

## Über die *O*-Inversionssätze der Limitierungsverfahren.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Arbeit „Über einen Satz von Vijayaraghavan“ [Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 737–740] habe ich gezeigt, wie sich der *O*-Inversionssatz Vijayaraghavans:

Aus

$$\sum_{v=0}^n u_v r^v = O(1), \quad \text{bei } r \rightarrow 1,$$

und

$$\sum_{v=n}^{n'} u_v \geq -m(\lambda), \quad \text{für jedes } n \text{ und } n \leq n' \leq \lambda n, \quad \lambda > 1,$$

folgt

$$\sum_{v=0}^n u_v = O(1), \quad \text{bei } n \rightarrow \infty,$$

auf Laplacesche Integrale erweitern läßt.

Hier möchte ich eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes geben, in welcher der Kern  $r^v = e^{-\sigma v}$  die allgemeinere Form  $\varphi(\sigma v)$  annimmt, wo  $\varphi(t)$  eine im Intervalle  $(0, \infty)$  abnehmende Funktion bedeutet.

Es wird also dieser *O*-Inversionssatz auf Limitierungsverfahren der Form

$$(I) \quad \Phi(\sigma) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v \varphi(\sigma v), \quad \text{wobei } \sigma \rightarrow 0^+,$$

erweitert, welche ebenfalls in der Integralform

$$(II) \quad \Phi(\sigma) = \int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\}$$

<sup>1)</sup> Mit *O*-Inversionssätzen bezeichne ich diejenigen Sätze, welche aus  $\Phi(\sigma) = O(1)$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ , auf  $\sum_{v=0}^n u_v = O(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , zu schließen erlauben, im Gegensatz zu den *o*-Inversionssätzen, bei welchen in der vorstehenden Bezeichnung *O* durch *o* zu ersetzen ist.

dargestellt werden können, wenn dabei

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, \\ \sum_{v=0}^n u_v, & \text{für } n < t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

gesetzt wird.

Was die Beweisanordnung betrifft, kann das Verfahren meiner erwähnten Arbeit nicht auf diesen allgemeinen Fall angewendet werden. Es wird vielmehr, dem Prinzip nach, eine Beweisanordnung angewandt, welche Herr E. Landau benützte, um den erwähnten Vijayaraghavanschen Satz zu beweisen, und die er mir brieflich mitgeteilt hatte.

Dieser allgemeine *O*-Inversionssatz lautet:

**Satz A.** Sei  $\varphi(t)$  eine im Intervalle  $(0, \infty)$  stetige und nicht zunehmende Funktion, für welche die Reihen

$$(1) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(\lambda^v) \quad \text{und} \quad \sum_{v=0}^{\infty} \{1 - \varphi(\lambda^{-v})\}, \quad \text{für ein } \lambda > 1,$$

konvergieren, und  $s(t)$  von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall; sei ferner

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \quad \text{konvergent für } \sigma > 0.$$

Aus

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = O(1), \quad \text{bei } \sigma \rightarrow 0,$$

und

$$(3) \quad \text{Min}_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)| \geq -m(\lambda), \quad \text{für jedes } t > 0, \quad \lambda > 1,$$

folgt dann

$$(4) \quad s(t) = O(1), \quad \text{bei } t \rightarrow \infty.$$

Hilfssatz I. Aus der Bedingung (3) folgt auch

$$(5) \quad \text{Min}_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(\lambda t) - s(t')| \geq -m(\lambda), \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Es ist nämlich

$$\text{Min}_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(\lambda t) - s(t')| = s(\lambda t) - s(t_0) \geq \text{Min}_{t_0 \leq t' \leq \lambda t_0} |s(t') - s(t_0)| \geq -m(\lambda),$$

da  $t \leq t_0 \leq \lambda t \leq \lambda t_0$ .

Hilfssatz II. Sei gesetzt

$$(6) \quad S(t) = \text{Max}_{0 \leq t' \leq t} |s(t')|, \quad \text{für } t > 0;$$

wenn  $s(t)$  der Bedingung (3) genügt, so ist:

$$(7) \text{ a) } \text{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} |S(t') - S(t)| = S(\lambda t) - S(t) \leqq m(\lambda), \text{ für jedes } t > 0;$$

$$(8) \text{ b) } \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|S(t)| \leqq M, \text{ für jedes } \sigma > 0, \text{ wobei } T = a/\sigma, a > 0,$$

wenn dabei  $\varphi(t)$  die Bedingungen des Satzes A erfüllt.

a)  $S(t)$  ist die kleinste nicht abnehmende Funktion, welche  $\geqq -s(t)$  ist.

