћемо добити за средњи ход хронометра на путу ову величину

$$\omega' = \frac{(u_1 - u) - (u'_1 - u')}{(T_1 - T) - (T'_1 - T')} = \frac{(u' - u) - (u'_1 - u_1)}{\tau + \tau_1} \qquad . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

где τ_1 означава трајање пута за повратак $(T_1 - T'_1)$; због тога ће се тражена дужина изразити овако

$$l = (u' - u) - \frac{\tau}{\tau + \tau_1}\left[(u' - u) - (u'_1 - u_1)\right] = \frac{(u' - u)\tau_1 + (u'_1 - u_1)\tau}{\tau + \tau_1} \; . \; . \quad (4.)$$

На сличан би начин требало, при изводу ω' искључивати и сва остала дужа бављења на станицама, ако би таквих било гдегод на путу од M ка M' и обратно.

Ако се не може брзо вратити са M' на почетну тачку M, онда се треба старати, да се дође до какве друге тачке M'', чија је дужина l_1 према M већ добро позната, па на тој тачци одредити поправку хронометра u_1 у моменту T_1. Онда ће се ω' и l добити из таквих истих израза (3.) и (4.), само с том разликом, што ће се у њима у место u_1 ставити $(u_1 - l_1)$. Са много мањом пак сигурношћу ће се добити тражена дужина l, ако се у формулу (2.) мора да уведе онај ход хронометра на путу, који је констатован при другом транспорту, непосредно пре прелаза са M на M' или непосредно за њим.

За време дужих хронометарских експедиција, предузетих ради одређивања дужина многих тачака, понекад се јасно откривају постепена убрзања или пак успоравања у ходу хронометра, о чему је било речи у чл. 44.; стога ово треба узимати у обзир онако, како је тамо речено.

130. Тачност одређивања дужина.

Ако се при изводу дужине l по формули (2.) ход ω' узима као познат на основу ранијих одређивања поправака хронометра, онда тај извод треба да подлежи (чл. чл. 40. и 41.) средњој грешци

$$\varepsilon_l = \varepsilon\sqrt{\tau} \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)_\varepsilon$$

или пак да има тежину

$$g_l = \frac{k}{\varepsilon^2 \tau} = \frac{g}{\tau} \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)_g$$

где ε означава средње случајно колебање дневнога хода, а $g = \frac{k}{\varepsilon^2}$ означава тежину, којом је одређена релативна каквоћа хронометра.

Ако ли се ω' одређује обратним прелазом са M' на M, онда ће се интерполирана поправка хронометра за време посматрања T' на тачци M', па према томе и сами извод l добити (чл. 41.) са тежином

$$g_l = \frac{g}{\tau} + \frac{g}{\tau_1} = g\,\frac{\tau + \tau_1}{\tau\tau_1} = \frac{g}{(T)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)_g$$

или са средњом грешком

$$\varepsilon_l = \sqrt{\frac{k}{g_l}} = \varepsilon \sqrt{(T)}\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.)_\varepsilon$$

где (T) означава скраћено величину $\frac{\tau\tau_1}{\tau+\tau_1}$.

Усљед тога, што је вредност за ε чак и код бољих хронометара доста велика (око $\pm 0^s2$), то је при одређивању дужина неопходно потребно употребити не један већ више хронометара. Онда се по ходу свакога од њих добивају за тражену дужину l различите вредности l', l'', l''',.... са тежинама g'_l, g''_l, g'''_l,..., сразмерним са тежинама тих хронометара g', g'', g''',....; највероватнији пак извод l биће

$$l = \frac{l'g'_l + l''g''_l + l'''g'''_l + \ldots.}{g'_l + g''_l + g'''_l} = \frac{l'g' + l''g'' + l'''g''' + \ldots.}{g' + g'' + g''' + \ldots.} \quad \ldots\ldots \quad (5.)$$

са тежином

$$g_l = g'_l + g''_l + g'''_l + \ldots. = \frac{g' + g'' + g''' + \ldots.}{(T)} \quad \ldots\ldots \quad (5.)_g$$

или са средњом грешком

$$\varepsilon_l = \sqrt{\frac{k}{g_l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.)_\varepsilon$$

Најтачније хронометарске експедиције биле су извршене онда, када још није било телеграфа. Тако је, например, у лето 1843. год. било извршено 16 поморских превоза 68 хронометара од Петрограда до Алтоне и обратно, ради одређивање дужине Пулковске Опсерваторије према осталим европским. Из тако великог броја одређивања успело се, да се извод дужине Пулкова од Алтоне добије са средњом грешком $\pm 0^s.06$. На сличан су начин 1845. г. биле одређене, са ср. грешкама $\pm 0^s.09$, дужине Москве и Варшаве од Пулкова, из осам превоза 40 хронометара у фургону на федерима.

Пример. — За време хронометарске експедиције Смислова[1]), који је 1859. г. одређивао ширине и дужине разних тачака у Петроградској и Новгородској Губернији, нађене су биле из посматрања у Пулкову (П.), Новој Ладози (Л.) и Боровичима (Б.) доле означене поправке u, u', u'', u''_1 и u_1 за 4 хронометра: A, B, C и D:

Јула		T (днев.)			A	B	C	D
П.	5	15^h40^m	= 5.653	u =	$-\ 1^m\ 1^s.82$	$+\ 0^m26^s.13$	$+\ 1^m\ 0^s.04$	$-\ 2^m28^s.03$
Л.	13	17 50	= 13.743	u' =	+ 6 56.32	+ 8 41.22	+ 9 17.69	+ 5 37.26
Б.	20	17 18	= 20.721	u'' =	+13 12.28	+15 14.50	+15 52.98	+12 1.88
$Б_1$.	25	17 5	= 25.712	u''_1 =	+13 2.82	+15 19.84	+16 0.92	+12 2.11
$П_1$.	31	18 6	= 31.754	u_1 =	− 1 19.02	+ 1 9.93	+ 1 51.36	− 2 25.29

Тежине тих хронометара, које су се нешто разликовале од оних у примеру чл. 43., биле су: $g_a = 0.5$, $g_b = 1.0$, $g_c = 1.5$ и $g_d = 2.5$, при чему је узето, да је тежина равна 1 одговарала средњој грешци дневнога хода $\varepsilon = \pm 0^s.30$.

---

[1] П. Смысловъ. — „Репсолдовъ кругъ и хронометры“. 1863.

Само су у Боровичима хронометри стајали 5 дана на месту и за то време њихови ходови били су овакви:

$$\omega_a = -1^{s}.896, \quad \omega_b = +1^{s}.070, \quad \omega_c = +1^{s}.591, \quad \omega_d = +0^{s}.046$$

иначе, од 5. до 31. јула били су на путу и тада су њихови ходови, срачунати по формули (3.) изашли овакви:

$$\omega'_a = -0^{s}.367, \quad \omega'_b = +1^{s}.822, \quad \omega'_c = +2^{s}.055, \quad \omega'_d = +0^{s}.593,$$

као што се види, знатно већи од оних ω, када су хронометри стајали на месту.

Кад се сад срачунају дужине Нове Ладоге и Боровича од Пулкова по ходовима: ω'_a, ω'_b, ω'_c и ω'_d, онда ћемо добити:

Нова Ладога		A	B	C	D
$\tau = 8.09$	$u' - u =$	$+7^{m}58^{s}.14$	$+8^{m}15^{s}.09$	$+8^{m}17^{s}.65$	$+8^{m}5^{s}.29$
$\tau_1 = 13.02$	$-\omega'\tau =$	$+2.97$	-14.74	-16.62	-4.80
$\tau + \tau_1 = 21.11$	$l =$	$+8\ \ 1.11$	0.35	1.03	0.49
$(\mathrm{T}) = 4.99$					

у среоњем по формули (5.) $l = +\mathbf{8^{m}0^{s}.67}$

$$g_l = \frac{5.5}{\mathrm{T}} = 1.10 \qquad\qquad \varepsilon_l = \pm\frac{0^{s}.30}{\sqrt{1.10}} = \pm\mathbf{0^{s}.29}$$

Боровичи		A	B	C	D
$\tau = 15.07$	$u''_1 - u_1 =$	$+14^{m}21^{s}.84$	$+14^{m}\ 9^{s}.91$	$+14^{m}\ 9^{s}.56$	$+14^{m}17^{s}.40$
$\tau_1 = 6.04$	$+\omega'\tau_1 =$	-2.22	$+11.01$	$+12.42$	$+3.58$
$\tau + \tau_1 = 21.11$	$l =$	$+14\ \ 19.62$	20.92	21.98	20.98
$(\mathrm{T}) = 4.31$					

у средњем по формули (5.) $l = +\mathbf{14^{m}21^{s}.12}$

$$g_l = \frac{5.5}{\mathrm{T}} = 1.28 \qquad\qquad \varepsilon_l = \pm\frac{0^{s}.30}{\sqrt{1.28}} = \pm\mathbf{0^{s}.26}$$

У ове изведене дужинае *l* треба да се уведу још и поправке за утицај промена температурних у току путовања.

131. Утицај несавршенства компенсације хронометара.

У примеру чл. 44. ми смо већ изложили и разјаснили, како треба узимати у обзир несавршенство компенсације хронометара, када се они за време превоза подвргавају знатним променама температуре *t*, која се одређује помоћу једнога или два термометра, смештених у кутијама заједно са хронометрима. Овде нам остаје само напоменути, да, ако су α и β коефицијенти компенсације каквога хронометра, а ω'_0 његов дневни ход за време путовања при некој нормалној температури t_0, онда ће се величина $\omega'\tau$ у изразу (2.) представити на основу формуле (16.) чл. 44. у облику

$$\omega'\tau = \omega'_0\tau + \Sigma + \sigma,$$

где је

$$\tau = \mathrm{T}' - \mathrm{T}, \qquad \Sigma = \alpha \sum_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}'} \Delta\tau\,(t - t_0) \qquad \text{и} \qquad \sigma = \beta \sum_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}'} \Delta\tau\,(t - t_0)^2.$$

Сличне ће се суме Σ_1 и σ_1 добити и за време $\tau_1 = T_1 - T'_1$ обратнога прелаза са тачке M' на M, при чему ће изаћи

$$\omega'\tau_1 = \omega'_0\tau_1 + \Sigma_1 + \sigma_1;$$

због тога ће се за ход ω'_0 на путу добити

$$\omega'\tau + \omega'\tau_1 = \omega'_0(\tau + \tau_1) + (\Sigma + \sigma) + (\Sigma_1 + \sigma_1) = (u_1 - u) - (u'_1 - u'),$$

одакле
$$\omega'_0 = \frac{(u' - u) - (u'_1 - u_1)}{\tau + \tau_1} - \frac{(\Sigma + \sigma) + (\Sigma_1 + \sigma_1)}{\tau + \tau_1}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)'$$

тражена пак дужина наћи ће се из двају њених израза

$$l = u' - u - (\omega'_0\tau + \Sigma + \sigma) \text{ са тежином } \frac{g}{\tau}$$

и
$$l = u'_1 - u_1 - (\omega'_0\tau_1 + \Sigma_1 + \sigma_1) \text{ са тежином } \frac{g}{\tau_1}$$

у облику
$$l = \frac{(u' - u)\tau_1 + (u'_1 - u_1)\tau}{\tau + \tau_1} + \frac{(\Sigma_1 + \sigma_1)\tau - (\Sigma + \sigma)\tau_1}{\tau + \tau_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)'$$

Други чланови ових израза (3.)′ и (4.)′ и представљају поправке пређашњих извода (3.) и (4.), које смо били добили са претпоставком, да се температура није мењала. Из чл. 44. ми смо видели, да се ти корекциони чланови могу још згодније и тачније одредити из промене хода некомпенсираног хронометра, ако је он за време превоза смештен у истом сандучићу са осталим хронометрима.

ГЛАВА XVII.

ОДРЕЂИВАЊЕ ДУЖИНА ПО ПОСМАТРАЊИМА МЕСЕЦА.

132. Општи поступак при одређивању дужина по Месецу.

Брзина, виднога са Земље, кретања Месечева у односу према звездама (у средњем за $\frac{360^\circ}{27.32} = 13^\circ 10'.6$ на дан или око $0''.55$ за 1 секунду средњега времена) чини, да се посматрањем положаја тога небесног тела на небу можемо користити ради сравњивања локалних времена разних тачака на Земљи, само ако се при томе буде узимала како треба у рачун паралакса Месечева. У том смислу Месец је сличан сâтној казаљки, који изврши на звезданом небу, као казаљка на циферблату, потпун обрт у току $27^1/_3$ дана.

