О ЈЕДНОМ НИЗУ РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА И ЊИХОВОЈ УЛОЗИ ПРИ РАЗВИЈАЊУ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

од

Д-ра ЈОВАНА КАРАМАТЕ

О ЈЕДНОМ НИЗУ РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА И ЊИХОВОЈ УЛОЗИ ПРИ РАЗВИЈАЊУ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА.

ОД Д-ра ЈОВАНА КАРАМАТЕ

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 10 јуна 1927.)

Предмет ове расправе је испитивање низа рационалних функција датих изразом

$$\varphi_n(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^n \cdot z^\nu = 1^n \cdot z + 2^n \cdot z^2 + \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

и развијање аналитичких функција по тим функцијама.

У првоме делу навешћемо главне особине поменутог низа функција $\{\varphi_n(z)\}$; у другоме делу посматраћемо редове облика

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

испитаћемо на који се начин могу развити произвољне аналитичке функције у такве редове и навешћемо неколико примена тих посматрања.

I.

Приметимо најпре да је коефициенат од α^n развитка функције

$$\frac{1}{1 - z e^\alpha}$$

по растућим степенима од α, раван $\frac{1}{n!}\varphi_n(z)$, т. ј. да је

$$\frac{1}{1 - z e^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)}{\nu!} \alpha^\nu \quad \text{за} \quad |\alpha| < R \tag{1}$$

где је

$$R = |lg\, z| \quad \text{са} \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi.$$

Ово увиђамо лако из једначине

$$\frac{1}{1-ze^{\alpha}}=\sum_{\mu=0}^{\infty}z^{\mu}e^{\mu\alpha}=\sum_{\mu=0}^{\infty}z^{\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mu^{\nu}}{\nu!}\alpha^{\nu}\quad \text{за}\quad |ze^{\alpha}|<1$$

јер, према Weierstrass-овом ставу о двоструким редовима, имамо право да у горњој двострукој суми изменемо ред сумирања.

Из једначине (1) можемо сад добити све главне особине функција $\varphi_n(z)$.

Видимо најпре да су функције $\varphi_n(z)$ заиста рационалне, јер како је $1/1-ze^{\alpha}$ рационална по z и e^{α}, то су и сви њени изводи рационални по z и e^{α}, па је према томе и њен n-ти извод по α за $\alpha=0$ рационална функција по z.

Наведимо сад неке особине поменутих функција.

1⁰ Ставимо у једначини (1.) $1/z$ у место z и $-\alpha$ уместо α тада добијамо

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{ze^{\alpha}}}=\frac{ze^{\alpha}}{ze^{\alpha}-1}=1-\frac{1}{1-ze^{\alpha}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\varphi_{\nu}(1/z)}{\nu!}\alpha^{\nu}=1-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_{\nu}(z)}{\nu!}\alpha^{\nu}$$

према томе је (2)

$$\varphi_0(1/z)=1-\varphi_0(z)\quad\text{и}\quad \varphi_{\nu}(z)=(-1)^{\nu+1}\varphi_{\nu}(1/z),\quad \nu=1,2,3,\cdots$$

2⁰ Ако једначину

$$\varphi_{\nu}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mu^{\nu}z^{\nu},\quad |z|<1$$

диференцирамо и помножимо са z, добијамо

$$\varphi_{\nu+1}(z)=z\cdot\varphi_{\nu}'(z),\quad \nu=0,1,2,\cdots \tag{3}$$

која једначина, са почетним условом

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{1-z} \tag{4}$$

потпуно одређујемо низ функција $\varphi_{\nu}(z)$.

Из једначина (3) и (4) видимо да функција $\varphi_n(z)$ има облик

$$\varphi_n(z)=\frac{\Psi_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \tag{5}$$

где је

$$\Psi_{n+1}(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}z^{\nu+1}=z\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}z^{\nu} \tag{6}$$

један полином n-тог степена, чији коефициенти $\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}$, према једначини

$$\Psi_n(z)=(1-z)^{n-1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^{n}\cdot z^{\nu}$$

имају облик

$$\begin{bmatrix}n-1\\ \nu-1\end{bmatrix}=\sum_{\mu=1}^{\nu}(-1)^{\mu+1}\binom{n+1}{\mu+1}(\nu-1-\mu)^{n} \tag{7}$$

и, према једначини (2)

$$\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\ n-\nu\end{bmatrix} \tag{8}$$

а лако увиђамо још, да ти коефициенти задовољавају следећу рекурентну једначину

$$\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}=(n-\nu+1)\cdot\begin{bmatrix}n-1\\ \nu-1\end{bmatrix}+(\nu+1)\cdot\begin{bmatrix}n-1\\ \nu\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Функције $\varphi_n(z)$ можемо још написати у облику

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{1-z}\sum_{\nu=1}^{n}\nu!\,c_{\nu+1}^{n-\nu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\nu}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\,c_{\nu+1}^{n-\nu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\nu+1};\quad n=1,2,3,\cdots \tag{10}$$

где је

$$c_{\nu+1}^{n-\nu}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^{\cancel{\nu}\,\mu}\binom{\nu}{\mu}(\nu-\mu)^{n}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\mu=1}^{\nu}(-1)^{\nu-\mu}\binom{\nu}{\nu-\mu}\mu^{n}$$

а одавде према формули (2) следи $=\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\mu}\binom{\nu}{\mu}\mu^{n}=\left\{{n\atop \nu}\right.$

$$\varphi_n(1+z)=(-1)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\,c_{\nu+1}^{n-\nu}\cdot\frac{1}{z^{\nu+1}}\quad. \tag{11}$$

3⁰ Ако означимо са $\epsilon_{\nu,n}$, n-те корене из јединице т. ј.

$$\epsilon_{\nu,n}=e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}$$

тада из једначине (1) или из реда $\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^{n}\cdot z^{\nu}$ следује

$$n^{p-1}\cdot\varphi_p(z^{n})=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_p(\epsilon_{\nu,n}\cdot z) \tag{12}$$

4⁰ Потражимо још границу израза $\left|\sqrt[n]{\frac{\varphi_n(z)}{n!}}\right|$ кад $n\to\infty$; имамо најпре, пошто је радиус конвергенције реда (1) раван $R=|lg\,z|$, да је

$$\mathop{\mathrm{L}^{sup}}_{n=\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{\varphi_n(z)}{n!}}\right|=\frac{1}{|lg\, z|}; \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant z$$

међутим, пошто функција $\dfrac{1}{1-ze^{\alpha}}$ има само полове, то низ $\left|\sqrt[n]{\dfrac{\varphi_n(z)}{n!}}\right|$ тежи једној одређеној граници, па је према томе

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{\varphi_n(z)}{n!}}\right|=\frac{1}{|lg\, z|}; \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi. \tag{13}$$

Ако је међутим $arc\, z \pm \pm \pi$, тада функција $\dfrac{1}{1-ze^{\alpha}}$ има само један пол на кругу конвергенције, па је, шта више, према познатом ставу,

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} n\cdot\frac{\varphi_{n-1}(z)}{\varphi_n(z)}=-lg\, z; \quad -\pi < arc\, z < \pi. \tag{14}$$

5^0 Функцијама $\varphi_n(e^z)$ можемо још дати и следећи облик: како је

$$\varphi_0(e^{z+\alpha})=\frac{1}{1-e^z\cdot e^{\alpha}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z+\alpha}-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+\alpha+2\nu\pi i}+\frac{1}{z+\alpha-2\nu\pi i}\right\}$$

коју једначину кад n-пута диференцирамо по α и ставимо $\alpha=0$, добијамо

$$\varphi_n(e^z)=(-1)^{n+1}\cdot n!\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+2\nu\pi i)^{n+1}}$$

или

$$\varphi_n(e^{-z})=n!\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z+2\nu\pi i)^{n+1}}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{15}$$

или, коначно, ако ставимо $z=2\lambda\pi i$,

$$\varphi_n(e^{2\lambda\pi i})=\frac{(i)^{n+1}\cdot n!}{(2\pi)^{n+1}}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda+\nu)^{n+1}}. \tag{16}$$

На крају, потражимо неке специјалне вредности функција $\varphi_n(z)$, што ће показати везу између поменутих функција и Bernoulli-евих и Euler-ових бројева.

