Историја математичких и механичких наука
Књига 1

А. Т. Григорьян
Б. Н. Фрадлин

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ ШКОЛЫ Г. К. СУСЛОВА ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ И ЕЕ РАЗВИТИЕ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЮГОСЛАВСКИХ УЧЕНЫХ

Математички институт
Београд, 1977

А.Т. Григорьян
Б.Н. Фрадлин

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ ШКОЛЫ Г. К. СУСЛОВА ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ И ЕЕ РАЗВИТИЕ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЮГОСЛАВСКИХ УЧЕНЫХ

Уредник

академик др Татомир П. Анђелић

ИСТОРИЈА МАТЕМАТИЧКИХ И МЕХАНИЧКИХ НАУКА

Књига I

I 15

издаје: Математички институт, — Београд, Кнез Михаилова 35.

Штампа: "Радиша Тимотић" - Београд, Јакшићева 9

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
Београд, 1977

Историја математичких и механичких наука
Књига I

А.Т. Григорјан
Б.Н. Фрадлин

НАУЧНО НАСЛЕЂЕ ШКОЛЕ АНАЛИТИЧКЕ МЕХАНИКЕ Г.К.СУСЛОВА И ЊЕН РАЗВИТАК У ИСТРАЖИВАЊИМА ЈУГОСЛОВЕНСКИХ НАУЧНИКА

Математички институт
Београд, 1977

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Страна
Введение	1
1. Развитие аналитической механики в трудах Суслова	1
2. Научное наследие П.В.Воронца по аналитической механике	7
3. Развитие научного наследия школы Суслова в исследованиях А.Д.Билимовича..	23
4. Дальнейшее развитие научного наследия школы Суслова в исследованиях югославских ученых по аналитической механике ..	45
Татомир П. Ангелич	45
Растко Стоянович	48
Велько А. Вуйичич	48
Божидар Д. Вуянович	49
Джордже С. Джукич	51
Заключение	53
Библиография	55
Гаврил Константинович Суслов	57
Петр Васильевич Воронец	61
Научно наслеђе школе аналитичке механике Суслова и њен развитак у истраживањима југословенских научника (кратак садржај)...	63
Белешка о писцима	66
Поговор уредника	67

ВВЕДЕНИЕ

В развитии механики конца XIX и начала XX ст. ст. в России и за рубежом заметную роль сыграл Г.К.СУСЛОВ (1857-1935). Окончив Петербургский университет (1880) и успешно защитив магистерскую (1888) и докторскую (1890) диссертации, Суслов посвятил всю свою жизнь педагогической, научной и научно-организационной деятельности в области механики. Возглавляя в течение многих лет кафедры теоретической механики Киевского университета (1888-1920) и Одесского политехнического института (1920-1935), он создал научную школу, всемирно прославившуюся такими крупными учеными как П.В. ВОРОНЕЦ (1871-1923), А.Д.БИЛИМОВИЧ (1879-1970), М.К.КРЕЙН (род. 1907), Ф.Р.ГАНТМАХЕР (1908-1964), которые вместе со своими учениками внесли значительный вклад в развитие механики и математической физики.

В настоящей статье дается краткий обзор исследований по аналитической механике Г.К.СУСЛОВА и А.Д.БИЛИМОВИЧА, а также югославских ученых следующих поколений (Т.АНГЕЛИЧ, В.ВУЙИЧИЧ и др.), которые, будучи непосредственными или идейными учениками БИЛИМОВИЧА, испытали на себ е заметное влияние научного наследия школы СУСЛОВА-ВОРОНЦА-БИЛИМОВИЧА.

1. РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ТРУДАХ СУСЛОВА

Если говорить о вкладе ГАВРИИЛА КОНСТАНТИНОВИЧА СУСЛОВА в механику, то прежде всего следует отметить его трактат ОСНОВы АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, созданный им на рубеже XIX и XX ст.ст. Наряду с учебником П.АППЕЛЯ, учебник СУСЛОВА является настольной книгой для специалистов в области механики и до настоящего времени не потерял своего значения, став классическим. На него ссылаются в периодической отечественной и зарубежной печати, он служит ар-

*

битром в дискуссиях между учеными при решении спорных вопросов, по этому учебнику изучило науку механику не одно поколение студентов высших учебных заведений[1]. Учебник СУСЛОВА по теоретической механике представляет собой один из немногих учебников мировой литературы, в которых механика неголономных систем не выделяется в отдельную главу и излагается как органическое целое вместе с механикой голономных систем.

СУСЛОВУ принадлежит оригинальная точка зрения на понятие возможного перемещения. Он различает понятия возможных и виртуальных перемещений системы. Именно, возможным перемещением системы он называет совокупность бесконечно малых перемещений

$$\Delta\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu \Delta t,$$

точек системы, удовлетворяющих условиям связей

$$\Delta f_\alpha \equiv \mathrm{grad}_\nu f_\alpha \cdot \Delta\vec{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t = 0,$$
$$\Delta\phi_\beta \equiv \vec{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\Delta\vec{r}_\nu + D_\beta \Delta t = 0$$
$$(\nu=1,\dots,n;\ \alpha=1,\dots,a;\ \beta=1,\dots,b),$$

при данном, возможном для рассматриваемого момента врамени, положении системы. Виртуальное же перемещение системы - это независимая от времени и совместимая со связями разность

$$\delta\vec{r}_\nu = \Delta'\vec{r}_\nu - \Delta\vec{r}_\nu,$$

двух возможных перемещений системы в данный момент времени. Таким образом, виртуальное перемещение системы удовлетворяет соотношениям

$$\delta f_\alpha \equiv \mathrm{grad}_\nu f_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0,$$
$$\delta\phi_\beta \equiv \vec{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\delta\vec{r}_\nu = 0.$$

В случае односторонних связей знаки равенства в написанных соотношениях заменяются знаками "НЕ МЕНЬШЕ".

1 Литература о Г.К.Суслове: А.П.Шварцман, ГАВРИИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ СУСЛОВ, Изв. АН СССР, 11 (1955), 151-157; А.Т.Гигорьян: ОЧЕРКИ ИСТОРИИ МЕХАНИКИ В РОССИИ, Москва 1961.

Уравнения неголономной механики СУСЛОВ приводит в формах ОСТРОГРАДСКОГО и РАУСА-ФОССА. Эти уравнения используются автором для вывода принципа ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО в случае удара неголономной системы. При этом доказываются также теоремы КЕЛЬВИНА и БЕРТРАНА, справедливые при ударе как голономной, так и неголономной системы. Уравнения РАУСА-ФОССА дают возможность вывести и уравнения движения несвободного твердого тела относительно неподвижной и подвижной систем референции.

Большой заслугой СУСЛОВА является подробное изложение в учебнике раздела механики твердого тела с закрепленной течкой с включением новых для того времени исследований С.В.КОВАЛЕВСКОЙ и ее многочисленных последователей, в особенности русских ученых. Это обстоятельство несомненно сыграло значительную роль в приобщении к этим замечательным исследованиям многих молодых ученых как в России, так и за границей. БИЛИМОВИЧ вспоминает, что проблема КАВАЛЕВСКОЙ на рубеже XIX и XX ст.ст. именовалась "русской" проблемой - столь велик был интерес выдающихся русских ученых того времени к нахождению частных интегрируемых случаев соответстсующей системы дифференциальных уравнений.

Заметим в заключание, что в учебнике СУСЛОВА излагаются и некоторые собственные исследования автора по аналитической механике. К этим исследованиям принадлежат установленные СУСЛОВыМ обобщенные канонические уравнения динамики, обобщенный принцип ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА, новые примеры конкретных неголономных систем и др.

Рассматривая костервативную систему, СУСЛОВ записывает общее уравнение динамики в виде

$$\delta U + \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\delta q_r = 0.$$

После умножения на dt и интегрирования в пределах от t_1 до t_2, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta U + \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\delta q_r\right]dt = 0$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r\right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad \left(\delta\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}\delta\right)q_j = 0,$$

найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\delta \dot q_r dt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{N+\nu}}dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{N+\nu}}(\delta \dot q_{N+\nu}+\sigma_{N+\nu})dt.$$

На основании этих соотношений принцип ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА преобразуется в принцип ВОРОНЦА, представляющий собой обобщенный на неголономные системы интегральный принцип ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО. Распространение рассуждений СУСЛОВА на неконсервативные системы является тривиальным.

СУСЛОВ первый обратил внимание на то, что уравнения ГАМИЛЬТОНА легко обобщеются на неголономные системы в голономных координатах.

Пусть материальная система подчинена неголономным связям

$$A_{\nu r}(t,q_r)\dot q_r + A_\nu(t,q_r)=0,\ r,\rho=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,\dots,k=n-N$$

и, следовательно, ее движение может быть описано уравнениями РАУСА-ФОССА

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_\nu A_{\nu r}.$$

Переходя к каноническим переменным и рассуждая как обычно, получим обобщенные канонические уравнения динамики (уравнения СУСЛОВА).

$$\dot q_r = \frac{\partial \Phi}{\partial p_r},\ \dot p_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_r} + Q_r + \lambda_\nu A_{\nu r},\ \Phi = p_r \dot q_r - T$$

В случае консервативной системы уравнения СУСЛОВА принимает вид

$$\dot q_r = \frac{\partial H}{\partial p_r},\ \dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + \lambda_\nu A_{\nu r},\ H = \Phi - U = p_r \dot q_r - L.$$

Для голономной системы эти уравнения переходят в классические уравнения ГАМИЛЬТОНА.

СУСЛОВУ и ВОРОНЦУ принадлежат новые оригинальные примеры неголономных связей.

Рассмотрим два твердых тела, соединенные весьма длинной гибкой нитью не поддающейся кручению. Такую нить можно осуществить с помощью цепи, составленной из шарниров КАРДАНА-ГУКА. Обозначим координаты данных тел через x_i, y_i, z_i, ϕ_i, ψ_i, θ_i $(i=1, 2)$. Две системы подвижных осей выберем так, чтобы оси ζ совпадали с касательными в концах нити и были направлены к внутренней части нити. Ввиду отсутствия кручения нити сумма проекций угловых скоростей тел $\vec{\omega}_i$ на оси ζ равна нулю, что на основании кинематических формул ЭЙЛЕРА приводит к уравнению неголономной связи

$$\sum_{i=1}^{2}(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\cos\theta_i) = 0.$$

Аналогично, пусть твердое тело неизменно связано с гибкой весьма длинной нитью, не поддающейся кручению, а другой конец нити соединен с часовым механизмом, который сообщает нити постоянную угловую скорость ω_o вокруг касательной. Если касательную к нити в точке ее прекрепления к телу принять за ось ζ, то условие отсутствия кручения нити выразится равенством

$$\omega_\zeta \equiv \dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta = \omega_o,$$

и мы получим, таким образом, неголономную связь.

Пусть, наконец, твердое тело движется по инерции вокруг неподвижной точки и неизменно соединено с одним концом гибкой, весьма длинной и не поддающейся кручению нити, а другой конец нити закреплен неподвижно. Касательная к нити в точке соединения ее с телом проходит через точку опоры. Если эту касательную принять за ось ξ, то уравнение наложенной на тело неголономной связи запишется в виде

$$\omega_\xi \equiv \dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta = 0.$$

В 1903 г. ВОРОНЕЦ указал еще один подобный пример: СИСТЕМА СОСТОИТ ИЗ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПО ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ И СВЯЗАННЫХ НИТЬЮ, НЕ ДОПУСКАЮЩЕЙ КРУЧЕНИЯ. Предполагается, что тела вращаются вокруг своих неподвижных точек по инерции.

Неголономные связи в указанных примерах СУСЛОВА и ВОРОНЦА появляются вследствие отсутствия кручения нити. Соответствующие неголономные условия являются линейными и однородными.

Рассматривая частный случай, когда тела имеют динамические оси вращения, проходящие через неподвижные точки, и касательные к нити в точках соединения с телами направлены по их осям симметрии, ВОРОНЕЦ показал, что кинетическая энергия системы и уравнения связей в последнем примере содержат время, лагранжевы координаты и линейные функции лагранжевых скоростей. Пользуясь принадлежащим ему (см.ниже) методом составления динамических уравнений неголономной механики в квазикоординатах, ВОРОНЕЦ установил, что в рассматриваемой задаче получаем систему пяти дифференциальных уравнений, допускающих три первых интеграла. Имеем полностью интегрируемый случай.

Неголономные связи указанного типа возникают, например, при стыковке космических кораблей, выходе космонавта в открытый космос. Разумеется, о таком применении своих идей СУСЛОВ и ВОРОНЕЦ не могли подозревать. Тем более следует подчеркнуть их удивительную интуицию, свойственную выдающимся ученым. Вообще следует заметить, что на рубеже XIX и XX ст.ст. особое значение для науч-

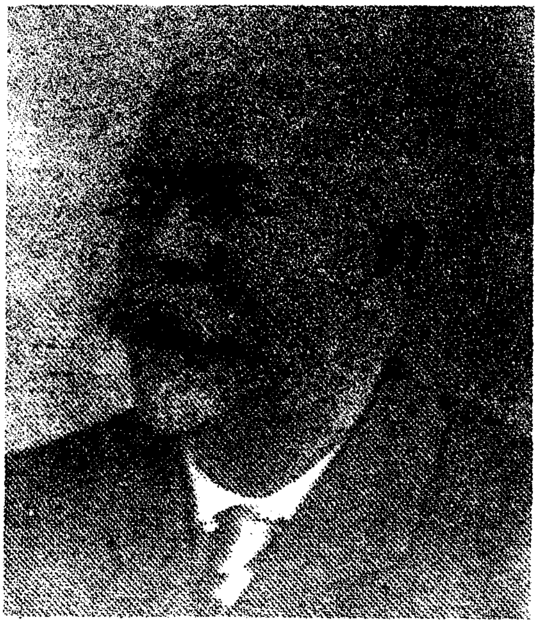

Рис. 1. - ГАВРИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ СУСЛОВ
(1857-1935)

ного и технического прогресса динамики неголономных систем - новой области аналитической механики, которая в то время находилась лишь в начальном периоде своего развития, - понимали лишь считанные передовые ученые, в числе которых находились СУСЛОВ, ВОРОНЕЦ и БИЛИМОВИЧ. Большое значение для неголономной механики имеет высказанная СУСЛОВым мысль о том, что первые интегралы динамических уравнений можно рассматривать как уравнение связей движущейся материальной системы. Вот что пишет СУСЛОВ по этому поводу: "Примером линейной дифференциальной связи может служить связь, выражаемая уравнением

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) - D = 0,$$

где D - некоторая постоянная. Эта связь, очевидно, требует, чтобы сумма кинетических моментов частиц системы относительно оси Oz оставалась постоянной". Эта идея СУСЛОВА сыграла в дальнейшем значительную роль в исследованиях ВОРОНЦА.

2. НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ П. В. ВОРОНЦА ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Воспитанник Киевского университета, ученик профессора СУСЛОВА ПЕТР ВАСИЛЬЕВИЧ ВОРОНЕЦ[2] уже в студенческие годы проявил серьезные способности к научной работе. После окончания математического отделения университета, он был оставлен при кафедре теоретической механики для подготовки к профессорской деятельности. В 1898 г. появилась его первая публикация ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЙЛЕРОВА СЛУЧАЯ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. Эта монография обратила на себя внимание научных кругов, она цитируется в ЭНЦИКЛОПЕДИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК и до настоящего времени не потеряла своего значения в качестве источника информации в области механики абсолютно твердого тела. ВОРОНЕЦ воспринял научные интересы своего учителя. Ему принадлежат выдаю-

2 Литература о П.В.Воронце: Б.Н.Фрадлин, ПЕТР ВАСИЛЬЕВИЧ ВОРОНЕЦ - ОДИН ИЗ ОСНОВОПОЛОЖНИКОВ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ, Труды Института истории ест. и мех. АНСССР, 43 (1961), 422-469; А.Т.Григорьян: ОЧЕРКИ ИСТОРИИ МЕХАНИКИ В РОССИИ, Москва 1961.