Пошто се геоцентричке координате Месечеве, — срачунате по теорији његова кретања, — дају у астрономским календарима, *Nautical Almanac*, *Connaissance des Temps* и др., за неколико година унапред, то је довољно чак на једној ма каквој тачци одредити у извесном моменту локалнога времена положај Месечев (измерити нпр. његово растојање до какве звезде на његовом путу), ослободити га затим од утицаја паралаксе и најзад наћи у *Nautical Almanac*-у одговарајуће гринвичко време, па да се отуд непосредно добије дужина те тачке у односу према Гринвичу. Овакав извод дужине може бити врло погрешан, а наиме за $20^s = 5'$ па чак и више, једино с тога, што таблична места Месечева нису довољно тачна, због несавршенства теорије његова кретања. Да би се знале те табличне грешке за онај приближно момент када је одређивана дужина места, те да се добивени извод дужине ослободи од њих, — најпростије је и најбоље обратити се посматрањима Месеца на Гринвичкој Опсерваторији, где се то небесно тело посматра стално у циљу одређивања његових координата α и δ.

Ако је на каквоме месту била посматрана у даноме моменту S локалнога звезданог времена нека величина $U = f(\alpha, \delta, \pi, R)$, која на извесан начин зависи од координата Месечевих α и δ, од његове паралаксе π и од угловног радиуса R, то се за извод дужине L те тачке у односу према Гринвичу може увек употребити овај општи поступак:

Нека је L_0 приближно позната дужина места а $\triangle L$ тражена њена поправка Кад се помоћу L_0 нађе средње гринвичко време T_0, које одговара S, а наиме

$$T_0 = (S - L_0 - S_0)\,\mu,$$

— где S_0 означава звездано време у средњем гринвичком подневу а $\mu = \frac{3600.0}{3609.8} = 1 - \frac{1}{366}$ је однос средњега времена према звезданом, — онда ћемо наћи у таблицама *Nautical Almanac*-а за тај момент T_0 вредности за α_0, δ_0, π_0 и R_0 а помоћу њих срачунаћемо $U_0 = f\,(\alpha_0, \delta_0, \pi_0, R_0)$. Помоћу истините пак дужине L добило би се

$$T = (S - L - S_0)\,\mu = T_0 - \mu \triangle L,$$

и тачне координате Месечеве α, δ, π и R, које одговарају томе гринвичкоме времену T, требале би да даду баш ону посматрану величину $U = f\,(\alpha, \delta, \pi, R)$. Али, ако тражена поправка $\triangle L$ није сувише велика, те ће разлике $(\alpha - \alpha_0)$ и $(\delta - \delta_0)$ бити доста мале, разлике пак $(\pi - \pi_0)$ и $(R - R_0)$ толико су ништавне да се могу сасвим занемарити. Кад се тада означе са $\triangle\alpha$ и $\triangle\delta$ промене α и δ за један час средњега времена и кад се у развијању функције $U = f\,(\alpha, \delta, \pi, R)$ задовољимо само првим степенима малих величина $(\alpha - \alpha_0)$ и $(\delta - \delta_0)$, онда ћемо добити ове изразе, у којима је $\triangle L$ изражена у деловима часа:

$$\alpha = \alpha_0 + \triangle\alpha\,(T - T_0) = \alpha_0 - \triangle\alpha\,.\,\mu\triangle L, \qquad \pi = \pi_0,$$

$$\delta = \delta_0 + \triangle\delta\,(T - T_0) = \delta_0 - \triangle\delta\,.\,\mu\triangle L, \qquad R = R_0,$$

$$U = U_0 + \frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha - \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial\delta}(\delta - \delta_0) = U_0 - \mu\triangle L\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\triangle\alpha + \frac{\partial f}{\partial\delta}\triangle\delta\right).$$

Одатле је

$$\triangle L = \frac{U_0 - U}{\triangle U}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.)$$

где величина

$$\triangle U = \mu\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\triangle\alpha + \frac{\partial f}{\partial\delta}\triangle\delta\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.)'$$

означава промену U_0 при промени дужине L_0 за један час.

Та околност, што изрази (1.) и (1.)′ нису савршено тачни, примораће, разуме се, да се сва срачунавања понове са новом, тачнијом дужином места $L_1 = L_0 + \triangle L$ у том случају, ако би првом приликом поправка $\triangle L$ испала врло велика.

Ако би се доцније показало, да су табличне вредности α_0, δ_0, π_0, R_0, биле погрешне и да с тога подлеже поправкама $\partial\alpha_0$, $\partial\delta_0$, $\partial\pi_0$, ∂R_0, онда би предњим начином срачунатој дужини L требало додати поправку

$$\partial L = \frac{\partial U_0}{\triangle U} = \frac{1}{\triangle U}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\partial\alpha_0 + \frac{\partial f}{\partial\delta}\partial\delta_0 + \frac{\partial f}{\partial\pi}\partial\pi_0 + \frac{\partial f}{\partial R}\partial R_0\right) \quad \ldots \quad (2.)$$

Грешка пак δL нађене дужине, која произлази отуд, што је и сама величина U била посматрана са извесном грешком δU, добиће се из израза

$$\delta L = -\frac{\delta U}{\triangle U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.)$$

Јасно је, да је за одређивање дужина повољније посматрати такве величине U, које на известан начин зависе од координата Месечевих, за које је промена $\triangle U$, — која улази у именитељ израза (1.), (2.) и (3.), — доста велика. Овде спадају: 1.) Посматрања растојања Месеца од других небесних тела, која се налазе на путу његовога властитог кретања; 2.) посматрања кулминација Месечевих; 3.) посматрања покривања звезда Месецем, а наиме централних покривања, и, 4.) посматрања азимута и зенитних растојања Месеца при околностима, повољним за одређивање дужина.

133. Месечева растојања.

Узмимо да је $U = f\,(\alpha, \delta, \pi, R)$, о коме је било речи у прошлом члану, угловно *геоцентричко* растојање d центра Месечева диска од каквога небесног тела, које се налази у близини елиптике, например од Сунца. Разуме се, да се то d не може непосредно измерити са каквога места на Земљи, већ треба да се добије (рачунски) из измеренога у даном моменту T' (локалнога средњег времена) *привиднога* растојања d' од Сунца до осветљенога краја Месечева. При томе, осим поправака, које зависе од угловних радиуса ових небесних тела, треба тако исто узети у обзир и утицај њихових паралакса и рефракције на привидне њихове положаје на небу.

С друге пак стране, са приближном дужином места L_0 од Гринвича, по екваторијалним се координатима Месечевим (α_0, δ_0) и Сунчевим (A, D) лако могу срачунати за гринвичко средње време $T_0 = T' - L_0$ геоцентричко растојање тих небесних тела d_0 и часовна његова промена $\triangle d$, која сад улази у формулу (1.) уместо U_0 и $\triangle U$. На тај ће се начин тражена поправка $\triangle L$ приближ. узете дужине L_0 добити у секундама времена овако:

$$\triangle L^s = 3600\,\frac{d_0 - d}{\triangle d}.$$

Пример. — 10. фебруара 1870. г. измерена су била Писторовим кругом у Пулкову растојања између крајева Сунца и Месеца; на основу тих података изведено је било геоцентричко растојање међу центрима тих небесних тела $d = 110^\circ 33' 36''$ у моменту $T' = 4^h 25^m 46^s$ средњега пулковског времена. За исти пак дан у Nautical Almanac-у било је дато:

У сред. Гринвич. времену:	$0^h\ 0^m$		$3^h\ 0^m$		$6^h\ 0^m$
Растојање Месеца од Сунца:	109°24′51″		110°50′39″		112°16′33″
Промена $\triangle d$ за 1 час:		1716″	(1719″)	1722″	

Кад се узме приближна дужина Пулкова $L = 2^h 0^m 0^s$ (уместо тачне $L = 2^h 1^m 19^s$), онда ћемо за гринвичко средње време $T_0 = 2^h 26^m 46^s = 3^h - 0^h\!.57055$, са часовном променом $\triangle d = 1718''$, наћи овакву вредност за d_0:

$$d_0 = 110^\circ 50' 39'' - 1718'' \times 0.57055 = 110^\circ 50' 39'' - 16' 20'' =$$

$$= 110^\circ 34' 19'' = d + 43'';$$

после чега ће изаћи

$$\triangle L^s = 3600 \frac{+43}{1718} = +90^s$$

па према томе

$$L = 2^h 1^m 30^s.$$

Са теорне тачке гледишта мерења Месечевих растојања од небесних тела блиских еклиптици па према томе и привидноме путу Месечеву, треба да се сматрају као најповољнија за извод дужине места по Месецу, јер је часовно померање његово $\triangle L^s$ у том случају максимално; али усљед тога, што се таква мерења могу вршити само помоћу несавршених инструмената са дурбинама вр. мале оптичке моћи, та се метода одређивања дужина показала као мање тачна и сигурна од осталих, побројаних у чл. 132., те су је сасвим престали употребљавати на делу. Стога сматрамо за сувишно, да овде објашњавамо у свима детаљима потребна за то рачунања и формуле за њих; тим пре, што се од 1907. године ни у Nautical Almanac-у, ни у Connaissance des Temps, већ више не дају, као пређе, геоцентричка растојања од Месеца до Сунца и других небесних тела.

134. Кулминације Месечеве.

Претпоставимо, да је на месту, чија је источна дужина од Гринвича равна L, посматрана кулминација осветљенога краја (I или II) Месечевог у моменту S локалнога звезданог времена тако, да и рехтасцензија α_1 тога краја Месечевог буде у том моменту равна S. По истеку извесног времена $S' - S = S' - \alpha_1$ исти ће његов крај кулминирати и у Гринвичу, при чему ће његова рехтасцензија, — изменивши се за то време (чл. 132.) за величину $\mu\triangle\alpha_1 (S' - S)$, — бити

$$(\alpha_1) = \alpha_1 + \mu\triangle\alpha_1 (S' - \alpha_1)$$

а пошто је у том моменту звездано време у Гринвичу равно $S' - L$, то треба да буде и

$$(\alpha_1) = S' - L$$

Кад се сад елиминара S' из тих двеју једначина и означи ради скраћења

$$\triangle(\alpha_1) = \frac{\mu\triangle\alpha_1}{1 - \mu\triangle\alpha_1},$$

онда ћемо добити

$$L^h = \frac{(\alpha_1) - \alpha_1}{\triangle(\alpha_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

За све дане у години сем оних, када је Месец врло близо Сунцу, дају се у Nautical Almanac-у рехтасцензије (α_1) у моментима горњега и доњега пролаза осветљеног краја његовог кроз гринвички меридијан, а тако исто и њихове промене $\triangle(\alpha_1)$ при промени дужине L за један час; стога, при срачунавању по формули (4.) дужине L тога места, где је посматрано α_1, потребно је приближно знати њену приближну величину L_0 само ради тога, да би се одредила интерполовањем тачна величина $\triangle(\alpha_1)$, која одговара средини интервала између кулминације Месеца у Гринвичу и на даном месту.

Пример. — 10. фебруара 1870. г. добивена је била у Пулкову, из посматрања Месечевих кулминација, рехтасцензија I његовог краја $\alpha_1 = 4^h50^m54^s.75$, а у Nautical Almanac-у било је дато:

	(α_1)	$\Delta(\alpha_1)$	Пром. за 12^h
9. фебр. I кр. Месеца у доњ. кулм.	$4^h28^m50^s.07$	$131^s.20$	$+3^s.87$
10. „ „ „ „ „ гор. „	4 55 27.59	135.07	

Кад за приближну дужину Пулкова узмемо $L_0 = 2^h0^m0^s$, онда ћемо за потребну нам средњу промену $\triangle(\alpha_1)$ одатле добити, интерполовањем, величину $135.07 - \frac{3.87}{12} \times \frac{L_0}{2} = 134^s.75$ а помоћу ње наћи ћемо

$$(\alpha_1) - \alpha_1 = 4^m32^s.84 \quad lg = 2.435908 \quad lg\,L = 0.306379$$

$$\triangle(\alpha_1) = 134.75 \quad lg = 2.129529 \qquad L = 2^h.02479 = \mathbf{2^h1^m29^s.2.}$$

Али, пошто је, дата у таблицама, рехтасцензија Месечева подлежала тога дана поправци $\partial\alpha = -0^s.35$, то, на основу формуле (2.), томе изводу L треба још додати

$$\partial L^s = \frac{-0.35}{134.75} \times 3600 = -9^s.4,$$

после чега ће се поправљена дужина $L = 2^h1^m19^s.8$ разликовати од праве ($2^h1^m18^s.8$) само за $1^s.1$.