Ако пођемо од једначине

$$\frac{1}{1-ze^{\alpha}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_{\nu}(z)}{\nu!}\alpha^{\nu}$$

и ставимо у овој, $i\alpha$ уместо α добијамо:

$$\frac{1-z\,cs\,\alpha}{z^2-2z\,cs\,\alpha+1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\varphi_{2\nu}(z)}{(2\nu)!}\alpha^{2\nu};$$
$$\frac{z\,sin\,\alpha}{z^2-2z\,cs\,\alpha+1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-2}\frac{\varphi_{2\nu-1}(z)}{(2\nu-1)!}\alpha^{2\nu-1}.$$

Ако сад у горњој једначини ставимо $z=-1$, а у доње две $z=\pm i$, тада према познатим развитцима горњих функција добијамо:

$$\varphi_0(-1)=\tfrac{1}{2}, \quad \varphi_{2\nu}(-1)=0, \quad \varphi_{2\nu-1}(-1)=$$
$$=(-1)^{\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{B_{2\nu}}{2\nu}=\frac{(-1)^{\nu}}{2^{2\nu}}T_{2\nu}$$

$$\varphi_0(\pm i)=\tfrac{1}{2}\mp \tfrac{i}{2}E_0, \quad \varphi_{2\nu}(\pm i)=(-1)^{\nu}\frac{\pm i}{2}E_{2\nu}, \quad \varphi_{2\nu-1}(\pm i)=$$
$$=(-1)^{\nu}\frac{1}{2}T_{2\nu}$$

где су B_ν Bernoulli-еви, $E_{2\nu}$ Euler-ови бројеви а $T_{2\nu}$ тангентни коефициенти, т. ј.

$$\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}=1-\frac{\alpha}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\alpha^{2\nu}; \quad \frac{1}{cos\,\alpha}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!}\alpha^{2\nu}$$

и

$$tg\,\alpha=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{(2\nu-1)!}\alpha^{2\nu-1}.$$

Према овим резултатима, видимо да из формуле (16) добијамо познате редове за бројеве B_ν, E_ν и T_ν; што дакле показује заједничко порекло тих бројева и њихову везу са низом функција $\varphi_\nu(z)$ за $|z|=1$.

II

Пре него што пређемо на испитивање редова облика

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a^{\nu}\varphi_{\nu}(z)$$

напоменимо неке познате особине целих функција.

За једну целу функцију $G(z)$, казаћемо да припада класи Δ, ако израз

$$\frac{lg\,M(r)}{r}$$

где је

$$M(r) = max\{G(z)\} \quad \text{за} \quad |z| = r$$

остаје коначан за све вредности r; а саму горњу границу

$$\underset{r=\infty}{\mathbf{L}} sup \frac{lg\,M(r)}{r} = \lambda(G)$$

називаћемо *карактеристиком целе функције* $G(z)$. Целе функције које припадају класи $\triangle$ су очигледно нулте врсте или прве врсте и првог реда (ordre), а према познатим резултатима из целих функција, постоји следећи став:

Став I. Потребан и довољан услов да једна цела функција

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu = e^{Az+B} \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{z:\lambda_\nu}$$

припада класи $\triangle$, је да један од следећа два услова буде испуњен:

1⁰ или да низ[1]

$$|\sqrt[n]{g_n \cdot n!}|$$

остаје коначан, а тада је

$$\underset{n=\infty}{\mathbf{L}} sup |\sqrt[n]{n!\,g_n}| = \lambda(G)$$

т. ј. горња граница је равна карактеристици функције $G(z)$.

2⁰ или да ред[2]

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}$$

уређен по растућим модулама корена λ_ν остаје коначан за све n, и да

$$\frac{N(r)}{r}$$

остаје коначно за све r, где је $N(r)$ број корена функције $G(z)$ који се налазе у и на кругу $|z| = r$; тада је

[1] A. Pringsheim. Math. Ann. 58 (1904.) стр. 257-342.

[2] loc. cit. [1] u E. Lindelöf. Sur les ponctions entières d'ordre entier. Ann. de l'ec. Normale. (3) 22. (1505). стр. 369-395.

$$\underset{r=\infty}{\mathbf{L}} sup \frac{N(r)}{r} \leqslant \lambda(G).$$

Овај нам став показује како према коренима или коефициентима једне целе функције $G(z)$ можемо познати, дали она припада класи $\triangle$ или не.

Овако дефинисана класа целих функција, биће нам у доцнијем излагању потребна, а сад ћемо прећи на испитивање поменутих редова.

Нека је дат један ред облика

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z) \tag{17}$$

где су $\varphi_\nu(z)$ напред посматране функције а $\{a_\nu\}$ један произвољан низ коефициената; докажимо најпре следећи основан став:

Став II. *Ред* (17) *конвергира апсолутно, и униформално за све тачке z које се налазе у унутрашњости области C дефинисане неједначином*

$$C: |lg\,z| > \alpha, \quad -\pi \leqslant arc\,z \leqslant \pi$$

где је

$$\alpha = \underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}} sup |\sqrt[\nu]{\nu!\,a_\nu}|;$$

дивергира ван те области; а на самој кривој K

$$K: |lg\,z| = \alpha$$

у погледу конвергенције, не можемо у општем случају ништа закључити.

Из овог става видимо аналигију посматраних редова са Taylor-овим редовима, у којима је само z смењено са $\frac{1}{lg\,z}$; ми ћемо тога ради извести деказ горњег става само у кратким цртама.

Применом Cauchy-евог критеријума, и једначине (13) видимо да ред (17) конвергира, кад год је

$$\underset{n=\infty}{\mathbf{L}} sup |\sqrt[n]{a_n \varphi_n(z)}| = \underset{n=\infty}{\mathbf{L}} sup |\sqrt[n]{n!\,a_n}| \cdot \left|\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\varphi_n(z)}\right| =$$

$$= \frac{\alpha}{|lg\,z|} < 1, \quad -\pi \leqslant arc\,z \leqslant \pi$$

а дивергија кад је горњи израз > 1, што нам показује у исто време да је ред (17) апсолутно конвергентан у области C, а дивергентан ван те области.

Да би сад још доказали да је он и униформално конвергентан у C, уочимо једну тачку z_0 те области и покажимо да увек постоји један такав број N, да је

$$\left|\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)}\right| < 1 \quad \text{за све } n \geqslant N$$

кад је

$$\left|\frac{lg\, z_0}{lg\, z}\right| < 1 .$$

Заиста, пошто низ $\left|\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\varphi_n(z)}\right|$ тежи граници $\frac{1}{|lg\, z|}$, то постоји увек такав један број N да је

$$|\varphi_n(z)| \leqslant \frac{n!}{(|lg\, z| + \epsilon)^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{|\varphi_n(z_0)|} \leqslant \frac{(|lg\, z_0| - \epsilon')^n}{n!}$$

за све $n \geqslant N$, а где су ϵ и ϵ' произвољно мали позитивни бројеви.

Према томе је

$$\left|\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)}\right| \leqslant \left(\frac{|lg\, z_0| - \epsilon'}{|lg\, z| + \epsilon}\right)^n < \left|\frac{lg\, z_0}{lg\, z}\right|^n < \left|\frac{lg\, z_0}{lg\, z}\right| < 1$$

за све $n \geqslant N$.

Према томе је

$$|a_n \varphi_n(z)| \leqslant |a_n \varphi_n(z_0)|$$

за све $n \geqslant N$ и $|lg\, z| > |lg\, z_0|$, а пошто је по претпоставци ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \varphi_\nu(z_0)|$$

конвергентан, то следи из горње неједначине да је ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \varphi_\nu(z)| \quad \text{па и ред} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$$

униформно конвергентан за све z за које је

$$|lg\, z| > |lg\, z_0| > \alpha$$

т. ј. за све тачке z које се налазе у унутрашњости области C. ш. ј. т. д.

