МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ, БЕОГРАД
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ, КИЕВ

Велько А. Вуйичич, Анатолий А. Мартынюк

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Београд — Киев

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ, БЕОГРАД
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ, КИЕВ

Велько А. Вуйичич, Анатолий А. Мартынюк

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Београд — Киев
1991

Рецензенти / *Рецензенты*: Академик Ю. А. Митропольский,
Проф. др. В. Б. Ларин

Примљено за штампу одлуком Научног већа Математичког института од 27.01.1991 / *Утверждено к печати ученым советом Математического института САНУ 27.01.1991*.

Уредник / *Редактор*: Зоран Марковић

Технички уредник / *Технический редактор*: Драган Благојевић

Компјутерски слог / *Компьютерный набор*: Мирко Јанц

Штампарија / *Типография*: „Бакар", Бор

УДК: 531, 531.36, 531.31; 391.5
AMS Mathematics Subject Classification (1991): 70 F xx, 70 G xx, 70 H xx, 73 H xx

1. Математический институт, Београд
Кнеза Михаила 35,
11001 Београд

2. Институт механики АН, Киев
ул. Нестерова, 3
252057 Киев

CIP
— Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

531.31:517.938

VUJIČIĆ, Veljko A.

Nekotorye zadači mehaniki neavtonomnyh sistem / Vel'ko A. Vujičić, Anatolij A. Martynjuk. — Beograd: Matematički institut; Kiev: Institut mehaniki AN, 1991. — 109 str.: 24 cm

Ćir. — Tiraž 350. — Bibliografija: str. 102–107320a. — Registar.

ISBN 86-80593-09-5
1. Martynjuk, Anatolij A.
531.36:517.938
a) Dinamički sistemi
3446540

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из свойств движений, изучаемых в механике, является устойчивость. Свойство системы быть инвариантной по отношению к действию малых начальных возмущений принято связывать с ее устойчивостью. В трудах Н. Е. Жуковского устойчивость процесса или движения понимается как прочность, неподатливость его при изменении начальных условий и действии малых возмущений. Отсюда ясно, что в природе наблюдаются лишь устойчивые процессы (движения), так как неустойчивые разрушаются под действием даже незначительных возмущений. В свое время Н. Г. Четаев сформулировал постулат устойчивости законов физики и механики, согласно которому устойчивость понимается как малость отклонений теории от эксперимента. Математическая формализация понятий устойчивости и неустойчивости в точном естествознании была осуществлена в выдающемся сочинении А. М. Ляпунова „Общая задача об устойчивости движения". Предложенные им общие методы исследования устойчивости остаются основными методами и в настоящее время. Эти методы дополняются или обобщаются на новые объекты исследования.

В предлагаемой вниманию читателей книге излагается общее понятие „процесса", аксиоматика которого допускает рассмотрение конкретных задач в трех направлениях:

первое — динамические системы, определяемые неавтономными дифференциальными уравнениями;

второе — общие системы, полупотоки, абстрактные дифференциальные уравнения;

третье — абстрактные процессы.

Концепция устойчивости аксиоматически определенного процесса по двум мерам и предположение о его непрерывности по отношению к одной из них обоснована в общей теории систем. Исследование неавтономных систем в механике (реономные системы) является одним из прикладных направлений динамики систем. Исходя из принципа аналогичного постулату устойчивости Н. Г. Четаева, многие задачи современного естествознания предполагают формирование условий устойчивости соответствующего процесса. Примерами таких задач могут быть производственные системы, энергосистемы, транспортные системы, агросистемы, а также системы, моделирующие среду обитания или водную систему. Научные результаты, полученные в Отделе

ОГЛАВЛЕНИЕ

устойчивости процессов Института механики АН УССР и в Отделении механики Математического института в Белграде, позволили предложить некоторый вариант общего подхода для исследования динамики и устойчивости многих явлений в технике и технологии. Первый вариант текста книги был завершен в 1989 г. и обсуждался во время визита профессора В. Вуйичича в Институт механики АН УССР (Киев, сентябрь 1989 г.). Работа над монографией закончена в 1990 г. и посвящается 100-летнему юбилею опубликования работы „Общая задача об устойчивости движения“ А.М. Ляпунова

Авторы
Белград-Киев, ноябрь, 1990 г.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R — Множество вещественных чисел;

$R_+ = [0, +\infty[\subset R$ — множество всех неотрицательных чисел;

$\check{R}_+$ — множество всех положительных чисел;

R^k — k-мерное действительное векторное пространство;

$R \times R^k$ — декартово произведение R и R^k;

$\mathcal{T} = [-\infty, +\infty]$ — максимальный промежуток времени;

$\mathcal{T}_0^* =]t_0, +\infty] = \{t : t_0 < t \le +\infty\}$ — полуоткрытый слева неограниченный промежуток времени;

$\mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty[= \{t : t_0 \le t < +\infty\}$ — полуоткрытый справа неограниченный промежуток времени;

$\mathcal{T}_i \subseteq R$ — множество всех начальных значений t_0 при рассмотрении всех допустимых t_0;

$t \in R$ — переменная времени;

$t_0 \in R$ — начальный момент;

$x(t)$ — вектор состояния системы при $t \in R$, $(x_1, \dots, x_{2n})^{\mathrm{T}} = x$;

$(^{\mathrm{T}})$ — знак транспонирования вектора или матрицы;

I_n — единичная матрица.

ВВЕДЕНИЕ

1. Эвристическое описание системы и задачи исследования

Влияние научно-технических достижений на результаты практической деятельности происходит путем все более широкого применения математических методов и подходящих математических моделей, используемых для формального описания разнообразных реальных объектов, систем и их функционирования. Наиболее распространенной является модель, именуемая „динамической системой в широком смысле" и понятие которой охватывает ряд классических определений, возникающих в недрах классической механики и качественной теории дифференциальных уравнений.

Широко распространеный термин „система" призван определить совокупность находящихся во взаимодействии „элементов" или „элементарных систем". Интуитивно ясно, что в свою очередь понятие элемента или элементарной системы должно рассматриваться в зависимости от уровня моделирования, отправляясь от которого можно рассматривать определенную модель объекта как элемент или как систему. С этой целью естественно рассматривать гипотезу неделимости.

Для заданного уровня моделирования конкретный объект удовлетворяет принципу неделимости, если во времени и в пространстве он сохраняет неизменными собственные свойства.

Предполагая выполнимыми условия данной гипотезы, элементарной будем называть систему, удовлетворяющую принципу неделимости и описываемую минимальным числом бит информации, достаточной для ее полной различимости. Под полной различимостью будем понимать такой уровень описания, при котором нельзя не различать две хотя бы и внешне подобные системы. Естественно при этом под сложной системой понимать совокупность двух или более взаимодействующих между собой элементарных систем. Очевидно, что при таком определении, совокупность любого числа невзаимодействующих между собой элементарных систем, сложной не является.

Элементарные системы, образующие сложную систему, могут описываться всеми мыслимыми типами уравнений и неравенств, а также включениями, которые в совокупности дают множество решений или реализаций процесса функционирования данной системы.

Одной из центральных проблем, относящихся к изучению общих свойств систем, является исследование условий устойчивости их функционирования.

2. Функционирующие системы

2.1. Состояние системы определяется некоторым набором „обобщенных координат“, а их изменение во времени подчинено определенной системе уравнений либо неравенств. Функционирование системы определяется рядом факторов, которые условно можно объединить в две группы.

A_0. Факторы, выбор которых может осуществляться экспериментатором, и с помощью которых функционирование системы может быть изменено по его усмотрению. К числу таких факторов относятся управляющие силы, параметры системы и начальные данные. Обозначим Λ — множество, элементами которого могут быть характеристики параметров, функций, классов функций, операторов и т.д., которые описывают форму, структуру, материал, напряженное состояние конструкции, управления и т.д., которые могут изменяться экспериментатором.

A_1. Факторы, выбор которых не зависит от желаний экспериментатора, но о которых он располагает некоторыми априорными сведениями. Обозначим B — множество, элементами β которого являются характеристики различной природы возмущающих сил, условий эксплуатации, режимов функционирования системы и т.д.

По замыслу система должна быть такой, чтобы ее функционирование было удовлетворительно при любой реализации $\beta \in B$.

2.2. Для изучения устойчивости в математических моделях абстрактной динамики потребуются следующие понятия. Время $t \in \mathcal{T}$ и множество начальных значений $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}$. Для начального момента времени $t_0 \in \mathcal{T}_0$ задается непустое множество H_{t_0}, элементы которого суть начальные данные h_{t_0}, возмущения p_{t_0} и управления $\mathcal{U}_{t_0}$. Совокупность начального момента t_0 и начальных данных h_{t_0} образует упорядоченное множество $h = (t_0, h_{t_0})$.

Множество
$$H = \{h = (t_0, h_{t_0}) : t_0 \in \mathcal{T}_i;\ \ h_{t_0} \in H_{t_0}\}$$
называется пространством исходных данных.

Для любого момента $t \in \mathcal{T}$ задается множество X^t, элементы которого $x \in X^t$ есть выходы системы в момент времени t. Совокупность текущего момента t и выхода x образует упорядоченную пару (t, x), которая называется позицией. Множество $\Xi = \{(t,x) : t \in \mathcal{T}, x \in X^t\}$ называется пространством позиций. Рассматриваются также множества $X = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} X^t$, $H = \bigcup_{t_0 \in \mathcal{T}_0} H_{t_0}$. Наконец, задается пространство частичных функций времени

$$\varphi = \{x : t \to x(t), \operatorname{dom} x \to X, \operatorname{dom} x \subseteq \mathcal{T}, (\forall t \in \operatorname{dom} x)\ \ x(t) \in X^t\}.$$

Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_i$, H_{t_0}, X^t, Ξ, φ наделяются соответственно структурой и выделенными на них семействами множеств, а также аксиомами, используемыми в определениях структуры и соответствующих семейств множеств.

Кортеж множеств и пространств

$$\langle \mathcal{T}, \mathcal{T}_i, \{X^t\}_{t\in\mathcal{T}}, \{H_{t_0}\}_{t_0\in\mathcal{T}_i}, H, \Xi, X, \varphi\rangle$$

образует среду.

Отношение r между множеством φ (частичных функций x времени t со значениями в пространствах X^t) и пространством исходных данных H ($r \subset \varphi \times H$), удовлетворяющее вообще некоторым аксиомам (которые могут и отсутствовать) называется функционирующей системой.

Функционирующая система r называется системой движений, если для нее выполняется аксиома начального момента времени:

$$(\forall h \in \operatorname{dom} r)(\forall x \in rh)\ t_0 \in \operatorname{dom} x.$$

При этом каждая частичная функция $x \in rh$ ($h \in \operatorname{dom} x$) называется движением, определенным по крайней мере при t_0 ($t_0 \in \mathcal{T}(x,h)$).

Функционирющая система в среде $r \subset \Psi \times M$ называется системой процессов, если:

а) множество $\mathcal{T}$ частично упорядочено;

б) выполняется аксиома исходных данных

$$(\forall h \in \operatorname{dom} r)(\forall x \in rh)(t_0 \in \operatorname{dom} x \wedge \{x(t_0)\}_{x\in rh} \text{ — singl}).$$

Для системы процессов каждую функцию $x \in \operatorname{range} r \subset \Phi$ принято называть процессом, а при фиксированном h каждая функция $x \in rh$ называется процессом с исходными данными. Столь общее определение функционирующей системы, системы процессов и процесса имеет большое ориентирующее значение при все возрастающем количестве моделей, рассматриваемых в абстрактной теории динамически систем.

2.3. Чтобы рассматривать вопросы устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, целесообразно выделить лишь некоторые необходимые для этого свойства решений и ввести аксиоматическое определение абстрактного процесса или системы процессов.

Пусть время $t \in]0,T[$, $T = +\infty$, допустимо. Пусть множество D точек φ произвольной природы и каждому $t \in [t_0,t_1]$ или $[t_0,t_1]$ ($[t_0,t_1[\subset]0,T[$) в множестве D соответствует точка $\varphi = \varphi(\varphi_0,t_0,t_1;t)$ такая, что $\varphi = \varphi_0$ при $t = t_0$. Тогда кривая $\varphi = \varphi(\varphi_0,t_0,t_1;t)$ определена $\forall t \in [t_0,t_1)$ или $\forall t \in [t_0,t_1]$ при $t = t_0$ и $\varphi = \varphi_0$.

Множество D будем называть пространством состояний, а $\varphi \in D$ — состоянием.

Из множества всех кривых, выходящих из точки φ_0, на основе некоторых аксиом B_0—B_2 выделим часть и будем называть их процессами.

B_0. *Аксиома сужения.* Любой процесс, определенный в промежутке $[t_0,t_1) \subset (0,T)$ является также процессом в любом промежутке $[t_0',t_1'') \subset [t_0,t_1)$;

B$_1$. *Аксиома сочленения.* Если два процесса имеют общую точку в момент времени t_1, то кривая, состоящая при $t < t_1$ из точек одного процесса, а при $t \geq t_1$ из точек другого, также будет процессом.

B$_2$. *Аксиома существования.* Существует по крайней мере один процесс $(\tilde{\varphi}(t))$, определенный на всем интервале $(0, T)$.

Если состояние φ в момент времени t принадлежит процессу, то говорят, что этому процессу принадлежит пара (φ, t).

Пример 1. В качестве примера системы процессов рассмотрим модель сплошной среды с внутренними степенями свободы. Описание сплошной среды осуществляется с помощью криволинейной системы координат наблюдателя x^1, x^2, x^3, x^4 и сопутствующей лагранжевой системы $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, фиксирующей координаты индивидуальных частиц (ξ^1, ξ^2, ξ^3) и время $\xi^4 = t$ как скалярную величину на R. Наряду с неизвестными функциями $x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ рассматриваются производные

$$x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}, \quad \nabla_{k_1} x^i_j, \quad \ldots, \quad \nabla_{k_1} \nabla_{k_2} \ldots \nabla_{k_p} x^i_j, \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

и переменные параметры состояния $\mu^A(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ вместе с их производными

$$\nabla_{k_1} \nabla_{k_2} \ldots \nabla_{k_q} \mu^A \qquad (A = 1, 2, \ldots, \ q = 1, 2, 3, \ldots)$$

(к которым можем отнести, например, энтропию, компоненты тензоров остаточных деформаций, плотности дислокаций, намагниченность и поляризацию, векторы электромагнитного потенциала, внутренние кинетические моменты и т.д.), которыми характеризуется рассматриваемая сплошная среда. Совокупность таких определяющих параметров (распределенных для момента времени t_0) образует множество H_{t_0} входов h_{t_0} (множество H).

В основу модели сплошной среды можно положить базисное вариационное соотношение

$$\delta \int_V L \, d\tau + \delta W^* + \delta W = 0,$$

где L — плотность функции Лагранжа, δW^* — функционал, характеризующий объемные в V_4 и поверхностные на Σ_3 взаимодействия данной части среды (в V_4) с внешними полями и телами и некоторые необратимые действия соседних частей среды, примыкающих к выделенному объему V_4 вдоль поверхности Σ_3 — представляется поверхностным интегралом и при вариациях δx^i, $\delta \mu^A$ и их производных, отличных от нуля на $\Sigma_3 + S^{\pm}$, определяется через $\delta \int_A L \, d\tau$ и δW^* из базисного уравнения.

Если δW при произвольных δx^i, $\delta \mu^A$ задается еще и внешними условиями, то это ведет к рассмотрению начальных условий, краевых условий и условий на скачке.

Общность базисного вариационного уравнения состоит в том, что из него получаются все существующие в настоящее время макроскопические модели сплошных сред (материальных континуумов и физических полей) как для обратимых, так и необратимых явлений, в том числе модели упругих и пластических сред жидкостей, газа, плазмы и т.д. Следовательно, базисные вариационные уравнения задают соотношение r, в системе, которое начальномы распределению определяющих параметров $h = (t_0, h_{t_0})$ (x^i, μ^A и их производных) ставит в соответствие процес x в системе, описываемый в терминах этих определяющих параметров или некоторых их функций.

Пример 2. Пусть E — вещественное банахово пространство, и $\|\cdot\|$ — обозначает норму в E. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $F \in C[B \times R_+, E]$. Предположим, что нас интересуют динамические свойства некоторого его решения $x_0(t)$. Если сделать замену $x = x_0 + y$, то для возмущения y получим

$$\frac{dy}{dt} = F(x_0 + y, t) - F(x_0, t) \triangleq f(y,t). \tag{2.2}$$

Пусть в начальный момент времени t_0

$$y(0) = y_0. \tag{2.3}$$

Предположим, что (по крайней мере для $y_0 \in B(y_0, b)$, $B(y_0, b) = [y \in E : \|y - y_0\| \le b]$ задача Коши (2.1)–(2.3) однозначно разрешима и решения неограниченно продолжимы на интервале R_+.

Уравнения (2.1)–(2.3) при определенных предположениях описывают, например, движение жидкости.

Для рассматриваемой системы определим следующий способ задания системы процессов, считая:

$$T = \mathcal{T}_0, \qquad \mathcal{T}_i = \{t_0\} \text{ — singl}$$

где T — частично упорядоченное множество с заданным на нем бинарным соотношением ($\le$), удовлетворяющим аксиомам частичного порядка:

C_0. *Аксиома рефлексивности*: $t \le t$.

C_1. *Аксиома транзитивности*: $t_1 \le t_2 \wedge t_2 \le t_3 \Rightarrow t_1 \le t_3$.

C_2. *Аксиома антисимметричности*: $t_1 \le t_2 \wedge t_2 \le t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$.

Пусть множества

$$H_{t_0} \equiv B(y_0, b), \quad H = B(y_0, b) \times \mathcal{T}_i, \quad \Theta = \mathcal{T}_0 \times X, \quad \Phi = \Phi_1.$$

Отношение r между H и Φ задается равенствами

$$\operatorname{dom} r = H, \quad (\forall h = (t_0, y_0) = (t_0, h_{t_0}) \in H, \ rh = \{y(\cdot, h) = \{f(y, \cdot)\}\} \text{ — singl}.$$

Аксиома начальных данных справедлива, поскольку ($\forall h \in \operatorname{dom} r$) $\mathcal{T}(y,h) = [t_0, +\infty)$, т.е. $t_0 \in \mathcal{T}(y,h)$, а в силу единственности rh имеем

$$(\forall (t_0, h_{t_0}) \in H) \bigcup_{x \in rh} \{y(t_0, t_0, h_{t_0})\} = \{y_0\} \text{ — singl}.$$

Таким образом, для системы (2.1)–(2.3) возможно задание системы процессов.

Пример 3. Уравнение, описывающее движение опертого стержня, подверженного периодической во времени сжимающей нагрузке, имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \ t \ge 0, \tag{2.4}$$

где прогиб $w(t,x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$w(t,0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,0) = 0, \quad x = 0, \ t \ge 0; \tag{2.5}$$

$$w(t,1) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,1) = 0, \quad x = 1, \ t \ge 0. \tag{2.6}$$

Удовлетворение функции w условиям (2.2), (2.3) определим как принадлежность функции w некоторому классы R.

В уравнении (2.4) β является константой и нагрузка предполагается равной

$$p(t) = \left(\frac{p_0}{p_{\text{кр}}}\pi^2\right)\cos wt, \tag{2.7}$$

где $p_{\text{кр}}$ — критическая Эйлерова нагрузка, соответствующая постоянной силе, и p_0 — амплитуда периодической приложенной нагрузки.

Для однозначного определения движения необходимо задать начальные условия

$$w(0,x) = \varphi(x), \qquad \varphi(x) \in E_1, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \qquad \psi(x) \in E_2, \tag{2.9}$$

где гладкость функций обеспечивает существование и единственность решений задачи (2.4)–(2.9).

Приведенная выше система определяет следующий способ задания системы процессов:

$$\mathcal{T} = [0,+\infty) = R_+, \qquad \mathcal{T}_i = \{0\} = \text{singl}, \qquad \mathcal{T}_i = \mathcal{T},$$
$$H_{t_0} = R \cap E_1 \cap E_2, \qquad H = [0,+\infty) \times R \cap E_1 \cap E_2.$$

Φ — множество функций $w : [0,1] \times \mathcal{T} \to \mathcal{D} \subset R$, $\operatorname{dom} w \subseteq \mathcal{T}$, r — функциональное отношение между H и Φ такое, что $\operatorname{dom} r \subseteq H$ (по построению выполнены все аксиомы функционирющих систем, кроме того на множествах $[0,+\infty)$, $\mathcal{T}$, $[0,1]$ задана некоторая структура A с частичным отношением порядка). Пусть нас интересуют решения системы (2.4), имеющие все производные до четвертого порядка включительно, т.е. $w \in C^4[[0,1],\mathcal{T}]$. Тогда примем $X^t \equiv \mathcal{D} \equiv X$.

Очевидно по построению, в силу выполнения условий единственности имеет место обычная аксиома начальных данных. Таким образом, функции

$w(t, x)$ являются процессами в смысле приведеного определения системы процессов.

Пример 4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t, x, u), \tag{2.10}$$

где x — $2n$-мерный вектор, u — r-мерный вектор, F — $2n$-мерная вектор-функция.

Приведенная система описывает движение некоторого управляемого объекта с фазовыми координатами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^{2n}) \in X \subseteq R^{2n}$ и управляющими органами $u = u(t) = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$, где u принадлежит некоторому пространству U^t. При известных начальных данных $x(t_0) = x_0$ и определенном управлении в пределах довольно широких допущений на функцию F, система (2.7) имеет единственное решение (теорема Каратеодори) $x = x^p(t) = x(t, x_0, t_0, u^p)$.

Пусть x^p и u^p соответственно программное движение и программная траектория. После замены

$$x = x^p(t) - y, \qquad u = u^p(t) - v$$

получим общепринятую форму уравнений для программного движения управляемого объекта

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + \mathcal{D}(t, y, v).$$

Далее будем считать, что $A(t)$, $B(t)$ — вещественные, непрерывные матрицы, заданные при $t \geq 0$ с ограниченными элементами и

$$\|\mathcal{D}(t, y, v)\| \leq L(\|y\| + \|v\|)^{1+\alpha},$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $L = \mathrm{const}$. Зададим систему процессов следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathcal{T} = R_+, \qquad \mathcal{T}_i = \{t_0\} = \mathrm{singl}, \qquad \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}, \\ H^0_{t_0} = \{x^0\}, \qquad U^0_{t_0} = u^{t_0}, \qquad H_{t_0} = U^{t_0} \times \{x^0\}, \\ H = U^t \times \{x^0\} \times \{t_0\}, \qquad X^t = \{x : x \in \mathrm{range}\, x\} \times U^t, \end{gathered}$$

Φ — множество функций x из $\mathcal{T}$ в X, $\mathrm{dom}\, x \subseteq \mathcal{T}$, r — отношение между H и Φ. Кроме того, на множестве $\mathcal{T}$ задана структура A с отношением частичной упорядоченности.

По построению, в силу выполнения условий единственности выполняется аксиома исходных данных (в некоторых частных случаях классическая аксиома исходных данных).

Таким образом, решения системы (2.10) являются процессами в смысле определения системы процессов.

3. Меры состояния процессов

Процессы, рассматриваемые в механике сплошной среды, аэрогазодинамике, магнитной гидродинамике, химической технологии, термоядерном синтезе и т.д. описываются, как известно, дифференциальными уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными, интегральными либо функционально-дифференциальными, уравнениями, неравенствами или включениями. Предположим, что исследуемый процесс полностью характеризуется системой функций $\psi_i(t,x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$, которые определены в ограниченной области Ω пространства R^m при $t \in T_0$, $x \in \Omega$. Функции $\psi_i(t,x)$ $\forall t \in T_0$ удовлетворяют некоторым граничным условиям, а при $t = t_0 \in T_i$, $T_i \in R$ — начальному условию $\psi_{i0}(x) = \psi_i(t_0,x)$, $i = 1,2,\dots,n$.

Пусть некоторый другой процесс в рассматриваемой системе, который примем за эталонный, номинальный, невозмущенный процесс описывается системой функций $\psi_i^*(t,x)$, $i = 1,2,\dots,n$. Всякий, отличный от невозмущенного, процесс

$$\varphi_i(t,x) \equiv \psi_i(t,x) - \psi_i^*(t,x) \qquad i = 1,2,\dots,n$$

называется возмущенным.

Если в системе нет других факторов, которые влияют на процесс, кроме начальных условий, то невозмущенному процессу соответствует соотношение $\varphi_i(t,x) \equiv 0$, $\forall i \in [1,n]$, но каждому распределению $\varphi_{i0}(x)$ соответствует определенная зависимость $\varphi_i(t,x)$, $i \in [1,n]$, $t \in T_0$, $x \in \Omega$, которая является возмущенным процессом.

3.1. Некоторые классы функций. При формулировках условий о мерах, применяемых при исследовании устойчивости процессов, применяются функции, обладающие специальными свойствами, которые определим так:

$K = \{a \in C[R_+, R_+] : a(u)$ строго возрастающая по u и $a(0) = 0\}$;

$L = \{b \in C[R_+, R_+] : b(u)$ строго убывающая по u и $\lim b(u) = 0$ при $u \to \infty\}$;

$KL = \{c \in C[R_+^2, R_+] : c(t,s) \in K$ при каждом s и $c(t,s) \in L$ при каждом $t\}$;

$CK = \{d \in C[R_+^2, R_+] : d(t,s) \in K$ при каждом $t\}$;

$\Gamma = \{\rho \in C[\Phi \times R_+, R_+^k] : \inf \rho[\varphi, t] = 0\}$;

$\Gamma_0 = \{\rho \in \Gamma : \inf_\varphi \rho[\varphi, t] = 0$ при каждом $t \in R_+\}$.

Здесь Φ — заранее заданное допустимое множество процессов $\varphi(t,x)$. Символом φ_H будем обозначать допустимое множество (пространство) начальных состояний $\varphi_0(x)$ процесса.

Рассмотрим теперь некоторые меры, встречающиеся при исследовании устойчивости процессов.

3.2. Мера А. М. Ляпунова. Пусть совокупность функций $q^1(t), \dots, q^k(t)$, $\dot q^1(t), \dots, \dot q^k(t)$ удовлетворяет уравнениям движения материальной системы в виде:

$$\frac{d^2q^s}{dt^2} = Q^s(t, q^1, \dots, q^k, \dot q^1, \dots, \dot q^k), \qquad s = 1, 2, \dots, k,$$

где Q^s — известные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей. Обозначим $\dot q^1(t) = q^{k+1}(t)$, ..., $\dot q^k(t) = q^{2k}(t)$. Движение, описываемое совокупностью функций $q_0^1(t), \dots, q_0^{2k}(t)$ назовем невозмущенным. Остальные движения, возможные для данной системы, будем называть возмущенными.

Пусть заданы функции $\Phi_1(q^1, \dots, q^{2k}, t)$, ..., $\Phi_n(q^1, \dots, q^{2k}, t)$ величин q^s и t. Предположим, что величины q^s и функции Q_i безразмерные и введем обозначения

$$\rho_0(q(t), t) = \max_{1 \le s \le 2k} |q^s(t) - q_0^s(t)|,$$

$$\rho(q(t), t) = \max_{1 \le i \le n} |x_i(t)|,$$

где $x_i(t) = Q_i(q^1, \dots, q^{2k}, t) - \Phi_i(q_0^1, \dots, q_0^{2k}, t)$.

При рассмотрении вопроса устойчивости предполагается, что выполняются такие условия, при которых функции $x_i(t)$ непрерывны для любых $t \ge t_0$, а функции Φ_i непрерывно зависят от q^s и t.

Меры ρ_0 и ρ имеют следующие свойства.

D_0. Мера ρ_0 — вещественная неотрицательная функция, обращающаяся в нуль на невозмущенном движении $q_0^s(t)$ при любом $t \ge t_0$.

D_1. Мера ρ — вещественная неотрицательная функция, обращающаяся в нуль на невозмущенном движении $q_0^s(t)$ при любом $t =\ge t_0$

D_2. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство $\rho(q(t_0), t_0) < \varepsilon$ выполняется, как только $\rho_0(q(t_0), t_0) < \delta$.

D_3. Мера ρ непрерывна по t при любых $t \ge t_0$.

D_4. Для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что неравенство $\rho_0(q(t_0), t_0) < \varepsilon$ выполняется, как только $\rho(q(t_0), t_0) < \delta$.

Свойство D_4 является дополнительным ограничением на свойства функций Φ_i, но именно при нем А. М. Ляпунов сформулировал определение устойчивости, основанное на неравенствах $\rho(q(t_0), t_0) < \delta$ и $\rho(q(t), t) < \varepsilon$, которое получило преобладающее значение.

Заметим, что А. М. Ляпунов сформулировал и общее определение устойчивости, основанное на неравенствах $\rho_0(q(t_0), t_0) < \delta$ и $\rho(q(t), t) < \varepsilon$.

3.3. Мера В. И. Зубова. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s\left(t, x^1, \dots, x^k, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \dots\right) \tag{3.1}$$

$$(i, s = 1, 2, \dots, n; \; j = 1, 2, \dots, k),$$

правые части которой заданы и непрерывны в некоторой области $G \subset R^n$. Предполагается, что для любого элемента $\varphi \in \Phi$ (Φ — функциональное пространство, метрическое или линейное нормированное, элементами которого являются векторные функции $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^{\mathrm{T}}$, где $\varphi_i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — заданы в R^k) можно построить решение $u = u(\varphi, t)$ такое, что $u(\varphi, t)$ определено при всех $t \in \mathcal{T}$ и $u(\varphi, t) \in \Phi$, $\forall t \in \mathcal{T}$, $u(\varphi, 0) = \varphi$. Кроме того, $u(\varphi, t)$ непрерывно по обоим аргументам и при $\varphi = 0$ имеет место равенство $u(\varphi, t) = 0$.

Рассматривается мера $\rho(p, q)$, удовлетворяющая свойствам метрического расстояния. А именно, предполагается выполнение следующих соотношений:

E_0. $\rho(p, q) = 0$ при $p = q \in R$.

E_1. $\rho(p, q) = \rho(q, p)$ при любых $p, q \in R$.

E_2. $\rho(p, q) \le \rho(p, z) + \rho(z, q)$ при любом $z \in R$.

С помощью меры ρ измеряются начальные возмущения и текущее состояние процесса (решения $u(\varphi(t))$ системы (3.1)).

Нетрудно заметить, что определения устойчивости формулируются при этом на основе неравенств для одной меры.

3.4. Мера А. А. Мовчана. Рассматривается абстрактный процесс $\varphi(t_0; \varphi_0, t)$, определенный аксиоматически (выполняются аксиомы B_0–B_2). Процесс $\psi^*(t)$, определенный при всех $(\varphi(t))$, принимается за невозмущенный. Для любой пары (φ, t) любого процесса вводятся меры $\rho_0(\varphi, t)$ и $\rho(\varphi, t)$, обладающие свойствами:

F_0. Мера $\rho_0(\varphi, t)$ — вещественное неотрицательное число для любой пары (φ, t) любого процесса, причем

$$\rho_0(\psi^*(t), t) \equiv 0 \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0.$$

F_1. Мера $\rho(\varphi, t)$ — вещественное неотрицательное число для любой пары (φ, t) любого процесса, причем

$$\rho(\psi^*(t), t) \equiv 0 \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0.$$

F_2. Мера $\rho(\varphi, t)$ непрерывна по мере $\rho_0(\varphi, t)$ (равномерно) на данном множестве $\mathcal{T}_0^* \subseteq \mathcal{T}_0$.

F_3. Для любого невырожденного процесса $\varphi(t_0, \psi^*, t)$ в промежутке его определения, вещественная функция $\rho(\varphi(t_0, \psi^*), t, t)$ аргумента t непрерывна по $t \in \mathcal{T}_0$.

Меры ρ_0 и ρ, удовлетворяющие свойствам F_0–F_3 можно получить, если в множестве Φ ввести метрики $\rho_1(p, q)$, $\rho_2(p, q)$, удовлетворяющие аксиомам E_0–E_2 метрического пространства за исключением требования: из $\rho_1(p, q) = 0$, $\rho_2(p, q) = 0$ следует $p = q$. Далее следует принять

$$\begin{aligned} \rho_0(\varphi, t) &= \rho_1(\varphi, \psi^*(t)) + \rho_2(\varphi, \psi^*(t)), \\ \rho(\varphi, t) &= \rho_2(\varphi, \psi^*(t)). \end{aligned}$$

Свойство F_3 имеет место всегда, когда процесы $\varphi(t_0, \psi_0^*, t)$ непрерывны по мере ρ_2.

Мерой ρ_0 измеряются начальные возмущения, а мерой ρ — текущее состояние абстрактного процесса.