135. Посматрања кулминација.

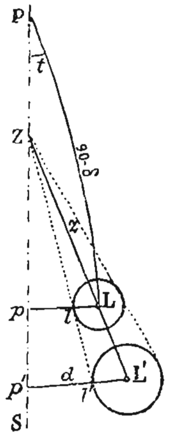
Да видимо сада, како се наиме треба да одређује, у моменту Месечеве кулминације на каквоме месту, рехтасцензија α_1 његовога краја ради извода дужине тога места у односу према Гринвичу. Разуме се, да се неопходна за то посматрања треба да врше пасажним инструментом, који је добро постављен у меридијану.

Нека на небесној сфери тачка Z (сл. 117.) буде геоцентрички зенит места посматрања; меридијан, који кроз њу пролази, нека буде круг PZE, L и L′ нека буду истинито и привидно место Месеца, на растојању од Z ZL $= \zeta$ и ZL′ $= \zeta'$. Ако a буде врло мали азимут пасажног инстумента, b нагиб хоризонталне осе а c колимациона грешка дурбина, онда ће се растојање $L'p' = d$ привиднога места L′ од меридијана изразити (чл. 112.) овако:

$$d = a \sin\zeta' + b \cos\zeta' + c;$$

часовни пак угао $\sphericalangle LPZ = t$ истинитог центра L, чија је деклинација δ, биће

$$t = Lp \,.\, sec\,\delta = d\,\frac{\sin\zeta}{\sin\zeta'}\,sec\,\delta.$$



Сл. 117.

Услед властитог кретања Месечевог по рехтасцензији за $\mu\triangle\alpha$ у току $1^h = 3600^s$ звезд. времена, привидно ће његово кретање у току истог времена бити равно $(3600 - \mu\triangle\alpha)$; због тога ће часовни угао t Месец прођи у току времена

$$\tau = t\,\frac{3600}{3600 - \mu\triangle\alpha} = d\,\frac{\sin\zeta}{\sin\zeta'}\cdot\frac{\sec\delta}{1-\lambda} = Cd,$$

где је

$$\lambda = \frac{\mu\triangle\alpha}{3600} \qquad \text{и} \qquad C = \frac{\sin\zeta}{\sin\zeta'}\cdot\frac{\sec\delta}{1-\lambda};$$

за пролаз пак угла $R\sec\delta$, који одговара угловној величини Месечева радиуса $Ll = R$, он ће употребити време $\frac{R\sec\delta}{1-\lambda}$. Па због тога, ако се по часовнику, чија је поправка равна u, буде посматрао момент T пролаза преко средњег кончића једнога или другога краја виднога Месечева диска, онда ће се рехтасцензија α тога краја и рехтасцензија α центра Месечева добити овако:

$$\alpha_1 = T + u + \tau \qquad \text{и} \qquad \alpha = \alpha_1 \pm \frac{R\sec\delta}{1-\lambda}.$$

На тај начин, ако ради скраћења означимо као и у формули (1.) чл. 112.

$$A = C\sin\zeta' \qquad \text{и} \qquad B = C\cos\zeta',$$

имаћемо

$$\alpha_1 = T + u + Aa + Bb + Cc \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

Са коефицијентом C треба, разуме се, срачунати и свођења на средњи кончић посматраних момената пролаза краја Месечева преко осталих кончића. Што се тиче растојања ζ и ζ', која улазе у величине A, B и C, то ће за њих потпуно довољни бити ови приближни изрази, који зависе од паралаксе Месечеве π, од геоцентричке ширине места посматрања φ' и од односа ρ растојања места до центра Земље према дужој полуоси њеној (теорни курс астрономије):

$$\zeta = \varphi' - \delta, \qquad \zeta' = \zeta + \rho\pi\sin\zeta' \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin\zeta}{\sin\zeta'} = 1 - \rho\sin\pi\cos\zeta'$$

Ипак се апсолутна одредба рехтасцензије α_1 по формули (5.) не може сматрати за сигурну, због тога што изискује тачно познавање поправке часовника u и инструменталних грешака a, b и c. С тога је неопходно потребно изабрати из ваљаног каталога какву звезду са рехтасцензијом α_* и деклинацијом δ_*, које се мало разликују од α_1 и δ па је посматрати заједно са Месецем, при чему ће се за њу добити:

$$\alpha_* = T_* + u + A_*a + B_*b + C_*c, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5^{\cdot})_*$$

где је

$$A_* = \sec\delta_*\sin(\varphi - \delta_*), \qquad B_* = \sec\delta_*\cos(\varphi - \delta_*), \qquad C_* = \sec\delta_*.$$

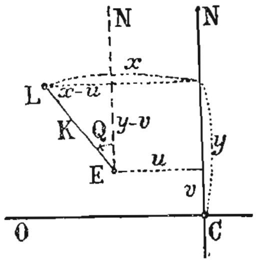
Тада ће из (5.) и $(5.)_*$ изаћи:

$$\alpha_1 = \alpha_* + (T - T_*) + (A - A_*)a + (B - B_*)\,b + (C - C_*)c \quad . \; . \; . \quad (6.)$$

те, због маленкости овде коефицијента код a, b и c, нетачност познавања ових неће произвести осетног утицаја на извод α_1. Још боље је посматрати какву звезду, која кулминира нешто раније од Месеца а другу нешто доцније. Такве се звезде дају у Nautical Almanac-у под називом *Месечевих* (Mon-culminating Stars).

136. Посматрања покривања звезда Месецем.

Ако се са какве тачке на Земљиној површини и из центра Земље уобразе паралелни правци на дату звезду (A, D) и кроз центар Месеца L (сл. 118.) повуче на те правце перпендикуларна равнина, која их пресеца у тачкама E и C, — затим, кад се уобразе у тој равнини две узајамно перпендикуларне координантне осе CN и CO тако, да прва буде упућена ка северном светском полу N, онда ће се праволиниске координате $(x,\ y)$ центра L и $(u,\ v)$ тачке E у односу према C (теорни курс астрономије) изразити овако:



Сл. 118.

$$x = \frac{\sin(\alpha - A).\cos\delta}{\sin\pi}, \qquad y = \frac{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)}{\sin\pi}, . (7.)$$

$$u = \rho\cos\varphi'\sin(S - A), \qquad v = \rho\sin\varphi'\cos D - \rho\cos\varphi'\sin D\cos(S - A); . (8.)$$

где S означава локално звездано време; α, δ и π — геоценричке координате центра Месечева, које томе времену одговарају, а φ' и ρ, као и раније, — геоцентричке координате данога места на Земљи. Тада ће се линеарно растојање $LE = K$ и угао $LEN = Q$ (који се рачуна у десну страну од правца EN, паралелног са CN) добити по формулама:

$$\left.\begin{aligned} K^2 &= (x - u)^2 + (y - v)^2, & tg\,Q &= \frac{x - u}{y - v} \\ K\sin Q &= x - u, & K\cos Q &= y - v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9.)$$

или пак

При изводу дужине места $L = L_0 + \triangle L$, по запаженом моменту S покривања или откривања дане звезде (A, D) на том месту, ми морамо сматрати (чл. 132.) за посматрану функцију U координата Месечевих α, δ и π баш ту величину K, која у моменту S треба да излази равна линеарном радиусу Месеца $k = 0.27264$, израженом у деловима екваториалног радиуса Земље. Кад се са приближном дужином L_0 за звездано време S нађе средње гринвичко време T_0 и кад се са координатама Месечевим α_0, δ_0 и π_0, које томе времену одговарају, срачунају, по формули (7.), величине x_0 и y_0, онда ћемо имати:

$$K^2_0 = (x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2 \quad \text{и} \quad tg\,Q_0 = \frac{x_0 - u}{y_0 - v} \quad \ldots \quad (9.)'$$

а по формулама (1.)′ и (1.) добићемо

$$\triangle K_0 = \mu\left[\left(\frac{\partial K}{\partial\alpha}\right)_0\triangle\alpha + \left(\frac{\partial K}{\partial\delta}\right)_0\triangle\delta\right], \qquad \triangle L = \frac{K_0 - k}{\triangle K_0}.$$

За срачунавање величине $\triangle K_0$, — која представља промену K_0 при промени дужине L_0 за 1^h, — због маленкости π, $\alpha - A$ и $\delta - D$, могу се узети без осетне погрешке ови приближни изрази:

$$x = \frac{\alpha - A}{\pi}\cos\delta, \qquad y = \frac{\delta - D}{\pi}, \quad \ldots\ldots \quad (7.)'$$

из којих се добија

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{x_0 - u}{K_0} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_0 = sin\, Q_0 \frac{cos\, \delta_0}{\pi_0}$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \delta}\right)_0 = \frac{y_0 - v}{K_0} \left(\frac{\partial y}{\partial \delta}\right)_0 = cos\, Q_0 \frac{1}{\pi_0}$$

Ако се стави још

$$\mu \triangle \alpha\, cos\, \delta_0 = \sigma\, sin\, \Sigma \qquad \text{и} \qquad \mu \triangle \delta = \sigma\, cos\, \Sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.)$$

где ће σ означавати угловно померање Месеца по његовој орбити за 1 час звезд. времена (око 33′ или 2000″) а Σ — угао између правца тог померања и круга деклинације Месечеве, рачунајући га од правца к полу N у исту страну, као и угао Q, — онда ће изаћи

$$\triangle K_0 = \frac{\sigma}{\pi_0} (sin\, Q_0\, sin\, \Sigma + cos\, Q_0\, cos\, \Sigma) = \frac{\sigma}{\pi_0} (cos\, \Sigma - Q_0);$$

па је због тога

$$\triangle L = \frac{\pi_0 (K_0 - k)}{\sigma\, cos\, (\Sigma - Q_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11.)$$

Одатле се види, да се тражена дужина $L = L_0 + \triangle L$ најбоље одређује из покривања или откривања централног ($Q_0 = \Sigma$), када центар L привиднога Месечева диска пролази кроз звезду E коју покрива (сл. 118.). Нетачност δL извода дужине, која је изражена формулом (3.), произлази овде управо не толико од грешке δS посматранога момента S, који се цени до делова секунде при покривању или откривању звезде неосветљеним крајем Месечевим, већ знатно више од неправилности δk самога диска Месечева, који досеже на гдекојим местима његовим до $\pm \frac{1}{600}$ дела величине k, тако да чак и у случају централнога покривања може изаћи

$$\delta L^s = -3600 \frac{\pi k}{\sigma} \cdot \frac{\delta k}{k} = \pm 3600 . \frac{900''}{2000''} \cdot \frac{1}{600} = \pm 2^s\!.7.$$

Што се тиче поправке ∂L, којој ће подлежати срачуната дужина L услед нетачности табличних координата Месеца α, δ, π и средње величине његовога линеарног радиуса k, то ће у том случају бити

$$\partial K_0 = \left(\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right)_0 \partial \alpha + \left(\frac{\partial K}{\partial \delta}\right)_0 \partial \delta + \left(\frac{\partial K}{\partial \pi}\right)_0 \partial \pi,$$

где је

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{x_0 - u}{K_0} \left(\frac{\partial x}{\partial \pi}\right)_0 + \frac{y_0 - v}{K_0} \left(\frac{\partial y}{\partial \pi}\right)_0 = -\, sin\, Q_0 \frac{x_0}{\pi_0} - cos\, Q_0 \frac{y_0}{\pi_0};$$

па због тога по формули (2.) чл. 132. излази:

$$\partial L = \frac{\partial K_0 - \partial k}{\triangle K_0} = \frac{\partial \alpha\, sos\, \delta_0\, sin\, Q_0 + \partial \delta\, cos\, Q_0 - \partial \pi\, (x_0\, sin\, Q_0 + y_0\, cos\, Q_0) - \pi_0\, \partial k}{\sigma\, cos\, (\Sigma - Q_0)} \quad (12.)$$

На тај начин, кад се ставе овде ьеличине $\partial \alpha$ и $\partial \delta$, које се одређују из непрекидних посматрања Месеца на Гринвичкој Опсерваторији, онда се из посматрања покривања и откривања многих звезда на каквом месту може добити велики број једначина за одређивање, једновремено са ∂L, још и поправака средње табличне Месечеве паралаксе π и линеарног његовог радиуса, за који се узима напред речени број $k = 0.27264$.

