KRETANJE ČVRSTOG TELA U RIEMANNovim PROSTORIMA KONSTANTNE KRIVINE

Rastko Stojanović

0.1 Uvod

Namera nam je da u ovome radu proučimo kretanje čvrstog tela u Riemann-ovim prostorima konstantne krivine. Takvo čvrsto telo jeste u stvari generalizacija čvrstog tela u euklidskim prostorima E_n i mora da sadrži definiciju čvrstog tela u E_n kao degenerativni slučaj.

Potreba za generalizacijom klasične definicije čvrstog tela se pojavila odmah posle pojave specijalne teorije relativiteta 1905 god., jer se klasični zahtev da rastojanja izmedju tačaka ostanu nepromenjena za vreme kretanja nije mogao održati usled relativističke kontrakcije dužina.

Problemom čvrstog tela u relativitetu prvi se pozabavio(1) ([1], 1909g.) M. Born, koji je definisao čvrsto telo uslovom da svetske linije tačaka koje sačinjavaju čvrsto telo moraju da budu paralelne za vreme kretanja. Born je pokazao da relativistički čvrsto telo tako definisano ima svega tri stepena slobode, u mesto šest u klasičnoj mehanici. Taj rezultat su kasnije potvrdili u svojim radovima Herglots [2] i Noether [3]. Galli [4] je primenio istu definiciju čvrstog tela na proučavanje površine obrtnog cilindra, dok je Pounder [5] razradio celu teoriju relativistički čvrstih obrtnih površina(2).

Sa pojavom opšte teorije relativiteta naglo je počela da se razvija geometrija Riemann-ovih prostora i tenzorski račun,

---

(1) Brojevi u zagradama [ ] odnose se na spisak literature na kraju ovog rada.

(2) Od gore navedenih radova, neposredno sam mogao da se upoznam samo sa [5] i [6], gde sam našao podatke i o ostalim navedenim radovima.

kao i njihova primena na klasičnu mehaniku. Problemom kretanja čvrstog tela u opštem relativitetu se bavio J.L. Synge [6], koji je sadržao Born-ovu definiciju čvrstog tela i razvio teoriju kretanja relativistički čvrstih površina, dok problem tela smatra praktično nerešljivim zbog ogromnih matematičkih poteškoća koje potiču od jednačine polja koja mora biti zadovoljena unutar tela.

Primena tenzorskog računa i Riemann-ove geometrije na klasičnu mehaniku je dovela, od pojave opšte teorije relativiteta na ovamo, do krupnih rezultata kako u samoj klasičnoj mehanici, tako i u pravcu njenog ~~rezultata~~ proširenja na druge, neeuklidske, prostore. Najuočljivija praznina u tako proširenoj shemi mehanike jeste pitanje kretanja čvrstog tela u Riemann-ovim prostorima.

Osnovna poteškoća pri definisanju čvrstog tela u takvim prostorima jeste u tome što, na suprot euklidskim prostorima, nismo u mogućnosti da u Riemann-ovim prostorima neposredno posmatramo konačne dužine, koje leže u osnovi klasične definicije čvrstog tela.

I u višedimenzionim euklidskim prostorima, u kojima je moguće neposredno proširenje klasične definicije čvrstog tela, javljaju se izvesne poteškoće prilikom pisanja diferencijalnih jednačina za kretanje čvrstog tela. Koliko je nama poznato, prve takve jednačine su izveli J.L.Synge i A. Shild [7]. Tenzorske jednačine koje su ova dva autora izveli važe, medjutim, samo za trodimenzionalni euklidski prostor, jer se pri proučavanju obrtanja čvrstog tela oko nepomične tačke u mesto vektora uglovne brzine javlja antisimetričan tenzor drugog reda. U prostorima sa brojem dimenzija većim od tri antisimetričnom tenzoru drugog reda nije moguće asocirati neki vektor, pa stoga tu prestaje analogija sa klasičnim tretiranjem rotacije čvrstog tela.

Diferencijalne jednačine za kretanje čvrstog tela u od -

nosu na generalisane koordinate, a za trodimenzionalni euklidski prostor izveo je R.Stojanović [8]. Te jednačine su u suštini jednačine Lagrange-evog tipa za generalisane koordinate i kao takve, kao što ćemo kasnije videti, važe i za opštiju klasu Riemann-ovih prostora - za sve Riemann-ove prostore konstantne krivine, a ne samo za euklidske trodimenzionalne prostore, za koje su izvedene.

Bottema i Beth [9] su posvetili posebnu pažnju problemu kretanja čvrstog tela oko nepomične tačke u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru. Njihove jednačine su generalisane Euler-ove jednačine za isti problem u trodimenzionalnom prostoru, pri čemu se kao nepoznate funkcije vremena ne javljaju koordinate vektora uglovne brzine, već koordinate antisimetričnog tenzora koji odredjuje obrtanje. Sem formalnog računa, u tom radu autori nisu dali geometrisku i mehaničku interpretaciju veličina koje se pojavljuju, specijalno interpretaciju već pomenutog antisimetričnog tenzora uglovne brzine, koji igra fundamentalnu ulogu. Sem toga, ako se u procesu izvodjenja diferencijalnih jednačina kod Synge-a i Shild-a ne zadržimo na trodimenzionalnom slučaju i ne asociiramo tenzoru uglovne brzine vektor, sledi da su jednačine Bottema-e i Beth-a neposredna posledica ovih i da su sadržane u njima.

Problem kretanja čvrstog tela u ma kakvom Riemann-ovom prostoru prvi je, koliko je nama poznato, dotakao Th. De Donder ([10], [11]). U nekom Riemann-ovom n-dimenzionalnom prostoru V_n sa metričkim tenzorom g_{ab} i koordinatama x^1, x^2, ..., x^n, De Donder definiše čvrsto telo tako što zahteva da "za vreme kretanja tela u toku vremena neka proizvoljna linija provučena kroz telo u tremutku t " ne menja svoju dužinu. Ako je metrička forma prostora V_n (+)

(+) U celom radu će se konsekventno sprovoditi konvencija za sabiranje po dva puta ponovljenim indeksima, u koliko nešto drugo ne bude eksplicitno naglašeno u tekstu.

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a\,dx^b, \qquad (a,b = 1,2,\ldots,n)$$

po taj definiciji sledi da mora biti

$$\frac{d}{dt}\int_{(t)}\sqrt{g_{ab}\,dx^a\,dx^b} = 0,$$

pri čemu se integracija vrši duž krive provučene kroz telo " u trenutku t ".

Kako je kriva proizvoljna, gornji uslov se svodi na

$$\frac{d}{dt}\sqrt{g_{ab}\,dx^a\,dx^b} = 0,$$

odakle se diferenciranjem neposredno dobija, ako stavimo da je $\frac{dx^a}{dt} = v^a$, što je kontravarijantna koordinata brzine tačke čvrstog tela:

$$g_{ac}\frac{\partial v^c}{\partial x^b} + g_{bc}\frac{\partial v^c}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}v^c = 0,$$

ili

/1/ $$v_{a,b} + v_{b,a} = 0,$$

gde zapeta izmedju indeksa označava kovarijantni izvod vektora v_a po promenljivoj x^b.

Jednačine /1/ obrazuju sistem od $n(n+1)/2$ diferencijalnih jednačina, odakle treba odrediti n nepoznatih funkcija v^1, v^2, ..., v^n. Na osnovu toga, De Donder kaže da, za a priori date funkcije g_{ab}, koje odredjuju metriku u V_n, čvrsto telo ne može da se pomera.

Zbog toga se, mesto prostora sa ma kakvim metričkim tensorom, De Donder ograničava na prostore sa g_{ab} = const. /euklidski prostori E_n/, gde se jednačine /1/ svode na jednostavan oblik

$$\frac{\partial v_a}{\partial x^b} + \frac{\partial v_b}{\partial x^a} = 0,$$

sa integralom koji neposredno sledi

$$v_a = \omega_{ab}(t)x^b + e_a(t),$$

gde je

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_a}{\partial x^b} - \frac{\partial v_b}{\partial x^a}\right).$$

Kako je, medjutim,

$$v^a = \frac{dx^a}{dt},$$

opšte rešenje sistema jednačina /1/ je

/2/ $$x^a = h^a_c(t)x^c(0) + A^a(t)$$

gde je $x^c(0)$ vektor položaja tačke tela u početnom trenutku $t = 0$, a $h^a_c(t)$ su neki koeficijenti koji su sa tenzorom ugaone brzine vezani izrazom

$$\omega^a_e = \frac{dh^a_c}{dt} h^c_e.$$

Ova prva De Donder-ova rasprava o čvrstom telu u Riemann-ovim prostorima je u stvari samo pokazala kako se polazeći od jednačina /1/, koje potiču neposredno od definicije čvrstog tela u V_n, mogu direktno dobiti poznati izrazi za brzinu, kao i konačne jednačine kretanja tačke čvrstog tela u euklidskom prostoru.

U drugoj raspravi De Donder proučava kretanje čvrstog tela u nekom V_n na kojem je u svakoj tački tangencijalan neki euklidski prostor E_n i izvodi izraze za brzinu tačaka tela i za ugaonu brzinu tela u odnosu na tangencijalan prostor, a u potpunoj analogiji sa resulatatima dobivenim u prvoj raspravi.

Diferencijalne jednačine kretanja čvrstog tela izveo je, prema De Donderovim definicijama i idejama P. Melchior ([12] i [13]) u obliku

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_G^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{x}_G^i} = 0;$$

$$(i, m, r = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial h_r^m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{h}_r^m} = 0,$$

gde je $\mathcal{G}$ Lagrange-ova funkcija, x_G^i koordinata centra masa tela, a h_r^m koeficijenti uvedeni u /2/. Tačka iznad x_G^i i h_r^m označava izvod po vremenu tih veličina. Izvodjenjem diferenciranja naznačenih u gornjim jednačinama, P. Melchior dobiva dva sistema diferencijalnih jednačina u razvijenom obliku:

$$-\frac{\partial E_{pot}}{\partial x_G^i} = \mu \sum_1^n {}_a\, g_{ai}\, \ddot{x}_G^a \qquad (i = 1, \dots, n)$$

– n jednačina za translatorno kretanje centra masa tela i

$$B^{dr}\ddot{h}_{md}h^{ms} - B^{sd}\ddot{h}_{md}h^{mr} + \iiint \left(g^{su}\xi^r - g^{ru}\xi^s\right)\frac{\partial V}{\partial \xi^u}\, d\mu = 0 -$$

$$(d, r, m, s, u = 1, \dots, n)$$

n(n-1)/2 Euler-ovih jednačina za kretanje tela oko centra masa.