3.5. Мера В. М. Матросова. Вводится промежуток $\mathcal{T} = [0, \tau] \subseteq \mathcal{T}_0$ ($\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$), множества $M \subset \Gamma = \mathcal{T}_0 \times E$, $M_0 \subset \mathcal{T}_0 \times H_0$ такие, что их сечения не пустые и неотрицательные функционалы $\rho_M : \mathcal{T} \times E \to R^1$, $\rho_M^0 : \mathcal{T}_0 \times H_0 \to R^1$, $\rho_M(t, \varphi) = d_t(\varphi, M(t))$, $d_{t_0}(\varphi, M(t_0)) = \rho_{M_0}^2(t_0, \varphi_0)$, удовлетворяющие условиям:

G_0. $d_t(\varphi, M(t)) = 0$ при $(t, \varphi) \in M$.

G_1. $d_{t_0}^0(\varphi, M_0(t_0)) = 0$ при $(t_0, \varphi_0) \in M$.

В частности, можно взять

$$d_t(\varphi, M(t)) = d(\varphi, M(t)) = \inf_{\varphi' \in M(t)} \|\varphi - \varphi'\| \qquad \text{при} \quad (t, \varphi) \in \mathcal{T} \times E;$$

$$d_{t_0}^0(\varphi_0, M_0(t_0)) = d^0(\varphi_0, M_0(t_0)) = \inf_{\varphi_0' \in M_0(t_0)} d^0(\varphi_0, \varphi_0') \quad \text{при} \quad (t_0, \varphi_0) \in \mathcal{T}_0 \times H_0.$$

Здесь E — некоторое банахово пространство, $H_0 \subset E$, $d(\varphi, \varphi')$ — метрика пространства E, $d^0(\varphi_0, \varphi)$ — собственная метрика на H_0, превращающая его в метрическое пространство.

Мера $d_{t_0}^0$ используется для измерения отклонения начальной точки φ_0 от начального множества $M_0(t_0)$; мера d_t для измерения отклонения процесса $x(t)$ от множества $M(t)$.

3.6. Мера Т. К. Сиразетдинова. Результатом измерения процесса $\varphi(t, x)$ является функционал, определенный на множестве состояний $\varphi \in \Phi$ в фиксированный момент $t \in \mathcal{T}_0$. Мерой называется вещественный функционал $\rho = \rho[\varphi, t]$, определенный для каждого фиксированного момента времени $t \in \mathcal{T}_0$ на множестве вектор-функций $\varphi(t, x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющий определенным условиям, так что для процесса $\tilde{\varphi}(t, x)$ выполняются аксиомы B_0—B_2 и существует некоторый процесс $\tilde{\varphi}(t)$, определенный при всех $t \in \mathcal{T}$. Для любой пары (φ, t) любого процесса вводятся меры $\rho_H[\varphi, t]$ и $\rho[\varphi, t]$, обладающие свойствами:

H_0. Мера $\rho_H = \rho_H[\varphi, t_0]$ — вещественное число, которое приведено в соответствие паре (φ, t_0) начального состояния процессов в момент $t_0 \in (0, t)$, причем $\rho_H[\tilde{\varphi}, t_0] \le 0$, $t_0 \in (0, t)$.

H_1. Мера $\rho = \rho[\varphi, t]$ — вещественное число, которое приведено в соответствие каждой паре (φ, t) любого процесса, причем $\rho[\tilde{\varphi}, t] \le 0$.

H_2. Мера $\rho[\varphi, t]$ непрерывна по мере $\rho_H(\varphi, t_0)$ (равномерно) на данном множестве $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}$.

H_3. Выполняется условие F_3.

Условия $\rho_H[\tilde{\varphi}, t_0] \le 0$ и $\rho[\tilde{\varphi}, t] \le 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$, $t_0 \in (0, t)$ указывают на то, что процесс $\tilde{\varphi}(t)$ определен в области неположительности мер ρ_H и ρ.

В случае конечномерного числа параметров q^i $(i = 1, 2, \dots, 2k)$, характеризующих состояние рассматриваемого объекта, можно принять

$$\rho = \sup_{t \in [0, +\infty[} \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + \dots + (q^{2k})^2}; \qquad \rho_H = (\rho)_{t_0}.$$

3.7. Векторные меры. Пусть состояние абстрактного процесса $\varphi(t_0, \varphi_0, t)$, определенного согласно аксиомам B_0–B_2 характеризуется с помощью векторных мер

$$\rho_H(\varphi, t_0) = (\rho_H^1(\varphi, t_0), \dots, \rho_H^m(\varphi, t_0))^{\mathrm{T}}; \tag{3.2}$$

$$\rho(\varphi, t) = (\rho_1(\varphi, t), \dots, \rho_n(\varphi, t))^{\mathrm{T}}, \tag{3.3}$$

координаты которых могут принимать и отрицательные значения. С векторными мерами ρ_H и ρ нетрудно сваязать следующие скалярные меры

$$\rho_{H0}(\varphi, t_0) = \max_{1 \le i \le m} \rho_H^i(\varphi, t_0);$$

$$\rho_{H1}(\varphi, t_0) = d^{\mathrm{T}} \rho_H(\varphi, t_0), \qquad \text{где } d \text{ — постоянный вектор}$$

$$\rho_{H2}(\varphi, t_0) = \sum_{i=1}^{m} \rho_H^i(\varphi, t_0);$$

$$\rho_0(\varphi, t) = \max_{1 \le j \le n} \rho_j(\varphi, t);$$

$$\rho_1(\varphi, t) = e^{\mathrm{T}} \rho(\varphi, t), \qquad e \text{ — постоянный вектор};$$

$$\rho_2(\varphi, t) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j(\varphi, t).$$

Заметим, что если пары мер (ρ_{H0}, ρ_0), (ρ_{H1}, ρ_1), (ρ_{H2}, ρ_2) удовлетворяют свойствам, приведенным в п. 3.1–3.6, то векторные меры (3.2), (3.3) являются обобщением рассмотренных мер.

Векторной мерой $\rho(\varphi, t)$ текущего состояния процесса называется вещественный вектор, координаты которого положительные или отрицательные числа, соответствующие каждой паре (φ, t) любого процесса, удовлетворяющего аксиомам B_0–B_2.

Векторной мерой $\rho_H(\varphi, t_0)$ начальных состояний процесса называется вещественный вектор, координаты которого положительные или отрицательные числа, соответствующие каждой паре (φ, t_0) начального состояния процесса в момент времени $t_0 \in \mathcal{T}_i$.

Векторная мера $\rho(\varphi, t)$ непрерывна по мере ρ_H, если для любой пары мер (ρ_{Hk}, ρ_k), $k = 0, 1, 2$, существвют пары чисел $\varepsilon_k > 0$ и $\delta_k(\varepsilon_k, t_0) > 0$ такие, что

$$\rho_k(\varphi, t) < \varepsilon_k, \qquad k = 0, 1, 2,$$

если только $\rho_{Hk}(\varphi, t) < \delta_k$, $k = 0, 1, 2$.

Непрерывность меры ρ_H по мере ρ не предполагается.

Допустимо также, что $\rho_H(\varphi) = \rho(\varphi, t)$ при $t = t_0$. При этом состояние системы процессов при $t = t_0$ и $t \in T_0$ характеризуется одной и той же векторной мерой.

Наличие отрицательных координат $\rho_k(\varphi, t) \leq 0$, $\rho_{HS}(\varphi_0, t_0) \leq 0$ в векторах $\rho(\varphi, t)$ и $\rho_H(\varphi, t_0)$, соответственно, означает, что в рассматриваемой системе существуют процессы $\varphi_0(t)$, определенные в области неположительности мер.

Заметим, что векторные меры $\rho(\varphi, t)$, $\rho_H(\varphi, t_0)$ и их координаты могут не удовлетворять аксиомам „расстояния" в метрических пространствах. В качестве координат векторной меры $\rho(\varphi, t)$ можно принять функционалы

$$\max\left\{|\varphi|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right\}, \quad \int_\tau \varphi\, d\tau, \quad \int_\tau \varphi^2\, d\tau, \quad \int_\tau \sum_{i=1}^{n}\left\{\varphi_i^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right)^2\right\} d\tau$$

и другие.

Значение меры $\rho(\varphi, t)$ может не зависеть явно от $t \in T_0$ и значение ее координат $\rho_j(\varphi, t)$ полностью определяется состоянием $\varphi(x, t)$, т.е. $\rho = \rho(\varphi)$.

Пусть заданы векторные меры $\rho_H = \rho(\varphi)$ и $\rho = \rho(\varphi, t)$ определенные выше; векторы ρ_H и ρ таковы, что $\rho_H(0) = 0$. Начальные возмущения измеряются вектором ρ_H, а текущее состояние процесса — вектором $\rho = \rho(\varphi, t)$. Вектор $\rho_H(\varphi)$ характеризует начальные возмущения различной степени гладкости для одного процесса либо различные начальные возмущения для различных процессов в случае системы процессов.

4. Концепция устойчивости процессов

Задача качественного анализа отношения между возмущенным (фактическим) процессом и невозмущенным (эталонным, номинальным) является центральной при решении вопроса об устойчивости. Интуитивно ясно, что любые устойчивые процессы, будь то физические, химические и других типов имеют то общее, что все они сохраняют определенные собственные свойства при малых начальных отклонениях, которые не учитывались при создании математической модели процесса. Пусть D — пространство состояний процесса $\varphi(t, h_\alpha)$, где h_α — функция, учитывающая параметры процесса φ; $\alpha \in \Lambda$ — множество параметров. В пространстве D рассмотрим множество X и на X определим функционал $F(p)$, т.е. любому $p \in X$ поставим в соответствие вещественное число $F(p)$.

Предположим, что реализации процесса

$$\varphi(t, h_\alpha) = \psi(t, h_\alpha) - \psi^*(t, h_\alpha)$$

случайные и являются элементами множества X при каждом фиксированном $t \in T_0$.

Реализации процесса $\varphi(t, h_\alpha)$ при незначительном возмущении параметра $\alpha \in \Lambda$ „обволакивают" некоторый процесс $\psi^*(t, h_\alpha)$, который может быть принят за эталонный, номинальный.

Незначительное отклонение реализаций процесса $\varphi(t, h_\alpha)$ от номинального $\psi^*(t, h_\alpha)$ будет основой наших дальнейших суждений об устойчивости функционирующей системы.

4.1. Общее определение устойчивости. Чтобы дать оценки состояния процесса $\varphi(t, h_\alpha)$ при любом $\alpha \in \Lambda$ и $t \in \mathcal{T}^0$ вводится однопараметрическое семейство функционалов

$$F_\tau = F_\tau[\varphi(t, h_\alpha); t \le \tau, \ t, \tau \in \mathcal{T}_0, \ \alpha \in \Lambda]. \qquad (4.1)$$

При фиксированном значении времени τ, вещественные значения функционала F_τ оценивают величину возмущений $\varphi(t, h_\alpha)$ до значения τ включительно. Если к этому фиксированными являются параметр α и реализация $\varphi(t, h_\alpha)$, то функционал (4.1) является действительной функцией времени $t < \tau$; значение $\tau = +\infty$ допускается.

Обозначим через A множество действительных функций, определенных на $\mathcal{T}_0$. Пусть B — некоторая совокупность подмножеств множества A. Для каждого множества $\varphi \in B$ построим с помощью параметра γ совокупность B_γ подмножеств $\mathcal{D}$.

В множестве абстрактньх параметров Λ определим совокупность A подмножеств множества Λ. Для каждого D из A с помощью параметра γ построим совокупность $A_\gamma(D)$ подмножеств D.

В этих случаях в качестве параметра γ в определении совокупностей $B_\gamma(\varphi)$ и $A_\gamma(D)$ допустимо применение множеств φ из B и D_m из A.

Для характеристики значений функционала F_τ введем множество функций в $\mathcal{C}$, определенных на $\mathcal{T}_0$ и обозначим $\mathcal{C}^+$ множество их значений при каждом фиксированном $t \in \mathcal{T}_0$. Множество $\mathcal{C}$ содержит значения реализаций $\{F_\tau, \tau \in \mathcal{T}_0\}$ в качестве своих элементов. При $\tau = +\infty$ предполагается, что $F_\infty \in \mathcal{C}^\infty$; напротив, если $F_\infty \in \mathcal{C}^\infty$, то $F_\infty \notin \mathcal{C}^\infty$. Следовательно, $\{F_\tau, \tau \in \mathcal{T}_0\} \in Q$, если и только если $F_\infty \in \mathcal{C}^\infty$. Чтобы различать множества $\mathcal{C}$ в зависимости от τ и γ будем писать $\mathcal{C}^\tau_\gamma$.

Пусть $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}$ — подмножество, характеризующее длительность функционирования, а числа a и $a - 0$ будем считать различными и если $b > a - 0$, то считается, что $b \ge a$.

Определение 4.1. При заданном кортеже функционала, множеств и пространств $\langle F_\tau, B, B_\gamma, A, A_\gamma, \mathcal{T}_m, \varepsilon_0\rangle$, $0 \le \varepsilon < 1$ функционирующая система устойчива, если для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ и любого множества $\mathcal{C} \in B$ можно найти такое множество $D \in A$, что для каждого $D_1 \in A_\mathcal{C}(D)$ существует множество $\mathcal{C}_1 \in B_{D_1}(\mathcal{C})$, при котором

$$P\{F_\tau[\varphi(t, h_\alpha), t \le \tau] \in \mathcal{C}^\tau_{D_1}\} \ge 1 - \varepsilon,$$

при всех $\tau \in \mathcal{T}_m$ и $\alpha \in D_1$.

Физический смысл определения 4.1 состоит в том, что устойчивость функционирующей системы имеет место, если значения отклонений не превышают некоторых допустимых значений (находятся в множестве $\mathcal{C}^\tau_{D_1}$).

Если процесс $\varphi(t, h_\alpha)$ детерминированный, то определение 4.1 имеет следующую формулировку.

Определение 4.2. При заданном кортеже функционала, множеств и пространств $\langle F_\tau, B, B_\gamma, A, A_\gamma, T_m\rangle$ функционирующая система устойчива, если для любого множества $C \in B$ можно найти такое множество $D \in A$, что для каждого $D_1 \in A_C(D)$ существует $C_1 \in B_{D_1}(C)$, при котором

$$F_\tau[\varphi(t, h_\alpha), t \le \tau] \in \operatorname{int} \varphi^\tau_{D_1} \tag{4.2}$$

при всех $\tau \in T_m$ и $\alpha \in D_1$.

Выбор функционала F_τ, множеств и пространств, фигурирющих в определениях 4.1 и 4.2 будет проилюстрирован на двух конкретных классах систем уравнений.

Следствие 1. Система с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциалных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{4.3}$$

где $x \in R^n$, $F(t,x) : T_0 \times N \to R^n$, $N \subseteq R^n$ и выполнены условия существования и единственности решения $x(t, t_0, x_0)$ при $(t_0, x_0) \in \operatorname{int}(T_0 \times N)$. В пространстве $D = R^n$ выберем одну из мер п. 3.1. В качестве пространства абстрактных параметров Λ выберем пространство начальных значений, совпадающее с R^n, т.е. предполагается, что $N = R^n$, $T_m = T_0 = [t_0, +\infty[$, $t_0 = 0$ и $T = [0, +\infty]$. В множестве Λ зафиксируем точку α_0 и в качестве F_τ выберем функционал

$$F_\tau = F_\tau[x(t,\alpha) : t \le \tau; \tau \in T_0] = \|x(\tau, \alpha) - x(\tau, \alpha_0)\|.$$

Пусть совокупность B состоит из всевозможных множеств C неотрицательных действительных функций $\{F_\tau, \tau \in T_0\}$ вида

$$C_\theta = \{F_\tau : F_\tau < \theta; \tau \in T_0, \theta > 0\}.$$

Для значений θ_1, θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$ имеет место $C_{\theta_1} \supset C_{\theta_2}$. При этом $C^t_\theta = [0, \theta)$ для всех $t \in T$. Пусть совокупность $B(C)$ определяется с помощью параметра $\gamma \triangleq D_1$, не зависит от D^γ_1 и состоит из одного множества C: $B_{D_1}(C) = \{C\}$. Совокупность A подмножеств Λ определим так: $A_\delta = \{\alpha : \|\alpha - \alpha_0\| < \delta\}$. С помощью параметра $\gamma \triangleq C$ определим $A_\gamma(D) = A_C(D) = \{D\}$ для всех $C \in B$. На основе определения 4.2 получаем определение устойчивости Ляпунова.

Заметим, что принадлежность значений действительной функции $x(t, \alpha)$ одному из множеств B характеризует некоторое основное свойство устойчивости. В данном случае это множество C. Если же имеет место принадлежность значений функци $x(t, \alpha)$ одному из подмножеств совокупности $B_\gamma(C)$, то будет иметь место некоторое дополнитльное свойство движения.

Аналогично приведенному получаются определния асимптотической устойчивости и устойчивости при постоянно действующих возмущениях. По мере необходимости эти понятия будут определны ниже.

Следствие 2. Система с распределенными параметрами. Будем рассматривать систему (3.1) из п. 3.3, сохраняя все предположения о ней. Пусть пространство $D = \Phi$, элементами которого являются векторные функции $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, заданные в конечной области Ω пространства R^k, суммируемые на Ω вместе с $|\varphi|^p$, $p > 1$. В качестве пространства Λ выберем пространство начальных распределений $\{\varphi_{i0}(x)\}$, $\varphi_{i0}(x) = \varphi_{i0}(x_1, \dots, x_k)$, $i = 1, 2, \dots$. Зафиксируем точку $\varphi_0 \in \Lambda$ и определим функционал

$$F_\tau = F_\tau[u(\varphi, t) : t \leq \tau; t, \tau \in T_0] = p(u(\varphi, t), u(\varphi_0, \tau)),$$

где $u(\varphi, t)$ — решение системы (3.1), заданное при всех $t \in]-\infty, +\infty[$, $u(\varphi, t) \in \Phi$ при $t \in]-\infty, +\infty[$. Совокупность множеств B образуем из всевозможных множеств C_ε неотрицательных действительных функций

$$C_\varepsilon = \{F_\tau : F_\tau < \varepsilon, \tau \in T_0, \varepsilon > 0\}.$$

Очревидно, что $C_{\varepsilon_1} \supset C_{\varepsilon_2}$, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$; $C_\varepsilon^+ = [0, \varepsilon[$ для всех $t \in T$. Совокупность $B_\gamma(C)$ построим так же, како и в следствии 1. Совокупность A подмножеств Λ определим формулой $A_\delta = \{\varphi : \rho(\varphi, \varphi_0) < \delta\}$. Конструкцию множеств $A_C(D)$ сохраняем такой же, как и в следствии 1. На основе определения 4.2 нетрудно установить следующее.

Система (3.1) устойчива, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $\varphi \in \Lambda$, удовлетворяющем условию $\rho(\varphi, \varphi_0) < \delta$, имеет место неравенство $\rho(u(\varphi, t), u(\varphi_0, t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

При $\varphi_0 = 0$ это известное определение устойчивости по одной мере.

Глава I

ОБОСНОВАНИЕ МЕХАНИКИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

5. Идентификация неавтономности

Понятие „механика неавтономных систем“ подразумевает теорию движения изменяющихся во времени систем материальных точек. Систему принято называть неавтономеной, если описывающие ее дифференциальные уравнения содержат явную зависимость параметров или сил от времени. Однако это определение недостаточно для идентификации системы. Основные законы и принципы динамики не различают автономные и неавтономные системы. Их различие определяется дополнительными условиями зависимости от времени геометрических, кинематических или кинетических величин. Вторая аксиома динамики установливает связь изменения импульса p по времени и силы F в форме

$$\frac{dp}{dt} = F,$$

или в координатном виде

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

К этим дифференциальным уравнениям необходимо добавить информацию о действующих силах F, их природе, происхождении, зависимости от положения $r \in R^3$, скорости v и времени t, т.е.

$$F = F(r, v, t) \qquad \text{либо} \qquad F_i = F_i(y, \dot{y}, t), \quad i = 1, 2, 3$$

и информацию об импульсе $p = mv$.

Вектор импульса по определению — это произведение массы m на скорость v. Поэтому необходима дополнительная информация о массе, так как она может являться постоянной величиной $m(t) = m(t_0)$, функцией времени $m = m(t)$, функцией координат $m = m(y)$ или скорости $m = m(v)$. Отсюда ясно, что неавтономность может появляться за счет изменения инерционного коэффициента — массы или любого параметра силы с течением времени. Можно заметить, что дифференциальные уравнения движения механической системы могут быть неавтономными и в том случае, если в них явно не фигурирует время. Так, например, прямолинейное движение материальной точки переменной массы $m = m(t)$ при отсутствии внешних сил описывается дифференциальным уравнением

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dm}{dt}v_r, \qquad v_r = \text{const},$$

или

$$d\dot{x} = v_r\frac{dm}{m}.$$

Это дифференциальное уравнение по внешнему виду нельзя идентифицировать как автономное или неавтономное. Неавтономность устанавливается путем анализа изменения массы $m = m(t)$.

Зависимость силы от времени t будем различать на основе двух признаков

1. „Натуральная" зависимость;
2. „Искусственная" зависимость.

Натуральная зависимость формируется из основных законов естественных наук, а искусственная — на основании наложеных на систему связей, стесняющих движение ее элементов. Связи записываются в виде соотношений:

— геометрических (конечных или дифференциальных);

— кинематических (интегрируемых и неинтегрируемых).

Пример. Дифференциальные уравнения движения материальной точки постоянной массы на сфере $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2$ при отсутствии внешних сил, записываются в виде

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y,$$

если сфера имеет постоянный или переменный радиус $r(t)$. Этот пример ясно показывает, что определение неавтономности следует согласовывать со связями, учитывающими и граничные условия для данной системы.

Определение 5.1. Систему будем называть неавтономной, если описывающие ее поведение дифференциальные уравнения или дополнительные связи явно зависят от времени или известных функций времени.

Автономные связи в классической динамике называются склерономными или стационарными, а неавтономные — реономными или нестационарными. Непустое множество материальных точек, стесненных неавтономными связями, будет представлять собой реономную систему.

В этой главе предлагается вариант изменения общепринятых соотношений и формул механики реономных систем. Рассмотрим вначале основные идеи подхода на модели одной точки, движенние которой может быть стеснено одной или большим числом неавтономных связей. Голономную двухсторонную связь, наложенную на точку M, принято выражать соотношением

$$f(r,t) = 0, \qquad f \in C^1,$$

где r — радиус-вектор точки. В прямоугольной ортогональной системе координат имеем

$$f(y,t) = 0, \qquad y \in R^3,$$

где $y = (y^1, y^2, y^3)^{\mathrm{T}}$.

Время t здесь входит через некоторую функцию $\tau = \tau(t)$, удовлетворяющую уравнению размерности связи. Поэтому уравнение реономной двухсторонней голономной связи можно записать в виде

$$f(r, \tau) = 0 \qquad \text{или} \qquad f(y, \tau) = 0. \tag{5.1}$$

Пусть в случае $\tau = \mathrm{const}$ уравнение связи определяет некоторую поверхность S, размерность которой равна числу координат y^1, y^2, y^3 уменьшенном на число связей, т.е.

$$\dim S = 3 - 1 = 2.$$

Между тем, если $\tau = \tau(t)$, то рассматриваемая поверхность изменяется в зависимости от этого параметра. Следовательно, размерность изменяющейся поверхности

$$\dim S = 2 + 1,$$

где дополнительный параметр τ — известная функция времени. Из соотношений реономной связи можно определить одну координату y^i как функцию остальных двух координат y^α $(\alpha = 1, 2)$ и параметра τ, если $\partial f/\partial y \neq 0$. Связь $f(y, \tau) = 0$ допускает движение в окрестности неподвижной точки $M_0(y_0) \in E^3$ только при условии $\partial f/\partial \tau = 0$. В самом деле, чтобы существовало решение, например, $y^3 = \varphi(y^1, y^2, \tau)$ непосредственно в окрестности точки M_0 должно быть

$$df = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y^1} = -\frac{\partial f}{\partial y^1} : \frac{\partial \varphi}{\partial y^3}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial f}{\partial y^2} : \frac{\partial f}{\partial y^3}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{\partial f}{\partial \tau} : \frac{\partial f}{\partial y^3}.$$

Соответственно этому, функция $y^3 = \varphi(y^1, y^2, \tau)$ изменяется и в случае фиксированных координат y_0^1 и y_0^2, если только $\partial f/\partial \tau \neq 0$.

Реономная связь $f(y^0, y^1, y^2, y^3) = 0$, $y^0 = \tau(t)$ будет несингулярной в точке $M_0(y_0^1, y_0^2, y_0^3)$, если градент функции f в точке M_0 не обращается в нуль, т.е.

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} \neq 0.$$

Следующие примеры поясняют природу функции $\tau(t)$, удовлетворяющей уравнению размерности.

1. Пусть тяжелая материальная точка движется по горизонтальной гладкой поверхности $y^3 = \varphi(t)$. Функция $\varphi(t)$ показывает, что поверхность $f = y^3 - \varphi(t) = 0$ изменяется в течение времени t. Видно, что $\tau = \varphi(t)$, а связь $f(y^3, \tau) = 0$. Физической размерностью параметра τ является длина L, что обозначим $[\dim \tau] = L$.

Параметрический вид связи $y^3 = \tau(t)$ необходимо отличать от движения точки по закону $y^3 = \tau(t)$, так как связь действует на точку силой, называемой реакцией связи.

2. Пусть точка движется по подвижной поверхности

$$a(t)y^1 + b(t)y^2 + cy^3 = 0, \qquad c = \text{const}.$$

Реономная связь может быть записана

$$f(\tau, y^1, y^2, y^3) = \tau y^1 + b(\tau)y^2 + cy^3 = 0,$$

где роль τ выполняет коэффициент $a(t) = \tau \to t = t(\tau)$. Если для τ сопоставить символ координат с нулевым индексом y^0, что можно всегда сделать, то связь $f(\tau, y) = 0$ можно записать в параметрическом виде

$$y^3 = y^3(y^0, y^1, y^2), \qquad y^0 = \tau(t)$$

Предположим, что $b = 0$ и $a = \operatorname{tg}\omega t$, где ω — частота вращения плоскости $y^3 = -((\operatorname{tg}\omega t)/c)y^1$ вокруг оси y^2. В качестве $\tau = y^0$ выберем безразмерную функцию ωt, т.е. $\tau = y^0 = \omega t$. Уравнение связи в этом случае имеет вид

$$y^3 + \frac{\operatorname{tg} y^0}{c} y^1 = 0.$$

Если в качестве параметра τ выбрать время t, т.е. $\tau = t = y^0$, то получаем то же выражение

$$y^3 + \frac{\operatorname{tg}\omega y^0}{c} y^1 = 0.$$

При этом изменяется только выбор функции y^0 в зависимости от геометрического или кинематического характера связи.

Приведенные примеры движения точки по подвижным поверхностям S показывают, что движение точки по „схожим" геометрическим объектам определяется еще одной добавочной координатой $\dim S = 2 + 1$.

Рассмотрим движение точки по линии, уравнение которой определяется двумя подвижными поверхностями

$$f_1(y^0, y^1, y^2, y^3) = 0, \qquad y^0 = \tau(t),$$
$$f_2(y^0, y^1, y^2, y^3) = 0.$$

или одной подвижной поверхностью $f_1 = 0$ и одной неподвижной $f_3(y^1, y^2, y^3) = 0$. Перемещение dy в окрестности некоторой точки $M = f_1 \cap f_2$ удовлетворяет уравнениям

$$df_\sigma = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f_\sigma}{\partial y^i} dy^i = 0, \qquad \sigma = 1, 2.$$

Для несингулярной матрицы $(\partial f_\sigma / \partial y^i)$ весегда можно найти две координаты y как функцию третьей и добавочной координаты y^0,

$$y^2 = y^2(y^0, y^1), \qquad y^3 = y^3(y^0, y^1).$$

В этом случае можно сказать, что размерность реономной линии $M = f_1 \cap f_2$ равна 2,т.е.

$$\dim M = 1 + 1.$$

В классической механике принято, что число степеней свободы материальной точки стесненной удерживающими связями равняется $n = 3 - k$. Следовательно, в том положении, в котором связи

$$f_\sigma(y, \tau) = 0, \quad \tau = \tau(t), \qquad \sigma = 1, 2, 3,$$

число степеней свободы точки равно нулю. Между тем, это имеет место только для случая склерономных связей

$$\psi_\sigma(y) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, 3.$$

„Пересечение" реономных связей представляет собой функцию добавочной реономной координаты $M(\tau) = f_1 \cap f_2 \cap f_3$. Возможность перемещения $M(\tau)$ определяется изменением хотя бы одной из связей в течение времени t. Пересечение голономных реономных связей также представляет собой связь, ограничивающую движение материальной точки.

Аналогично выражению для двухсторонней связи односторонние голономные связи записываются в виде $f(y, t) \geq 0$ или $f(y^0, y^1, y^2, y^3) \geq 0$, $y^0 = \tau(t)$.

Перейдем к рассмотрению преобразования уравнений связей. Подходящим выбором системы координат, голономные связи допускают приведение к простой координатной форме. Для подвижных поверхностей удобно выбирать прямоугольные системы координат y. Изменение связей в течение времени приводит к искривлению поверхности. Из-за этого полезно рассматривать криволинейные системы координат с координатными векторами $g = (g_1, g_2, g_3)$. Условия инерциальности координатных векторов можно получить из сравнения их с каким-либо ортонормированным инерциальным базисом $e = (e_1, e_2, e_3)$, для которого

$$\frac{de_i}{dt} = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.2}$$

Если существует взаимно однозначное преобразование систем координат $y = y(x)$ и $x = x(y)$, то радиус-вектор точки M можно представить в виде

$$y^i e_i = y^i \frac{\partial r}{\partial y^i} = y^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial r}{\partial x^k} = y^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_k,$$

где очевидно

$$g_k = \frac{\partial r}{\partial x^k} = g_k(x^1, x^2, x^3).$$

При условии $\|\partial y^i / \partial x^k\| \neq 0$ получаем

$$e_i = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_i \iff g_i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} e_k.$$

Так как

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{\partial^2 x^2}{\partial y^i \partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\frac{dx^l}{dt}g_k + \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{dg_k}{dt} = \left(\frac{dg_m}{dt} - \left\{ {k \atop m\ l} \right\}\frac{dx^l}{dt}g_k\right)\frac{\partial x^m}{\partial y^i},$$

где $\left\{ {k \atop m\ l} \right\}$ символы Кристоффеля, то

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{Dg_m}{dt}\frac{\partial x^m}{\partial y^i}$$

или

$$\frac{Dg_k}{dt} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{de_i}{dt}.$$

Учитывая (5.2), видим, что для инерциального координатного базиса (g_1, g_2, g_3) необходимо, чтобы абсолютная производная координатных векторов по времени была равна нулю, т.е.

$$\frac{Dg_k}{dt} = 0.$$

Подставляя преобразование $y = y(x)$ в уравнение (5.1), получаем уравнение двусторонней голономной связи относительно криволинейной системы координат x с векторным базисом g, т.е.

$$f(x^1, x^2, x^3, \tau) = 0, \qquad \tau = \tau(t). \tag{5.3}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (5.1) реономной сввязи для каждого значения $x \in \|\partial y^i/\partial x^k\| \neq 0$, для которого градиент функции f отличен от нуля. уравнение реономной связи (5.3) принимает более простой вид чем уравнение (5.1). Подходящим выбором координат x уравнение связи в этом случае можно привести к уравнениям координатных поверхностей.

Пример. Уравнение сферы, радиус которой функция времени в прямоугольной системе координат y будет $\delta_{ij}y^iy^j = r^2(t)$, а в сферической системе координат $x^1 = \varphi$, $x^2 = \theta$, $x^3 = r$ выразится так: $x^3 = r(t) = x^0(t)$, где нулевой индекс показывает, что для добавочной реономной координаты выбран именно радиус сферы $x^0 = r(t)$.

При переходе от одной системы координат к другой, т.е. при преобразовании уравнений связей необходимо учитывать то, что изменяется вид уравнений связи, но связь, как механический объект, остается такой же, какой она была независимо от системы координат и их преобразования. В этом смысле необходимо подчеркнуть, что в криволинейной системе координат следует различать уравнения реономных связей, например, в виде

$$f(x^k, x^0(t)) = x^k - x^0(t) = 0, \qquad k = 1 \quad \text{или} \quad k = 1, 2$$

и конечные уравнения движения: $x^i = x^i(t)$, хотя они одного и того же вида. При преобразовании связей размерность пространства состояний не изменяется. Связь (5.3) разрешает $2+1$ перемещение, а при движении точки по реономной линии размерность пространства состояний $1+1$. Отсюда ясно, что точечным преобразованием реономную связь $f(x,\tau)=0$ можно привести к параметрическому виду

$$y^i = y^i(x^0, x^1, x^2),$$

а при наличии двух голономных реномных связей $f_1(x^1,x^2,x^3,x^0)=0$ и $f_2(x^1,x^2,x^3,x^0)=0$ параметрический вид тех же связей будет:

$$y^i = y^i(x^0, x^1), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда получаем соответствующее векторное выражение $r = r(x^0,x^1,x^2)$ или $r = r(x^0,x^1)$ параметрических уравнений двухсторонних голономных реономных связей.