Пример. — 28. марта 1879. г. посматрано је било у Пулкову ($\varphi' = 59^\circ 36' 16.''9$, $lg\, \rho = 9.998922$, $L_0 = 2^h 1^m 19^s.0$) у $6^h 20^m 31^s.44$ и у $7^h 32^m 36^s.52$ локалнога звезд. времена покривање и откривање звезде 28 *Tauri* ($A = 3^h 42^m 0^s.19$, $D = + 23^\circ 46' 3.''3$). При изложеном даље изводу поправке дужине $\triangle L$ из тих посматрања, нису показана срачунавања величина x_0, y_0, u и v, већ су наведена само неопходна дата за њихово срачунавање.

	Покривање	Откривање
Гр. зв. време $=$	$4^h 19^m 12^s.44$	$5^h 31^m 17^s.52$
у подне $S_0 =$	0 18 10.90	—
Гр. ср. вр. $T_0 =$	4 0 22.05	5 12 15.32
$\alpha_0 =$	3 42 13.23	3 44 46.83
$\delta_0 =$	$24^\circ 17' 42.''5$	$24^\circ 24' 15.''1$
$\pi_0 =$	54 14.1	54 14.9
$x_0 =$	$+ 0.054788$	$+ 0.699344$
$y_0 =$	$+ 0.583667$	$+ 0.705693$
$S - A =$	$+ 2^h 38^m 31^s.25$	$+ 3^h 50^m 36^s.33$
$u =$	$+ 0.321918$	$+ 0.426383$
$v =$	$+ 0.630780$	$+ 0.678603$
$x_0 - u =$	$- 0.267130$	$+ 0.272961$
$y_0 - v =$	$- 0.047113$	$+ 0.027090$
$lg\,(x_0 - u) =$	0.426723_n	9.436101
$lg\, sin\, Q_0 =$	9.993348_n	9.997872
$lg\,(y_0 - v) =$	8.673171_n	8.432809
$lg\, cos\, Q_0 =$	9.239767_n	8.994579
$lg\, tg\, Q_0 =$	0.753582	1.003292
$lg\, K_0 =$	9.433374	9.438220
$K_0 =$	**0.27125**	**0.27430**
$Q_0 =$	$-$ **100°0′8″**	$+$ **84°19′56″**

	Покривањ.	Откривањ.
Срачунавање σ и Σ по форм (10.)		
$\Delta\alpha =$	1920″	1925″
$\Delta\delta =$	$+$ 332	$+$ 323
$lg\, \Delta\alpha =$	3.2833	3.2844
$lg\, cos\, \delta =$	9.9597	9.9594
$lg\, \Delta\delta =$	2.5211	2.5092
$lg\, tg\, \Sigma =$	0.7219	0.7342
$lg\, sin\, \Sigma =$	9.9923	9.9927
$lg\, \frac{\sigma}{\mu} =$	3.2508	3.2511
$lg\, \sigma =$	3.2496	3.2499
$\Sigma =$	**79°16′**	**79°33′**
Срачунавање ΔL по формули (15.)		
$K_0 - k =$	$- 0.00139$	$+ 0.00166$
$\Sigma - Q_0 =$	$+ 179^\circ 16'$	$- \quad 4^\circ 47'$
$lg\,(K_0 - k) =$	7.1430_n	7.2201
$lg\, \frac{\pi}{\sigma} =$	0.2628	0.2626
$lg\, cos\, (\Sigma - Q_0) =$	0.0000_n	9.9985
$lg\, \Delta L^h =$	7.4058	7.4842
$lg\, \Delta L =$	0.9621	1.0405
$\Delta L^s =$	$+$ **9ˢ.2**	$+$ **11ˢ.0**
у средњем	$+$ **10ˢ.1**	
$L =$	**2ʰ1ᵐ29ˢ.1**	

Пошто је у овом примеру за срачунавање примљена дужина места $L = 2^h 1^m 19^s.0$ узета потпуно тачно, то нађена за њу поправка $\triangle L = + 10^s.1$ показује само погрешку табличних координата Месеца. За поправке њихове $\partial\alpha$, $\partial\delta$, $\partial\pi$ и за поправку ∂k_4 у четвртој децимали броја k добивају се овде по формули (12.) овакве две једначине:

$$+ \;\; 9.2 = + 1.82\, \partial\alpha'' + 0.35\, \partial\delta'' - 0.31\, \partial\pi'' + 0.66\, \partial k_4$$

$$+ 11.0 = + 1.84\, \partial\alpha'' + 0.20\, \partial\delta'' - 1.56\, \partial\pi'' - 0.66\, \partial k_4 .$$

Дужина се места на сличан начин, као и из покривања звезда, може одредити из посматрања ређих појава, као што су, покривања планета Месецем и помрачење Сунца. Формуле за њихово срачунавање (изведене у теор. делу курса астрономије) излазе нешто мало сложеније од формула за покривање звезда једино стога, што се мора узимати у обзир угловни радиус, паралакса и релативно мала промена у току времена координата A и D планета или Сунца; сам пак извод тражене дужине L остаје и у том случају исти.

137. Посматрања азимута и зенитних растојања Месеца.

Нека је на некој тачци Земљине површине измерен у моменту S локалнога звезд. времена привидни азимут A'_1 или пак привидно зенитно растојање z'_1 осветљенога краја Месечевог. Кад се узме у рачун утицај Месечеве паралаксе и привидни угловни радиус Месечева диска, а у другом случају сем тога још и утицај рефракције, онда се по томе A'_1 и z'_1 могу добити (као што ћемо видети у чл. чл. 138. и 139.) истинити геоцентрички: и азимут A и зенитно растојање z центра Месечева. Ако пак, с друге стране, са приближном дужином места L_0 од Гринвича, нађемо из *Nautical Almanac*-а за момент S координате Месечеве α_0 и δ_0 па помоћу њих срачунамо за дану ширину места φ геоцентрички азимут A_0 центра Месечева или пак зенитно његово растојање z_0 онда ће разлике $(A_0 - A)$ и $(z_0 - z)$ указати на нетачност примљене дужине L_0, и поправка њена $\triangle L$ одредиће се на основу формуле (1.) чл. 132. овако:

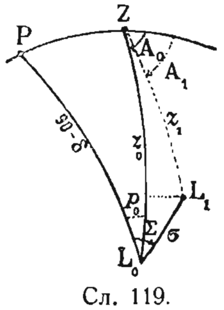
$$\triangle L_a = \frac{A_0 - A}{\triangle A_0} \quad \text{или пак} \quad \triangle L_z = \frac{z_0 - z}{\triangle z_0},$$

где $\triangle A_0$ и $\triangle z_0$ означавају промене срачунатих величина A_0 и z_0 при промени дужине L_0 за један час или, што је једно и исто, при промени $\mu\triangle\alpha$ и $\mu\triangle\delta$ координата α_0 и δ_0 у току једног часа звезданог времена.

Нека $L_0L_1 = \sigma$ (сл. 119.) представља премештај Месеца L_0 по његовој орбити у току 1 часа звезд. времена, под углом $\sphericalangle PL_0L_1 = \Sigma$ према деклинационом кругу PL_0, при чему ће се те величине σ и Σ одредити, као и у прош. члану, из једначина (10.). Кад уобразимо истинити зенит Z данога места и означимо у троуглу PZL_0 паралактички угао $\sphericalangle PL_0Z$ са p_0, онда ћемо добити елементарни троугао ZL_0L_1 са врло малом страном $L_0L_1 = \sigma$ и углом $\sphericalangle ZL_0L_1 = \Sigma - p_0$ па ћемо из њега наћи да је

$$A_1 - A_0 = \triangle A_0 = -\frac{\sigma \sin(\Sigma - p_0)}{\sin z_0},$$

$$z_1 - z_0 = \triangle z_0 = -\sigma \cos(\Sigma - p_0)$$



Сл. 119.

те ће стога напред речени изрази за $\triangle L_a$ и за $\triangle L_z$ примити овај облик:

$$\triangle L_a = -\frac{A_0 - A}{\sigma \sin(\Sigma - p_0)} \sin z_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13.)_a$$

$$\triangle L_z = -\frac{z_0 - z}{\sigma \cos(\Sigma - p_0)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13.)_z$$

при чему угле A, A_0 и p_0 треба рачунати за негативне, кад се Месец посматра на истоку од меридијана.

То показује, да ће се дужина одредити по азимуту Месечевом најбоље онда, када је $\Sigma - p_0 = 90^\circ$, тј. када се кретање Месеца по његовој орбити врши паралелно са хоризонтом; дужина пак по зенитном растојању Месечеву одредиће се најтачније онда, када је то његово кретање перпендикуларно на хоризонт, или пак нагнуто према њему (у ширинама већим од 29°) под што већим углом. Као добар и очигледни знак тога, шта је наиме погодније посматрати у даном моменту за одређивање дужине места, тј. да ли зенитно растојање Месеца или његов азимут, служи већи или мањи нагиб линије рогова Месечевих, јер се та линија, при довољном удаљењу месеца од Сунца, може сматрати да је скоро перпендикуларна на орбиту Месечеву.

138. Срачунавање геоцентричког азимута Месеца.

Привидни се азимут A'_1 осветљенога круга Месечева диска одређује тачније и најпростије помоћу пасажног инструмента, постављеног ради тога у вертикалу довољно погодном за посматрање Месеца (чл. 137.), при чему заједно с њиме треба посматрати и пролаз кроз тај исти вертикал какве њему блиске звезде (α_*, δ_*). Свођења τ посматраних по хронометру момената на побочним кончићима (f) на средњи кончић врши се у том случају за звезду по обичној формули

$$\tau = f \sec \delta_* \sec p_*,$$

а за крај Месечев, — према изложеноме у чл. 135., — по формули

$$\tau = f \frac{\sin z}{\sin z'} \cdot \frac{\sec \delta \sec p}{1 - \lambda};$$

при чему се величине, које овде улазе, наиме паралактички угли p_* и p и зенитна растојања Месеца, и то, геоцентричко z и привидно $z' = z + \rho \pi \sin z'$, — која одговарају средњим моментима посматрања, — лако срачунавају, јер их је овде потребно знати само приближно.

Нека S_* и S буду на тај начин добивена (са даном поправком хронометра u) звездана времена пролаза звезде и краја Месечевог преко средњег кончића; нека је затим c колимациона грешка пасажног инструмента, која се сматра за познату, а b нагиб његове хоризонталне осе, који се одређује либелом. Кад се срачуна са даном ширином места φ азимут звезде A_* за момент S_* по истој формули (3.) чл. 120., као и геоцентрички азимут A_0 центра Месечева за момент S, онда ћемо, по привидним зенитним растојањима z_* и z' тих небесних тела, — на основу (6.) и (7.) чл. чл. 68. и 69., — добити за азимут инструмента два идентична израза:

$$A_* + \frac{c}{\sin z_*} + \frac{b}{tg\, z_*} = A'_1 + \frac{c}{\sin z'} + \frac{b}{tg\, z'},$$

одакле је

$$A_* - A'_1 = c\left(\frac{1}{\sin z'} - \frac{1}{\sin z_*}\right) + b\left(\frac{1}{tg\, z'} - \frac{1}{tg\, z_*}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (14.)$$

Затим, са табличним угловним радиусом Месеца R и паралаксом његовом π имаћемо за привидни и геоцентрички азимут A′ и A његова центра (као што је познато из теор. дела курса астрономије) ове изразе:

$$A'_1 - A' = \pm \frac{R}{sin\, z}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14.)'$$

$$A' - A = \rho\,(\varphi - \varphi')\, sin\, \pi \frac{sin\, A'}{sin\, z}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14.)''$$

па ће се стога разлика $(A_0 - A)$, која улази у $(13.)_a$ за поправку $\triangle L_a$ приближно примљене дужине L_0, добити сабирањем (14.), (14.)′ и (14.)″ у оваквом облику

$$A_0 - A = (A_0 - A_*) + (A_* - A'_1) + (A'_1 - A') + (A' - A) \quad . \; . \quad (15.)$$

Због близине звезде Месецу, разлика $(A_0 - A_*)$, која овде улази, неће скоро ни зависити од извесне нетачности поправке хронометра *u* и ширине места φ, јер ће та нетачност утицати на срачунате азимуте A_0 и A_* приближно подједнако; из истог узрока ни инструменталне грешке *c* и *b* неће осетно утицати на разлику $(A_* - A'_1)$; због тога ће на напред изложени начин изведена величина $(A_0 - A)$ бити подвргнута скоро и једино случајним грешкама посматрања. Утицај пак оваквих грешака може се ослабити на тај начин, што ће се поновити посматрања пролаза Месеца и исте звезде, изменивши унеколико азимут пасажног инструмента, и, преврнувши дурбин његов у лежиштима ради потпунијег искључења утицаја грешке *c*. У томе, што се на тај начин једно за другим може одредити неколико пута тражена дужина, и састоји се преимућство посматрања азимута Месечевог над посматрањем његове кулминације.

