

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ БЕОГРАД

ЋЕМАЛ ДОЛИЧАНИН • Ю. П. СОЛОВЬЁВ

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

БЕОГРАД, 1993

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ БЕОГРАД

Ђ. Доличанин, Ю. П. Соловьёв

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Београд, 1993

Рецензенти: А. Т. Фоменко, професор државног универзитета
”Ломоносов”, дописни члан Руске академије наука
Петар М. Васић, редовни професор Електротехничког
факултета у Београду
Бранко Колунџић, доцент Електротехничког факултета у
Београду
Раде Живаљевић, виши научни сарадник Математичког
института САНУ

Уредник: Зоран Марковић

Припремљено за штампу одлуком Научног већа
математичког института САНУ од 29. 06. 1993

Предисловие

Настоящая книга написана прежде всего для физиков, а также для математиков и инженеров с целью познакомить их с методами современной дифференциальной геометрии в классической электродинамике и показать замечательно широкий диапазон приложений этих методов. В этом отношении данная книга значительно отличается от стандартных руководств как по дифференциальной геометрии, так и по классической электродинамике. С одной стороны, мы стремились к математически строгому уровню, а с другой - старались сделать изложение ясным, язык менее формальным.

Книга, охватывающая граничную область между физикой и чистой математикой, всегда проблематична. Поэтому наше изложение может показаться некоторым физикам и инженерам слишком детализированным и абстрактным, а некоторым математикам - недостаточно подробным и полным, поскольку мы намеренно опустили ряд доказательств. К счастью, потребность в знаниях в области современной геометрии среди физиков и инженеров постоянно растет и связано это, по - видимому с тем, что Вигнер называл *непостижимым соответствием математики и физики*.

Со времен Ньютона поиски геометрических моделей физических явлений служили источниками математических задач. Фактически целые области геометрии выросли из попыток разобраться в конкретных физических ситуациях. И хотя в этом столетии геометрия и физика развивались порознь, физика продолжала стимулировать математические исследования. Отчасти по этой причине влияние физики на математику всем хорошо понятно. Однако математика вообще, а в последние десятилетия геометрия в особенности, играет гораздо более тонкую роль, которая в конечном счете куда важнее. Когда создается удачная модель физического явления, то сама математическая структура модели открывает новые стороны этого явления. Иными словами, когда модель удачна, то естественно думать о физических величинах на языке математических объектов, их представляющих, и интерпретировать сходные или вторичные явления на языке этой же модели. В результате исследование внутренней структуры модели может изменить и расширить наше представление о физическом явлении. Великолепным примером служит электродинамика Максвелла, которая дала столь ясную совершенную картину электрических и магнитных явлений, что ею стали пользоваться как основой для описания других полевых явлений. Развитие геометрических аспектов электродинамики уже в наши

дни привело к созданию единой теории электрослабого взаимодействия, претендующей на главенствующую роль в физике элементарных частиц. Мы надеемся, что наша книга откроет физикам и инженерам доступ к современным геометрическим методам в электродинамике. Кроме того, Мы считаем, что математики тоже выиграют, если будут изучать эти методы, одновременно с приложениями.

РАЗДЕЛ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Глава 1.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ И
КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

1. Обзор основных понятий электростатики

Рассмотрим электростатическое поле в пустоте. Электрическое поле (или напряженность) \vec{E} определяется силой \vec{F} , действующей на пробный заряд q , внесенный в поле, согласно соотношению.

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (1.1)$$

Это определение напряженности не зависит от выбора системы единиц. Предельный переход введен для того, чтобы исключить влияние самого пробного заряда на источники поля, поскольку при $q \rightarrow 0$ поле не будет зависеть от присутствия пробного тела.

Установленный Кавендишем и Кулоном закон для взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме трактуется как действие на расстоянии

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.2)$$

где \vec{F} - сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , \vec{r} - радиус - вектор, соединяющий начало координат, в котором расположен заряд q_1 , с зарядом q_2 . Оператор в правой части соотношения (1.2) действует на координаты заряда q_2 .

Этот закон, одинаково применимый как к положительным, так и к отрицательным зарядам, показывает, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные - притягиваются. Если пробный заряд в соотношении (1.1) выбрать положительным, то уравнение (1.2) приводит к следующему соотношению

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.3)$$

которое определяет электрическое поле \vec{E} в точке \vec{r} , созданное зарядом q , находящимся в начале координат. Этот заряд q соответствует заряду q_1 в соотношении (1.2).

Из закона Кулона можно легко вывести теорему Гаусса о потоке электрического вектора

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

Для этого рассмотрим элемент поверхности $d\vec{S}$, представленный в виде вектора, направленного по внешней нормали к этой поверхности; заряд q находится в точке x'_α на расстоянии r от этого элемента поверхности (рис. 1).

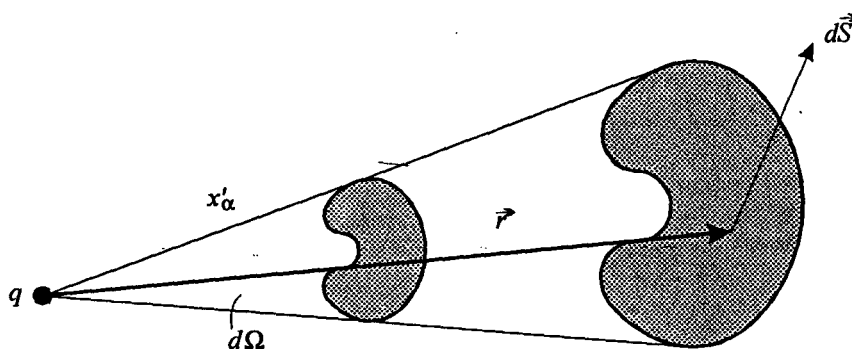


Рис. 1

Умножая обе части уравнения (1.3) на $d\vec{S}$, получим

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Теорема Гаусса следует из этого соотношения, поскольку для любой замкнутой поверхности, охватывающей точку x'_α имеет место равенство

$$\int d\Omega = 4\pi$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Принцип суперпозиции дает нам возможность суммировать поля произвольного числа точечных зарядов, поэтому заряд q в уравнении (1.4) можно считать суммарным зарядом, заключенным внутри замкнутой поверхности S .

Преобразуем поверхностный интеграл к объемному от дивергенции \vec{E}

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{E} dV$$

и используем тот факт, что полный объемный интеграл от плотности заряда ρ есть простого заряд q . Это позволит представить уравнение (1.3) в следующем виде:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

где ρ - заряд на единицу объема в той точке, в которой электрическое поле равно \vec{E} . Так как ротор градиента скаляра равен нулю, то из уравнения (1.3) и принципа суперпозиции следует, что

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.6)$$

Таким образом, электростатическое поле безвихревое. Из теоремы о том, что всякое векторное поле единственным образом определяется ротором и дивергенцией, следует, что электростатическое поле полностью определяется распределением зарядов.

Поскольку электрическое поле безвихревое, то его можно выразить через градиент некоторой скалярной функции ϕ , которая называется *потенциалом поля*

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (1.7)$$

Применим теорему Стокса

$$\int \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ - бесконечно малый вектор, касательный к замкнутому пути интегрирования. Тогда получим

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

поскольку $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Это соотношение показывает, что электростатическое поле консервативно. В таком поле работа, совершенная над зарядом, равна нулю, если заряд описал замкнутую кривую. Следовательно, работа, произведенная при перемещении пробного заряда из одной точки в другую, не зависит от пути. Работа, необходимая для перемещения единичного заряда из бесконечности в данную точку, однозначно определяет потенциал этой точки.

Однако, если рассматриваются поля менее чем трех измерений (например, поля, созданные зарядами, бесконечно протяженными вдоль какой-нибудь линии или поверхности), это определение потенциала приводит к трудностям. В этом случае в качестве начала отсчета нельзя принять бесконечность и следует выбрать какую-нибудь другую точку. Если же рассматриваются конечные источники в трехмерном пространстве, то это определение потенциала точно и удобно. Подстановка соотношения (1.7) непосредственно в уравнение (1.5) приводит к уравнению Пуассона.

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

а в области, где плотность зарядов равна нулю, к уравнению Лапласа.

$$\Delta \varphi = 0.$$

Основная задача электростатики состоит в отыскании решения уравнения Пуассона в различных частных случаях.

2. Задачи с двумерным распределением потенциалов

Решение задач электростатики значительно упрощается, если их геометрию с достаточной точностью можно считать двумерной. При этом возникает ряд методов решения, не имеющих аналога в случае трех измерений, а методы, пригодные в трехмерном случае, значительно упрощаются. Одним из наиболее мощных методов решения двумерных задач является геометрический метод комплексных переменных и конформных преобразований.

Пусть C - комплексная плоскость с координатой $z = x + iy$ и $w = w(z)$ - аналитическая функция переменной z . Положим

$$w(z) = w(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

где φ и ψ - соответственно вещественная и мнимая части функции w . Поскольку $w(z)$ - аналитическая функция, то φ и ψ удовлетворяют соотношениям Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.9)$$

Продифференцировав соотношение (1.8) по x , а соотношение (1.9) по y и затем сложив их, мы получим выражения

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Второе из уравнений получим, поменяв местами x и y . Таким образом, $\varphi = \text{Re} w$ и $\psi = \text{Im} w$ удовлетворяют уравнению Лапласа и представляют собой гармонические функции.

Функция $w = w(z)$ на плоскости S может быть представлена двумя семействами кривых: $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Соотношения Коши-Римана показывают, что кривые этих семейств ортогональны друг другу. Если кривые, соответствующие постоянному φ , определяют эквипотенциальные поверхности, то кривые $\psi = \text{const}$, соответствуют силовым линиям поля. Их называют также линиями тока.

Поток электрического поля через поверхность S определяется соотношением

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Рассмотрим участок эквипотенциальной поверхности $\varphi = \text{const}$, расположенный между двумя линиями тока ψ_1 и ψ_2 единичной высоты по перпендикуляру к плоскости xy . Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ представляют собой единичные векторы вдоль направлений x, y и направления, перпендикулярного плоскости xy , а \vec{t} - единичный вектор вдоль кривой $\varphi = \text{const}$ (рис. 2). Так как высота поверхности равна единице, то $d\vec{t} = \vec{k} \times d\vec{S}$. Тогда формула для потока электрического поля принимает вид

$$\Phi = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_1^2 \nabla \varphi \cdot d\vec{S} = -\int_1^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} \right) \cdot d\vec{S}.$$

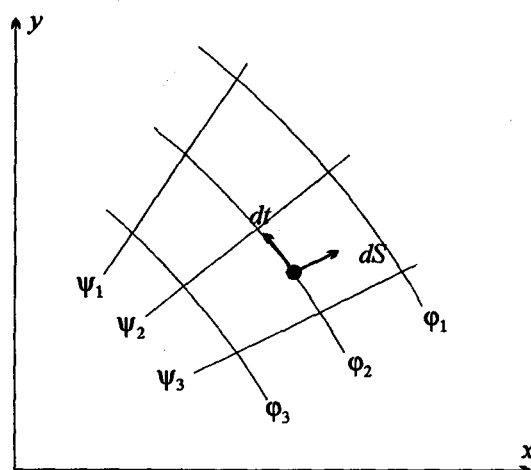


Рис. 2

Подставляя сюда соотношения Коши-Римана (1.8) и (1.9), получим

$$\Phi = \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} i - \frac{\partial \psi}{\partial x} j \right) \cdot d\vec{S} = \int_1^2 (\nabla \psi \times \vec{k}) \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \nabla \psi \cdot d\vec{l} = \psi_2 - \psi_1$$

Таким образом, разность между ψ_1 и ψ_2 равна потоку вектора \vec{E} через эквипотенциальную поверхность единичной высоты, ограниченную соответствующими линиями тока. Это означает, что две линии тока никогда не пересекаются. Теперь понятно также происхождение названия линии тока: в гидродинамике эти кривые соответствуют линиям тока жидкости. В нашем случае они описывают силовые линии электрического поля, а кривые $\phi = const$ эквипотенциальные поверхности. Наоборот, если функция ψ описывает потенциал, то функция ϕ описывает линии тока. Возможность менять местами ϕ и ψ часто используется при решении двумерных задач.

3. Емкость и напряженность электрического поля

Изложенные соображения позволяют вывести формулу для емкости между двумя проводниками, поверхности которых совпадают с эквипотенциальными поверхностями ϕ_1 и ϕ_2 . Будем считать, что поток вектора \vec{E} ограничен при этом линиями тока ψ_1 и ψ_2 . Из соотношения (1.4) и определения потока Φ следует, что

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Емкостью называется величина

$$C = \frac{q}{|\Delta\varphi|} = \frac{\epsilon_0 \Phi}{|\Delta\varphi|} \quad (1.10)$$

Так как поток Φ равен разности функций ψ , соответствующих краям проводников, то соотношение (1.10) преобразуется следующим образом:

$$C = \epsilon_0 \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Здесь предполагается, что все заряды лежат на проводящих поверхностях. В общем случае, когда заряды расположены в пространстве между ними, функция, описывающая линии тока, многозначна.

Зная функцию $w = w(z)$, соответствующую той или иной геометрии, можно вычислить абсолютную величину напряженности электрического поля. Рассмотрим модуль производной w по z :

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{\partial(\varphi+i\psi)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi+i\psi)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + i \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + i \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy \right| \cdot \left| \frac{1}{dz} \right|$$

Используя соотношения Коши-Римана, получим

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2} = |\nabla\varphi| = |\vec{E}|.$$

Таким образом, действительная и мнимая части $\frac{dw}{dz}$ равны проекциям градиента потенциала соответственно на оси x и y , а модуль $\frac{dw}{dz}$ равен абсолютной величине напряженности электрического поля.

4. Потенциал однородного поля. Потенциал линейного заряда

Прежде чем рассматривать преобразования, упрощающие решение многих задач, исследуем потенциалы двух основных видов, к которым часто приводят эти преобразования. Наиболее простым является потенциал однородного электрического поля \vec{E} , направленного вдоль оси x . Этот потенциал определяется выражением

$$\varphi = -\left|\vec{E}\right|x$$

Комплексный потенциал имеет следующий вид:

$$W = -\left|\vec{E}\right|Z = -\left|\vec{E}\right|(x + iy) = \varphi + i\psi$$

соответственно функция, описывающая линии тока, равна $\psi = -\left|\vec{E}\right>y$ (предполагается, что потенциал $\varphi = 0$ на оси y). (1.11)

Поле линейного заряда с плотностью q легко найти с помощью теоремы Гаусса (1.4). В качестве поверхности интегрирования возьмем цилиндр радиуса r , единичной высоты, коаксиальный с линейным зарядом. Тогда для напряженности поля получается следующее выражение:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Величину потенциала можно вычислить: поставив это выражение в соотношение (1.7) и интегрируя последнее:

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}(\ln r - \ln r_0). \quad (1.12)$$

В соответствии со сказанным ранее, это выражение показывает, что потенциал бесконечности нельзя считать равным нулю, так как протяженность самих зарядов бесконечна. Вообще, случай плоского поля может лишь приближенно соответствовать физическим условиям, так как он предполагает не только бесконечную протяженность зарядов, но и бесконечную их величину. Задача может рассматриваться как двумерная только, если можно пренебречь краевыми эффектами, связанными с конечностью системы. Обычно бывает удобно отсчитывать все потенциалы от потенциала одного из проводников независимо от того, заземлена ли в действительности какая-либо часть системы или нет. Так, при выводе соотношения (1.12) предполагалось, что потенциал цилиндра радиуса r_0 , окружающего линейный заряд, равен нулю.

Комплексную потенциальную функцию W можно вывести из соотношений Коши-Римана, однако проще всего получается из соотношения (1.12). Для этого перейдем к тригонометрической форме комплексного числа $Z = re^{i\Theta}$. Тогда получим

$$W = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}(\ln z - \ln z_0) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}(\ln r + i\Theta - \ln r_0) = \varphi + i\psi \quad (1.13)$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

где φ - потенциал, а ψ - функция линий тока. В силу осевой симметрии задачи функция линий тока должна быть пропорциональна аргументу, т.е. полярному углу Θ , если считать Z_0 действительной величиной. Потенциальную функцию системы линейных зарядов легко получить, складывая выражения, аналогичные (1.13), соответствующие каждому линейному заряду в отдельности.

5. Преобразования в комплексной плоскости.

Рассмотрим теперь поведение кривых в небольшой части комплексной плоскости при ее преобразовании. Пусть отображение комплексной плоскости с координатой z в комплексную плоскость с координатой ω задано уравнением $\omega = f(z)$ причем функция f аналитична везде, за исключением конечного числа особых точек. Из анализа известно, что это преобразование конформно во всех точках, кроме особых. Конформность преобразования f означает, что угол между двумя кривыми на плоскости (z) (рис. 3а) равен углу между преобразованными кривыми на плоскости (ω) (рис. 3б). Это можно показать следующим образом.

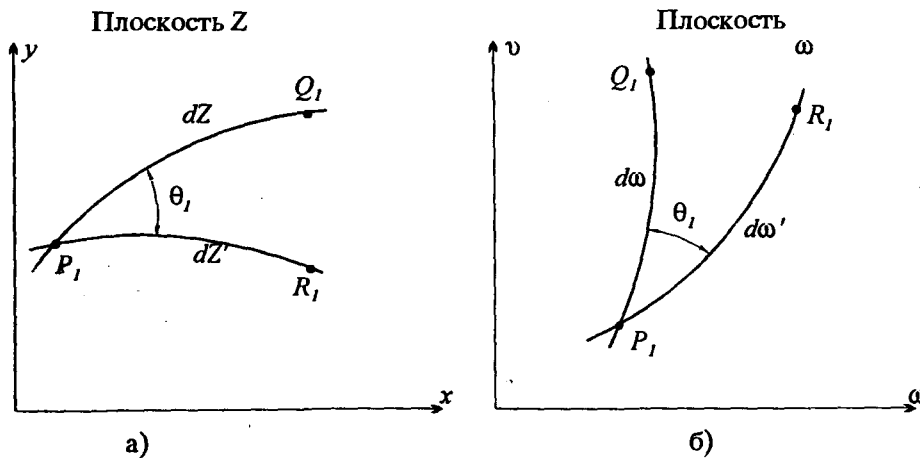


Рис. 3

Так как все производные аналитической функции существуют и непрерывны, то производная $\frac{d\omega}{dz}$ конечна во всех точках за исключением особых.

Глава I. Основная задача электростатики и конформные преобразования

Вычислим производную $\frac{d\omega}{dz}$ в точке P_1 и рассмотрим два линейных элемента, пересекающихся в точке P_1 . Так как аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей, то для аргумента линейного элемента P_2Q_2 получается следующее выражение:

$$\arg(d\omega) = \arg f'(z)_{P_1} + \arg(dz) \quad (1.14)$$

а для аргумента

$$\arg(d\omega') = [\arg f'(z)]_{P_1} + \arg(dz') \quad (1.15)$$

Вычитая соотношение (1.15) из соотношения (1.14), получим

$$\Theta_1 = \Theta_2$$

Модуль производной $\frac{d\omega}{dz} = f'(z)$ представляет собой масштабный множитель, на который умножаются все отрезки по соседству с точкой P_1 . Это происходит из-за того, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей. Таким образом, бесконечно малый треугольник преобразуется в подобный самому себе бесконечно малый треугольник. При этом выполняется следующее равенство

$$|d\omega| = |f'(z)_{P_1}| \cdot |dz|$$

Подобие исходного и преобразованного треугольников является по существу другим выражением того факта, что при конформном преобразовании углы сохраняются. Очевидно, что при таких преобразованиях линии тока и эквипотенциальные поверхности остаются ортогональными.