щиеся исследования по динамике неголономных систем, динамика твердого тела, в области преобразования и интегрирования динамических уравнений, в решениии проблемы n тел. Полученные им результаты вошли в золотой фонд науки. После успешной защиты магистерской (1903) и докторской (1906) дисертаций П.В. ВОРОНЕЦ всю свою жизнь занимался педагогической деятельностью, состоя профессором механики в Киевском (1906-1920) и Симферопольском (1921-1928) университетах.

В области неголономной механики ВОРОНЕЦ начал роботать под влиянием СУСЛОВА и ЧАПЛЫГИНА. Вместе с плеядой других выдающихся ученых - ПУАНКАРЕ (1901), БОЛЬЦМАНОМ (1903) и ГАМЕЛЕМ (1904) - он оказался в орбите блестящей работы ЧАПЛЫГИНА 1897 г., которая послужила началом бурного развития исследований по аналитической механике неголономных систем на рубеже XIX и XX ст.ст. Чрезвычайно содержательные работы итальянских механиков ВОЛЬТЕРРА (1898) и МАДЖИ (1901) по неголономной динамике долго оставались незамеченными, пока на них не обратил внимание ГАМЕЛЬ (1909). На эти работы ВОРОНЕЦ ссылается впервые лишь в 1911 г.

В отличие от ЧАПЛЫГИНА, исследования которого ограничены рядом упрощающих продположений, ВОРОНЕЦ рассматривает динамические уравнения и вариационные прнципы неголономной механики в наиболее общей постановке. При этом он сопровождает свои теоретические работы решением огромного количества задач о качении твердых тел. Эти задачи в первой четверти II ст. были единственной практической иллюстрацией неголономных систем.

В свете известного теперь широкого применения динамики систем с линейными неголономными связями в физике, геометрии и технике исследования ВОРОНЦА по неголономной механике, одним из основоположников которой он является, приобретают особое значение, а его примеры выглядят как удивительное предвидение будущих научно-технических приложений.

ВОРОНЕЦ рассматривает линейные неголономные связи

$$(1) \qquad \dot{q}_{N+\nu} = a_{\nu i}(t,q_\rho)\dot{q}_i + a_\nu(t,q_\rho); \quad \delta q_{N+\nu} = a_{\nu i}\delta q_i$$

которые использует уже на первом этапе своих рассуждений для исключения зависимых скоростей $\dot{q}_{N+\nu}$ из выражений кинетической энергии и обобщенниых импульсов

$$T = \theta(t, q_\rho, \dot q_i); \quad \frac{\partial T}{\partial \dot q_{N+}} = \theta_\nu(t, q_\rho, \dot q_i)$$

Исходя далее из динамических уравнений

$$\text{(2)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j - \lambda_\nu a_{\nu j}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{N+\nu}} - \frac{\partial T}{\partial q_{N+\nu}} = Q_{N+\nu} + \lambda_\nu ,$$

автор получает систему дифференциальных уравнений движения неголономной системы в голономных координатах (уравнения ВОРОНЦА)

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial \theta}{\partial q_j} = Q_j + \Delta_j ,$$

где

$$\Delta_j = a_{\nu j}\left(Q_{N+\nu} + \frac{\partial \theta}{\partial q_{N+\nu}}\right) + \theta_\nu (A^\nu_{ji}\dot q_i + A^\nu_j),$$

$$A^\nu_{ji} = \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i} + a_{\mu i}\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_{N+\mu}} - \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} - a_{\mu j}\frac{\partial a_{\nu i}}{q_{N+\mu}},$$

$$A^\nu_j = \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial t} + a_\mu \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_{N+\mu}} - \frac{\partial a_\nu}{\partial q_j} - a_{\mu j}\frac{\partial a_\nu}{\partial q_{N+\mu}} .$$

Здесь в дальнейшем

$$\lambda,\mu,\nu=1,\dots,k;\ i,j=1,\dots,N;\ w,r,\rho=1,\dots,n;\ u,\omega,\varepsilon=1,\dots,s;$$
$$N \le s \le n = N+k;\quad \kappa=1,\dots,s-N;\ \gamma=1,\dots,n-s;$$
$$v=N+1,\dots,s;\ a=N+1,\dots,n.$$

В случае цикличности координат q_{N+1} задача об определении лагранжевых координат системы в функции времени распадается на две автономные задачи: задачу об определении нециклических координат из системы (3), в которой следует положить

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_{N+\nu}} = 0,\ A^\nu_{ji} = \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j},\ A_j = \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial t} - \frac{\partial a_\nu}{\partial q_j},$$

и задачу об определении циклических координат из уравнений (1) в квадратурах. Если, к тому же, связи стационарны и силы консервативны, то уравнения ВОРОНЦА превращаются в уранвения ЧАПЛЫГИНА. Ноконец, в случае голономных связей $A^\nu_{ji} = 0$, $A^\nu_j = 0$, и мы получим обычные уравнения ЛАГРАНЖА второго рода.

Указанный метод составления уравнений (3) требует вычисления величин A^{ν}_{ji}, A^{ν}_{j}, что может оказаться громоздким при решении конкретных задач. Поэтому автор продлагает другой метод получения уравнений движения, построенный на использовании установленного им обобщенного принципа ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО для неголономных систем (принцип ФОССА-ВОРОНЦА-СУСЛОВА). Умножая обе части общего уравнения динамики

$$(Q_r + \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r})\delta q_r = 0,$$

на dt, интегрируя в пределах (t_1, t_2) и рассматривая лишь возможные перемещения, которые анулируются для граничных моментов времени, получим принцип ВОРОНЦА в виде

$$J \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q_r \delta q_r + \theta_\nu \sigma_{N+\nu})dt = 0, \quad \sigma_r = \frac{d}{dt}\delta q_r - \delta \dot{q}_r,$$

откуда

$$J \equiv \left|\frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (Q_j + \Delta_j - \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \theta}{\partial q_j})\delta q_j dt = 0,$$

и мы снова приходим к уравнениям ВОРОНЦА (3).

ВОРОНЦУ принадлежат также дифференциальные уравнения движения неголономной системы в неголономных координатах. Обозначая неголономные координаты и скорости через π_ω, p_ω, он записывает уравнения (1) неголономных связей в виде

$$(4) \qquad \dot{q}_r = \alpha_{r\omega}(t, q_\rho)p_\omega + \alpha_r(t, q_\rho); \quad \delta q_r = \alpha_{r\omega}\delta \pi_\omega$$

при наличии зависимостей

$$\beta_{\kappa\omega}p_\omega + \beta_\kappa = 0, \quad \beta_{\kappa\omega}\delta\pi_\omega = 0,$$

$$\beta_{\kappa\omega}\rho_\omega + \beta_\kappa = 0, \quad \beta_{\kappa\omega}\delta\pi_\omega = 0.$$

Если с помощью (4) выразить кинетическую энергию через квазискорости

$$T = \theta(t, q_j, p_\varepsilon),$$

получим

(5)
$$\frac{\partial\theta}{\partial p_\omega} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\alpha_{r\omega},$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial p_\omega} = \alpha_{r\omega}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r} + \dot\alpha_{r\omega}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}.$$

На основании уравнений (2) , в которых

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial\theta}{\partial q_r} - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\rho}\frac{\partial \dot q_\rho}{\partial q_r},$$

с учетом (4), можно написать

(6)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial p_\omega} = \alpha_{r\omega}(Q_r + \frac{\partial\theta}{\partial q_r}) + \frac{\partial T}{\partial \dot q_\rho}(\dot\alpha_{\rho\omega} - \alpha_{r\omega}\frac{\partial \dot q_\rho}{\partial q_r}) + \lambda_\kappa\beta_{\kappa\omega}.$$

При условии $\Delta \equiv ||\alpha_{\varepsilon\omega}|| \neq 0$, принимая во внимание (5), имеем

$$\alpha_{\varepsilon\omega}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varepsilon} = \frac{\partial\theta}{\partial p_\omega} - \alpha_{s+\nu,\omega}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{s+\nu}},$$

откуда

(7)
$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varepsilon} = b_{\varepsilon\omega}(\frac{\partial\theta}{\partial p_\omega} - \alpha_{s+\nu,\omega}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{s+\nu}}),\quad b_{\varepsilon\omega} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{\varepsilon\omega}}.$$

Из (6) и (7) получаем искомые дифференциальные уравнения движения неголономной системы в квазикоординатах с множителями связей

(8)
$$\frac{\partial\theta}{\partial p_\omega} = \alpha_{r\omega}(Q_r + \frac{\partial\theta}{\partial q_r}) + \frac{\partial\theta}{\partial p_\varepsilon}K_{\varepsilon\omega} + \theta_\gamma L_{\gamma\omega} + \lambda_\kappa\beta_{\kappa\omega},$$

где

$$\theta_\gamma = \theta_\gamma(t, q_j, p_\varepsilon) = \frac{\partial T}{\partial \dot q_{s+\gamma}},\quad K_{\varepsilon\omega} = b_{u\varepsilon}(\dot\alpha_{u\omega} - \alpha_{\rho\omega}\frac{\partial \dot q_u}{\partial q_\rho}),$$

$$L_{\gamma\omega} = \dot\alpha_{s+\gamma,\omega} - \alpha_{\rho\omega}\frac{\partial \dot q_{s+\gamma}}{\partial q_\rho} - \sigma_{s+\gamma,u}K_{u\omega},$$

причем $K_{\varepsilon\omega}, L_{\gamma\omega}$ на основании (4) можно рассматривать как линейные функции от p_ε с коэффициентами, зависящими от t, q_ρ.

Если из (8) исключить множители λ_κ и присоединить уравнения связей (4), то получим систему $n+s$ дифференциальных уравнений первого порядка для определения q_ρ, p_ρ. Общее решение этой системы имеет $2n-k$ произвольных постоянных. При $s=N$ $\lambda_\kappa=0$, и мы получим дифференциальные уравнения неголономной системы в квазикоординатах без лагранжевых множителей. В случае консервативной системы эти уравнения имеют интеграл энергии

$$\theta = U + h. \tag{9}$$

При отсутствии неголономных связей $L_{\gamma\omega}=0$. Если к тому же положить $p_\omega=\dot{q}_\omega$, т.е. рассматривать обычные голономные координаты, уравнения ВОРОНЦА сведутся к уравнениям ЛАГРАНЖА второго рода.

ВОРОНЕЦ устанавливает обобщенный на неголономные системы принцип ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО в квазикоординатах (принцип ВОРОНЦА). Исходя из установленного им ранее обобщенного на неголономные системы принципа в голономных координатах и замечая, что $\sigma_i=0$, найдем

$$J \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\delta\theta + Q_r\delta q_r + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v}\sigma_v + \theta_\gamma\sigma_{s+\gamma})dt = 0 . \tag{10}$$

На основании (4) после ряда вычислений автор получает формулы

$$M_\omega \equiv \frac{d}{dt}\delta\pi_\omega - \delta p_\omega = b_{v\omega}\sigma_v - K_{\omega\varepsilon}\delta\pi_\varepsilon,$$

$$\sigma_{s+\gamma} = L_{\gamma\varepsilon}\delta\pi_\varepsilon + \alpha_{s+\gamma,\varepsilon}b_{v\varepsilon}\sigma_v,$$

которые приводят к равенству

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\theta dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial\theta}{\partial q_j}\delta q_j - \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial p_\varepsilon}\delta\pi_\varepsilon + \frac{\partial\theta}{\partial p_\varepsilon}(K_{\varepsilon\omega}\delta\pi_\omega - b_{v\varepsilon}\sigma_v)\right]dt .$$

На основании указанных соотношений формула (10) преобразуется в искомый принцип

$$(11)\quad J \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Big[(Q_j + \frac{\partial\theta}{\partial q_j})\delta q_j + (\frac{\partial\theta}{\partial p_\varepsilon}K_{\omega\varepsilon} + \dot{\theta}_\gamma L_{\gamma\varepsilon} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial p_\varepsilon})\delta\pi_\varepsilon +$$

$$+ (\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial\theta}{\partial p_\varepsilon}b_{v\varepsilon} + \theta_\gamma\alpha_{s+\gamma,\varepsilon}b_{v\varepsilon})\sigma_v\Big]dt = 0 .$$

Отсюда можно непосредственно получить динамические уравнения движения неголономной системы в квазикоординатах.

Автор показывает, что принцип (11) можно записать в упрощенной форме

$$(12)\quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta\theta + Q_r\delta q_r + \theta_\gamma\sigma_{s+\gamma})dt = 0,$$

или

$$(13)\quad \int_{t_1}^{t_2} [\delta\theta + Q_r\delta q_r + \theta_\gamma\delta(\dot{q}_{s+\gamma} - \alpha_{s+\gamma,\varepsilon}p_\varepsilon - \alpha_{s+\gamma})]dt = 0 ,$$

если при вычислении билинейных ковариантов $\sigma_{s+\gamma}$ считать, что

$$\delta\dot{q}_{s+\gamma} = \frac{d}{dt}\delta q_{s+\gamma},$$

т.е. пользоваться перестановочными соотношениями $s_v = 0$.

Форма (13) принципа ВОРОНЦА оказывается наиболее эффективной при решении конкретных задач. В случае, когда кинетическая энергия системы в условиях данной задачи представляется как функция времени, координат и линейной формы скоростей, принцип ВОРОНЦА принимает вид

$$(14)\quad \int_{t_1}^{t_2} [\delta\theta + Q_r\delta q_r + \overset{*}{\theta}_\gamma\delta(\overset{*}{p}_{s+\gamma} - \beta_{s+\gamma,\varepsilon}p_\varepsilon - \beta_{s+\gamma})]dt = 0 ,$$

где

$$\overset{*}{\theta}_\gamma = \overset{*}{\theta}_\gamma(t,q_\rho,p_\varepsilon) = \frac{\partial T}{\partial \overset{*}{p}_{s+\gamma}} .$$

Значительная часть работ ВОРОНЦА посвящена исследованиям по динамике твердого тела и в особенности решению задач о чистом качении твердых тел. Некоторые из таких задач были уже решены в

XIX ст. При этом авторы, вообще, пользовались основными теоремами динамики. Однако на рубеже XIX и XX ст.ст. при решении задач о качении твердого тела без скольжения по поверхности (плоскости) некоторыми, даже выдающимися, учеными была допущена существенная ошибка, которая заключалась в применении к решению подобных задач неголономного характера формализма уравнений ЛАГРАНЖА второго рода без корректирующих членов. Это обстоятельство и вызвало интерес ВОРОНЦА к применению полученных им обобщенных уравнений к исследованию задач, относящихся к чистому качению твердых тел. Он установил при этом ряд интегрируемых случаев, которые в дальнейшем были расширены другими учеными (ЧАПЛыГИН, МУШТАРИ и др.). Благодаря современному высокому уровню науки и техники, бурному развитию машинной математики, автоматического регулирования и управления, кибернетики, можно указать много новых задач неголономной механики, но при этом не следует забывать, что первыми такими задачами были задачи, решению которых мы в значительной мере обязаны ВОРОНЦУ и ЧАПЛыГИНУ.

В 1906 г. ВОРОНЕЦ указал общее преобразование дифференциальных уравнений ЛАГРАНЖА второго рода

(15) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r,$$

с помощью линейных интегралов движения (1). Рассматривая эти интегралы как неголономные связи заданной механической системы, можно записать дифференциальные уравнения ее движения в форме (3). Таким образом уравнения неголономной механики можно интерпретировать как преобразованные с помощью соотношений (1) динамические уравнения голономной механики. Эта весьма интересная идея ВОРОНЦА позволяет установить тесную связь между динамикой голономных и неголономных систем и подойти к рассмотрению аналитической механики с единой точки зрения.

