Über die *O*-Inversionssätze der Limitierungsverfahren.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Arbeit „Über einen Satz von Vijayaraghavan" [Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 737–740] habe ich gezeigt, wie sich der O-Inversionssatz Vijayaraghavans:

Aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu r^\nu = O(1), \quad \text{bei} \quad r \to 1,$$

und

$$\sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu \geqq -m(\lambda), \quad \textit{für jedes } n \textit{ und } n \leqq n' \leqq \lambda n, \quad \lambda > 1,$$

folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = O(1), \quad \text{bei} \quad n \to \infty,$$

auf Laplacesche Integrale erweitern läßt.

Hier möchte ich eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes geben, in welcher der Kern $r^\nu = e^{-\sigma\nu}$ die allgemeinere Form $\varphi(\sigma\nu)$ annimmt, wo $\varphi(t)$ eine im Intervalle $(0, \infty)$ abnehmende Funktion bedeutet.

Es wird also dieser O-Inversionssatz auf Limitierungsverfahren der Form

(I) $$\Phi(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \varphi(\sigma\nu), \quad \text{wobei} \quad \sigma \to 0\,[1]),$$

erweitert, welche ebenfalls in der Integralform

(II) $$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\}$$

[1]) Mit O-Inversionssätzen bezeichne ich diejenigen Sätze, welche aus $\Phi(\sigma) = O(1)$, $\sigma \to 0$, auf $\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = O(1)$, $n \to \infty$, zu schließen erlauben, im Gegensatz zu den o-Inversionssätzen, bei welchen in der vorstehenden Bezeichnung O durch o zu ersetzen ist.

dargestellt werden können, wenn dabei

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu, & \text{für } n < t \leqq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

gesetzt wird.

Was die Beweisanordnung betrifft, kann das Verfahren meiner erwähnten Arbeit nicht auf diesen allgemeinen Fall angewendet werden. Es wird vielmehr, dem Prinzip nach, eine Beweisanordnung angewandt, welche Herr E. Landau benützte, um den erwähnten Vijayaraghavanschen Satz zu beweisen, und die er mir brieflich mitgeteilt hatte.

Dieser allgemeine O-Inversionssatz lautet:

Satz A. *Sei $\varphi(t)$ eine im Intervalle $(0, \infty)$ stetige und nicht zunehmende Funktion, für welche die Reihen*

(1) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\lambda^\nu) \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \{1 - \varphi(\lambda^{-\nu})\}, \quad \textit{für ein } \lambda > 1,$$

konvergieren, und $s(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall; sei ferner

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} \quad \textit{konvergent für } \sigma > 0.$$

Aus

(2) $$\int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = O(1), \quad \textit{bei } \sigma \to 0,$$

und

(3) $$\underset{t \leqq t' \leqq \lambda t}{\mathrm{Min}} \{s(t') - s(t)\} \geqq -m(\lambda), \quad \textit{für jedes } t > 0, \quad \lambda > 1,$$

folgt dann

(4) $$s(t) = O(1), \quad \textit{bei } t \to \infty.$$

Hilfssatz I. *Aus der Bedingung* (3) *folgt auch*

(5) $$\underset{t \leqq t' \leqq \lambda t}{\mathrm{Min}} \{s(\lambda t) - s(t')\} \geqq -m(\lambda), \quad \textit{für jedes } t > 0.$$

Es ist nämlich

$$\underset{t \leqq t' \leqq \lambda t}{\mathrm{Min}} \{s(\lambda t) - s(t')\} = s(\lambda t) - s(t_0) \geqq \underset{t_0 \leqq t' \leqq \lambda t_0}{\mathrm{Min}} \{s(t') - s(t_0)\} \geqq -m(\lambda),$$

da $t \leqq t_0 \leqq \lambda t \leqq \lambda t_0$.

Hilfssatz II. *Sei gesetzt*

(6) $$S(t) = \underset{0 \leqq t' \leqq t}{\mathrm{Max}} \{-s(t')\}, \quad \textit{für } t > 0;$$

wenn $s(t)$ der Bedingung (3) *genügt, so ist:*

(7) a) $\operatorname*{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{S(t') - S(t)\} = S(\lambda t) - S(t) \leqq m(\lambda)$, *für jedes* $t > 0$;

(8) b) $\int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{S(t)\} \leqq M$, *für jedes* $\sigma > 0$, *wobei* $T = a/\sigma$, $a > 0$,

wenn dabei $\varphi(t)$ *die Bedingungen des Satzes A erfüllt.*

a) $S(t)$ ist die kleinste nicht abnehmende Funktion, welche $\geqq -s(t)$ ist.