Испитајмо сад изближе поменуту област конвергенције C; како је она ограничена кривом линијом K

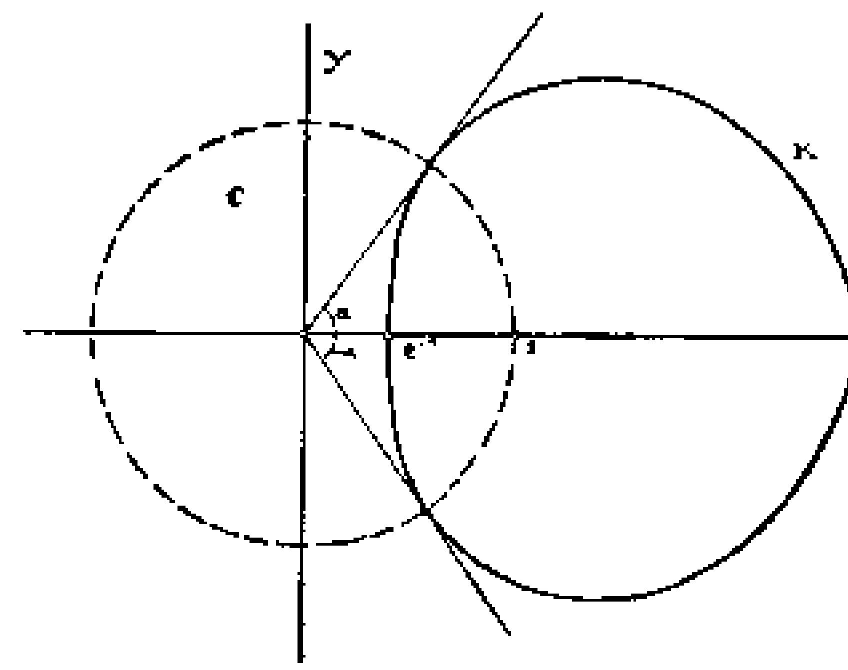
$$K : |lg\, z| = \alpha, \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi$$

или

$$K : \rho = e^{\pm\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad z = \rho e^{\theta i}$$

то видимо, према облику криве K, да треба у главном разликовати два случаја и то према томе да ли је $\alpha < \pi$ или $\geqslant \pi$.

1^0 **случај:** $\alpha < \pi$. У овоме је случају крива K састављена из једне затворене линије, без двојних тачака, а има облик слике 1. Она садржи у својој унутрашњости тачку $z = 1$, а тачке $z = 0$ и $z = \infty$ леже ван ње.



сл. 1

Према томе се област C састоји из једног дела, а то је онај део равни z који се налази ван криве K, т. ј. онај део који садржи тачке $z = 0$ и $z = \infty$.

2^0 **случај:** $\alpha \geqslant \pi$. У овоме се случају крива K састоји из две затворене криве линије K_1 и K_2, тако да се крива K_1 налази у унутрашњости криве K_2 и нема са њом ниједну заједничку тачку, осим у случају кад је $\alpha = \pi$, а тада је тачка $z = -1$ заједничка; (види слике 2 и 3 на следећој страни) круг чија је једначина

$$|z| = 1$$

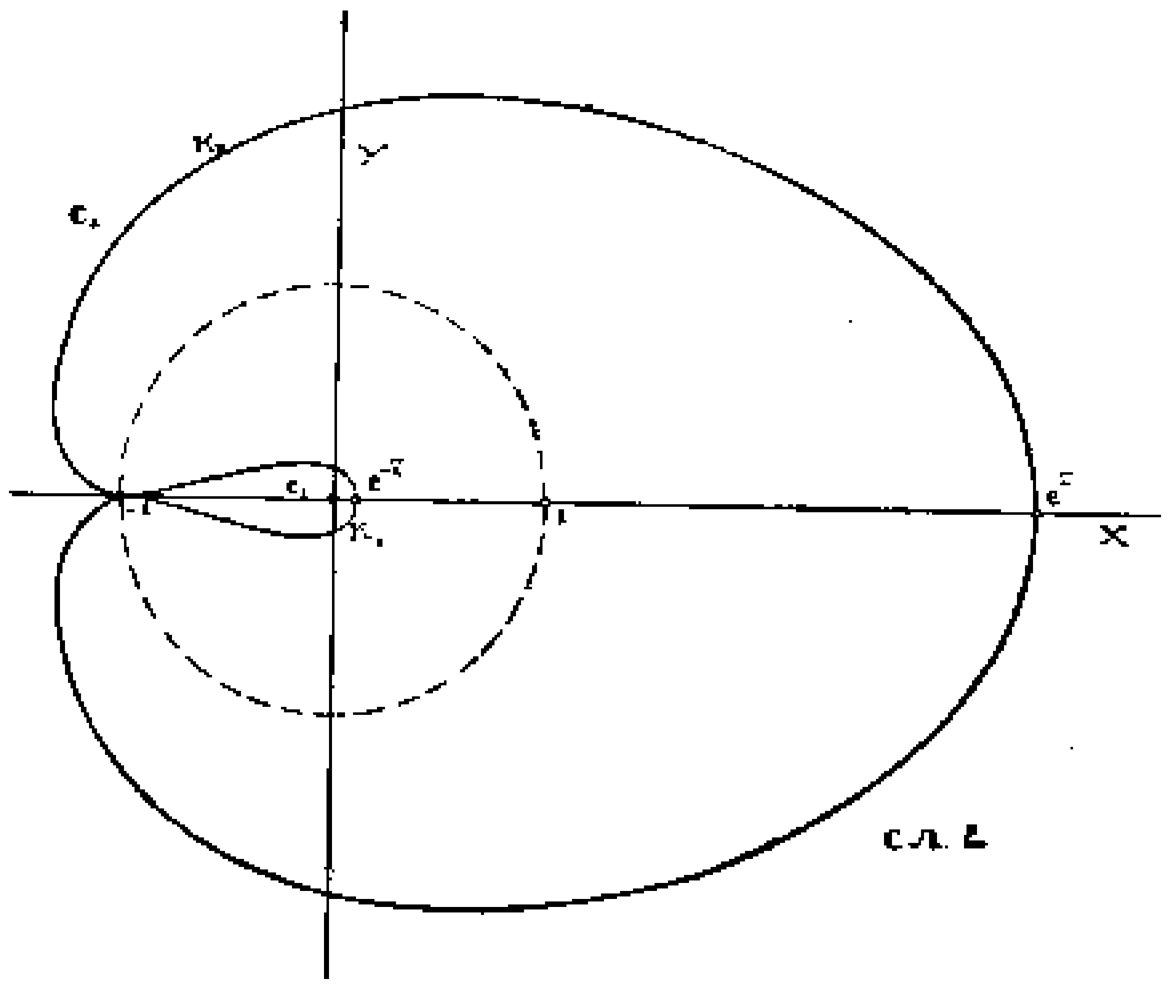
увек се налази између кривих K_1 и K_2, тако да се тачка $z = 0$ налазе и у кривој K_1, а тачка $z = \infty$ ван криве K_2.

Према томе, у овоме се случају област C састоји из две области C_1 и C_2, које немају заједничких тачака, и то област C_1 се налази у унутрашњости криве K_1 т. ј. она садржи тачку $z = 0$, а област C_2 се налази ван криве K_2 т. ј. она садржи тачку $z = \infty$.

Да би сад испитали функције дефинисане редом (17) напоменимо најпре следеће:

