

Über einen Satz von Vijayaraghavan.

Von

J. Karamata in Beograd.

Bei den Beweisen der Sätze von Tauberschem Charakter, wegen ihrer Vereinfachung, spielt eine wichtige Rolle der folgende Satz von H. T. Vijayaraghavan¹⁾:

Satz 1. Sei $f(r) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v r^v$ konvergent für $r < 1$ und

$$f(r) = O(1), \text{ bei } r \rightarrow 1;$$

aus $\sum_{v=n}^q u_v \geq -M$, für alle $n < q \leq 3n$ und $n = 1, 2, 3, \dots$, folgt

$$\sum_{v=0}^n u_v = O(1), \text{ bei } n \rightarrow \infty.$$

Da dieser Satz auch an und für sich ein gewisses Interesse darbietet, gebe ich hier einen einfachen Beweis desselben, indem ich ihn zugleich folgendermaßen verallgemeinere:

Satz 2. Sei $A(t)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung in jedem Intervall $(0, T)$, und existiere das Integral

$$(1) \quad I(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\{A(t)\} \quad \text{für jedes } s > 0;$$

aus

$$(2) \quad I(s) = O(1), \text{ bei } s \rightarrow 0,$$

und

$$(3) \quad A(t) - A(x) \geq -w(\lambda), \text{ für jedes } x > 0 \text{ und } x < t \leq x\lambda, \lambda > 1,$$

folgt

$$(4) \quad A(x) = O(1), \text{ bei } x \rightarrow \infty.$$

¹⁾ T. Vijayaraghavan, A Tauberian theorem, Journal London Math. Soc. 1 (1926), S. 113–120.

Beweis. Ich betrachte die Funktion

$$\varphi(x) = (1 + a)\bar{e}^x - a\bar{e}^{2x}, \quad \text{wo } a > 1, \quad \text{und setze } \lg \frac{2a}{1+a} = \alpha > 0,$$

dann ist $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x)$ zunehmend für $0 < x < \alpha$ und abnehmend für $\alpha < x < \infty$.

Weiter ist, wenn

$$(5) \quad J(s) = (1 + a)I(s) - aI(2s)$$

und $x = \frac{\alpha}{s}$ gesetzt wird,

$$J(s) - A(x) = \int_0^x \{\varphi(st) - 1\} d\{A(t)\} + \int_x^\infty \varphi(st) d\{A(t)\} - \sum_{r=-\infty}^0 \int_{x\lambda^{r-1}}^{x\lambda^r} \{\varphi(st) - 1\} d\{A(t)\} - \sum_{r=0}^\infty \int_{x\lambda^r}^{x\lambda^{r+1}} \varphi(st) d\{A(t)\},$$

und nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$J(s) - A(x) = \sum_{r=-\infty}^0 \{\varphi(\alpha\lambda^r) - 1\} \{A(x\lambda^r) - A(\xi'_r)\} + \sum_{r=0}^\infty \varphi(\alpha\lambda^r) \{A(\xi_r) - A(x\lambda^r)\},$$

wo

$$x\lambda^{r-1} \leq \xi'_r \leq x\lambda^r, \quad r = 0, -1, -2, \dots \quad \text{und} \quad x\lambda^r \leq \xi_r \leq x\lambda^{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

so daß nach (3)

$$J(s) - A(x) \geq -w(\lambda) \left[\sum_{r=-\infty}^0 \{\varphi(\alpha\lambda^r) - 1\} + \sum_{r=0}^\infty \varphi(\alpha\lambda^r) \right].$$

Also wird

$$(6) \quad A(x) \leq J\left(\frac{\alpha}{x}\right) + w(\lambda) M(\alpha, \lambda),$$

wo

$$M(\alpha, \lambda) = \sum_{r=-\infty}^0 (1 - e^{\alpha\lambda^r}) (a\bar{e}^{\alpha\lambda^r} - 1) + \sum_{r=0}^\infty \bar{e}^{\alpha\lambda^r} (1 + a - a\bar{e}^{\alpha\lambda^r}),$$

$$\alpha = \lg \frac{2a}{1+a} \quad \text{und} \quad a > 1.$$

Da wegen (2) und (5)

$$J(s) = O(1), \quad \text{bei } s \rightarrow 0,$$

ist, so folgt aus (6), daß

$$(7) \quad A(x) < O(1), \quad \text{bei } x \rightarrow \infty.$$

Wird nun an Stelle von $\varphi(x)$ die folgende Funktion

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{a\bar{e}^{2x} - \bar{e}^x}{a-1}, \quad a > 1,$$

genommen, so liefern ähnliche Betrachtungen, daß

$$(8) \quad A(x) > O(1), \quad \text{bei } x \rightarrow \infty.$$

Denn, wird $\lg 2a = \bar{\alpha}$ gesetzt, so ist $\bar{\varphi}(0) = 1$, $\bar{\varphi}(x)$ abnehmend zwischen 0 und $\bar{\alpha}$, dann zunehmend und negativ.

Wird weiter $x = \frac{\bar{\alpha}}{s}$ und

$$(9) \quad \bar{J}(s) = \frac{a}{a-1} I(2s) - \frac{1}{a-1} I(s)$$

gesetzt, so wird

$$\begin{aligned} A(x) - \bar{J}(s) &= \int_0^x \{1 - \bar{\varphi}(st)\} d\{A(t)\} + \int_x^\infty -\bar{\varphi}(st) d\{A(t)\} \\ &= \sum_{r=-\infty}^0 \int_{x\lambda^{r-1}}^{x\lambda^r} \{1 - \bar{\varphi}(st)\} d\{A(t)\} + \sum_{r=0}^\infty \int_{x\lambda^r}^{x\lambda^{r+1}} -\bar{\varphi}(st) d\{A(t)\} \\ &= \sum_{r=-\infty}^0 \{1 - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}\lambda^r)\} \{A(x\lambda^r) - A(\xi'_r)\} \\ &\quad + \sum_{r=0}^\infty \{-\bar{\varphi}(\bar{\alpha}\lambda^r)\} \{A(\xi_r) - A(x\lambda^r)\} \\ &\geq -w(\lambda) \left[\sum_{r=-\infty}^0 \{1 - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}\lambda^r)\} - \sum_{r=0}^\infty \bar{\varphi}(\bar{\alpha}\lambda^r) \right], \end{aligned}$$

wo

$$x\lambda^{r-1} \leq \xi'_r \leq x\lambda^r, \quad r = 0, -1, -2, \dots \quad \text{und} \quad x\lambda^r \leq \xi_r \leq x\lambda^{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Also ist

$$(10) \quad A(x) > \bar{J}\left(\frac{\bar{\alpha}}{x}\right) - w(\lambda) \bar{M}(\bar{\alpha}, \lambda),$$

wo

$$\bar{M}(\bar{\alpha}, \lambda) = \frac{1}{a-1} \left[\sum_{r=-\infty}^0 (1 - \bar{e}^{\bar{\alpha}\lambda^r}) (a\bar{e}^{\bar{\alpha}\lambda^r} + a - 1) + \sum_{r=0}^\infty \bar{e}^{\bar{\alpha}\lambda^r} (1 - a\bar{e}^{\bar{\alpha}\lambda^r}) \right],$$

$$\bar{\alpha} = \lg 2a \quad \text{und} \quad a > 1.$$

Wegen (2) und (9) folgt nun (8) aus (10), und aus (8) und (7) die Behauptung (4).

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt:

Erstens, daß der vorstehende Beweis fast ungeändert verwendet werden kann, um den folgenden allgemeineren Satz zu beweisen:

Satz 3. Sei $A(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem Intervall $(0, T)$, und existiere das Integral

$$I(s) = \int_0^\infty \bar{e}^{st} d\{A(t)\} \quad \text{für jedes } s > 0,$$

sei ferner $g(x)$ stetig und positiv in $(0, \infty)$ und

$$g(2x) = O\{g(x)\}, \quad \text{bei } x \rightarrow \infty;$$

aus

$$(11) \quad I(s) = O\left\{g\left(\frac{1}{s}\right)\right\}, \quad \text{bei } s \rightarrow 0,$$

und

$$(12) \quad A(t) - A(x) \geq -w(i)g(x), \text{ für jedes } x > 0 \text{ und } x < t \leq xi, i > 1,$$

folgt dann

$$(13) \quad A(x) = O\{g(x)\}, \text{ bei } x \rightarrow \infty.^2)$$

Zweitens daß dasselbe Prinzip, indem man die Funktionen $\varphi(x)$ und $\bar{\varphi}(x)$ durch passend gewählte Polynome von \bar{e}^x ersetzt, auch dazu verwendet werden kann, um die Tauberschen Sätze (besonders Satz A, S. 33, meiner unter ²⁾ zitierten Arbeit) direkt zu beweisen, wie ich es unlängst in einer ganz allgemeinen Form gezeigt habe³⁾.

Beograd, den 25. Februar 1931.

²⁾ Würde in diesem Satze statt (13) nur verlangt, daß $A(x) > O\{g(x)\}$ wird, so verliert er für zu schnell wachsende Funktionen $g(x)$ {z. B. wenn $g(x) \sim x^\sigma$, $\sigma > 0$ } seinen Sinn, da in diesem Falle $A(x) > O\{g(x)\}$ schon aus (12) folgt, wie ich es in meiner Arbeit: J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplaceschen Stieltjesschen Transformationen betreffen, Journal für die reine u. angewandte Math. 164 (1931), S. 36 gezeigt habe.

Zugleich sei bemerkt, daß der Satz 3 den auf S. 36 meiner eben zitierten Arbeit angeführten Hilfssatz enthält, wodurch die Beweise dieser Arbeit etwas verkürzt werden, und in welchem Falle die Beweisanordnung diejenige des Herrn Vijayaraghavan wäre, welche er (siehe loc. cit. ¹⁾) für Potenzreihen verwendet hat.

³⁾ J. Karamata, Sur le rapport entre les convergences d'une suite de fonctions et de leurs moments, et son application à l'inversion des procédés de sommabilité, Studia Mathematica 3 (1931), S. 68-76, Lwów.

(Eingegangen am 28. Februar 1931.)