Nach (3) ist

$$\text{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t') + s(t)\} = \text{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} - \{-s(t)\} \leqq m(\lambda);$$

ist nun

$$\text{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} = S(\lambda t),$$

so ist

$$S(\lambda t) - S(t) \leqq \text{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} - \{-s(t)\} \leqq m(\lambda),$$

ist hingegen

$$\text{Max}_{t \leqq t' \leqq \lambda t} \{-s(t')\} < S(\lambda t),$$

so ist

$$S(\lambda t) - S(t) = 0,$$

also ist (7) allgemein gültig.

b) Sei

$$\int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|S(t)| = \sum_{v=0}^{\infty} \int_{T\lambda^v}^{T\lambda^{v+1}} \varphi(\sigma t) d|S(t)|,$$

da  $\varphi(t)$  nicht abnimmt und  $T = a/\sigma$  ist, so ist wegen (7)

$$\int_{T\lambda^v}^{T\lambda^{v+1}} \varphi(\sigma t) d|S(t)| \leqq \varphi(a\lambda^v) \{S(T\lambda^{v+1}) - S(T\lambda^v)\} \leqq m(\lambda) \varphi(a\lambda^v),$$

also

$$\int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|S(t)| \leqq m(\lambda) \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^v) = M, \text{ für jedes } \sigma > 0,$$

wobei  $M$  eine endliche Konstante ist, weil aus der Konvergenz der ersten Reihe (1) die Konvergenz der Reihe  $\sum_{v=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^v)$ , für  $a > 0$ , folgt [ist nämlich  $a > \lambda^{-z}$ , so wird  $\varphi(a\lambda^n) \leqq \varphi(\lambda^{n-z})$  für jedes  $n$ ].

Hilfssatz III. Ist  $S(t)$  die durch die Gleichung (6) definierte Funktion, dann folgt aus den Voraussetzungen des Satzes A, daß

$$(9) \quad s(t) < M' + \alpha S(t) = S_1(t), \text{ für jedes } t > 0, \\ \text{wobei } M' > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Sei  $T = a/\sigma$ , dann ist wegen (2) und (6),  $s(0) = 0$  gesetzt,

$$\begin{aligned} M_1 &\geqq \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| = \int_0^T \varphi(\sigma t) d|s(t)| + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| \\ &= \varphi(a) s(T) + \int_0^T -\sigma \varphi'(\sigma t) s(t) dt + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| \\ &\geqq \varphi(a) s(T) - \{1 - \varphi(a)\} S(T) + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)|, \end{aligned}$$

weiter ist wegen (3)

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| &= \sum_{v=0}^{\infty} \int_{T\lambda^v}^{T\lambda^{v+1}} \varphi(\sigma t) d|s(t)| \geqq \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^v) \text{Min}_{T\lambda^v \leqq t \leqq T\lambda^{v+1}} \{s(t) - s(T\lambda^v)\} \\ &\geqq -m(\lambda) \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^v) = -M_2, \end{aligned}$$

also,

$$M_1 \geqq s(T) \varphi(a) - \{1 - \varphi(a)\} S(T) - M_2,$$

woraus, wenn  $a$  so gewählt ist, daß

$$0 < 1 - \varphi(a) < \varphi(a)$$

wird, die Behauptung (9) folgt.

Hilfssatz IV. Ist  $S(t)$ , die Funktion, definiert durch (6), so ist unter den Voraussetzungen des Satzes A

$$(10) \quad s(t) \leqq M'' + \beta S(t) > 0, \text{ für jedes } t > 0, \text{ wobei } M'' > 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Sei  $T = b/\sigma$ , so ist wegen (2)

$$\begin{aligned} -M_1 &\leqq \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| = s(T) - \int_0^T \{1 - \varphi(\sigma t)\} d|s(t)| + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| \\ &= s(T) + J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Nun ist, erstens, wegen (5) und (1)

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{v=0}^{\infty} \int_{T\lambda^{-v-1}}^{T\lambda^{-v}} \{1 - \varphi(\sigma t)\} d|s(t)| \\ &\leqq \sum_{v=0}^{\infty} \{1 - \varphi(b\lambda^{-v})\} \text{Max}_{T\lambda^{-v-1} \leqq t \leqq T\lambda^{-v}} \{-s(T\lambda^{-v}) - s(t)\} \\ &\leqq m(\lambda) \sum_{v=0}^{\infty} \{1 - \varphi(b\lambda^{-v})\} = M_2. \end{aligned}$$

Zweitens wird, wenn  $S_1(t)$  die Funktion (9) bedeutet, wegen (9) und (8)