Автор указывает, что применение данного преобразования часто встречается в следующих трех частных случаях

A^o $$\dot{q}_{N+\nu} = a_\nu, \ \theta_\nu = \theta_\nu \ (t, q_a),$$

B^o $$\frac{\partial T}{\partial q_{N+\nu}} = -Q_{N+\nu},$$

C^{O} $\qquad M_{\nu} = P_{\nu j}(t,q_i,\dot{q}_i,p_\lambda)\delta q_j + R_{\nu\mu}(t,q_i,\dot{q}_i,p_\lambda)\delta\pi_\mu;$

$$T = A_{w\delta}(t,q_i)P_w P_\rho;\ Q_j = Q_j(t,q_i);\ Q_{N+\nu}\delta\pi_\nu = 0,$$

(тут P_w - одна из величин q_j, p_v).

Б случае A^{O} уравнения (15) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_j} = Q_j,\quad \theta = T - \theta_\nu\dot{q}_{N+\nu}$$

В случае B^{O} уравнения (15) допускают интергалы

$$\theta_\nu = C_\nu = \text{const}.$$

Преобразованные уравнения имеют предыдущий вид, причем

$$\theta = T - C_\nu\dot{q}_{N+\nu}$$

Наконец, в случае C^{O} уравнения движения (3)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \frac{\partial T}{\partial p_\mu}P_{\mu j};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_\nu} = \frac{\partial T}{\partial p_\mu}R_{\mu\nu},$$

имеют частные интегралы

$$\frac{\partial T}{\partial p_\nu} = 0,$$

линейные относительно $\dot{q}_j$ и p_ν. Если с их помощью из уравнений движения исключить p_ν, то получим уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\theta}{\partial q_j} = Q_j,\quad \theta = \theta(t,q_i,\dot{q}_i).$$

Очевидно, известное преобразование Рауса является частным случаем преобразования ВОРОНЦА.

ВОРОНЕЦ указывает оригинальный метод интегрирования уравнений ЛАГРАНЖА второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \tag{16}$$

с помощью известных первых интегралов

(17) $$F_\nu(t,q_i,\dot q_i) = a_\nu = \text{const}.$$

Псть эти интерграль, а также уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = p_j,$$

можно соответственно предтвавить в виде

(18) $$\dot q_\nu = f_\nu(t,q_i,q_\alpha,a_\mu),$$

(19) $$\dot q_j = \phi_j(t,q_i,p_i),$$

(здесь и далее $\alpha,\beta = k+1,k+2,\dots,N$), причем известные интегралы будем считать, что с помощью (19) они приведены к каноническим переменным находятся в инволюции, т.е.

$$(\overset{*}{F}_\mu,\overset{*}{F}_\nu) = 0,\ \overset{*}{F}_\nu = \overset{*}{F}_\nu(t,q_i,p_i) = a_\nu.$$

Исключая из (17) обобщённые скорости на основании соотношений

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} = p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j},$$

получим k дифференциальных уравнений, которые вместе с уравнением ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-ОСТРОГРАДСКОГО

(20) $$\frac{\partial W}{\partial t} + H(t,q_i,\frac{\partial W}{\partial q_i}) = 0,$$

образуют систему $k+1$ уравнений в частных производных с $N+1$ независимыми переменными t,q_j. В соответствии с методом ЛИ интегрирование такой системы уравнений эквивалентно интегрированию одного уравнения в частных производных с $N-k+1$независимыми переменными или системы $N-k$ уравнений ЛАГРАНЖА второго рода. При данном преобразовании новый лагранжиан будет иметь вид

(21) $$\overset{*}{L}(t,Q_a,\dot Q_a,\omega_\mu,a_\mu) = L(t,q_i,\dot q_i) - \sum_\nu(\dot q_\nu-\omega_\nu)\frac{\partial L}{\partial \dot q_\nu} - \sum_\beta(\dot q_\beta-\dot Q_\beta)\frac{\partial L}{\partial \dot q_\beta},$$

где новые переменные $Q_a, \dot{Q}_a$, ω_ν связаны со старыми $q_i, \dot{q}_i$ соотношениями

$$(22) \qquad q_\nu = q_{\nu o}+\omega_\nu t; \; q_a = Q_a; \; \sum_\nu (\dot{q} - \omega_\nu)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right) + \sum_\beta (\dot{q}_\beta - \dot{Q}_\beta)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\right) = 0.$$

Тут скобки означают, что производная по $\dot{q}_a$ берется с учетом соот-

Рис. 2. - Петр Василевич Воронец
1871-1923

ношений (18). При этом последнее из равенств (22) соответствует соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \overset{*}{L}}{\partial \dot{Q}_a} .$$

★

Сущность метода интегрирования ВОРОНЦА состоит в теореме, которая дает возможность записать преобразованную систему уравнений ЛАГРАНЖА второго рода и определить все интегралы первоначальной системы (16). Эту теорему можно сформулировать так:

Определим из (18) и (22) старые переменные $q_\nu, q_a, \dot q_\nu, \dot q_a$ через новые $Q_a, \dot Q_a, \omega_\nu, a_\nu$, по формуле (21) вычислим новый кинетический потенциал, составим в новых переменных уравнения (16), которые будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{*}{L}}{\partial \dot Q_a} - \frac{\partial \overset{*}{L}}{\partial Q_a} = 0, \tag{23}$$

решим (если это возможно) эту систему, полагая

$$\omega_\nu = \text{const}, \ \dot Q_a = \frac{dQ_a}{dt},$$

т.е. найдем все первые интегралы этой системы

$$\Phi_\beta(t, Q_a, \dot Q_a, \omega_\nu, a_\nu) = a_\beta = \text{const}. \tag{24}$$

Предположим, что интегралы (24) находятся в инволюции и разрешаются относительно обобщенных скоростей

$$\dot Q_a = \Psi(t, Q_a, \omega_\nu, a_\nu).$$

Если преобразовать интегралы (24) к старым переменным $q_j, \dot q_j$ с помощью соотношений (18) и (22) и присоединить к ним интегралы (17), то получим полную систему находящихся в инволюции первых интегралов уравнений (16), с помощью которых решение динамической задачи сводится к квадратурам. ВОРОНЕЦ дает непосредственное доказательство этой теоремы. Для этого, в соответствии с теорией ЯКОБИ-ЛИУВИЛЛЯ, он доказывает, что дифференциальное выражение

$$(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i)dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} dq_i,$$

является полным дифференциалом некоторой функции $M(t, q_i, a_\nu, a_a)$, если с помощью интегралов (17) и (24) преобразованных на основании соотношений (18) и (22) к старым переменным $q_i, \dot q_i$, исключить обобщенные скорости $\dot q_i$.

ВОРОНЦУ также принадлежит новый метод интегрирования уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = H(t,q_i,p_i), \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \tag{25}$$

в частных производных первого порядка (уравнения ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-ОСТРОГРАДСКОГО).

Предположим, что найдены уравнения

$$F_\nu(t,q_i,p_i) = a_\nu,$$

которые можно разрешить относительно p_i

$$p_\nu = \phi_\nu(t,q_i,p_a,a_\nu), \tag{26}$$

где a_ν произвольные постоянные, причем функции F_ν составляют систему, находящуюся в инволюции, а также находятся в инволюции с функцией H, т.е.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\phi_\mu}{\partial q_\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_\mu} = \sum_a\left(\frac{\partial\phi_\mu}{\partial q_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial p_a} - \frac{\partial\phi_\mu}{\partial p_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_a}\right),\\
\frac{\partial H}{\partial q_\nu} + \sum_\mu \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_\mu} = \frac{\partial\phi_\nu}{\partial t} + \sum_a\left(\frac{\partial H}{\partial q_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial p_a} - \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_a}\right),\\
\frac{\partial\bar H}{\partial q_\nu} = \frac{\partial\phi_\nu}{\partial t} + \sum_a\left(\frac{\partial\bar H}{\partial q_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial p_a} - \frac{\partial\bar H}{\partial p_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_a}\right),
\end{gathered} \tag{27}$$

где $\bar H$ означает функцию H, в которой переменные p_i определены из соотношений (26)

$$H(t,q_i,p_i) = \bar H(t,q_i,p_a,a_\nu).$$

Имеет место следующая теорема:

Полный интеграл $W(t,q_i,a_i) + a_{N+1}$ уравнения (25) можно представить в виде

$$W = \Omega(t,q_\nu,q_a,a_\nu,a_a) + \omega(q_\nu,a_\nu,a_a) + a_{N+1}, \tag{28}$$

где функция Ω есть полный интеграл уравнения в частных производных

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \bar{H}(t,q_\nu,q_a,p_a,a_\nu),\ p_a = \frac{\partial\Omega}{\partial q_a},\ q_\nu = \text{const}, \tag{29}$$

в котором число переменных меньше $k(t,q_a$ - аргументы, q_ν - параметры) и функция $\omega(q_\nu)$ находится, после интегрирования уравнения (29), с помощью квадратуры (теорема ВОРОНЦА).

Доказательство этой теоремы основано на теории ЯКОБИ-ЛИУВИЛЛЯ, согласно которой интегрирование уравнения (25) эквивалентно определению таких функций $p_i(t,q_j,a_j)$, что

$$Hdt + \sum_i p_i dq_i = dW(t,q_j,a_j),$$

причем функция $W+a_{N+1}$ является полным интегралом уравнения (25). В силу (26) этому условию можно придать такой вид

$$\bar{H}dt + \sum_\nu \phi_\nu dq_\nu + \sum_a p_a dq_a = dW(t,q_j,a_j). \tag{30}$$

Определим теперь функции p_i так, чтобы выражение

$$\bar{H}dt + \sum_a p_a dq_a,$$

было полным дифференциалом некоторой функции

$$\Omega(t,q_\nu,q_a,a_\nu,a_a) + a_{N+1},$$

если рассматривать q_ν как параметры

$$\bar{H}dt + \sum_a p_a dq_a = d\Omega(t,q_\nu,q_a,a_\nu,a_a),\ q_\nu = \text{const}.$$

Для этого, согласно теории ЯКОБИ-ЛИУВИЛЛЯ, достоточно проинтегрировать уравнение (29) при выше указанных условиях. Если полным интегралом этого уравнения является функция Ω, то искомые функции p_a можно будет определить по формулам

$$p_a = \frac{\partial\Omega}{\partial q_a}. \tag{31}$$

Предположим, что уравнение (29) решено, т.е. что найдена функция Ω. Если от (30) отнять соотношение

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}dt + \sum_{\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu}dq_\nu + \sum_{a}\frac{\partial\Omega}{\partial q_a}dq_a = d\Omega$$

и принять во внимание равенства (29) и (31), получим

$$\sum_{\nu}(\phi_\nu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu})dq_\nu = d(W - \Omega). \tag{32}$$

Далее автор доказывает, что коэффициенты при дифференциалах в соотношении (32) на основании (31) будут функциями лишь переменных q_ν и произвольных постоянных, т.е.

$$\sum_{\nu}(\phi_\nu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu})dq_\nu = d\omega(q_\nu, a_\nu, a_a). \tag{33}$$

Для того, чтобы в этом убедиться, подставим в уравнение (29) его полный интеграл и продифференцируем полученное таким путем тождество по параметру q_ν с учетом (31). Получим

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t\partial q_\nu} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial q_\nu} + \sum_{a}\frac{\partial\bar{H}}{\partial p_a}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_a\partial q_\nu}.$$

Принимая далее во внимание канонические уравнения, соответствующие уравнению (29) в частных производных

$$\dot{p}_a = \frac{\partial\bar{H}}{\partial q_a}, \quad \dot{q}_a = -\frac{\partial\bar{H}}{\partial p_a} \quad (q_\nu = \text{const}), \tag{34}$$

полученное соотношение может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial q_\nu} \quad (q_\nu = \text{const}). \tag{35}$$

С другой стороны, соотношение (27), на основании (33), дает

$$\dot{\phi}_\nu = \frac{\partial\bar{H}}{\partial q} \quad (q_\nu = \text{const}). \tag{36}$$

Из уравнений (35) и (36) и вытекает высказанное утверждение:

$$\phi_\nu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu} = f_\nu(q_\mu). \tag{37}$$

Рассмотрим теперь условия интегрируемости функций $f_\nu(q_\mu)$. Величини

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial q_\mu}(\phi_\nu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu}) - \frac{\partial}{\partial q_\nu}(\phi_\mu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\mu}),$$

в силу (31), можно переписать в виде

$$A_{\mu\nu} = (\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_\mu} + \sum_a \frac{\partial\phi_\nu}{\partial p_a}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_a \partial q_\mu}) - (\frac{\partial\phi_\mu}{\partial q_\nu} + \sum_a \frac{\partial\phi_\mu}{\partial p_a}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_a \partial q_\nu}),$$

или, учитывая (37),

$$A_{\mu\nu} = (\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_\mu} + \sum_a \frac{\partial\phi_\nu}{\partial p_a}\frac{\partial\phi_\mu}{\partial q_a}) - (\frac{\partial\phi_\mu}{\partial q_\nu} + \sum_a \frac{\partial\phi_\mu}{\partial p_a}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial q_a}),$$

а так как функции ϕ_ν находятся в инволюции, то $A_{\mu\nu} = 0$. Таким образом, для функций f_ν выполняются условия интегрируемости.

После определения функции ω из равенства (33) с помощью квадратур мы сможем, путем сравнения с соотношением (32), написать основную формулу (28).

Сравнивая метод ВОРОНЦА с известным методом С.ЛИ, можно заметить, во-первых, что метод ВОРОНЦА не связан с необходимостью пользоваться подстановкой ЯКОБИ-МАЙЕРА

$$q_\nu = q_{\nu o} + k_\nu t,$$

и, во-вторых, что уравнение (29) проще, по сравнению с уравнением С.ЛИ

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \bar{H} + \sum_\nu k_\nu \phi_\nu \quad (k_\nu = \text{const}).$$

С другой стороны, интегрирование уравнения С.ЛИ позволяет сразу получить искомую функцию W, а интегрирование уравнения ВОРОНЦА (29) дает лишь функцию Ω, и, следовательно, для определения искомой функции W нужно еще определить функцию ω. Но, очевидно, определение функции ω не связано с трудностями, т.к. она находится с помощью квадратур.

ВОРОНЕЦ внес значительный вклад в решение проблемы n тел. Эти исследования представляют собой содержание его докторской дисертации и основаны на применении метода преобразования соответствующих динамических уравнений с помощью линейных относительно скоростей интегралов (преобразование ВОРОНЦА), который оказывается наиболее эффективным в рассмотренных им трех частных случаях A^0, B^0, C^0 (см.выше). Этот метод дает возможность автору получить важные результаты в области интегрирования дифференциальных уравнений проблем n тел, а именно, осуществить редукцию общей системы соответствующих дифференциальных уравнений движения к системе уравнений в формах ЯКОБИ, РАДО и ЛАГРАНЖА для проблемы трех тел. Применяя динамические уравнения задачи трех тел в частном случае, когда массы двух из них равны (симметрическое движение), автор нашел два частных интеграла этих уравнений, которые позволяют свести решение задачи к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и квадратурам. Если при этом силовая функция имеет порядок (-1) относительно существующих в данном случае циклических координат, то задача решается в квадратурах. ВОРОНЕЦ показал, что установленое им преобразование может быть эффективно использовано и при решении проблемы n тел ($n>3$). Исследуя проблему четырех тел, автор свел ее решение к интегрированию системы двенадцати дифференциальных уравнений первого порядка и квадратурам. Он подробно исследовал ряд частных случаев этой проблемы, а также два частных случая проблемы n тел. Исследования ВОРОНЦА по небесной механике имели непосредственное влияние на дальнейшие исследования в этой области его учеников А.Д. БИЛИМОВИЧА и Ю.Д.СОКОЛОВА.