6. Преобразование Шварца

Шварц предложил преобразование, при котором линия, состоящая из некоторого числа прямолинейных отрезков, расположенная в плоскости (z) , переходит в прямую линию в плоскости (ω) . При этом внутренняя часть многоугольника преобразуется в верхнюю полуплоскость. (Многоугольник может быть замкнут в бесконечности). В основе преобразования Шварца лежит более простое преобразование, при котором угол с вершиной в начале координат изменяется, как показано на рис. 4. Это преобразование имеет и самостоятельное значение.

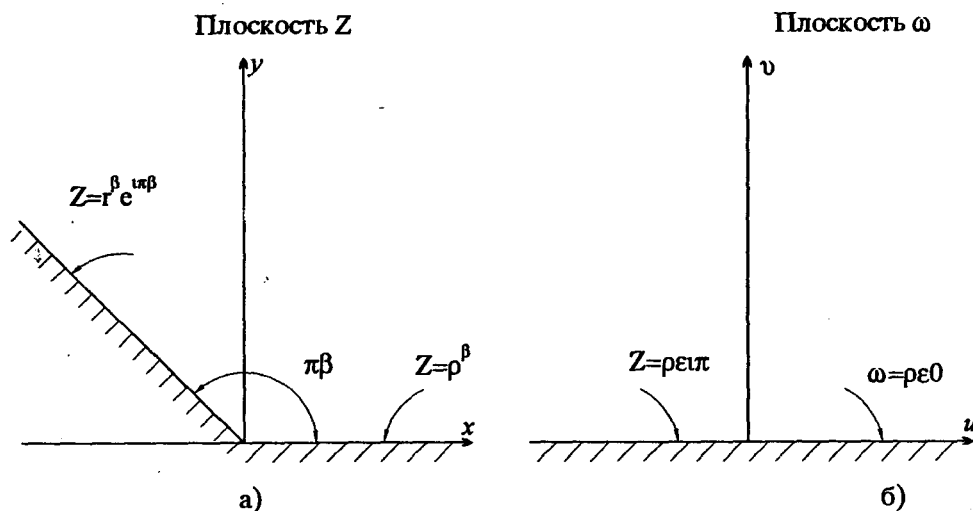


Рис. 4

Рассмотрим преобразование следующего вида

$$z = \omega^\beta \tag{1.16}$$

где β - действительное число, не обязательно целое или рациональное. При таком преобразовании положительная часть действительной оси преобразуется сама в себя, хотя масштаб вдоль этой оси меняется, так как любая абсцисса x возводится в степень $1/\beta$. Во всяком случае, одна из ветвей этого преобразования может быть выражена так, чтобы удовлетворить такому условию. С другой стороны, для точек, лежащих на отрицательной части действительной оси в плоскости (ω), т.е. для точек вида $\omega = r e^{i\pi}$, соответствующие значения z комплексны, так как согласно формуле преобразования

$$z = r^\beta e^{i\pi\beta}$$

Таким образом, в соответствии с конформными свойствами данного преобразования отрицательная часть действительной оси в плоскости (ω) переходит в прямую линию в плоскости (z). Угол между этой прямой и положительной полуосью равен $\pi\beta$. Следовательно, преобразование (1.16) с $\beta < 1$ верхнюю часть плоскости z , лежащую между прямыми $\Theta_1 = 0$ и $\Theta_2 = \pi\beta$, переводит в верхнюю полуплоскость (ω). Показатель β может быть и больше единицы; соответствующий угол в этом случае будет больше

развернутого. Это преобразование имеет одну точку ветвления при $\omega = 0$, в которой углы не сохраняются; во всех остальных точках оно аналитично.

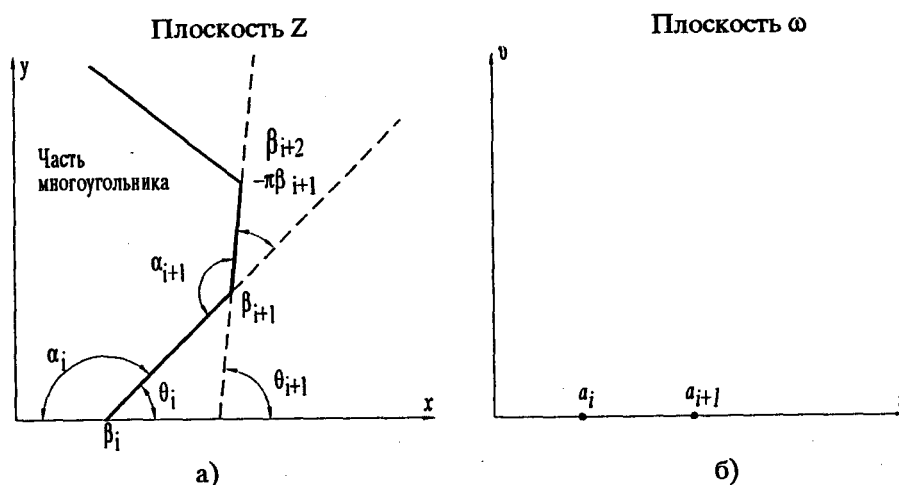


Рис. 5

В более общем случае (рис. 5) имеется ряд точек b_i на плоскости (z), соответствующих вершинам углов многоугольника. Внутренние углы многоугольника равны соответственно d_i . Отразим внутреннюю область многоугольника на верхнюю полуплоскость (z). Для этого рассмотрим преобразование, определяемое следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dz}{d\omega} = C_1 \cdot \prod_{i=1}^n (\omega - a_i)^{\beta_i}, \quad (1.17)$$

где C_1 - константа, которая может быть комплексной. Это преобразование является аналитическим во всех точках, кроме $\omega = a_i$, которые лежат на действительной оси, но пока неизвестны. Следовательно, конформные свойства такого преобразования состоят в том, что действительная ось на плоскости (ω), $\omega = u$, представляет собой отображение прямолинейных отрезков плоскости (z). Угол наклона каждого такого прямолинейного отрезка относительно действительной оси определяется аргументом производной $\frac{dz}{d\omega}$, отнесенного к этому отрезку. Вычислим этот аргумент с помощью уравнения (1.17):

$$\arg\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = \arg C_1 + \beta_1 \arg(\omega - a_1) + \beta_2 \arg(\omega - a_2) + \dots + \beta_n \arg(\omega - a_n) \quad (1.18)$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Кроме того,

$$\arg\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = \arg\left(\frac{dx+idy}{du+idv}\right) \quad (1.19)$$

и $d\upsilon = 0$, ибо элемент $d\omega$ направлен вдоль действительной оси. Следовательно, если соотношение (1.19) отнести к i -му отрезку, то оно примет такой вид:

$$\arg\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = \arg\left(\frac{dx}{du} + i\frac{dy}{du}\right) = \arctan\frac{dy}{dx} = \Theta_i \quad (1.20)$$

Рассмотрим теперь точку ω , лежащую на действительной оси между точками a_i и a_{i+1} . Аргумент числа $\omega - a$ равен нулю, если точка расположена слева от ω и равен π , если она расположена справа. Следовательно, соотношение (1.18) вместе с соотношением (1.20) дает

$$\Theta_i = \arg C_1 + \pi(\beta_{i+1} + \beta_{i+2} + \dots + \beta_n) \quad (1.21)$$

Таким образом, отрезок $a_{i+1} - a_i$ действительной оси плоскости (ω) отображается в прямолинейный отрезок с наклоном Θ_i , лежащий в плоскости (z). Если соотношение (1.21) вычесть из аналогичного соотношения для Θ_{i+1} , то получим

$$\Theta_{i+1} - \Theta_i = \pi\beta_{i+1}$$

Из геометрических соображений (рис. 5а) ясно, что эта разность связана с величиной внутреннего угла α_i многоугольника $b_1 \dots b_n$ следующим соотношением:

$$\alpha_{i+1} = \pi + \pi\beta_{i+1}$$

Для удобства индекс $i+1$ заменим на i и решим это уравнение относительно β_i :

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\pi} - 1$$

Тогда уравнение (1.17) примет следующий вид:

$$\frac{dz}{d\omega} = C_1 \prod_{i=1}^n (\omega - a_i)^{\left(\frac{\alpha_i}{\pi} - 1\right)}$$

(1.22)

Величина C_1 определяет масштаб и угол поворота при преобразовании. Таким образом, преобразование (1.22) и есть то преобразование, которое требовалось отыскать.

В общем случае преобразование Шварца оказывается весьма полезным при условии, что уравнение (1.22) интегрируемо в элементарных функциях. Это возможно, за исключением специальных случаев, если углы кратны 90° и их всего два. Применение преобразования Шварца затруднено также тем, что в формуле преобразования $z = f(\omega)$ независимой переменной является ω , а не z , т.е. координаты точки действительной оси плоскости (ω). Поэтому нахождение координат a_i часто требует больших усилий. Если же координаты a_i найдены, то задача обычно решается просто. Возможности этого метода будут ясны из нескольких простых примеров.

7. Преобразование при наличии одного угла

Отдельный угол может быть всегда перемещен в начало координат так, что $a_i = 0$. При некоторых значениях углов уравнение (1.22) легко интегрируется.

а) $\alpha = \pi$. Интегрирование уравнения (1.22) дает

$$z = C_1 \omega + C_2$$

В этом случае преобразование представляет собой параллельный перенос и вращение. С физической точки зрения оно не представляет интереса.

б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Интегрируя уравнения (1.22), получаем

$$z = C_3 \omega^{\frac{1}{2}} + C_2 \tag{1.23}$$

Если предположить, что константа переноса C_2 равна нулю, то преобразование (1.23) отображает первый квадрант плоскости (z) в верхнюю половину плоскости (ω). Так если в плоскости (ω) дан потенциал, соответствующий однородному полю \vec{E} :

$$\begin{cases} W = -|\vec{E}| \omega = \varphi + i\psi, \\ \varphi = -|\vec{E}| u, \psi = -|\vec{E}| v, \end{cases}$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

то решение для плоскости (z) легко находится по формуле (1.23) :

$$W = -C_4 |\vec{E}| z^2 = -C_4 |\vec{E}| (x^2 - y^2 + 2ixy)$$

$$\varphi = -C_4 |\vec{E}| (x^2 - y^2)$$

$$\psi = -C_4 |\vec{E}| (2xy)$$

Таким образом, мы получим решение задачи о потенциале двух заряженных плоскостей, расположенных под прямым углом друг к другу (рис. 6). Если же φ и ψ поменять местами, то получим решение задачи о потенциале заряженных гиперболических цилиндров.

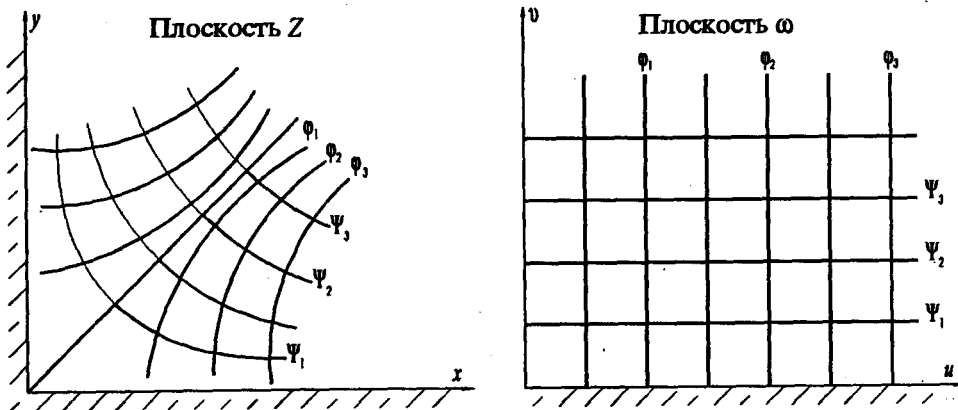


Рис. 6. Преобразование Шварца при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Если комплексный потенциал на плоскости (ω) положить равным потенциалу линейного заряда

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

то при преобразовании (1.23) получается двумерная функция Грина для внутреннего угла между двумя проводящими плоскостями при условии, конечно, что линейный заряд отображается на верхнюю половину плоскости (ω). То же самое преобразование позволяет найти функцию Грина в случае

границ в виде гиперболических цилиндров. Таким образом, в случае таких граничных условий задача поддается решению.

в) $\alpha = 0$. В этом случае интегрирование приводит к следующему результату:

$$z = C_3 \ln \omega = C_3 \ln r + C_3 i \Theta,$$

если пренебречь аддитивной постоянной. Если C_3 действительная величина, то действительная часть z равна $C_3 \ln r$. Следовательно, положительная часть действительной оси плоскости (ω) отображается на всю действительную ось плоскости (z), а верхняя половина плоскости (ω) отображается на полосу шириной $C_3 \pi$, расположенную в плоскости (z) (рис.7).

Это преобразование легко понять, если считать, что начало координат плоскости (ω) отодвигается в $-\infty$, а отрицательная часть действительной оси после этого поворачивается по часовой стрелке до положения, параллельного действительной оси, смещенного однако, на расстояние $C_3 \pi$.

Очевидно, что это преобразование приводит к периодической структуре в плоскости (z), причем полоса шириной $C_3 \pi$ предстает собой как раз один из таких периодов. Верхняя половина плоскости (ω) отображается в первую полосу этой периодической структуры в плоскости (z), нижняя половина - во вторую, лежащую между прямыми $y = C_3 \pi$ и $y = 2C_3 \pi$, и т.д. Это преобразование оказывается весьма полезным в тех случаях, когда в задаче имеются сетки, конденсаторные пластины или, в общем случае, некоторая периодическая структура.

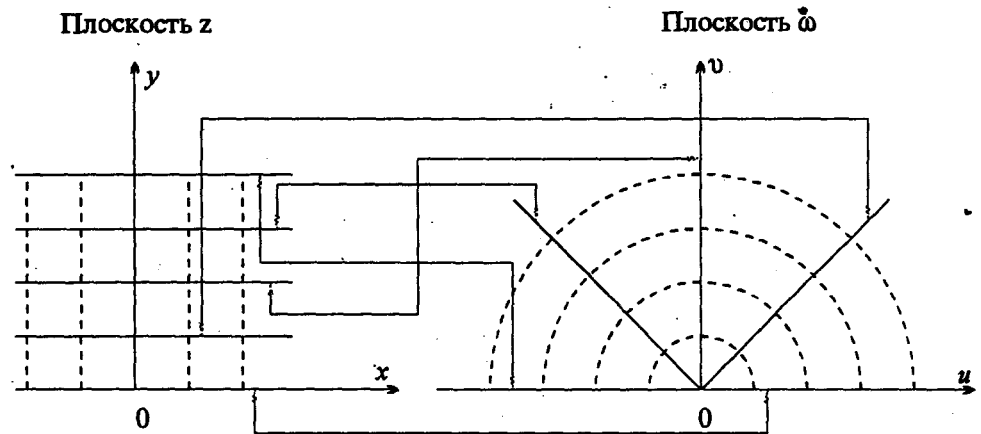


Рис. 7. Преобразование Шварца при $\alpha=0$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

8. Конформное отображение прямоугольника

Если две линии, параллельные оси y , в плоскости (z), повернуть до совпадения с положительной и отрицательной частями действительной оси, то полубесконечная полоса, заключенная между этими прямыми, отображается в верхнюю полуплоскость (ω) (рис. 8).

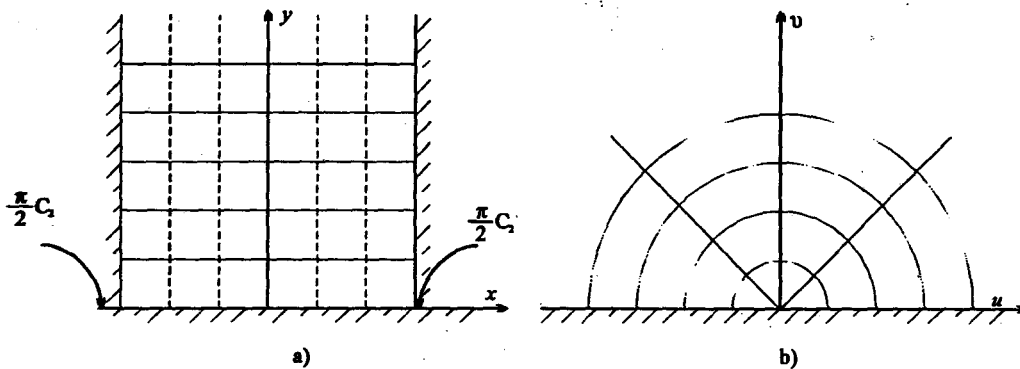


Рис. 8

Пусть вершинам углов соответствуют точки $\omega = \pm a$; тогда дифференциальное уравнение преобразования принимает вид

$$\frac{dz}{d\omega} = C_1(\omega - a)^{-1/2}(\omega + a)^{-1/2} = \frac{C_1}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} = \frac{C_2}{\sqrt{a^2 - \omega^2}} \quad (1.24)$$

Положив в (1.24) $C_1 = iC_2$, мы поворачиваем всю систему на 90° с тем, чтобы она совпала с изображением, приведенным на рис. 8. После интегрирования получим

$$z = C_2 \arcsin\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

откуда

$$\omega = a \sin\left(\frac{z}{C_2}\right).$$

Глава I. Основная задача электростатики и конформные преобразования

Это преобразование обычно используется для того, чтобы решение на плоскости (z) отобразить на плоскость (ω). Если отобразить на комплексный потенциал W однородного поля в плоскости (z)

$$W = -\left| \vec{E} \right| z$$

на плоскость (ω) с помощью соотношения (1.25), то получим распределение потенциала вокруг проводящей заряженной полоски шириной $2a$, или, заменив ϕ функцией ψ , получим распределение потенциала вблизи заряженного экрана со щелью. Главная ось щели или полосы перпендикулярна плоскости рисунка. Если действительную и мнимую части преобразованного потенциала приравнять постоянным величинам, то получаются уравнения для силовых линий и эквипотенциалей поля. Поверхности, описываемые этими уравнениями, представляют собой конфокальные эллиптические и гиперболические цилиндры (см. рис. 8).

Имеются и другие случаи, когда уравнение преобразования при двух углах легко интегрируется. Пяд задач может быть сведен к последним с помощью последовательности простых преобразований

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

9. Решение уравнения Лапласа в полярной системе координат

Уравнение Лапласа легко написать для любой ортогональной криволинейной системы координат: оператор Δ есть просто дивергенция градиента и поэтому, применив к градиенту теорему о дивергенции в бесконечно малом объеме, получим искомое выражение. Многие криволинейные системы координат допускают разделение переменных в уравнении Лапласа. В двумерном случае, при наличии круговых или радиальных границ, наиболее удобно использовать метод разделения переменных для оператора Лапласа в полярных координатах.

Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет следующий вид:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

Для разделения переменных, положим

$$\varphi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

Подставив это равенство в предыдущее уравнение и поделив последнее на φ , получим

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = 0.$$

Теперь переменные разделены, и каждый член этого уравнения должен быть равен некоторой постоянной. Постоянную разделения выберем так, чтобы решениями для Θ были тригонометрические круговые функции угла. В силу периодичности и однозначности решения θ изменяется от 0 до 2π и разрешенными будут лишь некоторые значения k_n^2 параметра разделения. Тогда первый член уравнения можно положить равным k_n^2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k_n^2 \Theta = 0, \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - k_n^2 R = 0 \end{cases}$$

Параметр k_n может принимать только дискретные значения, и при $k_n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned}\Theta_n &= A_n \cos k_n \theta + B_n \sin k_n \theta \\ R_n &= C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}\end{aligned}$$

Если же $k_n = 0$, то

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \Theta_n = (E + F\theta)(G + H \ln r) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos k_n \theta + B_n \sin k_n \theta)(C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}) \quad (1.26)$$

Прежде чем решать конкретные задачи, полезно некоторые уже известные нам потенциалы представить в таком виде, а затем перейти к потенциалам более общей формы. Коэффициенты разложения определяются граничными условиями конкретной задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу о потенциале линейного заряда, расположенного на расстоянии r_0 от оси диэлектрического цилиндра радиуса a и проницаемостью k (см. рис. 10). Сначала логарифмический потенциал одного линейного заряда представим в виде ряда (1.26). Это равносильно смещению начала отсчета потенциала, как показано на рис. 9. Если пренебречь аддитивной постоянной, то формула (1.12) сводится к следующей:

$$\Phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln R \quad (1.27)$$

Ряд (1.26) кроме точки $r = 0$ нигде особенностей не имеет.

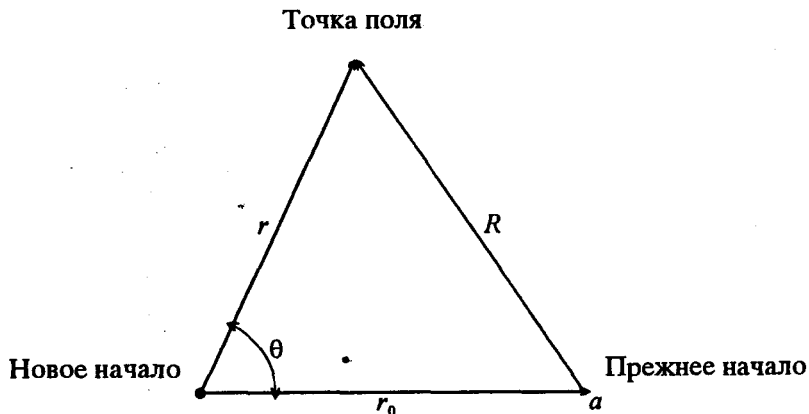


Рис. 9

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Поэтому потенциал (1.27) нельзя представить в виде одного ряда, отнесенного к новому началу координат. Его нужно записать в виде двух отдельных решений: одного - справедливого при $r < r_0$, другого - при $r > r_0$. При $r = r_0$ должна быть непрерывна во всех точках, за исключением той, где расположен заряд. Разрыв в этой точке должен быть такой величины, чтобы суммарный поток, исходящий из нее, соответствовал заряду, приходящемуся на единицу длины.

Выражения для логарифмического потенциала (1.27) линейного заряда, расположенного в начале координат, можно свести к выражению для потенциала заряда, расположенного в точке $\theta = r_0$ и $r = r_0$ (рис. 9), и представить последнее в виде ряда (1.26) следующим образом. Выразим согласно теореме косинусов:

$$R = \left(R^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta \right)^{1/2},$$

и затем разложим потенциал в ряд по степеням r/r_0 при $r < r_0$ и по степеням r_0/r при $r > r_0$. Оба ряда, каждый в своей области, сходятся

$$\varphi_{0 < r < r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos_n \theta - \ln r_0 \right\} \quad (1.28)$$

$$\varphi_{r_0 < r < \infty} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \cos_n \theta - \ln r \right\} \quad (1.29)$$

При рассмотрении задачи о линейном заряде и диэлектрическом цилиндре полярную систему координат выберем так, чтобы ее начало находилось на оси цилиндра, а соответствовало бы направлению на линейный заряд (рис. 10).

Именно этой системе координат соответствуют выражения (1.28) и (1.29). Чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности $r = a$, потенциал линейного заряда (1.28) нужно сложить с общим решением вида (1.26) при $k_n = n$ и рассматривать выражения для потенциала в двух областях: внутри и вне цилиндра. Коэффициенты A_n, B_n, F и F , входящие в общее решение, определяются граничными условиями на поверхности диэлектрического цилиндра и вне его разделяются, во-первых, для того, чтобы потенциал в начале координат оставался конечным, а во-вторых, чтобы вторые ряды в каждом из выражений сходились. Итак,

$$\varphi_{1 < r < r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos_n \theta - \ln r_0 \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} \cos_n \theta + F. \quad (1.30)$$

$$\varphi_{2_{0 < r < a}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos_n \theta - \ln r_0 \right\} + \sum A_n r^n \cos_n \theta + E. \quad (1.31)$$

Так как поляризационные заряды в цилиндре не имеют особенностей ни в начале координат, ни в бесконечности, и задача симметрична относительно плоскости $\theta = 0$, то выражение (1.26) упрощается: исчезает логарифмический член, член, пропорциональный углу, и члены, содержащие синусы угла. Показатель степени r оказывается или положительным, или отрицательным, в зависимости от того, в какой области сходится ряд.

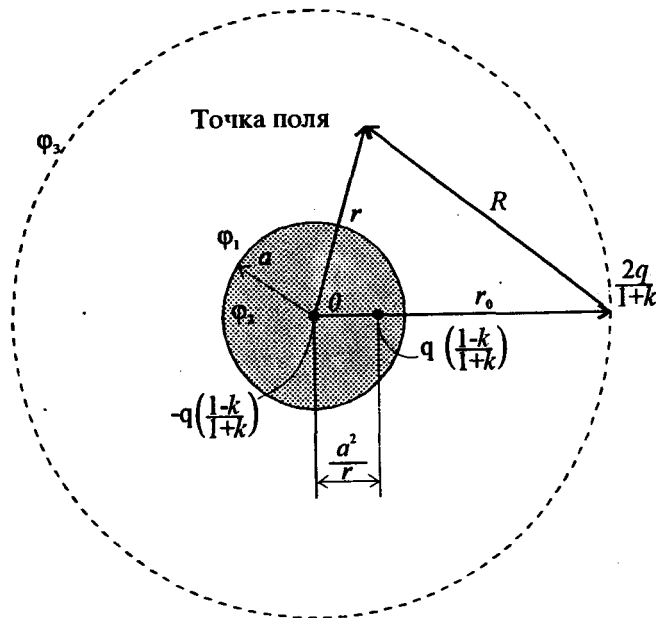


Рис. 10. Линейный заряд и диэлектрический цилиндр (последний показан на рисунке штриховкой)

Граничные условия на поверхности диэлектрического цилиндра $r = a$ при всех θ имеют вид

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = k \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Подставляя в (1.32) выражения (1.30) и (1.31) и приравнявая коэффициенты при всех $\cos_n \theta$ нулю, получим выражения для коэффициентов A_n, B_n, E, F . Справедливость такой операции обусловлена тем фактором, что разложение

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Фурье производится по полной системе ортогональных функций. Таким образом, для потенциала получим выражения

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \left(\frac{1-k}{k+1}\right) \left(\frac{a^2}{r_0}\right)^n \frac{1}{r^n} \right] \cos_n \theta - \ln r_0 \right\}, \\ \Phi_2 &= \frac{q}{\pi\epsilon_0(1+k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos_n \theta - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0. \end{aligned}$$

Решение для $r > r_0$ может быть легко написано по аналогии с выражениями (1.28) и (1.29).

Прибавив к только что полученному выражению для Φ_1 и вычтя из него величину

$$q \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{\ln r}{2\pi\epsilon_0},$$

можно показать, что потенциал Φ_1 вне цилиндра равен потенциалу системы из трех линейных зарядов. Один из этих зарядов величиной

$$-q \frac{1-k}{1+k}$$

расположен в начале координат, второй величиной

$$q \frac{1-k}{1+k}$$

в точке, полученной при инверсии первоначального заряда q , а третий - просто заряд q . Точка, полученная при инверсии заряда q , находится на расстоянии $\frac{a^2}{r_0}$ от начала координат и лежит на том же радиусе, что и заряд q . Потенциал внутри диэлектрического цилиндра с точностью до аддитивной постоянной равен потенциалу одного линейного заряда величиной

$$\frac{2q}{1+k}$$

расположенного в той же точке, что и заряд q . Следовательно, потенциал в любой точке эквивалентен потенциалу системы линейных зарядов в отсутствие диэлектрического цилиндра.

10. Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат

Уравнение Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

и допускает разделение переменных

$$\Psi = R(r)Y(\theta, \varphi),$$

После обычных преобразований получаем два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - n(n-1)R = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + n(n+1) \sin \theta Y = 0. \quad (1.34)$$

Параметр разделения равен $n(n+1)$, где n - целое число, так как только при таких его значениях решения уравнения для Y не имеют особенностей при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Решения $Y(\theta, \varphi)$ называются сферическими гармониками. Можно показать, что функции $Y_n(\theta, \varphi)$ образуют полную ортогональную систему функций, аналогичную системе $\{\cos n\theta, \sin n\theta\}$, возникающую в связи с задачами в плоскости. Общее решение радиального уравнения (1.33) имеет вид

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}$$

Переменные сферических гармоник могут быть разделены еще раз:

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

Новый параметр разделения положим равным m^2 , а вместо полярного угла θ введем более удобную переменную $\mu = \cos \theta$. После разделения переменных получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Theta = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

Решения этих уравнений выражаются функциями

$$\begin{aligned} \Theta &= C_n P_n^m(\mu) + D_n Q_n^m(\mu), \\ \Phi &= E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi, \quad m \neq 0, \\ \Phi &= G\varphi + H, \quad m = 0, \end{aligned}$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ и $Q_n^m(\sin\theta)$ - присоединенные функции Лежандра соответственно первого и второго рода. Следует отметить, что при $\mu = \pm 1$ конечным остается только P_n . Следовательно, когда рассматриваемая область пространства содержит полярную ось, в решение входит лишь P_n^m .

11. Потенциал точечного заряда

В случае осевой симметрии, т.е. когда решение не зависит от угла φ , параметр разделения m равен нулю. Потенциал точечного заряда, расположенного на расстоянии r_0 от начала координат, будет обладать такой симметрией, если его радиус-вектор принять за полярную ось. Потенциал точечного заряда легко выразить через угловые и радиальные функции, полученные выше, разлагая по степеням r/r_0 и r_0/r выражение для (рис. 11)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + 1 - 2 \frac{r}{r_0} \cos \theta \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + 1 - 2 \frac{r_0}{r} \cos \theta \right]^{-1/2}$$

В результате находим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\mu) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\mu),$$

Каждый из этих рядов сходится в своей области и их можно считать определением функций $P_n(\mu)$. Из разложения ясно, что эти функции представляют собой полиномы n -й степени от переменной μ . Непосредственной проверкой легко убедиться, что полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ удовлетворяют уравнению (1.35) при $m = 0$.

Как и ранее, мы получим два выражения для потенциала: одно справедливо при $r < r_0$, другое - при $r > r_0$:

$$\varphi_{r < r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\mu),$$

$$\varphi_{r>r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu).$$

Таким образом, потенциал представлен как разложение Тейлора - Лорана по степеням r , коэффициенты которого есть полиномы Лежандра от $\cos \theta$.

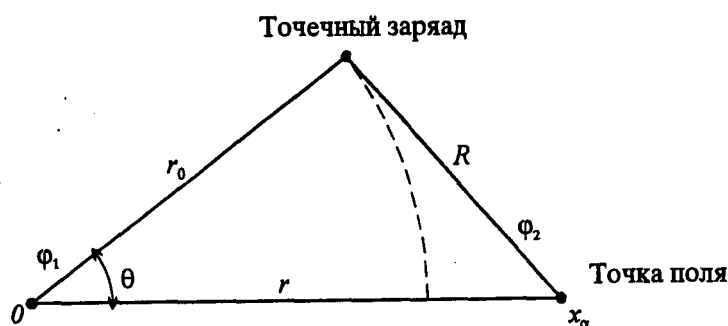


Рис. 11

12. Потенциал диэлектрической сферы и точечного заряда

Задачи о поле точечного заряда и сферической границе легко решаются с помощью сферических функций. Найдем потенциал точечного заряда q , расположенного вблизи диэлектрической сферы радиуса a (рис. 12). Расстояние от центра сферы до точечного заряда равно r_0 . Для потенциала используем три выражения:

$$\varphi_{1_{0 < r < a}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu),$$

$$\varphi_{2_{a < r < r_0}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu),$$

$$\varphi_{3_{r_0 < r < \infty}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu).$$

Согласование потенциалов φ_1 и φ_2 при $r = a$ производится следующим образом. При любом значении θ должны удовлетворяться граничные условия

$$\vec{n} \cdot (k_2 \vec{E}_2 - k_1 \vec{E}_1) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\vec{n} \cdot (k_2 \nabla \varphi_2 - k_1 \nabla \varphi_1) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

$$\vec{n} \times (\nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1) = 0,$$

где \vec{E}_i - напряженности, соответствующие потенциалам φ_i , ($i = 1, 2$), k_i - диэлектрические проницаемости областей $0 < r < a$ и $a < r < r_0$, \vec{n} - единичный вектор нормали к сфере. В силу ортогональности сферических гармоник ряды можно приравнять почленно и тем самым определять коэффициенты A_n и B_n . Функции φ_2 и φ_3 согласованы так же, как в предыдущем параграфе.

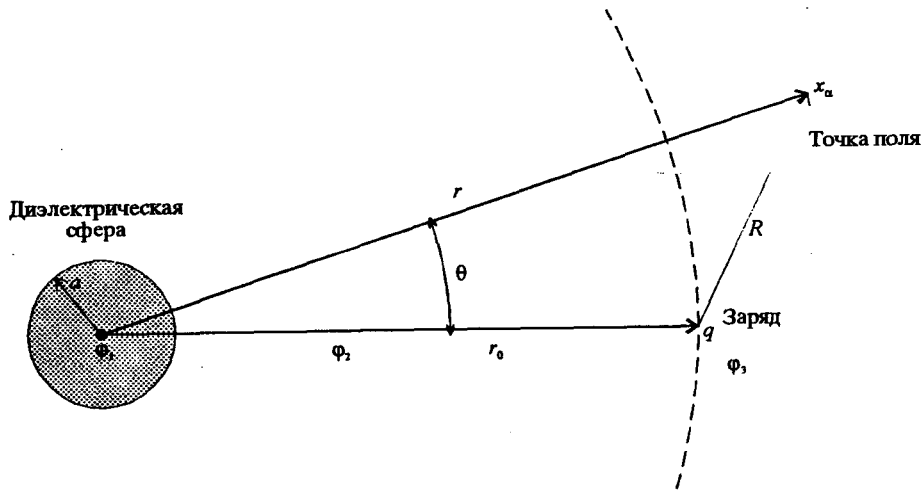


Рис. 12

13. Потенциал диэлектрической сферы в однородном поле

Классическим примером задачи со сферической геометрией может служить задача о диэлектрической сфере с проницаемостью k , помещенной в однородное поле. Линии вектора электрической индукции \vec{D} в сфере показаны на рис. 13.

Так как поле в бесконечности однородно, то потенциал определяется следующим соотношением:

$$\varphi_\infty = -E_0 x = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r \mu = -E_0 r P_1(\mu).$$

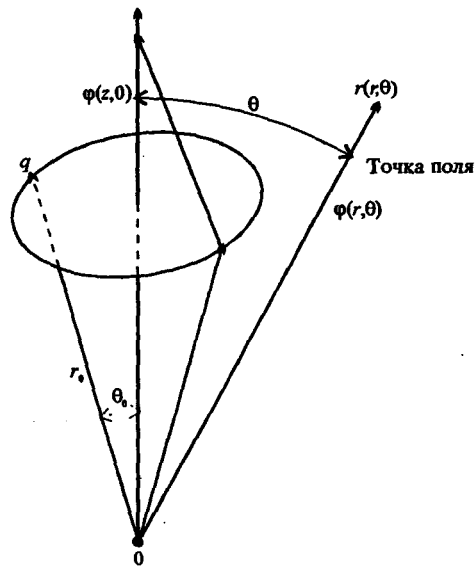


Рис. 14

Согласно результатам §10, потенциал внутри и вне сферы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = B_0 = A_n = B_n = 0 \quad \text{при } n > 1, \\ A_1 = \frac{-3E_0}{k+2}, \\ B_1 = \frac{(k-1)E_0 a^3}{k-2} \end{array} \right.$$

(1.37)

При всех значениях θ и $r = a$ должны выполняться граничные условия

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

$$k \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}.$$

Подставляя сюда выражение (1.37) и приравнявая коэффициенты при $P_n(\mu)$ с одним и тем же n , легко найти A_n и B_n :

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = B_0 = A_n = B_n = 0; \text{ при } n > 1, \\ A_1 = \frac{-3E_0}{k+2}, \\ B_1 = \frac{(k-1)E_0 a^3}{k+2} \end{array} \right.$$

Потенциалы соответственно равны

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = -\frac{3E_0 r}{k+2} \cos \theta, \\ \varphi_2 = \frac{(k-1)E_0 a^3 \cos \theta}{(k+2)r^2} - E_0 r \cos \theta. \end{array} \right.$$

Заметим, что поле внутри сферы однородно, однако по величине меньше, чем поле в бесконечности в $\frac{k+2}{3}$ раз. Легко также видеть, что поле, наведенное в области вне сферы, равно полю диполя с моментом

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \left(\frac{k-1}{k+2}\right) \vec{E}_0.$$

14. Аксиально симметричный потенциал, заданный на сфере

С помощью функций Лежандра можно найти потенциал во всех точках пространства, если известно его распределение на сфере. Согласно результатам §10 для потенциала получим два выражения, одно из которых пригодно внутри сферы, другое снаружи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{r < a} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu), \\ \varphi_{r > a} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu). \end{array} \right.$$

Пользуясь ортогональностью функций $P_n(\mu)$ и зная их норму, можно вычислить коэффициенты A_n и B_n . Нормой функции $P_n(\mu)$ называется интеграл от $P_n^2(\mu)$ по всей области изменения μ . Величина нормы и ортогональность функций следуют из соотношений

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

где $\delta_{mn} = 1$, если $m = n$ и $\delta_{mn} = 0$, если $m \neq n$.