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| = -\varphi(b)s(T) - \int_T^\infty -\sigma \varphi'(\sigma t) s(t) dt \\ &\leq -\varphi(b)s(T) + \int_T^\infty -\sigma \varphi'(\sigma t) S_1(t) dt \\ &\leq S_1(T) \varphi(b) - s(T) \varphi(b) + \alpha \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d|S(t)| \\ &\leq S_1(T) \varphi(b) - s(T) \varphi(b) + \alpha M \\ &\leq S(T) \varphi(b) - s(T) \varphi(b) + \alpha M + \varphi(b) M' \\ &\leq S(T) \varphi(b) - s(T) \varphi(b) + M_3. \end{aligned}$$

Also, zusammengesetzt,

$$-M_1 \leq s(T) \leq M_2 + \alpha S(T) \varphi(b) - s(T) \varphi(b) + M_3,$$

das heißt,

$$\{1 - \varphi(b)\} s(T) + M_4 + \alpha \varphi(b) S(T) \geq 0,$$

woraus, wenn  $b$  so gewählt ist, daß

$$\alpha \varphi(b) < 1 - \varphi(b)$$

wird, die Behauptung (10) folgt.

Nun wird aus den Ungleichungen (9) und (10) die Behauptung des Satzes A gefolgert.

Wird nämlich  $S(t)$  unendlich groß mit  $t$ , so muß wegen (6) die Gleichung  $s(t) = S(t)$  für unendlich viele  $t$ -Werte bestehen, was aber im Widerspruch mit (10) steht. Also ist

$$S(t) = O(1), \text{ bei } t \rightarrow \infty.$$

<sup>2)</sup> Die durch die erste Gleichung ausgedrückte partielle Integration ist berechtigt, weil

$$(a) \quad J(x) = \int_c^x \varphi(\sigma t) d|s(t)| = \varphi(\sigma x) s(x) - \varphi(\sigma c) s(c) + \int_c^x -\sigma \varphi'(\sigma t) s(t) dt,$$

und

$$(b) \quad |s(x) - s(c)| \varphi(\sigma x) = \frac{1}{\Phi(x)} \int_c^x \Phi(t) d|J(t)| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

da nach den Voraussetzungen  $\Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$  monoton  $\rightarrow \infty$  und  $J(x) \rightarrow A$ , bei  $x \rightarrow \infty$ . Woraus wegen (b) aus (a) die erwähnte erste Gleichung folgt.

Weiter wird wegen (9) und (10)

$$-\beta S(t) - M'' \leq s(t) \leq M' - \alpha S(t), \text{ für jedes } t > 0,$$

woraus die Behauptung (4) des Satzes A folgt.

Es sei noch bemerkt, daß nun mit Hilfe des Satzes A die o-Inversionssätze der Limitierungsverfahren (I) oder (II) in derselben Weise zu erhalten sind, wie dies bei der o-Inversion des Abelschen Verfahrens geschieht<sup>3)</sup>. Dabei wird aber, statt von dem Weierstraßschen Approximationssatz, von dem allgemeineren Satz Wieners<sup>4)</sup> Gebrauch gemacht, wie es Wiener selbst in etwas komplizierter Weise tut.

Die dem Satz A folgenden nächsten Schritte für den Beweis dieses o-Inversionssatzes sind:

Satz B. Aus

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma t) d|s(t)| = \sigma \int_0^\infty -\varphi'(\sigma t) s(t) dt = o(1), \text{ bei } \sigma \rightarrow 0,$$

und

$$s(t) = O(1), \text{ bei } t \rightarrow \infty,$$

folgt

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = o(1), \text{ bei } T \rightarrow \infty,$$

wenn dabei die Funktion  $\varphi(t)$  des Satzes A noch der folgenden Bedingung (B) Genüge leistet:

Sei

$$g_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{für } T < t, \end{cases}$$

und  $\varphi(t) = -\varphi'(t)$ , es existieren zwei Folgen  $A_r$  und  $a_r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$ , derart, daß

$$(B) \quad \int_0^\infty \left| g_r(t) - \sum_{v=0}^n A_v \varphi(a_v t) \right| dt \leq \varepsilon, \text{ für } n > N.$$

<sup>3)</sup> Siehe z. B. J. Karamata „Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes“. Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 319—320.

<sup>4)</sup> N. Wiener, Tauberian theorems, Annals of Math. II, 33 (1932), S. 1—100.

Satz C. Aus

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = o(1), \text{ bei } T \rightarrow \infty,$$

und

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)| \geq -m(\lambda) \rightarrow 0, \text{ wenn } 1 < \lambda \rightarrow 1,$$

folgt

$$s(t) = o(1), \text{ bei } t \rightarrow \infty.$$

Dabei gibt, für die Existenz von (B), der erwähnte Wiener'sche Approximationssatz notwendige und hinreichende Bedingungen an.

Beograd, 23. Oktober 1932.

(Eingegangen am 4. November 1932.)