Координатный вектор

$$g_0 = \frac{\partial r}{\partial x^0} = g_0(x^0, x^1, x^2),$$

функция реономной координаты и координат пространства состояний.

6. Основные понятия динамики реономных систем

Приведем некоторые определеня, принятые в динамике реономных систем.

Определение 6.1. Реономной механической системой называется непустое множество материальных точек, движение которых стеснено непустым множеством реономных связей.

Если существует хотя бы одна материальная точка, движение которой ограничено хотя бы одной реономной связью, то реономная система существует.

Механическую реономную систему представляет, например, N материальных точек M_ν, $\nu = 1,\ldots,N$, с массами m_ν, движение которых стесняют k наложенных реономных связей

$$\varphi_\mu(r_1,\ldots,r_N,v_1,\ldots,v_N,\tau(t)) = 0, \qquad \mu = 1,2,\ldots,k,$$

где r_ν — радиус-вектор точки M_ν, v_ν — вектор скорости, $\tau(t)$ — известная функция времени t.

Определение 6.2. Если заданные дифференциальные связи неинтегрируемые, то их называют неголономными связями.

Связи называются автономными, если параметр τ величина постоянная.

Связи называются голономными, если их можно привести к виду

$$f_\mu(r_1,\ldots,r_N,\tau) = 0, \qquad \tau = \tau(t).$$

Неавтономность системы или реономная природа связей выражается функцией $\tau = \tau(t) \leftrightarrow t = t(\tau)$. Так как функция τ может иметь различную физическую размерность обобщенных координат и времени, условимся ее называть реономной координатой и обозначать нулевым индексом y^0, x^0, q^0 в принятой системе координат. Сообразно этому реономные голономные связи относительно координат y можно записать в виде

$$f_\mu(y^0, y^1_{(1)}, y^2_{(1)}, y^3_{(1)}, \dots, y^1_{(N)}, y^2_{(N)}, y^3_{(N)}) = 0, \qquad y^0 = \tau(t),$$

или

$$f_\mu(y^0, y^1, \dots, y^{3N}) = 0. \tag{6.1}$$

В криволинейной системе координат x уравнения связей можно представить в виде

$$f_\mu(x^0, x^1_{(1)}, \dots, x^3_{(N)}) = 0, \qquad x^0 = \tau(t)$$

или

$$\begin{gathered} f_\mu(x^0, x^1, \dots, x^{3N}) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, k), \\ \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\right) = k, \qquad k \le 3N. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Таким способом изучение движения реономной системы, состоящей из N материальных точек, приводится к изучению движения точки на $(3N - k + 1)$-мерном многообразии M_{n+1}, где $n = 3N - k$. В каждой точке этого многообразия связи (6.2) допускают движение системы материальных точек со скоростями $\dot{x}^0, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^{3N}$. Условие на связи

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \tau}\dot{\tau} = 0,$$

можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x^1}\dot{x}^1 + \dots + \frac{\partial f_\mu}{\partial x^k}\dot{x}^k = -\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha - \frac{\partial f_\mu}{\partial x^0}\dot{x}^0,$$

где $\alpha = k+1, k+2, \dots, 3N$; $\dot{x}^0 = \dot{\tau}$.

Так как

$$\det\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\sigma}\right) \ne 0, \qquad \mu, \sigma = 1, 2, \dots, k, \tag{6.3}$$

то k координат вектора скорости $\dot{x}^\sigma$ возможно представить в виде линейной комбинации остальных $3N - k + 1$ координат вектора скорости $\dot{x}^\alpha$ и $\dot{x}^0$ изображающей точки. В окрестности $\mathcal{D}$ точки x, $x \in \mathcal{D}$ при условии (6.3) вследствие соотношений (6.1) можно определить k координат x^σ в виде функций остальных координат: $x^\sigma = x^\sigma(x^0, x^{k+1}, \dots, x^{3N})$. Тем же способом из выражений (6.1) получим

$$y^\sigma = y^\sigma(y^0, y^{k+1}, \dots, y^{3N})$$

или вследствие преобразования координат

$$y^\sigma = y^\sigma(x^0, x^{k+1}, \dots, x^{3N}). \tag{6.4}$$

Вводя обобщенные независимые координаты $q^1, q^2, \dots, q^n$ $(n = 3N - k)$, соотношения для y^σ можно записать так:

$$y^\sigma = y^\sigma(q^0, q^1, \dots, q^m), \qquad q^0 = \tau(t). \tag{6.5}$$

Подходящим выбором координатной системы зависимые координаты y^μ или x^μ можно определить как функции реономной координаты q^0 либо как некоторые постоянные. Таким способом реономное многообразие можно описать набором связей

$$y^\mu = y^\mu(q^0), \qquad q^0 = \tau(t) \quad \text{или} \quad x^k = \text{const}, \tag{6.6}$$

среди которых хотя бы одна координата должна быть функцией времени.

Так как радиус-вектор r_ν точки M_ν можно записать в виде $r_\nu = y^{3\nu-2}e_1 + y^{3\nu-1}e_2 + y^{3\nu}e_3$, то параметрические уравнения голономных реономных связей допускают представление в виде

$$r_\nu = r_\nu(q^0, q^1, \dots, q^n), \quad q^0 = \tau(t), \qquad \nu = 1, \dots, N. \tag{6.7}$$

Скорости движения материальных точек, стесненных реономными голономными связями в произвольной точке расширенного многообразия M_{n+1}, определяются формулами

$$v_\nu \overset{\text{def}}{=} \frac{dr_\nu}{dt} = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial r_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n) \tag{6.8}$$

или в координатной форме

$$\dot{y}^l = \frac{\partial y^l}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial y^l}{\partial q^0}\dot{q}^0 = \frac{\partial y^l}{\partial q^i}\dot{q}^i, \qquad l = 1, \dots, 3N.$$

Ковектор импульса. Согласно принятому определению импульса точки M_ν массы m_ν, которая движется со скоростью v_ν, имеем $p_\nu \overset{\text{def}}{=} m_\nu v_\nu$. Поэтому импульс точки M_ν определяется так

$$p_\nu = m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 = m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i.$$

Умножая каждый вектор импульса p_ν на координатные векторы $\partial r_\nu / \partial q^j$ и суммируя полученные произведеня по индексу ν, получим обобщенный ковектор импульса

$$p_j = a_{ij}\dot{q}^i, \qquad i, j = 0, 1, 2, \dots, n, \tag{6.9}$$

где

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^j} = a_{ji}(q^0, q^1, \dots, q^n) \tag{6.10}$$

инерционный тензор на $(n+1)$-мерном конфигурационном многобразии M_{n+1}. Легко заметить, что тензор a_{ij} типа $(0,2)$ и его детерминант

$$\det(a_{ij}) \neq 0, \qquad i,j = 0,1,\dots,n.$$

Это позволяет построить контравариантный инерционный тензор и сопряженную однородную линейную комбинацию обобщенных импульсов и обобщенных скоростей

$$p_j = a_{ji}\dot q^i = a_{j\alpha}\dot q^\alpha + a_{j0}\dot q^0 \tag{6.11}$$

и обратно

$$\dot q^i = a^{ij}p_j = a^{i\alpha}p_\alpha + a^{i0}p_0,$$

где $p_0 = a_{0i}\dot q^i = a_{00}\dot q^0 + a_{0\alpha}\dot q^\alpha$ — $(n+1)$-координата ковектора импульса.

Для случая голономных склерономных связей все координаты с нулевыми индексами $a_{0\alpha}$ и a_{00} равны нулю. Заметим, что в случае, когда для реономной координаты выбран параметр времени $q^0 = t$, имеем соотношение

$$p_0 = a_{0\alpha}\dot q^\alpha + a_{00}.$$

При этом следует иметь в виду, что реономная координата q^0 и соответствующий импульс p_0 появляются вследствие реономных связей.

Кинетическая энергия. В классической механике кинетическая энергия T системы точек определяется как сумма кинетических энергий точек, т.е. $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2$.

Вследствие определения векторов скорости точек (6.8) и инерционного тензора (6.10) кинетическая энергия реономной голономной системы является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2}a_{ij}\dot q^i\dot q^j, \qquad i,j = 0,1,\dots,n \tag{6.12}$$

или

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta}_{T_2} + \underbrace{a_{0\alpha}\dot q^0\dot q^\alpha}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2}a_{00}\dot q^0\dot q^0}_{T_0}.$$

Кинетическую энергию системы можно выразить и как однородную квадратичную форму обобщенных импульсов. В самом деле

$$T = \frac{1}{2}a_{ij}a^{ik}p_k a^{jl}p_l = \frac{1}{2}\delta_j^k a^{jl}p_k p_l = \frac{1}{2}a^{kl}p_k p_l, \qquad (i,j,k,l = 0,1,\dots,n) \tag{6.13}$$

или

$$T = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + a^{0\alpha}p_0 p_\alpha + \frac{1}{2}a^{00}p_0 p_0.$$

Ковектор ускорения системы на многообразии M_{n+1}. Ускорение точки M_ν системы это, по определению, производная вектора скорости по времени

$$a_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial q^i}\dot q^i\right),$$

или

$$a_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i}\frac{d\dot q^i}{dt} + \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q^j \partial q^i}\dot q^j \frac{dq^i}{dt}, \qquad i,j = 0,1,\dots,n.$$

Умножая каждый вектор a_ν на координатные векторы $\partial r_\nu/\partial q^j$ и соответствующие массы m_ν, а затем суммируя по индексу ν, получаем

$$\sum_{\mu=1}^{N} m_\nu a_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^k} = \sum_{\mu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial r_\nu}{\partial q^k}\frac{d\dot q^i}{dt} + \sum_{\mu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q^i \partial q^j}\cdot\frac{\partial r_\nu}{\partial q^k}\dot q^i \frac{dq^j}{dt}. \qquad (6.14)$$

Согласно выражению тензора (6.10) легко показать, что соотношения (6.14) представляют формулы координат ковектора ускорения

$$a_k = a_{ik}\left(\frac{d\dot q^i}{dt} + \Gamma^i_{jl}\dot q^l \frac{dq^j}{dt}\right) = a_{ik}\frac{D\dot q^i}{dt},$$

так как

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q^i \partial q^j}\cdot\frac{\partial r_\nu}{\partial q^k} = \Gamma_{ij,k}$$

коэффициенты связности, согласованные символами Кристоффеля инерционного тензора a_{ij} $(i,j = 0,1,\dots,k)$.

Следует заметить, что ковектору импульса, кинетическая энергия и ковектор ускорения могут быть неавтономными величинами не только через реономную координату, но и через выражения для массы $m_\nu = m_\nu(t)$. Поэтому координаты ковектора ускорения a_k отличаются от координат вектора ускорения

$$a^i = \frac{dq^i}{dt} + \Gamma^i_{jl}\dot q^l \frac{dq^j}{dt}.$$

Ускорение в пространстве E^{3N}. Выберем координатную систему так, чтобы реономные связи допускали представление в форме (6.6). Пусть k координат $x^k = x^k(q^0)$, $q^0 = \tau(t)$ выражают связи, а остальные $3N-k$ — независимые координаты обозначим буквами q^α $(\alpha = k+1,\dots,3N)$. Тогда

$$r_\nu = r_\nu(x^1,\dots,x^k; q^{k+1},\dots,q^{3N}).$$

Скорости точек M_ν можно записать в виде

$$v_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial x^\sigma}\dot x^\sigma + \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha, \quad \sigma = 1,\dots,k; \quad \alpha = k+1,\dots,3N,$$

так как $\dfrac{\partial r_\nu}{\partial x^\sigma}\dot x^\sigma = \dfrac{\partial r_\nu}{\partial x^\sigma}\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial q^0}\dot q^0$.

Ускорения точек M_ν выражаются так:

$$a_\nu = \frac{\partial^2 r}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa}\dot x^\sigma \dot x^\kappa + \frac{\partial r_\nu}{\partial x^\sigma}\ddot x^\sigma + \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x^\sigma \partial q^\alpha}\dot x^\sigma \dot q^\alpha$$
$$+ \frac{\partial^2 r}{\partial x^\sigma \partial q^\alpha}\dot x^\sigma \dot q^\alpha + \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta + \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\ddot q^\alpha.$$

Ускорения точек M_ν выражаются так:

$$a_\nu = \frac{\partial^2 r}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa}\dot{x}^\sigma \dot{x}^\kappa + \frac{\partial r_\nu}{\partial x^\sigma}\ddot{x}^\sigma + \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x^\sigma \partial q^\alpha}\dot{x}^\sigma \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2 r}{\partial x^\sigma \partial q^\alpha}\dot{x}^\sigma \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\ddot{q}^\alpha.$$

Соотношение (6.14) преобразуется к виду

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial x^k}\cdot a_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial x^k}\cdot \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i \dot{x}^j + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial x^i}\cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial x^k}\ddot{x}^i.$$

Отсюда следует

$$a_k = g_{ki}\frac{D\dot{x}_i}{dt}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, 3N$$

или

$$a_\mu = Э_{\mu\sigma}\frac{D\dot{x}^\sigma}{dt} + g_{\mu\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt}, \qquad \mu, \sigma = 1, \dots, k,$$

где

$$Э_{\mu\sigma} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial r_\nu}{\partial x^\sigma},$$

$$g_{\mu\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial r_\nu}{\partial q^\beta} = a_{\mu\beta},$$

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial r_\nu}{\partial q^\beta}, \qquad \alpha, \beta = k+1, \dots, 3N,$$

$$\frac{D\dot{x}^\sigma}{dt} = \ddot{x}^\sigma + \Gamma^\sigma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j; \qquad \frac{D\dot{q}^\gamma}{dt} = \ddot{q}^\gamma + \Gamma^\gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

В результате преобразований тензор g_{ij} пространства E^{3N} разделен на тензор $Э_{\mu\sigma}$ и основной тензор $a_{\alpha\beta}$ конфигурационного многообразия, т.е.

$$g_{ij} = \begin{Bmatrix} Э_{\mu\sigma} & a_{\mu\beta} \\ a_{\beta\mu} & a_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}. \tag{6.15}$$

Это значит, что вектор ускорения точки M_ν представляется так

$$a_\nu = a^\sigma Э_{(\nu)\sigma} + a^\alpha g_{(\nu)\alpha}.$$

Функция ускорения. Функцию

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu a_\nu \cdot a_\nu$$

и ее аналитическое выражение будем называть функций ускорения.

Эту функцию называют иногда „энергия ускорения", „функция Аппеля" или „функция Гибса". В аналитической форме функция ускорения имеет вид

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (a_\sigma \mathcal{J}_\nu^\sigma + a^\alpha g_{(\nu)\alpha}) \cdot (a_\kappa \mathcal{J}_\nu^\kappa + a^\beta g_{(\nu)\beta}),$$

$$\sigma, \kappa = 1, 2, \dots, k; \quad \alpha, \beta = k+1, \dots, 3N; \quad \nu = 1, \dots, N$$

или

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathcal{J}_\nu^\kappa \cdot \mathcal{J}_\nu^\sigma a_\kappa a_\sigma + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu g_{(\nu)\alpha} \cdot g_{(\nu)\beta} a^\alpha a^\beta,$$

т.е.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{J}^{\sigma\kappa} a_\sigma a_\kappa + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta,$$

где

$$\mathcal{J}^{\sigma\kappa} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathcal{J}_\nu^\sigma \cdot \mathcal{J}_\nu^\kappa.$$

На $(n+1)$-мерном многообразии функция ускорения является однородной квадратичной формой $(n+1)$-координаты вектора

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a_{ij} a^i a^j, \tag{6.16}$$

где инерционный тензор $a_{ij} = a_{ji}(q^0, q^1, \dots, q^n)$ является функцией реономной координаты и координаты Лагранжа для случая постоянных масс. Если массы точек известны функции времени t, то тензор a_{ij} зависит через массы $m_\nu(t)$ и от времени t. В этом случае координаты инерционного тензора зависят от времени и для склерономных систем имеем $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}(t, q^1, \dots, q^n)$.

Приведенные аналитические выражения для основных кинематических и кинетических формул отличются от известных формул и соотношений механики. Ниже приведена систематизация известных результатов и новых предложений

Классические результаты	Новые предложения
Реономные связи	
$f_\mu(r_1, \dots, r_N, t) = 0$	$f_\mu(r_1, \dots, r_N, \tau(t)) = 0$
или	или
$r_\nu = r_\nu(q^1, \dots, q^n, t)$	$r_\nu = r_\nu(q^0, q^1, \dots, q^n),\ q^0 = \tau(t).$
Скорость	
$v_\nu = \dfrac{\partial r_\nu}{\partial t} + \dfrac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha$	$v_\nu = \dfrac{\partial r_\nu}{\partial q^0}\dot q^0 + \dfrac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha = \dfrac{\partial r_\nu}{\partial q^i}\dot q^i$
или	или
$v_\nu = (\dot q^1, \dots, \dot q^n)$	$v_\nu = (\dot q^0, \dot q^1, \dots, \dot q^n).$

Ускорение

$$a^\alpha = \frac{D\dot q^\alpha}{dt} \qquad\qquad a^\alpha = \frac{D\dot q^\alpha}{dt}, \quad a^0 = \frac{D\dot q^0}{dt}.$$

Основной (инерционный) тензор

$$a_{\alpha\beta}(t, q^1, \dots, q^n), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n, \qquad\qquad a_{\alpha\beta}(t, q^0, q^1, \dots, q^n), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\|a_{\alpha\beta}\|_n^n \neq 0 \qquad\qquad \|a_{ij}\|_{n+1}^{n+1} \neq 0.$$

Обощенные импульсы

$$p_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot q^\beta + a_{\alpha 0} \qquad\qquad p_i = a_{ij}\dot q^j = a_{i\beta}\dot q^\beta + a_{i0}\dot q^0$$

$$p_0 = p_t = -H \qquad\qquad p_0 = a_{0j}\dot q^j = a_{0\beta}\dot q^\beta + a_{00}\dot q^0.$$

Кинетическая энергия

$$T = \underbrace{\tfrac{1}{2}\dot q^\alpha \dot q^\beta}_{T_2} + \underbrace{a_{\alpha 0}\dot q^\alpha}_{T_1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}a_{00}}_{T_0}$$

$$T = \tfrac{1}{2}a_{ij}\dot q^i \dot q^j = \underbrace{\tfrac{1}{2}\dot q^\alpha \dot q^\beta}_{T_2} + \underbrace{a_{\alpha 0}\dot q^0 \dot q^\alpha}_{T_1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}a_{00}\dot q^0 \dot q^0}_{T_0}$$

или

$$T = \tfrac{1}{2}a^{\alpha\beta}(p_\alpha - a_{\alpha 0})(p_\beta - a_{\beta 0}) + \cdots$$

или

$$T = \tfrac{1}{2}a^{ij}p_i p_j = \tfrac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + a^{0\alpha}p_0 p_\alpha + \tfrac{1}{2}a^{00}p_0 p_0.$$

Функции ускорения на многообразии

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}a_{sk}\ddot q^s \ddot q^k + \Gamma_{sk,r}\dot q^s \dot q^k \ddot q^r + \left(\frac{\partial a_{sr}}{\partial t} + \frac{\partial b_r}{\partial q^s} - \frac{\partial b_s}{\partial q^r}\right)\ddot q^r \dot q^s + \left(\frac{\partial b_r}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q^r}\right)\ddot q^r$$

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}a_{ij}(a^i - Q^i)(a^j - Q^j).$$

Приведенные формулы фигурируют почти во всех дифференциальных уравнениях движения систем, а также в математических выражениях основных принципов механики.

7. Модификация основных принципов и уравнений динамики

Основные положения динамики систем со связями должны быть инвариантными относительно любых математических преобразований, так как они отражают объективные явления, независимые от той или другой координатной системы.

В инерциальных системах координат, в которых силы не влияют на тело или взаимно уравновешиваются, тело находится в покое или движется со скоростью постоянной по модулю (величине) и направлению.

Согласно этому принципу всегда можно выбрать систему координат y^1, y^2, y^3 с координатным базисом e_1, e_2, e_3, координаты которого удовлетворяют условиям (5.2) и $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Другие системы координат будем сравнивать с так выбранной ориентированный инерциальной системой координат y, e.

Принцип Даламбера. При описании движения тела относительно инерциальной и неинерциальной систем координат, значительная роль принадлежит принципу Даламбера, который устанавливает силу инерции $I = -ma$ и утверждает: любая система сил, которая действует на тело (материальную точку) уравновешивается силой инерции этого тела.

Сообразно этому утверждению, если к материальной тачке M_ν приложена равнодействующая активных сил F_ν, равнодействующая реакций реономных голономных связей и сила инерции

$$I_\nu = -m_\nu a_\nu = -m_\nu \frac{dv_\nu}{dt},$$

то выполняется соотношение

$$F_\nu + R_\nu + I_\nu = 0. \tag{7.1}$$

Силы реакции R_ν голономных связей

$$f_\mu(r_1, \ldots, r_N, \tau(t)) = 0 \tag{7.2}$$

можно разложить на две компоненты: одна из которых $F_{\nu T}$ принадлежит касательной плоскости в точке M_0, другая $R_{\nu N}$ — ортогональна к этой плоскости. Силы $F_{\nu T}$ определяются из закона трения.

Вторая компонента $R_{\nu N}$ направлена по градиенту функций f_μ т.е.

$$R_{\nu N} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \operatorname{grad}_\nu f_\mu. \tag{7.3}$$

При этом предполагается известным аналитическое выражение функций связей $f_\mu = 0$. Реакция $R_{\nu N}$ совпадает с выражением полной силы реакции R_ν, если связи идеально гладкие. Далее предполагается, что реакции связей заданы формулами (7.3). Уравнения (7.3) инвариантны относительно любых систем координат и их взаимных преобразований. В декартовой системе координат уравнения (7.1) запишем в координатном виде. Умножая векторные уравнения (7.1) запишем в координатном виде. Умножая векторные уравнения (7.1) на единичные векторы e_k, получим $3N$ скалярных дифференциальных уравнений движения

$$m_i \ddot{y}_i = Y_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}, \qquad i = 1, \ldots, 3N, \tag{7.4}$$

к которым необходимо добавить уравнения связей

$$f_\mu(y^1, \ldots\ldots, y^{3N}, \tau) = 0.$$

Здесь Y_i — координаты векторов сил, а массы $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$.

Преобразованием этих уравнений в криволинейной системе координат $x^1, \dots, x^{3N}$; $y = y(x)$ и скалярным умножением исходных векторных уравнений (7.1) и координатных векторов $\partial r_\nu / \partial x^i$ получим $3N$ ковариантных дифференциальных уравнений движения в виде

$$g_{ij} \frac{D\dot{x}^j}{dt} = X_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}, \qquad i, j = 1, \dots, 3N, \tag{7.5}$$

где

$$g_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial x^j} = g_{ji}(x^0, x^1, \dots, x^{3N}), \qquad m_\nu = \text{const}.$$

инерциальный тензор, $D\dot{x}^j/dt$ — координаты вектора ускорения и λ_μ — множители Лагранжа.

Если голономные связи заданы в параметрическом виде (6.7), то скорости движения точек, как следует из формул (6.8), имеют по $n+1$ компоненту, ориентируемых координатными векторами $\partial r_\nu/\partial q^\alpha$ и $\partial r_\nu/\partial q^0$ $(\alpha = 1, \dots, n)$. Скалярная производная векторов $\partial r_\nu/\partial q^i$, $i = 0, 1, \dots, n$, т.е.

$$(F_\nu + R_\nu + I_\nu) \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i} = 0$$

после суммирования по индексы ν приводит к $n+1$ дифференциальному уравнению движения

$$\begin{aligned} &Q_\alpha + I_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, n, \\ &Q_0^* + R_0 + I_0 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}, \qquad I_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} I_\nu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha} = -g_{\alpha i} \frac{D\dot{q}^i}{dt} = -a_\alpha, \\ Q_0^* &= \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}, \qquad R_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \operatorname{grad}_\nu f_\mu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^0}, \\ I_0 &= \sum_{\nu=1}^{N} I \cdot \frac{\partial r}{\partial q^0} = -g_{0i} \frac{D\dot{q}^i}{dt} = -g_{0i}(\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k) = -a_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что принцип Даламбера порождает $n+1$ независимых ковариантных дифференциальных уравнений движения

$$g_{\alpha i} \frac{D\dot{q}^i}{dt} = Q_\alpha, \tag{7.6}$$

$$g_{0i} \frac{D\dot{q}^i}{dt} = Q_0^* + R_0 = Q_0. \tag{7.7}$$

Из системы n дифференциальных уравнений (7.6) можно определить n обобщенных координат как фунции времени и реономной координаты. Подстановкой в уравнение (7.7) получаем

$$R_0 = g_{0i}\frac{D\dot{q}^i}{dt} - Q_0^*.$$

Принцип возможных перемещений. Понятие „возможное перемещение" предполагает любое дифференциально малое перемещение, совместимое со связями. Для системы связей $f_\mu(y,\tau) = 0$ возможные перемещения δy удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau}\delta\tau = 0.$$

Этим условиям соответствуют соотношения

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau}\delta\tau = 0,$$

если связи заданы в виде $f_\mu(x,\tau) = 0$. Вследствие условия (6.3) видно, что существует $3N + 1 - k$ независимых перемещений $\delta x^{k+1}, \ldots, \delta x^{3N}$ и $\delta\tau$. Перемещение $\delta\tau = \tau^*(t) - \tau(t)$ характеризует отклонение заданной функции $\tau(t)$ от ее возможного значения $\tau^*(t)$ в один и тот же момент времени. В этом определении перемещения содержится отличие между предлагаемым и принятым подходом в аналитической механике реономных систем.

В механике реономных систем принято определение „виртуальных" перемещений, которые не различаются для склерономных и для реономных связей. Принятым также является принцип „замороженных связей", при этом предполагается, что $\delta\tau = 0$. Однако пример маятника переменной длины $l(t)$ показывает, что действительная длина $l^* = \tau^*(t)$ может не совпадать с заданной длиной $l(t)$. Даже для случая когда длина маятника линейная функция времени, например, $l = \alpha t$, $\alpha = \mathrm{const}$ — возможное перемещение $\delta l = \delta\tau = t\delta\alpha$ при $\delta\alpha \neq 0$. Можно предположить, что $\alpha = 1$. Но это не значит, что длина равняется времени, а значит, что длина маятника изменяется на единицу длины за единицу времени. Это единичное изменение допускает возможное перемещение отличное от нуля. При связях, заданных в параметрическом виде, возможные перемещения удовлетворяют следующим соотношениям

$$\delta r_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial r_\nu}{\partial q^0}\delta q^0, \qquad \delta(q^0 - \tau) = 0. \tag{7.8}$$

Чтобы вариационные соотношения принципов механики были эквивалентны друг другу и инвариантные относительно преобразований, в них надо учитывать добавочное перемещение δq^0. Заметим, что принцип возможных перемещений устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия систем. Для того, чтобы положение системы, совместимое с двусторонними связями, было положением равновесия и покоя, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ всех сил на любых возможных перемещениях равнялась нулю.

Если в точке M_0 системы приложены равнодействющая F_ν активных сил и равнодействующая реакций R_ν связей, то согласно принципу воможных перемещений имеем соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu + R_\nu)\cdot\delta r_\nu = 0. \tag{7.9}$$

Среди множества возможных скоростей можно выделить действительные скорости $v_\nu = dr_\nu/dt$, которые в состоянии равновесия равны нулю. Поэтому из соотношений (7.9) следуют условия покоя точек систем

$$F_\nu + R_\nu = 0, \qquad \frac{dr_\nu}{dt} = 0. \tag{7.10}$$

Если связи в криволинейных координатах x заданы в аналитической форме

$$f_\mu(x^0, x^1, \dots, x^{3N}) = 0, \qquad \mu = 1, \dots, k,$$

то понаятие „все силы“ подразумевает активные силы F. Из сотношений

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i\,\delta x^i = 0, \qquad F = (X_1, \dots, X_{3N}),$$

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x^0}\,\delta x^0 + \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\,\delta x^i = 0$$

следует

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(X_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\right)\delta x^i + \sum_{\mu=0}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^0}\,\delta x^0 = 0,$$

где λ_k — неопределенные множители Лагранжа. Следя методу множителей Лагранжа, получаем $3N+1$ уравнение

$$X_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} = 0, \qquad \sum_{\mu=0}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^0} = 0.$$

Последнее уравнение будет удовлетворено, если в положении равновесия частные производные $\partial f_\mu/\partial x^0$ равны нулю.

На $(n+1)$-мерном конфигурационном многообразии из принципа возможных пермещений получается $n+1$ условие равновесия реономных систем в виде

$$Q_\alpha = 0, \tag{7.11}$$

$$Q_0^* + R_0 = 0. \tag{7.12}$$

Действительно, подставляя выражения (7.8) в (7.9), получим

$$(Q_0^* + R_0)\,\delta q^0 + Q_\alpha\,\delta q^\alpha = 0. \tag{7.13}$$

Из соотношений (7.13) следуют условя равновесия реономной голономной системы в виде (7.11) и (7.12).

Принцип Даламбера в форме Лагранжа. В аналитической динамике принцип Даламбера представляется в форме Лагранжа. А именно, в виде суммы скалярных произведений сил на возможные перемещения δr_ν точек M_ν, т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu + R_\nu + I_\nu)\cdot\delta r_\nu = 0.$$

Вследствие скалярной инвариантности этой суммы должна сохраняться математическая форма принципа относительно прямоугольных координат Декарта y, криволинейных координат x, а также относительно обобщенных координат q, т.е.

$$\left(Y_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\right)\delta y^i = \left(X_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\right)\delta x^i =$$

$$= \left(Q_\alpha - a_{\alpha j}\frac{D\dot q^j}{dt}\right)\delta q^\alpha + \left(Q_0 - a_{0j}\frac{D\dot q^j}{dt}\right)\delta q^0 = 0.$$

Из этих соотношений получаются те же дифференциальные уравнения движений (7,4), (7.5) и (7.6), (7.7).

Закон сохранения энергии. Множество возможных перемещений δq^α и δq^0 содержит и действительные перемещения dq^α и dq^0. Поэтому для действительного движения можем записать

$$(Q_\alpha + I_\alpha)\,dq^\alpha + (Q_0^* + R_0 + I_0)\,dq^0 = 0$$

или

$$(Q_i + I_i)\,dq^i + R_0\,dq^0 = 0 \qquad (Q_0 \equiv Q_0^*).$$

Из выражения кинетической энергии реономной системы

$$T = \frac{1}{2}a_{ij}\dot q^i\dot q^j, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n$$

получаем

$$I_i\,dq^i = -a_{ij}\frac{D\dot q^j}{dt}\,dq^i = -a_{ij}\dot q^i D\dot q^j = -\frac{1}{2}D(a_{ij}\dot q^i\dot q^j) = -\frac{1}{2}d(a_{ij}\dot q^i\dot q^j) = -dT,$$

так как $Da_{ij} = 0$ для постоянных масс, а абсолютный дифференциал квадратичной фомы равен обыкновенному дифференциалу той же формы. Осюда закон изменения кинетической энергии

$$dT = Q_i\,dq^i + R_0\,dq^0.$$

В случае потенциальных сил $Q_i = -\partial\Pi/\partial q^i$, потенциал Π которых зависит от координат $q^0, q^1, \dots, q^n$, получаем

$$dT + \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}\, dq^i = R_0\, dq^0.$$

При условии, что $(\partial\Pi/\partial q^i)\, dq^i = d\Pi$ — полный дифференциал потенциала Π, закон сохранения энергии получаем в виде

$$T + \Pi = \int R_0\, dq^0 + c, \qquad c = \text{const}. \tag{7.14}$$

Принцип наименьшего принуждения. Связи, наложенные на материальные точки, принуждают их отклоняться от того движения, какое они совершили бы при освобождении от связей. Квадратичная мера отклонения несвободного от свободного движения систем точек по Гауссу выражается формулой

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(a_\nu - \frac{F_\nu}{m_\nu}\right)$$

и называется принуждением или принуждением по Гауссу. Принципом наименьшего принуждения или, как его еще называют, принцип Гаусса утверждает, что среди всех возможных движений принуждение $\mathcal{Z}$ достигает минимума на действительном движении. Математически это значит, что

$$\delta\mathcal{Z} = 0$$

Для голономной системы точек, движение которых ограничено при помощи k связей, записанных в параметрической форме

$$r_\nu = r_\nu(x^1, \dots, x^k; q^{k+1}, \dots, q^{3N}),$$

принуждение в пространстве E^{3N} приводится к виду

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(a^\alpha - Q^\alpha)(a^\beta - Q^\beta) \\
&+ \frac{1}{2} a^{\mu\chi}(a_\mu - F_\mu - R_\mu)(a_\chi - F_\chi - R_\chi) = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2, \\
&\alpha, \beta = 1, \dots, \underbrace{3N - k}_{n}; \quad \mu, \chi = n + 1, \dots, 3N,
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(a^\alpha - Q^\alpha)(a^\beta - Q^\beta)$$

принуждение на конфигурационном многообразии, а принуждение $\mathcal{Z}_2$ в пространстве E^{3N-n}, $a_{\alpha\beta}$ — инерционный тензор конфигурационного многообразия M_n, $a^{\mu\chi}$ — контравариантные координаты инерционного тензора

(6.15), a^α, a_μ — координаты соответственно вектора и ковектора ускорения. Исходя из принципа наименьшего принуждения

$$\frac{\partial Z}{\partial a^\alpha}\delta a^\alpha + \frac{\partial Z}{\partial a_\mu}\delta a_\mu = 0$$

получаем $n+k$ дифференциальных уравнений движения голономной системы в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial a^\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1,2,\dots,n, \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_\mu} = 0, \qquad \mu = n+1,\dots,3N. \tag{7.16}$$

Дифференциальные уравнения движения (7.15) эквивалентны диференциальным уравнениям движения (7.6). Из дифференциальных уравнений (7.16) можно определить соответствующее число координат реакции связей. Следовательно, для получения дифференциальных уравнений движения достаточно определить аналитическую формулу принуждения Z, а для определения принуждения достотачно вычислить инерциальный тензор и соответствующее число координат обобщенных сил.