Приравняем теперь каждое из соотношений (1.38) при $r = a$ заданному распределению потенциала. Полученные уравнения умножим на $P_m(\mu)$ и проинтегрируем по μ от $\mu = -1$ до $\mu = +1$. Тогда от каждого ряда останется

только один член, а именно тот, для которого $n = m$. В результате получим выражение

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^1 \varphi(a, \theta) P_n(\mu) d\mu,$$

а для B_n

$$B_n = a^{2n+1} A_n.$$

Таким образом, потенциалы внутри и вне сферы имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{r < a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2a^n} r^n P_n(\mu) \int_{-1}^1 \varphi(a, \theta') P_n(\mu') d\mu', \\ \varphi_{r > a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} a^{n+1} r^{-n-1} P_n(\mu) \int_{-1}^1 \varphi(a, \theta') P_n(\mu') d\mu'. \end{aligned}$$

15. Потенциал заряженного кольца

Вычислим потенциал заряженного кольца с полным зарядом q , расположенного на расстоянии r_0 от начала координат O (рис. 14). Пусть r_0 составляет угол θ_0 с осью симметрии можно найти, разлагая в ряд кулоновский потенциал $1/R$:

$$\begin{cases} \varphi_{r < r_0}(z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta_0), \\ \varphi_{r > r_0}(z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{z}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_0). \end{cases} \quad (1.39)$$

Потенциал в произвольной точке получим, умножая n -е члены разложений (1.39) на $P_n(\mu)$ и подставляя r вместо z (так как $P_n(1) = 1$):

$$\begin{cases} \varphi_{r < r_0}(z, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta), \\ \varphi_{r > r_0}(z, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{z}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta). \end{cases}$$

Справедливость такого решения следует из теоремы единственности.

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

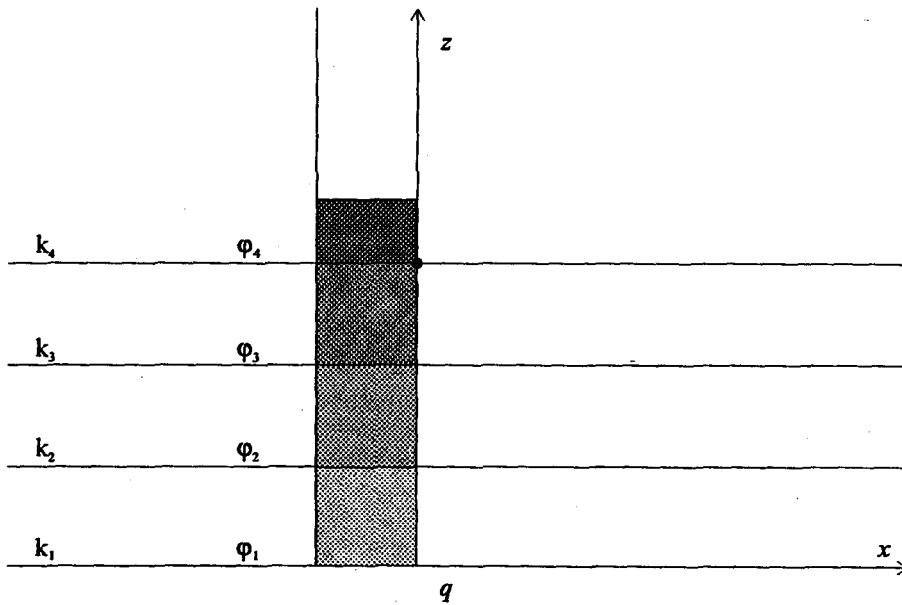


Рис. 15. Параллельные слои диэлектриков в поле точечного заряда

16. Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат

Уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.40)$$

и также допускает разделение переменных. Представляя решение в виде произведения трех функций

$$\Psi(r, \varphi, z) = R_{(r)} \Phi_{(\varphi)} Z_{(z)}, \quad (1.41)$$

получим следующие уравнения для радиальной, угловой и осевой частей решения :

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0, \quad (1.42)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0, \quad (1.43)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0, \quad (1.44)$$

где k и n - параметры разделения. Уравнение (1.42) называется уравнением Бесселя. Характер решения существенно зависит от знака параметра разделения, т.е. от того, являются ли k и n действительными или мнимыми. Чтобы решение Φ было однозначным, требуется, чтобы оно было периодичным по φ , откуда следует, что n -целое число. Если k -действительное число, то $Z_{(z)}$ есть просто экспонента, а $R_{(r)}$ представляется линейной комбинаций функций Бесселя, обозначаемых $\mathfrak{J}_n(kr)$ и $N_n(kr)$. Отметим, что \mathfrak{J}_n и N_n - осцилирующие функции своих аргументов, и \mathfrak{J}_n дает решения, регулярные при $r = 0$, где уравнение (1.42) имеет особенность. При действительных n и k решения имеют следующий вид :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{(r)} = A_n \mathfrak{J}_n(kr) + B_n N_n(kr), \quad k \neq 0, \\ R_{(r)} = A r^n + B r^{-n}, \quad k = 0, \\ \Phi_{(\varphi)} = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi, \quad n \neq 0, \\ \Phi_{(\varphi)} = C_\varphi + D, \quad n = 0, \\ Z_{(z)} = E_k e^{kz} + F_k e^{-kz}, \quad k \neq 0, \\ Z_{(z)} = E_z + F, \quad k = 0, \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Если n и k равны нулю, то

$$\Psi = (A \ln r + B) \cdot (C_\varphi + D) \cdot (E_z + F).$$

Общую идею использования свойств цилиндрических функций мы поясним на следующем примере. Рассмотрим случай с осевой симметрией, когда $n = 0$. Если рассматриваемая область пространства по радиусу простирается до бесконечности и нет цилиндрических границ, ограничивающих функции $R_{(r)}$, то соответственно не будет никаких ограничений на величину k и решение будет выражаться интегралом по всем значениям k :

$$\int_0^\infty e^{\pm kz} f(k) \mathfrak{J}_0(kr) dk. \quad (1.46)$$

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Вместо отыскания коэффициентов суммы нам предстоит определить функцию $f(z)$. Потенциал точечного заряда может быть выражен интегралом с помощью следующего тождества :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \int_0^\infty e^{\pm kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk$$

Положительный знак в экспоненте берется при $z < 0$, а минус при $z > 0$. Соответственно для кулоновского потенциала $\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ получим следующее интегральное представление:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{\pm kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk \quad (1.47)$$

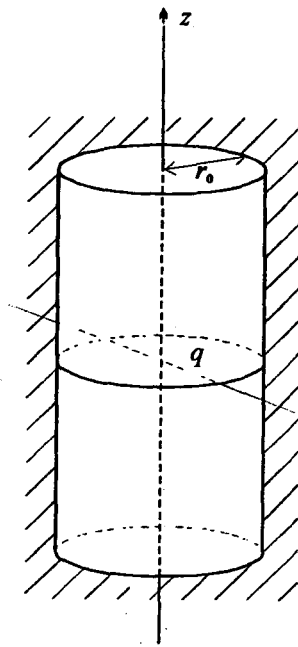


Рис. 16. Точечный заряд в проводящей заземленной цилиндрической полости.

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk + \int_0^\infty f(k) e^{kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk;$$

$$\varphi_2 = \int_0^\infty g(k) e^{kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk + \int_0^\infty h(k) e^{-kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk;$$

$$\varphi_3 = \int_0^\infty l(k) e^{kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk + \int_0^\infty m(k) e^{-kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk;$$

$$\varphi_4 = \int_0^{\infty} n(k)e^{-kz} \mathfrak{J}_0(kr) dk.$$

Если нужно найти потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат, при наличии нескольких плоских границ, перпендикулярных оси, то следует воспользоваться комбинацией потенциала (1.47) с потенциалами наведенных зарядов вида (1.46). Подобная структура, составленная из нескольких слоев диэлектриков с различной диэлектрической проницаемостью k_1, k_2 и т.д. показана на рис. 15. Потенциалы, соответствующие различным слоям диэлектрика, приведены в подписи к рисунку. Если для всех поверхностей раздела написать граничные условия и приравнять функции, стоящие под знаком интеграла, то получим необходимое и достаточное число уравнений для нахождения функций переменной k , и следовательно, потенциалов в каждом из слоев.

Если потенциал должен быть периодическим по переменной z , то параметр k оказывается мнимым и решениями уравнения (1.42) будут функции Бесселя от мнимого аргумента. Функции Бесселя от мнимых аргументов обычно обозначают символами I_n и K_n и для них составлены обширные таблицы, так же как и для функций \mathfrak{J}_n и N_n . Заметим, что как в случае декартовых и сферических координат, так и в случае цилиндрических - все три функции, составляющие решение, не могут быть осциллирующими.

17. Применение цилиндрических функций к решению различных задач

Внутри цилиндрической области радиуса r_0 с проводящими границами каждое решение должно подчиняться требованию






$$\mathfrak{J}_n(kr_0) = 0,$$

так что величина k может принимать лишь дискретный ряд значений kl , где l - порядковый номер функции \mathfrak{J}_n , принимающий все значения от единицы до бесконечности. Общее решение представляет собой двойную сумму по n и l , причем коэффициенты ее подбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Бесселевы функции образуют систему ортогональных функций. Это непосредственно следует из уравнения (1.42):

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{J}_n(k_1 r) \mathfrak{J}_n(k_2 r) r dr = 0, \text{ если } l \neq m$$

Ортогональность потенциалов, соответствующих различным n , следует из (1.45).

РАЗДЕЛ I - ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ТИПЫ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ		
Символ	Название	Соотношение между параметрами
	Резистор (сопротивление)	$v= Ri$
	Источник тока	$i=const$
	Источник напряжения	$v=const$
	Конденсатор (емкость)	$q=Cu, i=C \frac{dv}{dt}$
	Катушка (индуктивность)	$\varphi=Li, v=L \frac{di}{dt}$

Рассмотрим как пример задачу с цилиндрической геометрией. Найдем потенциал точечного заряда в проводящем цилиндре, ось которого есть ось z (рис. 16). Азимутальная симметрия системы вносит в данном случае упрощения в систему функций. Потенциал не зависит от φ , а зависимость его от r выражается функциями $\mathfrak{J}_0(kr)$. Искомое решение имеет следующий вид:

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{kz} \mathfrak{J}_0(kr), \text{ при } z < 0,$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-kz} \mathfrak{J}_0(kr), \text{ при } z > 0,$$

причем величина k_l удовлетворяет условию

$$\mathfrak{J}_0(k_l r_0) = 0.$$

Условие, накладываемое на поток на плоскости $z = 0$, может быть записано с помощью двумерной δ -функции, определяемой равенством

$$2\pi \int_0^{r_0} \delta_{(r)} r dr = 1.$$

Таким образом, условие сохранения потока от заряда примет вид

$$q \frac{\delta_{(r)}}{\varepsilon_0} = \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right]_{z=0} = 2 \sum k_l \mathfrak{I}_0(k_l r).$$

Если обе части этого равенства умножить на $\mathfrak{I}_0(k_l r)$ и затем проинтегрировать по r , то получим

$$q \frac{\mathfrak{I}_0(0)}{2\pi\varepsilon_0} = 2k_l A_l \int_0^{r_0} [\mathfrak{I}_0(k_l r)]^2 r dr,$$

откуда

$$A_l = \frac{q}{4\pi k_l \varepsilon_0} \cdot \frac{\mathfrak{I}_0(0)}{\int_0^{r_0} [\mathfrak{I}_0(k_l r)]^2 r dr}. \quad (1.48)$$

По определению функций Бесселя $\mathfrak{I}_0(0) = 1$. Умножая обе части уравнения (1.42) на

$$\left(\frac{d \mathfrak{I}_n}{dr} \right)^2 r^2 dr$$

и интегрируя по частям, получим

$$\frac{d \mathfrak{I}_n}{d(kr)} = -\mathfrak{I}_{n+1} + \frac{n}{kr} \mathfrak{I}_n.$$

В результате соотношение (1.48) принимает вид

$$A_l = \frac{q}{2\pi k_l \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0^2 [\mathfrak{I}_1(k_l r_0)]^2}$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi r_0^2 \varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{k_l r} \cdot \frac{\mathfrak{I}_0(k_l r)}{k_l [\mathfrak{I}_1(k_l r_0)]^2}.$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

18. Основные элементы электрических цепей

Электрические цепи возникают в результате соединения некоторых элементов, имеющих два конца - вход и выход. Параметрами, описывающими поведение этих элементов, служат ток i ; проходящий через данный элемент, и *напряжение* U на концах этого элемента. Для электростатического элемента (конденсатора) ток может быть заменен зарядом q , в то время как для электромагнитного элемента (катушки) напряжение может быть заменено магнитным потоком. Соотношения между q , Φ и исходными параметрами i , U имеют вид

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad U = \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.49)$$

Эти уравнения могут быть линейными или нелинейными в случае существования ровно пяти линейных элементов: резистор, источник тока, источник напряжения, конденсатор и катушка (рис. 17).

Постоянные R , C и L в соотношениях между параметрами основных линейных элементов называются *сопротивлением, емкостью и индуктивностью*. Часто соответствующие элементы (т.е. резистор, конденсатор или катушка) называются именами своих параметров (т.е. сопротивлением, емкостью или индуктивностью).

Тот факт, что в определяющие соотношения для конденсатора и катушки входят производные, означает что для описания электрических цепей нам придется иметь дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Прежде чем обратиться к рассмотрению законов, характеризующих поведение электрической цепи, опишем так называемые нелинейные элементы цепей. Существует всего три типа нелинейных элементов: нелинейный резистор, нелинейный конденсатор и нелинейная катушка (рис. 18).

Различие между линейными и нелинейными элементами заключается по-простому в том, что мы заменим линейные соотношения $U = Ri$, $q = Cu$, $\Phi = Li$ некоторыми нелинейными функциями. Первые три типа линейных (резистор, источник тока и источник напряжения) объединены в общий тип нелинейного резистора.






ТИПЫ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ		
Символ	Название	Соотношение между параметрами
	Резистор (сопротивление)	$v=Ri$
	Источник тока	$i=const$
	Источник напряжения	$v=const$
	Конденсатор (емкость)	$q=Cu, i=C \frac{dv}{dt}$
	Катушка (индуктивность)	$\varphi=Li, v=L \frac{di}{dt}$

Рис. 17


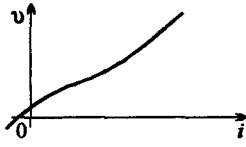

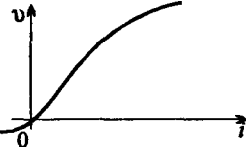


ТИПЫ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ		
Символ	Название	Соотношение между параметрами
	Нелинейный резистор (сопротивление)	$v=f(i)$ или $i=g(v)$ 
	Нелинейный Конденсатор (емкость)	$q=f_c(v)$ или $v_c=g_c(q)$ 
	Нелинейная Катушка (индуктивность)	$\varphi=f_l(i_l)$ или $i_l=g_l(\varphi)$ 

Рис. 18

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

В теории нелинейных цепей определяющие соотношения для конденсаторов и катушек задаются, как правило, в следующем виде:

$$q = f_c(u_c), \quad \varphi = f_L(i_L).$$

Взяв для этих функций производные по времени и принимая во внимание соотношения (1.49), мы получим

$$i_c = C_{(u_c)} \frac{du_c}{dt}, \quad u_L = L(i_L) \frac{di_L}{dt}, \quad (1.50)$$

где $C_{(u_c)} = f'_c(u_c)$ и $L(i_L) = f'_L(i_L)$ есть не что иное, как тангенсы углов наклонов касательных к графикам функций $q = f_c(u_c)$ и $\varphi = f_L(i_L)$ соответственно. Параметры $C_{(u_c)}$ и $L(i_L)$ называются *нелинейной емкостью* и *нелинейной индуктивностью*.

В качестве простейшего примера рассмотрим следующую линейную цепь, состоящую из двух резисторов и трех конденсаторов (рис. 19)

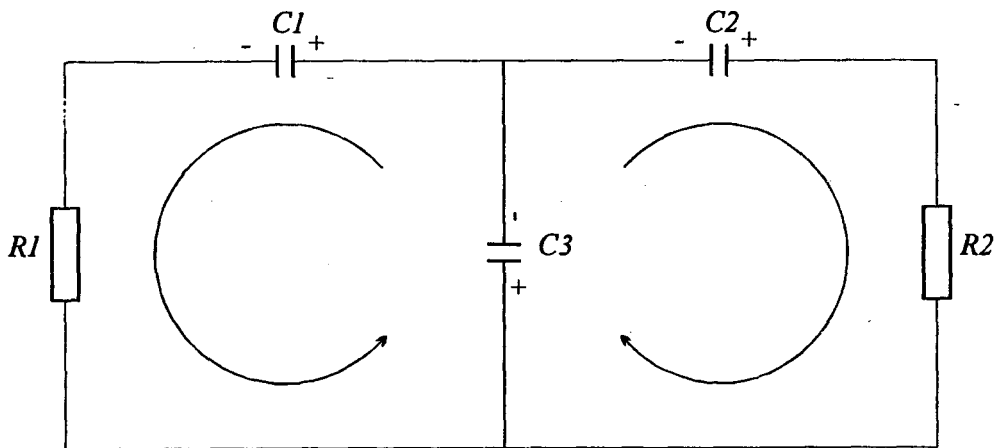


Рис. 19

Из определяющих соотношений для линейных конденсаторов вытекает, что

$$i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt}, \quad i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt}, \quad i_3 = C_3 \frac{du_3}{dt},$$

где u_j - напряжения на обкладках конденсаторов с емкостями $C_j, j = 1, 2, 3$. Очевидно, также, что ток через резистор R_1 равен i_1 , а ток через резистор

Глава III. Электрические цепи

R_2 равен i_2 . Из закона Ома следует, что напряжения на концах резисторов равны соответственно $R_1 i_1$ и $R_2 i_2$.

Для того, чтобы найти полную систему уравнений, описывающих нашу цепь, нужны законы Кирхгофа, устанавливающие связь между токами и напряжениями на элементах цепи. Эти законы мы изучим в деталях в §19. В нашем простом случае законы Кирхгофа суть не что иное, как следующие очевидные соотношения: ток в точке A цепи равен нулю и общее напряжение в указанных на рисунке замкнутых участках также равно нулю. Символически это можно записать так:

$$i_1 + i_2 = i_3,$$

$$v_1 + v_3 + R_1 i_1 = 0,$$

$$v_2 + v_3 + R_2 i_2 = 0.$$

Заменяя в этих соотношениях токи i_k выражениями

$$i_k = C_k \frac{dv_k}{dt}, \quad k = 1, 2, 3,$$

мы получим систему дифференциальных уравнений первого порядка для неизвестных функций от времени:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} + C_3 \frac{dv_3}{dt} = 0,$$

$$-R_1 C_1 \frac{dv_3}{dt} = v_1 + v_3,$$

$$-R_2 C_2 \frac{dv_2}{dt} = v_2 + v_3.$$

(1.51)

19. Законы Кирхгофа и топология

В этом параграфе мы займемся изучением законов Кирхгофа, которые описывают связи между элементами цепи и, следовательно, топологию этой цепи. В предыдущем параграфе мы убедились, что для того, чтобы получить правильную систему дифференциальных уравнений, нужно учитывать ориентацию элементов и замкнутых участков цепи. Это означает, что мы имеем дело с комбинаторной топологией, чем мы сейчас и займемся.