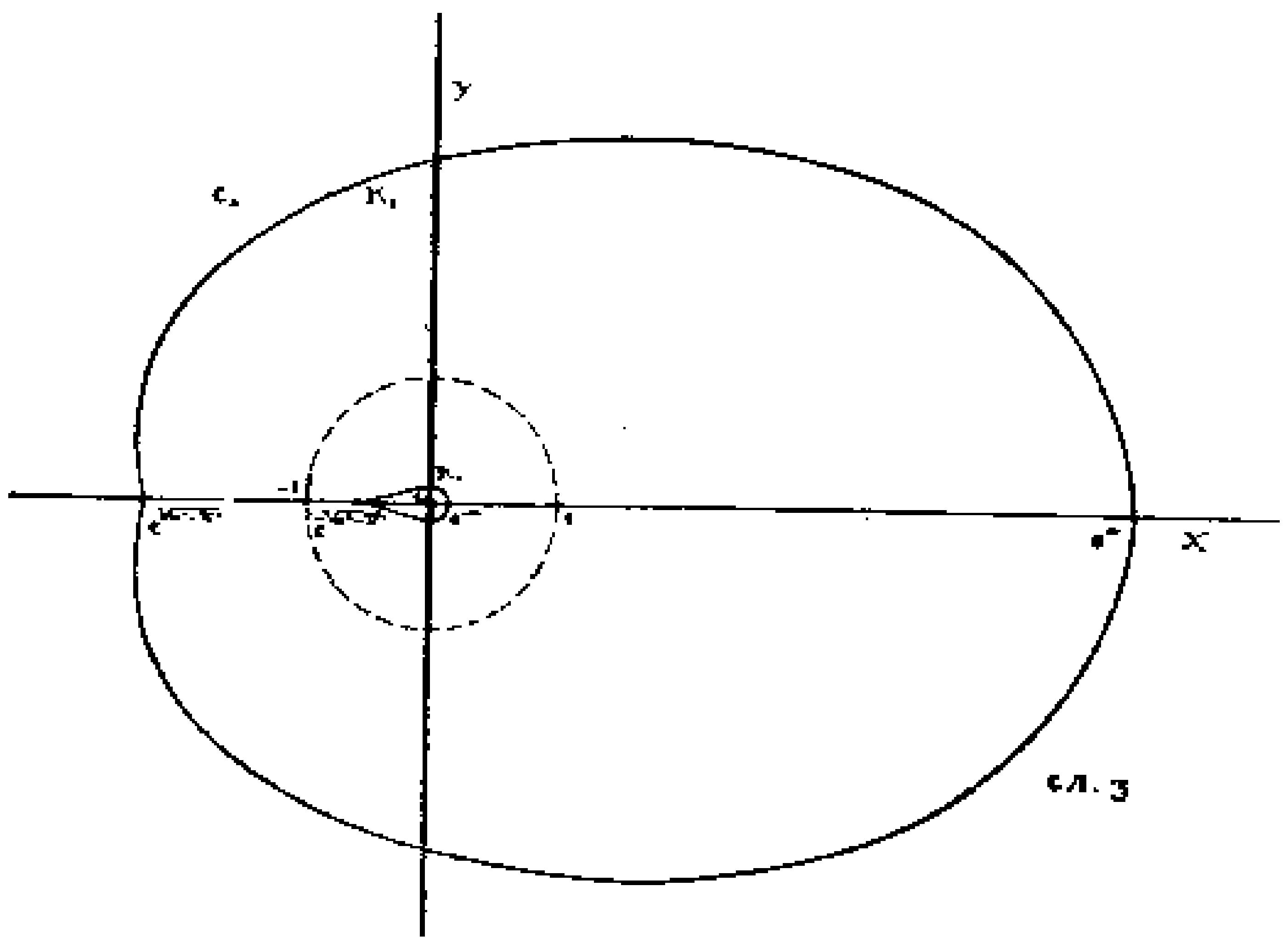
Претпоставимо прво да је $\alpha < \pi$, тада ће поменути ред конвергирати униформно у целој области C, па нам према томе он у C претставља једну униформну аналитичну функцију. Другим речима кад је $\alpha < \pi$ ред (1) претставља једну, у близини тачака $z=0$ и $z=\infty$ холоморфну функцију.

Ако је $\alpha \geqslant \pi$, тада ће ред (17) конвергирати униформално у областима C_1 и C_2, те ће у скакој од тих области претстављати



сл. 2

једну аналитичну функцију. Али, пошто те две области немају ниједне заједничке тачке, то ред (17) у областима C_1 и C_2 неће у



сл. 3

опште претстављати једну исту аналитичну функцију т. ј. ако означимо са $f_1(z)$ функцију дефинисану редо (17) у области C_1 а са $f_2(z)$ ону у области C_2, тада у општем случају не можемо добити функције $f_1(z)$ и $f_2(z)$ једну из друге аналитичким продужењем.

Према томе, видимо да кад је $\alpha \geqslant \pi$ ред (17) претставља у опште две разне аналитичне функције и то једну халоморфну у тачци $z=0$ а другу у тачци $z=\infty$.

На основи ових посматрања, можемо поставити следећа питања:

1⁰ Дали се *свака у тачки* $z=0$ (или $z=\infty$) *холоморфна функција* $f(z)$ може развити у ред облика (17)?

2⁰ Дали се *сваки пар функција* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$, *једна холоморфна у тачки* $z=0$ *а друга у тачки* $z=\infty$, могу развити у поменути ред?

3⁰ На који се начин одређују коефициенти реда (17) кад су дате функције?

4⁰ Дали су ти развитци једнозначно одређени кад су дате функције?

Одговори на питања 3⁰ и 4⁰ следе непосредно, као што ћемо ведети, из одговора на питања 1⁰ и 2⁰. Приступимо зато решавању првог питања.

Нека је $f(z)$ једна, у тачки $z=0$, холоморфна функција, дата Taylor-овим редом

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\tau_\nu z^\nu, \quad |z|<R>0.$$

и нека је

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu, \quad \underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\sqrt[\nu]{g_\nu}=0,$$

једна цела функција, која интерполише низ бројева $\{\tau_\nu\}$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ т. ј.

$$g(\nu)=\tau_\nu \quad \nu=0,1,2,\ldots$$

(Познато је да се један произвољан низ бројева може на бескрајно много начина интерполисати целим функцијама.)

Ставимо

$$g_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu z^\nu$$

и посматрајмо низ функција

$$f_n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_n(\nu)\, z^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{n} g_\mu \nu^\mu z^\nu, \quad |z|<1$$

како је други збир десне стране горње једначине коначан, то можемо изменити ред сумирања и добијамо

$$f_n(z)=\sum_{\mu=0}^{n} g_\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^\mu z^\nu = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu \varphi_\mu(z) \quad |z|<1.$$

Претпоставимо за сад, да ред

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu \varphi_\mu(z)$$

конвергира најмање за једну вредност од z, $z_0 \neq 0$, т. ј. према ставу II., да граница

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\mu=\infty} sup \left|\sqrt[\mu]{\mu!\, g_\mu}\right| < M < \infty \tag{2}$$

остаје коначна. Тада ће тај ред униформно конвергирати у једној области C која садржи тачку $z=0$.

Према томе низ аналитичних функција

$$\{f_n(z)\} \quad n=0,1,2,\cdots$$

униформно конвергира у области C и по Weierstrass-овом ставу он тежи функцији $f(z)$ т. ј.

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} f_n(z) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_n(\nu) z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu) z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu = f(z)$$

кад $z \subset C$. А како је у исто време

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \cdot \varphi_\nu(z), \quad z \subset C.$$

то добијамо

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \cdot \varphi_\nu(z), \quad z \subset C.$$

Одавде видимо да је одговор на постављено питање *афирмативан*, и то под претпоставком да је неједначина (2) испуњена, међутим та се претпоставка, према ставу I поклапа са претпоставком да се низ $\{\tau_\nu\}$ може интерполисати једном целом функцијом класе Δ.

Да ефективно постоје целе функције које припадају класи Δ, и које интерполишу низ бројева $\{\tau_\nu\}$ (шта више да их има бескрајно много) показаћемо доцније; а за сад под том претпоставком можемо изрећи следећи став:

Став III. *Свака у тачки $z=0$ холоморфна функција, може се развити у један у близини те тачке конвергентан ред, облика*

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$$

а коефицијенти a_ν тога реда су равни Taylor-овим коефицијентима g_ν једне од оних целих функција

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$$

које припадају класи Δ, и које интерполишу Taylor-ове коефициенте τ_ν посматране функције

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu.$$

Овим ставом је дат афирмативан одговор на питање 1⁰ а у исто време је дат и одговор на питање 3⁰, т. ј. показан је начин како се формирају коефициенти $\{a_\nu\}$.