Пример. Рассмотрим двойной маятник, состоящий из постоянных масс $m_1 = \mathrm{const}$, $m_2 = \mathrm{const}$ и переменных длин $l_1(t)$ и $l_2(t)$, который движется в ветрикальной плоскости. Радиус-векторы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
r_1 &= l_1(e_1\cos\varphi_1 + e_2\sin\varphi_1),\\
r_2 &= (l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)e_1 + (l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2)e_2.
\end{aligned}$$

Для координат $x^1 = q^1 = \varphi_1$, $x^2 = q^2 = \varphi_2$, $x^3 = l_1$, $x^4 = l_2$ инерциальный тензор имеет вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix}
m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & m_2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\\
m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & m_2 l_2^2 & m_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0\\
0 & m_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & m_1 + m_2 & m_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\\
m_2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & m_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & m_2
\end{pmatrix}$$

Обобщенные силы выражаются так

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -gl_1(m_1 + m_2)\sin\varphi_1,\\
Q_2 &= -gl_2 m_2 \sin\varphi_2,\\
F_3 &= (m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1,\\
F_4 &= m_2 g l_2 \cos\varphi_2.
\end{aligned}$$

Выражение для принуждения получаем в виде

$$\begin{aligned}
2Z &= (a_1 - Q_1)(a^1 - Q^1) + (a_2 - Q_2)(a^2 - Q^2)\\
&\quad + (a^3 - F^3 - R^3)(a_3 - F_3 - R_3) + (a^4 - F^4 - R^4)(a_4 - F_4 - R_4).
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения движения (7.15) принимают вид

$$\frac{\partial Z}{\partial a^1} = a_1 - Q_1 = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z^2} = a_2 - Q_2 = 0$$

или

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\frac{D\dot{\varphi}_1}{dt} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{\varphi}_2}{dt} + m_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{l}_2}{dt}$$
$$= g(m_1 + m_2) l_1 \sin\varphi_1,$$

$$(m_2 l_1 l_2)\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{\varphi}_1}{dt} + m_2 l_2^2 \frac{D\dot{\varphi}_2}{dt} + m_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{l}_1}{dt}$$
$$= g l_2 m_2 \sin\varphi_2.$$

Дифференциальные уравнения (7.16), определяющие реакции связей, приводятся к виду

$$R_\mu = a_\mu - F_\mu, \qquad \mu = 3, 4$$

или

$$R_\mu = g_{\mu\alpha}\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + g_{\mu\sigma}\frac{D\dot{x}^\sigma}{dt} - F_\mu. \tag{7.17}$$

Для данного примера имеем

$$R_3 = m_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{\varphi}_2}{dt} + (m_1 + m_2)\frac{D\dot{l}_1}{dt}$$
$$+ m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{l}_2}{dt} - g l_1 (m_1 + m_2)\cos\varphi_1,$$

$$R_4 = m_2\left[l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{\varphi}_1}{dt} + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{D\dot{l}_1}{dt} + \frac{D\dot{l}_2}{dt} - g l_2 \cos\varphi_2\right].$$

Если голономные склерономные связи $x^\sigma = c^\sigma = \text{const}$, то реакции этих связей выражаются формулой

$$R_\mu = g_{\mu\alpha}\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - F_\mu.$$

Но если все связи заданы как функция реономной координаты q^0, то соотношения (7.17) можно привести к одной формуле

$$R_0 = g_{0\alpha}\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + g_{00}\frac{D\dot{q}^0}{dt} - Q_0^* = g_{0i}\frac{D\dot{q}^i}{dt} - Q_0^*, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

В самом деле, в общем случае справедливы соотношения

$$\dot{x}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial q^0}\dot{q}^0 \qquad \text{и} \qquad \frac{D\dot{x}^\sigma}{dt} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial q^0}\frac{D\dot{q}^0}{dt}.$$

Если при этом умножить соотношения (7.17) на $\partial x^\mu/\partial q^0$ и просуммировать по индексу μ, то получим равенство

$$R_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0} g_{\mu\alpha} \frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0} g_{\mu\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial q^0} \frac{D\dot{q}^0}{dt} - F_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0}.$$

Отсюда следует

$$R_0 = a_{0\alpha} \frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + a_{00} \frac{D\dot{q}^0}{dt} - Q_0^*,$$

где

$$R_0 = R_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0}, \qquad a_{00} = g_{\mu\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0} \frac{\partial x^\sigma}{\partial q^0}, \qquad Q_0^* = F_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial q^0}.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial a^0} = 0,$$

которое вместе с уравнениями (7.15) представляет систему $n+1$ дифференциальных уравнений движения. В этом случае принуждение записывается как квадратичная форма вида

$$Z = \frac{1}{2} a_{ij} (a^i - Q^i)(a^j - Q^j), \qquad i,j = 0,1,\ldots,n.$$

Учитывая выражение для ускорения (6.16), принуждение Z можно записать в виде

$$Z = \mathcal{A} + a^i Q_i + \frac{1}{2} Q_i Q^i.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения движения $\partial Z/\partial a^i = Q_i$ можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a^i} = Q_i.$$

Так как вектор ускорения определяется формулой

$$a^i = \ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

то

$$\frac{\partial a^i}{\partial \ddot{q}^j} = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Далее дифференциальные уравнения движения приводятся к уравнениям Аппеля

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \ddot{q}^\alpha} = Q_\alpha$$

При этом выражение для ускорения в развернутом виде представляется так

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a_{ij} (\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^l \dot{q}^k)(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s).$$

Замечание 7.1. Применение принципа наименьшего принуждения и к неголономным системам рассмотрено в работе В.А. Вуйичич [3].

Принцип наименьшего действия. Во многих исследованиях по аналитической механике в качестве функции действия принимается функционал в смысле Лагранжа $\int 2T\,dt$, где T — кинетическая энергия системы. Для системы материальных точек с наложенными только голономными склерономными связями, действие в смысле Лагранжа выражается несколько различными, но эквивалентными формулами

$$\int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\,dt = \int_0^1 a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\,d\dot{q}^\beta = \int_0^1 p_\beta\,dq^\beta. \tag{7.18}$$

Заметим, что если голономные связи являются функциями времени, то соотношения (7.18) не выполняются

$$\int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt \neq \int_{t_0}^{t_1} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\,dt \neq \int_0^1 p_\beta\,dq^\beta, \qquad \alpha,\beta = 1,\dots,n,$$

так как для выражения кинетической энергии реономной голономной системы с n степенями свободы недопустимо применение формул (6.12) или (6.13), а следует применять формулу

$$2T = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2a_\alpha \dot{q}^\alpha + a.$$

Отсюда вытекают определенные трудности примененя принципа наименьшего действия к реономным системам. С помощью выражения (6.12) устанавливаются соотношения (7.18) и для реономных систем, так как

$$\int 2T\,dt = \int a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\,dt = \int a_{ij}\dot{q}^i\,dq^j = \int p_j\,dq^j,$$

где ковектор обобщенного импульса p_j определяется формулой (6.9). Индексы i,j принимают значения $0,1,\dots,n$. Это значит, что выражение для действия (7.18) увеличивается на одно слагаемое $\int p_0\,dq^0$, соответствующее изменению связей, и определяется реономным потенциалом

$$P \overset{\text{def}}{=} -\int R_0\,dq^0.$$

Для определения действия принимаем

$$J = \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\,dt, \tag{7.19}$$

где реономная координата q^0 удовлетворяет уравнению связи $q^0 - \tau(t) = 0$. Необходимое условие минимума функционала J предусматривает, что первая вариация δJ равна нулю, т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0.$$

При условии $\delta(q^0 - \tau) = 0$ с помощью множителей Лагранжа $\lambda = R_0$ получаем соотношение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt + \int_{t_0}^{t_1} R_0\,\delta q^0\,dt = 0$$

или с учетом определения реономного потенциала P, соотношение вида

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - P)\,dt = 0 \tag{7.20}$$

так как $\delta P = (\partial P/\partial q^0)\,\delta q^0 = -R_0\,\delta q^0$.

Из соотношения (7.18) при $\delta q^i(t_0) = 0$ и $\delta q^i(t_1) = 0$ получается система $n+1$ дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} = R_0.$$

При условии, что обобщенные активные силы равняются нулю, эти уравнения экививалентны соответственно уравнениям (7.6) и (7.7).

Принцип Гамильтона. Принцип наименьшего действия можно обобщить на случай движения механической системы в поле потенциальных сил с потенциалом П. Действие J достигает при этом минимума на действительном движении, если функционал

$$\int_{t_0}^{t} \Pi\,dt$$

достигает стационарного значения. Математическое выражение этого утверждения следующее

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - P)\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Pi\,dt$$

или

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\,dt = 0, \tag{7.21}$$

где модифицированный лагранжиан

$$\mathcal{L} = T - (\Pi + P) = T - V,$$

а V — сумма натурального $\Pi = \Pi(t, q^0, q^1, \ldots, q^n)$ и реономного потенциала P.

Если движение системы стесняют только склерономные связи, реономный потенциал равняется нулю и вариационное соотношение принципа приводится к известному вариационному принципу Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt, \tag{7.22}$$

где L — функция Лагранжа

$$L = T - \Pi.$$

В механике принято применять соотношение (7.22) для систем со склерономными и с реономными связями. Между тем доказано, что этот принцип не инвариантен относительно точечных и канонических преобразований для реономных систем. Функции $\mathcal{L}$ и L отличаются не только на величину реономного потенциала P, но и формулой кинетической энергии

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + a_{0\alpha}\dot{q}^0\dot{q}^\alpha + \frac{1}{2}a_{00}\dot{q}^0\dot{q}^0 - \Pi - P,$$

$$L = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + b_\alpha\dot{q}^\alpha + c - \Pi.$$

Соотношение (7.21) порождает $n+1$ дифференциальное уравнение движения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.23}$$

а из соотношений (7.22) следуют n дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{7.24}$$

Это различие достаточно для вывода о том, что дифференциальные уравнения (7.24) и (7.23) описывают не одно и то же движение системы. Дифференциальные уравнения (7.23) эквивалентны системе дифференциальных ковариантных уравнений (7.6) и (7.7), а уравнения (7.24) только уравнениям (7.6). Предполагая, что массы точек постоянные, и натуральные силы не зависят от времени, путем интегрирования дифференциальных уравнений (7.23) при $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^0, q^1, \ldots, \dot{q}^n)$ получим закон сохранения энергии в интегральном виде

$$T_2 + T_1 + T_0 + \Pi = \int R_0(q^0)\,dq^0. \tag{7.25}$$

Интегрированием дифференциальных уравнений (7.24) получаем

$$T_2 - T_0 + \Pi = \int\left(\frac{\partial\Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}\right)dt. \tag{7.26}$$

Следующая схема поясняет отличие выражений (7.25) и (7.26).

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m_\nu r_\nu) = F_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \operatorname{grad}_\nu f_\mu \\ f_\mu(r_1, \dots, R_N, t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q^0} - \dfrac{\partial T}{\partial q^0} = -\dfrac{\partial V}{\partial q^0} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q^\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial q^\alpha} = -\dfrac{\Pi}{q^\alpha} \end{cases}$$

$$T_2 - T_0 + \Pi = \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} \right) dt$$

$$T_2 - T_0 + \Pi = c = \text{const}.$$

$$T = \underbrace{\tfrac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta}_{T_2} + \underbrace{\tfrac{1}{2} a_{0\alpha} \dot q^0 \dot q^\alpha}_{T_1} + \underbrace{\tfrac{1}{2} a_{00} \dot q^0 \dot q^0}_{T_0} = \tfrac{1}{2} a_{ij} \dot q^i \dot q^j$$

$$T + \Pi = \int R_0(q^0)\, dq^0 \implies T + \Pi = \int R_0(t)\, dt$$

$$T_2 + T_1 + T_0 + \Pi + P = h = \text{const}.$$

Схема: отличие выражений (7.25) и (7.26)

Вследствие сопряженности обобщенных скоростей $\dot q^i$ и обобщенных импульсов p_j

$$\dot q^i = a^{ij} p_j \iff p_i = a_{ij} \dot q^j \tag{7.27}$$

дифференциальные уравнения (7.23) нетрудно записаь относительно фазовых переменных $q = (q^0, q^1, \dots, q^n)^{\mathrm{T}}$ и $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$. Для этого необходимо вычислить частные производные $\partial \mathcal{L}/\partial q^i$ и $\partial \mathcal{L}/\partial \dot q^i$ функции $\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{ij} \dot q^i \dot q^j - (\Pi + P)$ и затем выполнить замену $\dot q^i = a^{ij} p_j$. Имеем следующе выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} &= a_{ij} \dot q^j = p_i, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i} \dot q^j \dot q^k - \frac{\partial (\Pi + P)}{\partial q^i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i} a^{jl} p_l a^{km} p_m - \frac{\partial (\Pi + P)}{\partial q^i} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a^{lm}}{\partial q^i} p_l p_m - \frac{\partial (\Pi + P)}{\partial q^i} = -\frac{\partial E}{\partial q^i}, \end{aligned}$$

где E — механическая энергия

$$E = T + \Pi + P = \frac{1}{2} a^{ij} p_i p_j + \Pi + P.$$

В результате выполненных преобразований находим, что соотношения

(7.27) и уравнения (7.23) образуют систему $2m+2$ дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \tag{7.28}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q^i}, \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{7.29}$$

Эти уравнения могут быть приведены к виду уравнений динамической системы.

Так нетрудно получить $2n+2$ уравнений в вариациях

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi^i}{dt} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial q^j \partial p_i}\xi^j + \dfrac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i}\eta_j, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\dfrac{\partial^2 E}{\partial q^j \partial q^i}\xi^j + \dfrac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial q^i}\eta_j, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{7.30}$$

Относительно фазовых переменных q и p сохраняется инвариантное соотношение (7.21) в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (p_i\, dq^i - E\, dt) = 0,$$

так как

$$\mathcal{L} = T - (\Pi + P) = 2T - E = p_i \dot{q}^i - E.$$

Первая вариация действия при $\delta q(t_0) = 0$, $\delta q(t_1) = 0$, после интегрирования по частям будет

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(dq^i - \frac{\partial E}{\partial p_i}\, dt \right) \delta p_i - \left(dp_i + \frac{\partial E}{\partial q^i}\, dt \right) \delta q^i \right].$$

Вдоль траекторий, определяемых дифференциальными уравнениями (7.28) и (7.29), эта вариация равна нулю. Если существуют малые отклонения $\xi^i = \delta q^i$ и $\eta_i = \delta p_i$ действительной траектории от заданной, то первую вариацию запишем в следующем виде

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\eta_i\, dq^i - \xi^i\, dp_i - \mathcal{H})\, dt,$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{\partial E}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial E}{\partial p_i}\eta_i$$

функция сопряжения.

Вторую вариацию $\delta^2 J$ можно привести к виду

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(dq^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i}\, dt \right) \delta\eta_i + \left(d\xi^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\, dt \right) \delta p_i \right.$$
$$\left. - \left(dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^i}\, dt \right) \delta\xi^i - \left(d\eta_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}\, dt \right) \delta q^i \right].$$

В силу дифференциальных уравнений движения (7.28) и (7.29) и уравнений в вариации (7.30) все выражения в круглых скобках равны нулю. Следовательно, для возмущенного движению близкого заданному, вторая вариация действия для реономной системы равна нулю. Получается система $4n+4$ сопряженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^i}, \tag{7.31}$$

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}, \tag{7.32}$$

учитывая, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial E}{\partial q^i},$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q^j}\xi^j + \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}\eta_j,$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 E}{\partial q^i \partial q^j}\xi^j + \frac{\partial^2 E}{\partial q^i \partial p_j}\eta_j.$$

Дифференциальные уравнения (7.31) представляют собой дифференциальные уравнения движения, а (7.32) — дифференциальные уравнения возмущенного движения в вариациях.

Дифференциальные уравнения движения в фазовом пространстве размерности $2n+2$ полезно привести к ковариантному виду. Уравнения (7.6) и (7.7) запишем в виде

$$a_{ij}\frac{D\dot{q}^j}{dt} = Q_i(q,\dot{q},t), \qquad i,j = 0,1,\dots,n,$$

или

$$\frac{Dp_i}{dt} = Q_i(q,p,t), \qquad \frac{dq^i}{dt} = a^{ij}p_j \tag{7.33}$$

принимая во внимание, что $p_i = a_{ij}\dot{q}^j$ и $Da_{ij}/dt = 0$ для систем материальных точек с постоянными массами.

Для потенциальных сил система дифференциальных уравнений упрощается и принимает такой вид:

$$\frac{dq^i}{dt} = a^{ij}p_j,$$
$$\frac{Dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}, \qquad V = \Pi + P(p^0).$$

Исходя из векторных уравнений динамики получаются ковариантные дифференциальные уравнения возмущенного движения в ковариантном виду (см. В.А. Вуйичич [5])

$$\frac{D\xi^i}{dt} = a^{ij}p_j, \qquad \frac{Dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}, \tag{7.34}$$

где ξ — вектор возмущения положения, а η — ковектор возмущения импульса.

Дифференциальные уравнения вариаций (7.32) и дифференциальные уравнения возмущенного движения (7.34) отличаются. Это отличие является следствием того, что уравнения (7.32) получаются как вариации координатных проекций векторных дифференциальных уравнений движения, а уравнения (7.33) получаются как проекции векторных вариационных уравнений движения.

Если связи склерономные, то число дифференциальных уравнений в каноническом виде уменьшается на два, а математические соотношения принципов совпадают с известными соотношениями аналитической механики. Для систем с реономными связями подытожим в следующей схеме.

Классические результаты	Новые предложения
Принцип Даламбера	
$Q_\alpha + I_\alpha = 0$	$Q_\alpha + I_\alpha = 0.$ $Q^* + R_0 + I_0 = 0.$
Принцип возможных перемещений	
$Q_a \delta q^\alpha,$ $\alpha = 1, \ldots, n$	$Q_i \delta q^i = Q_0 \delta q^0 + Q_\alpha \delta q^\alpha = 0,$ $i = 0, 1, \ldots, n.$
Принцип Даламбера-Лагранжа	
$\left(Q_\alpha - a_{\alpha j}\dfrac{D\dot{q}^j}{dt}\right)\delta q^\alpha = 0$	$\left(Q_i - a_{ij}\dfrac{D\dot{q}^j}{dt}\right)\delta q^i = \left(Q_0 - a_{0j}\dfrac{D\dot{q}^j}{dt}\right)\delta q^0 + \left(Q_\alpha - a_{\alpha j}\dfrac{D\dot{q}^j}{dt}\right)\delta q^\alpha = 0.$
Принцип наименьшего принуждения	
$\dfrac{\partial Z}{\partial \ddot{q}^\alpha}\delta \ddot{q}^\alpha = 0,$ $\alpha = 1, \ldots, n.$	$\dfrac{\partial Z}{\partial a^i}\delta a^i = \dfrac{\partial Z}{\partial a^0}\delta a^0 + \dfrac{\partial Z}{\partial a^\alpha}\delta a^\alpha = 0,$ $i, j = 0, 1, \ldots, n.$
	$a^\alpha = \ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$
Принцип наименьшего действия	
	$\delta \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (T - P)\, dt = 0.$
Принцип стационарного действия	
$\delta \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0,$ $L = T - \Pi,$	$\delta \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\, dt = 0,$ $\mathcal{L} = T - (\Pi + P).$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(p_\alpha\,dq^\alpha - H\,dt) = 0,\quad \alpha = 1,2,\dots,n,$$

$$H = p_\alpha\dot q^\alpha - L = T_2 - T_0 + \Pi$$

не инвариантен

или

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(p_i\,dq^i - E\,dt) = 0,\quad i = 0,1,\dots,n,$$

$$E = T + V = \tfrac{1}{2}a^{ij}p_ip_j + V$$

инвариантен

Дифференциальные уравнения движения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha,$$

$$T = \tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta + a_{0\alpha}\dot q^\alpha + \tfrac{1}{2}a_{00}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q^0} - \frac{\partial T}{\partial q^0} = Q_0,$$

$$T = \tfrac{1}{2}a_{ij}\dot q^i\dot q^j.$$

Дифференциальные уравнения движения Гамильтона

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$$

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha},\quad \dot q^0 = \frac{\partial E}{\partial p_0},$$

$$\dot p_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha},\quad p_0 = -\frac{\partial E}{\partial q^0}.$$

Уравнения движения с принуждением

$$\frac{\partial Z}{\partial a^i} = 0,\quad Z = \tfrac{1}{2}(a_i - Q_i)(a^i - Q^i).$$

Уравнения Аппеля

$$\frac{\partial A^*}{\partial\ddot q^\alpha} = Q_\alpha,$$

$$A^* = \tfrac{1}{2}a_{ij}\ddot q^i\ddot q^j + \cdots.$$

$$\frac{\partial A}{\partial a^\alpha} = Q_\alpha,\quad \frac{\partial A}{\partial a^0} = Q_0,$$

$$A = \tfrac{1}{2}a_{ij}a^ia^j.$$

Сопряженные уравнения невозмущенного и возмущенного движения

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\quad p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha},$$

$$\dot\xi^\alpha = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta\partial p_\alpha}\xi^\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\eta_\beta,$$

$$\dot\eta_\alpha = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\xi^\beta - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\beta\partial q^\alpha}\eta_\beta,$$

$$\alpha = 1,\dots,n.$$

$$\dot q^i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta_i},\quad \dot p_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi^i},$$

$$\dot\xi_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i},\quad \dot\eta_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^i},$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial E}{\partial\xi^i}\xi^i + \frac{\partial E}{\partial\eta_i}\eta_i,$$

$$i = 0,1,\dots,n.$$

Глава II

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Хорошо известно (см. А. М. Ляпунов [1], В. И. Зубов [1], Н. Н. Красовский [1], Н. Г. Четаев [1], W. Hahn [1], что условия устойчивости решений автономных либо неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих системы с сосредоточнными параметрами получаются путем применения первого либо второго метода Ляпунова, а также с помощью методов, идейно связанных с ними. В данной главе основное внимание сосредоточено на теоремах прямого метода А. М. Ляпунова для неавтономных систем. Эти теоремы содержат необходимые и достаточные условия, гарантирующие соответствующий тип устойчивости невозмущенного движения.

Мы не касаемся здесь важного вопроса об оценке области асимптотической устойчивости равномерно асимптотически устойчивого и равномерно притягивающего нулевого решения неавтономной системы. Необходимые и достаточные условия существования такой области установлены В. И. Зубовым [1].

8. О связи между невозмущенным движением и нулевым решением

Пусть n — порядок системы дифференциальных уравнений и y_i, $i = 1, 2, \dots, 2m$ — переменные ее состояния. Используя основные физические законы для широкого класса реальных систем уравнения состояния могут быть представлены в скалярной форме

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_{2m}), \qquad i = 1, 2, \dots, 2m \tag{8.1}$$

или в эквивалентной векторной форме

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{8.2}$$

Обозначим $\eta(t; t_0, y_0)$, $\eta(t_0; \cdot) = y_0$ движение системы (8.2) и $\eta_p(t; t_0, y_{p_0})$ невозмущенное движение, которое должно реализовываться в системе. С математической точки зрения это означает, что невозмущенное движение — решение системы (8.2):

$$\frac{d}{dt}\eta_p(t; t_0, y_{p_0}) \equiv Y(t; \eta_p(t, t_0, y_{p_0})). \tag{8.3}$$

Используем выражение для возмущений в форме Ляпунова

$$x = y - y_p, \tag{8.4}$$

где $y_p = \eta_p(t; t_0, y_{p_0})$. Пусть $f : T \times R^{2m} \to R^{2m}$ определена выражением

$$f(t,x) = Y[t, y_p + x] - Y[t, y_p(t)]. \tag{8.5}$$

Очевидно, что

$$f(t,0) = 0. \tag{8.6}$$

Теперь, согласно (8.2)–(8.5), имеем дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{8.7}$$

Таким образом, поведение возмущенного движения относисельно невозмущенного (по всем координатам) представляется поведением отклонений состояния x по отношению к нулевому отклонению. Невозмущенное движение по всем координатам y_i представляется нулевым отклонением $x = 0$ в координатах отклонения состояния x_i. Ниже приводимое утверждение подчеркивает полную общность как прямого метода Ляпунова, так и результатов, представленных в сочинении А.М. Ляпунова (1892) для системя (8.7). Пусть $Q : R^{2m} \to R^n$, $n = 2m$ — допустимо, но не обязательно.

Теорема 8.1. Устойчивость решения $x = 0$ системы (8.7) при $Q = x$ необходима и достаточна для устойчивости невозмущенного движения η_p системы (8.2) относительно любой вектор-функции Q, непрерывной по координатам y.

9. Определения свойств устойчивости в смысле Ляпунова

По самому определению автономные (инвариантные во времени) системы — это те системы, движение которых не зависит от выбора начального момента времени $t_0 \in R$. Однако, такое свойство не присуще автономным системам. Это обстоятельство обосновывает целесообразность нижеследующих определений.

Определение 9.1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (8.7):

а) устойчиво относительно T_i, если при каждом $t_0 \in T_i$ и каждом $\varepsilon > 0$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что при $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ имеет место $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ $\forall t \in T_0$;

б) равномерно устойчиво относительно T_i, если выполняются условия определения а) и при каждом $\varepsilon > 0$ соответствующаая максимальная величина δ удовлетворяет условию

$$\inf\{\delta_M(t,\varepsilon) : t \in T_i\} > 0\,;$$

в) устойчиво в целом относительно T_i, если выполняются условия определения а) и $\delta_M(t,\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$ $\forall t \in T_i$;

г) равномерно устойчиво в целом относительно T_i, если выполняются условия определений б) и в);

д) неустойчиво относительно T_i, если существуют $t_0 \in T_i$, $\varepsilon \in]0,+\infty[$ и $\tau \in T_0$, $\tau > t_0$ такие, что при каждом $\delta \in]0,+\infty[$ существует x_0, $\|x_0\| < \delta$, для которого имеет место $\|x(\tau;t_0,x_0)\| > \varepsilon$.

Выражение „относительно T_i" в определениях а)–г) опускается, если и только если $T_i = R$. Заметим, что указанные свойства устойчивости имеют место при $t \to +\infty$, но не при $t = +\infty$. .

Предложение 9.1. Если существует инвариантная во времени окрестность $N \subseteq R^n$ состояния равновесия $x = 0$ системы (8.7) такая, что решение $x(t;t_0,x_0)$ непрерывно при $(t;t_0,x_0) \in T_0 \times R \times N$, тогда устойчивость состояния $x = 0$ системы (8.7) относительно некоторых непустых T_i, означает, что состояние равновесия $x = 0$ устойчиво.

Этот результат легко доказывается так же, как и следующий.

Предложение 9.2. Если состояние равновесия $x = 0$ системы (8.7) устойчиво (устойчиво в целом), тогда, соответственно, оно равномерно устойчиво (равномерно устойчиво в целом) относительно каждого ограниченного множества $T_i \subset R$.

Определение 9.2. Состояние равновесия $x = 0$ системы (8.7):

а) притягивающее относительно T_i, если для любого $t_0 \in T_i$ существует $\Delta(t_0) > 0$, любого $\zeta > 0$ существует $\tau(t_0,x_0,\zeta) \in [0,+\infty[$ такое, что при $\|x_0\| < \Delta(t_0)$ выполняется неравенство

$$\|x(t;t_0,x_0)\| < \zeta, \quad \forall t \in]t_0 + T(t_0,x_0,\zeta),+\infty[;$$

б) x_0 — равномерно притягивающее относительно T_i, если выполняются условия определения а) при любом $t_0 \in T_i$ существует $\Delta(t_0) > 0$ и любом $\zeta \in]0,+\infty[$ существует $\tau_u(t_0,\Delta(t_0),\zeta) \in [0,+\infty[$ такое, что

$$\sup[\tau_m(t_0,x_0,\zeta) : x_0 \in B_\Delta(t_0)] = \tau_u(t_0,\Delta(t_0),\zeta);$$

в) t_0 — равномерно притягивающее относительно T_i, если выполняются условия определения а), существует $\Delta > 0$ и для любых $(x_0,\zeta) \in B_\Delta \times]0,\infty[$ существует $\tau_u(x_0,\zeta) \in]0,+\infty[$ такое, что

$$\sup[\tau_m(t_0;x_0,\zeta) : t_0 \in T_i] = \tau_u(\Delta,\zeta);$$

г) равномерно притягивающее относительно T_i, если выполнаются условия определений б) и в), т.е. верно а), существует $\Delta > 0$ и при каждом $\zeta \in]0,+\infty[$ существует $\tau_u(T_i,\Delta,\zeta) \in [0,+\infty[$ такое, что

$$\sup[\tau_m(t_0,x_0,\zeta) : (t_0,x_0) \in T_i \times B_\Delta] = \tau_u(T_i,\Delta,\zeta).$$

Свойства а)–г) имеют место „в целом“, если условия определения а) выполняются при любом $\Delta(t_0) \in]0,+\infty[$ и любом $t_0 \in T_i$.

Выражение „относительно T_i“ в определениях а)–д) опускается, если и только если $T_i = R$.

Нижеследующе утверждения легко проверить.

Предложение 9.3. Если существует инвариантная во времени окрестность $N \subseteq R^n$ состояния равновесия $x = 0$ системы (8.7) такая, что решение $x(t; t_0, x_0)$ непрерывно при $(t; t_0, x_0) \in T_0 \times R \times N$, тогда притяжение состояния $x = 0$ системы (8.7) относительно некоторого непустого T_i означает, что состояние равновесия $x = 0$ притягивающее.

Предложение 9.4. Если состояние равновесия $x = 0$ системы (8.7) притягивающее, тогда оно равномерно притягивающее относительно любого ограниченого $T_i \subset R$.

Определение 9.3. Состояние равновесия $x = 0$ системы (8.7):

а) асимптотически устойчиво относительно T_i и притягивающее относительно T_i;

б) экви-асимптотически устойчиво относительно T_i, если ону устойчиво относительно T_i и x_0 — равномерно притягивающее относительно T_i;

в) квази-равномерно асимптотически устойчиво относительно T_i, если оно равномерно устойчиво относительно T_i и t_0 равномерно притягивающее относительно T_i;

г) равномерно асимптотически устойчиво относительно T_i, если оно равномерно устойчиво относительно T_i и равномерно притягивающее относительно T_i;

д) экспоненциально устойчиво относительно T_i, если существует $\Delta > 0$ и действительные числа $\alpha \geq 1$ и $\beta > 0$ такие, что при $\|x_0\| < \Delta$ имеет место

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| \exp[-\beta(t - t_0)] \qquad \forall t \in T_0, \ \forall t_0 \in T_i;$$

е) экспоненициально устойчиво в целом относительно T_i, если условия определения д) выполняются при $\Delta = +\infty$;

ж) обладает свойством а)–г) в целом, если соответствующая устойчивость состояния равновесия $x = 0$ и соответствующее притяжение состояния равновесия $x - 0$ имеют место в целом.

В определениях а)–ж) выражение „относительно T_i“ опускается, если и только если $T_i = R$.

Приведем теперь результаты, являющиеся прямыми следствиями предложений 9.1–9.4.

Предложение 9.5. Если существует инвариантная во времени окрестность $N \subseteq R^n$ состояния равновеслия $x = 0$ системы (8.7) такая, что решение

$x(t;t_0,x_0)$ непрерывно при $(t_0,t_0,x_0) \in \mathcal{T}_0 \times R \times N$, тогда асимптотическая устойчивость состояния $x = 0$ системы (8.7) относительно некоторого непустого $\mathcal{T}_i$ означает, что $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Предложение 9.6. Если состояние равновесия $x = 0$ системы (8.7) асимптотически устойчиво, тогда оно равномерно асимптотически устойчиво относительно любого ограниченного $\mathcal{T}_i \subset R$.