Vor kurzem erschien:

**Felix Klein**

## Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion

Gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/94

Ausgearbeitet von **Ernst Ritter**

Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von

**Otto Haupt**

Professor der Mathematik an der Universität Erlangen

Mit 96 Figuren. IX, 344 Seiten. 1933. RM 22.—; gebunden RM 23.60

„Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen“,  
Band XXXIX

In der Reihe der Kleinschen Vorlesungen bilden diejenigen über die hypergeometrische Funktion ein besonders wertvolles Glied. Zeigen sie doch an der Behandlung eines speziellen Gegenstandes die bekannte außerordentliche Kunst Kleinscher Darstellung in besonders schöner Weise. Bei der Herausgabe erschien daher eine möglichst Erhaltung der ursprünglichen Form geboten. Daher ist an der Anordnung des Stoffes nichts geändert und bei der Revision des Textes im einzelnen der ursprüngliche Charakter möglichst gewahrt worden; auch sind die Hinweise auf inzwischen erfolgte Fortschritte der Wissenschaft vom Text getrennt am Schlusse angefügt.

Übrigens wird darauf Bedacht genommen, auch dem Anfänger die Lektüre durch Anmerkungen zu erleichtern. Denn zweifellos bieten gerade diese Vorlesungen eine treffliche Ergänzung und Weiterführung dessen, was der Studierende mittleren Semesters an Geometrie und Funktionentheorie kennengelernt hat.

Alles in allem wurde angestrebt, dem Zweck der vorliegenden Neuausgabe gerecht zu werden: Auch diesem Werke Kleins den ihm gebührenden Platz, insbesondere im Unterricht, zu erhalten.

Von **Felix Klein** † erschien u. a.:

### Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus

Erster Band: **Arithmetik. Algebra. Analysis.** Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Vierte Auflage. Mit 125 Abbildungen. XII, 309 Seiten. 1933. RM 15.—; gebunden RM 16.50

Zweiter Band: **Geometrie.** Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Dritte Auflage. Mit 157 Abbildungen. XII, 302 Seiten. 1925. RM 15.—; gebunden RM 16.50\*

Dritter Band: **Präzisions- und Approximationsmathematik.** Ausgearbeitet von C. H. Müller. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Dritte Auflage. Mit 156 Abbildungen. X, 238 Seiten. 1928. RM 13.50; gebunden RM 15.—\*

(„Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen“, Band XIV, XV und XVI)

\* Auf die Preise der vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Nachlaß von 10% gewährt.

**VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN**

# Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Herausgegeben von der Schriftleitung des  
**„Zentralblatt für Mathematik“**

Die „**Ergebnisse der Mathematik**“ erscheinen in einzelnen Heften von 5 bis 7 Bogen Umfang. Je 5 Hefte bilden in der Reihenfolge ihres Erscheinens einen Band.

Jedes Heft der „**Ergebnisse**“ ist einzeln käuflich. Bei Verpflichtung zum Bezug eines vollständigen Bandes tritt eine 10%ige Preisermäßigung ein. Die Bezieher des „**Zentralblatt für Mathematik**“ erhalten, sofern sie sich zum Bezug eines ganzen Bandes verpflichten, auf den ermäßigten Bandpreis einen weiteren Nachlaß von 20%.

## **Zweiter Band:**

1. Heft: **Projektive Relativitätstheorie.** Von **O. Veblen.** Mit 3 Figuren. V, 73 Seiten. 1933. Einzelpreis RM 8. —; Bandpreis RM 7.20
2. Heft: **On the Problem of Plateau.** By **Tibor Radó.** With 1 Figure. III, 109 Seiten. 1933. Einzelpreis RM 12.80; Bandpreis RM 11.50
3. Heft: **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von **A. Kalmogoroff.** V, 62 Seiten. 1933. Einzelpreis RM 7.50; Bandpreis RM 6.75
4. Heft: **Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von **A. Khintchine.** V, 77 Seiten. 1933. Einzelpreis RM 9.60; Bandpreis RM 8.65
5. Heft: **The Theory of Matrices.** By **C. C. MacDuffee.** V, 110 Seiten. 1933. Einzelpreis RM 13.—; Bandpreis RM 11.70

Die „**Ergebnisse der Mathematik**“ folgen so elastisch als möglich der Entwicklung unserer Wissenschaft. Ihr Ziel ist, in einzelnen selbständigen Berichten in Problemstellung, Literatur und hauptsächlich Entwicklungsrichtung spezieller moderner Gebiete einzuführen. Sie wollen damit auch der tatsächlichen Lage der Dinge Rechnung tragen, indem sie jedem Forscher Gelegenheit geben wollen, sich die Berichte zu beschaffen, die sein Arbeitsgebiet direkt betreffen, ohne ihn zu zwingen, sich gleichzeitig mit einem den einzelnen praktisch unerschwinglichen Apparat eines umfangreichen Handbuches der Gesamtwissenschaft zu belasten.

---

**VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN**