

EXTRAS DIN

# MATHEMATICA

VOLUMUL IX.

PAG. 164—178

---

Al doilea congres al Matematicienilor Români

Turnu-Severin, 5—9 Mai 1932

J. KARAMATA

Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant

C L U J  
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL”, STR. MEMORANDULUI 22  
1 9 3 5.

**THÉOREMES SUR LA SOMMABILITÉ EXPONENTIELLE ET D'AUTRES SOMMABILITÉS S'Y RATTACHANT**

par

**J. Karamata**  
(Beograd).

Reçu le 21 Mai 1932.

1. Dans cet exposé, nous aurons besoin de deux suites de nombres, que N. NIELSEN (1) a appelés coefficients de STIRLING de première et seconde espèce, et les a désignés par  $C_n^s$  et  $\mathfrak{C}_n^s$ . Il nous semble, par contre, qu'il est plus commode de faire une légère modification dans la notation de ces coefficients en considérant les deux suites de nombres  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right]$  et  $\{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \}$ , qui leurs en sont rattachés de la manière suivante

$$(1,1) \quad \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] = C_n^{n-v} \quad \text{et} \quad \{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \} = \mathfrak{C}_{v+1}^{n-v};$$

puisque, par cette notation, les formules deviennent plus symétriques.

Les deux suites de nombres  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right]$  et  $\{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \}$  sont alors définies comme coefficients des développements suivants :

$$(1,2) \quad x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1) = \sum_{v=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] x^v, \quad \left[ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

$$(1,3) \quad x^n = \sum_{v=0}^n \{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \} x(x-1)(x-2) \dots (x-v+1), \quad \{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \} = 0, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

De ces relations l'on vérifie alors facilement, que les coefficients (1, 1) sont tous positifs, que les coefficients  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right]$  satisfont à la relation

(1) N. NIELSEN, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906. Voir, en particulier p. 66—71.

de récurrence

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ v-1 \end{smallmatrix} \right] + n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ v \end{smallmatrix} \right]$$

$$(1,4) \quad \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v+1 \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ v+1 \end{smallmatrix} \right], \quad n, v=0, 1, 2, 3, \dots \quad \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] + n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v+1 \end{smallmatrix} \right]$$

et que les coefficients  $\{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \}$  ont la forme explicite suivante  $\{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \} = \frac{(-1)^v}{v!} \sum_{i=0}^v (-1)^i \binom{v}{i} i^n, \quad n, v=0, 1, 2, 3, \dots$

Les formules (1, 2) et (1, 3) ne sont, d'autre part, que des cas particuliers des formules suivantes :

$$(1,5) \quad D_x^n \{ f(\log x) \} = \frac{(-1)^n}{x^n} \sum_{v=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] f^{(v)}(t) \quad t = \log x,$$

et

$$(1,6) \quad D_x^n \{ f(e^x) \} = \sum_{v=0}^n \{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \} e^{vx} f^{(v)}(t) \quad t = e^x,$$

et il suffit d'y poser, d'une part  $f(t) = e^{-yt}$ , d'autre part  $f(t) = t^y$ , pour les obtenir.

Des relations (1, 5) et (1, 6) l'on peut en déduire une autre paire de relations, des quelles ressort encore mieux la réciprocity existante entre ces coefficients; ces relations sont les suivantes :

Si

$$A_n = \sum_{v=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right] B_v,$$

alors  $n=0, 1, 2, 3, \dots, A_0 = B_0,$

$$(1,7) \quad B_n = (-1)^n \sum_{v=0}^n (-1)^v \{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \} A_v$$

Toutes ces relations se trouvent établies pour les coefficients  $C_n^s$  et  $\mathfrak{C}_n^s$ , dans le livre cité de NIELSEN, et l'on y passe facilement aux coefficients  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \right]$  et  $\{ \begin{smallmatrix} n \\ v \end{smallmatrix} \}$  par les relations (1, 1).