139. Срачунавање геоцентричког зенитног растојања Месеца.

Ако је ради одређивања дужине места измерено у моменту S звезданог времена зенитно растојање z'_1 доњега или горњег краја Месечева диска па је са одговарајућом табличном рефракцијом r_1 нађено истинито $(z'_1 + r_1)$, онда се из овога, помоћу даних у Nautical Almanac-у величина радиуса Месечевог R и његове паралаксе π, треба да добије геоцентричко зенитно растојање z његовог центра, које улази у израз $(13.)_z$ за поправку $\triangle L_z$ приближно примљене дужине места L_0.

Ради тога треба по формулама паралаксе (познатим из теор. дела курса астрономије) срачунати спочетка привидни радиус Месеца R′ по приближном изразу

$$R'_0 = R + R\,\rho\, sin\, \pi\, cos\,(z'_1 + r_1 \pm R); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16.)$$

кад се пак помоћу њега добије привидно зенитно растојање центра Месечева

$$z' = z'_1 + r_1 \pm R'_0,$$

онда треба наћи разлику $[z' - z]$ и R′ по тачним формулама за њих:

$$\left.\begin{aligned} sin\,[z' - z] &= \rho\, sin\, \pi\, sin\,(z' - \gamma) \\ R' &= R\,\frac{sin\,(z' - \gamma)}{sin\,(z - \gamma)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17.)$$

при чему за срачунавање мале величине $\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A$ може да послужи приближни азимут Месечев A из прочитања хоризонталног круга инструмента за време његова посматрања. На тај ће начин изаћи, да је

$$z = z' - [z' - z] = z'_1 + r_1 \pm R' - [z' - z] \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18.)$$

Али је овакво одређивање зенитног растојања z несигурно због систематских инструменталних грашака и због нетачности таблица рефрекције. Стога је и овде неопходно потребно посматрати заједно са Месецем још и зенитно растојање z'_* какве, бліске њему, звезде (α_*, δ_*), да би се на томе z'_* открио утицај тих грешака. Ако се онда срачуна за моменат S_* посматрања те звезде истинито њено зенитно растојање z_* по формули

$$\cos z_* = \sin \varphi \sin \delta_* + \cos \varphi \cos \delta_* \cos (S_* - \alpha_*) \; . \; . \; . \; . \quad (19.)$$

па се оно сравни са измереним z'_* а поправљеним за одговарајућу рефракцију r_*, онда ће добивена разлика

$$z_* - (z'_* + r_*)$$

показати, колико је нетачно било измерено зенитно растојање z'_* па према томе и z'_1, и, коју треба овоме z'_1 додати ради његове исправке.

На тај ће начин уместо (18.) изаћи

$$z = z_* - z_*' - r_* + z'_1 + r_1 \pm R' - [z' - z] \; . \; . \; . \; . \quad (18.)'$$

а величина $z - z_0$, која улази у израз $(13.)_z$, добиће се у облику

$$z - z_0 = (z_* - z_0) + (z'_1 - z'_*) + (r_1 - r_*) \pm R' - [z' - z] \; . \; . \quad (20.)$$

Види се дакле, да ће она бити ослобођена не само од инструменталних грешака, — које подједнако утичу и на z'_1 и на z'_*, — и од нетачности таблица рефракције, — скраћујући се у разлици $(r_1 - r_*)$, — већ и од извесне нетачности поправке хронометра u и ширине места φ, помоћу којих је срачунато по формули (19.) зенитно растојање звезде z_*; јер ће та нетачност подједнако утицати и на геоцентричко зенитно растојање Месеца z_0, које треба да се срачуна по сличној формули

$$\cos z_0 = \sin \varphi \sin \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 \cos (S - \alpha_0) \; . \; . \; . \; . \quad (19.)'$$

Још простије је, посматрати зенит-телескопом или каквим другим инструментом прелаз преко неколико хоризонт. кончића осветљеног краја Месечевог и какве њему бліске звезде (α_*, δ_*) строго при једној и истој висини дурбина, као и при одређивању времена по одговарајућим висинама звезда (чл. 97.). Онда ће се, — са неопходним поправкама за стање либеле дурбинове, — добити средњи моменти пролаза преко свију кончића, S за Месец и S_* за звезду а помоћу величине z_*, срачунате по формули (19.) за моменат S_*, изаћи ће тачно

$$z'_1 + r_1 = z_*, \qquad z'_1 - z'_* = 0, \qquad r_1 - r_* = 0;$$

због тога је

$$z - z_0 = (z_* - z_0) \pm R' - [z' - z] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)'$$

Пример. — 20. новембра 1875. г. посматрани су у Пулкову ($\varphi = 59°46'21''5$, $L = 2^h1^m19^s.0$, $\varphi - \varphi' = 10'1''.8$, $lg\, \rho = 9.998922$) Репсолдовим вертик. кругом прелази преко 6 хориз. кончића и то: доњега краја Месечева (на истоку) и, одмах затим, њему довољно блиске звезде β *Leonis* ($\alpha_* = 11^h42^m43^s.08$, $\delta_* = +15°15'57''.8$); при чему су за неколико стављања дурбина по висини (I, II и III) добивени даље показани сред. моменти пролаза S и S_* локалнога звезд. времена. Тачна срачунавања зенитних растојања z_0 и z_* за те моменте по формулама (19.)′ и (19.), као и приближна срачунавања паралактичких углова p_0, — овде су изостављена.

	I	II	III
Доњи крај $A =$	$-74°30'$	$-72°20'$	$-70°30'$
Месеца $S =$	$6^h24^m27^s.43$	$6^h34^m\ 2^s.86$	$6^h42^m\ 8^s.28$
β *Leonis* $S_* =$	29 28.97	38 9.96	45 25.42
у ср. грин. подне $S_0 =$		8 3 37.35	
гр. зв. време =	4 23 8.43	4 32 43.86	4 40 49.28
S_0 — свођење =	8 1 35.01	8 1 33.44	8 1 32.11
гр. сред. време $T_0 =$	12 24 43.4	12 34 17.3	12 42 21.4
$\alpha_0 =$	10 50 54.85	10 51 13.36	10 51 29.31
$\delta_0 =$	$+\ 9°51'23''.3$	$+\ 9°49'\ 2''.8$	$+\ 9°47'\ 4''.3$
$z_0 =$	69 49 54.1	68 44 47.2	67 50 31.4
$p_0 =$	$-29\ 30$	$-29\ 8$	$-28\ 47$
$z'_1 + r_1 = z_* =$	70 58 44.3	69 53 16.0	68 58 39.7
$lg\,cos\,A =$	9.4269	9.4821	9.5235
$lg\,(\varphi - \varphi')\,cos\,A =$	2.2064	2.2616	2.3030
$(\varphi - \varphi')\,cos\,A = \gamma =$	$2'41''$	$3'\ 3''$	$3'21''$
$z' =$	70°43 10	60°37 41	68°43 5
$z' - \gamma =$	70 40 29	69 34 38	68 39 44
$(z - \gamma) =$	*69 47 4*	*68 41 36*	*67 47 1*
$lg\,sin\,(z' - \gamma) =$	9.97481	9.97181	9.96916
$lg\,sin\,(z - \gamma) =$	9.97239	9.96925	9.96650
$lg\,R' =$	2.97058	2.97072	2.97082
$lg\,[z' - z] =$	8.19135	8.18835	8.18570
по фор. (17.) $[z' - z] =$	$53'24''.7$	$53'\ 2''.5$	$52'43''.3$
$R' =$	15 34.5	15 34.8	15 35.0
$z =$	69°49 45.1	68°44 38.7	67°50 21.4
$z - z_0 =$	$-\ 9.0$	$-\ 8.5$	$-\ 10.0$
$\Sigma - p_0 =$	146°28′	146°6′	145°45′
$lg\,(z - z_0) =$	0.9542_n	0.9294_n	1.0000_n
$lg\,\sigma\,cos\,(\Sigma - p_0) =$	3.2088_n	3.2070_n	3.2052_n
$lg\,\triangle L^h =$	7.7454	7.7224	7.7948
$\triangle L^s =$	$+\mathbf{20.0}$	$+\mathbf{19.0}$	$+\mathbf{22.4}$

по форм. $(13)_z$

у средњем $\triangle L^s = +\mathbf{20.5}$

$L = \mathbf{2^h1^m39^s.5}$

$lg\,(\varphi - \varphi') = 2.7795$

за $T_0 = 12^h34^m.0$

$\pi = 56'44''.6$

$R = 15\ 29.3$

$lg\,\rho\,sin\,\pi = 8.21654$

$lg\,R = 2.96816$

$lg\,cos\,(z_* - R) = 9.540$

$lg\,(R'_0 - R) = 0.725$

$R'_0 - R = 5''.3$

по форм. (16) $R'_0 = 15'34''.6$

Срачунавање σ и Σ
по форм. (10.)

$\triangle\alpha'' = 1760''$

$\triangle\delta = -\ 882$

$lg\,\triangle\alpha'' = 3.2455_n$

$lg\,cos\,\delta_0 = 9.9936$

$lg\,\triangle\delta = \underline{2.9455_n}$

$lg\,tg\,\Sigma = 0.2936_n$

$lg\,sin\,\Sigma = 9.9500$

$lg\,\frac{\sigma}{\mu} = 3.2891$

$lg\,\sigma = 3.2879$

$\Sigma = 116°58'$

140. Стална ефемерида Сунца.

У таблици која следује дата је привидна ректасцензија Сунца, привидна деклинација његова, једначина времена, логаритам Сунчевог радиус-вектора и звездано време у средњем подневу. Таблица је намењена за сталну употребу.

Сви се подаци у њој односе на средње гринвичко подне. Просте и преступне године имају посебне ступце датума у сваком месецу.

Прва од додатих на крају таблица даје Сунчев радиус с тачношћу до $1''$ и екватеријалну хоризонталну паралаксу до $0''.1$ кроз сваких 10 дана. За средњи привидни радиус Сунчев узета је величина $15'59''.63$ а за средњу хоризонталну паралаксу $8''.80$.

Друга пак крајња таблица служи за увођење поправке за почетак године у току од 1900. — 1950. године. Та се поправка даје у десетим деловима дана и треба да се дода даноме датуму пре него што се с њиме уђе у главну таблицу. Преступне су године означене звездицом.

Ефемерида је израђена за нагиб еклиптике $23^\circ27'.0$.

За период од 1900.—1950. године, усљед равномерне промене тог нагиба, може се накупити нетачност у ректасцензији до $0^s.3$ а у деклинацији до $0'.3$. Нутација пак и планетне пертурбације уносе нове грешке у ефемериду до 3^s у ректасцензијама и до $0'.2$ у деклинацијама.

На тај начин координате се Сунца по овој таблици могу добити с resp. тачношћу до 3^s и $0'.5$ а радиус-вектор с тачношћу до 5 јединица последње децимале. Та је тачност довољна за многе приближне, практичке циљеве из астрономије.

Пример. Треба да се нађу координате Сунца (α, δ), једначина времена (ζ) и рудиус-вектор (R) за 1904. год. 23. фебруара у $4^h22^m4^s$ сред. гринв. времена и звездано време (Θ) у сред. гринв. подне тога дана.

Имамо: 1904. г., фебруара 23.182
$k = + \ 0.391$
фебруара 23.573

Простим интерполовањем за febр. 23·573 добијамо: $\alpha = 22^h22^m14^s$; $\delta = - 10^\circ10'.5$; $\zeta = + 13^m39^s$; $lg\,\mathrm{R} = 9.99544$.

Да бисмо добили Θ, у таблицу улазимо са аргументом: фебруара $23.0 + 0.391 = 23.391$ и налазимо:

$$\Theta = 22^h7^m52^s.$$

Ради сравњења тачности, из тачних таблица Nautical Almanac-a за 1904. г. имамо те исте величине тачно:

$$\alpha = 22^h22^m15^s;\quad \delta = - 10^\circ10'.4;\quad \zeta = + 13^m41^s;$$

$$lg\,\mathrm{R} = 0.99545 \qquad \text{и} \qquad \Theta = 22^h7^m51^s.$$

Стална ефемерида Сунца.

Дан месеца		Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Јануар проста година	преступна година					
0.	1.	$18^h40^m20^s$	—23° 7′.6	+ 2^m58^s	9.99267	$18^h37^m22^s$
1.	2.	18 44 45	23 3.1	3 26	99267	18 41 18
2.	3.	18 49 10	22 58.1	3 55	99267	18 45 15
3.	4.	18 53 34	22 52.7	4 23	99267	18 49 12
4.	5.	18 57 58	22 46.9	4 50	99267	18 53 8
5.	6.	19 2 22	—22 40.6	+ 5 17	9.99268	18 57 5
6.	7.	19 6 45	22 33.8	5 44	99269	19 1 1
7.	8.	19 11 8	22 26.6	6 11	99271	19 4 58
8.	9.	19 15 31	22 18.9	6 37	99272	19 8 54
9.	10.	19 19 53	22 10.8	7 2	99274	19 12 51
10.	11.	19 24 14	—22 2.3	+ 7 27	9.99276	19 16 47
11.	12.	19 28 35	21 53.3	7 51	99278	19 20 44
12.	13.	19 32 56	21 43.9	8 15	99280	19 24 41
13.	14.	19 37 15	21 34.1	8 38	99282	19 28 37
14.	15.	19 41 35	21 23.9	9 1	99284	19 32 34
15.	16.	19 45 53	—21 13.3	+ 9 23	9.99287	19 36 30
16.	17.	19 50 11	21 2.2	9 44	99290	19 40 27
17.	18.	19 54 28	20 50.8	10 5	99293	19 44 23
18.	19.	19 58 44	20 38.9	10 24	99296	19 48 20
19.	20.	20 3 0	20 26.7	10 43	99299	19 52 16
20.	21.	20 7 15	—20 14.1	+11 2	9.99303	19 56 13
21.	22.	20 11 29	20 1.1	11 19	99307	20 0 10
22.	23.	20 15 42	19 47.7	11 36	99311	20 4 6
23.	24.	20 19 55	19 34.0	11 52	99315	20 8 3
24.	25.	20 24 7	19 19.9	12 7	99320	20 11 59
25.	26.	20 28 18	—19 5.4	+12 22	9.99324	20 15 56
26.	27.	20 32 28	18 50.6	12 35	99329	20 19 52
27.	28.	20 36 37	18 35.5	12 48	99335	20 23 49
28.	29.	20 40 46	18 20.0	13 0	99340	20 27 45
29.	30.	20 44 53	18 4.2	13 11	99346	20 31 42
30.	31.	20 49 0	—17 48.1	+13 22	9.99352	20 35 39
31.	32.	20 53 6	17.31.6	13 31	99358	20 39 35

Дан месеца		Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R	Звездано време
Фебруар проста година	преступна година					
0.	1.	$20^h53^m\ 6^s$	—17°31′6	$+13^m31^s$	9.99358	$20^h39^m35^s$
1.	2.	20 57 12	17 14.8	13 40	99365	20 43 32
2.	3.	21 1 16	16 57.8	13 48	99372	20 47 28
3.	4.	21 5 20	16 40.4	13 55	99379	20 51 25
4.	5.	21 9 23	16 22.7	14 1	99386	20 55 21
5.	6.	21 13 25	—16 4.8	+14 7	9.99393	20 59 18
6.	7.	21 17 26	15 46.6	14 12	99401	21 3 14
7.	8.	21 21 27	15 28.1	14 16	99408	21 7 11
8.	9.	21 25 26	15 9.3	14 19	99416	21 11 8
9.	10.	21 29 25	14 50.3	14 21	99424	21 15 4
10.	11.	21 33 24	— 14 31.0	+14 23	9.99432	21 19 1
11.	12.	21 37 21	14 11.5	14 24	99440	21 22 57
12.	13.	21 41 18	13 51.8	14 24	99449	21 26 54
13.	14.	21 45 13	13 31.8	14 23	99457	21 30 50
14.	15.	21 49 8	13 11.6	14 22	99465	21 34 47
15.	16.	21 53 3	—12 51.2	+14 19	9.99474	21 38 43
16.	17.	21 56 56	12 30.6	14 16	99483	21 42 40
17.	18.	22 0 49	12 9.8	14 13	99492	21 46 37
18.	19.	22 4 41	11 48.8	14 8	99500	21 50 33
19.	20.	22 8 33	11 27.6	14 3	99510	21 54 30
20.	21.	22 12 23	—11 6.3	+13 57	9.99519	21 58 26
21.	22.	22 16 13	10 44.7	13 51	99528	22 2 23
22.	23.	22 20 3	10 23.0	13 44	99538	22 6 19
23.	24.	22 23 51	10 1.2	13 36	99548	22 10 16
24.	25.	22 27 39	9 39.2	13 27	99558	22 14 12
25.	26.	22 31 27	— 9 17.0	+13 18	9.99568	22 18 9
26.	27.	22 35 14	8 54.7	13 8	99578	22 22 6
27.	28.	22 39 0	8 32.3	12 58	99589	22 26 2
28.	29.	22 42 46	8 9.8	12 47	99599	22 29 59

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R	Звездано време
Март					
1.	$22^h46^m31^s$	—7°47′.1	$+12^m36^s$	9.99610	$22^h33^m55^s$
2.	22 50 16	7 24.3	12 24	99621	22 37 52
3.	22 54 0	7 1.4	12 12	99632	22 41 48
4.	22 57 44	6 38.4	11 59	99644	22 45 45
5.	23 1 27	—6 15.3	+11 46	99655	22 49 41
6.	23 5 10	5 52.1	11 32	9.99667	22 53 38
7.	23 8 53	5 28.9	11 18	99678	22 57 35
8.	23 12 35	5 5.6	11 4	99690	23 1 31
9.	23 16 16	4 42.2	10 49	99702	23 5 28
10.	23 19 58	—4 18.7	+10 34	99713	23 9 24
11.	23 23 39	3 55.2	10 18	9.99725	23 13 21
12.	23 27 19	3 31.6	10 2	99737	23 17 17
13.	23 31 0	3 8.0	9 46	99749	23 21 14
14.	23 34 40	2 44.4	9 30	99760	23 25 10
15.	23 38 20	— 2 20.7	+ 9 13	99772	23 29 7
16.	23 41 59	1 57.0	8 56	9.99784	23 33 4
17.	23 45 39	1 33.3	8 39	99796	23 37 0
18.	23 49 18	1 9.6	8 21	99808	23 40 57
19.	23 52 57	0 45.9	8 4	99820	23 44 53
20.	23 56 36	—0 22.2	+ 7 46	99831	23 48 50
21.	0 0 14	+0 1.5	7 28	9.99843	23 52 46
22.	0 3 53	0 25.2	7 10	99856	23 56 43
23.	0 7 31	0 48.9	6 52	99868	0 0 39
24.	0 11 9	1 12.5	6 33	99880	0 4 36
25.	0 14 48	+1 36.1	+ 6 15	99892	0 8 32
26.	0 18 26	1 59.7	5 57	9.99904	0 12 29
27.	0 22 4	2 23.2	5 38	99917	0 16 26
28.	0 25 42	2 46.7	5 20	99929	0 20 22
29.	0 29 20	3 10.1	5 1	99942	0 24 19
30.	0 32 58	+3 33.5	+ 4 43	99954	0 28 15
31.	0 36 36	3 56.8	4 25	9.99967	0 32 12

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R	Звездано време
Април					
1.	$0^h40^m15^s$	+ 4°20′0	$+4^m\ 6^s$	9.99980	$0^h36^m\ 8^s$
2.	0 43 53	4 43.4	3 48	9.99992	0 40 5
3.	0 47 32	5 6.2	3 30	9.00005	0 44 1
4.	0 51 10	5 29.2	3 12	00018	0 47 58
5.	0 54 49	+ 5 52.1	+2 55	00031	0 51 55
6.	0 58 28	6 14.9	2 37	0.00043	0 55 51
7.	1 2 8	6 37.5	2 20	00056	0 59 48
8.	1 5 47	7 0.1	2 3	00069	1 3 44
9.	1 9 27	7 22.5	1 46	0.00081	1 7 41
10.	1 13 7	+ 7 44.9	+1 30	00094	1 11 37
11.	1 16 47	8 7.1	1 13	0.00106	1 15 34
12.	1 20 28	8 29.1	0 58	00118	1 19 30
13.	1 24 9	8 51.0	0 42	00130	1 23 27
14.	1 27 50	9 12.8	0 26	00142	1 27 24
15.	1 31 31	+ 9 34.4	+0 11	00154	1 31 20
16.	1 35 13	9 55.8	—0 3	0.00166	1 35 17
17.	1 38 55	10 17.1	0 18	00178	1 39 13
18.	1 42 38	10 38.2	0 32	00189	1 43 10
19.	1 46 21	10 59.2	0 46	00201	1 47 6
20.	1 50 4	+11 19.9	—0 59	00213	1 51 3
21.	1 53 48	11 40.5	1 12	0.00224	1 54 59
22.	1 57 32	12 0.9	1 24	00236	1 58 56
23.	2 1 16	12 21.0	1 36	00247	2 2 53
24.	2 5 1	12 41.0	1 48	00258	2 6 49
25.	2 8 47	+13 0.8	—1 59	00270	2 10 46
26.	2 12 33	13 20.3	2 10	0.00281	2 14 42
27.	2 16 19	13 39.7	2 20	00293	2 18 39
28.	2 20 6	13 58.8	2 29	00304	2 22 35
29.	2 23 53	14 17.1	2 39	00315	2 26 32
30.	2 27 41	14 36.3	2 47	00326	2 30 28

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Maj					
1.	$2^h 31^m 30^s$	+14°54'.7	—$2^m 55^h$	0.00337	$2^h 34^m 25^s$
2.	2 35 19	15 12.9	3 3	00349	2 38 22
3.	2 39 8	15 30.8	3 10	00359	2 42 18
4.	2 42 58	15 48.4	3 16	00370	2 46 15
5.	2 46 49	+16 5.8	—3 22	00381	2 50 11
6.	2 50 40	16 23.0	3 27	0.00392	2 54 8
7.	2 54 32	16 39.8	3 32	00402	2 58 4
8.	2 58 25	16 56·4	3 36	00412	3 2 1
9.	3 2 18	17 12.7	3 40	00423	3 5 57
10.	3 6 12	+17 28.7	—3 42	00433	3 9 54
11.	3 10 6	17 44.5	3 45	0.00442	3 13 51
12.	3 14 0	17 59.9	3 47	00452	3 17 47
13.	3 17 56	18 15.0	3 48	00461	3 21 44
14.	3 21 52	18 29.8	3 48	0.00470	3 25 40
15.	3 25 48	+18 44.3	—3 49	00479	3 29 37
16.	3 29 45	18 58.5	3 48	0.00488	3 33 33
17.	3 33 43	19 12.4	3 47	00497	3 37 30
18.	3 37 41	19 25.9	3 46	00506	3 41 26
19.	3 41 40	19 39.1	3 43	00514	3 45 23
20.	3 45 39	+19 52.0	—3 41	00522	3 49 20
21.	3 49 38	20 4.5	3 38	0.00530	3 53 16
22.	3 53 39	20 16.7	3 34	00538	3 57 13
23.	3 57 39	20 28.5	3 30	00546	4 1 9
24.	4 1 41	20 40.1	3 25	00553	4 5 6
25.	4 5 42	+20 51.2	—3 20	00561	4 9 2
26.	4 9 45	21 2.0	3 14	0.00569	4 12 59
27.	4 13 48	21 12.4	3 8	00576	4 16 55
28.	4 17 51	21 22.5	3 1	00583	4 20 52
29.	4 21 55	21 32.2	2 54	00590	4 24 49
30.	4 25 59	+21 41.5	—2 46	00598	4 28 45
31.	4 30 3	21 50.4	2 38	0.00605	4 32 42