U ovim jednačinama su B^{ab} izrazi koji daju momente i proizvode inercije

$$B^{ab} = \iiint \xi^a \xi^b\, d\mu,$$

ξ 'ovi su koordinate tačke čvrstog tela u odnosu na koordinatni sistem čvrsto vezan za telo, V je potencijalna energija tačke posmatranog čvrstog tela i $d\mu$ je element mase tela

$$d\mu = \rho\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3,$$

tako da je

$$E_{pot.} = \iiint V(t; x^a)\, d\mu = \iiint V(t; h_c^a \xi^c + x_G^a)\, d\mu.$$

Uvodjenjem veličina p_i i p_m^r kao kanoničnih promenljivih:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i_G} \quad ; \quad p_m{}^r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}^m{}_r} ,$$

Melchior izvodi kanonične jednačine

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i_G} \quad ; \quad \frac{dp_m{}^r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h^m{}_r} ,$$

$$\frac{dx^i_G}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dh^m{}_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m{}^r} ,$$

gde je $\mathcal{H}$ generalisana Hamiltonova funkcija

$$\mathcal{H} = p_i \dot{x}^i_G + p_m{}^r \dot{h}^m{}_r - (E_{kin} - E_{pot}).$$

Sem toga, iz Jakobijeve funkcije $S(x^i_G, h^m{}_r, t)$, stavljajući

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i_G} \quad ; \quad p_m{}^r = \frac{\partial S}{\partial h^m{}_r} ,$$

Melchior izvodi i Jakobijeve jednačine

$$\frac{\partial S}{\partial t} + g^{ij}\left(B^{rs} \frac{\partial S}{\partial h^i{}_r} \frac{\partial S}{\partial h^j{}_s} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial S}{\partial x^i_G} \frac{\partial S}{\partial x^j_G} \right) + \iiint V(t;\, h^a_c \xi^c + x^a_G)\, d\mu = 0.$$

Radovi F. Melchior-a u stvari pretstavljaju primenu De Donder-ovih osnovnih stavova na dinamiku čvrstog tela u euklidskom trodimenzionalnom prostoru, pri čemu se neke jednačine, kao n. pr. Lagrange-ove, mogu primeniti i na višedimenzionalne prostore. U celom radu nema nikakvih interpretacija dobivenih jednačina i uslova pod kojima su dobivene.

F. Van Bergen je objavio jedan rad [14] koji zaslužuje malo više pažnje ne po svojoj originalnosti, već po tome što ukazuje na dalji pravac u kome treba ići pri traženju rešenja problema kretanja čvrstog tela u Riemann-ovim prostorima. Naime, uslov da je moguće kretanje čvrstog tela u nekom datom Riemann-ovom prostoru glasi, da polje vektora brzine tačaka čvrstog tela mora da zadovoljava sistem od $n(n+1)/2$ diferencijalnih jednačina /1/

$$v_{a,b} + v_{b,a} = 0. \qquad (a, b = 1, \dots, n)$$

De Donder, koji je izveo taj uslov, kaže u svome radu [10] da taj uslov u opštem slučaju, za proizvoljno datu metriku, odnosno za proizvoljno dati Riemann-ov prostor, nije zadovoljen. Van Bergen pokušava da pokaže da te uslovne jednačine za kretanje čvrstog tela u V_n mogu da se primene na V_n sa ma kakvim fundamentalnim tenzorom, a ne samo u slučaju kada su koordinate tog tenzora konstantne, kao što je De Donder to uradio. Iz Ricci-jevog identiteta

$$v_{b,a,c} - v_{b,ca} = R^{e}_{bac}\, v_e,$$

gde je R^{e}_{bac} mešoviti Riemann-ov tenzor krivine, i izraza dobivenog iz jednačina /1/ diferenciranjem po x^c /kovarijantnim/

$$v_{a,b,c} + v_{b,a,c} = 0,$$

cikličkim permutovanjem indeksa i sabiranjem dobija se

/3/ $$v_{a,b,c} = R^{e}_{cba}\, v_e,$$

- izraz za koji Van Bergen kaže da zamenjuje /1/ u opštem slučaju.

Jednačine /3/, medjutim, pretstavljaju samo uslove integrabilnosti jednačina /1/ (cf. [15] p. 237) i kao takve ne mogu u potpunosti da zamene jednačine /1/. Prema tome, još uvek nismo u mogućnosti da odgovorimo na pitanje da li je u datom V_n moguće kretanje čvrstog tela, ali jednačine /1/ i /3/ daju sugestije u kome pravcu odgovor na to pitanje treba tražiti.

Kako je $v^a = \frac{dx^a}{dt}$, infinitezimalno pomeranje tačke tela sa koordinatama x^a, $(a=1,2,\ldots,n)$ je dato sa

$$\delta x^a = v^a \delta t,$$

gde simbol δ obeležava infinitezimalno ~~pomeranje~~ promenu /odnosno, koordinate vektora infinitezimalnog pomeranja/, a koordinate posmatrane tačke tela posle pomeranja su

/4/ $$\bar{x}^a = x^a + \delta x^a = x^a + v^a \delta t.$$

Ovaj poslednji sistem jednačina definiše grupu infinitezimalnih transformacija u V_n. Ako postavimo zahtev da se pri infinitezimalnim transformacijama grupe transformacija /4/ ne menja element luka, uslov za to će biti izražen sistemom od $n(n+1)/2$ veza između koeficijenata infinitezimalnog pomeranja / o tome će biti detaljnijeg govora u odeljku 2. ovoga rada/:

$$v_{a,b} + v_{b,a} = 0,$$

a to su upravo uslovne jednačine koje je dobio De Donder i pretstavljaju uslov da je grupa infinitezimalnih transformacija /4/ grupa k r e t a n j a u V_n. Sem toga, napomenimo da jednačine /1/ ne pretstavljaju diferencijalne jednačine iz kojih se neposrednom integracijom, u koliko su uopšte integrabilne, mogu dobiti svi potrebni podaci o mogućnosti kretanja čvrstog tela u nekom V_n, jer su to jednačine samo u odnosu na jednu podgrupu k o m p l e t n e grupe kretanja koja bi postojala u nekom V_n.

Mi ćemo u ovome radu da pođemo od izraza za infinitezimalna pomeranja čvrstog tela i od jednačina sličnih jednačinama /1/, ali u obliku koji će nam omogućiti daleko dublje tretiranje problema. Pri tome ćemo problem kretanja čvrstog tela u prostoru konstantne krivine vezati za pitanje osobina grupe kretanja u tom prostoru, jer nam izgleda da rezultati teorije infinitezimalnih transformacionih grupa i grupa kretanja jedini omogućavaju potpuno rešenje postavljenog problema.

0.11. Neprekidne transformacione grupe(+)

Posmatrajmo sistem od n jednačina koje izražavaju punktualne transformacije koordinata u V_n:

$$x^i = f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n; p^1, \ldots, p^r), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{/5/}$$

gde su x'ovi i $\bar{x}$'ovi koordinate tačke u odnosu na dva sistema koordinata u V_n, a p'ovi su izvesni parametri. Ako su funkcije f^i takve da:

1. kombinacija dvaju transformacija oblika /5/ jeste opet jedna od transformacija /5/;

2. transformacije /5/ sadrže identičnu transformaciju;

3. svakoj transformaciji odgovara inverzna transformacija,

onda transformacije /5/ obrazuju g r u p u. Ako su, pored toga, funkcije f^i neprekidne u oblasti promenljivih $\bar{x}$ u kojoj posmatramo transformacije, onda jednačine /5/ obrazuju n e p r e k i d n u transformacionu grupu.

Parametri $p^1, \ldots, p^r$ su po pretpostavci esencijelni, tj. njihov se broj ne može smanjiti i izmedju njih se ne mogu uspostaviti nikakve funkcionalne zavisnosti. Grupa transformacija sa r esencijelnih parametara se zove r-parametarska grupa ili grupa r-toga reda i označavaćemo je sa G_r. Kako za svaku vrednost parametara p jednačine /5/ odredjuju jednu transformaciju, znači da jednačine /5/ odredjuju skup od ∞^r različitih transformacija

(+) Ovde će biti izložene osnovne definicije i najnužniji stavovi teorije neprekidnih transformacionih grupa. Sve izloženo u ovom odeljku se nalazi u delima S.Lie-a [16] i L.P.Eisenhart-a [15] i [17], kojima sam se služio.

grupe G_r.

Posmatrajmo dve transformacije grupe G_r transformacija /5/:

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^m; p^1, \cdots, p^r) \equiv f^i(x; p);$$

$$\bar{\bar{x}}^i = f^i(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m; q^1, \cdots, q^r) \equiv f^i(\bar{x}; q).$$

Prema prvoj aksiomi biće

$$\bar{\bar{x}}^i = f^i(x; s); \quad s^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(p, q) \qquad (i = 1, \cdots, m; \alpha' = 1, \cdots, r)$$

jer

$$f^i[f(x, p); q] = f^i[x, \varphi(p, q)],$$

odnosno

/6/ $$f^i(\bar{x}, q) = f^i(x; \varphi); \quad s = \varphi(p, q).$$

Diferencirajmo prvu jednačinu /6/ po $p^{\lambda'}$, pa kako leva strana te jednačine ne zavisi eksplicitno od p'ova, imamo:

/7/ $$\frac{\partial f^i(\bar{x}; q)}{\partial p^{\lambda'}} = \frac{\partial f^i(\bar{x}; q)}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial p^{\lambda'}} + \frac{\partial f^i(\bar{x}; q)}{\partial q^{\mu'}} \frac{\partial q^{\mu'}}{\partial p^{\lambda'}} = 0,$$
$$(i, j = 1, \cdots, m; \lambda', \mu' = 1, \cdots, r)$$

Kako su transformacione jednačine /5/ medjusobno nezavisne, funkcionalna determinanta $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right|$ je identički različita od nule i stoga postoje funkcije $\psi^i_j(\bar{x}; q)$, definisane sa

$$\psi^i_k \frac{\partial f^k(\bar{x}; q)}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j, \qquad (i, j, k = 1, \cdots, m)$$

gde su δ^i_j Kroneckerovi delta-simboli, pa su jednačine /7/ ekvivalentne sa

$$\psi^i_j(\bar{x}; q) \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial p^{\lambda'}} + \frac{\partial f^i(\bar{x}; q)}{\partial q^{\mu'}} \frac{\partial q^{\mu'}}{\partial p^{\lambda'}} = 0,$$

odakle imamo

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p^{\lambda'}} = -\psi^i_j(\bar{x};\varrho)\,\frac{\partial f^j(\bar{x};\varrho)}{\partial \varrho^{\mu'}}\,\frac{\partial \varrho^{\mu'}}{\partial p^{\lambda'}}\,.$$

Veličine $\frac{\partial \varrho^{\mu'}}{\partial p^{\lambda'}}$ su funkcije od p 'ova i s'ova, ali pomoću druge od jednačina /6/ mogu se izraziti kao funkcije od p i ϱ. Druge veličine na desno strane gornje jednačine funkcije su od $\bar{x}$ i ϱ. Medjutim, izraz sa leve strane te jednakosti ne sadrži ϱ 'ove i stoga kombinacije na desnoj strani moraju biti nezavisne od ϱ 'ova. Prema tome, ako su $\varrho_0^{\mu'}$ ma koje specijalne vrednosti parametara $\varrho^{\alpha'}$ i ako stavimo

$$\xi^i_{\alpha'} \equiv -\left[\psi^i_j\,\frac{\partial f^j(\bar{x};\varrho)}{\partial \varrho^{\alpha'}}\right]_{\varrho=\varrho_0}, \qquad \begin{pmatrix} i,j=1,\dots,n \\ \alpha',\beta'=1,\dots,r \end{pmatrix}$$

$$\psi^{\alpha'}_{\beta'} \equiv \left(\frac{\partial \varrho^{\alpha'}}{\partial p^{\beta'}}\right)_{\varrho=\varrho_0},$$

dobijamo konačno

$$\text{/8/} \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p^{\alpha'}} = \xi^i_{\beta'}(\bar{x})\,\psi^{\beta'}_{\alpha'}(p). \qquad (i=1,\dots,n;\ \alpha',\beta'=1,\dots,r)$$

Sistem od nr jednačina /8/ igra vrlo važnu ulogu u teoriji infinitezimalnih transformacionih grupa. Ovde moramo napomenuti još da je rang matrice $\|\psi^{\alpha'}_{\beta'}\|$ jednak r, jer bi u protivnom postojao neki skup funkcija $\varphi^{\alpha'}$ od p 'ova tako da bi bilo $\varphi^{\alpha'}\psi^{\beta'}_{\alpha'}=0$ i parametri $p^1,\dots,p^r$ ne bi bili esencijalni, što bi bilo u suprotnosti sa početnom pretpostavkom.