2. Nous dirons pour abrégé qu'une fonction  $f(x)$ , ou bien qu'une suite  $A_n$ , relatif à une décomposition donnée, soit

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \phi_v(x),$$

respectivement

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu, n},$$

sont les génératrices des procédés de sommabilité définis par les expressions

$$\frac{1}{f(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} \phi_{\nu}(x),$$

respectivement

$$\frac{1}{A_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} a_{\nu, n}.$$

Ainsi, par exemple les fonctions  $\frac{1}{1-x}$  et  $e^x$ , développées suivant les puissances de  $x$ , sont les génératrices des procédés de sommabilité d'ABEL (A), et de BOREL (B). D'autre part, les suites de nombres  $n$  et  $2^n$ , relatives aux développements  $n = \sum_{\nu=1}^n 1$  et  $2^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu}$ , sont

les génératrices des procédés de CÉSARO (C) et d'EULER (E). Plus généralement, la suite de nombres  $\binom{n+k-1}{n}$ , relative à la décomposition

$$\binom{n+k-1}{n} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+k-\nu-1}{n-\nu},$$

et la suite de nombres  $(1+k)^n$  développés suivant les puissances de  $k$ , c'est-à-dire,

$$(1+k)^n = \sum_{\nu=0}^n k^{\nu} \binom{n}{\nu},$$

sont les génératrices des procédés de CÉSARO, respectivement d'EULER, d'ordre  $k$ ,  $\{C(k)$  et  $E(k)\}$ .

De même que toute suite sommable- $C(k)$  est sommable-A, de même, toute suite sommable- $E(k)$  est sommable-B, quelque soit le nombre  $k > 0$ . D'autres analogies existent encore, entre les procédés  $C(k)$  et A d'une part, et les procédés  $E(k)$  et B de l'autre.

D'autre part, en considérant l'inversion du procédé d'ABEL relative aux suites à termes positifs, on est naturellement conduit au procédé de CÉSARO, c'est-à-dire: toute suite de nombres positifs, sommable-A est sommable-C.

Or, en considérant l'inversion relative aux suites à termes positifs du procédé de sommabilité de BOREL, on n'arrive pas au procédé

d'EULER, comme on s'attendrait, mais par une voie toute naturelle on est conduit au procédé de sommabilité dont la suite génératrice est  $\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)}$ , développée suivant les puissances de  $k$ , c'est-à-dire,

$$\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)} = k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1) = \sum_{\nu=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right] k^{\nu}.$$

Les nombres  $\left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right]$  étant les coefficients de STIRLING mentionnés au début, nous appellerons ce procédé le procédé de STIRLING d'ordre  $k$ ,  $\{S(k)\}$ .

Nous verrons comment un calcul plutôt formel nous conduit au procédé  $S(k)$  ainsi défini.

3. Dans cet exposé nous aurons encore besoin d'une certaine notion de croissance régulière, que j'ai étudié antérieurement<sup>(2)</sup>; je mentionnerai ici les propriétés principales.

Une fonction continue  $r(x)$  est dite à croissance régulière lorsque

$$(3, 1) \quad \frac{r(ux)}{r(x)} \rightarrow \text{vers une limite déterminée pour tout } u > 0, x \rightarrow \infty.$$

Or, pour que (3, 1) ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$(3, 2) \quad r(x) = x^{\alpha} L(x),$$

où

$$(3, 3) \quad \frac{L(ux)}{L(x)} \rightarrow 1, x \rightarrow \infty, \text{ pour tout } u > 0;$$

la fonction  $L(x)$ , dite à croissance lente a pour forme canonique

$$L(x) = c(x) e^{\int_0^x \varepsilon(t) \frac{dt}{t}}$$

$$(3, 4) \quad \text{avec } c(x) \rightarrow c \neq 0 \text{ et } \varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty.$$

Or, cette croissance est celle qui correspond le mieux au procédé de sommation d'ABEL. En ce qui concerne le procédé de BOREL, c'est une croissance plus rapide qu'il faut lui faire correspondre. Nous la définirons d'une manière analogue, en disant qu'une fonction continue  $R(y)$  est à croissance régulière rapide, lorsque

$$(3, 5) \quad \frac{R(y+v)}{R(y)} \rightarrow \text{vers une limite déterminée pour tout } v, y \rightarrow \infty.$$

(2) J. KARAMATA, „Sur un mode de croissance régulière des fonctions“, *Mathematica*, (Cluj) Vol. IV. p. 39-53 (1930), et „Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux“, *Bull. de la Soc. Math. de France*, vol. 61, p. 61 (1933).

Mais il est facile d'exprimer ces fonctions par les fonctions à croissance régulière  $r(x)$ , et d'en tirer les relations analogues à (3, 2), (3, 4).