Пусть $g : R^n \to R^n$ определяет автономную систему

$$\frac{dx}{dt} = g(x). \tag{9.1}$$

Каждое из определенных выше свойств устойчивости $x = 0$ для системы (9.1) равномерно по $t_0 \in R$.

10. Функции сравнения

Функции сравнения используются как верхние или нижние оценки-функции А. М. Ляпунова и ее полной производной по времени. Всюду далее эти функций обозначаются через φ, $\varphi : R_+ \to R_+$. Нижеследующее изложение опирается, в основном, на следующие определения и результаты.

Определение 10.1. Функция φ, $\varphi : R_+ \to R_+$ принадлежит

а) классу $K_{[0,\alpha[}$, $0 < \alpha \le +\infty$, если она определена, непрерывна и строго возрастающая на $[0,\alpha[$ и $\varphi(0) = 0$;

б) классу K, если условия определения а) выполняются при $\alpha = +\infty$, $K_{[0,+\infty[}$;

в) классу KR, если она принадлежит классу K и, кроме того, $\varphi(\xi) \to \infty$ при $\xi \to +\infty$;

г) классу $L_{[0,\alpha[}$, если она определена, непрерывна, строго убывающая на $[0,\alpha[$ и $\lim[\varphi(\zeta) : \zeta \to \infty] = 0$;

д) классу L, если условия определения г) выполняются при $\alpha = +\infty$, $L = L_{[0,+\infty[}$.

Пусть φ^I обозначает обратную функцию φ, $\varphi^I[\varphi(\zeta)] \equiv \zeta$. W. Hahn [1] установил следующий результат.

Предложение 10.1. Если

а) $\varphi \in K$ и $\psi \in K$, тогда $\varphi(\psi) \in K$;

б) $\varphi \in K$ и $\sigma \in L$, тогда $\varphi(\sigma) \in L$;

в) $\varphi \in K_{[0,\alpha[}$ и $\varphi(\alpha) = \xi$, тогда $\varphi^I \in K_{[0,\xi]}$;

г) $\varphi \in K$ и $\lim[\varphi(\zeta) : \zeta \to +\infty] = \xi$, тогда φ^I не определена на $]\xi, +\infty]$;

д) $\varphi \in K_{[0,\alpha]}$, $\psi \in K_{[0,\alpha]}$ и $\varphi(\zeta) > \psi(\zeta)$ на $[0,\alpha]$, тогда $\varphi^I(\zeta) < \psi^I(\zeta)$ на $[0,\beta]$, где $\beta = \psi(\alpha)$.

Определение 10.2. Функция φ, $\varphi : R_+ \times R_+ \to R_+$ принадлежит классу:

а) $KK_{[0;\alpha,\beta[}$, если $\varphi(\cdot,\zeta) \in K_{[0,\alpha[}$ при каждом $\zeta \in [0,\beta[$ и $\varphi(\zeta,\cdot) \in K_{[0,\beta[}$ при каждом $\zeta \in [0,\alpha[$;

б) KK, если условия определения а) выполняются при $\alpha = \beta = +\infty$;

в) $KL_{[0;\alpha,\beta[}$, если $\varphi(\cdot,\zeta) \in K_{[0,\alpha[}$ при каждом $\zeta \in [0,\beta[$ и $\varphi(\zeta,\cdot) \in L_{[0,\beta[}$ при каждом $\zeta \in [0,\alpha[$;

г) KL, если условия определения в) выполняются при $\alpha = \beta = +\infty$.

11. Знакоопределенность функций и функции сравнения

В прямом методе Ляпунов понятие знакоопределенности вспомогательной функции имеет важное значение, т.к. с ним тесно связана мера расстояния изображающей точки в фазовом пространстве до начала координат. Приведем соответствующие определения, начиная с автономной системы (9.1) и соответствующей ей функции $V(x) : R^n \to R$.

Определение 11.1. Функция $V : R^n \to R$ называется:

1) положительно полуопределенной, если существует инвариантная во времени окрестность N точки $x = 0$, $N \subseteq R^n$ такая, что:

а) V — непрерывна на N; $V(x) \in C(N)$;

б) V — неотрицательна на N; $V(x) \geq 0$, $\forall x \in N$;

в) V — равна нулю в точке $x = 0$, $V(0) = 0$;

2) положительно полуопределенной в окрестности S точки $x = 0$, если условия определения 1) выполняются при $N = S$;

3) положительно полуопределенной в целом, если условия определения 1) выполняются при $N = S$;

4) отрицательно полуопределенной (в окрестности S точки $x = 0$ или в целом), если $(-V)$ положительно полуопределеной (в окрестности S или в целом) соответственно.

Замечание 11.1. Заметим, что функция V, определенная посредством выражения $V(x) = 0$ при всех $x \in R^n$ как положительно, так и отрицательно полуопределенная. Эта неопределенность устраняется путем введения строго положительной (отрицательной) полуопределенной функции.

Функция $V : R^n \to R$ называется строго положительно (отрицательно) полуопределенной, если она положительно (отрицательно) полуопределена и существует $y \in N$ такое, что $V(y) > 0$ (< 0) соответственно.

Определение 11.2. Функция $V : R^n \to R$ называется:

а) положительно определенной, если существует инвариантная во времени окрестность N, $N \subseteq R^n$ точки $x = 0$, в которой она положительно полуопределена и $V(x) > 0$ $\forall (x \neq 0) \in N$;

б) положительно определенной в окрестности S точки $x = 0$ если условия определения а) выполняются при $N = S$;

в) положительно определенной в целом, если условия определения а) выполняются при $N = R^n$;

г) отрицательно определенной (в окрестности S точки $x = 0$ или в целом), если $(-V)$ положительно определенной (в окрестности S или в целом), соответственно.

Далее будем рассматривать неавтономную систему (8.7) и связанную с ней вспомогательную функцию $V(t,x) : R \times R^n \to R$.

Определение 11.3. Функция $V : R \times R^n \to R$ называется:

1) положительно полуопределенной на $\mathcal{T}_\tau = [\tau, +\infty[$, $\tau \in R$, если и только если существует связная инвариантная во времени окрестность N точки $x = 0$, $N \subseteq R^n$ такая, что:

а) V — непрерывна по $(t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N$, $V(t,x) \in C(\mathcal{T}_\tau \times N)$;

б) V — неотрицательна на N: $V(t,x) \geq 0$ $\forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N$;

в) V — обращается в нуль при $x = 0$: $V(t,0) = 0$, $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$;

г) если а)–в) имеет место и для каждого $t \in \mathcal{T}_\tau$ существует $y \in N$ такое, что $V(t,y) > 0$, тогда функция V строго положительно полуопределенная на $\mathcal{T}_\tau$;

2) положительно полуопределенная на $\mathcal{T}_\tau \times S$, если и только если выполняются условия определения 1) при $N = S$;

3) отрицательно полуопределенная (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $\mathcal{T}_\tau \times N$), если и только если $(-V)$ положительно полуопределенная (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $\mathcal{T}_\tau \times N$) соответственно.

Выражение „на $\mathcal{T}_\tau$“ в определении 11.3 опускается, если и только если все соответствующие требования выполняются при любом $t \in R$.

Определение 11.4. Функция $V : R \times R^n \to R$ называется:

1) положительно определенной на $\mathcal{T}_\tau$, $\tau \in R$, если и только если существует инвариантная во времени связная окрестность N точки $x = 0$, $N \subseteq R^n$ такая, что V положительно полуопределенная на $\mathcal{T}_\tau \times N$ и существует положительно определенная функция w на N, $w : R^n \to R$ такая, что

$$w(x) \leq V(t,x) \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N;$$

2) положительно определенная на $\mathcal{T}_\tau \times S$, если и только если условия определения 1) выполняются при $N = S$;

3) положительно определенная в целом на $\mathcal{T}_\tau$, если и только если условия определения 1) выполняются при $N = R^n$;

4) отрицательно определенная (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $\mathcal{T}_\tau \times N$), если и только если $(-V)$ положительно определенная (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $\mathcal{T}_\tau \times N$) соответственно.

Выражение „на $\mathcal{T}_\tau$" в определении 11.4 опускается, если и только если все требования выполняются при каждом $\tau \in R$.

Предложение 11.1. Чтобы функция $V : R \times R^n \to R$ была положительно определенной на $\mathcal{T}_\tau \times N$, необходимо и достаточно существования инвариантной во времени окрестности N точки $x = 0$ такой, что

а) $V(t,x) \in C(\mathcal{T}_\tau \times N)$;

б) $V(t,0) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}_\tau$;

в) функция $\varphi \in K_{[0,\alpha[}$, где

$$\alpha = \sup\{\|x\| : x \in N\}$$

удовлетворяет оценке

$$\varphi(\|x\|) \le V(t,x), \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N.$$

Определение 11.5. При заданном $\zeta \in \check{R}_+$ множество $\mathcal{V}_\zeta(t)$ называется максимальной связной окрестностью точки $x = 0$ при $t \in R$, которая может быть получена на основе функции $V : V \to R$, если из условия $x \in \mathcal{V}_\zeta(t)$ следует оценка $V(t,x) < \zeta$.

Определение 11.6. Функция $V : R \times R^n \to R$ называется:

1) Убывающей на $\mathcal{T}_\tau$, если и только если существует инвариантная во времени окрестность N точки $x = 0$ и положительно определенная функция w на $\mathcal{T}_\tau$ такая, что

$$V(t,x) \le w(x) \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N;$$

2) убывающей на $\mathcal{T}_\tau \times S$, если все условия определения 1) выполняются при $N = S$;

3) убывающей в целом на $\mathcal{T}_\tau$, если все условия определения 1) выполняются при $N = R^n$.

Выражение „на $\mathcal{T}_\tau$" в определенияы 11.6 опускается, если и только если выполняются при каждом $\tau \in R$ соответствующие условия.

Предложение 11.2. Для того, чтобы функция $V : R \times R^n \to R$ была убывающей на $\mathcal{T}_\tau \times N$, где N — инвариантная во времени окрестность точки $x = 0$, необходимо и достаточно существования функции сравнения $\varphi \in K_{[0,\alpha[}$, где $\alpha = \sup\{\|x\| : x \in N\}$ такой, что

$$V(t,x) \le \varphi(\|x\|) \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N.$$

Е.А. Барбашин и Н.Н. Красовский [1, 2] ввели понятие бесконечно большой (радиально неограниченной) функции и показали его необходимость для асимптотической устойчивости в целом.

Определение 11.7. Функция $V : R \times R^n \to R$ называется:

1) радиально неограниченной на $\mathcal{T}_\tau$, $\tau \in R$, если при $\|x\| \to +\infty$ выполняется условие $V(t,x) \to +\infty$ $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$;

2) радиально неограниченной, если и только если при $\|x\| \to +\infty$ выполняется условие $V(t,x) \to +\infty$ $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$ $\forall \tau \in R$.

Следуя результатам В. Хана [1], нетрудно проверить справедливость утверждения.

Предложение 11.2. Для того, чтобы положительно определенная в целом функция V была радиально неограниченной, необходимо и достаточно существования функции $\varphi \in KR$ — классу такой, что

$$V(t,x) \geq \varphi(\|x\|), \qquad \forall x \in R^n, \ \forall t \in R \ (\forall t \in \mathcal{T}_\tau).$$

Например, функция

$$V(t,x) = \frac{(2+t^2)(4+\|x\|)}{2+\|x\|^2}\|x\|$$

не является радиально неограниченной, но

$$V(t,x) = \frac{(2+t^2)(4+\|x\|)}{2+\|x\|}\|x\|$$

радиально неограниченная функция. В этом случае $\varphi(\zeta) = \zeta \in KR$, $\zeta \in R_+$, так что

$$V(t,x) \geq \varphi(\|x\|), \qquad \forall (t,x) \in R \times R^n.$$

12. Производная Дини и производная Эйлера вспомогательной функции

Для дальнейшего изложения потребуются следующие понятия.

Определение 12.1. Пусть V — непрерывная скалярная функция, $V : \mathcal{T}_\tau \times R^n \to R$, $V(t,x) \in C(\mathcal{T}_\tau \times N)$ и пусть решения $x(t;t_0,x_0)$ системы (8.7) существуют и определены на $\mathcal{T}_\tau \times N$. Тогда для $(t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times N$

1) $D^+V(t,x) = \limsup\left\{\dfrac{V(t+\theta, x(t+\theta,t,x)) - V(t,x)}{\theta}, \theta \to 0^+\right\}$ называется верхней правой производной Дини функции V вдоль решения x;

2) $D_+V(t,x) = \liminf\left\{\dfrac{V(t+\theta, x(t+\theta,t,x)) - V(t,x)}{\theta}, \theta \to 0^+\right\}$ называется нижней правой производной Дини функции V вдоль решения x;

3) $D^-V(t,x) = \limsup\left\{\dfrac{V(t+\theta, x(t+\theta,t,x)) - V(t,x)}{\theta}, \theta \to 0^-\right\}$ называется верхней левой производной Дини функции V вдоль решения x;

4) $D_-V(t,x) = \liminf\left\{\dfrac{V(t+\theta, x(t+\theta,t,x)) - V(t,x)}{\theta}, \theta \to 0^-\right\}$ называется нижней левой производной Дини функции V вдоль решения x;

5) функция V имеет производную

$$\dot{V}(t,x) = \frac{d}{dt}V(t,x)$$

при (t,x) вдоль решения x, если

$$D^+V(t,x) = D_+V(t,x) = D^-V(t,x) = D_-V(t,x) = DV(t,x)$$

и тогда

$$\dot{V}(t,x) = DV(t,x).$$

Далее символ $\dot{V}$ будет означать, что можно использовать как D^+V, так и D_+V.

Если функция V дифференцируемая по (t,x), то согласно А. М. Ляпунову

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V)^{\mathrm{T}} f(t,x), \tag{12.1}$$

где

$$(\operatorname{grad} V)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right).$$

13. Теоремы об устойчивости

Функции $V(t,x)$ знакоопределенные в смысле определений 11.1–11.4 являются основным инструментом, с помощью которого исследование устойчивости состояния $x = 0$ системы (8.7) проводится без непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения. Предположение о локальной липшицевости по x для непрерывной функций $V(t,x)$ это все, что требуется для того, чтобы вычислить полную производную Дини вдоль решений системы дифференциальных уравнений (8.7). На основе результатов А. М. Ляпунова [1], К. П. Персидского [1], A. Halanay [1], W. Hahn [1], T. Yoshizawa [1] получены следующие результаты.

Теорема 13.1. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R \times N$ (на $\mathcal{T}_\tau \times N$). Если существуют:

1) открытая связная инвариантная во времени окрестность $\mathcal{S}$ точки $x = 0$;

2) убывающая положительно определенная функция V на $\mathcal{S}$ (на $\mathcal{T}_\tau \times \mathcal{S}$) такая, что

$$D^+V(t,x) \le 0 \qquad \forall (t,x) \in R \times \mathcal{S} \quad (\forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times \mathcal{S})$$

тогда и только тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) равномерно устойчиво (на $\mathcal{T}_\tau$) соответственно.

На основе результатов Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [1, 2] доказывается следующее утверждение.

Теорема 13.2. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R\times R^n$ (или на $T_\tau \times R^n$). Пусть существует радиально неограниченная убывающая положительно определенная в целом функция V (на T_τ) такая, что

$$D^+V(t,x) \leq 0 \qquad \forall(t,x) \in R\times R^n \quad (\forall(t,x) \in T_\tau \times R^n).$$

Тогда и только тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) равномерно устойчиво в целом (на T_τ) соответственно.

Замечание 13.1. Если вектор-функция $f(t,x)$ в системе (8.7) локально липшицева на $R\times N$ (на $T_\tau \times N$), тогда функция V, фигурирющая в теоремах 13.1, 13.2, также локально липшицева на $R\times N$ (на $T_\tau \times N$) и эффективное вычисление D^+V может быть проведено на основе определений п. 12.

Замечание 13.2. Предыдущие теоремы 13.1 и 13.2 имеют место, когда выражение D^+V заменится на D_+V.

Теорема 13.3. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R\times N$ (на $T_\tau \times N$). Пусть существуют:

1) открытая связная инвариантная во времени окрестность S точки $x = 0$;

2) убывающая определеленно положительная функция V на S (на $T_\tau \times S$);

3) положительно определенная функция ψ на S такая, что

$$D^*V(t,x) \leq -\psi(x), \qquad \forall(t,x) \in R\times S, \quad (\forall(t,x) \in T_\tau \times S).$$

Тогда и только тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) равномерно асимптотически устойчиво (на T_τ).

Следуя Е. А. Барбашину и Н. Н. Красовскомы [1, 2] и учтиывая теорему 13.3, легко доказать утвержедние.

Теорема 13.4. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R\times R^n$ (на $T_\tau \times R^n$). Если существуют:

1) радиально неограниченная убывающая определенно положительная в целом функция V (на T_τ);

2) положительно определенная в целом функция ψ такая, что

$$D^*V(t,x) \leq -\psi(x) \qquad \forall(t,x) \in R\times R^n \quad (\forall(t,x) \in T_\tau \times R^n),$$

тогда и только тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Согласно результатам Н. Н. Красовского [1] и применяя в доказательстве теоремы 13.3 функцию $\varphi(q) = q^p$, легко доказать утверждение.

Теорема 13.5. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R\times N$ (на $T_\tau \times N$). Если существуют:

1) инвариантная во времени окрестность $\mathcal{S}$ точки $x = 0$;

2) функция V, положительные числа η_1, η_2, η_3, а также положительное целое число p такие, что

а) $\eta_1\|x\|^p \leq V(t,x) \leq \eta_2\|x\|^p \ \forall (t,x) \in R \times \mathcal{S}$ $(\forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times \mathcal{S})$;

б) $D^*V(t,x) \leq -\eta_3\|x\|^p \ \forall (t,x) \in R \times \mathcal{S}$ $(\forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times \mathcal{S})$,

тогда и только тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) экспоненциально устойчиво (на $\mathcal{T}_\tau$) соответственно.

Теорема 13.6. Пусть вектор-функция f непрерывна на $R \times R^n$ (на $\mathcal{T}_\tau \times R^n$). Если существуют:

1) функция V, положительные числа η_1, η_2, η_3, а также целое положительное число p такие, что

а) $\eta_1\|x\|^p \leq V(t,x) \leq \eta_2\|x\|^p \ \forall (t,x) \in R \times R^n$ $(\forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times R^n)$;

б) $D^*V(t,x) \leq -\eta_3\|x\|^p \ \forall (t,x) \in R \times R^n$ $(\forall (t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times R^n)$,

тогда и только тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) экспоненциально устойчиво в целом (на $\mathcal{T}_\tau$) соответственно.

Замечание 13.3. Если вектор-функция f дифференцируема на соответствующих множествах, тогда функция V, используемая в теоремах 13.1–13.6, также дифференцируема на соответствующх множествах.

Замечание 13.4. В случае автономной системы (9.1) наиболее сильное расширение прямого метода Ляпунова получается на основе принципа инвариантности (см. J. P. LaSale [1]).

14. Теоремы о неустойчивости

1. Исследование неустойчвисти состояния равновесия $x = 0$ системы (8.7) производится на основе теорем А. М. Ляпунова [1], Н. Г. Четаева [1], Н. Н. Красовского [1], Н. Руша, А. Абетса, М. Лалуа [1], а неустойчивости относительно части переменных — теорем В. В. Румянцева и А. С. Озиранера [1]. Ниже приводимые теоремы основаны на результатах работ упомянутых выше авторов.

Теорема 14.1. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R \times R^n$ и существуют:

1) открытая связная инвариантная во времени окрестность $\mathcal{S}$ точки $x = 0$;

2) $t_0 \in \times\mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$ (при этом $\overline{\mathcal{B}}_\varepsilon \subset \mathcal{S}$);

3) открытое множество $\psi \in \mathcal{B}_\varepsilon$;

4) функция V, определенная на $\mathcal{S}$, $V : [t_0, +\infty[\times \mathcal{B}_\varepsilon \to R$,

такие, что на $[t_0, +\infty[\times \psi$ выполняются условия

а) $0 < V(t,x) \leq K < \infty$ для некоторого $K \in R_+$;

б) $D^+V(t,x) \geq \varphi(V(t,x))$, $\varphi \in K$;

если, кроме того,

в) точка $x = 0$ принадлежит $\partial\psi$;

г) $V(t, x) = 0$ на $[t_0, +\infty[\times(\partial\psi \cap B_\varepsilon))$;

тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) неустойчиво.

Доказательство. Из того, что $(x = 0) \in \partial\psi$ или $(x = 0) \in \operatorname{int}\psi$ следует, что для каждого $\delta > 0$ наидется значение $x_0 \in \psi \cap B_\varepsilon$, при котором имеет место $V(t_0, x_0) > 0$. Рассмотрим поведение функции $V(t, x)$ вдоль решения $x(t; t_0, x_0))$. Пока $x(t) \in \psi$ для любого $t \in [t_0, +\infty[$ имеем

$$K \geq V(t, x(t)) = v(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} D^+V(\tau, x(\tau))\, d\tau$$
$$\geq V(t_0, x_0) + \varphi(V(t_0, x_0))(t - t_0).$$

Вследствие ограничености функции $V(t, x)$ (условие а)) решение $x(t)$, согласно последнему неравенству, должно покинуть ψ после некоторого момента $t > t_0$. Из-за условия г) решение $x(t)$ не можете покынуть ψ через $\partial\psi \subset B_\varepsilon$. Тогда $x(t)$ покидает B_ε, что и указывает на неустойчивость состояния $x = 0$ системы (8.7).

Теореме 14.1 предшествовали две теоремы о неустойчивости.

Теорема 14.2. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R \times R^n$ и существуют:

1) открытая связная инвариантная во времени окрестность S точки $x = 0$;

2) $t_0 \in \mathcal{T}_*$, $\varepsilon > 0$ (при этом $\overline{B}_\varepsilon \subset S$);

3) открытое множество $\psi \in B_\varepsilon$;

4) функция V, определенная на S, $V : [t_0, +\infty[\times B_\varepsilon \to R$

такие, что на $[t_0, \infty[\times\psi$ имеет место

а) $0 < V(t, x) \leq \varphi(\|x\|)$, $\varphi \in K$ — классу Хана;

б) $D^+V(t, x) \geq \psi(\|x\|)$, $\psi \in K$ — классу,

если, кроме того,

в) точка $x = 0$ принадлежит $\partial\psi$;

г) $V(t, x) = 0$ на $[t_0, +\infty[\times(\partial\psi \times B_\varepsilon))$;

тогда состояние $x = 0$ системы (8.7) неустойчиво.

Теорема 14.3. Пусть вектор-функция f в системе (8.7) непрерывна на $R \times R^n$. Если выполнаяются условия 1)–4) и в), г) теоремы 14.3 и вместо условия б) выполняется условие

б′) $D^+V(t, x) = cV(t, x) + w(t, x)$ на $[t_0, +\beta[\times\psi$, $c > 0$

функция $w(t, x) \geq 0$ непрерывна $w : [t_0, \infty[\times\psi \to R$, то состояние $x = 0$ системы (8.8) неустойчиво. Теоремы 14.1–14.3 имеют место и для автономной системы (9.1), при этом условия а), б) теоремы 14.1 упрощаются:

а$'$) $V(x) > 0$ на ψ;

б$'$) $D^+V(x) > 0$ на ψ.

Приведем еще одну теорему о неустойчивости, установленную Н. Н. Красовским [1]. Будем рассматривать систему (9.1) и предположим что M — наибольшее инвариантное множество, не содержащее целых траекторий системы (9.1), кроме точки $x = 0$.

Теорема 14.4. Пусть вектор-функция f в смысле (9.1) непрерывна на R^n и существуют:

1) открытая связная окрестность S точки $x = 0$;

2) $\varepsilon > 0$ такое, что $\overline{B}_\varepsilon \subset S$;

3) открытое множество $\psi \in B_\varepsilon$;

4) функция V, определенная на S, $V : S \to R$, такая, что

а) $0 < V(x)$ на ψ;

б) $D^+V(x) > 0$ вне M и $D^+V(x) \geq 0$ на M.

Тогда состояние $x = 0$ системы (9.1) неустойчиво.

2. Рассмотрим голономную склерономную механическую систему с n степенями свободы. Пусть $q = (q^1, \ldots, q^n)^{\mathrm{T}}$ — вектор ее лагранжевых координат, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta,$$

$Q(q, \dot{q}) = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — обобщенные силы. Предположим, что функции T и Q_α являются бесконечно дифференцируемыми функциями q и $\dot{q}$. Движения такой системы описываются уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.1}$$

Предположим, что при $q = 0$, $\dot{q} = 0$ обобщенные силы Q_α обращаются в нуль. Тогда, очевидно, точка $q = 0$ является положением равновесия рассматриваемой системы.

Предположим, что обобщенные силы Q_α не зависят от $\dot{q}$ и укажем некоторые достаточные условия неустойчивости системы (14.1). Будем исходить из следующего простого наблюдения: если система (14.1) имеет решение $q(t)$, которое стремится к точке $q = 0$ при $t \to +\infty$, то тогда положение равновесия $q = 0$ неустойчиво. Действительно, в силу обратимости системы (14.1) имеет место решение $x(-t)$, которое также стремится к нулю, но уже при $t \to -\infty$. Это обстоятельство и свидетельствует о неустойчивости положение равновесия $q = 0$.

Матрицу $A(q) = \|a_{\alpha\beta}(q)\|$ кинетической энергии T с помощью линейного преобразования координат q можно преобразовать к единичной матрице I_n в точке $q = 0$. Функции $Q_\alpha(q)$ разложим в ряды по однородным формам переменных q: $Q_\alpha = Q_\alpha^{(m)} + Q_\alpha^{(m+1)} + \cdots$. Как правило $m = 1$. Однако возможны случаи вырождения, когда $m \geq 2$. Обозначим $Q^{(m)} = (Q_1^{(m)}, \ldots, Q_n^{(m)})$.

Теорема 14.5. Пусть для системы (14.1) существуют вектор e, $\|e\| = 1$ и постоянная $\kappa > 0$ такие, что

$$Q^{(m)}(e) = \kappa e.$$

Тогда положение равновесия $q = 0$ системы (14.1) неустойчиво.

Доказательство теоремы 14.5 основано на построении асимптотических решений системы (14.1) в виде рядов определенного вида (см. В. В. Козлов [1]).

Покажем, что системе (14.1) формально удовлетворяет ряд (возможно расходящийся)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}}, \tag{14.2}$$

где $q^{(k)}$ — некоторые полиномы от $\ln t$ и $\mu > 0$. Коэффициенты (14.2) ищем по индукции, возрастающею вместе с k.

Уравнения (14.1) имеют следующий явный вид:

$$A(q)\ddot{q} + \Gamma(q)\dot{q} \cdot \dot{q} = Q^{(m)} + Q^{(m+1)} + \cdots \quad . \tag{14.3}$$

Здесь $\Gamma\dot{q} \cdot \dot{q}$ обозначает совокупность слагаемых квадратичных по скоростям. Положим

$$q^{(1)} = \lambda e, \qquad \mu = 2/(m-1) > 0.$$

Подставляя ряд (14.2) в уравнения (14.3), приравнивая коэффициенты при (наинизшей степени) $1/t^{\mu+2} = 1/t^{m\mu}$ и учитывая, что $A(0) = E$, получим уравнение

$$\mu(\mu+1)\lambda e = \kappa\lambda^m e.$$

Одсюда $\lambda^{m-1} = \mu(\mu+1)/\kappa > 0$ и поэтому положительное λ находится однозначно. Предположим, что коэффициенты $q^{(1)}, \ldots, q^{(k-1)}$ уже найдены как векторные многочлены от $\ln t$ с постоянными коэффициентами. Найдем теперь $q^{(k)}$. Приравнивая коэфициенты при одинаковых степеных $1/t^{(k\mu+2)}$, приходим к уравнению

$$(q^{(k)})'' - (2k\mu+1)(q^{(k)})' + k\mu(k\mu+1)q^{(k)} - Bq^{(k)} = f. \tag{14.4}$$

где

$$B = t^2 \frac{\partial Q^{(m)}}{\partial q}\bigg|_{q=q^{(1)}/t^\mu}$$

постоянная матрица, f — некоторый известный векторный многочлен от $\ln t$ с постоянными коэффициентами, штрих означает дифференцирование по $\ln t$. Система (14.4) является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью f. Хорошо известно, что такая система всегда имеет частное решение в виде полинома с постоянными коэффициентами. Таким образом, построение формального решения (14.2) завершено.

Ряд (14.2) может расходиться при всех значениях $t > 0$. Однако, и в этом случае система уравнений (14.3) имеет решение $\hat{q}(t)$, для которого ряд (14.2) является его асимптотическим представлением. Это означает, что

$$\hat{q}(t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{q^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}} = o\left(\frac{\ln^j(t)}{t^{N\mu}}\right) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Здесь j — степень векторного полинома $q^{(N)}$. В частности, $\hat{q}(t) \to 0$, когда $t \to +\infty$. Решение $\hat{q}(t)$ является искомым.

Если $m = 1$, то система (14.3) имеет формальное решение в виде ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(t) e^{-k\lambda t}, \tag{14.5}$$

где $\lambda = \text{const} > 0$, $q^{(k)}(t)$ — некоторые многочлены от t с постоянными коэффициентами, причем $q^{(1)} = \text{const} \neq 0$. Ряды вида (14.5) впервые применены А. М. Ляпуновым [1] при решении общей задачи об устойчивости движения.

Замечание 14.1. Как показано в работе В. В. Козлова [2], если спектр матрицы B не содержит чисел вида $k\mu(\mu + 1)$ $(k = 2, 3, \dots)$, то система (14.3) имеет решение в виде ряда (14.2) с постоянныьми коэффициентами $q^{(k)} \in R^n$. При дополнительном предположении об аналитичности функции $T, Q_1, \dots, Q_n$ в окрестности точки $(q, \dot{q}) = (0, 0)$, этот степенной ряд сходится при $t \geq t_*$. Как установил А. М. Ляпунов [1], в аналитическом случае ряд (14.5) всегда сходится при всех достаточно больших значениях t. В качестве примера рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия в „квазипотенциальном" силовом поле, когда

$$Q_i(q) = -P(q)\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \tag{14.6}$$

где Φ и P — гладкие функции от q, причем $P(q) > 0$. Если $P = \text{const}$, то поле сил Q_i потенциально. Ясно, что положения равновесия совпадают с критическими точками функции Φ. Было бы интересно связать условия устойчивости этих положений равновесия с типом стационарного значения функции Φ. В линейном приближении имеем обычную задачу теории малых колебаний в потенциальном поле. Поэтому здесь условием устойчивости является наличие строгого локального минимума функции Φ. Однако, в нелинейной задаче резльтаты такого сорта получить пока не удается. Не исключено, что в общем случае наличие строгого локальього минимума функции Φ еще не гарантирует устойчивости равновесия.

Здесь более просто установить достаточные условия неустойчивости. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 14.6. Пусть $\Phi = \Phi_{m+1} + \Phi_{m+2} + \cdots$, $m \geq 1$ и форма Φ_{m+1} не имеет минимума в точке $q = 0$.

Тогда состояние равновесия $q = 0$ в „квазипотенциальном" поле (14.6) неустойчиво.

Доказательство основано на применени теоремы 14.5. В этом случае

$$Q_i^{(m)} = -P(0)\frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial q^i}.$$

Так как форма Φ_{m+1} не имеет минимума в точке $q = 0$, то на единичной сфере $\|q\| = 1$ минимальное значение Φ_{m+1} отрицательно. Предположим, что это значение функция Φ_{m+1} достигает в точке $q = e$, $\|e\| = 1$. Из условия минимума получаем равенство

$$\frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial q}(e) = \lambda e.$$

По формуле Эйлера для однородных функций

$$\lambda = (e, \lambda e) = \left(q, \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial q}\right)\bigg|_{q=e} = (m+1)\Phi_{m+1}(e) < 0.$$

Следовательно,

$$Q^{(m)}(e) = -P(0)\frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial q}(e) = -P(0)\lambda e,$$

причем $\kappa = -P(0)\lambda > 0$. Итак, выполнено условие теоремы 14.5 и поэтому состояние равновесия $q = 0$ неустойчиво.

15. Об устойчивости движения и равновесия механических систем

Пусть $q = (q^1, \ldots, q^n)^{\mathrm{T}}$ — лагранжевы координаты голономной склерономной механической системы с n степенями свободы $\dot q = (\dot q^1, \ldots, \dot q^n)^{\mathrm{T}}$ обобщенные скорости, $Dq/dt = (D\dot q^1/dt, \ldots, D\dot q^n/dt)^{\mathrm{T}}$ — вектор ускорения, $Q(q, \dot q) = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — обобщенные силы. Педполагается, что функции T и Q_α бесконечно дифференцируемые функции q и $\dot q$. Движение такой системы описывается дифференциальными уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^\alpha} = Q_\alpha,$$

или, в ковариантном виде,

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot q^\beta}{dt} = Q_\alpha, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n. \tag{15.1}$$

Предположим, что $q = 0$ и $\dot q = 0$ состояние равновесия. В этом состоянии обобщенные силы Q_α обращаются в нуль.