Posmatrajmo sada slučaj kada se svi parametri $p^1,\dots,p^r$ grupe G_r mogu izraziti kao funkcije jednog parametra, recimo t:

$$p^{\alpha'} = p^{\alpha'}(t) \qquad (\alpha'=1,\dots,r)$$

Konačne jednačine grupe tada postaju

/9/ $$\bar{x}^i = f^i[x;\ p^1(t), \dots, p^r(t)] \equiv F^i(x;\ t) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

i neka budu $p_0^{\alpha'}$ i $t = 0$ vrednosti parametara za koje su transformacije identične $x^i = \bar{x}^i$.

Za jednoparametarsku transformaciju /9/ jednačine /8/ će glasiti

/10/ $$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \xi^i(\bar{x})\ \psi(t),$$

a taj izraz mora biti identičan sa izrazom kojim se dobija neposredno iz /8/ smatrajući parametre $p^{\alpha'}$ kao funkcije od t :

/11/ $$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \xi^i_{\beta'}(\bar{x})\ \psi^{\beta'}_{\alpha'}(p)\ \frac{dp^{\alpha'}}{dt}.$$

Stavimo da je

$$\psi^{\beta'}_{\alpha'}(p)\ \frac{dp^{\alpha'}}{dt} = \psi^{\beta'}(t),$$

pa zbog ekvivalentnosti jednačina /10/ i /11/ neposredno sledi

$$\xi^i_{\alpha'}\ \psi^{\alpha'}(t) = \xi^i\ \psi(t),$$

odakle je

$$\xi^i_{\alpha'}(\bar{x})\ \frac{\psi^{\alpha'}(t)}{\psi(t)} = \xi^i(\bar{x}).$$

Kako izraz $\xi^i(\bar{x})$ na desnoj strani gornje jednačine ne zavisi od parametra t, već samo od $\bar{x}$, a ta jednačina mora da važi za sve vrednosti parametra t, znači da mora biti

$$\frac{\psi^{\alpha'}(t)}{\psi(t)} = c^{\alpha'} = \text{const.} \qquad (\alpha' = 1, \dots, r)$$

i imamo

$$\xi^i(\bar{x}) = c^{\alpha'}\ \xi^i_{\alpha'}(\bar{x}).$$

Medjutim, uvedemo li u/10/ neki novi parametar t' vezan sa starim izrazom

$$t' = \int_0^t \psi(t)\,dt,$$

jednačina /10/ postaje

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \xi^i(\bar{x}).$$

Ovu jednačinu možemo smatrati diferencijalnom jednačinom podgrupe G_1 grupe G_r i njen integral u obliku potencijalnog reda će biti /pretpostavljamo regularnost funkcije $\xi^i(\bar{x})$ u posmatranoj oblasti prostora, kao i definisanost uzastopnih izvoda tih funkcija do reda izvoda koji nam je potreban/ u blizini $t=0$:

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)t + \frac{1}{2}\xi^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \cdots .$$

Ako posmatramo samo male vrednosti parametra t u blizini $t=0$, možemo u gornjem redu zameniti t sa δt i ako zanemarimo članove sa δt koji eksponent imaju veći od 1, dobijamo

/12/ $$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\,\delta t.$$

Ovo su infinitezimalne transformacije naše grupe G_r, a po Lie-u veličine $\xi^i(x)$ su koeficijenti transformacije. Pošto je $\xi^i = c^{\alpha'}\xi^i_{\alpha'}$, možemo reći da: Transformacije neprekidne grupe G_r, čiji su koeficijenti $\xi^i_{\alpha'}$, sastoje se od transformacija grupe G_1 čije infinitezimalne transformacije imaju koeficijente $c^{\alpha'}\xi^i_{\alpha'}$, gde su $c^{\alpha'}$ neke konstante, ili od proizvoda takvih transformacija.

Neprekidne grupe koje zadovoljavaju ovaj uslov zovu se Lie-ove grupe; jedino sa takvim grupama ćemo se sretati u ovome radu.

Ako su koeficijenti transformacije $\xi^i_{\alpha'}(x)$ regularne funkcije u okolini neke tačke P_0 sa koordinatama x^i_0, koeficijente $\xi^i_{\alpha'}$ možemo u blizini P_0 izraziti u obliku

$$\xi^i_{\alpha'} = \xi^i_{\alpha'}(x_0) + \left(\frac{\partial \xi^i_{\alpha'}}{\partial x^j}\right)_0 (x^j - x^j_0) + \cdots .$$

Kažemo da je transformacija <u>nultog reda</u> u tački P_0 kada nisu svi $\xi^i_{\alpha'}(x_0)$ jednaki nuli; transformacija je <u>prvoga reda</u> kada su svi koeficijenti $\xi^i_{\alpha'}(x_0)$ jednaki nuli, ali nisu svi izvodi $\left(\frac{\partial \xi^i_{\alpha'}}{\partial x^j}\right)_0$ itd.

Ako je matrica Ξ,

$$\Xi = \left\| \begin{matrix} \xi^1_1, & \ldots, & \xi^1_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^n_1, & \ldots, & \xi^n_r \end{matrix} \right\|$$

ranga k u tački P_0, tada u jednačinama

$$b^{\alpha'}\xi^i_{\alpha'}(x_0) = 0$$

k koeficijenata $b^{\alpha'}$ se mogu izraziti pomoću preostalih $r-k$. Stoga postoji $r-k$ linearno nezavisnih transformacija sa koeficijentima $b^{\alpha'}\xi^i_{\alpha'}$ reda većeg od nule i k transformacija nultog reda.

Svaka od infinitezimalnih transformacija reda većeg od nule ostavlja tačku P_0 invarijantnom, što neposredno sledi iz /12/. $r-k$ infinitezimalnih transformacija reda većeg od nule odredjuje grupu G_{r-k} koja je podgrupa grupe G_r i pri tim transformacijama tačka P_0 je fiksirana; stoga se ta podgrupa zove p o d g r u p a s t a b i l n o s t i tačke P_0.

Za grupu se kaže da je t r a n s i t i v n a kada su svake dve obične tačke prostora ekvivalentne s'obzirom na tu grupu, tj. kada se mogu transformisati jedna u drugu transformacijama te grupe; u protivnom grupa je i n t r a n s i t i v n a /n.pr. grupa transformacija dvaju Dekartovih trijedara u E_3 – $x^i = a^i_j\bar{x}^j + b^i$ je transitivna, dok je grupa transformacija $x^i = a^i_j\bar{x}^j$, t.zv. grupa ~~ro-~~ ~~tacija – intransitivna~~/

rotacija - intransitivna i pretstavlja u isto vreme podgrupu stabilnosti tačke u kojoj se nalazi početak koordinatnih sistema, jer je $b^i = 0$ /. Podprostor V_m prostora V_n se zove invarijantni multiplicitet grupe ako sve medjusobno ekvivalentne tačke prostora V_n leže u V_m. Iz konačnih jednačina grupe G_r

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; p^1, \dots, p^r) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

sledi da je za transitivnu grupu potrebno da je $r > n$.

Posmatrajmo sada neku tačku P_0 u V_n i neka je k rang matrice Ξ u P_0; postoji k medjusobno nezavisnih infinitesimalnih transformacija koje transformišu tačku P_0 u okolne tačke i podgrupa stabilnosti tačke P_0 je stoga reda $r-k$, a skup svih mogućih tačaka ekvivalentnih sa P_0 odredjuje neki prostor V_k. Ako je grupa G_r transitivna, $k = n$, pošto je u stvari V_k isto što i V_n. Ako je G_r intransitivna grupa, V_k je podprostor prostora V_n i to prostor sa najmanjim brojem dimenzija koji sadrži P_0 i ekvivalentne tačke i zove se **minimalni invarijantni multiplicitet**. Ovde je očigledno da se jednačine prostora V_k dobijaju kada se sve determinante u Ξ reda $k+1$ izjednače sa nulom. Isto je tako očigledno da podgrupa grupe G_r odredjena pomoću k infinitesimalnih transformacija jeste transitivna grupa za podprostor V_k.

Kada je neki prostor V_n takav da u njemu postoje dva sistema koordinata, x^i i $\bar{x}^i$, za koje odgovarajući koeficijenti g_{ij} i $\bar{g}_{ij}$ osnovnih metričkih formi jesu iste funkcije od x i $\bar{x}$ respektivno i jednačine transformacija ovih dvaju koordinatnih sistema jednog u drugi sadrže izvestan broj parametara, te jednačine se mogu interpretirati kao da definišu neprekidno kretanje prostora u sebi samome. Ako postavimo zahtev da pri infinitesimalnim transformacijama te vrste metrička forma prostora ostane nepromenjena, onda grupa tih transformacija jeste g r u p a k r e t a n j a u V_n. Iz definicije grupe kretanja neposredno sleduje da pri transformacijama grupe kretanja dužine i uglovi ostaju nepromenjeni, a samim tim i geodeziske linije prelaze u geodeziske linije.

0.2. Riemann-ovi prostori konstantne krivine.

Neka je dat neki Riemann-ov prostor V_n metričkom formom

/13/ $$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \qquad (i,j=1,\dots,n)$$

gde je g_{ij} dva puta kovarijantni metrički tenzor koji je, u opštem slučaju, funkcija položaja u V_n, a $x^1, x^2, \dots, x^n$ su koordinate tačke u V_n.

Pod Riemann-ovom krivinom prostora V_n podrazumevamo krivinu u nekoj tački geodeziske površine formirane u toj tački prostora u odnosu na dva pravca $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$ kroz tu tačku; krivina K je data izrazom

/14/ $$K = \frac{R_{hijk}\lambda^h\mu^i\lambda^j\mu^k}{(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})\lambda^h\mu^i\lambda^j\mu^k},$$

gde je R_{hijk} Riemann-Christoffel-ov tenzor krivine, a λ^i i μ^i su koordinate vektora $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$. Ako u nekoj tački prostora V_n krivina K ne zavisi od pravca vektora $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$, kažemo da je u toj tački prostor izotropan i krivina konstantna i tu imamo

/15/ $$R_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

a ako je V_n čitav izotropan, onda je prema Schur-ovoj teoremi [18] K=const. u celom prostoru. Takve V_n nazivamo prostorima konstantne krivine i označavaćemo ih sa K_n.