Пређимо сад на питање 2⁰. Нека су зато $f_1(z)$ и $f_2(z)$ две аналитичне функције, једна холоморфна у тачки $z=0$ а друга у тачки $z=\infty$, и нека су

$$f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{(1)} z^\nu$$

$$f_2(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{(2)} \frac{1}{z^\nu}$$

њихови развитци у близини тих тачака. Нека су даље

$$g_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^{(1)} z^\nu \quad \text{и} \quad g_2(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^{(2)} z^\nu$$

две целе функције, које припадају класи Δ и које интерполишу низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{\tau_\nu^{(2)}\}$ т. ј.

$$g_1(\nu)=\tau_\nu^{(1)} \quad \text{и} \quad g_2(\nu)=\tau_\nu^{(2)}, \quad \nu=0,1,2,\ldots$$

Тада према ставу III добијамо

$$f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^{(1)}\varphi_\nu(z) \quad \text{кад} \quad z\subset C_1(0)$$

и

$$f_2(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^{(2)}\varphi_\nu\left(\frac{1}{z}\right) \quad " \quad z\subset C_2(\infty)$$

како је даље, према формули (2),

$$\varphi_\nu\left(\frac{1}{z}\right)=(-1)^{\nu+1}\varphi_\nu(z) \quad \text{и} \quad \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)=1-\varphi_0(z)$$

то ред за функцију $f_2(z)$ можемо написати у облику

$$f_2(z)=g_0^{(2)}-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu g_\nu^{(2)}\varphi_\nu(z), \quad z\subset C_2(\infty)$$

или

$$f_2(z)-f_2(\infty)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1} g_\nu^{(2)}\varphi_\nu(z), \quad z\subset C_2(\infty)$$

јер је

$$g_0^{(2)}=g_2(0)=\tau_0^{(2)}=f(\infty).$$

Да би се дакле овај развитак поклапао са развитком функције $f_1(z)$, мора бити

$$g_\nu^{(1)}=(-1)^{\nu+1} g_\nu^{(2)} \quad \nu=0,1,2,\ldots$$

т. ј.

$$g_1(z)=-g_2(-z) \quad \text{или} \quad g_1(-z)=-g_2(z).$$

А како је

$$g_1(\nu)=\tau_\nu^{(1)} \quad \text{и} \quad g_2(\nu)=\tau_\nu^{(2)}$$

то, према горњим једначинама, мора бити

$$\left.\begin{aligned} g_1(\nu)&=\tau_\nu^{(1)} \\ g_1(-\nu)&=-\tau_\nu^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad \nu=1,2,3,\ldots$$

и

$$g_1(0)=\tau_0^{(1)}=\tau_0^{(2)}$$

т. ј. функција $g_1(z)$ мора у тачкама $z\pm 0, \pm 1, \pm 2,\ldots$ интерполисати низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$ а поред тога мора бити

$$\tau_0^{(1)}=\tau_0^{(2)} \quad \text{т. ј.} \quad f_1(0)=f_2(\infty).$$

Ако међутим додамо функцији $f_2(z)$ једну константу a т. ј.

$$F(z)=a+f_2(z)$$

тако да буде

$$f_1(0)=F(\infty)$$

тада видимо да је

$$F(z)-F(\infty)=f_2(z)-f_2(\infty)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1} g_\nu^{(2)}\varphi_\nu(z)$$

Према томе је довољно претставити да је $f_2(\infty)=0$ и да функција $g(z)$ интерполише низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$ т. ј.

$$g(\nu)=\tau_\nu^{(1)} \quad \text{за} \quad \nu=0,1,2,\ldots \quad \text{и} \quad g(-\nu)=-\tau_\nu^{(2)} \quad \text{за} \quad \nu=1,2,\ldots$$

Тада ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\varphi_\nu(z)$$

претставља функцију $f_1(z)$ у близини тачке $z=0$ а функцију $f_2(z)$ у близини тачке $z=\infty$.

Дакле, под претпоставком, да постоји, једна цела функција $g(z)$ која припада класи Δ, и која интерполише низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$, доказан је следећи став:

Став IV. *Сваки пар функција $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где је $f_1(z)$ холоморфна у близини тачке $z=0$ а $f_2(z)$ у близини тачке $z=\infty$ са $f_2(\infty)=0$, може се развити у ред облика*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\varphi_\nu(z)$$

који у близини тачке $z=0$ претставља функцију $f_1(z)$ а у близини тачке $z=\infty$ функцију $f_2(z)$. Коефицијенти a_ν тога развитка су равни Taylor-овим коефицијентима g_ν једне од целих функција

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$$

које припадају класи Δ и које интерполишу Taylor-ове коефицијенте $\{\tau_\nu^{(2)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$ посматраних функција

$$f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\tau_\nu^{(2)} z^\nu \quad \text{и} \quad f_2(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu^{(2)}\frac{1}{z^\nu}$$

т. ј.

$$g(\nu)=\tau_\nu^{(1)}, \nu=0,1,2,\ldots \quad \text{и} \quad g(-\nu)=-\tau_\nu^{(2)}, \nu=1,2,\ldots$$

Овај став даје *афирмативан* одговор на постављено питање 2^0, а у исто време је добијен и одговор на питање 3^0 т. ј. показан је начин како се формирају коефициенти a_ν посматраног реда.

Да би ставови III. и IV. били потпуно доказани, треба још показати да једном целом функције класе Δ, можемо увек интерполисати низ $\{\tau_\nu\}$ или низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$. За ту сврху уочимо функцију $G(z)$ дефинисану интегралом

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K(a)} \frac{f(\zeta)\zeta^{-z} + \varphi(\zeta)\zeta^{z}}{\zeta}\, d\zeta$$

у коме контура $K(a)$ полази од тачке a обилази почетак у позитивном смеру и враћа се у ту тачку, а где су $f(z)$ и $\varphi(z)$ у и на контури $K(a)$ холоморфне функције.

Да је $G(z)$ једна цела функција видимо из самог интеграла Покажимо још да она припада класи Δ.

Како је

$$|G(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K(a)} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \cdot |\zeta^{-z}|\, ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K(a)} \left|\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\right| |\zeta^{z}|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1}{2\pi}\int\limits_{K(a)} |\zeta|^{-|z|}\, ds + \frac{M_2}{2\pi}\int\limits_{K(a)} |\zeta|^{|z|}\, ds$$

где су M_1 и M_2 максимуми модула функција $f(z)/z$ и $\varphi(z)/z$ на контури $K(a)$ а ds елеменат лука, то је

$$Max\,|G(z)| = M(r) \leqslant \frac{M_1 + M_2}{2\pi}\int\limits_{K(a)} |\zeta|^{r}\, ds, \quad |z| = r$$

како је даље

$$\mathop{\mathrm{L}}_{r=\infty} \frac{1}{r}\, lg \int\limits_{K(a)} |\zeta|^{r}\, ds = M$$

где је M максимум функције $|z|$ на контури $K(a)$ то је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{r=\infty} sup\, \frac{lg\, M(r)}{r} \leqslant M$$

а пошто је M коначан број, то следи да функција $G(z)$ припада класи Δ. На послетку пошто је

$$G(\nu) = \tau_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

кад у интегралу ставимо

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu, \quad |z| < R, \quad \text{и} \quad \varphi(0) = 0$$

а контуру $K(a)$ изаберемо тако, да се сва налази у кругу $|z| = R$, то видимо да је на тај начин доказана егзистенција једне целе функције $G(z)$, која припада класи Δ и која интерполише низ бројева $\{\tau_\nu\}$.

Према томе је став III. потпуно доказан.

У исто време видимо да функције $f(z)$ и $\varphi(z)$ и контуру $K(a)$ можемо тако изабрати, да $G(z)$ интерполише низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$. Зато је довољно ставити

$$f(z) = f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{(1)} z^\nu \quad |z| < R_1$$

и

$$\varphi(z) = -f_2\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} -\tau_\nu^{(2)} z^\nu \quad |z| < R_2$$

а контуру $K(a)$ изабрати тако да се налази у најмањем од кругова

$$|z| = R_1 \quad \text{и} \quad |z| = R_2.$$

У томе је случају

$$G(\nu) = \tau_\nu^{(1)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad G(-\nu) = \tau_\nu^{(2)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

што доказује егзисталцију једне целе функције $G(z)$ која припада класи Δ и која интерполише низове $\{\tau_\nu^{(1)}\}$ и $\{-\tau_\nu^{(2)}\}$, па је према томе и став IV. потпуно показан.

У исто време видимо, да горњи, резултати дају одговор и на питање 4^0 и то *негативан*, наиме развитак функција $f_1(z)$ и $f_2(z)$ у ред облика (17) (па према томе и развитак само једне функције у такав ред) *није једнозначно одређен*. Другим речима познавањем функција $f_1(z)$ и $f_2(z)$ коефициенти a_ν реда (17) нису једнозначно одређени.

Ово увиђамо већ и отуда, што можемо нулу развити у редове поменутог облика; наиме ако у једначини (1) ставимо $a = 2k\pi i$, добијамо:

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2k\pi i)^\nu}{\nu!}\varphi_\nu(z) \quad \text{за} \quad |lg z| > 2k\pi \quad k = 1, 2, \ldots$$

Видели смо да су у томе случају коефицијенти $\{a_\nu\}$ развитка

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$$

равни Taylor-овим коефицијентима једне од функција

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k(a)} f(\zeta)\zeta^{-z-1}d\zeta[1+\sin\pi z\cdot\Pi(z)]$$

где је $\Pi(z)$ таква произвољна функција да $G(z)$ буде цела функција и да припада класи Δ, а $k(a)$ једна контура која се налази у кругу $|z|=1$.