Для решения задачи об устойчивости движения и равновесия механических систем применяется прямой метод Ляпунова.

Теорема 15.1. Если для дифференциальных уравнений найдется положительно определенная функция $W(q)$ такая, что

$$\left(Q + \frac{\partial W}{\partial q}\right) \cdot \dot{q} \leq 0, \tag{15.2}$$

то состояние равновесия $q = 0$, $\dot{q} = 0$ устойчиво.

Доказательство. Рассматривается функция

$$V = T + W$$

где $T = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ — кинетическая энергия голономной склерономной системы, W — указанная выше функция.

Учитывая соотношение

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}) = \frac{D}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}) = 2a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}\dot{q}^{\beta},$$

производная по времени функции V выражается так

$$\dot{V} = a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}\dot{q}^{\beta} + \frac{\partial W}{\partial q^{\beta}}q^{\beta} = \left(Q_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial q^{\alpha}}\right)\dot{q}^{\alpha}.$$

и условие (15.2) теоремы доказано.

Следствием теоремы 15.1 для консервативной автономной системы является знаменитая теорема Лагранжа-Дирихле. В самом деле, если $U(q^1, \ldots, q^n)$ силовая функция, $Q_{\alpha} = \partial U/\partial q^{\alpha}$, и для устойчивого состояния равновесия можно выбрать потенциал силы $W = -U$. В этом случае коэффициенты выражения (15.2) будут равны нулю

$$Q_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial q} \equiv 0.$$

Если обобщенные силы состоят из консервативных сил $\partial U/\partial q^{\alpha}$ и любых сил, зависйащих от скоростей, т.е.

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial U}{\partial p_{\alpha}} + P_{\alpha}(\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n),$$

то неравенство (15.2) упрощается и принимает вид

$$P \cdot \dot{q} \leq 0. \tag{15.3}$$

Из соотношения (15.3) видим, что следствием теоремы 15.1 является также и теорема об устойчивости равновесия при действии диссипативных и гироскопических сил. Общие выводы об устойчивости получаются и в случае, когда обобщенные силы имеют вид

$$Q_\alpha = f_\alpha(q^1, \dots, q^n) P(\dot q^1, \dots, \dot q^n), \tag{15.4}$$

где f_α — частные производные некоторой знакоопределенной функции $\Phi(q^1, \dots, q^n)$. В качестве функции W можно выбрать функцию $\lambda\Phi$, где λ — постоянное число. При этом W функция положительная, если $\Phi > 0$ и отрицательная, если $\Phi < 0$. Тогда из неравенства (15.2) получаем

$$\left(P f_\alpha + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}\right)\dot q^\alpha = (P + \lambda)\frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha = (P+\lambda)\frac{d\Phi}{dt} \le 0.$$

Следовательно, состояние равновесия системы (15.1) при наличии сил (15.4) устойчиво, если выполняется одно из условий

а) $\dot\Phi = 0$;

б) $\dot\Phi < 0$ и $P > \lambda$;

в) $\dot\Phi > 0$ и $P < \lambda$.

Теорема 15.2. Если для дифференциальных уравнений (15.1) существуют:

1) положительно определенная функция $W_1 = W_1(q)$;

2) положительно определенная функция $W_2 = W_2(\dot q)$;

3) в окрестности точки $q = 0$ справедливо неравенство

$$\left(Q + \frac{\partial W_1}{\partial q}\right)\dot q \le -W_2(\dot q);$$

4) положение равновесия $q = 0$ изолировано,

тогда состояние равновесия $(q, \dot q) = (0, 0)$ системы (15.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Воспользуемся положительно определенной функцией

$$V = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta$$

и ее производной

$$\dot V = \left(Q + \frac{\partial W_1}{\partial q}\right)\dot q \le 0,$$

причем тождество $(Q + \partial W_1/\partial q)\dot q \equiv 0$ имеет место лишь в случае, когда $\dot q \equiv 0$. Согласно условию 3) в малой окрестности нуля отсутствуют положения равновесия, отличные от $q = 0$.

Следовательно, асимптотическая устойчивость состояния равновесия $(q, \dot q) = 0$ вытекает из теоремы 13.4.

Теорема 15.3. Пусть для дифференциальных уравнений (15.1) выполнены следующие условия:

1) функция $W_1(q)$ не имеет в точке $q = 0$ локального минимума, а $W_2(\dot q)$ положительно определенная функция;

2) в области $U_\varepsilon^- = \{q : W_1(q) < 0, ||q|| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ справедливо неравенство

$$\left(Q + \frac{\partial W_1}{\partial q}\right) \cdot \dot q \leq -W_2(\dot q);$$

3) в области U_ε^- не существуют положения равновесия отличные от $q = 0$.

Тогда состояние равновесия $(q, \dot q) = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Рассматривается движение системы (15.1) со следующими начальными условиями: $q(0) = q_0 \in U_\alpha^-$, $\dot q(0) = 0$. Покажем, что каждое такое движение за конечный промежуток времени покинет область U_ε^-. Так как $(T+W_1)^{\cdot} \leq 0$, то траектория движения $q(t)$ целиком расположена в области $\{q : W_1(q) \leq W_1(q_0) < 0\} \subset U_\varepsilon^-$. Поэтому точка $q(t)$ должна покинуть область $||q|| < \varepsilon$.

Предположим обратное: $q(t) \in U_\varepsilon^-$ при всех $t \geq 0$. Так как функция $V = T + W_1$ вдоль движения $q(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу, то $V(t) \to \text{const}$ при $t \to +\infty$. Вторая производная $\ddot V$ ограничена вследствие предположения, что $q(t) \in U_\varepsilon^-$. Следовательно $\dot V(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Но тогда, согласно условию 2) $||\dot q(t)|| \to 0$. Поскольку $\dddot q(t)$ ограничена, то $||\ddot q(t)|| \to 0$ при $t \to +\infty$. Из явного вида уравнения движения будет следовать, что $Q(q(t), \dot q(t)) \to 0$. Согласно условию 3) в области $\{q : W_1(q) \leq W_1(q_0) < 0, ||q|| < \varepsilon\}$ справедлива оценка $||Q(q, 0)|| \geq \delta = \text{const} > 0$. Воспользуемся очевидным неравенством

$$||Q(q, 0)|| \leq ||Q(q, 0) - Q(q, \dot q)|| + ||Q(q, \dot q)||.$$

Так как $\dot q(t) \to 0$, то ввиду непрерывности функции Q имеем

$$||Q(q, 0) - Q(q, \dot q)|| \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поскольку Q как функция t также стремится к нулю, то $Q(q(t), 0) \to 0$. Однако это противоречит оценке $||Q(q, 0)|| \geq \delta > 0$. Теорема доказана.

Теорема 15.1 допускает обобщение на неавтономные системы. Если связи склерономные, а силы Q функции координат, скорости и времени, тогда функцию W_1 следует выбрать как функцию координат q и времени t. Неравенство (15.2) принимает вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \left(Q + \frac{\partial W_1}{\partial q}\right) \cdot \dot q \leq 0. \tag{15.5}$$

Если связи голономные и реономные, $\overline{q} = (q^0, q^1, \dots, q^n)^{\mathrm{T}}$, тогда неравенство (15.2) выражается так

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \left(\overline{Q} + \frac{\partial W}{\partial q}\right) \cdot \dot{\overline{q}} \leq 0,$$

где $\overline{W} = \overline{W}(t, q^0, q^1, \dots, q^n)$, $\overline{Q} = \overline{Q}(t, \overline{q}, \dot{\overline{q}})$.

Теорема 15.4. Если для системы (15.1) найдется положительно определенная функция W от координат вектора возмущения $\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n)$ и времени t, такая, что выражение

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\psi + \frac{\partial W}{\partial \xi}\right) \cdot \frac{D\xi}{dt} \tag{15.6}$$

отрицательно или тождественно равно нулю, то невозмущенное движение $\xi = 0$, $D\xi/dt = 0$ голономной системы при наличии факторов $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$ устойчиво.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15.1. Функцию Ляпунова V следует выбрать в виде $V = \frac{1}{2}a^{ij}\eta_i\eta_j + W$. Учитывая, что производная по времени

$$\dot{V} = a^{ij}\frac{D\eta_j}{dt}\eta_j + \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{D\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения принимает вид

$$\dot{V} = \left(\psi + \frac{\partial W}{\partial \xi}\right) \cdot \frac{D\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

утверждение об устойчивости движения $\xi = 0$, $D\xi/dt = 0$ следует из теоремы 13.1.

Глава III

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ДВУМ МЕРАМ

В процессе развития теории устойчивости движения сформировалось несколько основных направлений при исследовании динамических свойств систем:

— применение известных критериев устойчивости к новым математическим моделям физических процессов; — получение новых критериев устойчивости для ранее принятых математических моделей;

— получение критериев устойчивости для все более сложеных объектов исследования;

— создание специфически методов исследования частых прикладных задач.

При этом развитие двух последних направлений в большей мере происходило в связи с исследованием задач устойчивости в системах с распределенными параметрами, в многомерных и многокомпонентных системах. Исследование динамических свойств процессов в бесконечномерных пространствах поставило перед теорией устойчивости вопрос о модификацй самого инструментария исследования (имеется в виду функционал Ляпунова, мера измеряющая состояние процессов, адаптация постановки задачи к наиболее приемлемой для практики форме). В первую очередь, в связи с существованием известного факта неэквивалентности метрик в бесконечномерном пространстве вопрос выбора метрики начал играть иногда опредеяющую роль при ответе на вопрос: „Устойчив или неустойчив процесс?" Другим существенным отличием, которое необходимо было учитывать при определении свойств исследуемой распределенной системы есть то, что пространство исходных данных имеет обычно более сложную структуру и большую размерность, чем пространство текущих состояний объекта. И третье отличие, которое необходимо учитывать, состояло в том, что в рамках условий функционирования распределенной системы на отклонение начальных данных накладываются более жесткие ограничения, чем на отклонение текущих состояний процесса.

В силу вышеизложенного, введение А.А. Мовчаном [1] двух мер, измеряющих соответственно отклонения исходных данных и текущих состояний процесса, является закономерным и математически оправданным.

Следующим шагом в направлении усложнения аппарата исследования явилась работа А. М. Слободкина [1], в которой были получены достаточные условия устойчивости решений некоторых уравнений движения по двум векторным мерам ρ, ρ_0. Введение в рассмотрение векторной меры позволило автору получить обоснование энергетического критерия устойчивости в некоторых частных случаях энергия которой представляет собой функционал простейшей задачи вариационного исчисления.

Несколько иной подход в определении мер, используемых для измерения состояний процессов, был предложен Т. К. Сиразетдиновым [2]. Вместо мер, удовлетворяющих аксиомам метрики, предлагалось использовать две меры, которые могут принимать и отрицательные значения. В данной постановке исследуются уже целые множества процессов, заключенных в заданную трубку невозмущенных процессов. При этом невозмущенные процессы не обязательно образуют инвариантные множества или стационарные комапктные множества состояния равновесия исследуемых систем. В качестве систем невозмущенных процессов теперь могут рассматриваться любые множества, структура которых продиктована либо удовлетворяющим практические запросы множеством состояний процессов, как это показано на примере работы химического реактора, либо неоднородностю (кусочной гладкостью) характеристик возмущающих сил (демпфирующих устройств) в колебательных или произвольных механических системах.

В связи с тем, что результаты, полученные А. А. Мовчаном, А. М. Слободкиным и Т. К. Сиразетдиновым, нашли применение при исследовании моделей реальных объектов в развитии данной теории, возникла задача построения условий устойчвиости по Ляпунову для невозмущенных систем процессов относительно двух векторных мер, координаты которых могут принимать и отрицательные значения. Схематически развитие понятия меры в теории устойчивости по Ляпунову можно представить так:

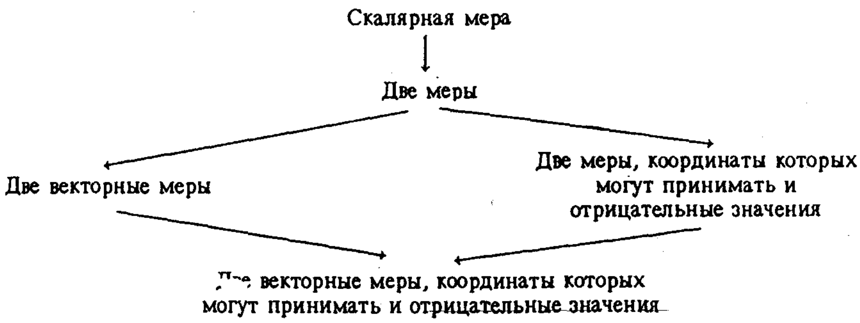

Схема 1.

Говоря о развитии понятия меры в теории устойчивости, нельзя забывать еще об одном аспекте. А именно, вместе с усложением меры усложнялся и сам объект исследования. Так, склярная метрика А. М. Ляпунова измеряла отклонение некоторого произвольного возмущенного решения дифференциального уравнения от заданного априори невозмущенного решения. Две метрики А. А. Мовчана измеряли отклонение возмущенного процесса (некоторого абстрактного математического объекта, удовлетворяющего аксиомам включения, сочленения, существования) от невозмущенного. Меры, введенные Т. К. Сиразетдиновым и А. А. Мартынюком измеряли отклонения систем возмущенных процессов от систем невозмущенных процессов. Обобщая, можно сказать, что с развитием (усложением) понятия меры, усложнялся, становился более общим сам объект исследования. Поэтому, если с каждым блоком схемы 1 ассоциировать множество теорем и утверждений, полученных в рамках введенных мер, то соответствующая иерархическая схема будет выглядеть так:

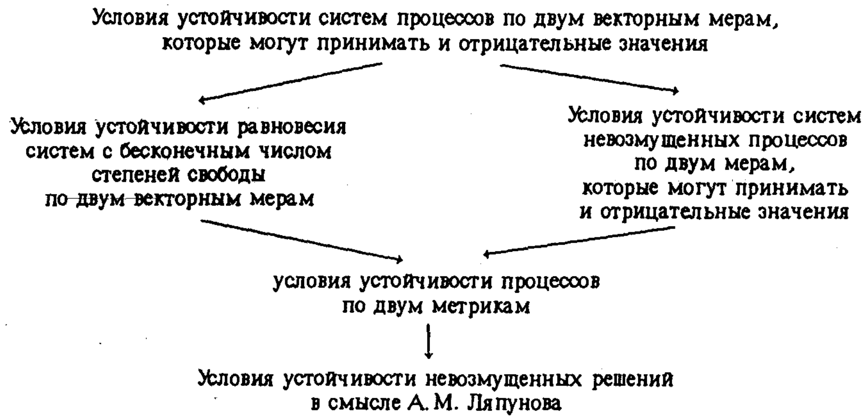

Схема 2.

16. Постановка задачи и основные определения

Пусть точечные множества H_0, H характеризуют начальное и текущее состояние процесса функционирования материальной системы. В множестве H_0 рассматривается совокупность реализаций, называемых начальными процессами, для которых справедливы аксиомы сужения, сочленения и существования. В множестве H также рассматриваются совокупности реализаций, удовлетворяющих трем названным аксимом.

Сагласно п. 3.7. состояние процесса в начальный момент времени и текущее состояние измеряются мерами (3.2) и (3.3).

С помощью одной из мер (3.4)–(3.6) так же характеризуется состояние процесса в момент времени $t_0 \in T_i$, а одна из мер (3.7)–(3.9) характеризует состояние процесса в текущий момент времени $t \in T_0$.

Понятие устойчивости процесса в терминах двух мер будем формулировать на основе мер

$$\rho_0 = \left(\sum_{i=1}^{m} \rho_{Hi}^2\right)^{1/2}, \qquad \rho = \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2\right)^{1/2}.$$

Определение 16.1. Процесс $\varphi \in H$ называется

а) (ρ_0, ρ)-эквиустойчивым относительно T_i, если для каждого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T_i$ существует функция $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ непрерывная по t_0 для каждого ε, такая, что из неравенства $\rho_0(\varphi, t_0) < \delta$ следует неравенство $\rho(\varphi, t) < \varepsilon$ при всех $t \in T_0$;

б) равномерно (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i, если условия определения а) выполняются и при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\inf[\delta_M(t_0, \varepsilon), t_0 \in T_i] > 0;$$

в) (ρ_0, ρ)-устойчивым в целом относительно T_i, если выполняются условия определения а) и $\delta_M(t_0, \varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$, $t_0 \in T_i$;

г) равномерно (ρ_0, ρ)-устойчивым в целом относительно T_i, если выполняются все условия определений б) и в);

д) (ρ_0, ρ)-неустойчивым относительно T_i, если не выполняются условия определения а).

Выражение „относительно T_i" в определениях а)–д) опускается тогда и только тогда, когда $T_i = R$.

Заметим, что определенные свойства устойчивости системы процессов σ имеют место при $t \to +\infty$, но не при $t = +\infty$.

Пример 16.1. Пусть меры ρ_0 и ρ определены так:

$$\rho_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2\right)^{1/2}, \qquad \rho = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{1-t}\rho, \qquad \rho(t_0) = \rho_0.$$

Тогда $\rho = (t-1)^{-1}(t_0 - 1)\rho_0$ при $t_0 \neq 1$ и $t \neq 1$. При $t_0 = 1$ движение не определено и $\rho \to +\infty$, когда $t \to (1-0)$, $\forall t_0 \in]-\infty, 1[$, $\forall(\rho \neq 0) \in R$. Отсюда $\delta_M(t, \varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in]-\infty, 1]$, в то время как $\Delta_M(t, \varepsilon) = \varepsilon$ $\forall t \in]1, +\infty[$. Следовательно, состояние $\rho = 0$ равномерно (ρ_0, ρ)-устойчиво в целом при любом $T_i \subseteq]-1, +\infty[$, но оно неустойчиво.

Этот простой пример показывает значение непрерывности меры ρ при всех $t \in R$ и оправдывает введение термина „относительно T_i" в определениях а)–д).

Пример 16.2. Пусть меры ρ_0 и ρ определены как и в примере 16.1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\beta - 2\gamma t}{\alpha + \beta t + \gamma t^2}\rho, \qquad \alpha > 0,\ \beta^2 < 4\alpha\gamma,\ \gamma > 0.$$

Для решения

$$\rho = (\alpha + \beta t_0 + \gamma t_0^2)(\alpha + \beta t + \gamma t^2)^{-1}\rho_0$$

находим

$$\delta_M(t,\varepsilon) = \frac{(4\alpha\gamma - \beta^2)\varepsilon}{8\gamma(\alpha + \beta t + \gamma t^2)}\left[1 - \operatorname{sign}\left(t + \frac{\beta}{2\gamma}\right)\right] + \frac{\varepsilon}{2}\left[1 + \operatorname{sign}\left(t + \frac{\beta}{2\gamma}\right)\right].$$

Отсюда

$$\inf[\delta_M(t,\varepsilon), t \in R] = 0 \qquad \forall\varepsilon \in]0, +\infty[$$

и $\delta_M(t,\varepsilon) \to +\infty$, когда $\varepsilon \to +\infty$, $\forall t \in R$.

Следовательно, состояние равновесия $\rho = 0$ (ρ_0,ρ)-устойчиво в целом, но не равномерно. В то же время оно равномерно (ρ_0,ρ)-устойчиво относительно $\mathcal{T}_i = [\zeta, +\infty[$ при любом $\zeta \in]-\infty, +\infty[$.

Замечание 16.1. Определение 16.1 является достаточно общим, что подтверждается следующими частными случаями, охватываемыми этим определением.

I_0. (ρ_0,ρ)-устойчивость невозмущенного процесса $\psi^*(t,x)$, $x \in \tau$ по одной мере, если $\rho(\varphi,t) = \rho_0(\varphi,t)$.

I_1. (ρ_0,ρ)-устойчивость фиксированного процесса $\varphi^0(t,x)$, если $\rho(\varphi,t) = \rho_0(\varphi,t) = \|\varphi - \varphi^0(t,x)\|$, где $\|\cdot\|$ определена в допустимом пространстве процессов φ.

I_2. Частичная (ρ_0,ρ_s)-устойчивость, если

$$\rho(\varphi,t) = \left(\sum_{j=1}^{s}\rho_j^2\right)^{1/2}, \quad 1 \le s \le n \quad \text{и} \quad \rho_0(\varphi,t) = \left(\sum_{i=1}^{m}\rho_{Hi}^2\right)^{1/2}.$$

I_3 (ρ_0,ρ)-устойчивость асимптотически инвариантного множества $\{0\}$, если

$$\rho(\varphi,t) = \rho_0(\varphi,t) = \|\varphi\| + \sigma(t),$$

где σ принадлежит классу L, $\|\cdot\|$ — определена в пространстве процессов φ.

I_4 (ρ_0,ρ)-устойчивость инвариантного множества $A \subset R^n$, если $\rho(\varphi,t) = \rho_0(\varphi,t) = d(\varphi,A)$, где $d(\varphi,A)$ — расстояние φ от множества A.

I_5 (ρ_0,ρ)-устойчивость условно инвариантного множества B по отношению к множеству A, где $A \subset B \subset R^n$, если $\rho(\varphi,t) = d(\varphi,B)$, $\rho_0(\varphi,t) = d(\varphi,B)$.

Напомним, что пара $(\varphi,t) \in \Phi \times \mathcal{T}_0$ и $(\varphi,t_0) \in \Phi \times \mathcal{T}_i$, где $\Phi \subseteq H$ — пространство состояний. Далее введем множество

$$\Phi_\Delta(t_0) = \{\varphi_0 \in \Phi : \rho_0(\varphi_0,t_0) < \Delta(t_0)\}, \qquad \Delta(t_0) > 0.$$

Очевидно пара (φ, t_0) начального состояния процесса оказывает „влияние" на текущее состояние процесса как при изменении $\varphi \in \Phi$, так и $t_0 \in T_i$. Это обстоятельство важно различать при определении свойств притяжения.

Определение 16.2. Процесс $\varphi \in H$ называется:

а) (ρ_0, ρ)-притягивающим относительно T_i, если для любого $t_0 \in T_i$ существует $\Delta(t_0) > 0$ и для любого $\zeta > 0$ существует $\tau((\varphi_0, t_0), \zeta) \in [0, \infty[$ для любой пары (φ, t_0) любого процесса такие, что при $\rho_0(\varphi, t_0) < \Delta(t_0)$ имеет место $\rho(\varphi, t) < \zeta \ \forall t \in]t_0 + \tau, +\infty[$;

б) φ_0-равномерно (ρ_0, ρ)-притягивающим относительно T_i, если выполняются условия определения а) и для любого $\zeta \in]0, +\infty[$ существуют $\Delta > 0$ и $\tau_u(t_0, \Delta(t_0), \zeta) \in [0, +\infty[$ такие, что

$$\sup\left\{\tau_m[(\varphi_0, t_0), \zeta] : \varphi_0 \in \Phi_\Delta(t_0)\right\} = \tau_u(t_0, \Delta(t_0), \zeta);$$

в) t_0-равномерно (ρ_0, ρ)-притягивающим относительно T_i, если выполняются условия определения а) и для каждого $\zeta \in]0, +\infty[$ существуют $\Delta > 0$ и $\tau_u(\varphi_0, \zeta) \in [0, +\infty[$ такие, что

$$\sup\left\{\tau_m[(\varphi_0, t_0), \zeta] : (\varphi_0, t_0) \in \Phi_\Delta \times T_i\right\} = \tau_u(\Delta, \zeta);$$

г) равномерно (ρ_0, ρ)-притягивающим относительно T_i, если выполняются условия определений б) и в), т.е. если выполняются условия определения а) и при каждом $\zeta \in]0, +\infty[$ существуют $\Delta > 0$ и $\tau_u(\Delta, \zeta) \in [0, +\infty[$ такие, что

$$\sup\left\{\tau_m[(\varphi_0, t_0), \zeta] : (\varphi_0, t_0) \in \Phi_\Delta \times T_i\right\} = \tau_m(\Delta, \zeta).$$

Свойства а)–г) процесса $\varphi \in H$ имеют место „в целом", если условия определения а) выполняются при любом $\Delta(t_0) \in]0, +\infty[$ и любом $t_0 \in T_i$.

Выражение „относительно T_i" в определениях а)–г) опускается тогда и только тогда, когда $T_i = R$.

Пример 16.3. Будем рассматривать уравнение из примера 16.1. Нетрудно видеть, что

$$\Delta_M = \begin{cases} 0, & t \in]-\infty, 1[, \\ +\infty, & t \in]1, +\infty[, \end{cases}$$

$$\tau_m(\rho, t, \zeta) = \begin{cases} +\infty, & t \in]-\infty, 1[, \\ \zeta^{-1}(t-1)|\rho| + 1, & t \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Следовательно, состояние $\rho = 0$:

а) притягивающее в целом относительно $T_i =]1, +\infty[$;

б) t_0-равномерно притягивающее в целом относительно любого ограниченного $T_i \subset]1, +\infty[$;

в) $\varphi_0 = \rho_0$-равномерно притягивающее относительно $T_i =]1, +\infty[$;

г) равномерно притягивающее относительно любого ограниченного $T_i \subset]1, +\infty[$;

д) не притягивающее.

Определение 16.3. Процесс $\varphi \in H$ называется:

а) асимптотически (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i если он (ρ_0, ρ)-устойчив относительно T_i и (ρ_0, ρ)-притягивающий относительно T_i;

б) эквиасимптотически (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i, если он (ρ_0, ρ)-устойчив относительно T_i и φ_0-равномерно (ρ_0, ρ)-притягивающий относительно T_i;

в) квазиравномерно асимптотически (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i, если он равномерно (ρ_0, ρ)-устойчив относительно T_i и t_0-равномерно, (ρ_0, ρ)-притягивающий относительно T_i;

г) равномерно асимптотически (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i, если он равномерно (ρ_0, ρ)-устойчив относительно T_i и равномерно t_0-притягивающий относительно T_i;

д) экопоннциально (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i, если существует $\Delta > 0$, и действительные числа $\alpha \geq 1$ и $\beta > 0$ такие, что при $\rho_0(\varphi, t_0) < \Delta$ имеет место

$$\rho(\varphi, t) \leq \alpha \rho_0(\varphi, t_0) \exp[-\beta(t - t_0)] \qquad \forall t \in T_0; \ t_0 \in T_i;$$

е) экспоненциально (ρ_0, ρ)-устойчивым в целом относительно T_i, если условия определения д) выполняются при $\Delta = +\infty$;

ж) обладает свойством а)–г) в целом, если имеет место соответствующая (ρ_0, ρ)-устойчивость и соответствующее (ρ_0, ρ) притяжение в целом. Выражение „относительно T_i“ в определениях а)–ж) опускается тогда и только тогда, когда $T_i = R$.

17. Функционалы Ляпунова-Мовчана

Адекватными функциям Ляпунова для конечномерных систем диференциальных уравнений (см. гл. II) являются функционалы Ляпунова-Мовчана для процессов, определенных аксиоматически. Пусть в каждый момент времени $t \in T_0$ на множестве Φ процессов φ задан функционал $V = V(\varphi, t)$, который заданной вектор-функции $\varphi = \varphi(x, t)$ в фиксированный момент времени $t \in T_0$ ставит в соответствие вещественное число. Меры (3.7)–(3.9) и (3.4)–(3.6) являются такими функционалами. Знакоопределенность функционала $V(\varphi, t)$, по одной из мер ρ_k, $k = 0, 1, 2$, определяется так:

Определение 17.1. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ называется:

1) ρ-положительно полуопределенным по одной из мер ρ_k, $k = 0, 1, 2$ на $T_\tau = [\tau, +\infty[$; $\tau \in R$, если существует инвариантная во времени окрестность N точки $\rho = 0$ $N \subseteq \Phi$ для пар $(\varphi, t) \in N \times T_\tau$, такая, что

а) V — непрерывен на $N \times T_\tau$;

б) V — неотрицателен на $N \times T_\tau$, при любых $(\varphi, t) \in N \times T_\tau$, для которых $\alpha \geq \rho_1(\varphi, t) \geq 0$, $\forall t \in T_\tau$, $\alpha \in R_+$;

в) V — равен нулю в точке $\rho_k = 0$; $k = 0,1,2$, $V(0,t) = 0$, $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$.

Если условия а)–в) выполняются и существует пара $(\varphi, t) \in N \times \mathcal{T}_\tau$ такая, что $V(\varphi,t) > 0$ при $\rho_k(\varphi,t) \geq 0$, $k = 0,1,2$ $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$, тогда функционал V строго ρ-положительно полуопределенный на $\mathcal{T}_\tau$;

2) ρ-положительно полуопределенным на $S \times \mathcal{T}_\tau$, если условия определения 17.1.1) выполняются при $N \times S$;

3) ρ-положительно полуопределенным в целом на $\mathcal{T}_\tau$, если условия определения 17.1.1) выполняются при $N = \Phi$;

4) ρ-отрицательно полуопределенным (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $N \times \mathcal{T}_\tau$), если функционал $(-V)$ — ρ-положительно полуопределенныю (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $N \times \mathcal{T}_\tau$) соответственно.

В определениях 17.1 выражение „на $\mathcal{T}_\tau$“ опускается, если и только если все условия, указанные в соответствующих определниях, выполняются при всех $\tau \in R$.

Определение 17.2. Функционал $V : \Phi\mathcal{T}_\tau \times R \to R$ называется:

1) ρ-положительно определенным на $\mathcal{T}_\tau$, если существует инвариантная во времени окрестность N точки $\rho = 0$, $N \subseteq \Phi$ такая, что функционал V ρ-положительно полуопределенный на $N \times \mathcal{T}_\tau$ и для любого $\varepsilon \in R^n_+$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$V(\varphi, t) \geq \delta(\varepsilon)$$

для любой пары (φ, t), удовлетворяющей неравенству

$$\rho_k(\varphi,t) \geq \varepsilon, \qquad k = 0,1,2 \quad \forall t \in \mathcal{T}_\tau;$$

2) ρ-положительно определенным на $S \times \mathcal{T}_\tau$, если все условия определения 17.2.1) выполняются при $N = S$;

3) ρ-положительно определенным в целом на $\mathcal{T}_\tau$, если все условия определения 17.2.1) выполняются при $N \times \Phi$;

4) ρ-отрицательно определенным (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (или $N \times \mathcal{T}_\tau$), если функционал $(-V)$ ρ-положительно определенный (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ или на $N \times \mathcal{T}_\tau$ соответственно.

Выражение „на $\mathcal{T}_\tau$“ в определениях 17.2 опускается, если и только если все требования этих определений выполняются при каждом $\tau \in R$.

Предложение 17.1. Чтобы функционал $V : \Phi \times R \to R$ был ρ-положительно определенным по одной из мер ρ_k, $k = 0,1,2$ на $N \times \mathcal{T}_\tau$ необходимо и достаточно существования инвариантной во времени окрестности N точки $\rho = 0$ такой, что:

а) $V(\varphi, t)$ — непрерывен;

б) $V(\varphi,t) = 0$ $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$, если $\rho_k(\varphi,t) = 0$, $k = 0,1,2$;

в) $a(\rho) \leq V(\varphi,t)$ $\forall(\varphi,t) \in N \times \mathcal{T}_\tau$, где $a \in K_{[0,\alpha_k]}$, $\alpha_k = \sup\{\rho_k(\varphi,t) : (\varphi,t) \in N \times \mathcal{T}_\tau\}$, $k = 0,1,2$.

Определение 17.3. При заданном $\zeta \in \check{R}_+$ множество $\mathcal{V}_\zeta(t)$ называется максимальной связной окрестностью точки $\rho = 0$ при $t \in R$, если из того, что $(\varphi, t) \in \mathcal{V}_\zeta(t)$ следует $|V(\varphi, t)| < \zeta$.

Определение 17.4. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ называется:

а) ρ-убывающим на $\mathcal{T}_\tau$, $\tau \in R$, если существует инвариантная во времени окрестность N точки $\rho = 0$ и ρ-положительно определенный функционал $w(\varphi)$ такой, что

$$V(\varphi, t) \leq w(\varphi) \qquad \forall(\varphi, t) \in N \times \mathcal{T}_\tau;$$

б) ρ-убывающим на $\mathcal{S} \times \mathcal{T}_\tau$, если все условия определения 17.4.а) выполняются при $N \times \mathcal{S}$;

в) ρ-убывающим в целом на $\mathcal{T}_\tau$, если все условия определения 17.4.а) выполняются при $N = \Phi$.

В определениях 17.4 выражение „на $\mathcal{T}_\tau$" опускается, если и только если все условия определений 17.4 выполняются при каждом $\tau \in R$.