Il suffit, en effet, d'y poser

$$(3, 6) \quad R(y) = r(e^y), \quad e^y = x \quad \text{et} \quad e^v = u,$$

pour voir que

$$R(y) = r(e^y) = e^{\alpha y} L(e^y) = e^{\alpha y} \Lambda(y),$$

avec la fonction  $\Lambda(y)$  satisfaisant à la relation

$$\frac{\Lambda(y+v)}{\Lambda(y)} \rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty, \quad \text{pour tout } v,$$

ayant, d'après (3, 4), la forme canonique

$$\Lambda(y) = C(y) e^{-\int_{-\infty}^y \varepsilon(t) dt},$$

où  $C(y) \rightarrow C \neq 0$  et  $\varepsilon(y) \rightarrow 0$  lorsque  $y \rightarrow \infty$ .

Rappelons encore la propriété suivante des fonctions à croissance régulière, qui peut du reste servir à les définir.

La fonction  $r(x)$  sera à croissance régulière lorsque

$$\int_0^1 \frac{r(xt)}{r(x)} dt \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

car, il en résulte

$$\frac{r(xt)}{r(x)} \rightarrow t^{\alpha-1}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Or, un résultat analogue peut s'exprimer pour les fonctions à croissance régulière rapide. Il suffit, en effet, de se servir des transformations (3, 6), en posant  $R(y) = 0$ ,  $y < 0$ , pour obtenir le résultat suivant:

La fonction  $R(y)$  sera à croissance régulière rapide, lorsque

$$(3, 7) \quad \int_0^{y(\infty)} e^{-t} \frac{R(y-t)}{R(y)} dt \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad y \rightarrow \infty,$$

car, il en résulte

$$(3, 8) \quad \frac{R(y-t)}{R(y)} \rightarrow e^{-(\alpha-1)t}, \quad y \rightarrow \infty, \quad \text{pour tout } t.$$

4. Considérons à présent le théorème connu de HARDY-LITTLEWOOD qui, étendu aux fonctions à croissance régulière, prend la forme suivante:

THÉOREME A. Soit  $p_v$  une suite de nombres positifs, tels que la série

$$p(x) = \sum_{v=0}^{\infty} p_v x^v \quad \text{converge pour tout } |x| < 1,$$

et que la fonction  $p(x)$  soit à croissance régulière lorsque  $x \rightarrow 1$ , c'est-à-dire

$$p(x) \sim \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad x \rightarrow 1,$$

alors

$$\sum_{v=0}^n p_v \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} L(n), \quad n \rightarrow \infty \quad (3).$$

On peut encore généraliser légèrement ce théorème, en se servant du résultat suivant, de ma note (3):

THÉOREME A'.  $P_v$  étant une suite de nombres positifs, de la relation

$$(4, 1) \quad P(x) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v x^v \sim \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha} L\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad x \rightarrow 1,$$

il résulte

$$\sum_{v=0}^{\infty} P_v g\left(\frac{v}{n}\right) e^{-\frac{v}{n}} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t} g(t) t^{\alpha-1} dt n^{\alpha} L(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

pour toute fonction  $g(t)$  intégrable-R, et monotone au voisinage des points où elle devient infinie.

En posant dans ce théorème  $g(t) = t^k$ ,  $k > 0$ , il en résulte que (4, 1) entraîne

$$\sum_{v=0}^{\infty} v^k P_v e^{-\frac{v}{n}} \sim \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha+k} L(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Cette relation, multipliée par  $1 - e^{-\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$ , donne

$$\sum_{v=0}^{\infty} \{(v+1)^k P_{v+1} - v^k P_v\} x^v \sim \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha+k-1} L\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad x \rightarrow 1$$

ayant posé  $e^{-\frac{1}{n}} = x$ .

(3) J. KARAMATA, Sur certains „Tauberian theorems“ de MM. HARDY et LITTLEWOOD, *Mathematica*, (Cluj), Vol. III, p. 33-48 (1930).

En appliquant, enfin, à cette dernière relation le théorème A, l'on obtient la généralisation mentionnée :

THÉORÈME A''. Soit  $P_\nu$  une suite de nombres positifs tels que la série

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu x^\nu \text{ converge pour tout } |x| < 1.$$

De la relation

$$P(x) \sim \left(\frac{1}{1-x}\right)^\alpha L\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad x \rightarrow 1,$$

il résulte

$$P_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} L(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

lorsque il existe, en outre un nombre  $k > 0$ , tel que

$$(4, 2) \quad (n+1)^k P_{n+1} - n^k P_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou bien, lorsque  $P_n$  est tel que

$$(4, 3) \quad P_{n+1} - P_n \geq -k \frac{P_n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ce théorème généralise, en effet, le théorème A, la suite  $P_n = \sum_{\nu=0}^n p_\nu$ , n'étant plus forcément monotone.