Электрическую цепь можно рассматривать как ориентированный граф или одномерный симплициальный комплекс. Например, цепи, изображенной

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

на рис. 20а соответствует ориентированный граф или тот же самый, одномерный симплициальный комплекс (рис. 20б)

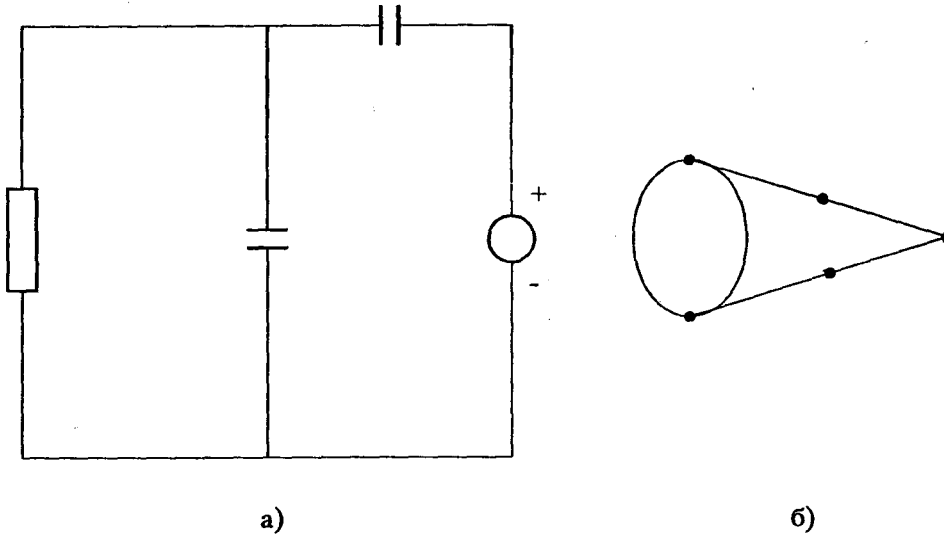


Рис. 20

Естественно предположить, что электрическая цепь связна, любая ее ветвь или любой ее элемент соединяют два различных узла и что в каждый узел входит по меньшей мере две ветви (два элемента). Обозначим через n число узлов и через b - число ветвей в цепи; тогда из наших предположений вытекает, что $b \geq n$. Равенство возможно лишь для цепей, имеющих только последовательные соединения.

Обозначим через s_1, \dots, s_n - различные узлы и через e_1, \dots, e_b различные ветви цепи. Тогда мы можем формально определить следующие векторные пространства над полем вещественных чисел, называемые пространствами нульмерных и одномерных цепей:

$$C_0 = \left\{ \sum_{k=1}^n \beta_k s_k : \beta_k \in R \right\},$$

$$C_1 = \left\{ \sum_{j=1}^b \alpha_j e_j : \alpha_j \in R \right\}.$$

Физически элементы этих векторных пространств можно интерпретировать как функцию, сопоставляющую вещественное число каждому узлу и каждой

Глава III. Электрические цепи

ветви цепи. Эти числа, рассматриваемые в данный момент времени t , можно представить себе как мгновенные значения токов I_k в узлах и токов i_j в ветвях цепи. В этом случае можно определить *вектор I шока в узлах* и *вектор шока i в ветвях*, полагая

$$I = \sum_{k=1}^n I_k s_k \in C_0, \quad i = \sum_{j=1}^b i_j e_j \in C_1.$$

Например, $e_j \in C_1$ означает единичный ток в ветви e_j и нулевой ток в любой другой ветви.

Чтобы работать с такими величинами, как потенциалы узлов и напряжения в ветвях электрической цепи, нам придется рассмотреть дуальные векторные пространства

$$C^0 = C_0^* \text{ и } C^1 = C_1^*,$$

называемые соответственно, пространствами нульмерных и одномерных коцепей.

Для описания соединений ветвей в узлах цепи, введем *границный оператор*

$$\partial : C_1 \rightarrow C_0$$

и дуальный к нему *кограницный оператор*

$$\partial^* : C^0 \rightarrow C^1.$$

Операторы ∂ и ∂^* определяются как линейные операторы, поэтому, чтобы определить ∂ , достаточно задать его только на ветвях e_l . Если $e_l \in C_1$ - ветвь, выходящая из узла s_k и входящая в узел s_j , положим

$$\partial e_l = s_j - s_k \in C_0.$$

Для того, чтобы задать кограницный оператор, рассмотрим дуальные базисы e_1^*, \dots, e_b^* и s_1^*, \dots, s_n^* в пространствах C^1 и C^0 соответственно, т.е. такие линейные формы, что

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \quad s_j^*(s_i) = \delta_{ji}.$$

Таким образом, мы имеем

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

$$\partial^* s_k^* = \sum_m \varepsilon_{km} e_m^*, \quad k = 1, 2, \dots, b.$$

С другой стороны, в силу стандартных свойств дуального отображения

$$\partial^* s_k^*(e_l) = s_k^*(\partial e_l) = \delta_{lj} - \delta_{lk}.$$

Так как левая сторона этого равенства равна ε_{kl} , мы получаем

$$s_k^*(\partial e_l) = \varepsilon_{kl} = \begin{cases} +1, & \text{если } e_l \text{ входит в узел } s_k \\ -1, & \text{если } e_l \text{ выходит из узла } s_k \\ 0, & \text{если } e_l \text{ не инцидентна с узлом } s_k \end{cases} \quad (1.52)$$

Отсюда следует, что $\partial^* e_k^*$ является алгебраической суммой линейных форм, дуальных к ветвям, направленным в узел s_k . Матрица (ε_{kl}) оператора ∂^* называется матрицей инцидентностей.

Вектор $v^* \in C^0$ потенциалов узлов и вектор $v^* \in C^1$ напряжений ветвей определяются следующими формулами

$$v^* = \sum_{k=1}^n v_k s_k^*, \quad v^* = \sum_{j=1}^b v_j e_j^*,$$

где числа v_k - мгновенные значения потенциалов узлов s_k , а v_j - мгновенные значения напряжений на концах ветвей e_j .

Напомним теперь законы Кирхгофа, описывающие токи и напряжения в электрической цепи.

1. *Закон Кирхгофа для токов:* алгебраическая сумма токов в ветвях электрической цепи, сходящихся в произвольном узле, равна нулю.

2. *Закон Кирхгофа для напряжений:* напряжение на концах любого элемента цепи равно алгебраической разности между потенциалами концов этого элемента.

Для анализа законы Кирхгофа бывает удобно переформулировать в терминах операторов ∂ и ∂^* .

Пусть даны произвольный вектор тока в ветвях

$$i = \sum_j i_j e_j \in C_1$$

и вектор потенциала узлов

$$v^* = \sum_k v_k s_k^*.$$

тогда

$$\partial i = \sum_j i_j \partial e_j = \sum_l I_l s_l,$$

$$\partial^* v^* = \sum_k v_k \partial^* s_k^* = \sum_l v_l e_l^*,$$

где

$$I_l = s_l^* \left(\sum_j i_j \partial e_j \right) = \sum_j i_j \varepsilon_{lj},$$

$$v_l = \sum_k v_k \partial^* s_k^*(e_l) = \sum_k v_k \varepsilon_{kl}.$$

(1.53)

Вспоминая, что коэффициенты ε_{kl} не равны только тогда, когда ветвь e_l инцидента узлу S_k , мы видим, что I_l представляет собой ток, идущий в узел s_k . Аналогично, $v_l = v_j - v_m$ в предположении, что ветвь e_l выходит из s_m и оканчивается в узле s_j . Может ввести в заблуждение тот факт, что формальное определение ∂e_l выглядит так же, как формула для дуальной величины v_l , а $\partial^* s_k$ выглядит так же, как формула для I_k . Это явление объясняется тем, что при вычислении коэффициентов в (1.53) нам пришлось использовать соответствующие дуальные базисные элементы.

Теперь очевидно, законы Кирхгофа можно переформулировать, сказав, что допустимые токи и напряжения в ветвях $i \in C_1$, $v^* \in C_1$ должны удовлетворять соотношениям

$$\partial i = 0 \text{ и } v^* = \partial^* v^*$$

для некоторого $v^* \in C^0$. Эквивалентно, в терминах одномерных циклов, т.е. элементов из $\text{Ker} \partial \subset C_1$ и одномерных кограниц, т.е. элементов из $\text{im} \partial \subset C^1$ мы можем написать:

$$\begin{aligned} \text{1-й закон Кирхгофа} &\Leftrightarrow i \in \text{Ker} \partial, \\ \text{2-й закон Кирхгофа} &\Leftrightarrow v \in \text{im} \partial^*. \end{aligned}$$

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Вычислим размерности пространств $\text{Ker}\partial$ и $\text{im}\partial^*$. С этой целью мы используем хорошо известный из линейной алгебры факт, гласящий, что если $f: V \rightarrow W$ линейное отображение векторных пространств, то

$$\dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{im}f) = \dim V$$

и если $f^*: W^* \rightarrow V^*$ - дуальное отображение, то

$$\dim(\text{im}f) = \dim(\text{im}f^*)$$

Поскольку единственный способ получить нулевое напряжение на концах всех ветвей состоит в том, чтобы сопоставить всем узлам один и тот же потенциал, мы видим, что

$$\dim(\text{Ker}\partial^*) = 1.$$

В силу сделанного выше замечания

$$\dim(\text{im}\partial^*) = n - \dim(\text{Ker}\partial^*) = n - 1, \tag{1.54}$$

а так как

$$\dim(\text{im}\partial^*) = \dim(\text{im}\partial),$$

то

$$\dim(\text{im}\partial) = n - 1.$$

Следовательно,

$$\dim(\text{Ker}\partial) = b - n + 1. \tag{1.55}$$

Существует очень интересная геометрическая интерпретация соотношения (1.55). Представим себе граф (не обязательно плоский) электрической цепи как границ многоугольной области. Тогда число $c = \dim(\text{Ker}\partial)$ линейно независимых одномерных циклов (замкнутых участков) цепи есть не что иное как число независимых граней нашей многоугольной области. Тогда соотношение (1.55) можно переписать следующим образом:

$$c - b + n = 1.$$

Число $c - b + n$ для многогранника называется Эйлеровой характеристикой и является топологическим инвариантом. Таким образом, мы получим, что Эйлерова характеристика ограниченной графом многоугольной области равна 1.

Из двойственности между граничным и кограничным операторами можно получить следующее утверждение. Если $i \in \text{Ker } \partial$ и $v^* \in \text{im } \partial^*$, то

$$v^*(i) = \sum_k i_k v_k = 0. \quad (1.56)$$

В самом деле, поскольку v^* может быть записан в виде $v^* = \partial^* v^*$ для некоторого $v^* \in C^0$, то

$$v^*(i) = \partial^* v^*(i) = v^*(\partial i) = 0.$$

Рассмотрим теперь еще одну интерпретацию равенств (1.54) и (1.55). С этой целью нам понадобятся некоторые простейшие понятия из теории графов: дерево, хорда, множество раздела. Пусть задан граф G некоторой электрической цепи. Связный подграф T из G называются *деревом* в G , если его ветви соединяют все узлы из T и не образуют ни одной замкнутой петли. Ветви называются *древесными ветвями*; ветви из G , не входящие в T , называются *хордами*. Ясно, что выбор дерева в графе не является единственным, но число ветвей в дереве всегда равно $n - 1$, так что существует $b - n + 1$ хорд, ассоциированных с выбранным деревом.

Это утверждение нетрудно доказать по индукции. В самом деле, граф с двумя узлами имеет ровно одно дерево, поскольку не допускается никаких петель. Предположим теперь, что граф с k узлами содержит ровно $k - 1$ древесную ветвь. Если добавить к этому графу один узел, то мы должны добавить к нему несколько дополнительных ветвей. Добавление более чем одной ветви порождает петлю. Следовательно, наше новое дерево для $k + 1$ узла имеет k древесных ветвей.

В частности, если в графе электрической цепи выбрано дерево, то векторное пространство $\text{im } \partial^*$ может быть параметризовано напряжениями на концах древесных ветвей, а пространство $\text{Ker } \partial$ может быть параметризовано токами в хордах.

Такая параметризация корректна, поскольку древесные ветви не образуют никаких замкнутых петель и поэтому невозможно выразить напряжение для концов любой древесной ветви в терминах оставшихся

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ветвей. Это означает, что все напряжения на концах древесных ветвей независимы и в силу (1.54) порождают все другие напряжения. Стало быть, все токи в хордах независимы и в силу (1.55) порождают все остальные токи.

Для данного графа *множеством раздела* называется подмножество его ветвей, обладающее тем свойством, что если мы разрежем каждую ветвь из этого множества, то граф превратится в два несвязных графа, а разрезание любого меньшего числа ветвей оставляет граф связным.

Скажем, что граф (или соответствующая ему электрическая цепь) является *плоским*, если он может быть помещен на плоскость без самопересечения ветвей всюду, кроме узлов. Если задана плоская электрическая цепь с n узлами, b ветвями и $c = b - n + 1$ независимыми петлями, то существует процедура построения корректно определенной плоской электрической цепи, называемой *дуальной цепью*, с $c + 1$ узлами, b ветвями и $n - 1$ независимыми петлями так, что размерности в (1.54) и (1.55) меняются местами. Можно проверить, что при переходе к дуальной цепи множество раздела переходит в множество петель, а древесные ветви превращаются в хорды. То же самое справедливо и для любого (необязательно плоского) графа.

20. Вариационный принцип для электрической цепи с активными сопротивлениями

Электрической цепью с активным сопротивлением называется цепь, состоящая только из резисторов. Чтобы сформулировать указанный в заголовке вариационный принцип, рассмотрим следующую модельную задачу.

Измерим сопротивление R цепи, состоящей из резисторов между двумя ее точками A и B . Предположим теперь, что один из резисторов вышел из строя и его сопротивление возросло. Случай, когда резистор разрушился (перестал проводить ток) мы не исключаем, считая, что его сопротивление "возросло до бесконечности". Вновь измерим сопротивление R между A и B .

При этом появляются три логические возможности: 1) сопротивление увеличилось; 2) осталось неизменным; 3) уменьшилось. Исследуем, могут ли физически реализовываться эти возможности.

Прежде всего, ясно, что сопротивление может увеличиться. Например, если цепь состояла из одного или нескольких последовательно соединенных резисторов, то общее сопротивление равно сумме входящих в цепь

сопротивлений; поэтому - увеличилось одно из слагаемых, возрастет и сумма. Нетрудно привести пример, когда общее сопротивление не меняется (Две такие цепи показаны на рис. 21.). В обеих цепях увеличение сопротивления R_0 не изменяет общего сопротивления цепи.

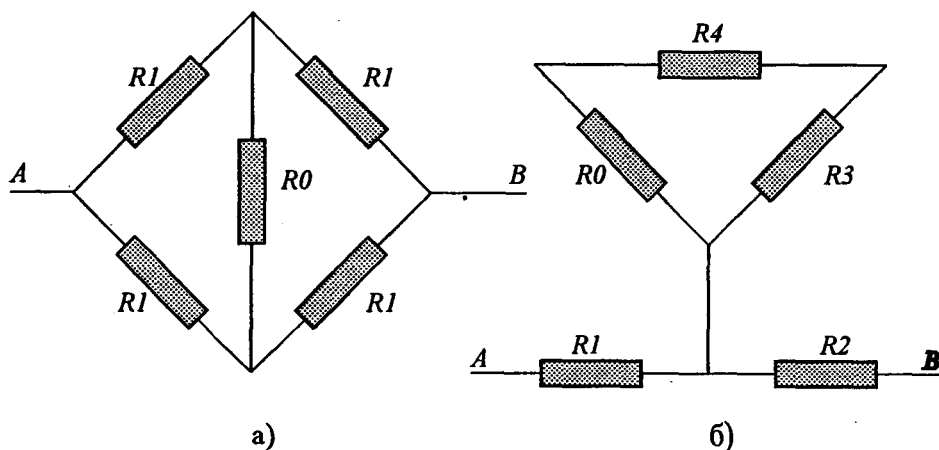


Рис. 21

Попытки же привести пример, когда общее сопротивление уменьшается, не приводят к успеху. Оказывается, это невозможно. Доказательство того, что при увеличении одного из сопротивлений любой резисторной цепи ее общее сопротивление не может уменьшиться основано на одном глубоком вариационном принципе, имеющем большое значение при анализе сложных электрических цепей.

В предыдущем параграфе мы упоминали, что каждой электрической цепи можно сопоставить граф, отражающий топологические свойства этой цепи. В случае резисторной цепи возможна более богатая структура. Сопоставим каждой резисторной цепи *нагруженный граф*, т.е. граф, ветвям которого приписаны некоторые числа (нагрузки ветвей). Например, электрическим цепям на рис.21 сопоставляются графы, показанные на рис. 22.

Как и прежде, узлы графа перенумеруем числами от 1 до n ; узел с номером l будем обозначать s_l . Мы будем рассматривать только такие графы, у которых каждые два узла соединены не более чем одной ветвью; ветвь,

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

соединяющая узлы s_i и s_j будет обозначаться e_{ij} . Нагрузку на ветви e_{ij} мы будем обозначать R_{ij} и, помня исходную задачу, часть будем называть сопротивлением (хотя в нашей математической модели R_{ij} - просто вещественное число).

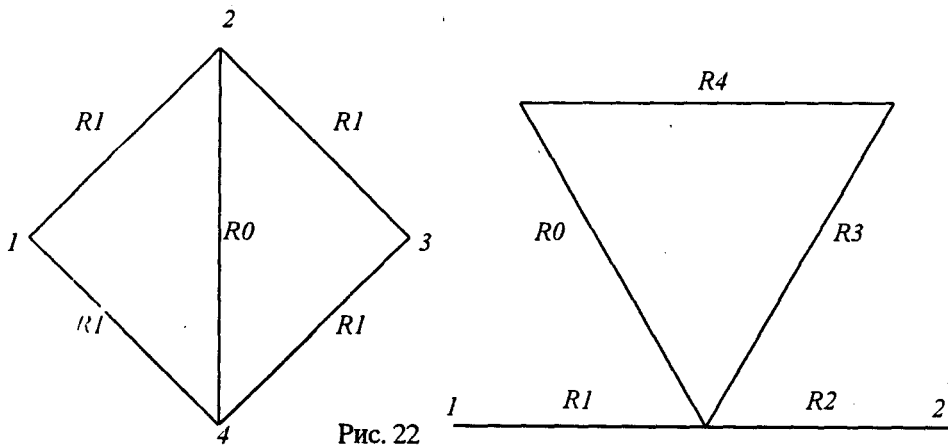


Рис. 22

Наконец, окружением узла s_i мы будем называть совокупность всех узлов, соединенных с узлом s_i ветвями и обозначать S_i .

Итак, пусть дан нагруженный граф G . Наша цель - граф G (математическую модель электрической цепи) поставить под напряжение. Математически это означает следующее. Прежде всего, нужно создать разность потенциалов на входе и выходе нашей цепи (в узлах s_1 и s_n графа), т.е. выбрать произвольно два числа V_1 и V_n .