Предложение 17.2. Для того, чтобы функционал $V : \Phi \times R \to R$ был ρ-убывающим по одной из мер ρ_k, $k = 0, 1, 2$ на $N \times \mathcal{T}_\tau$, где N — инвариантная во времени окрестность точки $\rho = 0$, необходимо и достаточно существования функции сравнения $b \in K_{[0, \alpha_k]}$ такой, что

$$V(\varphi, t) \leq b(\rho) \qquad \forall(\varphi, t) \in N \times \mathcal{T}_\tau,$$

где

$$\alpha_k = \sup\{\rho_k(\varphi, t); (\varphi, t) \in N \times \mathcal{T}_\tau\}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Определение 17.5. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ называется радиально ρ-неограниченным по одной из мер ρ_k, $k = 0, 1, 2$ (на $\mathcal{T}_\tau$), если при $\rho_k(\varphi, t) \to +\infty$, $k = 0, 1, 2$ имеет место условие

$$|V(\varphi, t)| \to +\infty \qquad \forall t \in \mathcal{T}_\tau \quad (\forall \tau \in R)$$

Определение 17.6. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ называется ρ_H-непрерывным по одной из мер ρ_{Hk}, $k = 0, 1, 2$ при $t = t_0 \in \mathcal{T}_i$ и $\rho_{Hk} = 0$, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что оценка $|V(\varphi, t)| < \varepsilon$ выполняется при $\rho_{Hk} < \delta(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2$ и $t = t_0 \in \mathcal{T}_i$.

Определение 17.7. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ называется невозрастающим вдоль процессов $\varphi \in \Phi$, если для любой реализаций $\varphi(\varphi, t)$ функция $v(t) = V(\varphi(h, t), t)$ не возрастает.

Определение 17.8. Областью $G_{V>0}$ называется непустое множество вектор-функций $\varphi = \varphi(x, t) \in \Phi$, для которых функционал $V(\varphi, t) > 0$.

Определение 17.9. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ называется ограниченным в области $G_{V>0}$, если для любой вектор-функции $\varphi \in \Phi$ существует такая постоянная $\varepsilon > 0$, что выполняется оценка $|V(\varphi, t)| < \varepsilon$.

Определение 17.10. Функционал $V : \Phi \times R \to R$ в области $G_{V>0}$ имеет положительно определенную производную, если производная

$$D^+V(\varphi,t) = \limsup_{\Delta t\to 0^+}\left\{\frac{V(\varphi+\Delta\varphi, t+\Delta t) - V(\varphi,t)}{\Delta t}\right\}$$

существует во всей области $G_{V>0}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство $D^+V(\varphi,t) > \delta(\varepsilon)$ при условии $V(\varphi,t) > \varepsilon$.

18. Теоремы об устойчивости и неустойчивости по двум мерам

Устойчивость невозмущенного процесса $\varphi \equiv 0$ будем рассматривать по двум векторным мерам (3.2) и (3.3). Не конкретизируя пару мер, будем далее писать (ρ_0, ρ), принимая при этом подходящую для данного процесса пару мер.

Теорема 18.1. Для того, чтобы невозмущенный процесс был (ρ_0,ρ)-устойчивым (равномерно) относительно T_i, необходимо и достаточно

1) полунепрерывности по ρ_0 меры ρ;

2) существования ρ-определенно положительного и полунепрерывного по ρ (равномерно) относительно T_i функционала $V(\varphi,t)$;

3) невозрастания функционала $V(\varphi,t)$ вдоль возмущенных процессов.

Необходимость. Пусть невозмущенный процесс (ρ_0,ρ)-устойчив (равномерно) относительно T_i. Покажем, что условия теоремы 18.1 выполняются и непротиворечивы. На системе возмущенных процессов определим функционал $V(\varphi,t)$ следующим образом:

$$V(\varphi,t) = \max_j \sup_{\tau\geq t} \rho_j(\varphi,\tau), \qquad j\in[1,n]. \tag{18.1}$$

Очевидно, для любой пары (φ,t), удовлетворяющей условию

$$\min\{\rho_j(\varphi,t) : j\in[1,n], t\in T_0\} > \varepsilon,$$

выполняется неравенство $V(\varphi,t) > \varepsilon$, т.е. функционал $V(\varphi,t)$ ρ-определенно положительный. Функционал $V(\varphi,t)$ не возрастает вдоль возмущенных процессов по построению. Действительно, рассмотрим произвольный возмущенный процесс и зафиксируем два значения $\tau_1,\tau_2\in T_0$, $t_0<\tau_1<\tau_2$.

Очевидно, множество состояний одного и того же возмущенного процесса $\varphi(t_0,h,t)$ при $t>\tau_1$ включает в себя как подмножество состояний процесса при $t>\tau_2$, и функционал $V(\varphi,t)$ убывает с течением времени вследствие убывания метрики множества состояний.

Положим $\rho_0(\varphi,t_0) = \rho(\varphi,t_0)$. Тогда, очевидно, мера ρ полунепрерывна (равномерно) относительно T_i по мере ρ_0. Покажем возможность задания двух мер ρ_0 и ρ, обладающих указанными выше свойствми в случае, когда векторы ρ_0 и ρ принадлежат пространствам различной размерности. Именно:

1) если $m < n$, то

$$\rho_{01}(\varphi, t_0) = \rho_1(\varphi, t_0), \quad \rho_{02}(\varphi, t_0) = \rho_2(\varphi, t_0), \quad \dots,$$
$$\rho_{0n-2}(\varphi, t_0) = \rho_{n-2}(\varphi, t_0), \dots \rho_{0n-1}(\varphi, t_0) = \rho_{n-1}(\varphi, t_0) + \rho_n(\varphi, t_0);$$

2) если $m > n$, то

$$\rho_{01}(\varphi, t_0) = \rho_1(\varphi, t_0), \quad \rho_{02}(\varphi, t_0) = \rho_2(\varphi, t_0), \quad \dots,$$
$$\rho_{0n}(\varphi, t_0) = \rho_0(\varphi, t_0), \dots \rho_{0n+1}(\varphi, t_0) = \rho_1(\varphi, t_0) + \rho_n(\varphi, t_0).$$

Докажем далее полунепрерывность (равномерную) относительно T_i функционала $V(\varphi, t)$ по мере ρ_0. Для этого необходимо использовать свойство (ρ_0, ρ)-устойчивости (равномерной) относительно T_i невозмущенного процесса). Итак, предположим, что для любого вектора $\varepsilon \in \check{R}^n_+$ и для любого $t_0 \in T_i$ найден вектор $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, $\delta \in \check{R}^m_+$ такой, что для всякого возмущенного процесса, удовлетворяющего в начальный момент времени $t_0 \in T_i$ условию $\rho_{0i}(\varphi, t_0) < \delta_i(\varepsilon, t_0)$ $(\rho_{0i}(\varphi, t_0) < \delta_i(\varepsilon))$, во всей области определения процесса выполняется условие $\rho_i(\varphi, t_0) < \varepsilon_i$ для всех $t \in T_0$. Тогда в силу выбора функционала Ляпунова получаем $V(\varphi, t_0) \leq \max_{i \in [1,n]} \varepsilon_i$ на множестве $T_i \subset T_0$ и окончательно, в качестве δ выбираем вектор с компонентами

$$\delta_i(\varepsilon, t_0) = \frac{1}{2} \max_i \varepsilon_i \qquad \left(\delta_i(\varepsilon) = \frac{1}{2} \max_i \varepsilon_i \right).$$

Достаточность. Пусть на возмущенном процессе определен функционал, удовлетворяющий требованиям теоремы 18.1 и предположим, что мера ρ полунепрерывна (равномерно) относительно T_i по мере ρ_0. Доказательство достаточности условий теорем проведем от противного. Пусть существует вектор $\varepsilon \in \check{R}^n_+$ и момент $t_0 \in T_i$ такие, что для любого вектора δ с положительными компонентами можно указать пару (φ, t_1) такую, что $\rho_i(\varphi, t_1) \geq \varepsilon_i$ хотя бы для одного $i \in [1, n]$ при любых $\rho_{0i} < \delta$, $\forall i \in [1, m]$.

Так как функционал $V(\varphi, t)$ ρ-определенно положителен, то существует величина $\mu(\varepsilon) > 0$ такая, что $V(\varphi, t) \geq \mu(\varepsilon)$ при всех (φ, t) таких, что $\rho_i(\varphi, t) \geq \varepsilon_i$.

Поскольку функционал $V(\varphi, t)$ полунепрерывен по мере ρ_0 (равномерно относительно T_i), то для числа $\mu(\varepsilon)$ и любого момента времени $t_0 \in T_i$ найдется такой вектор δ с компонентами $\Delta^*_i(\mu(e), t_0) > 0$, $(\delta^*_i(\mu(\varepsilon)) > 0)$, что $V(\varphi(t_0, h, t_0), t_0) < \mu(\varepsilon)$ для любой пары $(\varphi(t_0, h, t_0), t_0)$ удовлетворяющей условию $\rho_{0i}(\varphi, t_0) < \delta_i$. Мера $\rho(\varphi, t)$ полунепрерывна по мере $\rho_0(\varphi, t)$ (равномерно) относительно T_i, поэтому для любого вектора $\varepsilon \in \check{R}^n_+$ и любого момента времени $t_0 \in T_0$ найдется такой вектор $\delta = \delta^{**}(\varepsilon, t_0)$ $(\delta = \delta^{**}(\varepsilon))$, $\delta \in \check{R}^m_+$, что неравенства $\rho_i(\varphi, t_0) < \varepsilon_i$, $i \in [1, n]$ будут выполняться для любой пары (φ, t) как только $\rho_{01}(\varphi, t_0) < \delta^{**}_i$.

Примем

$$0 < \delta_0(\varepsilon, t_0) \leq \min[\delta^*_i(\mu(\varepsilon), t_0), \delta^{**}_i(\varepsilon, t_0)], \quad i \in [1, m];$$

$$\big(0 < \delta_i(\varepsilon) \le \min[\delta_i(\mu(\varepsilon)), \delta_i^{**}(\varepsilon)], \quad i \in [1, m]\big).$$

В силу выбора вектора δ имеем следующие оценки

$$\begin{aligned} &V(\varphi(t_0, h, t_0), t_0) < \mu(\varepsilon), \\ &\rho_i(\varphi(t_0, h, t_0), t_0) < \varepsilon_i, \qquad \forall i \in [1, n]. \end{aligned} \tag{18.2}$$

Зафиксируем компоненту k вектора ρ, для которой выполняется неравенство $\rho_k(\varphi, t_1) \ge \varepsilon_k$ при всех $\rho_{0_i} < \delta_i$, $i \in [1, m]$. Найдем нижнюю грань $t_{00} \in T_i$ значений, для которых выполняется неравенство $\rho_k \ge \varepsilon_k$. Из непрерывности меры ρ_k следует, что для любого $t \in [t_0, t_{00}[$ $(t_0 \in T_i)$ выполняется неравенство $\rho_k(\varphi, t) < \varepsilon_k$, причем $\rho_k(\varphi, t_{00}) = \varepsilon_k$, следовательно

$$V(\varphi, t_0) \ge \mu(\varepsilon). \tag{18.3}$$

И окончательно, для моментов времени t_0, t_{00} $(t_0 < t_{00})$ из неравенства (18.2), (18.3) имеем $V(\varphi, t_0) < V(\varphi, t_{00})$, т.е. условие, противоречащее невозрастанию функционала $V(\varphi, t)$ на любом возмущенном процессе. Отсюда следует, что предположение, высказанное в начале доказательства, несостоятельно. Теорема доказана.

Замечание 18.1. Очевидно, при определении полунепрерывности меры ρ по ρ_0, ρ-определенной положительности функционала V по мере ρ_0, полунепрерывности функционала V по мере ρ, наложение ограничений в виде $\rho_{0i} < \varepsilon_i$, $\forall i \in [1, m]$ эквивалентно ограничениям $\rho_{0_i} < \varepsilon$, $\forall i \in [1, m]$ в силу возможности использования весовых функций.

Нетрудно показать, что теоремы об устойчивости и равномерной устойчивости А. М. Слободкина [1] и Т. К. Сиразетдинова [2] можно получить как следствия теоремы 18.1. Действительно, предположим, что области отрицательных значений мер вырождаются в нули соответственно m и n-мерных пространств. То есть множество невозмущенных и последующих возмущений вдоль $\bar{\varphi}$ равно нулю $\rho_0(\bar{\varphi}, t) = 0$ и $\rho(\bar{\varphi}, t) = 0$. Тогда теорема 18.1 имплицирует корректность следующих утверждений.

Теорема 18.2. (об устойчивости). Пусть $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$ и $\rho_1, \dots, \rho_m$ — две системы мер такие, что:

1) в любой окрестности точки z^0 по системе мер $\rho_1, \dots, \rho_m$ содержится некоторая окрестность этой точки по системе мер $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$ (условие непрерывности меры $\bar{\rho}$ по $\bar{\rho}_0$);

2) абстрактное движение $z(t)$ непрерывно по каждой из мер $\rho_1, \dots, \rho_m$.

Тогда, если существует функционал $V(z, t)$:

1) полунепрерывный сверху по системе мер $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$;

2) определенно положительный по системе мер $\rho_1, \dots, \rho_m$;

3) невозрастающий вдоль абстрактных движений,

то равновесие z_0 устойчиво по двум системам мер (векторным мерам $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$ и $\rho_1, \dots, \rho_m$).

Теорема 18.3. (О равномерной устойчивости). Пусть $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$ и $\rho_1, \dots, \rho_m$ — две системы мере такие, что:

1) в любой окрестности точки z_0 по системе мер $\rho_1, \dots, \rho_m$ содержится некоторая окрестность по системе мер $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$ при произвольном $t_0 \in T_i$ (условие равномерной непрерывности меры $\overline{\rho}$ по $\overline{\rho}_0$);

2) абстрактное движение $z(t)$ непрерывно по каждой из мер $\rho_1, \dots, \rho_m$.

Тогда, если существует функционал $V(z,t)$:

1) полунепрерывный сверху по ρ_0 равномерно относительно $t_0 \in T_i$;

2) определенно положительный по ρ;

3) невозрастающий вдоль движений,

то равновесие z_0 равномерно устойчиво по двум векторным мерам.

Очевидно, если бы в условиях теорем 18.2, 18.3 отсутствовало требование непрерывности абстрактного движения $z(t)$ по каждой мере $\rho_1, \dots, \rho_m$, то они являлись бы перефразировкой теоремы 18.1 и носили бы необходимый и достаточный характер.

Предположив далее, что размерность мер (3.2) и (3.3) равна единице (т.е. ρ_0 и ρ — величины скалярные) из теоремы 18.1 как следствие получим условия, аналогичные условиям устойчивости систем процессов, предложенные Т.К. Сиразетдиновым [2].

Теорема 18.4. Для того, чтобы невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ был (ρ_0, ρ)-устойчивым (равномерно) относительно T_i необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный (равномерно) относительно T_i по мере ρ_0 определенно положительный по мере ρ и невозрастающий вдоль возмущенных процессов функционал $V = V(\varphi, t)$.

Мера ρ принимается непрерывной (равномерно) относительно T_i по ρ_0.

Предположим далее, что $\rho \equiv \rho_0 \equiv \|\varphi\|$. Тогда условие непрерывности меры ρ по ρ_0 выполняется автоматически. Из непрерывности функционала V по мере ρ_0 следует непрерывность функционала V по переменной φ, а положительная определенность функционала V по мере ρ гарантирует положительную определенность V в смысле определения А.М. Ляпунова [1]. Тогда для системы обыкновенных дифференциальных уравнений получим критерий (теорему А.М. Ляпунова) об устойчивости нулевого решения (см. теорему 13.1).

Однако следует отметить, что при исследовании конкретных задач устойчивость чаще пользуется достаточными условиями устойчивости. В них невозрастание (убывание) функционала вдоль движений (процессов) гарантируется постоянной (определенной) отрицательностью производной функционала $V(\varphi, t)$, вычисленной вдоль движений.

Приведем лишь два следствия, соответствующие теореме 18.1.

Следствие 18.1. Для того, чтобы невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ был (ρ_0, ρ)-устойчивым относительно T_i достаточно выполнения следующих условий:

1) полунепрерывности по ρ_0 меры ρ при $\rho_0 \geq 0$;

2) существования определенно положительного по мере ρ и полунепрерывного по мере ρ_0 при $\rho_0 \geq 0$ функционала $V(\varphi, t)$, производная которого вдоль возмущенных процессов неположительна.

Следствие 18.2. Для того, чтобы невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ был равномерно относительно T_i (ρ_0, ρ)-устойчивым, достаточно выполнения следующих условий:

1) полунепрерывности меры ρ по ρ_0 (при $\rho_0 \geq 0$), равномерной относительно T_i;

2) существования определенно положительного по мере ρ и полунепрерывного по мере ρ_0 (при $\rho_0 \geq 0$) равномерно относительно T_i функционала $V(\varphi, t)$, производная которого вдоль возмущенных процессов неположительна.

Чтобы установить неустойчивость невозмущенного процесса $\varphi \equiv 0$ достаточно обнаружить один возмущенный процесс, не удовлетворяющий условиям устойчивости, т.е. покидающий область $\rho < \varepsilon$ в какой-нибудь конечный момент времени $\tau \in T_0$ при любом малом числе $\delta > 0$, $\rho_0 < \delta$, где ε — некоторое заданное положительное число. Это значит, что функционал $V(\varphi, t)$ должен рассматриваться до момента τ, в который $\rho = \varepsilon$.

Теорема 18.5. Для того чтобы невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ был (ρ_0, ρ)-неустойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $V(\varphi, t)$ ограниченный и обладающий определенно положительной производной в области $G_{V>0}$ и для любого $\delta_0 > 0$ существовал процесс $\varphi(x, t)$, исходящий из области $G_{V>0}$ и удовлетворяющий условию $0 < \rho_0 < \delta_0$.

Замечание 18.2. В случае, когда $\rho_0 = \rho$ скалярные меры, приходим к рассмотрению устойчивости и неустойчивости по одной мере.

Глава IV

ПРАКТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ДВУМ МЕРАМ

Эта глава посвящена решению задачи о практической устойчивости в максимально обобщенной постановке. Отметим, что обобщенность изложения основана не только на выборе в качестве объекта исследования произвольного процесса, но и в возможности варьирования размерности и конфигурации областей, которым должны принадлежать меры началных состояний и последующих отклонений рассматриваемых процессов.

19. Предварительные сведения

Пусть заданы $S_0(t)$, $S(t)$ — непрерывные, связные, открытые и ограниченные для всех $t \in T_0$ множества в R^n такие, что их сечения $S_0(\tau_0)$ ($S(\tau_1)$) любой гиперплоскостью $t = \tau_0 \in T_i$ ($t = \tau_1 \in T_0$) являются непустыми областями, $0 \in \operatorname{int} S_0(t)$ и $0 \in \operatorname{int} S(t)$ при всех $t \in T_i$, $t \in T_0$ соответственно. Кроме того, границы множеств S_0 и S: $\partial S_0(t)$, $\partial S(t)$ — гладкие связниые множества. При исследовании практической устойчивости относительно изменяющихся во времени множеств $S_0(t)$, $S(t)$ предполагается, что для всех точек $h = (t_0, h_{t_0}) \in H$ (соответствующих произвольным процессам) таким, что

$$\rho_0(t_0, h_{t_0}) \in \operatorname{int} S_0(t_0), \qquad \text{где} \quad t_0 \in T_i$$

выполняется включение $\rho(t_0, h_{t_0}) \in \operatorname{int} S(t_0)$.

Определение 19.1. Процесс называется невозмущенным, если выполняются условия:

1) $0 \geq \rho_0 \in S_0(t_0)$ $(t_0 \in T_i)$;
2) $0 \geq \rho_0 \in S(t)$ $(t \in T_0)$.

Определение 19.2. Процесс называется возмущенным, если выполняется одно из условий:

1) $0 < \rho_0 \in S_0(t_0)$ $(t_0 \in T_i)$;
2) $0 < \rho \in R^n$ $(t \in T_0)$.

Функционалы Ляпунова и их свойства. Для доказательства теорем о практической устойчивости процесссов по двум векторным мерам воспользуемся функционалами типа функционалов Ляпунова со свойствами, определенными ниже.

Будем говорить, что постоянно положительный по векторной мере ρ функционал $V(\varphi, t)$:

а) обладает свойством J, если для него существует вещественная положительная функция $m(t)$ такая, что $V(\varphi, t) \geq m(t)$ при $\rho \in \partial S(t)$ и всех $t \in \mathcal{T}_0$;

б) обладает свойством K, если при любом $t \in \mathcal{T}_0$ существует вещественная постоянная $m_0 = m_0(t_0)$ такая, что $V(\varphi, t) \leq m_0$ при любых $\rho \in \partial S_1(\tau)$, где $S_1(t)$ — любая область, принадлежащая $S(t)$ такая, что $\partial S_1(t) \cap \partial S(t) = \varnothing$ $\forall t \in \mathcal{T}_0$;

в) обладает свойством L, если для него существует вещественная положительная функция $n(t)$, обеспечивающая оценку $V(\varphi, t) \leq n(t)$ при $\rho \in \partial S(t)$ и всех $t \in \mathcal{T}_0$;

г) обладает свойством M, если существует вещественная постоянная $n_0 = n_0(t_0)$, обеспечивающая оценку $V(\varphi, t) \geq n_0$ при любых $\rho \in \partial S_1(t)$, $t \in \mathcal{T}_0$.

Остальные свойства функционалов будем понимать в соответствии с определениями главы 3.

При исследовании практической устойчивости процессов относительно множеств $S_0(t)$, $S(t)$ будем считать, что выполняются следующие условия:

— для всех точек $h = (t_0, h_{t_0}) \in H$ (соответствующих произвольным процессам) таким, что

$$\rho_0(t_0, h_{t_0}) \in \operatorname{int} S_0(t_0), \qquad \text{где} \quad t_0 \in \mathcal{T}_i$$

выполняется включение $\rho(t_0, h_{t_0}) \in \operatorname{int} S(t_0)$;

— существует хотя бы один невозмущенный процесс, определеный при всех $t \in \mathcal{T}_0$;

— существует хотя бы один процесс, определенный при всех $t \in \mathcal{T}_0$.

20. Условия практической устойчивости и неустойчивости систем процессов по двум мерам

Практическая устойчивость невозмущенного процесса определяется путем изучения поведения возмущенного процесса в некоторой окрестности невозмущенного процесса при $\rho > 0$.

Определение 20.1. Невозмущенный процесс практически (ρ_0, ρ)-устойчив, если:

1) возмущенные процессы $\varphi(t, h)$ определены при всех $t \in \mathcal{T}_0$;

2) для всякого ~~возмущенного процесса,~~ удовлетворяющего условию $\rho_0 \in S_0$ при любом $t_0 \in \mathcal{T}_i$ во всей области определения выполнятся включение $\rho \in \operatorname{int} S(t)$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$.

Теорема 20.1. Для того, чтобы невозмущенный процесс был практически (ρ_0, ρ)-устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы

1) существовал постоянно положительный по мере $\rho \in S(t)$ непрерывный функционал $V(\varphi, t)$, удовлетворяющий свойствам J и K;

2) функция $m(t)$ и постоянная m_0 такие, что для любых $t = \tau \in T_0$ и $t^* = \tau - \Delta\tau \in T_0$, где Δt сколь угодно мало вдоль возмущенного процесса выполняется неравенство

$$V(\varphi, t) - V(\varphi, t^*) \leq m(t) - m_0,$$

где константа m_0 вычислена для момента времени t^*;

3) при выполнении условий 1)–2) хотя бы одно неравенство выполняется строго.

Доказательство. Вначале убедимся в том, что условия 1)–2) непротиворечивы и, тем самым покажем существование функционал $V(\varphi, t)$, фигурирующего в условиях теоремы.

Необходимость. На возмущенном процессе, для которого $\rho \in \operatorname{int} S(t)$, определим функционал $V(\varphi, t)$ следующим образом: зафиксируем момент времени $t \in T_0$ и проведем из точки $\rho = 0$ луч. Он пересечет поверхность $\partial S(t)$ в некоторой точке ρ_s.

Положим

$$V(\varphi, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\varphi, t) / \rho_{si}(\varphi, t).$$

Построенный таким образом функционал $V(\varphi, t)$ непрерывен, так как $\partial S(t)$ гладкая, и определенно положительный по мере $\rho(\varphi, t)$. Очевидно,

$$V(\varphi, t)\big|_{\partial S} = \sup_{\rho \in S(t)} V(\varphi, t) = 1 \triangleq m(t) > V(\varphi, t)\big|_{\rho \in \operatorname{int} S(t)}.$$

В силу практической устойчивости невозмущенного процесса имеем

$$V(\varphi, t) < m(t), \qquad V(\varphi, t_1 - \Delta t) \triangleq m_0;$$
$$V(\varphi, t_1) - V(\varphi, t_1 - \Delta t) < m(t_1) - m_0.$$

Этим доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Пусть построен функционал $V(\varphi, t)$, удовлетворяющий условиям теоремы 20.1. Предположим, что существует возмущенный процесс $\varphi(h, t)$, для которого найдется значение $t_1 \in T_0$, при котором $\rho(\varphi, t_1) \in \partial S(t)$. При этом для значений $t \in [t_1, t_2]$ имеем $\rho \in \operatorname{int} S(t)$, причем если $\rho_0(t_0) \in S_0(t_0)$, то $\rho(t_0) \in S(t_0)$. В силу условий теоремы 20.1 для значений t_1 и $t_1 - \Delta t$ имеем $\rho(\varphi, t_1 - \Delta t) \in \partial S(t_1 - \Delta t)$ и выполняются неравенства

$$V(\varphi, t_1 - \Delta t) \leq m_0 \quad \text{и} \quad V(\varphi, t_1) \geq m(t_0).$$

Из последовательности неравенств

$$m(t_1) \leq V(\varphi, t_1) \leq V(\varphi, t_1) - V(\varphi, t_1 - \Delta t) + m_0 \leq m(t_1),$$

учитывая условие 3) теоремы 20.1 получаем противоречие сделанному предположению о существовании момента времени $t_1 \in \mathcal{T}_0$, при котором $\rho(t_1) \in \partial S(t_1)$. Теорема доказана.

Понятие практической (ρ_0, ρ)-неустойчивости невозмущенного процесса сформулируем так.

Определение 20.2. Невозмущенный процесс (ρ_0, ρ)-неустойчив, если существует хотя бы один возмущенный процесс такой, что $\rho_0 \in S_0(t_0)$ при $t_0 \in \mathcal{T}_i$, в то время как $\rho \notin \operatorname{int} S(t)$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$ (то есть существует хотя бы одно значение $t_1 \in \mathcal{T}_0$, для которого $\rho(\varphi, t_0) \in \operatorname{ext} S(t_1)$).

Теорема 20.2. Для того, чтобы невозмущенный процесс был практически (ρ_0, ρ)-неустойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) существует ограниченный, постоянно положительный по ρ функционал $V(\varphi, t)$, удовлетворяющий свойствам L и M;

2) для некоторого возмущенного процесса и момента времени τ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$V(\varphi, \tau) - V(\varphi, \tau - \Delta t) \geq n(\tau) - n_0 \qquad \text{при любом } \Delta t < \varepsilon;$$

3) при выполнении условий 1)–2) хотя бы одно неравенство выполняется строго.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что невозмущенный процесс неустойчив относительно мер ρ_0 и ρ со значениями из $S_0(t)$ и $S(t)$. При этом для $\rho_0 \in S_0(t_0)$ $(\rho(t_0) \in S(t_0))$ найдется момент $t = \tau$, для которого $\rho \in \partial S(\tau)$ $(\rho \notin \operatorname{int} S(t))$.

Возмущенные процессы можно считать состоящими из процессов двух типов:

1) процессы, составляющие множество $\mathfrak{M}_1$, для которых при $\rho_0 \in S_0(t)$ имеет место включение $\rho \in \operatorname{int} S(t)$ $\forall t \in \mathcal{T}_0$;

2) процессы, составляющие множество $\mathfrak{M}_2$, для которых при $\rho_0 \in S_0(t)$ существует момент времени τ такой, что $\rho \in \partial S(t)$ $(\rho \notin \operatorname{int} S(t))$. Непустота множества $\mathfrak{M}_2$ следует из неустойчивости невозмущенного процесса.

Определим функционал $V(\varphi, t)$ следующим образом

$$V(\varphi, t) = \begin{cases} 0, & \varphi \in \mathfrak{M}_1 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\varphi, t) / \rho_{si}(\varphi, t), & \varphi \in \mathfrak{M}_2 \end{cases},$$

где ρ_s определяется так же, как и при доказательстве теоремы 20.1. Очевидно, $V(\varphi, t)$ удовлетворяет условиям L и M теоремы для $\varphi \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, учитывая выполнение условий L–M и то, что $\rho(\varphi, \tau) \in \partial S(\tau)$, получаем $V(\varphi, \tau) - V(\varphi, \tau - \Delta\tau) \geq n(\tau) - n_0$. Этим необходимость теоремы доказана.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия теоремы 20.2 и для всех φ таких, что $\rho_0(\varphi, t_0) \in S_0(t)$ справедливо включение $\rho(\varphi, t) \in S(t)$ при всех $t \in T_0$. Тогда в силу условия L, M и 2) теоремы 20.2 имеем

$$n(\tau) \geq V(\varphi, \tau) - V(\varphi, \tau - \Delta t) + n_0 \geq n(\tau), \qquad \tau - \Delta t \in T_0.$$

Согласно условию 3) теоремы 20.2 должно выполняться строгое неравенство $n(\tau) > n(\tau)$.

Это неравенство делает несостоятельным предположение, при котором оно получено. Теорема доказана.

21. Практическая устойчивость систем процессов относительно мер, принимающих значения из множеств специального вида

Предположим, что мера ρ принимает значения из множества $S'(t)$, для которого выполняется следующее включение $S'(t_1) \supset S'(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in T_0$, $(t_1 < t_2)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 21.1. Для того, чтобы невозмущенный процесс был практически (ρ_0, ρ)-устойчивым, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) существует постоянно положительный по мере $\rho \in S'(t)$ непрерывный функционал $V(\varphi, t)$, удовлетворяющий свойствам J и K;

2) функционал $V(\varphi, t)$ является невозрастающим на возмущенных процессах при всех $t \in T_0$;

3) функция $m(t)$ и постоянная m_0 такие, что $m_0 \leq m(t)$ для любых $t = t_1 \in T_0$ и $t = t_1 - \Delta t \in T_0$, где $\Delta t < \varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число;

4) при выполнении условий 1)–3) хотя бы одно неравенство выполняется строго.

Теорема 21.1 отличается от теоремы 20.1 наличием дополнительного условия невозрастания функционала $V(\varphi, t)$ вдоль возмущенного процесса. Доказательство необходимости выполнения этого условия не вызывает трудностей. Достаточно задать функционал следующим образом

$$V(\varphi, t) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sup_{\tau > t} \rho_i(\varphi, \tau) \right).$$

Достаточность условий теоремы доказывается как и в случае теоремы 20.1. Целесообразность введения условия 2 обуславливается тем, что при исследовании устойчивости конкретных процессов свойство невозрастания функционала является во многих случаях легко проверяемым. Для области $S(t)$ спрраведливо также следующее утверждение.

Теорема 21.2. Для того, чтобы невозмущенный процесс был практически (ρ_0, ρ)-неустойчивым, достаточно выполнения следующих условий:

1) существует постоянно положительный по мере ρ функционал $V(\varphi, t)$;

2) $V(\varphi, t) \le K < \infty$ для всех пар (φ, t) таких, что $\rho(\varphi, t) \in S(t)$;

3) производная функционала $V(\varphi, t)$ вдоль возмущенного процесса определенно положительна по мере ρ.

Доказательство. Предположим, что выполняются условия теоремы 21.2 и при этом невозмущенный процесс практически устойчив по мерам ρ_0 и ρ. То есть при $\rho_0(\varphi, t) \in S_0(t_0)$ выполняется включение $\rho(\varphi, t) \in S(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}_0$. Согласно предположению существует хотя бы один возмущенный процесс, определенный на всем множестве $\mathcal{T}_0$. Вследствие определенной положительности производной функционала $V(\varphi, t)$ по мере ρ вдоль возмущенного процесса при любых $t \in \mathcal{T}_0$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, t) \ge \nu > 0.$$

Оценим функционал $V(\varphi, t)$ на возмущенном процессе с учетом неравенства, полученного для его производной

$$V(\varphi, t) = V(\varphi, t) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(\varphi, t)\,dt \ge V(\varphi, t_0) + \nu(t - t_0).$$

Правая часть этого неравенства с учетом того, что функционал $V(\varphi, t_0) > 0$ при достаточно больших $t > t_0 \in \mathcal{T}_i$ превосходит любое наперед заданное число, что противоречит условию 2) ограниченности функционала $V(\varphi, t)$ в любой момент времени $t \in \mathcal{T}_0$. Теорема доказана.