Нека је за сада $\Pi(z)\equiv 0$, па потражимо за тај случај, област конвергенције поменутог реда.

Из ставова I. и II. следи да ће поменути ред конвергирати у области

$$C: \qquad |lg\, z| > \lambda(G)$$

где је $\lambda(G)$ карактеристика функције

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k(a)} f(\zeta)\zeta^{-z-1}d\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu z^\nu .$$

Потражимо вредност $\lambda(G)$. Како је према ставу I.

$$\lambda(G) = \mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} sup\left|\sqrt[\nu]{\nu!\,G_\nu}\right|$$

то видимо да је $\frac{1}{\lambda(G)}$ радиус конвергенције реда

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-t}G(zt)dt = \sum_{\nu=0}^{\infty}\nu!\,G_\nu\cdot z^\nu .$$

Да би дакле, нашли вредност $\lambda(G)$ треба наћи модуо најближег сингуларитета функције $\varphi(z)$.

Пошто је

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k(a)}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,\frac{d\zeta}{1+lg\,\zeta\cdot z}$$

то кад извршимо смену

$$\zeta = e^\eta$$

добијамо

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{lg\,a}^{lg\,a+2\pi i} f(e^\eta)\frac{d\eta}{1+z\cdot\eta}, \qquad -\pi \leqslant arc\,a \leqslant \pi ,$$

где се интеграција врши дуж једне линије која спаја тачку $lg\,a$ са тачком $lg\,a+2\pi i$. Линија $z=\frac{-1}{\eta}$, када се η налази на путу интеграције, је једна есенцијална линија функције $\varphi(z)$, али пошто је $f(e^\eta)$ холоморфна на тој линији, то видимо да су једино њене крајње тачке $\frac{-1}{lg\,a}$ и $\frac{-1}{lg\,a+2\pi i}$ сингуларне, а лако се можемо уверити да су то критични сингуларитети функције $\varphi(z)$. Према томе је тачка

$$\frac{-1}{lg\,a+2\pi i}, \qquad -\pi \leqslant arc\,a \leqslant \pi,$$

почетку најближи сингуларитет функције $\varphi(z)$, па је дакле

$$\lambda(G) = \mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} sup\left|\sqrt[\nu]{\nu!\,G_\nu}\right| = |lg\,a+2\pi i|, \qquad -\pi \leqslant arc\,a \leqslant \pi$$

или

$$\lambda(G) = \sqrt{(lg\,|a|)^2+(2\pi+\theta)^2}, \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad a=|a|\,e^{\theta i}.$$

Пошто се контура $k(a)$ мора налазити у кругу $|z|=1$, то мора бити $|a|<1$, а само у извесним случајевима може $|a|=1$.

Према томе, најмању вредност коју може узети $\lambda(G)$ добијамо кад је

$$|a+1| = \epsilon' > 0, \qquad |a|<1$$

а тада је

$$\lambda = \pi + \epsilon$$

где је ϵ произвољно мало али веће од нуле; а само у извесним случајевима, можемо ставити

$$\lambda(G) = \pi$$

што добијамо кад је $a=-1$.

Према ранијим резултатима видимо, дакле, да у овоме случају област конвергенције реда (17) не може никад бити већа од области $C(0)$, која је представљена сликама 2. и 3., и да се та област увек налази у кругу $|z|=1$. Дакле је област конвергенције реда

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu\varphi_\nu(z)$$

увек мања од области конвергенције реда

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\tau_\nu z^\nu$$

и према томе ред (17) не може у овоме случају аналитички продужити функцију $f(z)$.

Овај је резултат, у осталом, сасвим природан. Подухватајући проблем са опште тачке гледишта и не учинивши никаку претпоставку за функцију $f(z)$ сем ту да је холоморфна у кругу $|z|=1$, карактеристика $\lambda(G)$ не зависи од $f(z)$. Ако би дакле вредност $\lambda(G)$ била мања од π, функција $f(z)$ би била према ставу II. холоморфна у целој области C (види сл. 1.) што у општем случају не мора бити испуњено.

Напоменимо овде још де је ове резултате нашао већ, S. Wiegert[1], наиме да се коефициенти једног Taylor-овог реда, са радиусом конвергенције 1, могу увек интерполисати једном целом функцијом класе Δ, чија је карактеристика равна $\pi+\epsilon$.

Другим речима, горе поменуте целе функције су у неку руку *најмање функције*, које интерполишу низ коефицената једног Taylor-овог реда са радиусом конвергенције 1, ако наравно, стојимо на најопштијој тачки гледишта.

Нека је сад дат ред

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \varphi_\nu(z)$$

па претпоставимо да је карактеристика $\lambda(g)$ целе функције

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$$

мања од π т. ј.

$$\lambda(g)<\pi.$$

Тада знамо, према ранијим резултатима, да је функција $f(z)$ холоморфна у целој области C, (види сл. 1.) која садржи тачке $z=0$ и $z=\infty$, и која је дефинисана неједначином

$$C:\quad |lg\, z|>\lambda(g)<\pi,\quad -\pi\leqslant arc\, z\leqslant\pi.$$

Дакле, у овом случају, развитак (17) продужује аналитички функцију

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\tau_\nu z^\nu,\quad |z|<1$$

у целој области C.

Претпоставимо сад обратно, да је функција $f(z)$ холоморфна у једној области

[1] S. Wiegert: Sur une certaine classe de serie de puissance. Ark. för Mat. Astron. och Fys. 12. Nr 7. стр. 13. (1917.)

$$C:\quad |lg\, z|>\alpha,\quad -\pi\leqslant arc\, z\leqslant\pi$$

са

$$\alpha<\pi$$

и покажимо да се она може увек развити у један ред облика (17) конвергентан у тој области.

Ставимо зато у једначини (1.)

$$e^{-\alpha}=\zeta,\quad \alpha=-lg\,\zeta,\quad -\pi\leqslant arc\,\zeta\leqslant\pi,$$

то кад ју поделимо са ζ добијамо

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{[-lg\,\zeta]^\nu}{\zeta\cdot\nu!}\varphi_\nu(z)$$

који је ред конвергентан кад год је

$$|lg\,\zeta|<|lg\, z|,\quad \begin{matrix}-\pi\leqslant arc\,\zeta\leqslant\pi.\\ -\pi\leqslant arc\, z\leqslant\pi.\end{matrix}$$

Ако дакле ставимо

$$|lg\,\zeta|=\alpha+\epsilon\quad \epsilon>0$$

тада је функција $f(z)$ холоморфна за све z за које је

$$|lg\, z|\geqslant|lg\,\zeta|.$$

Помножимо сад горњи ред са $f(\zeta)$ т. ј.

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}f(\zeta)\frac{[-lg\,\zeta]^\nu}{\zeta}\cdot\varphi_\nu(z)$$

тада га можемо интегрисати по контури k: $|lg\, z|=\alpha+\epsilon$ и то за све z за које је

$$|lg\, z|>\alpha+\epsilon$$

па је дакле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\frac{1}{2\pi i}\int_k f(\zeta)\frac{[-lg\,\zeta]^\nu}{\zeta}d\zeta\cdot\varphi_\nu(z).$$

Како је међутим[1]

$$f(z)-f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_k\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

[1] Види. W. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie, I. Bd. 4. Auflage. Leipzig-Berlin 1923. стр. 327.

то ако ставимо

$$g_\nu = \frac{1}{\nu!}\frac{1}{2\pi i}\int_k f(\zeta)\left[lg\frac{1}{\zeta}\right]^\nu \frac{d\zeta}{\zeta}$$

видимо, да је ред

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \varphi_\nu(z)$$

конвергентан у целој области C,

$$C: \quad lg z| \geqslant \alpha + \epsilon, \quad -\pi \leqslant arc z \leqslant \pi,$$

и да у тој области представља функцију $f(z) - f(\infty)$.

Што нам доказује горње тврђење.

Из овог видимо да је карактеристика целе функције

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_k f(\zeta)\zeta^{-z-1}d\zeta$$

највише равна броју α т. ј.

$$\lambda(g) \leqslant \alpha < \pi,$$

у што се у осталом можемо уверити и из самог интеграла који представља функцију $g(z)$.