3. РАЗВИТИЕ НАУЧНОГО НАСЛЕДИЯ ШКОЛЫ СУСЛОВА В ИССЛЕДОВАНИЯХ А. Д. БИЛИМОВИЧА

Ученик СУСЛОВА и ВОРОНЦА, АНТОН ДМИТРИЧ БИЛИМОВИЧ внес большой вклад в развитие аналитической механики[3]. В 1903 г. он окончил физикоматематический факультет Киевского университета и был оставлен при кафедре теоретической механики в должности ассистента. После защиты магистерской диссертации (1907) он получил звание приват-доцента. В 1915 г. он защитил докторскую диссертацию и был назначен профессором теоретической механики (а затем рек-

[3] О А.Д.Билимовиче см.: Споменица посвећена преминулом академику Антону Билимовићу, САНУ, CDXLVI, 52 (1971), стр. 50.

тором) Новороссийского (Одесского) университета[4]. В 1920 г. он эмигрировал в Югославию, где работал до конца жизни профессором теоретической механики в Белградском университете. В 1925 г. он избирается членом-корреспондентом, а в 1936 г. - действительным членом Сербской Академии наук и искусств в Белграде. От своих выдающихся учителей СУСЛОВА и ВОРОНЦА он органически воспринял традиции и научные интересы представляемой ими школы, посвятив свою научную деятельност исследованиям в области неголономной механики, механики твердого тела и небесной механики. За свою полувековую деятельность в Югославии БИЛИМОВИЧ воспитал ряд талантливых молодых ученых, оказав на их научные интересы значительное влияние. Ему принадлежит более двухсот научных работ, в том числе несколько учебников по теоретической механике и высшей математике, которые сыграли большую роль в подготовке молодых специалистов.

Рассмотрим прежде всего результаты, полученные БИЛИМОВИЧЕМ в области динамики неголономных систем.

Как известно, ВОРОНЕЦ предложил вариант записи дифференциальных уравнений движения механической системы с неголономными связями

$$\dot{q}_{n+r} - a_{ri}(t,q_s)\dot{q}_i - a_r(t,q_s) = 0, \tag{1}$$

в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\theta}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial\theta}{\partial q_{n+r}} + Q_{n+r}\right)\frac{\partial\dot{q}_{n+r}}{\partial\dot{q}_i} - Q_i - \theta_\mu\Omega_{\mu i}, \tag{2}$$

где

$$\theta_\mu = b_{\mu i}(t,q_s)\dot{q}_i + b_\mu(t,q_s),$$

$$\Omega_{\mu i} = A^\mu_{ij}q_j + A^\mu_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial q_{n+\mu}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial q_{n+\mu}}{\partial q_i} - \frac{\partial q_{n+\mu}}{q_{n+r}}\frac{\partial q_{n+\mu}}{\partial\dot{q}_i},$$

$$(i,j=1,2,\dots,n;\ r,\mu=1,2,\dots,k;\ s=1,2,\dots,n+k).$$

---

[4] А.Билимович: А.М.ЛЯПУНОВ В ОДЕССЕ, Publ. Inst. math. Acad. Serbe Sci., Belgr., 9 (1956), 1-7.

Предположим, что приложенные к системе силы консервативны

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

и что силовая функция и кинетическая энергия системы явно не зависят от времени

$$U = U(q_s), \ T = T(q_s, \dot{q}_s) = \theta(q_s, \dot{q}_j),$$

а также допустим, что $a_r=0$. В этом случае дифференциальные уравнения движения допускают интеграл энергии

$$T = U + h.$$

Действительно, запишем уравнения (1) и (2) соответственно в виде

$$\alpha_{rs}(t,q_\omega)\dot{q}_s + \alpha_r(t,q_\omega) = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_r \alpha_{rs} \quad (\omega=1,2,\ldots,n+k).$$

Предполагая, что кинетическая энергия является квадратичной однородной функцией лагранжевых скоростей, получим соотношение

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 2T,$$

в силу которого из этих уравнений следует теорема об изменении кинетической энергии в форме

$$dT = Q_s \bar{d}q_s - \lambda_r a_r dt,$$

что, в свою очередь, обусловливает наличие интеграла энергии.

БИЛИМОВИЧ показал, что с помощью интеграла энергии можно из уравнений (2) исключить время и, таким образом, понизить порядок этой системы на единицу. Для упрощения дальнейших записей автор предполагает, что коэффициенты a_{ri} явно не зависят от времени и скорости $\dot{q}_{n+r}$ и кинетическая энергия θ являются однородными функциями от скоростей $\dot{q}_i$ соответственно первого и второго порядков. Преобразованная система уравнений имеет вид

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial G}{\partial K_\alpha} + \frac{1}{A}\frac{\partial G}{\partial K_\alpha}\left[\frac{G}{U+h}\left(\frac{\partial U}{\partial q_1} + a_{r1}\frac{\partial U}{\partial q_{n+r}}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial q_1} + a_{r1}\frac{\partial G}{\partial q_{n+r}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A}{dq_1} + M\right] - \left(\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} + a_{r\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_{n+r}}\right) - \frac{G}{U+h}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + a_{r\alpha}\frac{\partial U}{\partial q_{n+r}}\right) - M_\alpha = 0,$$

где

$$K_\alpha = \frac{\dot q_\alpha}{\dot q_1}, \quad \theta = \dot q_1^2 G(q_s, K_\alpha), \quad A = 2G - K_\alpha \frac{\partial G}{\partial q_\alpha},$$

$$M = (b_{\mu\beta}K_\beta + b_{\mu 1})\left[\frac{da_{\mu i}}{dq_1} - \left(\frac{\partial a_{\mu 1}}{\partial q_i} + K_\beta\frac{\partial a_{\mu\beta}}{\partial q_i}\right) - a_{ri}\left(\frac{\partial a_{\mu 1}}{\partial q_{n+r}} + K_\beta\frac{\partial a_{\mu\beta}}{\partial q_{n+r}}\right)\right]$$

$$(\alpha, \beta = 2, 3, \ldots, n).$$

При этом время определяется с помощью квадратуры

$$dt = \sqrt{\frac{G}{U+h}}\, dq_1 .$$

Если силовая функция и коэффициенты при лагранжевых скоростях в выражении кинетической энергии являются рациональными функциями координат, то полученные БИЛИМОВИЧЕМ уравнения не содержат иррациональностей. В случае голономной системы эти уравнения принимают вид уравнений ЯКОБИ.

Во многих вопросах исследования динамических уравнений и их решений более удобно оперировать с уравнениями в разрешенной форме относительно старших производных от неизвестных функций по времени. БИЛИМОВИЧ показал, что дифференциальные уравнения движения неголономных систем ВОРОНЦА (2) можно представить в раскрытом виде

$$\ddot q_i = K_i, \quad K_i = \frac{1}{\Delta} H_j \Delta_{ij},$$

где $\Delta = \|\beta_{ij}\|$, Δ_{ij} – соответствующий минор определителя Δ, а H_j – некоторые определенные дифференциальные операторы.

Вводя новые переменные

$$q_i, \; p_i = \frac{\partial\theta}{\partial \dot q_i}$$

и функцию

$$H = H(t,q_i,p_i,q_{n+r}) = p_i\dot{q}_i-\theta-U,$$

Рис. 3. - Антон Дмитрич Билимович
(1879-1970)

автор преобразует уравнения ВОРОНЦА (2) к системе уравнений первого порядка

$$(3) \qquad dp_i:dq_i:dq_{n+\mu}:dt = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}-a_{\mu i}\frac{\partial H}{\partial q_{n+\mu}}+S_i\right):\frac{\partial H}{\partial p_i}:(C_{\mu i}p_i+\dot{C}_\mu):1,$$

где

$$S_i = S_i(t,q_i,p_i,q_{n+\mu}) = \theta_r\left(\dot{a}_{ri} - \frac{\partial\dot{q}_{n+r}}{\partial q_i} - a_{\mu i}\frac{\partial\dot{q}_{n+r}}{\partial q_{n+r}}\right),$$

а

$$\dot{q}_{n+r} = C_{ri}p_i + C_r,$$

суть уравнения связей (1), выраженные в новых переменных.

В канонической форме указанные уравнения имеют вид

$$dP_s:dQ_s:d\tau = -\frac{\partial K}{\partial Q_s}:\frac{\partial K}{\partial P_s}:1 ,$$

где

$$K = f(\tau,Q_s,P_s),$$

и новые переменные связаны соотношением

$$\phi_r(Q_s,P_s,\tau) = 0.$$

БИЛИМОВИЧ показал, что необходимые и достаточные условия для существования канонического преобразования уравнений

$$dx_1:dx_2:\ldots:dx_{2m+1} = X_1:X_2:\ldots:X_{2m+1},$$

соответствующих пфаффиану

$$N_\varepsilon(x_\delta)\delta x_\varepsilon = \Phi(y_o,y_\rho,z_\rho)z_\lambda y_\lambda,$$

где

$$X_\varepsilon = X_\varepsilon(x_\delta),\ y_o = y_o(x_\delta),\ y_\rho = y_\rho(x_\delta),\ Z_\rho = Z_\rho(x_\delta),$$

$$(\varepsilon,\delta=1,2,\ldots,2m+1;\ \rho,\lambda=1,2,\ldots,m),$$

имеют вид

$$(4)\qquad -\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_\delta}\frac{\partial y_o}{\partial x_\varepsilon} - \frac{\partial\Phi^*}{\partial x_\varepsilon}\frac{\partial y_o}{\partial x_\delta}\right)X_\varepsilon + \left(\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\delta}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\varepsilon} - \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\varepsilon}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\delta}\right)X_\varepsilon = 0.$$

Здесь Φ^* - результат выражения функции Φ через переменные x_δ.

В случае существования интеграла энергии динамические уравнения (3) приводятся к системе

$$(5)\qquad dp_i:dq_i:dt = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sigma_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right):\frac{\partial H}{\partial p_i}:1 ,$$

где

$$\sigma_{ij} = \theta_r\left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i}\right), \quad \theta_r = \theta_r(p_i, q_i, t).$$

Условия (4) существования канонического преобразования уравнений (5) имеют вид

$$(6) \qquad \frac{\partial(K^*,\tau)}{\partial(\alpha,t)} - [\alpha,t] + \frac{\partial H}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial(K^*,\tau)}{\partial(\alpha,q_i)} - [\alpha,q_i]\right\} +$$

$$+ \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sigma_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\left\{\frac{\partial(K^*,\tau)}{\partial(\alpha,p_i)} - [\alpha,p_i]\right\} = 0.$$

Здесь

$$\frac{\partial(K^*,\tau)}{\partial(\alpha,\beta)} = \frac{\partial K^*}{\partial\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial\beta} - \frac{\partial K^*}{\partial\beta}\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}, \quad [\alpha,\beta] = \frac{\partial P_j}{\partial\alpha}\frac{\partial Q_j}{\partial\beta} - \frac{\partial P_j}{\partial\beta}\frac{\partial Q_j}{\partial\alpha},$$

означают соответственно скобки ПУАССОНА и ЛАГРАНЖА, P_i, Q_i, τ – новые переменные, K^* – результат выражения функции K в новых переменных, α, β – одна из старых переменных q_i, p_i, t.

Условия (6) значительно упрощаются, если координаты при каноническом преобразовании динамических уравнений неголономной системы остаются неизменными. Единственным реализованным до сих пор примером такого преобразования является преобразование ЧАПЛЫГИНА, относящееся к его теории приводящего множителя для системы с двумя степенями свободы. Очевидно, что при наличии канонического преобразования дифференциальных уравнений движения неголономных систем интегрирование этих уравнений сводится к интегрированию уравнения ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-ОСТРОГРАДСКОГО в частных производных первого порядка.

Большая работа БИЛИМОВИЧА посвящена исследованию траекторий неголономных систем. Как известно, интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной системы сопряжено с большими затруднениями даже в простейших случаях. И здесь существенное значение имеет порядок системы дифференциальных уравнений: вообще, чем меньший порядок имеет система, тем легче ее исследовать. В этом плане представляет интерес рассмотрение системы дифференциальных уравнений, определяющих траектории движейся системы, поскольку для весьма обширного класса движений порядок этой системы на единицу ниже порядка системы дифференциальных уравнений, определяющих движение. БИЛИМОВИЧУ принадлежит глубокое исследование характера дифференциальных уравнений траекторий неголономных систем[5].

Если уравнения (1) и (2) не завитят явно от времени, то из этих уравнений можно исключить одну координату (например, q_1) и мы получим таким образом систему дифференциальных уравнений $(2n+k-1)$-го порядка кривой траектории[6], которая в общем случае будет состоять из $n-2$ уравнений второго порядка, одного уравнения третьего порядка и k уравнений первого порядка с искомыми функциями неизвисимо переменного q_1

$$P_3^{(a)} q_3^{''a} = 0, \; P_4^{(a)} q_4^{''a} = 0, \ldots, P_n^{(a)} q_n^{''a} = 0,$$

$$P_2^{(a)} q^{'''a} = 0,$$

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{L_2}{a_2} = \ldots = \frac{L_k}{a_k},$$

где

$$P_\rho^{(a)} = P_\rho^{(a)}(q_\rho, \dot{q}_e, \ddot{q}_r), \; L_r = q'_{n+r} - a_{r1} - \hat{a}_{r\rho}\dot{q}_\rho,$$

$$(a=1,2,3; \; \rho=2,3,\ldots,n; \; e=2,3,\ldots,n+k).$$

Если $a_r=0$, т.е. когда неголономные связи (1) однородны, динамические уравнения ВОРОНЦА (2) можно представить в форме

$$\ddot{q}_i = K_i^{(2)} + K_i^{(0)},$$

где K_i - определенные дифференциальные операторы, причем $K_i^{(0)}$

---

5 Дифференциальные уравнения траектории голономной системы были изучены П.ПЭНЛЕВЕ (1894).

6 Траекторией материальной системы называется непрерывное множество всех ее положений в рассматриваемый интервал времени (t_0, t_1). Этому множеству соответствует траектория изображающей точки M в многомерном римановом пространстве, причем необходимо принять также во внимание кратность участков, проходимых точкой M неоднократно. Полной траекторий системы называется совокупность ее положений, определяемая кинематическими уравнениями движения, при непрерывном изменении t в интервале $(-\infty, +\infty)$. Кривой траекторией называется совокупность положений движущейся системы в действительной области изменения времени t без учета кратных участков, проходимых изображающей точкой неоднократно.

не зависит от скоростей $\dot{q}_j$, а $K_i^{(2)}$ - квадратичная форма скоростей $\dot{q}_j$. В этом случае дифференциальные уравнения кривой траектории примут вид

$$\frac{q_2''+K_1^{*(2)}q_2'-K_2^{*(2)}}{K_2^{(0)}-K_1^{(0)}\dot{q}_2} = \frac{q_3''+K_1^{*(2)}q_3'-K_3^{*(2)}}{K_3^{(0)}-K_1^{(0)}\dot{q}_3} = \ldots = \frac{q_n''+K_1^{*(2)}q_n'-K_n^{*(2)}}{K_n^{(0)}-K_1^{(0)}\dot{q}_n},$$

$$(K_1^{(0)}q_2'-K_2^{(0)})\frac{d}{dq_1}(q_2''+K_1^{*(2)}q_2'-K_2^{*(2)}) = (q_2''+K_1^{*(2)}q_2'-K_2^{*(2)})\frac{d}{dq_1}\Big[K_1^{(0)}q_2'-$$

$$-K_2^{(0)}+2K_1^{(0)}(q_2''+K_1^{*(2)}q_2'-K_2^{*(2)})-2K_1^{*(2)}(K_1^{(0)}q_2'-K_2^{(0)})\Big],$$

(7)

$$q_{n+2}' = a_{r1} + a_{r\rho}q_\rho',$$

где

$$K_i^{*(2)} = \frac{K_i^{(2)}}{\dot{q}_i^2} = K_i^{*(2)}(q_\rho,\dot{q}_\rho).$$

Если при однородных неголономных связях система движется по инерции ($Q_\rho=0$), то $K_i^{(0)}=0$ и, следовательно, траектория системы в этом случае определяется уравнениями

(8) $$q_\rho'' + K_1^{*(2)}q_\rho' - K_\rho^{*(1)} = 0,$$

и преобразованными уравнениями связей (7).