Предположим далее, что заданы функции $q \in C[R_+, R_+]$ и $r \in C^1[R_+, R_+]$ и определены области

$$S_0^*(t) = \{\rho_H : \rho_{H2}(\varphi, t_0) < q(t), t_0 \in \mathcal{T}_i\};$$
$$S^*(t) = \{\rho : \rho_2(\varphi, t) < r(t), t \in \mathcal{T}_0\}$$

с помощью мере (3.6) и (3.9).

Теорема 21.3. Для того, чтобы невозмущенныю процесс был практически (ρ_{H2}, ρ_2)-устойчивым, достаточно выполнения следующих условий:

1) существует постоянно положительный по мере ρ_2 функционал $V(\varphi, t)$, непрерывный по мере ρ_{H2};

2) производная функционала $V(\varphi, t)$ вдоль возмущенного процесса удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, t) \le \frac{dr}{dt}, \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0;$$

3) для любого момента времени $\tau \in \mathcal{T}_0$ выполняется неравенство $r(\tau) > m_0$.

Доказательство. Предположим, что выполняются условия теоремы 21.3. В силу специфики построения областей $S_0^*(t)$ и $S^*(t)$ очевидно, что выполняются условия теоремы 20.1. Остается показать, что условие 3) теоремы 21.3 имплицирует выполнение условия 2) теоремы 20.1. Действительно, выбрав произвольный возмущенный процесс такой, что $\rho_{H2}(\varphi, t_0) \in S_0^*(t_0)$ проинтегрируем неравенство в условии 2 теоремы 21.3 на произвольном интервале времени $[\tau - \Delta\tau, \tau]$ таком, что $\tau, \tau - \Delta\tau \in \mathcal{T}_0$. Имеем

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau} \frac{dV}{dt}\, dt \le \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau} \frac{dr}{dt}\, dt$$

и далее

$$V(\varphi, \tau) - V(\varphi, \tau - \Delta\tau) \le r(\tau) - r(\tau - \Delta\tau),$$

но $r(\tau - \Delta\tau) > m_0$, поэтому окончательно получаем

$$V(\varphi, \tau) - V(\varphi, \tau - \Delta\tau) < r(\tau) - m_0,$$

что и доказывает достаточность условий теоремы.

С учетом предположения о том, что для произвольного $t \in \mathcal{T}_0$ существует хотя бы один возмущенный процесс, исходящий из как угодно малой окрестности границы области $S_0^*(t)$ такой, что

$$\rho_{H2}(\varphi, t_0) \in S_0^*(t_0), \qquad \rho_2(\varphi, t_0) \in S^*(t_0)$$

можно доказать следующее утверждение.

Теорема 21.4. Для того, чтобы невозмущенный процесс был практически (ρ_{H2}, ρ_2)-неустойчивым, достаточно, чтобы в некторой окрестности границы области $S^*(t)$:

1) существовал постоянно положительный по мере ρ функционал $V(\varphi, t)$;

2) производная функционала $V(\varphi, t)$ вдоль возмущенного процесса удовлетворяет неравенству

$$\left[\frac{dV}{dt} - \frac{dr}{dt}\right] \ge g(t);$$

3) для любого возмущенного процесса можно указать фиксированый момент времени $\tau = \tau(t_0) \in \mathcal{T}_0$ такой, что выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{\tau} g(t)\, dt \ge \sup[V(\varphi, \tau) : \rho_2(\varphi, \tau) \in \partial S^*(\tau)] - V(\varphi, t_0).$$

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполняются, но невозмущенный процесс практически устойчив при $t \in \mathcal{T}_0$, то есть $\rho_2(\varphi, t) \in \operatorname{int} S^*(t)$ при $t \in \mathcal{T}_0$. Положим $V(\varphi, t) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j(\varphi, t)$. Пусть возмущенный процесс такой, что $\rho_1(\tilde\varphi, t_0) + \rho_2(\tilde\varphi, t_0) + \cdots + \rho_n(\tilde\varphi, t_0) = r(t_0) - \varepsilon$ где $\varepsilon > 0$. Оценим поочередно левую и правую часть неравенства в условии 3 теоремы

21.4. Имеем

$$\int_{t_0}^{\tau} g(t)\,dt \le \int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) dt = -\big(V(\varphi, t_0) - r(t_0)\big)$$
$$+ \big(V(\tilde{\varphi}, \tau) - r(t)\big) = \varepsilon + \big(V(\tilde{\varphi}, \tau) - r(\tau)\big),$$

но $\rho_2(\varphi, \tau) \in \operatorname{int} S^*(\tau)$, поэтому $V(\varphi, \tau) - r(\tau) < 0$ и $\int_t^\tau g(t)\,dt < \varepsilon$.

С другой стороны,

$$\sup[V(\tilde{\varphi}, t_0) \text{ при } \rho_2(\varphi, t_0) \in \partial S^*(t_0)] - V(\tilde{\varphi}, t_0) = \varepsilon,$$

то есть показано, что неравенство в условии 3 теоремы 21.4 не выполняется. Это доказывает несостоятельность предположения о практической устойчивости возмущенного процесса. Теорема доказана.

Замечание 21.1. Теоремы 21.1–21.4 имеют смысл при ограничениях, наложенных на функционал $V(\varphi, t)$ не во всей области $S(t)$, а лишь в некоторой произвольной малой окрестности границы области $S(t)$.

22. Практическая устойчивость и асимптотическое притяжение процессов

Установим необходимые и достаточные условия асимптотической практической устойчивости невозмущенного процесса.

Пусть для значений меры ρ вдоль невозмущенного процесса существует $S(\infty)$-множество ω-предельных точек. Точку $\eta \in S(\infty)$ назовем ω-предельной для значений меры ρ вдоль невозмущенного процесса, если существует последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\rho(\varphi, t_k) \to \eta \qquad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Очевидно $S(\infty) \subset \dot{S}(t \neq \cup\, \partial S(t))$ и для всех $\rho \in S(\infty)$ выполняется неравенство $\rho_i \le 0$ $(i \in [1, n])$.

Предположим, что граница $\partial S(\infty)$ области $S(\infty)$ гладкая и $d(\partial S(\infty), \partial S(t)) > \alpha > 0$. Последнее замечание не ограничивает общности, так как области $S_0(t)$ и $S(t)$ задаются априори.

Определение 22.1. Невозмущенный процесс (ρ_0, ρ)-притягивающий, если

1) возмущенные процессы определены при всех $t \in T_0$;

2) для произвольного возмущенного процесса такого, что $\rho_0 \in S_0(t_0)$ при $t_0 \in T_i$ следует $\rho \to S(\infty)$ при $t \to +\infty$.

Определение 2.2. Невозмущенный процесс равномерно (ρ_0, ρ)-притягивающий, если условия определения 22.1 выполняются равномерно по $t_0 \in T_i$.

Определение 22.3. Невозмущенныю процесс асимптотически практически (ρ_0, ρ)-устойчив, если он практически (ρ_0, ρ)-устойчив относительно множеств S_0, $S(t)$ и (ρ_0, ρ)-притягивающий относительно множеств S_0, $S(t)$ и $S(\infty)$.

Установим предварительно справедливость следующего утверждения.

Лемма 22.1. Пусть возмущенный процесс такой, что:

1) существует непрерывный постоянно положительный в области $S(t) \setminus S(\infty)$ функционал $V(\varphi, t)$, производная которого удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} V(\varphi, t) \leq -w(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho \in S(t), \ t \in \mathcal{T}_0;$$

2) функционал $w(\varphi)$ непрерывный, определенно положительный по расстоянию от границы области $S(\infty)$ до точки $\rho(\varphi, t)$;

3) $w(\varphi) > 0$ при $\rho \in S(t) \setminus S(\infty)$; $w(\varphi) = 0$ при $\rho \in S(\infty)$.

Тогда для любого возмущенного процесса такого, что $\rho_0 \in S_0(t)$ при $t \in \mathcal{T}_i$ имеет место предельное отношение $\rho \to S(\infty)$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть выполняются условия лемы 22.1. Будем рассматривать такие процессы, для которых $\rho \in S(t)$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$. Из условия 1 леммы 22.1 находим

$$V(\varphi, t) - V(\varphi, t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \leq -\int_{t_0}^{t} w(\varphi)\, d\tau. \tag{22.1}$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^{t} w(\varphi)\, dt \leq V(\varphi, t_0) - V(\varphi, t) \leq V(\varphi, t_0) + K \tag{22.2}$$

так как $|V(\varphi, t)| < K$ при всех $\rho \in S(t)$ и $t \in \mathcal{T}_0$.

В силу условия 1, при всех $\rho \in S(t)$ функционал $w(\varphi) \geq 0$. Согласно (22.2) получаем равномерною ограниченность интеграла для любого возмущенного процесса. Отсюда следует сходимость интеграла. Следовательно, $\lim w(\varphi) = 0$ при $t \to +\infty$. Тогда $\rho(\varphi, t) \to S(\infty)$ при $t \to +\infty$. Пусть это не так. Тогда вдоль некоторого возмущенного процесса можно указать последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что расстояние между точками $\rho(\varphi, t_k)$ области $S(t)$ и множеством $S(\infty)$ будет не меньше сколь угодно малого положительного числа ε. Тогда в силу условия 2 получим $w(\varphi(t_k)) > d > 0$ ($k \in [1, \infty]$), что противоречит условию исчезновения функционала $w(\varphi)$ при $t \to +\infty$. Лемма доказана.

Теорема 22.1. Для того, чтобы невозмущенный процесс был асимптотически практически (ρ_0, ρ)-устойчивым, достаточно, чтобы:

1) выполнялись условия леммы 22.1 при всех $t \geq \tau \geq t_0$;

2) выполнялись все условия теоремы 20.1 при всех $t \in \mathcal{T}_0$.

Доказательство. В силу выполнения условий теоремы 20.1 невозмущенный процесс будет практически (ρ_0, ρ)-устойчив, а выполнение условий леммы 22.1 будет гарантировать асимптотическое (ρ_0, ρ)-притяжение невозмущенного процесса. Предположим, что существует точка $O' \in S(\infty)$ такая, что луч, исходящий из O', проходит лишь через одну граничную точку областей $S(\infty)$ и $S(t)$. В случае, когда $S(\infty)$ одноточечное множество, это условие выполняется всегда. У учетом вышеизложенных предположений справедлива следующая теорема.

Теорема 22.2. Для того, чтобы невозмущенный процесс был асимптотически практически (ρ_0, ρ)-устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) существует непрерывный, определенно положительный по расстоянию $d(\rho, \rho_\infty)$ функционал $V(\varphi, t)$, производная которого dV/dt, вдоль возмущенного процесса, удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt}V(\varphi,t) \le w(\varphi) \le 0, \quad \rho \in S(t), \qquad t \ge \tau \ge t_0;$$

2) функционал $w(\varphi)$ непрерывный, определенно положительный по расстоянию от границы области $S(\infty)$ до точки $\rho(\varphi, t)$ $(d(\rho, \rho_\infty))$;

3) функционал $V(\varphi, t)$ удовлетворяет условию J;

4) функционал $V(\varphi, t)$ удовлетворяет условию K;

5) функционал $w(\varphi) > 0$ при $\rho \in S(t) \setminus S(\infty)$ и $w(\varphi) = 0$ [ри $\rho \in S(\infty)$;

6) для любых двух моментов времени t_1 и $t_1 - \Delta t$, где Δt — сколь угодно малое положительное число, выполняется неравенство

$$V(\varphi,t) - V(\varphi, t-\Delta t) \le m(t_1) - m_0 \qquad \forall t, \Delta t \in T_0;$$

7) хотя бы одно неравенство в условиях 3)–6) выполняется строго.

Доказательство. Необходимость. Пусть невозмущенный процесс асимптотически практически (ρ_0, ρ)-устойчив. Определим функционалы V и w следующим образом. Из точки $O' \in \operatorname{int} S(\infty)$ в фиксированный момент времени $t \in T_0$ проведем через точку $\rho(\varphi, t)$ луч, который пересекает поверхности $\partial S(\infty)$ и ∂S в некоторых точках $\rho(\infty)$ и ρ_s. Для (ρ_0, ρ)-притягивающих процессов можно построить непрерывную функцию $L(t)$, заданную при $t \ge t_0$, строго монотонно убывающую до нуля справа, такую, которая мажорирует расстояние от точки ρ до границы области $S(\infty)$ вдоль луча, исходящего из точки O'.

Положим

$$w(\varphi) = \begin{cases} [d(\rho, \rho_\infty)/(\rho_\infty, \rho_s)]e^{-K(d(\rho,\rho_\infty))} & \text{при } \rho \in S(t) \setminus S(\infty) \\ 0 & \text{при } \rho \in S(\infty), \end{cases}$$

(где $K(z)$ — функция, обратная к $L(t)$)

$$V(\varphi, t) = \int_t^{t_0} w(\varphi(h,t))\,dt \qquad \text{при } t \in T_0.$$

Очевидно, для проведенного построения область $S(t)$ следует преобразовать к $\tilde{S}(t)$.

В этой области будет наблюдаться практическая (ρ_0, ρ)-устойчивость и (ρ_0, ρ)-притяжение. Кроме того, на границе области $\tilde{S}(t)$ функционал $V(\varphi, t)$ будет принимать максимальное значение (выполняется условие J) на границе области:

$$V(\varphi, t) = \int_t^{\infty} e^{-t}\, dt = e^{-t}.$$

Выполнение условий 1)–3), 5) очевидно. Выполнение условия 6) доказывается как и в теореме 20.1.

Достаточность. Пусть построен функционал $V(\varphi, t)$, удовлетворяющий условиям теоремы 22.2. Предположим, что существует возмущенный процесс, вдоль которого при некотором значении $t_1 \in \mathcal{T}_0$ выполняется включение $\rho(\varphi, t_1) \in \tilde{S}(t_1)$. При этом, для значений $t \in [t_0, t_1]$ имеем $\rho(\varphi, t) \in \operatorname{int} \tilde{S}(t)$. Из условия 1 теоремы при $w = 0$ находим

$$V(\varphi, t_1) - V(\varphi, t_1 - \Delta t) \le 0 \qquad \text{при} \quad \rho \in S(t),\ t_1, t_1 - \Delta t \in \mathcal{T}_0.$$

Для значения $t_1 - \Delta t$, $\Delta t < \varepsilon$ в силу условия 5) теоремы выполняется неравенство

$$V(\varphi, t_1 - \Delta t) \le m_0.$$

Из последовательности неравенств

$$m(t_1) \le V(\varphi, t_1) \le V(\varphi, t_1) - V(\varphi, t_1 - \Delta t) + m_0 < m(t_1),$$

с учетом условий 6), 7) приходим к противоречию. Это доказывает, что $t_1 \notin \mathcal{T}_0$ и, следовательно, невозмущенный процесс практически (ρ_0, ρ)-устойчив относительно множеств $S_0(t)$, $S(t)$. В силу выполненнеия условий леммы 22.1 находим, что для любого возмущенного процесса такого, что $\rho(\varphi, t) \in S(t)$ при $t \in \mathcal{T}_0$ имеет место предельное соотношение $\rho \to S(\infty)$ при $t \to +\infty$, что и требовалось доказать.

Замечание 22.1. Следует отметить, что условия теорем этой главы не фиксируют определенную методику проверки скорости роста функционала $V(\varphi, t)$. Это можно производить путем:

— вычисления производной функционала в силу возмущенного процесса и проверки ее знакоопределености;

— оценки функционала $V(\varphi, t)$ на возмущенном процессе при помощи интегральных и других неравенств.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К Введению

Отсутствие единого и достаточно полного определения понятия системы не является непреодолимым препятствием при исследовании конкретных явлений и процессов (Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н. Коваленко [1]. Подход, изложенный в монографии В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольского, С.Н. Васильева [1], определяет понятие системы процессов, содержательная часть которого охватывает: классические динамические системы (см. Дж.Д. Биркгоф [1]; К.С. Сибирский [1]; частично упорядоченные общие динамические системы; обобщенные (дисперсные) динамические системы (см. Б.М. Будак [1], Е.А. Барбашин [1], И.У. Бронштейн, Б.А. Щербаков [1] и др.); непрерывные локальные полудинамические системы (см. N.P. Bhatia, O. Hajek [1]); динамические системы с запаздыванием (см. В.К. Дуболарь [1]; общие системы (см. В.И. Зубов [1]); абстрактный локальный полупоток (см. Д.В. Аносов [1]); абстрактные процессы (см. А.А. Мовчан [1]; процесс, система решений процесса О. Гаека (см. O. Hajek [1]); вычислительный процесс (см. И. Бабушка и др. [1]); случайный процесс (см. Н.П. Бусленко и др. [1]).

С 1981 г. в отделе устойчивости процессов Института механики АН УССР ведутся исследования устойчивости по мерам на основе метода функционалов Ляпунова-Мовчана (см., например, В.Д. Подильчук [1]). Для конечномерных систем достаточно полное изложение теории устойчивости по двум мерам имеется в монографии V. Lakshmikantham, S. Leela, A.A. Martynyuk [1].

1. В этом разделе мы руководствуемся некоторыми соображениями из Н.П. Бусленко и др. [1] и Т.К. Сиразетдинова [3].

2. Наше изложение в этом разделе использует рабовты В.М. Матросова и др. [1], Л.И. Седова [1], Е.А. Барбашина [2], Н.Н. Красовского [2].

3. Систематизация применяемых мер состояний процессов осуществляется путем анализа работ А.М. Ляпунова [1], В.И. Зубова [1], А.А. Мовчана [1], В.М. Матросова [1], Т.К. Сиразетдинова [2], А.М. Слободкина [1], А.А. Мартынюка [3], А.А. Мартынюка, В.Д. Подильчука [1].

4. Излагаемая концепция устойчивости процессов формулируется на основе работ Н.П. Бусленко и др. [1], В.В. Калашникова [1], А.А. Мартынюка [1], Н.Г. Четаева 1.

К главе I

Механика неавтономых систем приобретает всё большее значение в связи со многим практическими запросами техники и технологии.

5. Всё-таки, не малое число вопросов аналитической механики систем с реономными связями ищут более точное решение. В.А. Вуйичич заметил в 1979 году (записки докладов Математического института Белград, 25 апреля 1979 года) что закон сохранения енергии и „обобщенный интеграл энергии" реономной системи $T_2 - T_0 + \Pi = h$ не относится к одному и тому же движению. Доказательство опубликовано в работе В.А. Вуйичич: *Об интеграле энергии систем, стесненных нестационарными связями,* Teor. Prim. Mehanika, 6, 1980, стр. 133–143. К этому вопросу следовали доклады и статьи: V. A. Vujičić: [9], *Zakon energije nestacionarnog sistema,* XV jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, A-6, Kupari, 1981, 223–226; *The energy integral of rheonomous system,* Acad. Serb. Sci. Arts, Glas **47** (1981);

— В.В. Румянцев, *К динамике Лагранжевых реономных систем со связями,* Прикл. Мат. Мех. **48** (1984), 540–550;

— В.В. Румянцев, *О различных формах теоремы о кинетической энергии,* Теор. Прим. Механика **11** (1985), 147–154.

— M. Kažić, *Mechanical energy of rheonomical systems; ~~energy integral,~~* ~~X~~VII Yugoslav congres of theoretical and Appplied Mechanics, A – Opšta mehanika, Zadar, 1986, 27–32.

6. В своей статье *Об инвариантиности принципов в механике,* Teor. Prim. Mehanika **11** (1985), 155–168, В.А. Вуйичич указал на некоторые неэквивалентности и неинвариянтности принципов аналитической механике, а в работе M. Kažić, *O kretanju reonomnih sistema,* PMF, Beograd, 1987, указано на несовместимость механики Ньютона с одной и механики Лагранжа и Гамильтона с другой стороны.

7. В работе V. A. Vujičić [1] предложена модификация основных формул, соотношений и принципов механике реономных систем, а в монографии V. A. Vujičić [2] излагается новый подход к аналитической динамике систем с нестационарными связями.

К главе II

8. Вопрос о связи между невозмущенным движением и нулевым решением системы уравнений возмущенного движения решается на основе преобразований координат А.М. Ляпунова [1]. Теорема 8.1 взята из монографии Л.Т. Груйич, А.А. Мартынюк, М.Риббенс-Павела [1, 2].

9. На основе классических определений устойчивости для автономных и неавтономных систем в работах Lj. T. Grujić [1] и Л.Т. Груйич, А.А. Мартынюк, М.Риббенс-Павела [1, 2] сформулированы определения устойчивости, притяжения и асимптотической устойчивости, учитывающие особенности неавтономных систем. Наше изложение основано на этих работах.

10. Свойства функций сравнения излагаются на основе работы W. Hahn [1].

11–12. При изложении результатов этих разделов нами использованы работы А. М. Ляпунова [1], Н. Н. Красовского [1], W. Hahn [1], Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского [1, 2], Л. Т. Груйича, А. А. Мартынюка, М. Риббенс-Павелн [1, 2].

13. Теоремы 13.1–13.6 известны из многорафии Л. Т. Груйич, А. А. Мартынюк, М. Риббенс-Павела [1, 2].

14. Теоремы о неустойчивости излагаются на основе работ А. М. Ляпунова [1], Н. Г. Четаева [1], Н. Руша, А. Абетса, М. Лалуа [1], Н. Н. Красовского [1]. Теорема 14.5 имеется в работе В. А. Вуйичича, В. В. Козлова [1].

15. Результаты этого параграфа основаны на работах В. А. Вуйичича [4, 8].

К главе III

16. Во введении были описаны различные меры, нашедшие применение в теории устойчивости систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Определения устойчивости процесса φ (необязательно невозмущенного) по мерам здесь формулируются, учитывая результаты работ А. А. Мовчана [1], Т. К. Сиразетдинова, Л. Т. Груйича, А. А. Мартынюка, М. Риббенс-Павелы [1, 2], V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk [1], А. А. Мартынюка, В. Д. Подильчука [2].

17. Знакоопределенность по мере функционалов, применяемых в прямом методе А. М. Ляпунова, рассматривалась в работе А. А. Мовчана [1]. Приводимые здесь понятия являются обобщением соответствующих определений из разделов 11–12.

18. Здесь приводятся результаты, основанные на работах А. А. Мартынюка [3], А. А. Мартынюка, В. Д. Подильчука [2], В. Д. Подильчука [1], А. М. Слободкина [1], Т. К. Сиразетдинова [1].

К главе IV

Практическая устойчивость движения достигла значительного уровня обобщений (см. Р. З. Абдуллин, Л. Ю. Анапольский [1]), а применяемые при этом методы являются развитием класических методов А. М. Ляпунова и его последоватлей (см. A. A. Martynyuk [2, 4–7]), Lj. T. Grujić [2] и др.). Предлагаемый здесь вариант теории практической устойчивости ориентирован на системы с распределеными параметрами, а также многие другие системы, удовлетворительно моделируемые системой процессов.

19. Постановка задачи и основнье определения основны на результатах работ А. А. Мартынюка [4] и А. А. Мартынюка, В. Д. Подильчука [1].

20. В основу этого раздела положена работа А.А. Мартынюка, В.Д. Подильчука [1].

21. Приведенные здесь результаты ранее не публиковались (см. В.Д. Подильчук [1]).

22. Результаты этого раздела изложены в статье А.А. Мартынюка, В.Д. Подильчука [2].

Заметим, что задачи динамики систем, содержащих жидкость (см. Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев [1]), а также упругие элементы (см. В.В. Болотин [1], B. Skalmierski, A. Tylikowski [1]) являются богатым источником новых постановок задач о практической устойчивости процессов по двум мерам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю.

1. *К задачам практической устойчивости.* В кн.: *Вектор-функции Ляпунова и их построение*, Новосибирск, Наука, 1980, с. 34–92.

Ангелич Т.П. (Angelitch T.P.)

1. *Tensorkalkül nebst Anwendungen.* Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III, Springer-Verlag, Berlin, 1968, 202 стр.

Аносов Д.В.

1. *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Наука, Москва, 1967, 309 с.

Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.И.

1. *Численные процессы решения дифференциальных уравнений*, Мир, Москва, 1969, 368 с.

Барбашин Е.А.

1. *Дисперсивные динамические системы*, Успехи матем. наук **5** № 4 (38) (1950), 138–139.
2. *Введение в теорию устойчивости*, Наука, Москва, 1967, 223 с.

Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.

1. *Об устойчивости движения в целом*, Докл. АН СССР **86**, № 3 (1952), 453–456.
2. *О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом*, Прикл. мат. и мех. **18** (1954), 345–350.

Биркгоф Дж. Д.

1. *Динамические системы*, ГИТТЛ, Москва, 1941, 320 с.

Болотин В.В.

1. *Динамическая устойчивость упругих систем*, Гостехиздат, Москва, 1956, 600 с.

Бронштейн И.У., Щербаков Б.А.

1. *Некоторые свойства устойчивых по Лагранжу воронок обобщенных динамических систем*, Изв. АН МССР **5** (1962), 99–102.

Будак Б.М.

1. *Дисперсные динамические системы*, Вестн. Моск. ун-та **8** (1947), 174–194.

Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н.

1. *Лекции по теории сложных систем*, Сов. радио, Москва, 1973, 439 с.

Бхатия Н.П. Гаек О. (Bhatia N.P., Hajek O.)

1. *Local semi-dynamical systems*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1969.

Вуйичич В.А. (Vujičić V.A.)

1. *The modification of analytical dynamics of rheonomic systems*, Tensor N.S. **46** (1987), 418–431.
2. *Dynamics of rheonomic systems*, Matematički institut, Beograd, 1990.
3. *Одно следствие инвариантности принципа Гаусса*, Прикл. мат. и мех. **51** (5) (1987), 735–740.
4. *Общее утверждение об устойчивости движения и состояния равновесия механических систем*, Publ. Inst. Math. **11** (**25**) (1971), 33–41.
5. *Covariant equations of disturbed motion of mechanical systems*, Tensor N.S. **22**, 3 (1971), 41–47.
6. *General conditions of stability of the state of equilibrium of the dynamic system of a variable mass*, Tensor N.S. **19** (1968), 314–316.
7. *Über die Stäbilitat der stationären Bewegungen*, ZAMM **48** (1968), 291–293.
8. *Критерий об устойчивости состояния равновесия систем динамических точек*, Publ. Inst. Math. **8** (**22**) (1968), 69–72.
9. *Kovarijantna dinamika*, Matematički institut, Beograd, 1981, 132 с.

Вуйичич В.А., Козлов В.В.

1. *Об устойчивости равновесия в непотенциальном силовом поле*, Teor. Prim. Meh. **15** (1989), 139–145.

Гаек О. (Hajek O.)

1. *Theory of processes*, Czechosl. Math. J. **17** (**92**), № 2 (1967), 159–199.
2. *Theory of processes II*, Czechosl. Math. J. **17** (92), № 3 (1967), 372–398.

Груйич Л.Т. (Grujić Lj. T.)

1. *Novel development of Lyapunov stability of motion*, Int. J. Control **22**, 4 (1975), 525–549.
2. *Practical stability with the settling time of composite systems*, Automatica Teoretski prilog **9**, № 1, (1975), 1-11.

Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павела М. (Grujić Lj. T., Martynyuk A. A., Ribbens-Pavella M.)

1. *Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях,* Наук. думка, Киев, 1984, 306 с.
2. *Large scale systems stability under structural and singular perturbations,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987, 366 p.

Дуболарь В. К.

1. *Динамические системы с запаздыванием,* Докл. АН СССР **183**, № 5, 999—1002.

Зубов В. И.

1. *Методы А. М. Ляпунова и их применение,* Изд-во Ленингр. Ун-та, Ленинград, 1957, 241 с.
2. *Математические методы исследования систем автоматического регулирования,* Судпромгиз, Ленинград, 1959, 324 с.

Йошизава Т. (Yoshizawa T.)

1. *Stability theory by Liapunov's second method,* Math. Soc. Jap., Tokyo, 1966, 223 p.

Калашников В. В.

1. *О задаче исследования устойчивости функционирования сложных систем,* Докл. АН СССР **177**, № 6 (1967), 1294—1297.

Козлов В. В.

1. *Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа-Дирихле,* Прикл. мат. и мех. **50**, № 6, 928—937.
2. *Асимптотические решения уравнений классической механики,* Прикл. мат. и мех. **46**, № 4, (1982), 573—577.

Красовский Н. Н.

1. *Некоторые задачи теории устойчивости движения,* Физматгиз, Москва, 1959, 211 с.
2. *Дополнение IV.* В кн.: Малкин И. Г., *Теория устойчивости движения,* Наука, Москва, 1968, 475—514.

Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А. (Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.)

1. *Stability analysis of nonlinear systems,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1989, 315 p.
2. *Устойчивость движения: метод интегральных неравенств,* Наук. думка, Киев, 1989, 271 с.

Ла-Салль Ж. (LaSalle J.)

1. *The stability of dynamical systems*, SIAM, Philadelphia, 1976, 76 p.

Ляпунов А. М.

1. *Общая задача об устойчивости движения*, Собр. соч. в. 6-ти т., т. 2, Изд-во АН СССР, Москва-Ленинград, (1956), 7–264.
2. *Лекции по теоретической механике*, Наук. думка, Киев, 1982, 632 с.

Мартынюк А. А. (Martynyuk A. A.)

1. *Устойчивость движения сложных систем*, Наукова думка, Киев, 1975, 351 с.
2. *Technical stability of nonlinear and control systems*, Nonlin. Vibr. Probl. **19** (1979), 21–84.
3. *Об устойчивости и неустойчивости систем процессов по двум многозначным мерам*, Прикл. механика **17**, № 2, (1981), 104–109.
4. *Практическая устойчивость движения*, Наук. думка, Киев, 1983, 243 с.
5. *Methods and problems of the practical stability of motion theory*, Nonlinear Vibr. Probl. **22** (1984), 47–68.
6. *Lyapunov's function mewthod in the problem of practical stability*, Nonlin. Vibr. Probl. **22** (1984), 47–68.
7. *Method of comparison in the theory of practical stability*, Nonlin. Vibr. Probl. **22** (1984), 69–89.

Мартынюк А. А., Гутовски Р.

1. *Интегральные неравенства и устойчивость движения*, Наук. думка, Киев, 1979, 271 с.

Мартынюк А. А., Подильчук В. Д.

1. *Общая задача о практической устойчивости систем процессов*, Киев, 1982, 29. с., (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 82.20).
2. *Об асимптотической практической устойчивости систем процессов*, Прикл. Механика **19**, № 1, (1983), 89–94.

Матросов В. М.

1. *Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределенными параметрами*, Автоматика и телемеханика **1** (1973), 5–22.
2. *Метод сравнения в динамике систем, I*, Дифф. уравнения **10**, № 9, (1974), 1547–1554.

Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.

1. *Метод сравнения в математической теории систем*, Наука, Новосибирск, 1980, 478 с.

Мовчан А. А.

1. *Устойчивость процессов по двум метрикам*, Прикл. мат. и мех. **24**, № 6, (1960), 988–1001.

Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.

1. *Динамика тел с полостями, содержащими жидкость*, Наука, Москва, 1965, 439 с.

Персидский К. П.

1. *Об устойчивости движения по первому приближению*, Мат. сб. **40**, № 3, (1933), 284–293.

Подильчук В. Д.

1. *Устойчивость по Ляпунову и практическая устойчивость систем процессов по двум векторным мерам*, Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук, Киев, 1983, 16 с.

Румянцев В. В., Озиранер А. С.

1. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, Москва, 1987, 253 с.

Руш Н., Абетс П., Лалуа М.

1. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, Москва, 1980, 300 с.

Седов Л. И.

1. *Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы*, Прикл. мат. и мех. **32**, № 5, (1968), 771–785.

Сибирский К. С.

1. *Введение в топологическую динамику*, РИО АН МССР, Кишинев, 1970, 144 с.

Сиразетдинов Т. К.

1. *Инвариантность, чувствительность и устойчивость в системах с распределенными параметрами*, В кн.: *Теория инвариантности и ее применение*, Наук. думка, Киев, 1979, 389–398.
2. *Устойчивость множества процессов*, В кн.: *Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением*, Наука, Новосибирск, 1979, 25–38.
3. *Сложные системы и задача аналитического проектирования*, *I*, Изв. Вузов. Авиационная техника № 4, (1980), 59–64.

Скальмирский Б., Теликовский А. (Skalmierski B., Tylikowski A.)

1. *Stabilność układow dynamicznych*, Warszawa, PWN, 1973, 174 s.

Слободкин А. М.

1. *Об устойчивости равновесия систем с бесконечным числом степеней свободы в смысле Ляпунова*, Докл. АН СССР **157**, № 1, (1964), 63–65.

Хан В. (Hahn W.)

1. *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967, 446 p.

Халанай А. (Halanay A.)

1. *Differential Equations*, Academic Press, New York, 1966, 528 p.

Четаев Н. Г.

1. *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике*, Изд-во АН СССР, Москва, 1962, 535 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