Далее, следует подобрать числа V_2, V_3, \dots, V_{n-1} (значение потенциала) для остальных узлов, но уже не произвольно, а так, чтобы выполнялись уравнения Кирхгофа для токов. Для произвольного узла s_k , где $k = 2, \dots, n - 1$, соответствующее уравнение имеет вид

$$\sum_{s_j \in S} i_{kj} = 0.$$

По закону Ома ток i_{kj} равен отношению напряжения (разности потенциалов) $v_{kj} = V_k - V_j$ к сопротивлению, т.е.

$$i_{kj} = \frac{V_k - V_j}{R_{kj}}$$

Поэтому система уравнений Кирхгофа запишется в виде

$$\sum_{s_j \in S} \frac{V_k - V_j}{R_{kj}} = 0, \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (1.57)$$

Поскольку неудобно все время говорить о потенциале, который удовлетворяет системе уравнений (1.57) введем для него специальное название, а именно, назовем такой потенциал *гармоническим*. А слово потенциал без этого прилагательного будет означать произвольную на узлах графа, т.е. любой набор чисел V_1, V_2, \dots, V_n .

Теперь можно дать точную математическую формулировку исходной задачи. Предположим, что одну из нагрузок (сопротивлений) R_{kj} графа заменим на большую: $R'_{kj} > R_{kj}$. Может ли тогда увеличиться общее сопротивление, т.е. число

$$R = \frac{V_1 - V_n}{I},$$

где

$$I = \sum_{s_j \in S_1} \frac{V_1 - V_j}{R_{1j}} \quad (1.58)$$

Из анализа размерностей пространств $\text{Ker} \partial$ и $\text{im} \partial^*$, проведенного в предыдущем параграфе следует, что закона Кирхгофа для токов (т.е. системы уравнений (1.57)) хватает для расчета любых резисторных цепей. Другими словами, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. Для любого графа G с положительными нагрузками и любыми значениями потенциалов V_1, V_2 на входе и выходе существует единственный гармонический потенциал V .

Эта теорема вытекает из результатов предыдущего параграфа. Впрочем, нетрудно получить ее прямое доказательство. Идея этого доказательства состоит в том, что у системы (1.57) всего $n - 2$ неизвестных V_2, V_3, \dots, V_{n-1} и

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

столько же линейных уравнений, притом эти уравнения независимы и, следовательно, имеют единственное решение.

Для любого нагруженного графа (резисторной электрической цепи) G с узлами s_1, s_2, \dots, s_n и положительными нагрузками (сопротивлениями) R_{ij} в ветвях мы знаем, что можно вычислить гармонический потенциал V этого графа, т.е. для произвольных значений потенциала V_1, V_2 на входе и выходе находить остальные значения V_2, V_3, \dots, V_{n-1} потенциала, решая систему уравнений (1.57). Далее, подставляя полученные значения потенциала в соотношения (1.58), мы можем найти общее сопротивление цепи R . Для конкретной цепи всегда можно таким образом проверить, уменьшилось ли общее сопротивление при увеличении одного из R_{ij} или нет. Но чтобы доказать общий факт, т.е. установить, что при увеличении одного из сопротивлений общее сопротивление никогда не уменьшается, независимо от конкретного выбора цепи, уравнений (1.57) и формулы (1.58) недостаточно. Для этого необходим новый принцип.

Оказывается, что ток в резисторной цепи подчиняется следующему вариационному принципу: из всех возможных вариантов поведения он выбирает тот, при котором его энергетические затраты (мощность, выделяющаяся на проводниках электрической цепи) минимальна. Напомним, что при прохождении по проводнику с сопротивлением R_{kj} тока i_{kj} , соответствующего разности потенциалов $v_{kj} = V_k - V_j$, на проводнике e_{ij} выделяется тепловая мощность (т.е. количество тепла за единицу времени), равная

$$q_{kj} = R_{kj} i_{kj}^2 = \frac{v_{kj}^2}{R_{kj}} = \frac{(V_k - V_j)^2}{R_{kj}},$$

а на всей цепи - мощность

$$Q = \sum q_{kj},$$

где сумма берется по всем ветвям e_{kj} нашего графа. Общая мощность Q зависит от значений потенциала V_1, V_2, \dots, V_n ; поэтому общую мощность мы будем записывать в виде $Q[V]$.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение функцию

$$Q = \sum_{e_{kj}} \frac{(V_k - V_j)^2}{R_{kj}}, \quad (1.59)$$

которую мы будем называть квадратичной. (сумма в выражении (1.59) берется по всем ребрам нашего графа).

Квадратичная функция Q зависит не от числовой переменной, а от другой функции (точнее, вектор-функции) - потенциала V . Такие "функции от функций" в математике называются функционалами. Поиски их экстремумов - одна из важных задач вариационного исчисления, с некоторыми аспектами которого можно познакомиться в гл. 4.

Наша ближайшая цель - найти минимум квадратичной функции $Q[V]$. Как уже отмечалось, в общем виде - это задача вариационного исчисления, но в нашем случае мы сумеем обойтись лишь средствами классического анализа.

Теорема 1.2. *Для функции Q существует набор значений переменных V_2, \dots, V_{n-1} , при котором она достигает минимального значения.*
Доказательство.

Не ограничивая общности мы можем считать, что $V_1 > V_n$. Обозначим через M множество всех наборов значений переменных $V_1 \geq V_j \geq V_n$ при всех j . Рассмотрим какой-нибудь набор значений $(V'_2, \dots, V'_{n-1}) \notin M$ и построим по нему новый набор значений $(V''_2, \dots, V''_{n-1}) \in M$ заменив все значения, большие, чем V_1 , на V_1 , и все значения, меньшие V_n , на V_n . При этом, как легко видеть, значение функции Q уменьшится:

$$Q(V''_2, \dots, V''_{n-1}) \leq Q(V'_2, \dots, V'_{n-1})$$

Таким образом, наименьшее значение Q на множестве M будет и наименьшим значением Q на всем множестве потенциалов. Чтобы завершить доказательство, нам остается сослаться на теорему Вейерштрасса, которая утверждает, что непрерывная функция Q на замкнутом ограниченном множестве M достигает своего наименьшего значения.

Приведенное доказательство не дает нам ни способа найти интересующий нас минимум, ни способа как-либо описать его. Однако следующая теорема, выражающая минимальный принцип для нашей ситуации, характеризует искомый минимум.

Теорема 1.3. (вариационный принцип для цепей с активным сопротивлением).

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Потенциал, на котором достигается минимальное значение функции Q - гармонический.

Доказательство. Пусть V_0 - потенциал, на котором достигается наименьшее значение. Нам нужно доказать, что числа $V_1^0, V_2^0, \dots, V_{n-1}^0, V_n^0$, где $V_1^0 = V_1, V_n^0 = V_n$, являются решениями системы уравнений (1.57). Зафиксируем все переменные, кроме одного - V_j . Тогда функция

$$Q(V_2^0, \dots, V_{j-1}^0, V_j, \dots, V_{n-1}^0)$$

одной переменной V_j также достигает минимума при $V_j = V_j^0$.

Эта функция является квадратным трехчленом по V_j :

$$Q = aV_j^2 + bV_j + c,$$

причем коэффициенты a и b легко вычислить, раскрывая скобки в выражении (1.59):

$$a = \sum_{s_k \in S_j} \frac{1}{R_{kj}}, \quad b = -2 \sum_{s_k \in S} \frac{V_k^0}{R_{kj}}.$$

Так как минимум функции $aV_j^2 + bV_j + c$ ($a > 0$) достигается в точке V_j^0 , которая удовлетворяет уравнению

$$aV_j^0 + \frac{b}{2} = 0,$$

то мы получим, подставляя в него выражения для коэффициентов a и b , что

$$\sum_{s_k \in S_j} \frac{V_j^0}{R_{kj}} - \sum_{s_k \in S_j} \frac{V_k^0}{R_{kj}} = \sum_{s_k \in S} \frac{V_j^0 - V_k^0}{R_{kj}} = 0.$$

Таким образом, $V_1^0, V_2^0, \dots, V_{n-1}^0, V_n^0$ - решение системы (1.57), что и требовалось доказать.

Вычислим теперь минимальное значение квадратичной функции Q .

Теорема 1.4. *Минимальное значение функции Q равно $\frac{U^2}{R}$, где U - напряжение на концах электрической цепи, а R - общее сопротивление цепи.*

Доказательство.

Пусть V_2, \dots, V_{n-1} - набор чисел, на котором достигается минимум функции Q . Тогда по теореме 1.3 - это решение системы уравнений (1.57). Следовательно, нам нужно показать, что

$$\frac{(V_1 - V_n)^2}{R} = \sum_{e_{kj}} (V_k - V_j) i_{kj}$$

(сумма по всем ветвям e_{kj}), где i_{kj} подчиняются закону Кирхгофа для токов, т.е. системе уравнений (1.57). Последнее равенство можно переписать так:

$$(V_1 - V_n)I = \sum_{e_{kj}} (V_k - V_j) i_{kj}.$$

Для доказательства этого равенства раскроем скобки в (1.57) и вычислим коэффициент при V_k . Значение потенциала V_k умножается на величины всех токов i_{kj} , проходящих по ветвям e_{kj} , которые выходят из узла s_k (если номер j меньше номера k , то V_k умножается на $-i_{jk} = i_{kj}$). Поэтому коэффициент при V_k равен

$$\sum_{s_j \in S_k} i_{kj}$$

и, значит, равен нулю для всех $k \neq 1, n$ из (1.57). Согласно (1.58) коэффициенты при V_1 и V_n равны соответственно I и $-I$. Следовательно, суммируя по всем ребрам, находим, что

$$\sum_{e_{kj}} (V_k - V_j) i_{kj} = V_1 I + V_n (-I) = (V_1 - V_n) \cdot I = \frac{(V_1 - V_n)^2}{R} = \frac{v^2}{R},$$

что и требовалось доказать.

Итак, мы установили вариационный принцип для резисторных электрических цепей - принцип наименьшей мощности. А теперь решим исходную задачу о сопротивлении цепи, которая привела нас к тому принципу.

Пусть мы увеличили одно (или некоторые) из сопротивлений ветвей: $R'_{kj} \geq R_{kj}$. Тогда для функций

$$Q = \sum_{e_{kj}} \frac{(V_k - V_j)^2}{R_{kj}} \quad \text{и} \quad Q = \sum_{e_{kj}} \frac{(V_k - V_j)^2}{R'_{kj}}$$

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

справедливо неравенство $Q[V] \leq Q[I]$ для любого потенциала V с данными V_1, V_n на входе и выходе. Очевидно, что то же неравенство справедливо и для их минимальных значений:

$$\min Q' = \sum_{e_{kj}} \frac{(V_k V_j)^2}{R_{kj}} = \frac{(V_1 - V_n)^2}{R'} \leq \min Q = \frac{(V_1 - V_n)^2}{R},$$

а значит $R' \geq R$, что и требовалось доказать.

21. Геометрия нелинейных цепей

Начнем геометрический анализ нелинейных электрических цепей с рассмотрения трех модельных примеров.

Пример 1. Рассмотрим нелинейную электрическую цепь, изображенную на рис. 23 с нелинейным резистором, ток в котором меняется с напряжением по некоторой функции $i = f(v)$.

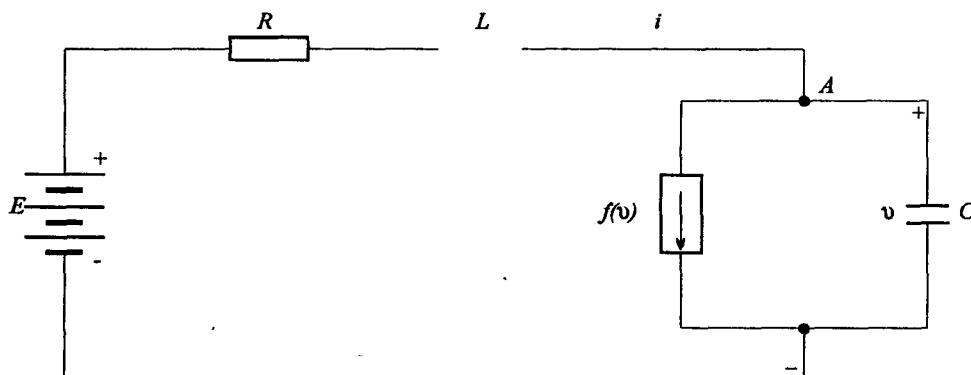


Рис. 23

Применяя закон Кирхгофа для токов к узлу A и закон Кирхгофа для напряжений к внешней петле, состоящей из линейных элементов, мы получим следующие уравнения

Глава III. Электрические цепи

$$C \frac{dv}{dt} = i - f(v),$$

$$L \frac{di}{dt} = E - Ri - v.$$

Это - нелинейная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть записана в виде

$$L \frac{di}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i},$$

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v},$$

(1.60)

где мы положили

$$P(i, v) = \frac{Ri^2}{2} - Ei + iv - \int_0^v f(v) dv.$$

Величина $P(i, v)$ называется *смешанным потенциалом*; ниже мы дадим ее определение для произвольной нелинейной цепи.

Пример 2. Рассмотрим электрическую цепь с нелинейными элементами, характеристики которых указаны на рис. 24.

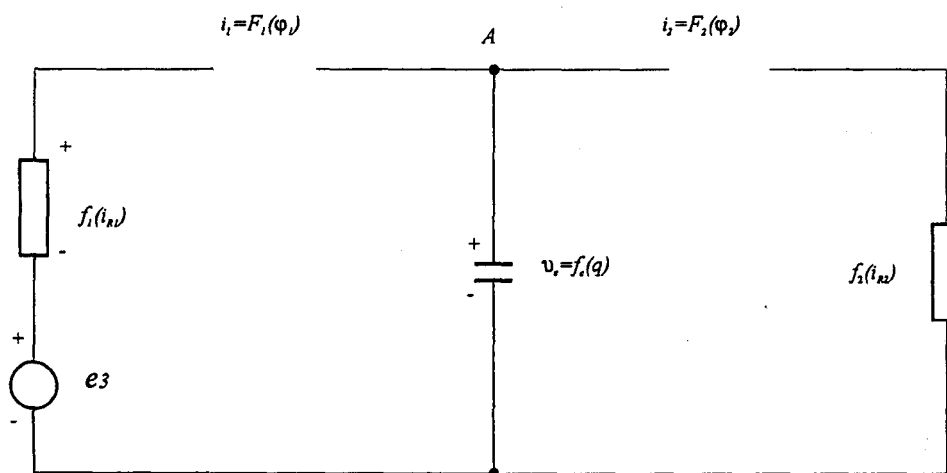


Рис. 24

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Применяя закон Кирхгофа для токов к узлу A и закон Кирхгофа для напряжений к двум независимым петлями, мы получим систему

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -F_1(\varphi_1) - F_2(\varphi_2), \\ \varphi_1 &= f_c(q) - f_1(F_1(\varphi_1)) - e_3, \\ \varphi_2 &= f_c(q) - f_2(F_2(\varphi_2)). \end{aligned} \tag{1.61}$$

Эта система из трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для неизвестных функций q, φ_1, φ_2 .

Пример 3. Рассмотрим, наконец, следующую нелинейную цепь, характеристики которой указаны на рис. 25.

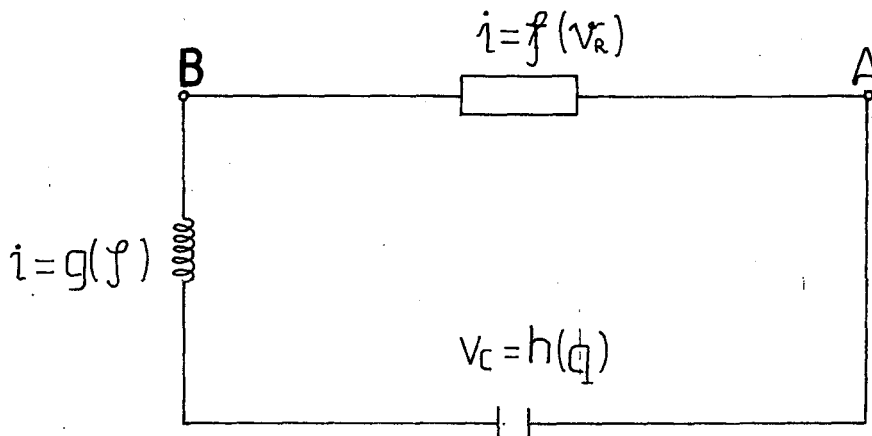


РИС 25

Снова используя закон Кирхгофа для токов в узлах A и B , а также закон Кирхгофа для напряжений в единственной петле, получим

$$\dot{q} = f(v_R),$$

$$\begin{aligned} 0 &= g(\varphi) - f(u_R), \\ \dot{\varphi} &= -u_R - h(g). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Это система трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций q, u_R, φ . Однако, в этом случае мы получим неявную систему, поскольку второе уравнение не содержит производной \dot{u}_R . Если бы функция f имела обратную, мы смогли бы выразить u_R через φ и получить, тем самым, систему из двух дифференциальных уравнений. В общем случае, существует процедура, называемая регуляризацией, состоящая в том, что мы добавляем дополнительные конденсаторы с малыми емкостями как малые возмущения системы. В результате этой процедуры мы получаем систему дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных. Отметим, что неявные системы дифференциальных уравнений связаны с так называемыми ми релаксационными колебаниями.

В рассмотренных выше примерах катушки имели в качестве управляющего параметра ток, а конденсаторы - напряжение (пример 1), или же катушки имели в качестве управляющего параметра магнитный поток, а конденсаторы - заряд (примеры 2 и 3). В первых двух примерах мы видели, что данными управляющими параметрами токи и напряжения могут быть найдены во всех элементах с помощью одних законов Кирхгофа и определяющих соотношений. Именно этот факт приводит к описанию электрической цепи системой дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных.

Как правило, для того, чтобы при описании нелинейных цепей неявных систем дифференциальных уравнений, вводят некоторые дополнительные предположения. Пожалуй, самые неограничительные предположения состоят в том, что все емкости и индуктивности считаются положительными функциями. Из этих предположений вытекает, что определяющие соотношения для конденсаторов и катушек являются обратимыми функциями.

Займемся теперь уравнениями, обобщающими уравнения (1.60). Как и прежде, обозначим через C_1 (соотв., C^1) векторное пространство одномерных цепей (соотв., коцепей), ассоциированных с данной электрической цепью. Определим пространство физических состояний S как подмножество всех токов и напряжений в $C_1 \times C^1$, удовлетворяющих законам Кирхгофа и закону Ома:

$$S = \{(i, u) \in C_1 \times C^1 \mid (i, u) \in \text{Ker } \partial \times \text{im } \partial^*, u_p = f_p(i_p), p = 1, \dots, r\},$$

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

где через (i_p, v_p) обозначены компоненты i и v на p -й резисторной ветви. Для простоты будем считать, что управляющим параметром для всех резисторов является ток.

При любых достаточно общих предположениях, множество S будет многообразием. Так как подпространство Кирхгофа $\text{Ker } \partial \times \text{im } \partial^*$ имеет ту же самую размерность, что и C_1 , и поскольку закон Ома добавляет r параметров, то ясно, что

$$\dim S = l + c$$

где l - число индуктивностей и c - число емкостей в электрической цепи.

Обозначим через $I_L \subset C_1$ и $V_C \subset C^1$ соответственно - векторные подпространства токов в катушках и напряжений в конденсаторах. Рассмотрим проекцию

$$\pi : S \rightarrow I_L \times V_C$$

которое каждому физическому состоянию из S ставит в соответствие токи в катушках и напряжения в конденсаторах. Введем теперь следующее предположение: *отображение π является диффеоморфизм*. Другими словами, многообразие S имеет глобальные координаты. Ниже мы увидим, что это предположение приводит к системе дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных.