5. En partant des théorèmes précédents, un calcul presque formel nous conduit aux théorèmes analogues relatifs à la sommabilité-B, où à la place des sommes ordinaires se présentent les sommes de STIRLING, mentionnées au début.

Considérons pour cela la fonction

$$(5, 1) \quad q(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu}{\nu!} y^\nu,$$

les coefficients  $q_\nu$  étant supposés positifs et tels que la série (5, 1) converge pour toutes les valeurs de  $y$ .

Supposons, en outre, que la fonction  $q(y)$  soit à croissance régulière rapide, c'est-à-dire, que

$$(5, 2) \quad q(y) \sim e^{\alpha y} \Lambda(y) = e^{\alpha y} L(e^y), \quad y \rightarrow \infty.$$

Pour pouvoir appliquer les théorèmes A à l'étude des séries (5, 1)

il est naturel d'y poser

$$y = \log \left( \frac{1}{1-x} \right),$$

et de développer la fonction ainsi obtenue suivant les puissances de  $x$ .

L'on obtient alors d'une part,

$$\begin{aligned} Q(x) &= q \left\{ \log \left( \frac{1}{1-x} \right) \right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu \frac{1}{\nu!} \left\{ \log \left( \frac{1}{1-x} \right) \right\}^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left[ \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right] \cdot x^\mu = \\ (5, 3) \quad &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \sum_{\nu=0}^{\mu} \left[ \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right] \cdot q_\nu x^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} S_\nu x^\nu, \end{aligned}$$

où

$$S_n = \sum_{\nu=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right] \cdot q_\nu,$$

puisque, d'après (1, 5),

$$\frac{1}{\nu!} \left\{ \log \left( \frac{1}{1-x} \right) \right\}^\nu = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left[ \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right] \cdot x^\mu \quad (4).$$

D'autre part, d'après (5, 2), il s'ensuit que

$$Q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} S_\nu x^\nu \sim \left( \frac{1}{1-x} \right)^\alpha L \left( \frac{1}{1-x} \right), \quad x \rightarrow 1.$$

En appliquant, donc, à cette relation le théorème A'', il en résulterait que

$$\frac{1}{n!} S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right] \cdot q_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} L(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

si la suite  $\frac{1}{n!} S_n$  satisfait à la condition (4, 2) {ou (4, 3)}.

Mais, d'après la formule de récurrence (1, 4) des coefficients  $\left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right]$ ,

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} S_{n+1} - \frac{1}{(n-1)!} S_n &= \frac{1}{n!} \{ S_{n+1} - n S_n \} = \frac{1}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right] \cdot q_{n+1} \\ &+ \sum_{\nu=0}^n \left( \left[ \begin{matrix} n+1 \\ \nu \end{matrix} \right] - n \left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right] \right) q_\nu = \frac{1}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right] q_n + \sum_{\nu=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ \nu-1 \end{matrix} \right] q_\nu > 0, \end{aligned}$$

(4) voir de même loc. cit. (1) p. 358.

ce qui montre que la condition (4, 2) {pour  $k=1$ } sera satisfaite toutes les fois que  $q_n \geq 0$ .

Nous obtenons donc le

**THÉOREME B.** Soit  $q_\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ , une suite de nombres positifs, et tels que la série

$$q(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} q_\nu y^\nu, \text{ converge pour tout } y.$$

De la relation

$$(5, 4) \quad q(y) \sim e^{\alpha y} L(e^y), \quad y \rightarrow \infty,$$

il résulte alors

$$(5, 5) \quad \frac{1}{n!} S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} L(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

et inversement.

Dans la relation (5, 5) se présente donc la somme de STIRLING  $S(k)$  avec  $k=1$ . Mais, il est de même très facile d'obtenir, du théorème B, l'expression asymptotique des sommes  $S(k)$  avec  $k$  quelconque  $> 0$ .