Predaja razmatranja o prostorima koji su celi izotropni važe same za $n > 2$ i mi ćemo se zadržavati samo na slučajevima kada je taj uslov ispunjen, dok je slučaj $n=2$ u jednom ranijem radu proučen [19].

9.1. Definicija čvrstog tela u K_n i neke pretpostavke.

Pod čvrstim telom u K_n podrazumevaćemo sistem tačaka M_1, M_2, M_3, ... koji zadovoljava uslove:

a. Rastojanje izmedju po dve ma koje tačke togа sistema, mereno duž geodeziske linije u K_n duž koje je to rastojanje najkraće, funkcija je isključivo relativnog položaja tih dveju tačaka

/16/
$$\int_{M_\mu}^{M_\nu} ds = F(M_\mu; M_\nu) = F(x_\mu^i; x_\nu^i).$$

b. Vrednost tog rastojanja se ne menja kad telo menja svoj položaj u K_n u toku vremena t:

/17/
$$\frac{d}{dt} F(x_\mu^i; x_\nu^i) = 0.$$

Prilikom definisanja čvrstog tela u V_n u mesto proizvoljne krive, kako je to uradio De Donder, uvodimo geodezisku liniju. Time mi je učinjemo nikakvo bitno ograničenje, ali je omogućeno konsekventno korišćenje definicije prilikom proučavanja kretanja.

Svakoj tački M_ν ovako definisanog čvrstog tela možemo da asociiramo izvesnu masu m_ν, ali za kinematička proučavanja to nema nikakvog značaja.

Posmatrajmo skup svih mogućih infinitezimalnih pomeranja čvrstog tela u K_n i uvedimo sledeće pretpostavke:

1/ Ako posmatrano čvrsto telo u K_n izvrši infinitezimalno pomeranje iz položaja Π_0 u položaj Π_1, a zatim iz položaja Π_1 u položaj Π_2, ono se može dovesti i direktno iz položaja Π_0 u položaj Π_2 – simbolički:

$$(\Pi_0 \Pi_1) + (\Pi_1 \Pi_2) = (\Pi_0 \Pi_2).$$

2/ Za ma koja tri uzastopna infinitesimalna pomeranja $(\Pi_0 \Pi_1)$, $(\Pi_1 \Pi_2)$, $(\Pi_2 \Pi_3)$ važi asocijativni zakon

$$(\Pi_0 \Pi_1) + [(\Pi_1 \Pi_2) + (\Pi_2 \Pi_3)] = [(\Pi_0 \Pi_1) + (\Pi_1 \Pi_2)] + (\Pi_2 \Pi_3).$$

3/ Postoji takvo pomeranje O da je za ma kakvo infinitesimalno pomeranje $(\Pi_i \Pi_j)$ tela u K_n:

$$(\Pi_i \Pi_j) + O = O + (\Pi_i \Pi_j) = (\Pi_i \Pi_j).$$

4/ Za svako proizvoljno pomeranje /infinitezimalno/ $(\Pi_i \Pi_j)$ postoji i inverzno pomeranje $(\Pi_i \Pi_j)^{-1}$, tako da je

$$(\Pi_i \Pi_j) + (\Pi_i \Pi_j)^{-1} = O,$$

pri čemu možemo staviti da je $(\Pi_i \Pi_j)^{-1} = (\Pi_j \Pi_i)$.

Iz ovih pretpostavki sledi da sva moguća infinitesimalna pomeranja čvrstog tela u K_n obrazuju grupu. Iz definicije čvrstog tela sledi da prilikom pomeranja čvrstog tela metrička forma ostaje nepromenjena, dužine ostaju nepromenjene i geodeziske linije prelaze u geodeziske linije pa imamo osnovni stav:

<u>Sva moguća infinitesimalna pomeranja čvrstog tela u K_n obrazuju grupu infinitesimalnih kretanja u K_n.</u> /cf. [15], p. 234, 235 /

KINEMATIKA ČVRSTOG TELA U RIEMANNovim PROSTORIMA KONSTANTNE KRIVINE

1. Položaj čvrstog tela u K_n.

Uvedimo u K_n, pored već uvedenog sistema koordinata $x^1, \ldots, x^n$, sa metričkom formom /13/, još jedan sistem koordinata $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$, takav da budu koordinate $\bar{g}_{ij}$ metričkog tenzora u odnosu na koordinate $\bar{x}$ iste funkcije položaja u K_n kao što su koordinate tenzora g_{ij} funkcije od $x^1, \ldots, x^n$. U odnosu na koordinate $\bar{x}$ metrička forma glasi

$$/18/ \qquad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}\, d\bar{x}^i d\bar{x}^j \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

Medjutim, metrike /13/ i /18/ karakterišu isti prostor, pa izmedju njih moraju da postoje veze

$$/19/ \qquad \bar{g}_{ij} = g_{ke} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^e}{\partial \bar{x}^j},$$

koje bi trebalo da dopuste n medjusobno nezavisnih rešenja

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n),$$

koja bi zadovoljavala uslov $ds^2 = d\bar{s}^2$, odnosno

$$g_{ij}\, dx^i dx^j = \bar{g}_{ke}\, d\bar{x}^k d\bar{x}^e.$$

Stavimo da je

$$/20/ \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^e} = X^i_e$$

i sa tom oznakom možemo da napišemo veze izmedju Christoffel-ovih simbola vezanih za metrike /13/ i /18/

$$/21/ \qquad \frac{\partial X^i_e}{\partial \bar{x}^m} = \overline{\left\{ {p \atop e\,m} \right\}} X^i_p - \left\{ {i \atop j\,k} \right\} X^j_e X^k_m .$$

Sistem jednačina /21/ pretstavlja uslove integrabilnosti jednačina /20/ i problem se sada svodi na odredjivanje n veličina x^i i n^2 veličina X^i_ℓ, koje treba da zadovoljavaju sistem od $n(n+1)/2$ jednačina /19/. Uslovi integrabilnosti jednačine /21/ su

/22/ $$\bar{R}_{ijk\ell} = R_{pqrs} X^p_i X^q_j X^r_k X^s_\ell .$$

Za prostore konstantne krivine K_n uslovne jednačine /22/ su zadovoljene kao neposredna posledica jednačina /19/, pa stoga jednačine /20/ i /21/ dopuštaju $n(n+1)$ rešenja po x^i i X^i_ℓ sa $n(n+1)$ integracionom konstantom. Kako ta rešenja moraju da zadovoljavaju $n(n+1)/2$ jednačina /19/, to će ona transformacione jednačine sadržati svega $n(n+1)/2$ nezavisnih integracionih konstanti $p^{\alpha'}$, $(\alpha'=1,2,\dots,n(n+1)/2)$, i glasiće ([20], p.60; [15], p.23):

/23/ $$x^i = x^i(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n;\, p^1,\dots,p^r) . \qquad \left(\begin{matrix} i=1,\dots,n \\ r = n(n+1)/2 \end{matrix}\right)$$

Pretpostavimo sada da se sistem koordinata $\bar{x}$ pomera zajedno sa posmatranim čvrstim telom u K_n, kada to telo menja svoj položaj i da su koordinate $\bar{x}^i$ ma koje tačke M tela nepromenljive za vreme tog pomeranja

/24/ $$\frac{d\bar{x}^i_M}{dt} = 0 .$$

Pod tom pretpostavkom transformacione jednačine /23/ u stvari pretstavljaju transformaciju područja definisanog u odnosu na koordinate $\bar{x}$ u područje definisano u odnosu na koordinate x. Ta transformacija je izometrična /jer zadovoljava uslov $ds^2 = d\bar{s}^2$ / i jednačine /23/ odredjuju jednu r-točlanu grupu kretanja G_r u K_n ([15], p.235), što odgovara već učinjenim pretpostavkama. Parametri grupe su konstante integracije $p^1, \ldots, p^r$.

Kada tačke čvrstog tela menjaju u K_n svoj položaj u toku vremena t, njihov položaj je odredjen jednačinama $x^i = x^i(t)$. Medjutim, iz /23/, zbog /24/ sledi da mora biti

$$p^{\alpha'} = p^{\alpha'}(t), \qquad \left(\alpha' = 1, \ldots, r = \frac{n(n+1)}{2}\right) \tag{25}$$

pa ove jednačine pretstavljaju konačne jednačine kretanja posmatranog čvrstog tela. Kako su parametri $p^1, \ldots, p^r$, njih r na broju, $r = n(n+1)/2$, u K_n medjusobno nezavisni, znači da je kretanje čvrstog tela u K_n odredjeno pomoću r jednačina/25/, a za neki trenutak t položaj tela je potpuno odredjen pomoću r vrednosti parametara $p^{\alpha'}$, koji su esencijelni i otuda imamo:

<u>Čvrsto telo u n-dimenzionalnom Riemann-ovom prostoru konstantne krivine ima n(n+1)/2 stepeni slobode.</u>

2. Infinitezimalna pomeranja čvrstog tela u K_n.

Neka parametri $p^{\alpha'}$ u jednačinama /23/ promene svoje vrednosti za $\delta p^{\alpha'}$; koordinate tačaka tela će promeniti svoje vrednosti za δx^i:

$$x^i + \delta x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n;\ p^1 + \delta p^1, \ldots, p^r + \delta p^r). \tag{26}$$

Razvijmo ovaj izraz u red u blizini početnog položaja čvrstog tela, koji je okarakterisan vrednostima parametara $p^{\alpha'}$ i koordinatama tačaka tela x^i:

$$x^i + \delta x^i = x^i + \frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}\delta p^{\alpha'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{\alpha'}\partial p^{\beta'}}\delta p^{\alpha'}\delta p^{\beta'} + \cdots.$$

Odavde neposredno dobijamo za koordinate infinetsimalnog pomeranja

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}\delta p^{\alpha'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{\alpha'}\partial p^{\beta'}} + \cdots.$$

Zaustavimo li se samo na malim veličinama prvoga reda u odnosu na priraštaje $\delta p^{\alpha'}$ parametara, za koordinate pomeranja čvrstoga tela imamo

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}} \delta p^{\alpha'}. \tag{27}$$

Izvodi $\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}$ zavise, prema /23/, od položaja tačke u odnosu na sistem koordinata $\bar{x}$ i od vrednosti $\{p^1, p^2\}$. Medjutim, transformacije /23/ pripadaju neprekidnoj grupi kretanja G_r, pa stoga, u izrazu za izvod $\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}$, kad eliminišemo promenljive $\bar{x}$ pomeđu /23/, dobijamo izraze oblika /11/ (cf. [16], p. 376):

$$\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}} = \sum_{1}^{r}{}_{\beta'} \xi^i_{\beta'}(x^1, \dots, x^n)\, \psi^{\beta'}_{\alpha'}(p^1, \dots, p^r), \tag{28}$$
$$(i = 1, \dots, n;\ \alpha' = 1, \dots, r)$$

u kome su izvodi koordinata tačke po parametrima linearne funkcije nekih funkcija $\xi^i_{\beta'}$, koje zavise isključivo od koordinata tačke u K_n i nekih funkcija $\psi^{\alpha'}_{\beta'}$, koje zavise isključivo od parametara p^1, ..., p^r, koje ćemo zvati parametrima položaja čvrstog tela u K_n.

Infinitezimalna pomeranja /27/ možemo sada da izrazimo u obliku

$$\delta x^i = \xi^i_{\alpha'}(x)\, \psi^{\alpha'}_{\beta'}(p)\, \delta p^{\beta'}, \tag{29}$$

u kome r vektora sa kontravarijantnim koordinatama ξ^i odredjuju pravac infinitezimalnih pomeranja tačaka čvrstog tela, pa stoga veličine $\xi^i_{\alpha'}$ možemo zvati koeficijentima infinitezimalnog pomeranja.

Ako su x'^i koordinate tačaka posle izvesnog infinitezimalnog pomeranja za δx^i, a x^i su koordinate tih tačaka pre pomeranja, onda na osnovu /26/ imamo

$$x'^i = x^i + \delta x^i, \tag{30}$$

odnosno

$$/30'/ \qquad x'^i - x^i = \delta x^i = \xi^i_{\beta'}(x)\, \psi^{\beta'}_{\alpha'}(p)\, \delta p^{\beta'}.$$

Jednačine /30/, odnosno /30'/, jesu jednačine infinitezimalnih transformacija naše r-točlane grupe kretanja G_r. Pri tim transformacijama element luka ds mora da ostane invarijantan

$$\delta(ds) = 0.$$

Iz /13/ sledi

$$\delta(ds^2) = \delta g_{ij}\, dx^i dx^j + g_{ij}\,(\delta dx^i dx^j + dx^i \delta dx^j),$$

a kako je

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k_{\alpha'}(x)\,\psi^{\alpha'}_{\beta'}(p)\,\delta p^{\beta'},$$

i

$$\delta dx^i = d(\delta x^i) = \frac{\partial \xi^i_{\alpha'}}{\partial x^j} dx^j\, \psi^{\alpha'}_{\beta'}\,\delta p^{\beta'},$$

to će biti

$$\delta(ds^2) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k_{\alpha'}\psi^{\alpha'}_{\beta'}\delta p^{\beta'} dx^i dx^j + g_{ij}\left(\frac{\partial \xi^i_{\alpha'}}{\partial x^k}dx^j + dx^i\frac{\partial \xi^j_{\alpha'}}{\partial x^k}\right)\psi^{\alpha'}_{\beta'}\delta p^{\beta'} dx^k,$$

ili, posle izmene nuknih indeksa

$$\delta(ds^2) = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k_{\alpha'} + \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^j} g_{ki}\right)\psi^{\alpha'}_{\beta'} dx^i dx^j \delta p^{\beta'}.$$

Pošto promena elementa luka mora da bude jednaka nuli pri transformacijama /30/, i to za sve vrednosti promenljivih x^i i parametara $p^{\alpha'}$, sledi da koeficijenti pomeranja $\xi^i_{\alpha'}$ moraju da zadovoljavaju sistem Killing-ovih jednačina ([21], p.167; [15], p.234; [22], p.328):

$$/31/ \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k_{\alpha'} + \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^j} g_{ki} = 0$$

$$(i,j,k = 1,\dots,n;\ \alpha' = 1,\dots,r)$$

Transformacije /23/ su medjusobno potpuno nezavisne, a otuda sledi da su i koordinate δx^i infinitezimalnih pomeranja, odn. infinitezimalne transformacije – što znači potpuno isto – medjusobno potpuno nezavisne, pa stoga rang matrice

$$\Xi = \| \xi^i_{\alpha} \|$$

mora biti n. Kako je rang $\Xi = n$ – potreban i dovoljan uslov /[15], p.226/ da naša grupa G_r bude tranzitivna, znači da transformacije /23/ svaku tačku prostora K_n mogu prevesti u ma koju drugu u napred datu tačku toga prostora, odnosno da:

Čvrsto telo u K_n možemo prevesti u ma koji, proizvoljan položaj u tom prostoru, tako da svaka tačka tela se može dovesti do poklapanja sa unapred odredjenim tačkama u K_n i pod uslovom da raspored tih u napred datih tačaka zadovoljava uslove /16/ iz definicije čvrstog tela u K_n.

3. Kretanje čvrstog tela u K_n oko nepomične tačke.

Uočimo u K_n neku tačku A, koja ili pripada posmatranom čvrstom telu, ili je za njega čvrsto vezana, i pretpostavimo da se telo kreće tako da je za celo vreme kretanja tačka A nepokretna u K_n. Otuda sledi da koeficijenti pomeranja ξ^i_{α}, moraju u tački A da imaju vrednosti $\xi^i_{\alpha}=0$, transformacije u A su prvoga reda i konačne jednačine transformacije /23/ ostavljaju tačku A invarijantnom.

Grupa G_r je, prema prethodnom paragrafu, tranzitivna i rang matrice Ξ je n. Medjutim, usled pretpostavke o nepomičnosti tačke A sledi da će u toj tački postojati svega r–n medjusobno nezavisnih transformacija grupe G_r, koje će obrazovati neku podgrupu G_N. /N=r–n= n(n–1)/2 / grupe G_r – to je podgrupa stabilnosti tačke A za grupu G_r.

Otuda možemo reći:

<u>Čvrsto telo u K_n, koje se kreće oko jedne nepomične tačke ima $n(n-1)/2$ stepeni slobode.</u>

Konačne jednačine /23/ sada ovaj slučaj svode na jednačine sa svega $n(n-1)/2$ nezavisnih parametara p^α, $(\alpha=1,\dots, n(n-1)/2)$, a izrazi za infinitezimalna pomeranja će glasiti

$$/32/ \qquad \delta x^i = \xi^i_\alpha(x)\,\psi^\alpha_\beta(p)\,\delta p^\beta, \qquad (i=1,\dots,n;\ \alpha,\beta=1,\dots,N)$$

Grupa G_N je intranzitivna, pa prema tome za svaku tačku tela postoji neki minimalni invarijantni multiplicitet, u čije se tačke može prevesti svaka odgovarajuća tačka čvrstog tela. Pošto je tačka A stabilna za grupu G_N, njen se minimalni invarijantni multiplicitet svodi na samu tu tačku. N parametara $p^1,\dots,p^N$ ćemo zvati parametrima orijentacije čvrstoga tela u K_n.

Dokažimo sada stav:

<u>Kad se čvrsto telo u K_n kreće oko jedne nepomične tačke, sve tačke tela pripadaju odredjenim hiperpovršinama familije geodeziski paralelnih hiperpovršina u K_n, koje su konstantne krivine.</u>

Izaberimo za početak koordinatnog sistema u K_n nepomičnu tačku A; prema definiciji čvrstog tela iz /16/ imamo

$$/33/ \qquad F(x^i_A;\ x^i) = \text{const.},$$

gde su $x^i_A=0$ koordinate tačke A, x^i tekuće koordinate neke tačke tela, a vrednost konstante sa desne strane jednačine /33/ je odredjena vrednošću koordinata početnog položaja tačke tela.

Izaberimo u tački A kao koordinatnom početku takav sistem koordinata da koordinatne krive x^n budu geodeziske linije. Pošto se integracija /16/ vrši duž geodeziskih linija, /33/ se svodi na

/34/ $$x^n = const.,$$

za svaku tačku tela, a kako je iz /33/:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}\, \delta x^i = 0,$$

očigledno je da su pomeranja tačaka tela uvek upravna na normale na hiperpovršinama /33/, odnosno, /34/. Prema tome hiperpovršine /33/ zaista pretstavljaju familiju geodeziski paralelnih hiperpovršina u K_n, a geodeziske linije koje prolaze kroz tačku A, jesu njihove ortogonalne trajektorije. Time je prvi deo stava dokazan.

Da bi smo dokazali da su hiprpovršine /33/, odn./34/, konstantne krivine, moramo prve da dokažemo neke pomoćne stavove:

I pomoćni stav -Geodeziski paralelne hiperpovršine nekog Riemann-ovog prostora V_n, čije su ortogonalne trajektorije geodeziske linije u V_n koje prolaze kroz jednu stalnu tačku toga prostora, nalaze se u medjusobnom konformnom odnosu.

Metričku formu u V_n možemo napisati u obliku

/35/ $$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j + e_n (dx^n)^2, \qquad (i,j = 1, \dots, n-1)$$
$$e_n = \pm 1$$

gde je x^n luk geodeziske linije koja prolazi kroz pol - tačku A, koja je upravna na familiju geodeziski paralelnih hiperpovršina. Za neku odredjenu vrednost $x^n =$ const. metrička forma /35/ jeste metrička forma odgovarajuće hiperpovršine posmatrane familije geodeziski paralelnih hiperpovršina.

U tački A je $x^n = 0$, a odgovarajuća hiperpovršina se svodi na tačku, pa stoga u A mora biti $g_{ij} = 0$.

Ako sada na jednoj od hiperpovršina posmatrane familije uočimo dva jedinična vektora $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$, takva da je $\lambda^n = \mu^n = 0$, na hiperpovršini $x^n = \overset{*}{0}$, kosinus ugla izmedju njih je

$$\cos(\vec{\lambda},\vec{\mu}) = \frac{{}_0g_{ij}\,\lambda^i\mu^j}{[({}_0g_{ij}\lambda^i\lambda^j)({}_0g_{ij}\mu^i\mu^j)]^{1/2}}.$$

Izvršimo li paralelno pomeranje tih dvaju vektora duž geodeziske linije x^n do neke druge hiperpovršine $x^n = x^n_1$ posmatrane familije, vrednosti koordinata vektora se neće promeniti, vrednosti koordinata metričkog tenzora će se promeniti od ${}_0g_{ij}$ na ${}_1g_{ij}$, a kosinus ugla izmedju ta dva vektora se neće promeniti jer smo izvršili paralelno pomeranje tih vektora duž geodeziske linije. Otuda sledi da koordinate metričkog tenzora na pojedinim hiperpovršinama prostora V_n moraju biti proporcionalne

$${}_0g_{ij} = u \cdot {}_1g_{ij},$$

a odgovarajući elementi lukova na tim hiperpovršinama su u odnosu

$$ds_0^2 = u\, ds_1^2,$$

gde je u neka funkcija, u opštem slučaju od $x^1,\dots,x^n$ i ima tu osobinu da je $u(x^n=0)=0$. Proporcionalnost metričkog tenzora i metričkih formi dvaju hiperpovršina jeste potreban i dovoljan uslov da se te hiperpovršine nalaze u konformnom odnosu, pa je time prvi pomoćni stav dokazan.

II pomoćni stav – Ako neki Riemann-ov prostor dopušta familiju geodeziski paralelnih hiperpovršina koje se nalaze u konformnom odnosu, linije krivina tih hiperpovršina su neodredjene.

Potreban i dovoljan uslov da neka hiperpovršina u V_n ima neodredjene linije krivina jeste da su koordinate njene druge osnovne metričke forme Ω_{ij} /i,j=1,...,n-1/ proporcionalne koordinatama prve osnovne metričke forme g_{ij} posmatranog prostora V_n. Neka jednačine hiperpovršina V_{n-1} u V_n budu

$$x^i = x^i(y^1,\dots,y^{n-1}), \qquad (i=1,\dots,n)$$

i neka koordinatne linije sa parametrom x^n budu geodeziske linije u V_n, upravne na V_{n-1}, tako da su hiperpovršine V_{n-1} date sa x^n=const. Prema Bianchi-jevoj teoremi /[24],p.359; [15],p.158 /, koordinate drugog osnovnog tenzora su

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}\right)_{x^n=0} ,$$

Pošto su hiperpovršine V_{n-1} po pretpostavci u medjusobno konformnom odnosu, za g_{ij} imamo

$$g_{ij} = \varphi\, g'_{ij},$$

gde φ zavisi od $x^1, \ldots, x^n$, a g'_{ij} samo od $x^1, \ldots, x^{n-1}$, pa je

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)_{x^n=0}\right] g'_{ij}$$

ili, zbog $g'_{ij} = \frac{1}{\varphi} g_{ij}$:

$$\Omega_{ij} = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)_{x^n=0}\right] g_{ij},$$

i potreban i dovoljan uslov da hiperpovršine V_{n-1} imaju neodredjene linije krivine je zadovoljen.

Iz prvog i drugog pomoćnog stava i Levy-jeve teoreme -potreban i dovoljan uslov da hiperpovršine Riemann-ovih prostora konstantne krivine budu konstantne krivine jeste da linije krivina tih hiperpovršina budu neodredjene - neposredno sledi drugi deo našeg osnovnog stava. /[25]; [15],p.218)/.

G_N je grupa stabilnosti nepomične tačke A, čvrsto vezane za posmatrano čvrsto telo u K_n, pa su konačne jednačine grupe G_N

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; p^1, \ldots, p^N). \quad (i=1, \ldots, n) \tag{36}$$

Proučimo sada kretanje čvrstog tela u K_n oko nepomične tačke, kada to telo ima jedan stepen slobode, odnosno kada se grupa G_N svede ~~na podgrupu G~~

na podgrupu G_1, dobivemo iz /36/ stavljanjem da su svi parametri $\rho^2, \ldots, \rho^N$ konstantni za celo vreme kretanja, a samo jedan parametar, ρ^1, može da uzima proizvoljne vrednosti. Za koordinate infinitezimalnih pomeranja neke tačke $M(x^i)$ posmatranog čvrstog tela imamo u tom slučaju

/37/ $$\delta x^i = \xi^i(x)\,\psi(\rho^1)\,\delta\rho^1. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

U K_n možemo uvek izabrati takav sistem koordinata da bude $\xi^i = 0$, /i=1,...,n-1/; $\xi^n = 1$. Takodje, transformacijom $q = \int_{\rho_0^1}^{\rho^1} \psi(\rho^1)\,d\rho^1$, dobivamo za /37/

/38/ $$\delta x^i = 0; \quad \delta x^n = \delta q. \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

Potražimo sada geometrisko mesto tačaka čvrstoga tela u prostoru K_n koje će biti stabilne, tj. , koje neće menjati svoj položaj i svoje koordinate pri infinitezimalnim pomeranjima /38/.

Za tako izabrane koordinate da bude $\xi^1 = \ldots = \xi^{n-1} = 0, \xi^n = 1$, Killing-ove jednačine /31/ glase

/39/ $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Odakle sledi da koordinate metričkog tensora ne zavise od x^n. Intenzitet pomeranja ma koje tačke u prostoru K_n pri infinitezimalnim pomeranjima /38/ grupe G_1 jeste

$$(\delta s)^2 = g_{ij}\,\delta x^i\,\delta x^j = g_{nn}(\delta q)^2,$$

pa je očigledno da se neće pomerati samo one tačke u prostoru K_n koje zadovoljavaju jednačinu

/40/ $$g_{nn} = 0.$$

Zbog /39/ možemo staviti

/41/ $$g_{nn} = f(x^1, \cdots, x^{n-1}) = 0,$$

odakle se vidi da jednačina /40/ odredjuje neki podprostor u K_n, koji je stabilan pri transformacijama grupe G_1 i sadrži tačku A, koja je takodje stabilna pri tim transformacijama. Kroz tačku A u podprostoru /40/ možemo postaviti n-2 medjusobno linearno nezavisnih vektora, koji će biti invarijantni pri transformacijama grupe G_1, datim sa /38/, ([22] ,p. 294), a otuda sledi da postoji neki (n-2)-dimenzionalni totalno geodesiski podprostor prostora K_n, koji sadrži tačku A i stabilan je pri transformacijama podgrupe G_1 grupe G_N. Otuda imamo:

U Riemann-ovim prostorima konstantne krivine K_n infinitezimalno kretanje čvrstog tela oko jedne nepomične tačke može se rastaviti u niz od n(n-1)/2 medjusobno nezavisnih kretanja oko n(n-1)/2 totalno geodesiskih (n-2)-dimenzionalnih podprostora prostora K_n koji sadrže tu tačku.

Kod infinitezimalnog pomeranja odredjenog jednačinama /37/ postoje dva medjusobno potpuno nezavisna činioca – ξ^i zavisi isključivo od položaja tačke u čvrstome telu, a ψ zavisi isključivo od vrednosti parametra p^1. Ako stavimo da je $\delta u^1 = \psi(p^1)\delta p^1$, za infinitezimalno pomeranje imamo

$$\delta x^i = \xi^i(x)\delta u^1.$$

U opštem slučaju pomeranja oko nepomične tačke možemo staviti

$$\delta u^\alpha = \psi^\alpha_\beta(p)\,\delta p^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, N)$$

i jednačine /32/ glase

/42/ $$\delta x^i = \xi^i_\alpha \delta u^\alpha \qquad (i = 1, \cdots, n;\ \alpha = 1, \cdots, N)$$

Veličine δu^{α}, pošto ne zavise od položaja u K_n, odredjuju izvesna pomeranja u nekom konfiguracionom prostoru $\mathcal{A}_N$, koji je konfiguracioni kinematički prostor za čvrsto telo u K_n; u $\mathcal{A}_N$ su p -ovi koordinate tačke. Na osnovu jednačina /42/ možemo reći da su pomeranja tačaka čvrstog tela u K_n u stvari pomeranja reprezentativne tačke u $\mathcal{A}_r$, preslikana na pojedine tačke tela. Veličine ξ^i_{α} pri tome igraju ulogu elemenata matrice koja to preslikavanje vrši.

4. Kretanje čvrstog tela sa stalnom orijentacijom u K_n.

Stavimo da su u opštoj grupi transformacija G_r, N parametara podgrupe G_N, koju smo proučavali u prethodnom odeljku, stalni. Tako dobivena podgrupa G_n /r-N=n/ jeste tranzitivna i njene jednačine infinitezimalnog pomeranja glase

$$\delta x^i = \xi^i_{k'}(x)\,\psi^{k'}_{\ell'}(p)\,\delta p^{\ell'}, \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,n \\ k',\ell'=N+1,\dots,r \end{pmatrix}$$

a konačne jednačine glase

/43/ $$x^i = x^i(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n;\ p^{N+1},\dots,p^r).$$

Uočimo neku tačku A, koja je čvrsto vezana za posmatrano telo i neka u njoj bude početak sistema koordinata $\bar{x}$: $\bar{x}_A = 0$, pa je

/44/ $$x^i_A = x^i(p^{N+1},\dots,p^r),$$

odakle sledi da n parametara tranzitivne grupe G_n jesu funkcije položaja jedne odredjene ali arbitrarne tačke tela.

Pošto je grupa G_n tranzitivna, rang matrice $\| \xi^i_{i'} \|$ je n i jednačine /44/ možemo rešiti po parametrima $p^{N+1},\dots, p^r$:

$$p^{i'} = p^{i'}(x^1_A,\dots,x^n_A) \qquad (i'=N+1,\dots,r)$$

što bi zamenom u /43/ dalo

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n;\ x_A^1, \ldots, x_A^n),$$

pa bi za koordinate infinitezimalnog pomeranja tačaka tela imali:

/45/ $$\delta x^i = \xi^i_{j'}(x)\, \psi^{j'}_k(x_A)\, \delta x^k_A. \qquad \left(\begin{matrix} i,k = 1,\ldots,n \\ j' = N+1,\ldots,r \end{matrix}\right)$$

Ovakvo pomeranje odgovara u euklidskom prostoru translaciji, o čemu u našem slučaju ne može biti reči. Pri translatornom pomeranju sve tačke tela opisuju lukove jednakih dužina i vektori pomeranja $\vec{\xi}_{i'}$ pri tome pripadaju polju paralelnih vektora. Da bi vektori $\vec{\xi}_{i'}$ pripadali polju paralelnih vektora u K_n, morale bi njihove koordinate da zadovoljavaju sistem jednačina

/46/ $$\frac{\partial \xi^i_{i'}}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \xi^k_{i'} = 0.$$

Uslovi integrabilnosti ovih jednačina su

/47/ $$\xi^j_{i'}\, R^i_{jke} = 0.$$

Medjutim, za K_n je, prema /15/:

$$R_{pjke} \overset{!}{=} K(g_{pk}\, g_{je} - g_{pe}\, g_{jk}),$$

pa je

$$R^i_{jke} = K(g_{je}\, \delta^i_k - g_{jk}\, \delta^i_e).$$

Zamenom ove vrednosti u /47/, dobivamo kao uslov integrabilnosti sistema jednačina /46/:

/48/ $$\xi^j_{i'}(g_{je}\, \delta^i_k - g_{jk}\, \delta^i_e) = 0.$$

Za i=k, pošto je $\delta_k^k=1$, /ne sabirati po indeksu k/ i $\delta_\ell^k=0$ za $k\neq\ell$, imamo $\xi_{i'}^j g_{j\ell}=0$; za $i=\ell$, $k\neq\ell$, imamo $\xi_{i'}^j g_{jk}=0$ i jednačine /48/ se svode na oblik: /49/

$$/49/ \qquad \xi_{i'}^j g_{jk}=0, \qquad (j,k=1,\dots,n;\ i'=n+1,\dots,t)$$

što važi za sve vrednosti indeksa k.