БИЛИМОВИЧ показывает, что дифференциальные уравнения кривой траектории неголономной системы с однородными связями, движущейся по инерции ($Q_\rho=0$), являются частным решением дифференциальных уравнений кривой траектории этой системы при $Q_\rho\neq0$. Однако действительное движение системы по траектории при $Q=0$ невозможно, так как при этом должно быть $\dot{q}_1=\infty$.

В случае голономной системы траектории при $Q_\rho=0$ называются геодезическими траекториями (линиями). Уравнения геодезических линий в пространстве изображений имеют вид

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial q_r'} - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial q_r} = 0, \quad G = G(q_j,q_\rho') = \frac{T}{\dot{q}_1^2}.$$

Представляет интерес класс траекторий материальной системы, кривые которых определяются дифференциальными уравнениями (7), (8) и

$$\frac{dq_1}{K_1^{(0)}} = \frac{dq_2}{K_2^{(0)}} = \ldots = \frac{dq_n}{K_n^{(0)}} .$$

Если приложенные к системе силы зависят от скоростей, то к этим уравнениям следует присоединить также уравнения

$$\frac{dq_1}{K_1^{*(1)}} = \frac{dq_2}{K_2^{*(1)}} = \ldots = \frac{dq_n}{K_n^{*(1)}} .$$

Такого рода траектории, по аналогии с голономными системами (по терминологии ПЭНЛЕВЕ), можно назвать замечательными, так как они характеризуются тем свойством, что их форма не зависит от начальной энергии системы. БИЛИМОВИЧ показал, что замечательная траектория качения твердого тела (ограниченного поверхностью S по неподвижной поверхности Σ соответствует частному случаю, когда на поверхностях S и Σ существуют плоские линии кривизны (обозначим соответственно через P и P_1 плоскости этих линий). Касательные плоскости к поверхностям S и Σ вдоль линий кривизны соответственно нормальные к плоскостям P и P_1, которые являются главными плоскостями центральных эллипсоидов инерции катящихся тел. При совпадении плоскостей P и P_1 главный момент приложенных к катящемуся телу сил относительно точки контакта с другим телом нормален к этим плоскостям (в случае тяжелого тела плоскость P вертикальна). В начальный момент времени плоскости P и P_1 совпадают. Начальная угловая скорость катящегося тела нормальна к этим совпадающим плоскостям. Оказывается, что при консервативных силах решение указанной задачи приводится к квадратурам.

БИЛИМОВИЧ дал описание устройства нескольких неголономных механизмов, т.е. механизмов, осуществляющих движение механических систем с неголономными связями. Внешние тела, входящие вместе с данной неголономной системой в конструкцию неголономного механизма, могут быть как неподвижными, так и подвижными. В первом случае материальная система может находиться в равновесии в любом из ее возможных положений, если приложенные к ней внешние силы уравновешиваются. Во втором случае система вообще не может находиться в равновесии в любом из ее возможных положений. Механизмы первого рода называются стационарными или постоянными, а механизмы второго рода - дестационарными или переменными. Механизмы БИЛИМОВИЧА, о которых здесь идет речь, являются нестационарными.

Первый из сконструированных им механизмов БИЛИМОВИЧ назвал неголономным маятником. Рассмотрим сферический маятник, осуществленный с помощью тяжелого тела M, подвешенного на стержне OM к центру O карданного привеса (рис. 4). Вблизи точки O прикрепим к стержню OM два других стержня NAA′ и NBB′ таким образом, чтобы плоскости ONA и ONB были взаимно ортогональны и чтобы точки A и B лежали в плоскости, проведенной через точку O перпендикулярно к стержню OM. Точки A′ и B′ при помощи гибких незакручивающихся валов соединим с осями непрерывного преобразователя скоростей. БИЛИМОВИЧ указал два варианта такого рода преобразователей. Рассматривая первый из них, представим два вала A и B, которые могут перемещаться параллельно благодаря неподвижному колесу, насаженному на вал A. С помощью рессоры валы сконструированы таким образом, чтобы колесо с валом A всегда касалось конического колеса с

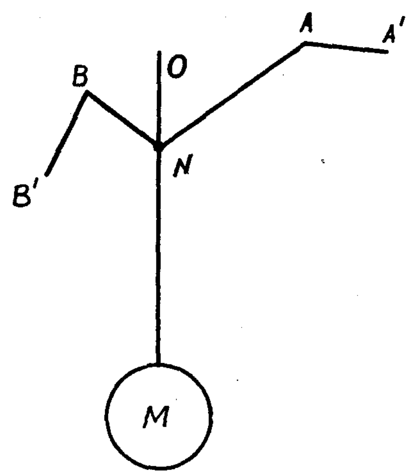

Рис. 4. - Механизм Билимовича (неголономный мятник)

★

валом B. Силу трения между колесами предположим достаточно большой, так чтобы вращение одного вала полностью передавалось второму. Тогда угловые скорости этих валов будут обратно пропорциональны соответствующим радиусам колес. Поскольку коническое колесо с течением времени изменяет свое положение на валу B, то отношение угловых скоростей валов A и B есть некоторая функция времени f(t). Пусть этот прибор соединен с твердым телом, вращающимся вокруг неподвижной точки O, посредством двух стержней, соответственно прикрепленных к валам A и B так, чтобы касательные к колесам в точках закрепления совпадали с осями валов. Другие концы стержней предполагаются закрепленными в теле в точках пересечения двух его главных осей инерции O_x и O_y, причем касательные к телу в точках закрепления совпадают с осями инерции. Так как стержни неподвижны относительно плоскости, в которой расположены две главные оси инерции Ox и Oy, то на тело ~ наложена неголономная связь

$$p + qf(t) = 0,$$

где через p, q, r обозначены проекции мгновенной угловой скорости тела на его главные оси инерции, которые определяются из кинематических формул ЭЙЛЕРА. Дифференциальные уравнения движения тела могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial U}{\partial \phi} + \lambda\left[\sin\theta + f(t)\cos\phi\right],$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi} + \lambda\sin\phi\left[-\cos\theta + f(t)\sin\phi\right],$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии.

Рассмотрим второй вариант непрерывного преобразователя скоростей, предложенного БИЛИМОВИЧЕМ. Он состоит из друх конических колес, насаженных на параллельные оси и соединенных бесконечным ремнем, который может перемещаться с помощью скрепленной с ним лапки, скользящей по винту R (рис. 5). Скорость от одной оси к другой будет передаваться в отношении радиусов сечений соответствующих конических колес, с которыми в данный момент совпадает плоскость ремня. Очевидно, что при постоянной длине ремня, производящие конических колес не будут прямолинейными.

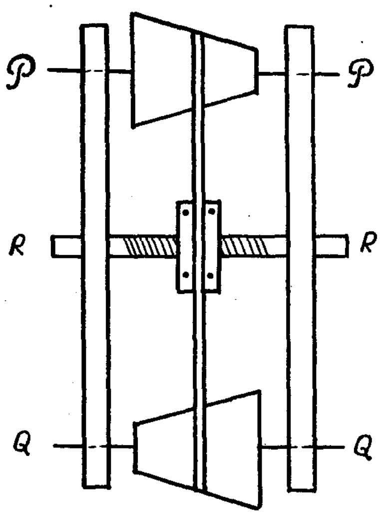

Рис. 5. - Механизм Билимовича

Положение маятника можно определить двумя координатами: углом ϕ между вертикалью и прямой ОМ и углом ψ между вертикальной плоскостью, проходящей через прямую ОМ в отклоненном положении, и вертикальной плоскостью отсчета. Если ось z направить вертикально вниз, а за ось x принять прямую пересечения горизонтальной плоскости и вертикальной плоскости отсчета, то декартовы координаты x, y, z точки M связаны с лагранжевыми координатами маятника ϕ и ψ формулами

$$x = l\sin\phi\cos\psi,\ y = l\sin\phi\sin\psi,\ z = l\cos\phi,$$

где ℓ - приведенная длина маятника ОМ. Компоненты мгновенной угловой скорости маятника на оси ОАА' и ОВВ', неизменно с ним связанные, при условии, что стержень AA' в горизонтальном положении совмещен с осью x, соответственно равны $-\dot{\psi}\sin\phi$ и $\dot{\phi}$. Отношение этих компонентов, устанавливаемое непрерывным преобразователем, обозначим через n. При вращении винта R величина n будет некоторой функцией времени $f(t)$, и мы получим соотношение

$$\dot{\psi}\sin\phi - \dot{\phi}f(t) = 0,$$

представляющее уравнение неголономной связи, наложенной на маятник. Дифференциальные уравнения движения маятника представятся в виде

$$ml^2\ddot{\phi} - Ml^2\dot{\psi}^2\sin\phi\cos\phi = mgl\sin\phi - \lambda f(t),$$

$$ml^2\ddot{\psi}\sin^2\phi + 2ml^2\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi = \lambda\sin\phi,$$

где λ - множитель неголономной связи. При любом законе вращения винта R эти уравнения имеют интеграл энергии

$$ml^2(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\phi) = 2mlg\cos\phi + 2h.$$

На основании уравнения неголономной связи и интеграла энергии функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ могут быть определены в квадратурах.

Рассмотрим случай, когда

$$z_o - \frac{v_o^2}{2g} > -1,$$

и положим

$$2h = 2gml\cos\alpha.$$

Тогда из уравнения неголономной связи и интеграла энергии следует

$$l[1+f^2(t)]\dot{\phi}^2 = 2g(\cos\phi-\cos\alpha),$$

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mathrm{cn}\tau}{\mathrm{sn}\tau\mathrm{dn}\tau}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1+f^2(t)}},$$

где

$$\sin\frac{\phi}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2}\ ,\ \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+f^2(t)}}\ ,\ k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\ ,$$

$$\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(1-k^2u^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+f^2(t)}}\ ,$$

и при этом предполагается, что при $t=0$ маятник находится в вертикальном положении. Для малых колебаний маятника уравнение неголономной связи и интеграл энергии соответственно будут

$$\dot\psi\phi-\dot\phi f(t) = 0,\ ml^2(\dot\phi^2+\dot\psi^2\phi^2) = -mgl\phi^2+2h.$$

Полагая

$$2h_1 = mgla^2\ ,$$

найдем в данном случае

$$\phi = a\sin\tau,\quad d\psi = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\frac{\cos\tau}{\sin\tau}\,\frac{f(t)dt}{\sqrt{1+f^2(t)}}\ .$$

Оказывается, что при надлежащем подборе функции $n=f(t)$ и начальных условий движения как в общем случае, так и в случае малых колебаний, можно получить любую траекторию точки M на сфере. Если $n=\text{const}$, получим голономную связь. В этом случае траекторией точки M на сфере будет локсодромия, а интеграл энергии имеет вид

$$ml^2(1+n^2)\dot\phi^2 = 2mgl\cos\phi + 2h.$$

При определении угла ϕ из этого уравнения следует, как и в случае обычного маятника, рассмотреть три рода движения - колебательное, асимптотическое и прогрессивное, в зависимости от начальных условий движения.

БИЛИМОВИЧ показал, что механические приборы для вычисления определенного интеграла

(9) $$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

известные под названием интеграторов и интеграфов, являются неголономными системами. Такого рода приборы содержат три части, которые в дальнейшем будем именовать первым, вторым и третьим элементами: часть прибора, движение которой связано с изменением аргумента x; часть прибора, характеризующая изменение подинтегральной функции $f=f(x)$; часть прибора, движение которой вызвано изменением интеграла y. Соединяя каждый из этих элементов с материальной системой, положение которой определяется лагранжевыми координатами q_j, получим соотношения

$$(10) \qquad x = x(t,q_j), \ f = f(t,q_j), \ y = y(t,q_j).$$

Явная зависимость этих функций от времени вызывается тем, что при реализации указанных соединений могут быть использованы материальные объекты, не входящие в данную систему. Из равенства (9) следует, что

$$\dot{y} = f\dot{x}$$

откуда, в силу (10), имеем соотношения

$$\left(\frac{\partial y}{\partial q_j} - f\frac{\partial x}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial y}{\partial t} - f\frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

которые, вообще, не допускают интегрирования. Таким образом, указанная схема введения прибора для интегрирования, как звена, в кинематическую цепь, может служить для построения неголономного механизма. В качестве примера БИЛИМОВИЧ приводит интегратор (планиметр) ВЕТЛИ. Уравнение неголономной связи, которую реализует соответствующий неголономный механизм, имеет вид

$$y = ax + b,$$

где a и b - некоторые функции переменных t,x,y.

Представляет интерес утверждение К.КАРАТЕОДОРИ (1934) о невозможности реализации связи, ограничивающей абсолютную величину скорости точки, движущейся в обычном поле тяготения, например связи

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - 1 = 0.$$

Возражая КАРАТЕОДОРИ, БИЛИМОВИЧ (1936) заметил, что исследуемую материальную систему можно поставить в соответствие с другой системой посредством такой конкретной связи, что при действии механизма эта связь обеспечит для данной системы постоянную кинетическую энергию, а для точки - постоянное значение абсолютной величины скорости. Действие механизма должно путем автоматического влияния сопротивления осуществлять изменение кинетического состояния системы. Подобные связи, как известно (Я.И.ГРДИНА, А.БЕГЕН, П.АППЕЛЬ), называются сервосвязями или связями второго рода. БИЛИМОВИЧ сконструировал два неголономных механизма, реализующих указанного рода сервосвязи.

Переходя к описанию первого из этих механизмов БИЛИМОВИЧА заметим, что для определения тяги локомотива обычно применяют агрегат, состоящий из следующих частей: A - ведущего локомотива, B - машины для перемещения робочего груза (железнодорожный вагон). Ходовое испытание осуществляется с постоянной скоростью независимо от профиля пути и имеющихся сопротивлений. Будем рассматривать локомотив A как материальную точку, движущуюся либо прямолинейно, либо по кривой. На точечный локомотив A действуют активные силы (сила тяги, вес и т.д.) и реакции связей (реакции опорной поверхности, смежного вагона и т.д.). Обозначим через $\vec{F}$ равнодействующую всех этих сил. На локомотиве A установлен тахометр для измерения скорости движения. С указателем тахометра следует мыслить связанным идеальный регулятор скорости, помещенный на локомотиве C и поддерживающий постоянную по модулю скорость движения. Система, состоящая из тахометра и компрессора, таким образом, представляет неголономный механизм, характеризуемый связью

$$v^2 = \mathrm{const}.$$

Если умножить дифференциальное уравнение движения локомотива

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \vec{R} \tag{11}$$

скалярно на скорость $\vec{v}$, получим на основании уравнения неголономной связи соотношение

$$(\vec{F} + \vec{R})\cdot\vec{v} = 0 \tag{12}$$

для определения реакции $\vec{R}$ неголономного механизма по отношению к локомотиву A.

По аналогии с голономными механизмами будем различить идеальные и неидеальные неголономные механизмы. Неголономный механизм называется идеальным, если реакция механизма $\vec{R}$ коллинеарна скорости локомотива $\vec{v}$ и полностью определяется уравнением (12). Если что условие не выполняется, неголономный механизм называется неидеальным. Дифференциальное уравнение движения локомотива (11) в случае идеального механизма принимает вид

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \lambda\vec{v}, \quad \lambda = -\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{v^2},$$

где λ - множитель неголономной связи $\vec{v}\cdot\vec{v} = \mathrm{const}$. Неидеальный неголономный механизм характеризуется дополнительной связью для нормальных компонентов скорости локомотива $\vec{v}$ подобно закону трения, на основании которого определяется дополнительная нормальная реакция опорной поверхности движущейся материальной точки.

Для рассмотрения второго неголономного механизма, сконструированного БИЛИМОВИЧЕМ для реализации связи $v^2 = \mathrm{const}$, представим себе точечное тело $M(x,y,z)$, движущееся по поверхности

$$f(x,y,z,t) = 0.$$

Это движение можно осуществить посредством трех скрепленных с телом шариков, катящихся по указанной поверхности. Пусть с телом M (рис. 6) связано колесо L (или два колеса, насаженных на общую ось), плоскость которого расположена в направлении движения тела M нормально к поверхности. Качение колеса по поверхности происходит без скольжения. На оси этого колеса расположено зубчатое колесо P, связанное с зубчатым колесом Q, насаженным на ось W. На той же оси W насажено колесо R, связанное со стержнем N, который проходит через отверстие в колесе Q. Посредством такого рода связи между колесами R и Q можно избежать динамическую неопределенность в передаче силы от одного колеса к другому. Стержень N может быть укреплен в точке T или в точке S, либо может свободно лежать в отверстии. Предположим, что некоторый механизм A, связанный с осью W, поддреживает равномерное вращательное движение этой оси, независимо от всех изменений, вызванных осевой нагрузкой. Будем считать, что постоянная угловая скорость задана уравнением $v^2 = \mathrm{const}$ и соответствует линейной скорости точечного тела **M**. При этом условии тело M будет двигаться по поверхности с постоянной по моду-

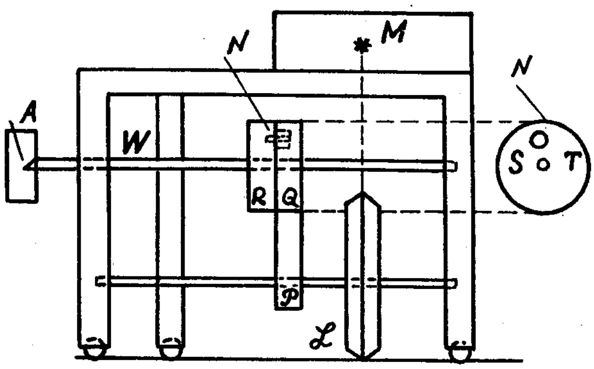

Рис. 6.

лью скоростью. Диффренциальные урявнения тела **M** имеют вид

$$m\ddot{x} = X,\ m\ddot{y} = Y,\ m\ddot{z} = Z, \tag{13}$$

где X, Y, Z - компоненты равнодействующей $\vec{F}$ всех приложенных к телу активных сил и реакций связей, за исключением реакций в точках S и T, в которых неголономный механизм связан с массой m движущегося тела таким образом, что определяемая из уравнений (12) скорость соответствует условию $v^2 = \mathrm{const}$. В описанных условиях тело **M** движется как свободная относительно неголономного механизма точка согласно уравнениям движения (13). Если определенная из уравнений (13) скорость не соответствует соотношению $v^2 = \mathrm{const}$, то автоматически вступает в действие неголономный механизм А, создавая некоторую реакцию $\vec{R}$ с тем, чтобы определения из исправленных уравнений движения точки

$$(14)\qquad m\ddot{x} = X+R_x,\ m\ddot{y} = Y+R_y,\ m\ddot{z} = Z+R_z,$$

скорость соответствовала уравнению связи $v^2 = \text{const}$. Из (14), на основании уравнений $v^2 = \text{const}$ и $f(x,y,z,t) = 0$, следует соотношение (12), из которого определяется реакция неголономного механизма А и получается класификация идеальных и неидеальных механизмов.

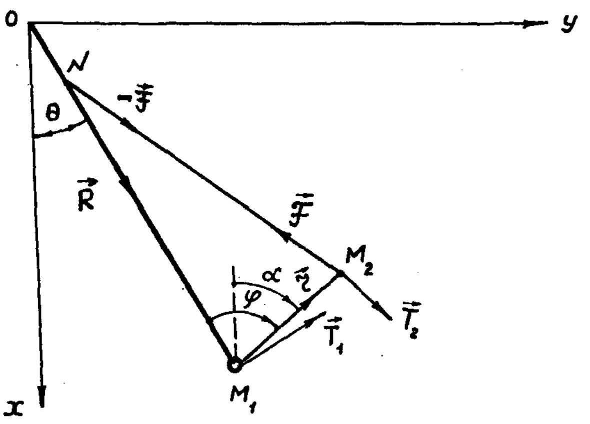

Рис. 7.

Рассмотрим еще один неголономный механизм БИЛИМОВИЧА под названием НЕГОЛОНОМНЫЙ МАЯТНИК. Пусть задана материальная точка M_1 массы m_1 математического маятника, связанная с началом координатной системы Oxy с помощью стержня $OM_1=R$. Положение маятника характеризуется углом θ, ось Ox направлена вертикально вниз (рис.7). С точкой M_1 при помощи стержня $M_1M_2=r$ связана другая материальная точка M_2 массы m_2, положение которой в плоскости Oxy задано углом ϕ. Предположим, что между стержнями R и r действует неголономный механизм, реализующий связь вида

$$\dot{\phi} = k\dot{\theta}\ , \quad k = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Например, это можно осуществить с помощью автоматического механизма, измеряющего усгловую скорость $\dot{\phi}$ и устанавливающего точку M_2 в положении, соответствующем формуле (14).

Обозначая единичные векторы, нормальные к направлениям стержней R и r, соответственно через T_1 и T_2, можно предттавить скорости и ускорения точек M_1 и M_2 в виде

$$\vec{v}_1 = R\dot{\theta}\vec{T}_1,\ \vec{v}_2 = R\dot{\theta}\vec{T}_1 + r\dot{\alpha}\vec{T}_2,\ \alpha = \phi-\theta,$$
$$\vec{w}_1 = R\ddot{\theta}\vec{T}_1 - \dot{\theta}^2\vec{R},\quad \vec{w}_2 = R\ddot{\theta}\vec{T}_1 - \dot{\theta}^2\vec{R} + r\ddot{\alpha}\vec{T}_1 - \dot{\alpha}^2\vec{r}\ .$$

Рассматривая точки M_1 и M_2 как твердые тела, неизменно связанные с невесомыми стержнями OM_1 и M_1M_2, будем считать, что на тело M_1 действуют: сила тяжести $\overrightarrow{m_1g}$ в точке M_1, реакция $\vec{S}_1$ в точке O, реакция $\vec{S}_2$ в точке M_2 и реакция $-\vec{F}$ неголономного механизма в некоторой точке N стержня OM_1, а на тело M_2: сила тяжести $\overrightarrow{m_2g}$ в точке M_2, реакция $-\vec{S}_2$ в точке M_1 и реакция $\vec{F}$ неголономного механизма в точке M_2. Предположим, что этот механизм может оказывать особое действие, при котором сила $\vec{F}$ всегда перпендикулярна к прямой M_1M_2. Применяя теорему об изменении кинетического момента относительно точки O к описанному сложному маятнику, БИЛИМОВИЧ составляет дифференциальное уравнение его движения с учетом уравнения неголономной связи (14) и при некоторых упрощающих предположениях исследует прогрессивное, асимптотическое и колебательное движения маятника.

В заключение отметим установленный БИЛИМОВИЧЕМ новый дифференциальный принцип механики, который в дальнейших исследованиях получил название принципа ПФАФФА-БИЛИМОВИЧА. Этот принцип по своей мощности эквивалентен принципу ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА и справедлив как для голономных, так и для неголономных механических систем. Рассматривая материальную систему, конфигурация которой определяется лагранжевыми координатами q^α, введем в рассмотрение форму

$$\Phi = a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}dq^{\alpha} - (a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} - T - \int_1^2 Q_{\alpha}dq^{\alpha})dt, \quad (\alpha,\beta=1,2,\dots,n)$$

первый член которой выражает динамическое состояние системы на перемещении dq^{α}, второй - сопротивление изменению движения вследствие инерции, третий - действие системы, вызываемое ее кинетической энергией, и четвертый - действие, производимое лагранжевыми силами Q_{α} на действительной траектории системы, связывающей два ее положения в пространстве конфигураций за время dt, причем $a_{\alpha\beta}$ означает метрический тензор этого пространства. Принций ПФАФФА-БИЛИМОВИЧА можно выразить следующим образом

$$dp_{\alpha} = \partial_{\alpha}\Phi, \quad p_{\alpha} = a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta},$$

где p_{α}
представляет обобщенный импульс или вектор количества движения системы в пространстве конфигураций, а ∂_{α} - дифференциальный оператор частной производной по координате q^{β}.

Несколько работ БИЛИМОВИЧА посвящены исследованию проблемы динамики тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Здесь, в первую очередь, следует назвать большую статью "Уравнения движения твердого тела около неподвижной точки, опубликованую в сборнике, посвященнм Г.К.СУСЛОВУ (Киев, 1911, с.23-74). В частности, автор высказывает важную мысль о возможности приведения данной проблемы к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка. Реализовать эту идею удалось только в последнее время Е.И.ХАРЛАМОВОЙ (1969).

В области небесной механики, следуя ВОРОНЦУ, БИЛИМОВИЧ указал новый интегрируемый случай проблемы n тел при законе притяжения, соответствующем обратной пропорциональности кубам взаимных расстояний. Он исследовал систему с равными массами, которая складывается из двух подсистем с гомотетическими движениями, причем точки этих подсистем расположены в вершинах подобных или сопряженных многогронников.

4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ НАУЧНОГО НАСЛЕДИЯ ШКОЛЫ СУСЛОВА В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЮГОСЛАВСКИХ УЧЕНЫХ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

БИЛИМОВИЧУ принадлежит заслуга утверждения традиций школы СУСЛОВА-ВОРОНЦА и распространения и развития ее научного наследия в Югослявии. Будучи во главе научных и учебных учреждений, определяющих прогресс аналитической механики в Югославии, БИЛИМОВИЧ на протяжении 50-ти лет, в результате своих выдающихся исследований и педагогической деятельности, создал сильную югославскую школу по аналитической механике, к которой принадлежит ряд известных ученых, продолжающих в своих трудах развивать научные идеи СУСЛОВА-ВОРОНЦА-БИЛИМОВИЧА. К этой школе относятся ТАТОМИР П. АНГЕЛИЧ (род. 1903) РАСТКО Д. СТОЯНОВИЧ (1926-1972), ВЕЛЬКО А. ВУЙИЧИЧ (род. 1929), БОЖИДАР Д. ВУЯНОВИЧ (род. 1930), ДЖОРДЖ С. ДЖУКИЧ (род. 1943) и др. Многочисленные работы названных ученых опубликованы в центральных журналах Югославии, СССР и других стран мира и представляют собой значительный вклад в развитие современной аналичической механики. Будучи объединены единой идейной тематикой, характерной для школы СУСЛОВА-ВОРОНЦА-БИЛИМОВИЧА, эти работы могли бы составить украшение монографии по соответствующим проблемам аналитической механики.

ТАТОМИР П. АНГЕЛИЧ, профессор Белградского университета, директор Института математики, действительный член Сербской Академии наук и искусств в Белграде, член-корреспондент Югославской Академии наук и искусств в Загребе. член-корреспондент Международной астронавтической академии в Париже[7]. АНГЕЛИЧ известен своими выдающимися работами в области аналитической механики. Он опубликовал также ряд важных работ по истории механики, в том числе о научной деятельности югослявского ученого XVIII века РУДЖЕРА БОШКОВИЧА и развитии механики в Сербской Академии наук. АНГЕЛИЧ написал также многочисленные университетские учебники по механике,

7 О проф. Т.П. Ангеличе см.: M.D.Leko, *Sedamdeset godina profesora dr Tatomira P. Andjelića*, Dijalektika 8 (1973), 4, 109-118.

математике, астродинамике, механике космических полетов и работы о применении космических исследований в мирное время. Имеет философские работы в области математического детерминизма, является популяризатором науки и техники среди широкого круга представителей научной общественности. Остановимся более подробно на работах АНГЕЛИЧА в области механики, посвященных построению неголономной динамики движения системы твердых тел, а также более общих механических систем в жидкости.

За науную деятельность академика Т.П. АНГЕЛИЧ характеристично его несвязаность только за одну ускую научную область; в течении времени области исследования изменяются. Все таки основная и глав ные исследования находится на граници механики и математики, проявляя интересь тоже за философские проблемы естественных наук и историю механики и математики.

Так известно, движение твердого тела и системы твердых тел в жидкости в настоящее время изучено с достаточной полнотой, благодаря исследованиям многих ученых, начиная с середины XIX столетия (СТОКС, 1843; ДИРИХЛЕ,1852; КЛЕБШ, 1856, 1870; КИРХГОФ, 1870; ЖУКОВСКИЙ, 1885, 1891; СТЕКЛОВ, 1893, 1896, 1902, 1908; ЛЯПУНОВ, 1893; ЧАПЛЫГИН, 1894, 1897, 1903; КОЛОСОВ, 1919 и многие другие). Эта проблема имеет большое теоретическое и прикладное значение и ее решению в различных направлениях посвящена обширная литература В частности, как оказывается, данная проблема в значительной степени пересекается с проблемой вращения твердого тела вокруг непод вижной точки, получившей широкое распространение в связи с замечательными открытиями С.В. КОВАЛЕВСКОЙ.

Впервые эта проблема как проблема динамики неголономных систем была поставлена АНГЕЛИЧЕМ в 1946 г. под влиянием непосредственного научного общения с А.Д.БИЛИМОВИЧЕМ. АНГЕЛИЧ исследовал движение материальной системы с линейными и нелинейными (квадратичными) неголономными связями первого порядка в несжимаемой жидкости, рассмотрев случае безвихревого.циклического и нециклического течения жидкости. Он показал, что движение такой неголономной системы (твердого тела и системы твердых тел) с конечным числом степеней свободы в несжимаемой жидкости можно исследовать теми же метадами аналитической механики, как и движение голономной системы, если предположить, что жидкость неограниченна, идеальна и однородна, и что движение жидкости, которая рассматривается обособленно от движения неголономной системы, имеет потенциальный характер. В основу своих исследований АНГЕЛИЧ положил принцип ВОРОНЦА, соответствующим образом обобщенный на неголономные системы интегральный принцип ГАМИЛЬТОНА - ОСТРОГРАДСКОГО. Из этого принципа в результате надлежащих преобразований можно получить динамические уравнения системы твердое тело - жидкость. Оказывается, что в случае нециклического движения влияние жидкости на движение асследуемой механической системы сводится к соответствующему увеличению кинетической энергии системы с учетом кинетической энергии жидкости. В случае же циклического движения к уравнениям ВОРОНЦА следует присовокупить дополнительную систему уравнений, характеризующих постоянство обобщенных импульсов, соответствующих циклическим координатам. Эти уравнения можно рассматривать как известные первые интегралы исследуемой механической системы свердое тело - жидкость. Исследования АНГЕЛИЧА по движению неголономной системы в жидкости обогащают известные считанные примеры приложений неголономной механики к сплошной среде и в этом отношении имеют особую ценность в современной аналитической миханике неголономных систем. В последнее время интерес к таким исследованиям возрос в связи с изучением сред с дислокациями.

Он дальше вывел и дифференциальние уравнения движения динамических систем са линеарними неголономними связами без множителей связ (уравнения МАГГИ) не пользуюс квазикоординатами. Это достигнуто проектированием уравнений движения на особую касательную евклидову n-размерную координатную систему данного конфигурационого пространства. Наконец, в этой области, разработал теорию движения материальной точки для случая существования квадратных неголономных связ.

АНГЕЛИЧ показал что методу ПФАФФА можно применять к решению проблем из механики флуида (жидкости и газа) и к некоторым проблемам механики сплошной среды.

Из областях математики опубликовал несколько работ о применении числовых метод в матричном исчислению; из геометрии РИМАНА (обобщение вектора ДАРБУ); из астродинамике и тензорного исчисления.

Последних лет особено заднтересовасля за историю механики и математики. Опубликовал большое число статей как: О РУДЖЕРЕ БОШКОВИЧЕ, о развитии механики в рамках Србской академии наук итд. В Вестнику МГУ он опубликовал статэ ПРОИСХОЖДЕНИЕ ТЕРМИНА ОРТ В РУСКОЙ И ЮГОСЛАВСКОЙ НАУЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЕ.

Профессор РАСТКО СТОЯНОВИЧ известен своими многочисленными исследованиями по аналитической механике и механике сплошной среды. В области аналитической механики СТОЯНОВИЧ получил ряд результатов, относящихся к свойствам групповых пространств и устойчивости (транзитивных и интранзитивных) групп движения. Он подробно исследовал применение групп СОФУСА ЛИ для описания движения консервативных динамических систем, а также рассмотрел движение неизменяемого твердого тела в пространствах РИМАНА постоянной кривизны двух и большего числа измерений. В области теории упругости СТОЯНОВИЧ исследовал воздействие микроструктур на макроскопическое поведение (ориентированных) упругих материалов, а также установил ряд других обобщенных моделей механики упругих тел. Некоторые его работы посвящены изучению несовместных упругих деформаций, распространению упругих волн под воздействием электромагнетного поля и других вопросов. В области термоупругости работы СТОЯНОВИЧА охватывают проблемы нелинейной теории. Ему принадлежит геометрическая интерпретация термоупругости, основанная на свойствах несовместных упругих деформаций. СТОЯНОВИЧ устанавливает связь между развитой им теорией ориентированной сплошной (упругой и пластической) среды и теорией дислокаций. Ряд работ СТОЯНОВИЧА посвящен выводу основных уравнений движения вязких течений для некоторых обобщенных моделей и их исследованию.

Научные труды профессора ВЕЛЬКО А. ВУЙИЧИЧА относятся к динамике обьектов (точек, систем, тел) переменного состава, аналитической механике неголономных систем, теории устойчивости движения и развитию тензорного исчисления и дифференциальной геометрии применительно к механике. В области динамики системы переменного состава автор определил характер реактивных сил, допускающих интеграл энергии и увеличение числа первых интегралов движения объекта; составлены динамические уравнения движения в тензорной форме и найдены условия движения изображающей точки системы по линиям постоянной механической энергии; обобщен принцип ПФАФФА-БИЛИМОВИЧА и получен ряд теорем, характеризующих динамику системы переменного состава. Автор вводит новое понятие переменноконфигурацианного пространства и на этой основе строит теорию геометризации динамики системы переменной массы, в частности определяя условия движения в указанном пространстве рассматриваемого объекта по геодезической линии. Некоторые работы посвящены исследованию общих условий устойчивости движения и равновесия объекта переменной массы.

В области аналитической механики неголономных систем ВУЙИЧИЧ получил общий вид ковариантных дифференциальных уравнений движения системы в конфигурационном пространстве, установил вариационный инвариантный характер принципов ГАУССА и ГЕРЦА в этом пространстве, показал эквивалентность (при определенных условиях) принципов ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА, ПФАФФА-БИЛИМОВИЧА и ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО (и других интегральных принципов механики). В области теории устойчивости движения автор установил общий критерий устойчивости движения и равновесия в смысле ЛЯПУНОВА любой механической системы (со стационарными или нестационарными, голономными или неголономными связями). Обобщая критерий БЕНДИКСОНА для систем с любым числом степеней свободы, ВУЙИЧИЧ определил динамические условия, при которых изображающая точка системы не имеет замкнутых фазовых траекторий в фазовом пространстве. В области тензорного исчисления и дифференциальной геометрии в их связи с механикой ВУЙИЧИЧ ввел понятия ковариантного интеграла тензора и двуточечного фундаментального тензора, с помощью которых исследовал ковариантные первые интегралы системы (линейных и нелинейных) дифференциальных уравнений движения при наличии большого числа обобщенных сил в неявном виде. В некоторых весьма общих случаях интегрирование выполнимо в конечном виде. Автор определил первые интегралы дифференциальных уравнений геодезической и установил дифференциальные уравнения геодезической первого рода.

Научные труды профессора БОЖИДАРА Д. ВУЯНОВИЧА можно разделить на три группы, относящиеся к различным областям аналитической механики: 1) геометризации движения и возмущения неконсервативных динамических систем; 2) проблемам динамической симметрии (нахождения первых интегралов динамических систем и др.); 3) вариационным принципам неконсервативной механики и иреверзибильной теории полей. Первая группа работ охватывает решение проблемы о нахождении пространства, в котором динамические уравнения движения неконсервативных склерономных систем будет иметь наиболее простую

форму. Показано, что в семи-метрическом и семи-симметричном пространстве ВЕЙЛЯ дифференциальные уравнения движения неконсервативной системы характеризуют геодезические линии. Далее установлено, что дифференциальные уравнения возмущенного движения неконсервативной системы можно свести к дифференциальным уравнениям геодезического отклонения. Геометризация осуществлена и в случае наличия линейных диссипативных сил. Показано также, что геодезические линии, по которым движется неконсервативная система, можно получить как экстремали некоторой обобщенной вариационной задачи.
Вторая группа работ ВУЯНОВИЧА содержит изучение внутренней динамической симметрии задач классической механики. Основной результат, полученный автором в этом направлении, по-видимому, состоит в определении группы инфинитезимальных преобразований, оставляющей инвариантным интеграл действия. Очевидно, что такая группа преобразований позволяет определить первые интегралы динамической системы на основании теоремы ЭММИ НЕТЕР. Показано, что указанные группы инвариантности получаются как решения систем осдельных дифференциальных уравнений (обобщенных уравнений КИЛИНГА). Автор ввел понятие своеобразного Лагранжиана, зависящего одновременно от обобщенных координат и обобщенных возмущений. Вариация соответствующего действия дает возможность получить дифференциальные уравнения невозмущенного и возмущенного движения. Исследуя симметрию системы, ВУЯНОВИЧ показал, что путем выбора в качестве неголономного параметра одного из первых интегралов, траектории системы можно упростить и интегрирование довести до конца. Он установил также, что в случае планетного движения КЕПЛЕРА, кроме двух векторных первых интегралов - интеграла кинетического момента и интеграла РУНГА-ЛЕНЦА, существует третий (независимый) векторный интеграл, ортогональный к первым двум. В работах третьей группы автор установил два новых интегральных принципа механики типа ГАМИЛЬТОНА принцип исчезающего параметра и принцип некоммутативных вариаций. Эти принципы позволяют получить дифференциальные уравнениия задач миханики, а также решения нелинейных задач прямым методом вариационного исчисления. Автор успешно применил указанные вариационные принципы к теории нелинейной теплопроводности, теории пограничного слоя, теории магнитной гидродинамики, теории нелинейного тепломассопереноса, к линейным неконсервативным задачам колебаний

и т.д.

Научные исследования профессора ДЖОРДЖА С. ДЖУКИЧА относятся к аналитической механике и механике сплошной среды. Ряд своих работ он посвятил проблемам неголономной механики: получил канонические уравнения движения динамических систем с неголономными связями второго порядка, уравнения типа ГИББСА-АППЕЛЯ в квазикоординатах для неголономных систем со связями высших порядков, уравнения возмущений типа СИНГА в квазикоординатах для механических систем со связями первого порядка и уравнения движения типа УСТТЕККЕРА для неголономных систем первого порядка. Он построил теорию интегральных инвариантов механических систем в квазикоординатах, доказал прямую и обратную теоремы Э. НЕТЕР, разработал новый метод нахождения первых интегралов дифференциальных уравнений движения голономных неконсервативных механических систем, а также для голономных и неголономных систем в квазикоординатах. Получены первые интегралы для ряда механических систем с диссипативными силами. ДЖУКИЧ нашел группу инфинитезимальных преобразований динамических изменений, соответствующих интегралу С. КОВАЛЕВСКОЙ в динамике твердого тела, и изучил связь между инвариантами некоторых неавтономных гамильтонианов и соответствующими им неавтономными интегралами движения. Некоторые работы ДЖУКИЧА посвящены распространению идей аналитической механики (интегральные инварианты, уравнения УСТТЕККЕРА, первые интегралы) на принцип максимума ПОНТРЯГИНА. В большом цикле своих работ автор использует вариационный принцип ВУЯНОВИЧА исчезающего параметра для нахождения приближенных решений соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений проблем классической теории поля, нелинейной теплопроводности, теории пограничного слоя (ньютоновых жидкостей и неньютоновых жидкостей в случае степенного закона). Пользуясь идеей ВУЯНОВИЧА о некоммутативности операций дифференцирования по времени и варьирования в неконсервативной механике, ДЖУКИЧ построил интегральный инвариант для движения механических систем с диссипативными силами, позволяющий найти приближенное решение ряда конкретных задач динамики. Автор генерализовал форму ДОЛАПЧИЕВА-МАНЖЕРОНА-ДЕЛЕАНУ, получил алгебраическое решение планетной задачи КЕПЛЕРА и установил новый вариационный принцип, из которого следуют уравнения БОЛЬЦМАНА-ГАМЕЛЯ-ВОРОНЦА. Серия работ

ДЖУКИЧА посвящена теории пограничного слоя. В этих работех исследуются нестационарный динамический и температурный пограничный слой ньютоновой жидкости, стационарный динамический пограничный слой неньютоновой жидкости при степенном законе, магнитногидродинамический пограничный слой со скользящими граничными условиями, влияние магнитного поля на течение неньютоновой жидкости. Для решения указанных проблем автор пользуется методом разложения в ряд, методами общих уравнений типа Л.Г. ЛОЙЦЯНСКОГО, вариационными методами и методом КАРМАНА-ПОЛЬГАУЗЕНА.

☆ ☆ ☆

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проследили научные связи в области механики на протижении нескольких поколений, установившиеся между учеными России и Югославии, принадлежащими к школе СУСЛОВА-ВОРОНЦА-БИЛИМОВИЧА. При этом картина преемственности имеет следующий вид: П.В. ВОРОНЕЦ - ученик СУСЛОВА, БИЛИМОВИЧ - ученик П.В. ВОРОНЦА, АНГЕЛИЧ - ученик БИЛИМОВИЧА, ВУЙИЧИЧ и СТОЯНОВИЧ - ученики БИЛИМОВИЧА и АГЕЛИЧА, ВУЯНОВИЧ - ученик БИЛИМОВИЧА, АНГЕЛИЧА и СТОЯНОВИЧА, ДЖУКИЧ - ученки АНГЕЛИЧА, ВУЯНОВИЧА и ВУЙИЧИЧА. К этой славной плеяде русских и югославских механиков следует также причислить сына П.В. ВОРОНЦА - академика Сербской Академии наук и искуств КОНСТАНТИНА ПЕТРОВИЧА ВОРОНЦА (1902-1974), который защитил у А. БИЛИМОВИЧА (докторскую) диссертацию по неголономной механики "Катание твердого тела по упругому основанию" и который, позже, посвятил свою работу механике непрерывных сред.

БИБЛИОГРАФИЯ

ГАВРИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ СУСЛОВ
(1857 — 1935)

1. ОБ УРАВНЕНИИ ЯКОБИ ДЛЯ НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ КООРДИНАТ, Записки Имп. АН, 49 (1884), 18-33.
2. ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ, СПБ, 1888 (Магистер. дисс.).
3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ НАХОЖДЕНИЯ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ, ДОПУСКАЮЩЕЙ ДАННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ДЛЯ СИСТЕМЫ С ДВУХ СТЕПЕНЯХ СВОБОДЫ, Киев,унив.изв., 30, 4 (1890), 9-20.
4. ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ ВОПРОСЕ ИЗ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ, Киев. унив.изв., 30 (1890), 5, 21-31.
5. О СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ, ДОПУСКАЮЩЕЙ ДАННЫЕ ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, Киев. унив.изв., 30 (1890), 8, 1-114 (доктор.дисс.).
6. К ВОПРОСУ О НАЧАЛЕ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, Киев.унив.изв., 31 (1891), 8, 1-14.
7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ, Киев.унив,изв., 32 (1892), 2, 1-7.
8. К ВОПРОСУ О КАТАНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ, Киев.унив.изв., 32 (1892), 6, 1-42.
9. ДВИЖЕНИЕ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТИ, Киев.унив.изв., 32 (1892), 11, 1-6.
10. ПРИМЕРЫ НА ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ТЕЛ, Киев.унив.изв., 33 (1893), 12, 1-60.
11. КИНЕТОГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ, Киев.унив.изв., 34 (1894), 5, 1-46.
12. О ЦИЛИНДРОИДЕ BALL'A, Киев.унив.изв., 34 (1894), 10; Протоколы Киев.физ. - мат.об-ва за 1893 г., 48-52.

G. SOUSLOW,

professeur à l'Université de Kieff.

Traité de mécanique rationnelle.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,

профессора университета Св. Владиміра.

Томъ I.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

КИНЕМАТИКА.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.

ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА

Кіевъ, Крещатикъ № 33. || С.-Петербургъ, Екатерин. № 4.

Кіевъ. 1911.

Рис 8

13. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОГО ПОЛЮСА (случай С.В. Ковалевской), Труды Отд. физ. наук Об-ва любит. естеств., 7 (1895), 2, 1-3.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ СИСТЕМЫ ПРИЛОЖЕННЫХ ВЕКТОРОВ, Киев. унив. изв., 35 (1895), 3, 1-7.

15. СПЛОШНАЯ ГРУППА ВРАЩЕНИЙ ДАРБУ, Киев, унив. изв., 35 (1895), 11, 17-20.

16. МОНОЦИКЛИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА, Киев.унив,изв., 36 (1896), 9, 65-72.

17. МОНОЦИКЛЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА, Труды Отд. физ. наук Об-ва любит. естеств., 8 (1896).

18. О КИНЕТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА, Матем.сб., 19 (1896), 1, 197-210.

19. ТЕОРЕМА ЯКОБИ О РАЗЛОЖЕНИИ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЯЖЕЛОГО ГИРОСКОПА, Киев.унив.изв., 36 (1896), 9, Протоколы Киев. физ.-матем. об-ва за 1895 г., 73-85; Труды Отд. физ. наук Об-ва любит. ествеств., 7 (1895), 2, 22-28.

20. О НАЧАЛЕ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВОЙ ФОРМЕ, Матем. сб., 20 (1897), 1, 105-114. Киев,унив.изв., 38 (1898), 5; Протоколы физ.-матем. об-ва за 1897 г, 22-25.

21. ПРОИЗВОДНАЯ ПОТЕНЦИАЛА ПОВЕРХНОСТНЫХ МАСС, Киев.унив.,изв., 38 (1898), 5; Протоколы физ.-матем. об-ва за 1897 г., 22-25.

22. МЕХАНИКА ГЕРЦА, Киев,унив.изв., 38 (1898), 7, 1-32.

23. ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ, Киев.унив.изв., 38 (1898), 10, 5-11.

24. О НАЧАЛЕ ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, Киев.унив.изв., 38 (1898), 12, 22-30.

25. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, Т.I,II. Киев.унив,изв., 39 (1899), 10, 1-48; 11, 49-96; 40 (1900), 2, 97-144; 3, 145-176; 4, 177-240; 5, 241-272; 6, 273-288; 7, 289-320; 9, 321-368; 10, 369-432; 11, 433-496; 41 (1901), 2, 497-543 (конец I тома); 42 (1902), 3, 1-32; 4, 33-64; 6, 65-96; 7, 97-128; 9, 129-160; 11, 161-208; 12, 209-281 (конец II тома); т.I,II, 1900-1902,

Киев (I-е издание); т.I, 1911-1912, Киев (2-е издание); Теоретическая механика. Гостехиздат, М.-Л.,(1944) 3-е издание, посмертное .

26. К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ В ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ, Киев.унив. изв., 40 (1900), 12; Протоколы Киев.физ.-матем. об-ва за 1899 г., 1-24.

27. ПСЕВДОРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ, Киев.унив.изв., 40 (1900), 12; Протоколы Киев.физ-матем. об-ва за 1899 г., I-5.

28. ОБ ОДНОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ НАЧАЛА ДАЛАМБЕРА, Матем.сб., 22 (1901), 4, 687-691.

29. РАЗЫСКАНИЕ ПРТИВОДЕЙСТВИЙ, Киев,унив.изв., 41 (1901), 1; Протоколы физ.-матем. об-ва за 1900 г., 1-7.

30. К ВОПРОСУ О ПРОТИВОДЕЙСТВИЯХ, Киев.унив.изв., 41 (1901), 11, 1-3.

31. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ, Киев.унив.изв., 42 (1902), 7; Протоколы Киев. физ.-матем. об-ва за 1901 г., 109-123; Физич. обозрение, 3 (1902), 101-117.

32. ОБ УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОСТИ Hadamard'a, Матем.сб., 24 (1903), 57-68.

33. ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НЕУДЕРЖИВАЮЩИХ СВЯЗЯХ, Киев.унив. изв., 41 (1904), 10; Протоколы Киев. физ.-матем. об-ва за 1903 г., 59-68.

34. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ГИДРОДИНАМИКИ, т.I. Теория потенциала (Учение о векторном поле), Киев.унив.изв., 41 (1904), 6, 1-32; 7, 33-64; 8, 65-96; 9, 97-128; 10, 129-167; 1904 г., 167 с. (I-е изд.); Учение о векторном поле, Одесса, 1922, 149 (2-е изд.); т.II. Гидродинамика, Киев, 1910, 195.

35. ЗАКОН ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ И ЗАКОН МОМЕНТОВ, Киев.унив.изв., 48 (1908), 8, 1-16.

36. ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, Киев. (Киев. политехн.ин-т), 1919.

37. КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ ШКОЛ, Одесса, 1921.

38. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, Киев, 1924.

39. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ПО МЕТОДУ ГРИНА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СИЛ ПРОФ. МИЗЕСА, Журнал науководослідчіх кафедр м. Одеси, 2 (1926), 3, 1-3.

40. КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНІКІ, Харків-Одеса, 1930.

ПЕТР ВАСИЛЬЕВИЧ ВОРОНЕЦ
(1871 — 1923)

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЙЛЕРОВА СЛУЧАЯ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ, Киев, 1898; Киев, унив. изв., 38 (1898), 4, 1-52; 5, 53-113.

2. К ТЕОРИИ ПОСЛЕДНЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЯКОБИ, Киев. унив. изв., 38 (1898), 5, 44-48.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, КАТЯЩЕГОСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ. Киев, унив. изв., 41 (1901), 11, 1-17.

4. ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ. Матем. сб., 22 (1901), 4, 659-686.

5. ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВЕНЕНИЙ ДИНАМИКИ. Киев. унив. изв., 42 (1902), 7, 1-14.

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, КАТЯЩЕГОСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТИ. Киев, 1903; Киев. унив. изв., 43 (1903), 1, 1-66; 4, 67-152 (магистер. дисс.).

7. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗАИМНЫХ СИЛ. Киев. унив. изв., 45 (1905), 11, 95-114.

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ (с приложением к задаче об телах) (доктор.дисс. . Киев, 1906; Киев. унив. изв., 47 (1907), 1, 1-82; 2, 83-180.

9. ÜBER DAS PROBLEM DER BEWEGUNG VON VIER MASSENPUNKTEN UNTER DEM EINFLUSS VON INNEREN KRÄFTEN. Math.Annalen, 63 (1907), 387-412.

10. ЗНАЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КИНЕМАТИКЕ. Киев. унив. изв., 48 (1908), 8, 1-16.

11. ÜBER DIE ROLLENDE BEWEGUNG EINES KREISSCHEIBE AUF EINER BELIEBIGEN FLÄCHE UNTER DER WIRKUNG VON GEGEBENEN KRÄFTEN. Math. Annalen. 67 (1909), 268-280.

12. К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, КАТЯЩЕГОСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАННЫХ СИЛ. Киев.унив.изв., 50 (1910), 10, 101-111.

13. ÜBER DIE BEWEGUNG EINES STARREN KÖRPERS, DER OHNE GLEITUNG AUF EINER BELIEBIGEN FLÄCHE ROLLT. Math. Annalen, 70 (1911), 410-453.

14. ÜBER DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN EINES STARREN KÖRPERS. Math. Annalen, 71 (1911), 392-403.

15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ОТНОШЕНИЮ К СРЕДЕ, ИМЕЮЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОЕ ДВИЖЕНИЕ. Киев.унив ив., 52 (1912), 7, 1-40; Сборник статей, посвященных проф. Г.К.Суслову. Киев., 1911, 75-114.

16. SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A FORCE DONNEE, SUR UNE SURFACE FIXE ET DEPOLIE.Journ.de math., 1 (1915), 261-275.

17. ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ЯКОБИ. Киев.унив.изв., 56 (1916), 2, 103-109.

18. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА. Киев.унив.изв., 57 (1917), 11-12, 45-52.

19. К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА. Известия Крымск. (Таврическ.) ун-та Записки матем. кабинета , 3 (1921,, 39-60.

20. ПРИМЕР НА ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, Изв. Крымск. (Таврическ.) ун-та (Записки мат. кабинета), 3 (1921), 176-186.

21. SUR L'INTEGRATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Bull. Sci. Math., Paris, 47 (1923), 113-119.

НАУЧНО НАСЛЕЂЕ ШКОЛЕ СУСЛОВА У АНАЛИТИЧКОЈ МЕХАНИЦИ И ЊЕН РАЗВИТАК У ИСТРАЖИВАЊИМА ЈУГОСЛОВЕНСКИХ НАУЧНИКА

— Кратак садржај —

Ова расправа приказује научно наслеђе из механике једне од највећих научних школа у Русији до октобарског периода – школе Суслова – и њен даљи развитак у радовима југословенских научника.

Професор ГАВРИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ СУСЛОВ /1857 – 1935/ по завршетку физичко–математичког факултета Петроградског универзитета 1880. године задржан је на факултету ради припреме за наставничку активност. Године 1888. после одбране магистарске дисертације "О парцијалним диференцијалним једначинама неслободног кретања" Суслов је изабран за ванредног професора механике Кијевског универзитета. На Московском универзитету одбранио је године 1890. докторску дисертацију "О функцији силе која допушта дате партикуларне интеграле". У том раду Суслов је изучавао тзв. директни задатак динамике – одређивање сила помоћу датих особина кретања. У то време, док је индиректни задатак динамике – одређивање кретања кад су дате силе – био већ добро проучен, директни задатак је био решен само у неким појединачним случајевима. Ово се односи на Њутнов задатак одређивања сила које одређују кретање планета, Бертранов проблем који се односи на одређивање сила неопходних за елиптично кретање материјалне тачке. У овом Сусловљевом раду налази се општи поступак решењатог задатка за систем са произвољним бројем степена слободе под условом да дате силе имају функцију силе. Од многобројних радова Суслова треба пре свега истаћи његово капитално дело из аналитичке механике, написано на прелазу између XIX и XX века. Из тог уџбеника је механику учило не једно покољење студената великих школа. У току многих годинаСуслов је обављао научнонаставни рад на Кијевском универзитету /1888 – 1920/ и у Одеском политехничком институту /1920 – 1935/. Тесне везе Суслова с угледним руским и страним научницима, велика култура и широки дијапазон његових научних интересовања, изузетне способности и огромни организаторски талент, привлачили су на њега погледе многих младих математичара и механичара, међу којима, у првом реду, треба истаћи П. В. Ворњца и А. Д. Билимовића.

Студент Кијевског универзитета, ученик Г. К. Суслова, ПЕТАР ВАСИЉЕВИЧ ВОРОЊЕЦ /1871 – 1923/ још је на студијама показао озбиљне способности за научни рад. По завршетку математичког одсека универзитета задржан је на катедри теоријске механике ради припремања за професора. Године 1903. одбранио је магистарску дисертацију "Једначине кретања кругог тела које се котрља без клизања по непокретној равни", а 1906, докторску дисертацију "Трансформација једначина динамике помоћу линеарних интеграла кретања". Био је професор механике на Кијевском /1906–1920/ и Симферопољском /1921–1923/ универзитету. П. В. Вороњец дао је развоју аналитичке механике велики допринос.

Ученик Суслова и Вороњца АНТОН ДИМИТРИЈА БИЛИМОВИЋ /1879 – 1970/ по завршетку физичко–математичког факултета Кијевског универзитета 1903. године задржан је на катедри теоријске механике као асистент. После одбране магистарске дисертације "Једначине кретања конзервативних система" /1907/ добио је звање приват–доцента. Билмовић је 1915. одбранио докторску дисертацију "Тангентна кретања крутог тела" и био постављен за професора теоријске механике /а затим за ректора/ Новоросијског /Одеског/ универзитета. Године 1920. емигрирао је у Југославију, где је радио до краја живота као професор рационалне /теоријске/ механике на Београдском универзитету. После пет година изабран је за дописног, а 1936. за редовног члана Српске академије наука. За пет деценија активности у Југославији Билимовић је припремио многе талентоване млађе научнике за научни рад. Њему припада више од две стотине научних радова, међу којима и неколико уџбеника рационалне механике и више математике, који су играли велику улогу у припреми младих стручњака. Низ Билимовићевих радова посвећен је динамици крутог тела и принципима механике.

Велика заслуга А. Билимовића јесте проширење и развитак традиција школе Суслова–Вороњца у Југославији. Пошто је био у врху научних и високих наставних установа, које су одређивале прогрес аналитичке механике у Југославији, Билимовић је за време од педесет година, током својих значајних научних истраживања и наставне делатности, створио јаку југословенску школу аналитичке механике, којој припада низ познатих научника, који су у својим радовима развијали идеје Суслова–Ворњаца–Билимовића. Тој школи припадају: ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ, РАСТКО Д. СТОЈАНОВИЋ /1926–1974/, ВЕЉКО А. ВУЛИЧИЋ, БОЖИДАР Д. ВУЈАНОВИЋ, ЂОРЂЕ С. ЂУКИЋ и др. Тој школи припада делом својих радова и син П. В. Вороњца КОНСТАНТИН П. ВОРОЊЕЦ /1902 – 1974/ који је живео и радио у Југославији. Многобројни радови тих научника објављени су у часописима Југославије, СССР–а и других земаља света и представљају знатан допринос разради фундаменталних проблема савремене аналитичке механике.

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ, професор је Београдског универзитета, директор Математичког института у Београду, редовни члан Српске академије наука и уметности и дописни члан Југославенске академије знаности и умјетности у Загребу и Међународне астронаутичке академије у Паризу. Познат је по својим радовима из аналитичке механике, посебно из теорије нехолономних система и примена тензорских и матричних метода у механици. Анђелић се бави изучавањем историје механике. Објавио је низ радова међу којима су запажени они о изучавању научног рада Руђера Бошковића и развоју механике у Српској академији наука. Написао је и више универзитетских уџбеника механике и математике као и прилога о примени космичких истраживања у мирнодопске сврхе. Осим тога, посвећује доста интересовања популаризацији науке и технике.

РАСТКО Д. СТОЈАНОВИЋ познат је по бројним радовима из аналитичке механике и механике континуума.

Научни радови проф. ВЕЉКА А. ВУЛИЧИЋА односе се на динамику објеката /тачака, система тела/ промењљивог састава, аналитичке механике нехолономних система, теорије стабилности кретања и примене тензорских метода у механици.

Научни радови проф. БОЖИДАРА Д. ВУЈАНОВИЋА могу се поделити у три групе које се односе на разне области аналитичке механике: 1/ геометризација кретања и поремећаји неконзервативних динамичких система; 2/ проблеми динамичке симетрије /налажење првих интеграла кретања динамичких система/; 3/ варијациони принципи неконзервативне механике.

Испитивања проф. ЂОРЂА С. ЂУКИЋА припадају области аналитичке механике и механике непрекидних средина.

Изнели смо научне везе у области механике у току неколико покољења, успостављене између научника Русије и Југославије, који су припадали школи Суслова–Вороњца–Билимовића.

БЕЛЕШКА О ПИСЦИМА

Аутори ове публикације, која се односи на рад једне научне школе у области механике код нас и на њено порекло у знаменитој руској школи Суслова и Вороњца, угледни су научници СССР–а па ћемо овде изнети неке податке о њима.

АШОТ ТИГРАНОВИЧ ГРИГОРЈАН / АШОТ ТИГРАНОВИЧ ГРИГОРЬЯН/, рођен је 1910. године; доктор је физичко–математичких наука и професор универзитета. Због својих значајних резултата у изучавању историје наука изабран је за редовног члана Међународне академије за историју наука. Има почасно звање "заслужног научног радника РСФСР /Руска совјетска федеративна социјалистичка република/", руководи сектором историје механике Института за историју природно–математичких наука и технике Академије наука СССР–а. Обавља велики научно-организациони рад као први потпредседник Међународне уније за историју и филозофију наука.

А. Т. Григорјан је писац већег броја чланака и посебних монографија из историје механике.

БОРИС НАУМОВИЧ ФРАДЛИН /БОРИС НАУМОВИЧ ФРАДЛИН;/ рођен је 1913 године, доктор физичко–математичких наука, професор. Аутор је великог броја научних радова из механике и историје механике. Професор је теоријске механике на Кијевском политехничком институту.

ПОГОВОР УРЕДНИКА

Ово дело познатих совјетских историчара механичких наука *А.Т. Григорјана* и *В.Н. Фрадлина* представља значајан прилог и општој историји аналитичке механике и историји механике код нас. И поред тога што су аутори своју пажњу посветили углавном истраживањима П.В.Вороњца и А.Д. Билимовића, читалац може добити основни увид и на научне прилоге и допринос аналитичкој механици наших научника.

Са тог становишта овде, бар у овом поговору, треба навести и докторску дисертацију *Вјачеслава Жардецког* /1896 – 1962 / „О кретању чврстог тела на кривој линији" /Београд, 1923/ као и радове проф. др *Ђорђа Мушицког* о примени принципа механике у теоријској физици, а посебно Пфаф–Билимовићевог принципа. В. Жардецки је своје стваралаштво после неколико радова из аналитичке механике усмерио према теоријској хидромеханици, док Ђ. Мушицки и даље посвећује своју пажњу примени Пфаф–Билимовићевог принципа у механици.

Ради што потпуније слике наведимо да се код нас почетком овог века принципима механике и њиховом применом први бавио *Коста Стојановић* /1867 – 1921 /, при чему треба поменути његов рад "О основним принципима механике и њиховој примени на физичке проблеме" /Београд, 1903 /. И у радовима нашег познатог математичара *Михаила Петровића* /1868 – 1943/ наилазимо на расправе које се могу укључити у садржај ове књиге. Ово се најпре односи на Петровићев рад "Exemples physiques de transformation des equations de Lagrange" (Le Havre, 1929).

У прилогу ове књиге изложене су библиографије Г. К. Суслова и П. В. Вороњца. Библиографије осталих истраживача о којима се говори у књизи изостављене су стога што су већ другде објављене. Тако је Српска академија наука и уметности објавила потпуну библиографију Антона Д. Билимовића /в. белешку 3 на стр. 23/, а часопис "Дијалектика" библиографију Татомира П. Анђелића /в. белешку на стр. 45/ итд.

Припрему рукописа за штампу као и техничку опрему књиге обавио је *Драган Трифуновић*, истраживач историје математике и механике код нас па заслужује захвалност у сваком погледу.

Татомир П. Анђелић