Nach (3) ist

$$\operatorname*{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t') + s(t)\} = \operatorname*{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} - \{-s(t)\} \leqq m(\lambda);$$

ist nun

$$\operatorname*{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} = S(\lambda t),$$

so ist

$$S(\lambda t) - S(t) \leqq \operatorname*{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} - \{-s(t)\} \leqq m(\lambda),$$

ist hingegen

$$\operatorname*{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} < S(\lambda t),$$

so ist

$$S(\lambda t) - S(t) = 0,$$

also ist (7) allgemein gültig.

b) Sei

$$\int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{S(t)\} = \sum_{\nu=0}^\infty \int\limits_{T\lambda^\nu}^{T\lambda^{\nu+1}} \varphi(\sigma t)\, d\,\{S(t)\},$$

da $\varphi(t)$ nicht abnimmt und $T = a/\sigma$ ist, so ist wegen (7)

$$\int\limits_{T\lambda^\nu}^{T\lambda^{\nu+1}} \varphi(\sigma t)\, d\,\{S(t)\} \leqq \varphi(a\lambda^\nu)\,\{S(T\lambda^{\nu+1}) - S(T\lambda^\nu)\} \leqq m(\lambda)\,\varphi(a\lambda^\nu),$$

also

$$\int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{S(t)\} \leqq m(\lambda) \sum_{\nu=0}^\infty \varphi(a\lambda^\nu) = M, \quad \text{für jedes } \sigma > 0,$$

wobei M eine endliche Konstante ist, weil aus der Konvergenz der ersten Reihe (1) die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^\infty \varphi(a\lambda^\nu)$, für $a > 0$, folgt [ist nämlich $a > \lambda^{-\varkappa}$, so wird $\varphi(a\lambda^n) \leqq \varphi(\lambda^{n-\varkappa})$ für jedes n].

Hilfssatz III. *Ist $S(t)$ die durch die Gleichung (6) definierte Funktion, dann folgt aus den Voraussetzungen des Satzes A, daß*

(9) $s(t) < M' + \alpha S(t) = S_1(t)$, *für jedes* $t > 0$, *wobei* $M' > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Sei $T = a/\sigma$, dann ist wegen (2) und (6), $s(0) = 0$ gesetzt,

$$M_1 \geqq \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = \int\limits_0^T \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} + \int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\}$$

$$= \varphi(a)\, s(T) + \int\limits_0^T -\sigma\varphi'(\sigma t)\, s(t)\, dt + \int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\}$$

$$\geqq \varphi(a)\, s(T) - \{1 - \varphi(a)\}\, S(T) + \int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\},$$

weiter ist wegen (3)

$$\int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = \sum_{\nu=0}^\infty \int\limits_{T\lambda^\nu}^{T\lambda^{\nu+1}} \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} \geqq \sum_{\nu=0}^\infty \varphi(a\lambda^\nu) \operatorname*{Min}_{T\lambda^\nu \leqq t \leqq T\lambda^{\nu+1}} \{s(t) - s(T\lambda^\nu)\}$$

$$\geqq -m(\lambda) \cdot \sum_{\nu=0}^\infty \varphi(a\lambda^\nu) = -M_2,$$

also,

$$M_1 \geqq s(T)\,\varphi(a) - \{1 - \varphi(a)\}\, S(T) - M_2,$$

woraus, wenn a so gewählt ist, daß

$$0 < 1 - \varphi(a) < \varphi(a)$$

wird, die Behauptung (9) folgt.

Hilfssatz IV. *Ist $S(t)$, die Funktion, definiert durch (6), so ist unter den Voraussetzungen des Satzes A*

(10) $s(t) + M'' + \beta S(t) > 0$, *für jedes* $t > 0$, *wobei* $M'' > 0$, $0 < \beta < 1$.

Sei $T = b/\sigma$, so ist wegen (2)

$$-M_1 \leqq \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = s(T) - \int\limits_0^T \{1 - \varphi(\sigma t)\}\, d\,\{s(t)\} + \int\limits_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\}$$

$$= s(T) + J_1 + J_2.$$

Nun ist, erstens, wegen (5) und (1)

$$J_1 = \sum_{\nu=0}^\infty \int\limits_{T\lambda^{-\nu-1}}^{T\lambda^{-\nu}} \{1 - \varphi(\sigma t)\}\, d\,\{-s(t)\}$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^\infty \{1 - \varphi(b\lambda^{-\nu})\} \operatorname*{Max}_{T\lambda^{-\nu-1} \leqq t \leqq T\lambda^{-\nu}} \{-s(T\lambda^{-\nu}) + s(t)\}$$

$$\leqq m(\lambda) \sum_{\nu=0}^\infty \{1 - \varphi(b\lambda^{-\nu})\} = M_2.$$

Zweitens wird, wenn $S_1(t)$ die Funktion (9) bedeutet, wegen (9) und (8)

$$J_2 = \int_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = -\varphi(b)\, s(T) + \int_T^\infty -\sigma\varphi'(\sigma t)\, s(t)\, dt$$

$$\leqq -\varphi(b)\, s(T) + \int_T^\infty -\sigma\varphi'(\sigma t)\, S_1(t)\, dt$$