Il suffit, en effet, de poser dans (5, 4)  $ky$  au lieu de  $y$ , et de considérer  $k^\nu q_\nu$  comme une suite  $q'_\nu$ . L'on obtient alors de (5, 5)

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q_\nu k^\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha k)} (n-1)! n^{\alpha k} L(n^k), \quad n \rightarrow \infty.$$

En divisant, d'autre part, cette relation par

$$k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1) \sim \frac{1}{\Gamma(k)} (n-1)! n^k, \quad n \rightarrow \infty,$$

il en résulte

$$(5, 6) \quad S_n(k) = \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q_\nu k^\nu \sim \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha k)} n^{k(\alpha-1)} L(n^k), \quad n \rightarrow \infty.$$

On a donc le

**THÉOREME B'.** Les hypothèses du théorème B étant satisfaites, on a de même la relation (5, 6), pour tout  $k > 0$ .

Si l'on y pose, en particulier  $\alpha=1$  et  $L(x)=s$ , il en résulte le

**THÉOREME B''.** Toute suite  $s_\nu$  de nombres positifs sommable-B, est de même sommable- $S(k)$  avec la même somme, c'est-à-dire de

$$e^{-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} y^\nu \rightarrow s, \quad y \rightarrow \infty,$$

il résulte

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} s_\nu k^\nu \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty,$$

quelque soit  $k > 0$ .

6. Il y aurait donc intérêt à voir comment se comporte la sommabilité  $S(k)$  envers la sommabilité  $E(k)$ . A ce sujet, nous allons montrer que la sommabilité  $S(k)$  occupe, en quelque sorte, une place intermédiaire entre la sommabilité  $E(k)$  et B; plus précisément

**THÉOREME C.** On a

$$E(k) \subset S(k) \subset B,$$

c'est-à-dire, toute suite sommable- $E(k)$  est de même sommable- $S(k)$ , toute suite sommable- $S(k)$  est de même sommable-B; l'inverse n'ayant pas lieu en général.

Le fait que  $S(k) \subset B$  est évident et résulte des considérations précédentes, en particulier de la relation (5, 3).

Pour montrer, d'autre part, que  $E(k) \subset S(k)$ , posons

$$(6, 1) \quad E_n = \frac{1}{(1+k)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} k^\nu s_\nu, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots,$$

et supposons que la suite  $s_n$  est sommable- $E(k)$ , c'est-à-dire, que

$$(6, 2) \quad E_n \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty.$$

De (6, 1) il résulte

$$s_n = (-k)^{-n} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (1+k)^\nu E_\nu, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

En remplaçant, donc, cette valeur de  $s_\nu$  dans la somme de  $S(k')$ , c'est-à-dire dans

$$S_n(k') = \frac{1}{k'(k'+1)(k'+2)\dots(k'+n-1)} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} k'^\nu s_\nu,$$

l'on obtient

$$(6, 3) \quad S_n(k') = \frac{1}{\Psi_n(k')} \sum_{\nu=0}^n \left( \frac{1+k}{k} k' \right)^\nu \frac{1}{\nu!} \Psi_n^{(\nu)} \left( -\frac{k'}{k} \right) E_n,$$

où l'on a posé

$$\Psi_n(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Puisque, quelque soit  $k'$ ,  $\Psi_n(k') \rightarrow \infty$  avec  $n$  et

$$\frac{1}{\Psi_n(k')} \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{1+k}{k} k'\right)^\nu \frac{1}{\nu!} \Psi_n^{(\nu)}\left(-\frac{k'}{k}\right) = 1,$$

il s'ensuit, des résultats généraux de TOEPLITZ (5) et de (6, 3) que  $S_n(k') \rightarrow s$ ,  $n \rightarrow \infty$ , pour toute suite  $E_n$  satisfaisant à (6, 2), lorsque

$$(6, 4) \quad \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{1+k}{k} k'\right)^\nu \frac{1}{\nu!} \left| \Psi_n^{(\nu)}\left(-\frac{k'}{k}\right) \right| = O \{ \Psi_n(k') \}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Donc, en posant  $k' = k$ , pour qu'une suite  $s_\nu$  sommable-E(k) soit sommable-S(k), il faut et il suffit que

$$(6, 5) \quad \sum_{\nu=0}^n (1+k)^\nu \frac{1}{\nu!} \left| \Psi_n^{(\nu)}(-1) \right| = O \{ \Psi_n(k) \}, \quad n \rightarrow \infty,$$

quelque soit  $k$ .