Заметим, что одного условия, что S - гладкое многообразие, недостаточно, чтобы получить систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных. Вдобавок необходима хорошая проекция на $I_L \times V_C$.

Проанализируем в этом контексте рассмотренный в начале параграфа пример 3. Трехмерное пространство Кирхгофа можно параметризовать координатами i, v_C, v_R (полное пространство токов и напряжений имеет размерность 6). Следовательно, двумерное многообразие можно реализовать в трехмерном пространстве, задаваемую графиком

$$\{(i, v_C, v_R) : i = f(v_R)\} -$$

цилиндрическая поверхность. Параметры i, v_C являются координатами на этой поверхности тогда и только тогда, когда $f'(v_R) \neq 0$, что означает

локальную обратимость функции. Если $f(v_R)$ глобально обратимо, то напряжение также может быть выбрано в качестве управляющего параметра, откуда следует система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных (рис. 26).

Предположим, что поверхность S допускает параметры (i, v_C) в качестве локальных координат всюду, за исключением кривой $f'(v_R) = 0$, где касательная плоскость ортогональна плоскости (i, v_C) .

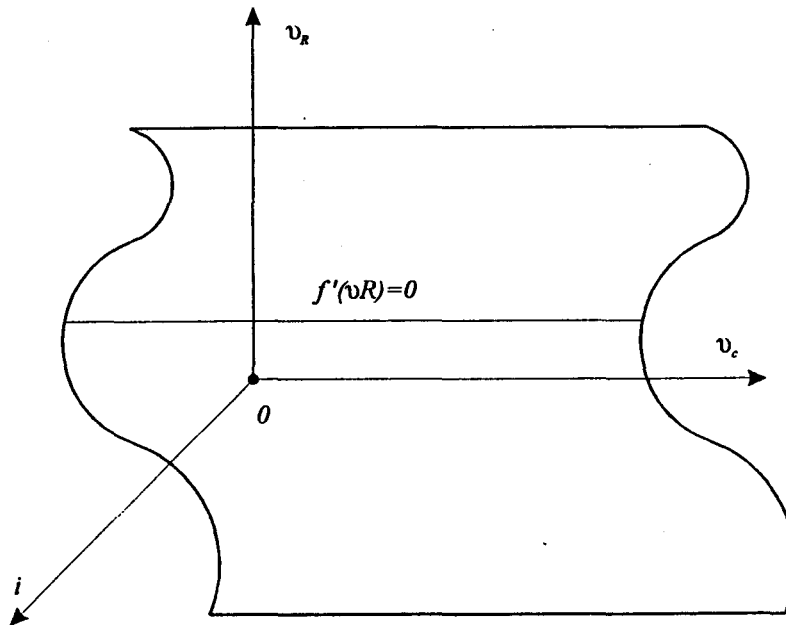


Рис.26

Чтобы получить нужные дифференциальные уравнения, определим, прежде всего, *смешанный потенциал* как функцию

$$P : C_1 \times C^1 \rightarrow R,$$

задаваемую формулой

$$P(i, v) = \sum_{\gamma} i_{\gamma} v_{\gamma} + \sum_p \int v_p di_p,$$

где суммирование по γ и p есть не что иное, как суммирование по всем резисторным и конденсаторным ветвям. В случае, когда управляющим

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

параметром служит ток, мы имеем неопределенный интеграл независимой переменной i_p ; следовательно, потенциал P определен с точностью до константы. Если же управляющим параметром для резисторов является напряжение, применим интегрирование по частям, для того, чтобы получить \mathcal{U}_p как независимую переменную:

$$\int \mathcal{U}_p di_p = i_p \mathcal{U}_p - \int i_p d\mathcal{U}_p.$$

Учитывая законы Кирхгофа и Ома, можно рассматривать смешанный потенциал P как гладкое отображение

$$P: S \rightarrow R$$

если же принять во внимание сделанное выше предположение о диффеоморфности S и $I_L \times V_C$, то P представляет собой отображение

$$P: I_L \times V_C \rightarrow R$$

Теорема 1.5. *Каждая физическая траектория электрической цепи, удовлетворяющей сделанным выше предположениям, является интегральной кривой системы дифференциальных уравнений первого порядка.*

$$L_\lambda(i_\lambda) \frac{di_\lambda}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i_\lambda},$$

$$C_\gamma(\mathcal{U}_\gamma) \frac{d\mathcal{U}_\gamma}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \mathcal{U}_\gamma}.$$

(1.63)

Здесь индексы λ и γ пробегают соответственно множества всех индуктивных и емкостных элементов цепи. Обратно, каждое решение системы (1.63) является физической траекторией.

Мы выведем эту теорему из более общего результата - теоремы 1.6. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из индуктивностей, управляющими параметрами которых служат магнитные потоки и токи, и из емкостей, являющихся функциями зарядов и напряжений. Определяющие соотношения рассматриваемых элементов не предполагаются обратимыми; для обратимых определяющих соотношений теорема 1.6 сводится к предыдущей теореме.

Теорема 1.6. *Предположим, что все токи в цепи однозначно определяются магнитными потоками Φ_l и токами i_λ , для индуктивностей с соотвествующими управляющими параметрами, а также зарядами q_c и*

Глава III. Электрические цепи

напряжениями v_γ для емкостей с соответствующими управляющими параметрами. Тогда дифференциальные уравнения электрической цепи имеют вид

$$\begin{aligned} N_l(\varphi_l) \frac{d\varphi_l}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial \varphi_l}, \\ L_\lambda(i_\lambda) \frac{di_\lambda}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial i_\lambda}, \\ S_C(q_C) \frac{dq_C}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial q_C}, \\ C_\gamma(v_\gamma) \frac{dv_\gamma}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial v_\gamma}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Доказательство.

Рассмотрим смешанный потенциал вида

$$P(i, v) = \sum_C i_C v_C + \sum_\gamma i_\gamma v_\gamma + \sum_P \int v_P di_P,$$

где мы выделим суммирование по C для конденсаторов, управляемых зарядами, и суммирование по γ для конденсаторов, управляемых напряжениями.

В соответствии с предположениями теоремы, смешанный потенциал можно рассматривать как функцию переменных $P_{(\varphi, i_\lambda, q_C, v_\gamma)}$. Согласно закону Кирхгофа

$$i(t) \in \text{Ker } \partial,$$

и поскольку $\text{Ker } \partial$ - векторное пространство, это же включение имеет место и для производной по времени:

$$i'(t) \in \text{Ker } \partial.$$

Следовательно,

$$\sum_P v_P i'_P + \sum_l v_l i'_l + \sum_\lambda v_\lambda i'_\lambda + \sum_C v_C i'_C + \sum_\gamma v_\gamma i'_\gamma = 0,$$

где l означает суммирование по индуктивностям, зависящим от магнитных потоков, а λ - суммирование по индуктивностям, зависящим от токов.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Согласно правилу Лейбница, в предыдущем уравнении можно сделать следующие замены:

$$v_c i'_c = (i'_c v_c)' - i_c v'_c, \quad v_\gamma i'_\gamma = (i'_\gamma v_\gamma)' - i_\gamma v'_\gamma.$$

Тогда из определения смешанного потенциала мы получим

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \left(\sum_c i_c v_c + \sum_\gamma i_\gamma v_\gamma \right)' + \sum_p v_p i'_p = \\ &= -\sum_l v_l i'_l - \sum_\lambda v_\lambda i'_\lambda + \sum_c i_c v'_c + \sum_\gamma i_\gamma v'_\gamma. \end{aligned} \quad (1.65)$$

С другой стороны, в силу цепного правила

$$\frac{dP}{dt} = \sum_l \frac{\partial P}{\partial \varphi_l} \varphi'_l + \sum_\lambda \frac{\partial P}{\partial i_\lambda} i'_\lambda + \sum_c \frac{\partial P}{\partial q_c} q'_c + \sum_\gamma \frac{\partial P}{\partial v_\gamma} v'_\gamma. \quad (1.66)$$

Вспомогая, что $\varphi'_l = v_l$ и $q'_c = i_c$ и сравнивая уравнение (1.66) с уравнением (1.65), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \varphi_l} &= -i'_l, & \frac{\partial P}{\partial i_\lambda} &= -v_\lambda, \\ \frac{\partial P}{\partial q_c} &= -v'_c, & \frac{\partial P}{\partial v_\gamma} &= i_\gamma. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Используя (1.50) и аналогичные уравнения для магнитного потока и заряда, получаем

$$\begin{aligned} i_l &= N_l(\varphi_l) \varphi'_l, \\ v_\lambda &= L_\lambda(i_\lambda) i_\lambda, \\ v_c &= S_c(q_c) q'_c, \\ i_\gamma &= C_\gamma(v_\gamma) v'_\gamma, \end{aligned} \quad (1.68)$$

где $N_\varphi = \frac{2}{L(\varphi)}$ и $S_q = \frac{1}{C(q)}$ подстановка (1.68) в (1.67) дает уравнения (1.64). Теорема 1.6 доказана.

Уравнения (1.60) из примера 1 являются частным случаем уравнений (1.63). Проанализируем пример 2 в свете наших обобщенных уравнений

(1.64). Используя законы Кирхгофа и Ома вместе с определяющими соотношениями для катушек и конденсаторов, можно получить смешанный потенциал электрической цепи из примера 2. Он равен

$$P_{(q, \varphi_1, \varphi_2)} = -f_c(q)F_1(\varphi_1) - f_c(q)F_2(\varphi_2) + e_3 F_1(\varphi_1) + \int f_1(F_1(\varphi_1)) \cdot F_1'(\varphi_1) d\varphi_1 + \int f_2(F_2(\varphi_2)) \cdot F_2'(\varphi_2) d\varphi_2$$

Легко проверить, что умножая уравнения (1.61) на $f_c'(q)$, $F_1'(\varphi_1)$ и $F_2'(\varphi_2)$ соответственно, мы можем переписать их в виде

$$\begin{aligned} f_c'(q)\dot{q} &= \frac{\partial P}{\partial q}, \\ F_1'(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial P}{\partial \varphi_1}, \\ F_2'(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 &= \frac{\partial P}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Уравнения (1.69) можно разрешить относительно производных, если f_c', F_1', F_2' не обращаются в нуль, т.е. если функции f_c, F_1, F_2 положительны.

Теорема 1.7. Для того, чтобы получить разрешенные относительно производных дифференциальные уравнения электрической цепи, удовлетворяющей предположениям теоремы 1.5, зависящие от тока характеристики катушек и зависящие от напряжения характеристики конденсаторов должны быть обратимыми. Таким образом, можно считать индуктивности катушек зависящими от магнитного потока, а емкости конденсаторов зависящими от заряда, что дает уравнения

$$N_l(\varphi_l) \frac{d\varphi_l}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \varphi_l}, \quad S_c(q_c) \frac{dq_c}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_c},$$

где индексы l и c пробегают соответственно множества индуктивностей и емкостей.

Доказательство.

Напомним, что

$$P = \sum_{\gamma} i_{\gamma} v_{\gamma} + \sum_p \int v_p di_p,$$

где суммирование ведется по конденсаторным и резисторным ветвям. Прямое вычисление показывает, что

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

$$\frac{\partial P}{\partial q_c} = \sum_{\gamma} \left(i_{\gamma} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial q_c} + \frac{\partial i_{\gamma}}{\partial q_c} v_{\gamma} \right) + \sum_p v_p \frac{\partial i_p}{\partial q_c},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \phi_l} = \sum_{\gamma} \left(i_{\gamma} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial \phi_l} + \frac{\partial i_{\gamma}}{\partial \phi_l} v_{\gamma} \right) + \sum_p v_p \frac{\partial i_p}{\partial \phi_l}. \quad (1.70)$$

Так как по предположению q_c и ϕ_l определяют все токи и напряжения в цепи, мы видим, что $v_{\gamma} = F_{\gamma}(v_c, i_l)$ для конденсаторных ветвей и $i_k = G_k(v_c, i_l)$ для любой ветви k , в которой каждое напряжение v_c является функцией своего заряда q_c , а каждый ток является функцией потока ϕ_l . Тогда

$$\frac{\partial v_{\gamma}}{\partial \phi_l} = \frac{\partial F_{\gamma}}{\partial i_l} \frac{di_l}{d\phi_l}, \quad \frac{\partial i_k}{\partial \phi_l} = \frac{\partial G_k}{\partial i_l} \frac{di_l}{d\phi_l},$$

$$\frac{\partial i_k}{\partial q_c} = \frac{\partial G_k}{\partial v_c} \frac{dv_c}{dq_c}, \quad \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial q_c} = \delta_{\gamma c} \frac{dv_c}{dq_c},$$

где $\delta_{\gamma c}$ - дельта - функция Кронекера индексов γ и c . Подстановка в (1.70) дает утверждение теоремы.

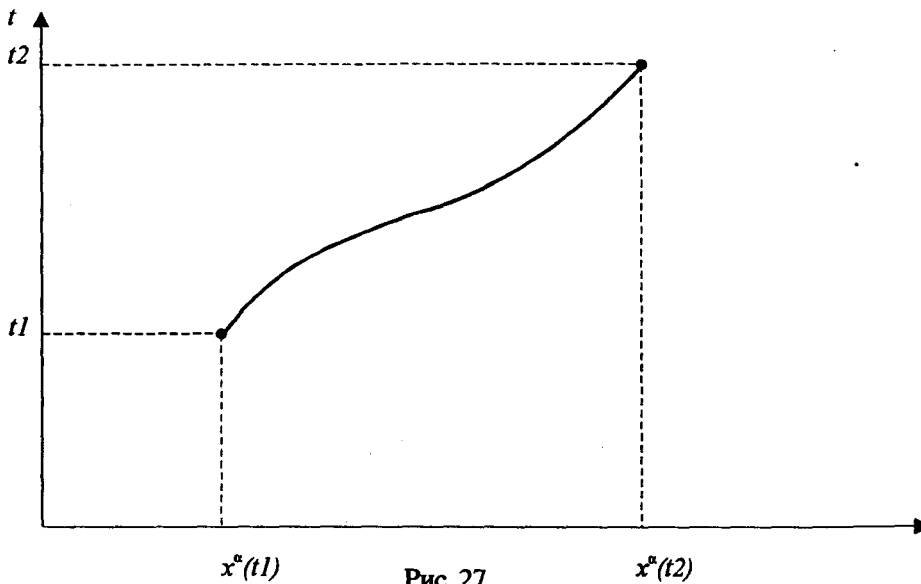


Рис. 27

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава 4.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

22. Пространственно - временной континуум

Современные физические представления не допускают разделения пространства и времени, а сразу апеллируют к пространственному континууму. Эта форма геометрического подхода к упорядочению явлений природы оказывается чрезвычайно плодотворной. Точками пространственно - временного континуума являются так называемые "события". Каждому событию ставится в соответствие набор из четырех чисел (t, x^1, x^2, x^3) , где t - "момент времени", когда произошло событие x^1, x^2, x^3 - координаты "места события". Величины (t, x^1, x^2, x^3) могут быть любыми вещественными числами. А это означает, что пространственно - временной континуум есть четырехмерное линейное пространство (или аффинное пространство, если мы не фиксируем начало отсчета времени и пространственных координат). Трехмерное пространство, в котором разворачивается любой физический процесс, можно интерпретировать как поверхность уровня $t = const$. Процесс жизни каждого объекта, который можно в любой момент времени считать одноточечным ("одноточечной частицы") отождествляется с линией $x^\alpha = x^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $t_1 \leq t \leq t_2$, в четырехмерном пространстве. Эту линию мы назовем *мировой линией* *точечной частицы* (рис. 27). Характер физической теории, описываемой данным пространственно - временным континуумом, зависит от скалярного произведения в четырехмерном линейном пространстве (t, x^1, x^2, x^3) , а также от группы допустимых преобразований координат в этом пространстве.

Глава IV. Геометрия пространства Минковского

Напомним, что n - мерное псевдоэклидово пространство $R_{p,q}^n, p+q=n$ определяется как n - мерное вещественное пространство с координатами x^1, \dots, x^n , в котором квадрат длины вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ задается формулой

$$|\xi|^2 = (\xi, \xi) = \sum_{i=1}^p (\xi^i)^2 - \sum_{i=1}^q (\xi^{p+i})^2.$$

Если $q = 0$, мы получаем евклидово пространство.

Пространственно - временным континуумом классической механики служит четырехмерное евклидово пространство R^4 с координатами (t, x^1, x^2, x^3) . Группа допустимых преобразований получается из *принципа относительности Галилея*. Этот принцип состоит в следующем утверждении: если покоящуюся систему отсчета (x^1, x^2, x^3) заменить на любую другую систему отсчета (x'^1, x'^2, x'^3) , которая движется относительно первой прямолинейно и равномерно, то все законы классической механики сохраняют свой вид. Например, если движение осуществляется вдоль оси x^1 , то принцип относительности Галилея означает, что законы классической механики инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 - ut, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \\ t' &= t, \end{aligned} \tag{2.1}$$

называемых *преобразованиями Галилея*. Здесь u есть скорость движущейся системы относительно покоящейся (рис. 28). Системы отсчета, получающиеся из покоящейся преобразованиями (2.1), называются инерциальными. Сделаем важное замечание: в классической механике время t (как вмещающее пространство) носит абсолютный характер, т.е. величина промежутка времени Δt между событиями A и B не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета этот промежуток измеряется.

Рис. 28. Система (x^1, x^2, x^3) покоится, система (x'^1, x'^2, x'^3) движется с постоянной скоростью вдоль первой оси. Иными словами, время течёт одинаково для всей Вселенной; в каждой точке пространства находятся синхронизированные часы. С чисто точки геометрической зрения преобразования Галилея являются просто формулами перехода от одной системы координат (t, x^1, x^2, x^3) к другой (t, x'^1, x'^2, x'^3) , где $t' = t$. Общий

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

вид преобразований Галилея, сохраняющих вид законов классической механики:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x &= Ax + x_0 - vt, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\text{где } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

A - матрица вращения, т.е. элемент группы $O(3)$ ортогональных матриц.

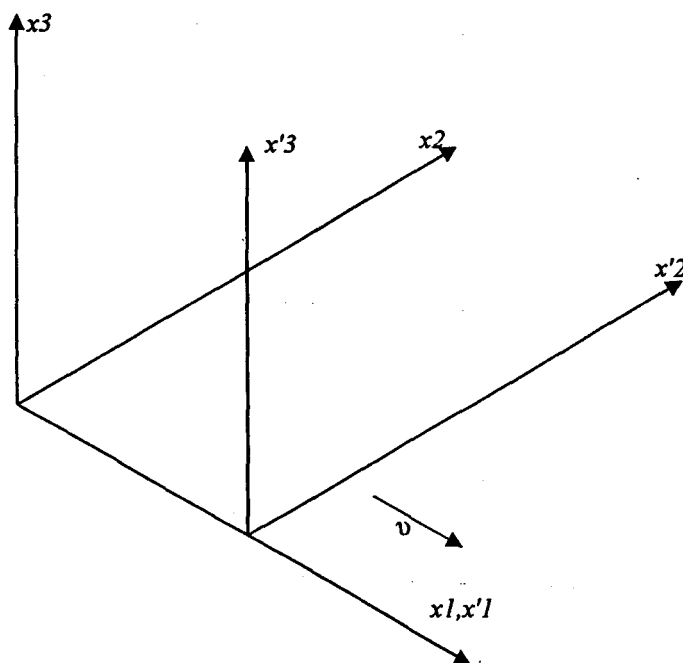


Рис. 28. Система $(x1, x2, x3)$ покоится

23. Простейшие понятия специальной теории относительности

Пространственно - временным континуумом в электродинамике служит псевдоевклидово пространство с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3) , называемое пространством - временем специальной теории относительности или

Глава IV. Геометрия пространства Минковского

пространством Минковского. Обычно полагают $x^0 = ct$, где c - константа, равная скорости света в пустоте.