$$\leqq S_1(T)\,\varphi(b) - s(T)\,\varphi(b) + \alpha \int_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{S(t)\}$$

$$\leqq S_1(T)\,\varphi(b) - s(T)\,\varphi(b) + \alpha M$$

$$\leqq S(T)\,\varphi(b) - s(T)\,\varphi(b) + \alpha M + \varphi(b)\, M'$$

$$\leqq S(T)\,\varphi(b) - s(T)\,\varphi(b) + M_3.^{2)}$$

Also, zusammengesetzt,

$$-M_1 \leqq s(T) + M_2 + \alpha S(T)\,\varphi(b) - s(T)\,\varphi(b) - M_3,$$

das heißt,

$$\{1 - \varphi(b)\}\, s(T) + M_4 + \alpha\,\varphi(b)\, S(T) \geqq 0,$$

woraus, wenn b so gewählt ist, daß

$$\alpha\,\varphi(b) < 1 - \varphi(b)$$

wird, die Behauptung (10) folgt.

Nun wird aus den Ungleichungen (9) und (10) die Behauptung des Satzes A gefolgert.

Wird nämlich $S(t)$ unendlich groß mit t, so muß wegen (6) die Gleichung $s(t) = S(t)$ für unendlich viele t-Werte bestehen, was aber im Widerspruch mit (10) steht. Also ist

$$S(t) = O(1), \quad \text{bei} \quad t \to \infty.$$

---

[2]) Die durch die erste Gleichung ausgedrückte partielle Integration ist berechtigt, weil

(a) $$J(x) = \int_c^x \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = \varphi(\sigma x)\, s(x) - \varphi(\sigma c)\, s(c) + \int_c^x -\sigma\varphi'(\sigma t)\, s(t)\, dt,$$

und

(b) $$\{s(x) - s(c)\}\,\varphi(\sigma x) = \frac{1}{\Phi(x)} \int_c^x \Phi(t)\, d\,\{J(t)\} \to 0, \quad x \to \infty,$$

da nach den Voraussetzungen $\Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ monoton $\to \infty$ und $J(x) \to A$, bei $x \to \infty$. Woraus wegen (b) aus (a) die erwähnte erste Gleichung folgt.

Weiter wird wegen (9) und (10)

$$-\beta S(t) - M'' \leqq s(t) \leqq M' + \alpha S(t), \quad \text{für jedes} \quad t > 0,$$

woraus die Behauptung (4) des Satzes A folgt.

Es sei noch bemerkt, daß nun mit Hilfe des Satzes A die o-Inversionssätze der Limitierungsverfahren (I) oder (II) in derselben Weise zu erhalten sind, wie dies bei der o-Inversion des Abelschen Verfahrens geschieht[3]). Dabei wird aber, statt von dem Weierstraßschen Approximationssatz, von dem allgemeineren Satz Wieners[4]) Gebrauch gemacht, wie es Wiener selbst in etwas komplizierter Weise tut.

Die dem Satz A folgenden nächsten Schritte für den Beweis dieses o-Inversionssatzes sind:

Satz B. *Aus*

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} = \sigma \int_0^\infty -\varphi'(\sigma t)\, s(t)\, dt = o(1), \quad \textit{bei } \sigma \to 0,$$

und

$$s(t) = O(1), \quad \textit{bei } t \to \infty,$$

folgt

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t)\, dt = o(1), \quad \textit{bei } T \to \infty,$$

wenn dabei die Funktion $\varphi(t)$ des Satzes A noch der folgenden Bedingung (B) *Genüge leistet:*

Sei

$$g_T(t) = \begin{cases} 1 & \textit{für } o \leqq t \leqq T, \\ o & \textit{für } T < t, \end{cases}$$

und $\psi(t) = -\varphi'(t)$, es existieren zwei Folgen A_ν und a_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, derart, daß

(B) $$\int_0^\infty \left| g_T(t) - \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\, \psi(a_\nu t) \right| dt \leqq \varepsilon_s^{*} \quad \textit{für } n > N.$$

---

[3]) Siehe z. B. J. Karamata „Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes". Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 319—320.

[4]) N. Wiener, Tauberian theorems, Annals of Math. II, **33** (1932), S. 1—100.

Satz C. *Aus*

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = o(1), \quad bei\ T \to \infty,$$

und

$$\liminf_{t=\infty} \min_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{s(t') - s(t)\} \geqq -m(\lambda) \to 0, \quad wenn\ 1 < \lambda \to 1,$$

folgt

$$s(t) = o(1), \quad bei\ t \to \infty.$$

Dabei gibt, für die Existenz von (B), der erwähnte Wienersche Approximationssatz notwendige und hinreichende Bedingungen an.

Beograd, 23. Oktober 1932.

(Eingegangen am 4. November 1932.)

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig

Printed in Germany