Za prostore sa definitnom metrikom je $|g_{ij}|\neq 0$, prostori sa indefinitnom metrikom dopuštaju beskonačno mnogo rešenja jednačina /49/, a za ravne prostore jednačine /47/ su identički zadovoljene zbog $R^i_{jk\ell}=0$ i otuda imamo:

<u>Riemann-ovi prostor konstantne krivine ne dopuštaju translatorno pomeranje čvrstoga tela, u koliko nisu ravni, ili im metrika nije indefinitna.</u>

n^2 veličina $\xi_{j'}^i$ pretstavljaju n polja vektora $\vec{\xi}_{j'}$ u K_n, koji odredjuju n kongruencija krivih linija u K_n. Svaki vektor $\vec{\xi}_{j'}$ u K_n možemo da izrazimo linearno pomoću n uzajamno upravnih vektora $\vec{\eta}_{i'}=\{\eta_{i'}^i\}$ tako da izrazi /45/ mogu da se napišu u obliku

$$\delta x^i = \eta_{i'}^i \psi_j^{i'} \delta x_A^j$$

i imamo sledeću teoremu:

<u>Kada se čvrsto telo u K_n pomera tako da mu je orijentacija u K_n nepromenljiva za vreme kretanja, onda se to pomeranje može razložiti u n medjusobno nezavisnih i uzajamno upravnih pomeranja. Kongruencija krivih $\eta_{i'}^i$ jesu tada putanje tačaka tela.</u>

<u>5. Opšti zaključci o kinematici čvrstog tela u K_n.</u>

U Riemann-ovom prostoru konstantne krivine K_n može da postoji i da se kreće čvrsto telo i ono ima n(n+1)/2 stepeni slobode. Prema razmatranjima iz odeljka 3. i 4., položaj čvrstoga tela u K_n je odredjen ako znamo n koordinata x_A^i, /i=1,...,n/ neke proizvoljne, ali utvrdjene tačke tog tela imamo znamo vrednosti $n(n-1)/2$ parame - tara p^α, $/\alpha=1,\dots,n(n-1)/2/$ koji odredjuju orijentaciju nekog sistema koordinata čvrsto vezanog za telo u odnosu na sistem koordinata koji je nepokretan u prostoru. Prema tome je položaj neke tačke tela M sa koordinatama x^i i $\bar{x}^i$ u odnosu na nepokretan sistem koordinata x, odn. čvrsto vezan za telo, odredjen pomoću jednačina

$$/50/ \qquad x^i = x^i(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n;\, x_A^1,\dots,x_A^n;\; p^1,\dots,p^N), \quad (i=1,\dots,n)$$

pri čemu takodje važe i jednačine

$$/51/ \qquad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1,\dots,x^n;\, x_A^1,\dots,x_A^n;\; p^1,\dots,p^N),$$

jer jednačine /50/ dopuštaju inverziju. ~~xxxx~~

$n(n+1)/2$ paramentara x_A^i i p^α, koji odredjuju položaj čvrstoga tela možemo smatrati koorinatama reprezentativne tačke u nekom r-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{R}_r$, koji je konfiguracioni prostor za to telo. Svakom položaju čvrstog tela u K_n odgovara jedna tačka u $\mathcal{R}_r$, a svakoj tački u $\mathcal{R}_r$ odgovara beskonačno mnogo tačaka u K_n, prema jednačinama /50/ ili /51/. Za date vrednosti $\bar{x}^i$ svakoj vrednosti koordinata tačke u $\mathcal{R}_r$ odgovara samo jedna tačka u K_n, pa možemo reći da jedbačine /50/ preslikavaju na odredjeni način tačke konfiguracionog prostora u sve tačke datog prostora K_n. Slično važi i za jednačine /51/. Otuda vidimo da ako su date konačne jednačine kretanja čvrstog tela u K_n:

$$/52/ \qquad \begin{aligned} x_A^i &= x_A^i(t), \\ p^\alpha &= p^\alpha(t); \end{aligned} \qquad (i=1,\dots,n;\ \alpha=1,\dots,N)$$

za odredjene vrednosti $\bar{x}^i$ ili x^i dobijamo u K_n direktno ili inversno kretanje, što je u potpunoj analogiji sa kretanjem čvrstog tela u E_3. ~~xxxxxx~~

Takodje, na osnovu rezultata u odeljcima 3. i 4. vidimo da svako infinitezimalno kretanje čvrstog tela u K_n možemo da razložimo u dve vrste komponentnih kretanja: u kretanje tela koje je potpuno odredjeno poznavanjem kretanja jedne tačke tela, pri čemu orijentacija tela ostaje nepromenjena i u kretanje tela oko jedne tačke. Za koorinate infinitezimalnog pomeranja tačke tela u opštem slučaju možemo napisati

$$/53/ \qquad \delta x^i = \xi^i_\alpha(x)\psi^\alpha_\beta(x_A;p)\delta p^\beta + \xi^i_{i'}(x)\psi^{i'}_j(x_A;p)\delta x^j_A .$$

Uvedemo li oznake

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta x^i}{\delta t} = \dot{x}^i;\quad \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta p^\alpha}{\delta t} = \dot{p}^\alpha;\quad \lim\frac{\delta x^i_A}{\delta t} = \dot{x}^i_A,$$

veličine $\dot{x}^i$, $\dot{p}^\alpha$ i $\dot{x}^i_A$ pretstavljaju koordinate generalisanih brzina i to $\dot{x}^i$ je generalisana brzina tačke tela sa koordinatama $\bar{x}^i$; $\dot{p}^\alpha$ i $\dot{x}^i_A$ su koordinate generalisane brzine representativne tačke tela ukonfiguracionom prostoru $\mathfrak{M}_r$, koje možemo još protumačiti i kao generalisane brzine samog čvrstog tela u K_n. Ako stavimo da je $\dot{x}^i_M = v^i_M$, a $\dot{x}^i_A = v^i_A$ i uvedemo oznaku $\psi^\alpha_\beta \dot{p}^\beta = \omega^\alpha$, iz /53/ ćemo dobiti izraz u obliku

$$/54/ \qquad v^i = \xi^i_\alpha \omega^\alpha + \xi^i_{i'}\psi^{i'}_j v^j_A ,$$

koji će nam biti koristan pri daljim rasudjivanjima.

Veličine v^i_A su u stvari koordinate brzine neke nošene tačke A posmatranog čvrstog tela; medjutim, veličine ω^α nemaju nikakvu sličnu interpretaciju. U slučaju n=3 i u slučaju kad se K_n svodi na euklidski prostor, ω^α se svodi na vektor ugaone brzine, što je u opštem slučaju, očigledno, nemogućno.

Radi uniformnosti pisanja možemo staviti da je

$$\psi^{i'}_{\;j}\, v^{j}_{A} = \omega^{i'}_{\;1}$$

tako da u mesto /54/ imamo

/55/ $$v^{i} = \xi^{i}_{\alpha'}\, \omega^{\alpha'} \qquad (\alpha' = 1, 2, \dots, r)$$

Veličine $\omega^{\alpha'}$ su neke linearne funkcije generalisanih brzina u kinematičkom konfiguracionom prostoru $\mathcal{A}_r$:

/56/ $$\omega^{\alpha'} = \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, \dot{\rho}^{\beta'}$$

i stoje u vezi sa pseudo-koordinatama $u^{\alpha'}$, uvedenim pomoću

$$\delta u^{\alpha'} = \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, \delta\rho^{\beta'}_{1}$$

koje odredjuju koordinate infinitesimalnog pomeranja u $\mathcal{A}_r$.

Sa ovako definisanim i prikazanim kinematičkim veličinama, vezanim za kretanje čvrstog tela u K_m, problem odredjivanja tog kretanja se svodi na iznalaženje konačnih jednačina kretanja /53/ reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru, odakle je posle toga moguće nalaženje konačnih jednačina kretanja za pojedine tačke tela.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE ZA KRETANJE ČVRSTOG TELA U RIEMANNovim PROSTORIMA KONSTANTNE KRIVINE

6. Živa sila čvrstog tela u K_n i metrička forma konfiguracionog prostora.

Brzina ma koje tačke $M_\nu(x_\nu)$ čvrstog tela u K_n je funkcija položaja te tačke i koordinata brzine reprezentativne tačke u konfiguracionom pristoru $\mathcal{R}_r$, pa na osnovu izraza za infinitezimalna pomeranja tačaka tela u opštem slučaju imamo

$$v_\nu^i = \xi^i_{\alpha'}(x_\nu)\,\psi^{\alpha'}_{\beta'}(p)\,\dot p^{\beta'}, \qquad (i=1,\dots,n;\ \alpha',\beta'=1,\dots,r)$$

gde za $\beta'=1,2,\dots,N$ parametri $p^{\beta'}$ su parametri orijentacije tela u K_n, a za $\beta'=N+1,N+2,\dots,r$ ti parametri su neke funkcije položaja izvesne arbitrerne, ali odredjene, tačke tela.

Svakoj tački M_ν posmatranog čvrstog tela možemo da asocijiramo izvesnu masu, tako da sistem tačaka $M_1, M_2, \dots$, sa kojima smo obrazovali čvrsto telo sada pretstavlja izvestan čvrst sistem materijalnih tačaka, odnosno materijalno čvrsto telo. Za ovako definisano čvrsto telo u K_n možemo da uvedemo pojam žive sile i na osnovu nje da definišemo metriku konfiguracionog prostora.

Po definiciji je živa sila posmatranog čvrstog tela:

$$2T = \Sigma_\nu m_\nu\, g_{ij}(x_\nu)\, v_\nu^i\, v_\nu^j,$$

gde se zbir po indeksu ν prostire na sve materijalne tačke koje obrazuju čvrsto telo. Na osnovu izraza /55/ za živu silu možemo pisati

$$2T = \Sigma_\nu m_\nu\, g_{ij}(x_\nu)\, {}_\nu\xi^i_{\alpha'}\, {}_\nu\xi^j_{\beta'}\, \omega^{\alpha'}\omega^{\beta'},$$

ili, ako stavimo da je

/57/ $$\Sigma_\nu m_\nu\, g_{ij}\, \xi^i_{\alpha'}\, \xi^j_{\beta'} = J_{\alpha'\beta'},$$

konačno imamo

/58/ $$2T = J_{\alpha'\beta'}\,\omega^{\alpha'}\omega^{\beta'}.$$

Veličine $J_{\alpha'\beta'}$, definisane u /57/, pretstavljaju elemente generalisane inercione matrice ([26], p.71) za posmatrano čvrsto telo. Iz definicije se lako možemo uveriti da je inerciona matrica simetrična, tj. da je

$$J_{\alpha'\beta'} = J_{\beta'\alpha'}.$$

Dajući indeksima α' i β' vrednosti redom od 1 do N $\left(=n(n-1)/2\right)$ i od N+1 do r $\left(=n(n+1)/2\right)$, dobijamo tri vrste elemenata inercione matrice

a/ $$J_{\alpha\beta} \equiv \Sigma_\nu m_\nu g_{ij}\xi^i_\alpha \xi^j_\beta; \quad (\alpha,\beta = 1,\dots,N)$$

b/ $$J_{\alpha i'} \equiv \Sigma_\nu m_\nu g_{ij}\xi^i_\alpha \xi^j_{i'}; \quad (\alpha = 1,\dots,N;\ i' = N+1,\dots,r)$$

c/ $$J_{i'j'} \equiv \Sigma_\nu m_\nu g_{ij}\xi^i_{i'} \xi^j_{j'}. \quad (i', j' = N+1,\dots,r)$$

U slučaju Dekartovih koordinata u E_3, elementi $J_{\alpha\beta}$, definisani u a/, postaju elementi matrice tenzora inercije, elementi $J_{\alpha i'}$ postaju koordinate vektorskog planarnog linearnog momenta, a elementi $J_{i'j'}$ postoje samo za $i'=j'$ i imaju vrednost celokupne mase čvrstog tela.