Or, en posant

$$\frac{1}{\nu!} \Psi_n^{(\nu)}(-1) = \lambda_\nu^n,$$

on a évidemment

$$\Psi_n(x-1) = (x-1)x(x+1)\dots(x+n-2) = \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu^n x^\nu,$$

et, puisque

$$\begin{aligned} \Psi_n(x-1) &= (x-1) \Psi_{n-1}(x) = (x-1) \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu \end{matrix} \right] x^\nu = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left\{ \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu \end{matrix} \right] \right\} x^\nu + \left[ \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] x^n, \end{aligned}$$

il s'ensuit, que

$$(6, 6) \quad \lambda_\nu^n = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu \end{matrix} \right], \quad \nu=0, 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad \lambda_n^n = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] = 1.$$

Puisque les coefficients de STIRLING  $\left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right]$  vont d'abord en croissant, puis décroissent jusqu'à 1, il s'ensuit que les coefficients  $\lambda_\nu^n$  sont négatifs jusqu'à une certaine valeur de l'indice  $\nu$ , positifs après. D'autre part, l'expression  $\sum_{\nu=0}^n (1+k)^\nu \lambda_\nu^n = \Psi_n(k)$  étant positive, il s'ensuit que

la condition (6, 5) sera satisfaite toutes les fois que

$$(6, 7) \quad \sum_{\nu=p}^n (1+k)^\nu \lambda_\nu^n = O \{ \Psi_n(k) \}, \quad \text{pour tout } p=0, 1, 2, \dots, n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Or, en tenant compte de (6, 6) on aura

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=p}^n (1+k)^\nu \lambda_\nu^n &= \sum_{\nu=p}^{n-1} \left\{ \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu \end{matrix} \right] \right\} (1+k)^\nu + \left[ \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] (1+k)^n = \\ &= k \sum_{\nu=p}^n \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] (1+k)^{\nu-1} + \left[ \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right] (1+k)^p \leq \Psi_n(k) + \left[ \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right] (1+k)^p \leq \\ &\leq \Psi_n(k) + \frac{1+k}{k} \Psi_n(k) = \left( 2 + \frac{1}{k} \right) \Psi_n(k). \end{aligned}$$

Donc, la condition (6, 7), et par suite (6, 5), est satisfaite, d'où il résulte que toute suite sommable-E(k) est de même sommable-S(k).

Il reste encore à montrer que la proposition inverse n'a pas lieu en général. — Posons pour cela

$$(6, 8) \quad S_n = \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)} \sum_{\nu=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right] k^\nu s_\nu, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

en supposant que

$$(6, 9) \quad S_n \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty.$$

De (6, 8) il résulte alors, d'après (1, 7),

$$s_n = (-k)^{-n} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \left\{ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right\} k(k+1)(k+2)\dots(k+\nu-1) S_\nu, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Si l'on remplace, donc, cette valeur de  $s_n$  dans la somme  $E_n(k')$ , d'EULER, on obtient

$$\begin{aligned} E_n(k') &= (1+k')^{-n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} k'^\nu s_\nu \\ &= (1+k')^{-n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left(-\frac{k'}{k}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^\nu (-1)^\mu \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} k(k+1)(k+2)\dots(k+\mu-1) S_\mu \\ &= (1+k')^{-n} \sum_{\mu=0}^n S_\mu k(k+1)(k+2)\dots(k+\mu-1) (-1)^\mu \sum_{\nu=\mu}^n \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} \binom{n}{\nu} \left(-\frac{k'}{k}\right)^\nu \\ &= (1+k')^{-n} \sum_{\nu=0}^n A_\nu^n \left(\frac{k'}{k}\right)^\nu k(k+1)(k+2)\dots(k+\nu-1) S_\nu. \end{aligned}$$

(5) O. TOEPLITZ, Über allgemeine lineare Mittelbildungen. *Prace Mat.-Fiz.* 22, p. 113-119 (Warszawa, 1911).

En y posant, en particulier,  $k'=k$  et  $\Lambda_v^n(1) = \Lambda_v^n$ , l'on obtient

$$(6, 10) \quad E_n(k) = (1+k)^{-n} \sum_{v=0}^n \Lambda_v^n k(k+1)(k+2)\dots(k+v-1) S_v.$$

Puisque cette expression est égale à l'unité lorsque  $S_n = s_n = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , quelque soit  $k > 0$ , il s'ensuit que

$$(6, 11) \quad (1+x)^n = \sum_{v=0}^n \Lambda_v^n x(x+1)(x+2)\dots(x+v-1),$$

relation qui peut en même temps servir pour déterminer les coefficients  $\Lambda_v^n$ .