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Јуни					
1.	$4^s34^m\ 9^s$	$+21^\circ59'.0$	-2^m30^s	0.00611	$4^h36^m38^s$
2.	4 38 14	22 7.2	2 21	00618	4 40 35
3.	4 42 20	22 15.0	2 11	00624	4 44 31
4.	4 46 26	22 22.4	2 1	00631	4 48 28
5.	4 50 33	+22 29.4	—1 51	00637	4 52 24
6.	4 54 40	22 36.0	1 41	0.00642	4 56 21
7.	4 58 48	22 42.2	1 30	00648	5 0 18
8.	5 2 55	22 48.1	1 19	00653	5 4 14
9.	5 7 3	22 53.5	1 7	00658	5 8 11
10.	5 11 12	+22 58.5	—0 56	00663	5 12 7
11.	5 15 20	23 3.1	0 44	0.00668	5 16 4
12.	5 19 29	23 7.3	0 31	00672	5 20 0
13.	5 23 38	23 11.2	0 19	00676	5 23 57
14.	5 27 47	23 14.6	—0 7	00680	5 27 53
15.	5 31 56	+23 17.5	+0 6	00684	5 31 50
16.	5 36 5	23 20.1	0 19	0.00687	5 35 47
17.	5 40 15	23 22.3	0 32	00690	5 39 43
18.	5 44 24	23 24.0	0 45	00693	5 43 40
19.	5 48 34	23 25.4	0 58	00696	5 47 36
20.	5 52 43	+23 26.3	+1 11	00699	5 51 33
21.	5 56 53	23 26.8	1 24	0.00701	5 55 29
22.	6 1 2	23 26.9	1 37	00704	5 59 26
23.	6 5 12	23 26.6	1 49	00706	6 3 22
24.	6 9 21	23 25.9	2 2	00708	6 7 19
25.	6 13 31	+23 24.8	+2 15	00710	6 11 16
26.	6 17 40	23 23.2	2 28	0.00712	6 15 12
27.	6 21 49	23 21.3	2 40	00714	6 19 9
28.	6 25 58	23 18.9	2 53	00715	6 23 5
29.	6 30 7	23 16.1	3 5	00716	6 27 2
30.	6 34 15	23 13.0	3 17	00718	6 30 58

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Јули					
1.	$6^h38^m24^s$	+23° 9′.4	$+3^m29^s$	0.00719	$6^h34^m55^s$
2.	6 42 32	23 5.4	3 41	00719	6 38 51
3.	6 46 40	23 1·0	3 52	00720	6 42 48
4.	6 50 48	22 56.1	4 3	00720	6 46 45
5.	6 54 55	+22 50.9	+4 14	00720	6 50 41
6.	6 59 2	22 45.3	4 25	0.00720	6 54 38
7.	7 3 9	22 39.3	4 35	00720	6 58 34
8.	7 7 15	22 32.9	4 45	00719	7 2 31
9.	7 11 21	22 26.2	4 54	00718	7 6 27
10.	7 15 27	+22 19.0	+5 3	00717	7 10 24
11.	7 19 32	22 11.4	5 12	0.00715	7 14 21
12.	7 23 37	22 3.5	5 20	00714	7 18 17
13.	7 27 41	21 55.2	5 28	00712	7 22 14
14.	7 31 45	21 46.5	5 35	00710	7 26 10
15.	7 35 48	+21 37.4	+5 42	00707	7 30 7
16.	7 39 51	21 28.0	5 48	0.00704	7 34 3
17.	7 43 54	21 18.2	5 54	00702	7 38 0
18.	7 47 55	21 8.0	5 59	00699	7 41 56
19.	7 51 56	20 57.5	6 4	00695	7 45 53
20.	7 55 57	+20 46.7	+6 8	00692	7 49 50
21.	7 59 57	20 35.5	6 11	0.00689	7 53 46
22.	8 3 57	20 23.9	6 14	00685	7 57 43
23.	8 7 56	20 12.0	6 16	00681	8 1 39
24.	8 11 54	19 59.8	6 18	00677	8 5 36
25.	8 15 52	+19 47.2	+6 19	00673	8 9 32
26.	8 19 49	19 34.3	6 20	0.00669	8 13 29
27.	8 23 46	19 21.1	6 20	00665	8 17 25
28.	8 27 42	19 7.5	6 20	00660	8 21 22
29.	8 31 37	18 53.6	6 19	00656	8 25 19
30.	8 35 32	+18 39.4	+6 17	00651	8 29 15
31.	8 39 26	18 25.0	6 15	0.00646	8 33 12

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Август					
1.	8ʰ43ᵐ20	+18°10′.2	+6ᵐ12ˢ	0.00641	8ʰ37ᵐ 8ˢ
2.	8 47 13	17 55.1	6 8	00635	8 41 5
3.	8 51 6	17 39.7	6 4	00630	8 45 1
4.	8 54 58	17 24.0	6 0	00624	8 48 58
5.	8 58 49	+17 8.1	+5 54	00618	8 52 54
6.	9 2 40	16 51.8	5 49	0.00612	8 56 51
7.	9 6 30	16 35.3	5 42	00605	9 0 48
8.	9 10 19	16 18.5	5 35	00598	9 4 44
9.	9 14 8	16 1.5	5 28	00591	9 8 41
10.	9 17 57	+15 44.2	+5 19	00584	9 12 37
11.	9 21 44	15 26.7	5 11	0.00577	9 16 34
12.	9 25 32	15 8.9	5 1	00569	9 20 30
13.	9 29 18	14 50.9	4 51	00561	9 24 27
14.	9 33 4	14 32.6	4 41	00553	9 28 23
15.	9 36 50	+14 14.1	+4 30	00545	9 32 20
16.	9 40 35	13 55.4	4 18	0.00537	9 36 17
17.	9 44 19	13 36.4	4 6	00528	9 40 13
18.	9 48 3	13 17.3	3 53	00520	9 40 10
19.	9 51 46	12 57.9	3 40	00511	9 48 6
20.	9 55 29	+12 38.3	+3 26	00502	9 52 3
21.	9 59 12	12 18.6	3 12	0.00494	9 55 59
22.	10 2 53	11 58.6	2 58	00485	9 59 56
23.	10 6 35	11 38.4	2 42	00476	10 3 52
24.	10 10 16	11 18.1	2 27	00466	10 7 49
25.	10 13 56	+10 57.6	2 11	0.00457	10 11 46
26.	10 17 37	+10 36.9	+1 54	0.00448	10 15 42
27.	10 21 16	10 16.0	1 38	00439	10 19 39
28.	10 24 56	9 55.0	1 21	00429	10 23 35
29.	10 28 35	9 33.8	1 3	00420	10 27 32
30.	10 32 13	9 12.4	+0 45	00410	10 31 28
31.	10 35 52	8 50.9	0 27	0.00400	10 35 25

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Септембар					
1.	$10^h39^m30^s$	+8°29'.3	$+0^m\ 9^s$	0.00390	$10^h39^m21^s$
2.	10 43 8	8 7.5	—0 10	00380	10 43 18
3.	10 46 45	7 45.6	0 29	00369	10 47 14
4.	10 50 22	7 23.6	0 49	00359	10 51 11
5.	10 53 59	+7 1.4	—1 8	0.00348	10 55 8
6.	10 57 36	6 39.2	1 28	00337	10 59 4
7.	11 1 13	6 16.8	1 48	00326	11 3 1
8.	11 4 49	5 54.3	2 8	00315	11 6 57
9.	11 8 25	5 31.7	2 29	00304	11 10 54
10.	11 12 1	+5 9.1	—2 49	0.00292	11 14 50
11.	11 15 37	4 46.3	3 10	00281	11 18 47
12.	11 19 13	4 23.5	3 31	00269	11 22 43
13.	11 22 48	4 0.6	3 52	00257	11 26 40
14.	11 26 24	3 37.6	4 13	00246	11 30 37
15.	11 29 59	+3 14.5	—4 34	0.00234	11 34 33
16.	11 33 34	2 51.4	4 55	00222	11 38 30
17.	11 37 9	2 28.3	5 17	00210	11 42 26
18.	11 40 45	2 5.1	5 38	00198	11 46 23
19.	11 44 20	1 41.8	5 59	00186	11 50 19
20.	11 47 55	+1 18.6	—6 21	0.00174	11 54 16
21.	11 51 30	0 55.2	6 42	00162	11 58 12
22.	11 55 6	0 31.9	7 3	00150	12 2 9
23.	11 58 41	+0 8.5	7 24	00138	12 6 6
24.	12 2 17	—0 14·8	7 45	00126	12 10 2
25.	12 5 53	—0 38.2	—8 6	0.00114	12 13 59
26.	12 9 29	1 1.6	8 27	00102	12 17 55
27.	12 13 5	1 25.0	8 47	00090	12 21 52
28.	12 16 41	1 48.4	9 7	00078	12 25 48
29.	12 20 18	2 11.8	9 27	00065	12 29 45
30.	12 23 54	2 35.2	9 47	0.00053	12 33 41

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Октобра					
1.	$12^h27^m31^s$	— 2°58′.5	—10^m 7^s	0.00041	$12^h37^m38^s$
2.	12 31 9	3 21.8	10 26	00029	12 41 35
3.	12 34 47	3 45.1	10 45	00016	12 45 31
4.	12 38 25	4 8.3	11 3	0.00004	12 49 28
5.	12 42 3	— 4 31.5	—11 21	9.99991	12 53 24
6.	12 45 42	4 54.6	11 39	99979	12 57 21
7.	12 49 21	5 17.7	11 57	99966	13 1 17
8.	12 53 0	5 40.7	12 14	99954	13 5 14
9.	12 56 40	6 3.6	12 30	99941	13 9 10
10.	13 0 20	— 6 26.4	—12 47	9.99928	13 13 7
11.	13 4 1	6 49.2	13 2	99916	13 17 3
12.	13 7 42	7 11.8	13 18	99903	13 21 0
13.	13 11 24	7 34.4	13 33	99890	13 24 57
14.	13 15 6	7 56.9	13 47	99878	13 28 53
15.	13 18 49	— 8 19.2	—14 1	9.99865	13 32 50
16.	13 22 32	8 41.4	14 14	99852	13 36 46
17.	13 26 16	9 3.5	14 27	99840	13 40 43
18.	13 30 0	9 25.5	14 39	99827	13 44 39
19.	13 33 45	9 47.3	14 51	99815	13 48 36
20.	13 37 31	—10 9.0	—15 2	9.99803	13 52 32
21.	13 41 17	10 30.6	15 12	99791	13 56 29
22.	13 45 4	10 52.0	15 22	99779	14 0 26
23.	13 48 51	11 13.2	15 31	99767	14 4 22
24.	13 52 39	11 34.2	15 39	99756	14 8 19
25.	13 56 28	—11 55.1	—15 47	9.99744	14 12 15
26.	14 0 18	12 15.8	15 54	99732	14 16 12
27.	14 4 9	12 36.4	16 0	99721	14 20 8
28.	14 8 0	12 56.7	16 5	99710	14 24 5
29.	14 11 52	13 16.8	16 10	99698	14 28 1
30.	14 15 44	—13 36.7	—16 14	9.99687	14 31 58
31.	14 19 38	13 56.4	16 17	99676	14 35 55