Према томе, добијен је и следећи резултат:

Ако постоји једна таква вредност $\alpha < \pi$ да функција $f(z)$ буде холоморфна у области

$$C: \quad |lg z| < \alpha, \quad -\pi \leqslant arc z \leqslant \pi$$

тада коефициенте $\{\tau_\nu\}$ Taylor-овог реда

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu, \quad |z| < 1$$

можемо увек интерполисати једном целом функцијом класе Δ чија је карактеристика највише равна α.

Међутим, лако можемо показати да је у томе случају цела функција $g(z)$ потпуно дефинисана коефициентима $\{\tau_\nu\}$ т. ј. да не постоје две различите целе функције са карактеристикама мањим од α $(\alpha < \pi)$ које интерполишу низ $\{\tau_\nu\}$.

Овај резултат следи из једног познатог Carlson-овог[1] става, којег, за наш случај можемо изрећи у облику:

[1] F. D. Carlson. Math. Zeitschr. Bd. 11. стр. 14. 1921 г. и Thèse, Uppsala 1914.

Ако је једна цела функција, са карактеристиком мањом од π, равна нули за $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$, тада је она идентично равна нули.

Према томе ставу кад би две целе функције $g(z)$ и $g^*(z)$ са карактеристиком мањом од π, интерполисале низ $\{\tau_\nu\}$ имали би

$$g(z) - g^*(z) = 0$$

т. ј.

$$g(z) \equiv g^*(z).$$

Да овај доказ буде потпун треба још напоменути, да је за две целе функције $f_1(z)$ и $f_2(z)$ које припадају класи Δ увек

$$\lambda(f_1 + f_2) \leqslant M(\lambda(f_1), \lambda(f_2))$$

где $M(a,b)$ представља највећи од бројева a и b.

Напоменимо овде још следеће: видели смо да кад је функција $f(z)$ холоморфна за све z, за које је

$$lg z| > \alpha, \quad \text{са} \quad \alpha < \pi,$$

тада постоји увек једна цела функција $g(z)$ са карактеристиком мањом од π, која интерполише низ коефициената реда

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu$$

Према томе ако је $F(z) = f(z) - f(\infty)$ т. ј. $F(\infty) = 0$ тада можемо увек интерполисати Taylor-ове коефициенте функције $F(z)$ једном целом функцијом са горе наведеним особинама. Из тога излази да ако је $f_1(z)$ холоморфна у области

$$C: \quad |lg z| > \alpha, \quad \text{са} \quad \alpha < \pi$$

и ако је

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{(1)} z^\nu, \quad |z| < 1$$

тада је функција

$$F_1(z) = \frac{f_1(z) - \tau_0^{(1)}}{z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{\nu+1}^{(1)} z^\nu$$

такође холоморфна у области C и $F_1(\infty) = 0$. Према томе се њени Taylor-ови коефициенти могу интерполисати једном целом функцијом $g(z)$ са горњим особинама, т. ј.

$$g(\nu) = \tau_{\nu+1}^{(1)} \quad \text{и} \quad \lambda(g) \leqslant \alpha.$$

Ако ставимо

$$g(z) = g_1(z + 1)$$

тада је такође

$$\lambda(g_1) \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad g_1(\nu) = \tau_\nu^{(1)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

из чега следи да постоји увек једна и само једна цела функција $g_1(z)$ таква да је

$$g_1(\nu) = \tau_\nu^{(1)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad \lambda(g_1) \leqslant \alpha.$$

Горе добивене резултате можемо укратко изрећи у облику следећег става:

Став VI. Нека је $f(z)$ аналитичка функција, представљена Taylor-овим редом

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu \cdot z^\nu, \qquad |z| < 1,$$

чији је радиус конвергенције раван јединици. *Ако се низ коефицијената* $\{\tau_\nu\}$ $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *може интерполисати једном целом функцијом* $g(z)$ *са карактеристиком* $\lambda(g)$ *мањом од* π *тада је* $f(z)$ *холоморфна у целој области*

$$C: \quad |lg\, z| > \lambda(g), \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi,$$

и њен се аналитички продужетак за ту област добија редом

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \varphi_\nu(z)$$

конвергентним у целој области C.

Обратно: *ако постоји такав један број* $\alpha < \pi$ *да је функција* $f(z)$ *холоморфна у области*

$$C: \quad |lg\, z| > \alpha$$

тада постоји увек једна, и само једна, цела функција $g(z)$ *са карактеристиком мањом од* π, (*или* $\leqslant \alpha$) *која интерполише низ коефицијената* $\{\tau_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ т. ј.

$$g(\nu) = \tau_\nu \quad \text{за} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

А тада је

$$g(0) = f(0) - f(\infty).$$

Прва половина овога става је већ позната и доказана од Lindelöf-a[1]; док је сам став VI. једно уопштење познатог Faber-овог[2] става, који гласи:

[1] Lindelöf. Calcul des résidus. Paris. 1905.

[2] Faber: Ueber die Forsetzbarkeit gewisser Taylor-schen Reihen. Math. Ann. t. 57. стр. 369.

Потребан и довољан услов, да једна униформна функција

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu \qquad |z| < 1,$$

има једино тачку $z = 1$ за сингуларну, је да се коефициенти $\{\tau_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ могу интерполисати једном целом функцијом чија је карактеристика равна нули.

Из тога видимо да је Faber-ов став један специјалан (граничан) случај нашега става, који се добија кад се стави

$$\alpha = \lambda(g) = 0.$$

Напоменимо на крају још следеће:

Ако нам је дат један Taylor-ов ред облика

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu) z^\nu, \qquad |z| < 1$$

са радиусом конвергенције 1, а где је $g(z)$ цела функција, тада нас њена карактеристика $\lambda(g)$ може информисати о положају (а евентуално и о природи) сингуларитета функције $f(z)$ само у случају кад је $\lambda(g) < \pi$; ако је $\lambda(g) \geqslant \pi$ тада о природи и положају сингуларитета не можемо ништа закључити. У исто време видимо да је горњим посматрањем веза између карактеристике $\lambda(g)$ целе функције $g(z)$ и положаја сингуларитета функције $f(z)$, потпуно истакнута на видик.

Из самог става VI. видимо да се испитивање: када једна функција $f(z)$, дата Taylor-овим редом, има сингуларитете само у области

$$C: \quad |lg\, z| > \alpha < \pi.$$

своди на испитивање: кад се Taylor-ови коефициенти функције $f(z)$ могу интерполисати једном целом функцијом са карактеристиком мањом од π; што ће бити предмет једне друге расправе.

SUR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES ET LES DÉVÈLOPPEMENTS SUIVANT CES FONCTIONS

PAR J. KARAMATA

(Résumé)

Dans cette note, l'auteur étudie la suite de fonctions

$$\varphi_n(z) = 1^n \cdot z + 2^n \cdot z^2 \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^n \cdot z^\nu$$

et les dévèloppements en sèrie ordonnée suivant ces fonctions.

Dans la première partie il montre certaines propriétés des fonctions $\varphi_n(z)$, lesquelles du reste, découlent prèsque toutes du fait que $\frac{1}{1 - z e^{\alpha}}$ est la fonction génèratrice de la suite $\{\varphi_n(z)\}$ c. à. d.

$$\frac{1}{1 - z e^{\alpha}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)}{\nu!} \alpha^\nu.$$

Les principales de ces propriétés sont les suivantes:

1⁰ $\varphi_n(z), n = 0, 1, 2, \ldots$ sont des fonctions rationnelles de la forme

$$\varphi_n(z) = \frac{\psi_n(z)}{(1-z)^{n+1}}$$

où $\psi_n(z)$ est un polynome de degrè n

$$\Psi_{n+1}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} z^{\nu+1} = z \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} z^\nu$$

dont les coefficients $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ sont donnés par la formule

$$\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} = \sum_{\mu=0}^{\nu+1} (-1)^{\mu+1} \binom{n+2}{\mu+1} (\nu - \mu)^{n+1}$$

et satisfont à l'égalité

$$\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-\nu \end{bmatrix}.$$

Les fonctions $\varphi_n(z)$ elle-mêmes satisfont aux égalités suivantes:

2⁰ $$\varphi_\nu(z) = (-1)^{\nu-1} \varphi_\nu\left(\frac{1}{z}\right) \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\varphi_0(z) = 1 - \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