Na mesto izraza $\omega^{\alpha'}$, možemo u /58/ da stavimo vrednosti iz /56/:

/59/ $$2T = J_{\alpha'\beta'}\,\psi^{\alpha'}_{\lambda'}\psi^{\beta'}_{\mu'}\dot{p}^{\lambda'}\dot{p}^{\mu'}$$

$$\gamma_{\alpha'\beta'}\,\psi^{\alpha'}_{\lambda'}\,\psi^{\beta'}_{\mu'} = h_{\lambda'\mu'}$$

imamo za živu silu

$$2T = h_{\lambda'\mu'}\,\dot p^{\lambda'}\,\dot p^{\mu'},$$

gde je $h_{\lambda'\mu'}$ dva puta kovarijantan tenzor u konfiguracionom prostoru. Tenzor $h_{\lambda'\mu'}$ je osnovni metrički tenzor konfiguracionog prostora, za koji smo elemenat luka izabrali kinematički linijski elemenat

/60/ $$ds^2 = 2T\,dt^2 = h_{\lambda'\mu'}\,dp^{\lambda'}\,dp^{\mu'}. \quad (\lambda',\mu' = 1,2,\dots,r)$$

7. Diferencijalne jednačine kretanja čvrstog tela u K_n.

Neka na posmatrano čvrsto telo deluje sila $\vec{F}$, koja je rezultujuća svih sila koje deluju na to telo, tako da na pojedine tačke tela M_ν deluje sila sa koordinatama ${}_{(\nu)}X^i$. Elementarni rad te sile na infinitezimalnom pomeranju tačke tela δx_ν^i će biti

$$\delta A_{(\nu)} = {}_{(\nu)}X_i\,\delta x_\nu^i. \qquad (i = 1,\dots,n)$$

Kako je prema ranijem

$$\delta x_\nu^i = \xi^i_{\alpha'}(x_\nu)\,\psi^{\alpha'}_{\beta'}(p)\,\delta p^{\beta'},$$

za elementarni rad imamo

$$\delta A_{(\nu)} = {}_{(\nu)}P_{\alpha'}\,\delta p^{\alpha'},$$

gde je

$${}_{(\nu)}P_{\alpha'} = {}_{(\nu)}X_i\,\xi^i_{\beta'}\,\psi^{\beta'}_{\alpha'}.$$

Elementarni rad ukupno svih sila koje deluju na telo će biti

$$\delta A = \Sigma_\nu\,\delta A_{(\nu)},$$

a veličine

$$P_{\alpha'} = \Sigma_{\nu} \, {}_{(\nu)}P_{\alpha'} \tag{61}$$

pretstavljaju generalisane koordinate sile u konfiguracionom pro - storu odredjenom metričkom formom /60/.

Kretanje čvrstog tela u K_n može da se proučava kao kretanje jedne, reprezentativne, tačke u konfiguracionom prostoru, čija je metrika data sa /60/, a koordinate tačke su $p^{1'}, \dots, p^{r'}$. Za izvo- djenje diferencijalnih jednačina kretanja je nužno pre svega usvojiti izvesne osnovne pretpostavke kojima bi bila uspostavljena veza izmedju sile koja deluje na reprezentativnu tačku sa jedne strane, i sa druge strane kinematičkih elemenata i mase te tačke. Mi ćemo ovde usvojiti Newton'ove aksiome i osnovne dinamičke jednačine se stoga mogu napisati u obliku ekvivalentnom sa Lagrange-evim jednačinama.

Za poznatu živu silu /59/, ili metričku formu /60/ konfiguracionog prostora i za date sile, čije su generalisane koordinate u konfiguracionom prostoru date sa /61/, diferencijalne jednačine kretanja /Lagrange-evog tipa/ za čvrsto telo u K_n sada glase:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot p^{\alpha'}}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot p^{\alpha'}}\right) - \left\{ {\gamma' \atop \alpha'\beta'} \right\} \frac{\partial T}{\partial \dot p^{\gamma'}} \dot p^{\beta'} = P_{\alpha'}, \qquad (\alpha', \beta', \gamma' = 1, \dots, r) \tag{62}$$

gde $\frac{D}{Dt}$ označava apsolutni izvod /Bianchi-jev/ po skalarnoj pro - menljivoj t /vremenu/, a $\left\{ {\gamma' \atop \alpha'\beta'} \right\}$ su Christoffel-ovi simboli II vrste formirani u odnosu na metriku /60/.

Iz Lagrange-evih jednačina /62/, koje pretstavljaju sistem od r jednačina drugog reda po $p^{\alpha'}$ kao nepoznatim funkcijama od vremena, možemo kao diferencijalne jednačine kretanja čvrstog tela u K_n da uvedemo sistem od 2r jednačina prvog reda po nepoznatim funkcijama $\omega^{\alpha'}$ i $p^{\alpha'}$, koje će u isto vreme pretstavljati izvesnu generalizaciju Klimovičevih jednačina [27] za kretanje čvrstog tela u E_3.

Pretpostavimo da su koeficijenti $\psi^{\alpha'}_{\beta'}$ takvi da je determinanta $|\psi^{\alpha'}_{\beta'}|$ identički različita od nule /što smemo pretpostaviti na osnovu izlaganja u odljku G.11./, pa na osnovu /56/ možemo napisati i inverzne izraze

$$\dot{\rho}^{\alpha'} = \phi^{\alpha'}_{\beta'}\,\omega^{\beta'}, \tag{63}$$

gde su $\phi^{\alpha'}_{\beta'}$ elementi matrice recipročne sa matricom $\|\psi^{\alpha'}_{\beta'}\|$. Takodje imamo da je

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}^{\alpha'}} = \psi^{\beta'}_{\alpha'}\frac{\partial T}{\partial \omega^{\beta'}},$$

pa zamenom u /62/ dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^{\lambda'}}\right)\psi^{\lambda'}_{\beta'} + \left(\frac{\partial \psi^{\nu'}_{\beta'}}{\partial \rho^{\sigma'}} - \left\{{\rho' \atop \lambda'\sigma'}\right\}\psi^{\nu'}_{\rho'}\right)\phi^{\sigma'}_{\mu'}\frac{\partial T}{\partial \omega^{\nu'}}\,\omega^{\mu'} = P_{\beta'}.$$

Množeći ovaj izraz sa $\phi^{\beta'}_{\zeta'}$ i sabirajući po β', zbog

$$\psi^{\lambda'}_{\beta'}\phi^{\beta'}_{\zeta'} = \delta^{\lambda'}_{\zeta'},$$

gde je $\delta^{\lambda'}_{\zeta'}$ Kroneckerov simbol, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^{\zeta'}}\right) + \Gamma^{\nu'}_{\zeta'\mu'}\frac{\partial T}{\partial \omega^{\nu'}}\,\omega^{\mu'} = \Omega_{\zeta'}, \tag{64}$$

gde je

$$\Gamma^{\nu'}_{\zeta'\mu'} = \psi^{\nu'}_{\beta';\sigma'}\,\phi^{\sigma'}_{\mu'}\,\phi^{\beta'}_{\zeta'}\ ;\quad \Omega_{\zeta'} = P_{\beta'}\phi^{\beta'}_{\zeta'},$$

/tačka i zapeta pred indeksom označavaju kovarijantan izvod po promenljivoj $\rho^{\sigma'}$ u konfiguracionom prostoru/.

Jednačine /64/ pretstavljaju tražene generalisane Klimovičeve jednačine, u kojima je $\frac{\partial T}{\partial \omega^{\alpha'}}$ uopšteni delimični gradijent

Žive sile;

zajedno sa jednačinama /63/ te jednačine pretstavljaju sistem od 2r jednačina prvoga reda čijih opšti integrali potpuno rešavaju problem kretanja čvrstog tela u K_n.

LITERATURA

[1] M.Born, Ann. d. Physik, 30 /1909/, 1-56

[2] G.Herglotz, Ann. d. Physik 31 /1910/, 393-415

[3] F.Noether, Ann. d. Physik 31 /1910/, 919-944

[4] M.Galli, Atti Accad.Naz. Lincei,Cl.Sci.Mat.Fis.Nat. 8,12 /1952/,86-92

[5] T.Levi-Civita, The Absolute Differential Calculus, Blackie & Son, London,1947

[6] J.L.Synge, Relativistically Rigid Surfaces, Stud.Math.Mech. Presented to Richard von Mises, Academic Press Inc. New-York, 1954, 217-226

[7] J.L.Synge & A.Shild, Tensor Calculus, Univ. Of Toronto Press, 1949

[8] R.Stojanović, Diferencijalne Jednačine za Kretanje Čvrstog Tela u Tenzorskom Obliku, Vesnik Društva Mat.Fiz.NRS, 1-2 /1952/, 43-49

[9] O.Bottema & H .J.Beth, Eulers Equations for the Motion of a Rigid Body in n-dimensional Space, Indigationes Math. 13 /1951/, 106-108

[10] Th. De Donder, Movement d'un Solide dans un Espace de Riemann, Bull. Ac.Sci. Belgique /Cl. des Sci./ Tome XXVIII, 1942, 8-16

[11] Th. De Donder, Movement d'un Solide dans un Espace Riemannien, Bull.Ac.Sci. Belgique,/Cl.des Sci./, Tome XXVIII, 1942, 60-66

[12] P.Melchior, Sur la Dynamique des Solides, Bull.Ac.Sci. Belgique /Cl. des Sci. seance du 4.IV.1948

[13] P.Melchior, Sur la Dynamique des Solides, Bull.Ac.Sci. Belgique /Cl. des Sci, seance du 16.X.1948

[14] H.Van Bergen, Movement d'un Solide dans un Espace Riemannien, Bull. Ac. Sci. Belgique /Cl. des Sci./, Tome XXXV, 1949-1, 186

[15] L.P.Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, 1949

[16] S.Lie, Vorlesungen über die continuierliche Gruppen, Teubner, Leipzig,1893

[17] L.P.Eisenhart, Continuous Groups of Transformations, Princeton Univ.Press 193

[18] F.Shur, Über den Zusammenhang der Räume konstanten Krümmungmasse mit den projektiven Räumen, Mat.Annalen,Vol.27, 1886

[19] R.Stojanović, Kretanje Čvrstog Tela u Dvodimenzionalnim Riemann-ovim prostori Glas Odelenja Prirodno-matematičkih Nauka SAN /u štampi/

[20] E.B.Christoffel, Über den Transformatinen der homogenen Differentialausdücke zweiten Grades, Jouranl für die reine und angew. Mat. /Crelle/, Vol.70 /1869/, 46-70

[21] W.Killing, Über die Grundlagen der Geometrie, Journal für die reine und angew Mat. /Crelle/, Vol.109, /1892/,121-186

[22] E.Cartan, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Deuxième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1946

[23] L.Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale, Spoeri, Pisa, 1903

[25] H. Levy, Tensors determined by a Hypersurface in a Riemannian Space, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 28, 1952

[26] A. Bilimović, Racionalna Mehanika II, Mehanika Sistema, Naučna Knjiga, Beograd, 1951

[27] A. Bilimović, Jednačine Kretanja Čvrstog Tela u Novoj Vektorskoj Formi, Glas Srpske Kraljevske Akademije, knj. CXXVII, Beograd, 1927