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Новембар					
1.	$14^h23^m32^s$	—14°15′.9	$—16^m19^s$	9.99665	$14^h39^m51^s$
2.	14 27 27	14 35.2	16 20	99654	14 43 48
3.	14 31 23	14 54.2	16 21	99642	14 47 44
4.	14 35 20	15 12.9	16 21	99631	14 51 41
5.	14 39 17	—15 31.5	16 20	9.99620	14 55 37
6.	14 43 16	15 49.7	16 18	99610	14 59 34
7.	14 47 15	16 7.7	16 15	99599	15 3 30
8.	14 51 15	16 25.5	16 12	99588	15 7 27
9.	14 55 16	16 42.9	16 8	99577	15 11 24
10.	14 59 17	—17 0.1	—16 3	9.99567	15 15 20
11.	15 3 20	17 17.0	15 57	99556	15 19 17
12.	15 7 23	17 33.6	15 50	99546	15 23 13
13.	15 11 27	17 49.8	15 42	99536	15 27 10
14.	15 15 32	18 5.8	15 34	99526	15 31 6
15.	15 19 38	—18 21.5	—15 25	9.99516	15 35 3
16.	15 23 45	18 36.8	15 15	99506	15 38 59
17.	15 27 52	18 51.8	15 4	99497	15 42 56
18.	15 32 1	19 6.4	14 52	99487	15 46 53
19.	15 36 10	19 20.8	14 39	99478	15 50 49
20.	15 40 20	—19 34.7	— 14 26	9.99470	15 54 46
21.	15 44 31	19 48.4	14 12	99461	15 58 42
22.	15 48 42	20 1.6	13 57	99453	16 2 39
23.	15 52 55	20 14.5	13 41	99444	16 6 35
24.	15 57 8	20 27.0	13 24	99436	16 10 32
25.	16 1 22	—20 39.2	—13 7	9.99429	16 14 28
26.	16 5 37	20 50.9	12 48	99421	16 18 25
27.	16 9 52	21 2.3	12 29	99413	16 22 21
28.	16 14 9	21 13.3	12 10	99406	16 26 18
29.	16 18 26	21 23.9	11 49	99399	16 30 15
30.	16 22 43	21 34.0	11 28	9.99392	16 34 11

Дан месеца	Привидна α	Привидна δ	Једначина времена	Log R.	Звездано време
Децембар					
1.	$16^h 27^m\ 2^s$	—21°43′.8	—$11^m\ 6^s$	9.99385	$16^h 38^m\ 8^s$
2.	16 31 21	21 53.1	10 43	99378	16 42 4
3.	16 35 41	22 2.1	10 20	99372	16 46 1
4.	16 40 1	22 10.6	9 56	99365	16 49 57
5.	16 44 22	—22 18.6	— 9 32	9.99359	16 53 54
6.	16 48 43	22 26.3	9 7	99353	16 57 51
7.	16 53 5	22 33.5	8 42	99347	17 1 47
8.	16 57 28	22 40.2	8 16	99341	17 5 44
9.	17 1 51	22 46.5	7 49	99335	17 9 40
10.	17 6 14	—22 52.4	— 7 22	9.99329	17 13 37
11.	17 10 38	22 57.8	6 55	99324	17 17 33
12.	17 15 2	23 2.8	6 27	99319	17 21 30
13.	17 19 27	23 7.3	5 59	99314	17 25 26
14.	17 23 52	23 11.3	5 31	99309	17 29 23
15.	17 28 17	—23 14.9	— 5 3	9.99305	17 33 20
16.	17 32 43	23 18.0	4 34	99301	17 37 16
17.	17 37 8	23 20.7	4 5	99297	17 41 13
18.	17 41 34	23 22.9	3 35	99293	17 45 9
19.	17 46 0	23 24.6	3 6	99290	17 49 6
20.	17 50 26	—23 25.9	— 2 36	9.99287	17 53 2
21.	17 54 53	23 26.6	2 6	99284	17 56 59
22.	17 59 19	23 26.9	1 37	99282	18 0 56
23.	18 3 45	23 26.8	1 7	99280	18 4 52
24.	18 8 12	23 26.1	0 37	99278	18 8 49
25.	18 12 38	—23 25.0	— 0 7	9.99276	18 12 45
26.	18 17 5	23 23.5	+ 0 23	99274	18 16 42
27.	18 21 31	23 21.4	0 53	99273	18 20 38
28.	18 25 57	23 18.9	1 22	99272	18 24 35
29.	18 30 23	23 15.9	1 52	99271	18 28 31
30.	18 34 49	—23 12.5	— 2 21	9.99270	18 32 28
31.	18 39 15	23 8.5	+ 2 50	99270	18 36 25
32.	18 43 40	23 4.2	3 19	99269	18 40 21

Привидни радиус и паралакса Сунца.

Јануара	1.	16′18″	9.″0	Јула	10.	15′45″	8.″7
	11.	16 17	8.9		20.	15 46	8.7
	21.	16 17	8.9		30.	15 47	8.7
	31.	16 15	8.9	Августа	9.	15 48	8.7
Фебруара	10.	16 14	8.9		19.	15 50	8.7
	20.	16 12	8.9		29.	15 52	8.7
Марта	2.	16 10	8.9	Септембра	8.	15 54	8.7
	12.	16 7	8.9		18.	15 57	8.8
	22.	16 4	8.8		28.	15 59	8.8
Априла	1.	16 2	8.8	Октобра	8.	16 2	8.8
	11.	15 59	8.8		18.	16 5	8.8
	21.	15 56	8.8		28.	16 8	8.9
Маја	1.	15 54	8.7	Новембра	7.	16 10	8.9
	11.	15 51	8.7		17.	16 12	8.9
	21.	15 50	8.7		27.	16 14	8.9
	31.	15 48	8.7	Децембра	7.	16 16	8.9
Јуна	10.	15 47	8.7		17.	16 17	8.9
	20.	15 46	8.7		27.	16 17	9.0
	30.	15 45	8.7		37.	16 17	9.0

Поправке *k* за почетак године.

Год.	*k*	Год.	*k*	Год.	*k*
1900.*	+ 0^{d}360	1920.*	+ 0.516	1940.*	+ 0.672
01.	+ 0.117	21.	+ 0^{d}273	41.	+ 0^{d}429
02.	— 0.125	22.	+ 0.031	42.	+ 0.187
03.	— 0.367	23.	— 0.211	43.	— 0.055
04.*	+ 0.391	24.*	+ 0.547	44.*	+ 0.703
1905.	+ 0.148	1925.	+ 0.305	1945.	+ 0.461
06.	— 0.094	26.	+ 0.062	46.	+ 0.218
07.	— 0.336	27.	— 0.180	47.	— 0.024
08.*	+ 0.422	28.*	+ 0.578	48.*	+ 0.734
09.	+ 0.180	29.	+ 0.336	49.	+ 0.492
1910.	— 0.062	1930.	+ 0.094	1950.	+ 0.250
11.	— 0.305	31.	— 0.149		
12.*	+ 0.453	32.*	+ 0.609		
13.	+ 0.211	33.	+ 0.367		
14.	— 0.031	34.	+ 0.125		
1915.	— 0.273	1935.	— 0.117		
16.*	+ 0.484	36.*	+ 0.640		
17.	+ 0.242	37.	+ 0.398		
18.	0.000	38.	+ 0.156		
19.	— 0.242	39.	— 0.086		

*) — Преступна година.

Главне запажене грешке:

На страни	*У врсти*	*Одштампано*	*Треба да буде*
10.	5. озго	*раситне*	*расипне*
11.	18. „	**Сферна . . . .**	**5. Сферна . . . .**
12.	15. „	Pb	Pb'
13.	11. „	+ 5.69	+ 5.96
15.	9. оздо	$\left(1+\frac{h^2}{2}\frac{d_1+r}{d_1{}^2r}\right)$	$\left(1+\frac{h^2}{2}\frac{d_1-r}{d_1{}^2r}\right)$
15.	1. „	$\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{d}\right)$	$\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{d'}\right)$
17.	6. „	$\frac{p}{f}+\frac{\pi}{\varphi}=0$	$\frac{p}{f}+\frac{\pi}{\varphi}=0$ . . . . **(15.)**
19.	15. „	Коплеров	Кеплеров
22.	17. „	сад могуђно,	сад могуђно да се —
22.	1. „	о —	до —
23.	6. „	коничанога	коничнога
24.	3. „	W;	W^2;
31.	8. „	отвара	отвора
43.	2. „	$5'' = 9.1$	$5'' = 9.1^{\frac{1}{2}\tau}$
43.	1. „	*подеока*	*полуподеока*
45.	Сл. 42. б.	ZOJ	ZOJ′
49.	20. озго	изнад $i_w = + 1.30$ празно	**средње**
52.	1. „	прелази	пролази
56.	13. „	(сл.	(чл.
63.	8. „	постаје	постоје
69.	14. оздо	зависти	зависности
86.	6. „	$(A_0 + A'_1)$	$(A_0 - A'_1)$
„	7. „	$(A_0 + A'_2)$	$(A_0 - A'_2)$
„	8. „	$(A_0 + A'_3)$	$(A_0 - A'_3)$
89.	4. „	сложнији	сложенији
90.	5. озго	+ 0.02	— 0.02
„	13. „	± 0.2	± 0.3
„	17. „	ε_d	ε^2_d
93.	1. „	код	ход
101.	15. „	екроном	екраном
103.	4. оздо	екектрода	електрода
„	3. „	висиком	високом
111.	11. „	вертила	вертикала
115.	4. „	$+ Ve)$	$+ Ve^2)$
116.	20. „	чл. 35.	чл. 25.

На страни	*У врсти*	*Одштампано*	*Треба да буде*
119.	11. озго	подељеном	подељеним
125.	10. „	нинијусима	нонијусима
126.	19. оздо	бимб	лимб
127.	7. „	кои	који
133.	3. озго	**Конструкиија**	**Конструкција**
137.	11. „	$\sqrt{1 + \frac{4}{5}\, cosec^2\, b}$	$\sqrt{1 + \frac{5}{4}\, cosec^2\, b}$
141.	1. „	**8.**	**80.**
152.	12. „	$\frac{\Delta s_1 \sin z_1 - \Delta s_2 \sin z_1}{\sin (z_1 - z_2)}$	$\frac{\Delta s_1 \sin z_2 - \Delta s_2 \sin z_1}{\sin (z_1 - z_2)}$
„	10. оздо ..	$\Delta s_2 = \beta\, stn\, (y + z_2) = \frac{x}{\sin y} \sin (y + z_2) = x \cos z_2 +$	$\Delta s_2 = \beta \sin (y - z_2) = \frac{x}{\sin y} \sin (y - z_2) = x \cos z_2 -$
156.	16. „	1990.	1890.
163.	15. „	на сл. 103. z 70	$z = 70$
164.	12. озго	$+ \frac{\alpha_w - \alpha_0}{2} = t$	$+ \frac{\alpha_0 - \alpha_w}{2} = t$
168.	12. „	— 4 58.3	— 4 58.0
171.	3. „	**мередионалне**	**меридионалне**
174.	17. оздо	$\frac{1}{2} (\zeta_0 + z_m) = 28\ 55\ 17$	$\frac{1}{2} (\zeta_0 + z_m) = 32\ 24\ 37$
„	18. „	$z_m = 28\ 59\ 45$	$z_m = 32\ 25\ 36$
„	21. „	$(\alpha) = 25\ 57\ 50._4$	$(\alpha) = 22\ 57\ 50._4$
178.	13. озго	$\frac{1}{2} (\rho_s - \rho_n) = \quad + 2.2_5$	$\frac{1}{2} (\rho_s - \rho_n) = \quad + 2.5_5$
„	3. оздо	Толкот	Талкот
179.	21. озго	Толкотовом	Талкотовом
184.	11. оздо	$(T + u - \alpha')$	$(T' + u_0 - \alpha')$
„	12. „	$(T + u - \alpha)$	$(T + u_0 - \alpha)$
187.	13. „	$\varphi_1 = \mathbf{44^\circ 13''.7}$	$\varphi_1 = \mathbf{44^\circ 13'.7}$
192.	8. „	Astrolobe	Astrolabe
„	9. „	**Астролобија**	**Астролабија**
205.	16. озго	$- K_1 f'$	$- K_1 f'_1$
211.	5 „	$\frac{\sin (\varphi - \delta)}{\sin \varphi \sin \delta} 2\, cotg\, \delta \sin^2 \frac{t}{2}$	$\frac{\sin (\varphi - \delta)}{\sin \varphi \sin \delta} = 2\, cotg\, \delta \sin^2 \frac{t}{2}$
213.	14. оздо	$(\sin t' - t)$	$\sin (t' - t)$
218.	3., 5. и 6. „	$\frac{1}{d \sin 1''}$	$\frac{l}{d \sin 1''}$
219.	5. озго	$= N' l, -$	$= N l, -$
223.	2. „	круга	инструмента
243.	12. „	елиптике	еклиптике
244., 245., 246.		рехтасцензија	ректасцензија
245.	Сл. 117.	z	ζ
248.	6. оздо	$\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right)_0 =$	$\left(\frac{\partial K}{\partial \pi}\right)_0 =$