3⁰ $$\varphi_{\nu+1}(z) = z \varphi'_\nu(z) \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

avec

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{1-z}.$$

4⁰ $$n^{\nu+1} \varphi_\nu(z^n) = \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\nu(\epsilon_{\mu,n} \cdot z)$$

où

$$\epsilon_{\mu,n} = e^{\frac{2\mu\pi i}{n}}$$

5⁰ La suite

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\varphi_n(z)\right|}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

converge vers une limite détèrminée qui est

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\varphi_n(z)\right|} = \frac{1}{|lg\, z|}, \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi,$$

et de plus, lorsque z ne se trouve pas sur la partie négative de l'axe réelle, on a

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} n \frac{\varphi_{n-1}(z)}{\varphi_n(z)} = -lg\, z, \quad -\pi < arc\, z < \pi.$$

6⁰ La fonction $\varphi_n(e^{-z})$ peut être dévèloppée en une série de la forme

$$\varphi_n(e^{-z}) = n! \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z + 2\nu\pi i)^{n+1}}$$

qui, pour $-z = 2\lambda\pi i$ se réduit à

$$\varphi_n(e^{2\lambda\pi i}) = (i)^{n+1} \frac{n!}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda+\nu)^{n+1}}$$

De cette série et des valeurs particulières que prend $\varphi_n(z)$ pour $z = 1, \pm i$, qui sont:

$$\varphi_0(-1) = \frac{1}{2}, \ \varphi_{2\nu}(-1) = 0, \ \varphi_{2\nu-1}(-1) = (-1)^\nu (2^{2\nu}-1)\frac{B_{2\nu}}{2\nu} = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}} T_{2\nu}$$

$$\varphi_0(\pm i) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} E_0, \ \varphi_{2\nu}(\pm i) = (-1)^\nu \frac{\pm i}{2} E_{2\nu}, \ \varphi_{2\nu-1}(\pm i) = (-1)^\nu \frac{1}{2} T_{2\nu}$$

(où B_ν, E_ν et T_ν sont les nombres de Bernoulli, d'Euler et les coefficients de tangente), on voit que les fonctions $\varphi_n(z)$ sont une source commune des nombres de Bernoulli et d'Euler.

Dans la seconde partie, l'auteur étudie les séries de la forme

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$$

et montre que ces séries sont *absolument et uniformement convergentes dans le domaine* C défini par l'inégalité

$$C: \quad |lg\, z| > \alpha, \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi$$

où

$$\alpha = \mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} sup \left| \sqrt[\nu]{\nu!\, a_\nu} \right|;$$

qu'elles divergent pour tout z extérieur à C, tandis que sur le bord

$$|lg\, z| = \alpha$$

on ne peut, dans le cas général, rien conclure.

Le domaine C est d'un tenant ou non, suivant que α est $<$ au $\geqslant \pi$. (Voir fig. 1, 2 et 3 page 55 et 56).

En suite, il montre *que toute fonction* $f(z)$ *holomorphe au point* $z = 0$ *peut être développée* en une série de la forme considérée, et que les coefficients a_ν sont les coefficients de Taylor d'une fonction entière $g(z)$ „à caractèristique bornée" qui interpole les coefficients de Taylor τ_ν de la fonction donnée

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu$$

c. à. d.

$$g(\nu) = \tau_\nu \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Une fonction entière, $g(z)$ est dite „à caractérisque $\lambda(g)$ bornée" si l'expression

$$\frac{lg\, M(r)}{r}$$

où $M(r) = Max|g(z)|$ pour $|z| = r$, reste finie quelque soit r, la caractèristique étant

$$\lambda(g) = \mathop{\mathrm{L}}_{r=\infty} sup \frac{lg\, M(r)}{r}.$$

En considérant même, deux fonctions

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{(1)} z^\nu \quad \text{u} \quad f_2(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu^{(2)} \frac{1}{z^\nu}$$

l'une holomorphe au point $z = 0$ et l'autre au point $z = \infty$ avec $f_2(\infty) = 0$, *on peut toujours les dévèlopper en une série de la forme*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$$

réprésentant dans le domaine $C(0)$ (contenant le point $z = 0$) *la fonction* $f_1(z)$ *et dans le domaine* $C(\infty)$ (contenant le point $z = \infty$) *la fonction* $f_2(z)$. Les coefficients a_ν de cette série, sont les coefficients de Taylor d'une fonction entière $g(z)$ à caracteristique bornée, interpolant les deux suites $\tau_\nu^{(1)}$ et $-\tau_\nu^{(2)}$, c. à. d.

$$g(\nu) = \tau_\nu^{(1)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots \quad \text{et} \quad g(-\nu) = -\tau_\nu^{(2)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

En suite, il montre (résultat déjà trouvé par M. S. Wiegert) qu'il existe éffectivement des fonctions entières à caractreristique bornée, égale à $\pi + \epsilon$, qui interpolent la suite $\tau_\nu^{(1)}$ (et $\tau_\nu^{(2)}$) et qui'il en existent même une infinité. De là il resulte qu'une fonction $f(z)$ (ou une paire de fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$) peut être développée d'une infinité de manières, en série de la forme considérée.

Pourtant, si deux séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z) \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^* \varphi_\nu(z)$$

réprésentent la même fonction $f_1(z)$ dans le domaine $C(0)$ (et la même fonction $f_2(z)$ dans le domaine $C(\infty)$), *les deux fonctions entières*

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad \text{et} \quad g^*(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^* z^\nu$$

interpolent aux points $z = 0, 1, 2, \ldots$ *la suite* $\tau_\nu^{(1)}$, (et aux points $z = -1, 2, \ldots$ la suite $-\tau_\nu^{(2)}$.)

De là il resulte, que la forme la plus générale du coefficient a_ν d'une serie répresentant une fonction $f(z)$ (ou deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$) est donnée par le coefficient de Taylor de la fonction entière

$$G(z) = g(z)[1 + \sin \pi z \cdot \Pi(z)]$$

où $g(z)$ est une fonction à caractéristique bornée interpolant la suite τ_ν (ou les suite $\tau_\nu^{(1)}$ et $-\tau_\nu^{(2)}$) et $\Pi(z)$ est une fonction telle que $G(z)$ soit une fonction entière à caracteristique bornée.

Comme application de ces resultats l'auteur démontre le théorème suivant:

Théorème: Soit $f(z)$ une fonction holomorphe au point $z=0$, dont la série de Taylor

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu z^\nu, \quad |z| < 1$$

a pour rayon de convergence l'unité. *Si les coefficients τ_ν peuvent-être interpolés par une fonction entière $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$ à caractéristique $\lambda(g)$ plus petite que π la fonction $f(z)$ est holomorphe en tout point z du domaine C extérieur à la courbe:*

$$|lg\, z| = \lambda(g), \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi;$$

et son prolongement analytique est donné par la série

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \varphi_\nu(z),$$

convergente dans C.

Inversement, s'il existe un nombre $\alpha < \pi$, tel que la fonction $f(z)$ soit holomorphe en tout point du domaine C extérieur à la courbe

$$|lg\, z| = \alpha, \quad -\pi \leqslant arc\, z \leqslant \pi,$$

la suite des coefficients $\tau_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ peut toujours être interpolée par une fonction entière $g(z)$, et une seule, à caracteristique plus petite que π (ou $\leqslant \alpha$), et

$$f(0) - f(\infty) = g(0).$$

La première moitié de ce théorème a déjà été démontrée par M. Lindelöf; tandis que le théorème entier est une généralisation d'un théorème connu de Faber, et ce réduit à ce théorème pour

$$\alpha = \lambda(g) = 0.$$

De ce qui precède on voit que: une série de Taylor étant donnée sous la forme

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu) z^\nu, \quad |z| < 1$$

avec le rayon de convergence égal à l'unité, $g(z)$ étant une fonction entière, la caracteristique de $g(z)$ peut nous informer sur la position des singularités de $f(z)$, seulement dans le cas ou elle est plus petite que π. Dans le cas contraire et à fortiori si l'ordre de $g(z)$ est plus grand que l'unité, on ne peut rien conclure sur la position des singularités de $f(z)$.

En même temps, on voit, que la relation entre la caracteristique de $g(z)$ et la position des singularités de $f(z)$ est complément mise à jour.