Par suite, pour que l'expression (6, 10)  $\rightarrow s$ , ( $n \rightarrow \infty$ ) pour toute suite  $S_n$  satisfaisant à (6, 9) il faut et il suffit que

$$(6, 12) \quad \sum_{v=0}^n |\Lambda_v^n| k(k+1)(k+2)\dots(k+v-1) = O\{(1+k)^n\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Or, cette relation n'est pas satisfaite. Car, de (6, 11) l'on obtient pour les coefficients  $\Lambda_v^n$  la forme explicite suivante

$$\Lambda_v^n = \frac{1}{v!} \sum_{i=0}^v (-1)^i \binom{v}{i} (1-i)^n$$

d'où l'on voit que

$$\frac{|\Lambda_v^n|}{(1+k)^n} \rightarrow \infty \quad \text{avec } n,$$

dès que

$$v > k+2, \text{ c'est-à-dire } |1-v| > k+1;$$

la relation (6, 12) ne peut donc à fortiori avoir lieu, d'où il résulte qu'il existera toujours une suite particulière  $s_n$  sommable-S( $k$ ) et qui ne sera pas sommable-E( $k$ ).

Les résultats précédents montrent, en particulier, pourquoi il est plus facile à passer de la sommabilité-B à la sommabilité-S( $k$ ) que de la sommabilité-B à la sommabilité-E( $k$ ).

7. Remarquons en dernier lieu, qu'en appliquant à la somme de BOREL (5, 1) des considérations analogues à celles que j'ai exposées au premiers Congrès des Mathématiciens Roumains (6), relativement à la somme d'ABEL, on arrive aux sommes d'EULER; mais, ces sommes ne se présentent pas liées à la somme de BOREL d'une manière aussi

(6) Voir loc. cit. (3).

précise comme on vient de l'obtenir pour les sommes de STIRLING. Cela résultera des considérations suivantes.

Pour que la somme de BOREL

$$q(y) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{q_v}{v!} y^v$$

soit à croissance régulière rapide, il faut et il suffit, d'après (3, 7) et (3, 8) que

$$(7, 1) \quad \int_0^y \frac{q(t-y)}{q(y)} e^{-t} dt \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad y \rightarrow \infty,$$

car, de (7, 1) il résulte

$$(7, 2) \quad \frac{q(y+v)}{q(y)} \rightarrow e^{(\alpha-1)v}, \quad y \rightarrow \infty, \text{ quelque soit } v.$$

Or, en posant

$$Q_n = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} q_v,$$

l'on obtient

$$\int_0^y e^{-t} \frac{q(t-y)}{q(y)} dt = \int_0^y \frac{e^{\tau} q(\tau)}{e^y q(y)} d\tau = \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{Q_{v-1}}{v!} y^v}{\sum_{v=0}^{\infty} \frac{Q_v}{v!} y^v}.$$

Par suite, la relation (7, 1) aura lieu toutes les fois que

$$(7, 3) \quad \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{\sum_{v=0}^{n+1} \binom{n+1}{v} q_v}{\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} q_v} \rightarrow \alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

c'est à-dire, toutes les fois que la somme d'EULER de la suite  $q_v$  sera à croissance régulière rapide, puisque de (7, 3) il résulte

$$(7, 4) \quad \frac{Q_{n+v}}{Q_n} \rightarrow \alpha^v, \quad n \rightarrow \infty, \text{ pour tout } v.$$

On peut, donc, conclure des relations (7, 2) et (7, 4) qu'entre les valeurs asymptotiques de  $Q_n$  et  $q(y)$  il existe le rapport suivant:

$$(7, 5) \quad Q_n \sim \alpha^n L_1(e^n), \quad n \rightarrow \infty,$$

entraîne

$$(7, 6) \quad q(y) \sim e^{(a-1)y} L_2(e^y), \quad n \rightarrow \infty.$$

Il serait donc à voir si, d'une part, la relation (7, 2) entraîne (7, 4) lorsque les  $q_\nu$  sont positifs, et d'autre part, si les fonctions à croissance lente  $L_1(x)$  et  $L_2(x)$  des relations (7, 5) et (7, 6) sont identiques, c'est-à-dire, s'il existe entre les procédés de sommabilité de BOREL et d'EULER des rapports aussi intimes que ceux qu'on a obtenus entre les sommabilités de BOREL et STIRLING.