Квадрат длины вектора $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в пространстве R_1^4 задается формулой

$$|\xi|^2 = (\xi, \xi) = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2. \quad (2.3)$$

Величина (ξ, ξ) может быть и положительной, и отрицательной, и даже нулем. Векторы ξ , для которых $|\xi|^2 = 0$, образуют в пространстве R_1^4 , конус, называемый изотропным или световым конусом (см. рис. 29 для пространства R_1^3).

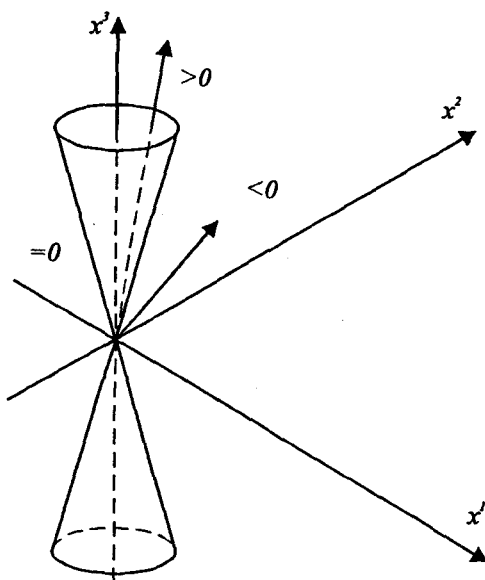


Рис. 29. Изотропный конус в пространстве $R_1^3: (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$

Векторы, лежащие внутри конуса, имеют положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$, и называются времениподобными векторами. Векторы, лежащие вне конуса, имеют отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2 < 0$ и называются пространственноподобными. На рис. 29 ξ_+ - времениподобный вектор, ξ_- - пространственноподобный; вектор ξ_0 лежит на изотропном конусе и имеет

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

нулевую длину - такие векторы также называются изотропными или световыми.

Рассмотрим мировую линию какой-нибудь материальной частицы. Эта мировая линия имеет вид

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x^1(t), \quad x^2 = x^2(t), \quad x^3 = x^3(t) \quad (2.4)$$

в пространстве R_4 . Кривая $\{x^1(t), x^2(t), x^3(t)\}$ есть обычная траектория точки в трехмерном пространстве R^3 . Вектор ξ , касательный к мировой линии (2.4) имеет вид

$$\xi = (c, x^1, x^2, x^3) \quad (2.5)$$

Заметим, что (x^1, x^2, x^3) - координаты вектора скорости U для пространственного движения точки. В специальной теории относительности принимается постулат, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью, большей скорости света c , т.е. $|U| \leq c$. Это означает, что

$$c^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \geq 0, \quad (2.6)$$

т.е. ξ вектор или времениподобный, или изотропный. В частности, если наша мировая линия есть мировая линия луча света, то вектор изотропный, т.е. $|U| = c$. По этой причине изотропный конус и называется также световым.

Мировые линии массивных и безмассовых частиц. В действительности изотропные касательные векторы могут иметь только мировые линии безмассовых частиц (таких, как, например, фотоны или нейтрино). Мировые линии массивных частиц имеют всегда времениподобные касательные векторы. В частности, мировая линия массивной частицы целиком распространяется строго внутри светового конуса (рис. 30 заметим, что изотропный конус имеется во всех точках пространства). Для времениподобных кривых, (т.е. для таких кривых, у которых касательный вектор всегда времениподобен) можно определить понятие длины, аналогично тому, как это делается в евклидовой геометрии. Если кривая задана в виде

$$x^0 = x^0(\tau), \quad x^1 = x^1(\tau), \quad x^2 = x^2(\tau), \quad x^3 = x^3(\tau), \quad \xi = (x^0, x^1, x^2, x^3),$$

$|\xi| > 0$, то длина l имеет вид

Глава IV. Геометрия пространства Минковского

$$l = \int_a^b |\xi| d\tau = \int_a^b \sqrt{(x^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^3 (x^\alpha)^2} dt \quad (2.7)$$

В специальной теории относительности величина l/c называется собственным временем, прожитым частицей. Параметр l является натуральным параметром на мировой линии.

Если точка движется в трехмерном пространстве с постоянной скоростью $v = (v^1, v^2, v^3)$, т.е.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = v^1 t, \quad x^2 = v^2 t, \quad x^3 = v^3 t, \quad (2.8)$$

то мы имеем

$$dl = \sqrt{c^2 - v^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx^0$$

$$l = x^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где мы используем сокращенное обозначение $v^2 = |v|^2$. В частности, x^0/c есть собственное время покоящейся частицы в исходной системе координат.

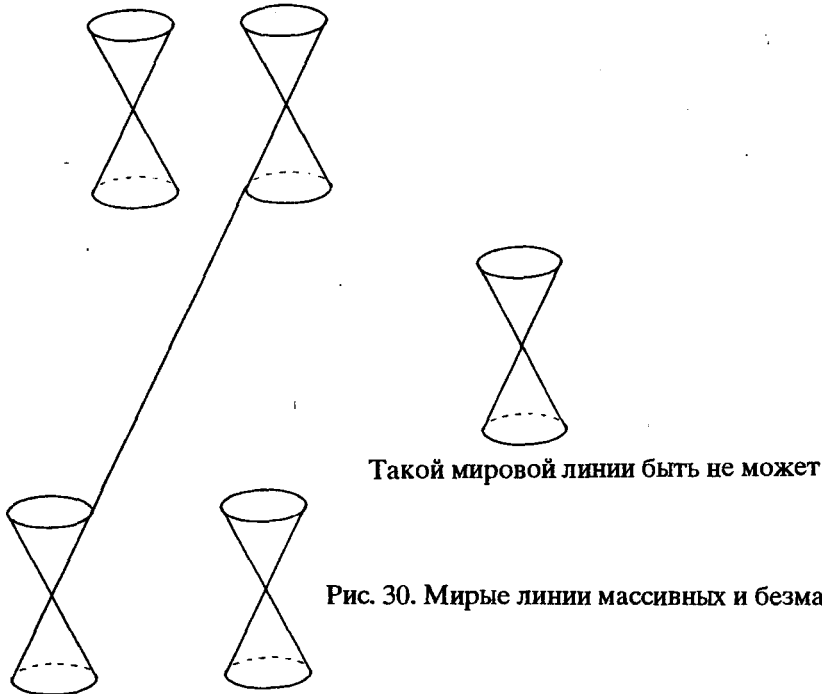


Рис. 30. Мирые линии массивных и безмассовых частиц

24. Преобразования Лоренца

Выше мы видели, что в классической механике время носит абсолютный характер, т.е. величина промежутка времени Δt между событиями не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета этот промежуток измеряется. Инерциальные системы отсчета классической механики получались одна из другой преобразованием Галилея (2.2).

В специальной теории относительности преобразования Галилея заменяются преобразованиями Лоренца. Переход к другой системе отсчета - это выбор новых координат в пространстве R_1^4 , т.е. некоторое преобразование пространства Минковского. Преобразование Лоренца сохраняет начало координат и пространственно - временной интервал, т.е. квадратичную форму

$$dl^2 = c^2(dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Начнем с изучения группы движений псевдоевклидовой плоскости R_1^2 . Пусть сперва движение оставляет неподвижным начало координат. Тогда оно задается формулами

$$\begin{aligned} x^0 &= ax'^0 + bx'^1, \\ x^1 &= cx'^0 + dx'^1, \end{aligned}$$

или, в матричной форме

$$x = Ax'$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в координатах (x^0, x^1) пространства R_1^2 задается матрицей

$$G = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $x = Ax'$ - движение, то

$$G = A'GA.$$

(2.10)

Так как $\det A^t = \det A$ и определитель произведения матриц равен произведению определителей, то

$$\det G = (\det A)^2 \det G$$

откуда

$$(\det A)^2 = 1, \quad \det A = \pm 1.$$

Из (2.10) вытекает система из трех уравнений для элементов матрицы A :

$$a^2 - c^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad b^2 - d^2 = -1.$$

Ясно, что $a \neq 0$. Положим $\beta = c/a$. Прямое вычисление дает

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$c = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad d = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Здесь знак a совпадает со знаком c , а знак b - со знаком d . Итак, группа всех преобразований, являющихся движениями псевдоевклидовой метрики в пространстве R_1^2 , состоит из следующих матриц

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & \pm b \\ c & \pm d \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$c = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Введем угол гиперболического поворота ψ , положив $\beta = th\psi$, тогда

$$A = \pm \begin{pmatrix} ch\psi & \pm sh\psi \\ sh\psi & \pm ch\psi \end{pmatrix},$$

т.е. мы получаем группу гиперболических поворотов. Любой гиперболический поворот переводит в себя изотропный конус $|\xi|^2 = 0$. Кроме того, если $|\xi|^2 = 1$, то $|A\xi|^2 = 1$. Векторы, имеющие единичную длину, образуют в R_1^2 "псевдосферу единичного радиуса". Эта псевдосфера задается в R_1^2 уравнением $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1$ и является гиперболой (рис. 31).

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

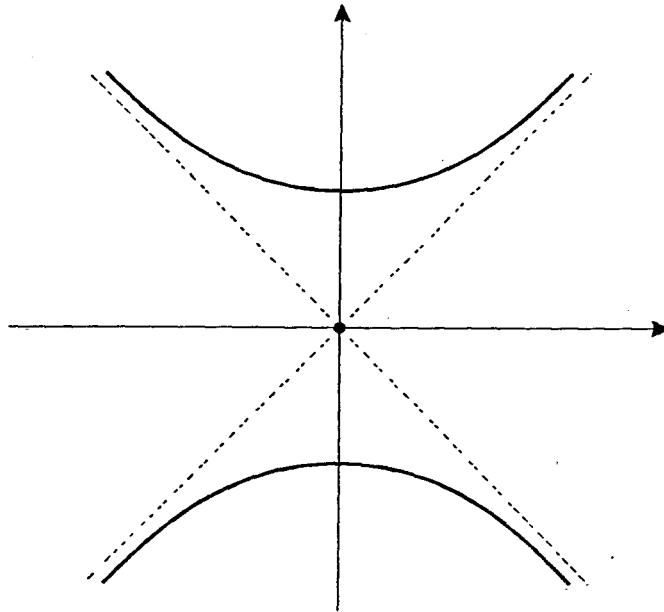


Рис. 31

Напомним, что группа ортогональных преобразований евклидовой плоскости состояла из двух связных компонент: собственных и несобственных преобразований. Группа движений псевдоевклидовой плоскости R_1^2 устроена более сложно. Она состоит из четырех связных компонент (четырёх кусков):

$$\begin{pmatrix} ch\psi & sh\psi \\ sh\psi & ch\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ch\psi & -sh\psi \\ sh\psi & -ch\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -ch\psi & sh\psi \\ -sh\psi & ch\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -ch\psi & -sh\psi \\ -sh\psi & -ch\psi \end{pmatrix}.$$

Преобразования из первой связной компоненты можно соединить кривой с единичным, т.е. тождественным преобразованием. Преобразования из первой и второй связных компонент не меняют направления времени t . Такие преобразования называются ортохронными. Таким образом, связная компонента единицы состоит из собственных (с определителем +1).

Рассмотренная нами группа движений псевдоевклидовой плоскости, сохраняющих начало координат, обозначается через $O(1, 1)$. Это частный случай группы $O(p, q)$, $p + q = n$, псевдоортогональных преобразований пространства $R_{p,q}^n$. Таким образом, $O(p, q)$ есть группа матриц A , сохраняющих скалярное произведение

$$(\xi, \eta) = \xi^1 \eta^1 + \dots + \xi^p \eta^p - \dots - \xi^n \eta^n.$$

Особо важны группы $O(1, n-1)$ - движение n - мерного пространства Минковского R_1^n , сохраняющие начало координат. Мы видели, что группа $O(1, 1)$ состоит из четырех кусков (четырёх компонент связности). Можно доказать, что для любого $n \geq 2$ группа $O(1, n-1)$ также состоит из четырёх кусков.

Переформируем теперь полученные результаты о движении псевдоевклидова пространства на языке специальной теории относительности. Как уже было сказано, переход от одной инерциальной системы отсчета (ct', x'^1, x'^2, x'^3) к другой (ct, x^1, x^2, x^3) осуществляется преобразованием, сохраняющим квадратичную форму

$$(ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Пусть система (x') движется относительно (x) вдоль оси x^1 со скоростью v . Это означает, что $x^2 = x'^2$, $x^3 = x'^3$ и преобразование координат имеет вид

$$\begin{aligned} x^0 = ct &= a_1(ct') + a_2(x'^1), \\ x^1 &= b_1(ct') + b_2(x'^1), \\ x^2 &= x'^2, \\ x^3 &= x'^3. \end{aligned}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ лежит в $O(1, 1)$.

Если скорость уменьшить до нуля, то преобразование (2.11) станет тождественным, поэтому матрица A лежит в связной компоненте единицы группы $O(1, 1)$ и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} ch\psi & sh\psi \\ sh\psi & ch\psi \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cdot ch\psi + x'^1 \cdot sh\psi, \\ x^1 &= ct' \cdot sh\psi + x'^1 \cdot ch\psi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассмотрим в системе координат (ct, x^1) движение начала координат O' штрихованной системы. Тогда $x'^1 = 0$ и формулы (2.13) принимают вид

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cdot ch\psi, \\ x^1 &= ct' \cdot sh\psi, \end{aligned}$$

или, разделив одно на другое, $\frac{x^1}{ct} = th\psi$. Но $\frac{x^1}{t}$ есть, очевидно скорость v точки O' относительно исходной системы координат. Таким образом,

$$th\psi = \frac{v}{c}.$$

Отсюда

$$sh\psi = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad ch\psi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.14)$$

Эти преобразования и называются в теории относительности преобразованиями Лоренца.

Пусть скорость v мала по сравнению со скоростью света c , т.е. $v/c \ll 1$. Тогда из (2.14) вытекает, что если $v/c \rightarrow 0$, то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея:

$$\begin{aligned} t &= t', \\ x^1 &= x'^1 + vt'. \end{aligned}$$

Иными словами, при малых взаимных скоростях системы отсчета формулы теории относительности переходят в формулы классической механики. Однако в области больших скоростей (сравнимых со скоростью света) начинаются глубокие расхождения этих двух теорий.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

25. Уравнения Эйлера - Лагранжа

Из опыта известно, что электромагнитное поле распространяется в пустоте со скоростью света. Это означает, что теория электромагнитного поля является релятивистской теорией, а уравнения электромагнитного поля, называемые уравнениями Максвелла, должны быть релятивистски инвариантными, т.е. должны не изменять свой вид при преобразованиях Лоренца. Мы получим уравнения Максвелла из вариационного принципа, откуда будет немедленно следовать их релятивистская инвариантность. Чтобы сформулировать требуемый вариационный принцип нам понадобятся некоторые простейшие сведения из вариационного исчисления.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ - точка пространства R^n и $\xi = \xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ вектор, приложенный в этой точке. Рассмотрим функцию $L(x, \xi)$, зависящую от точки x и вектора ξ . Выберем фиксированную пару точек $P(x_1^1, \dots, x_1^n)$, $Q(x_2^1, \dots, x_2^n)$ и рассмотрим всевозможные гладкие кривые $\gamma: x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$ (с фиксированными a и b), соединяющие эти две точки:

$$x^i(a) = x_1^i \quad x^i(b) = x_2^i$$

Рассмотрим величину

$$S_{[\gamma]} = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (2.15)$$

На какой кривой γ величина будет минимальной? Величина (функционал) $S_{[\gamma]}$ будет называться *действием*.

Пример 1.

Пусть (g_{ij}) - метрика в R^n и

$$L(x, \xi) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \xi^j} = \sqrt{(\xi, \xi)} = |\xi|,$$

- длина вектора ξ . Тогда

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

$$S_{[\gamma]} = \int_P^Q \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \xi^j} dt$$

есть длина кривой γ .

Пример 2.

Предложим, что пространство снабжено евклидовой метрикой; положим

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}^i)^2 - U(x),$$

где $U(x)$ - некоторая функция точки. Тогда

$$S_{[\gamma]} = \int_P^Q \left[\sum_{i=1}^n \frac{m}{2} (\dot{\xi}^i)^2 - U(x) \right] dt$$

Кривые γ , вдоль которых $S_{[\gamma]}$ минимально - это траектории движения точки массы m в поле силы

$$F = -\text{grad } U = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial x^n} \right\}.$$

Теорема 2.1.

Если величина

$$S_{[\gamma]} = \int_P^Q L(x, \dot{x}) dt$$

достигает минимума на некоторой кривой γ среди всех гладких кривых, идущих из P в Q , то вдоль кривой γ выполнены уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \left. \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{\xi}^i} \right|_{\dot{\xi} = \dot{x}},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\xi}^i \partial \dot{\xi}^j} \ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\xi}^i \partial x^j} \dot{x}^j \right) \Big|_{\dot{\xi} = \dot{x}}$$

(считается, что $L = L(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$, где x и ξ - независимые переменные, но затем подставляется $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ вдоль кривой γ).

Доказательство. Пусть $\eta^i = \eta^i(t)$, $a \leq t \leq b$ - любая гладкая функция, такая, что $\eta^i(a) = 0$ и $\eta^i(b) = 0$. Рассмотрим выражение

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[\gamma + \varepsilon\eta] - S[\gamma]}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]_{|\varepsilon=0}.$$

Здесь $\gamma + \varepsilon\eta$ - это кривая $x^i = x^i(t) + \varepsilon\eta^i(t)$, также идущая из P в Q , близкая к кривой γ при малом ε .

Лемма 2.2. Если $S[\gamma]$ минимально, то для любой гладкой вектор - функции $\eta(t)$, обращающейся в нуль на концах отрезка $a \leq t \leq b$, имеет место тождество

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[\gamma + \varepsilon\eta] - S[\gamma]}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]_{|\varepsilon=0} \equiv 0.$$

Доказательство леммы очевидно.

Перейдем к теореме. Развернем выражение

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]_{|\varepsilon=0}.$$

Мы имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]_{|\varepsilon=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^i} \eta^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i(t) \right\} dt = 0, \quad (2.16)$$

где интеграл, по определению, вычислен вдоль кривой γ :

$$x^i = x^i(t), \quad \xi^i = \dot{x}^i(t).$$

Это равенство верно для любой гладкой вектор - функции $\eta(t)$, обращающейся в нуль на концах отрезка $a \leq t \leq b$.

Имеет место следующее равенство:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i dt = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \eta^i \right)_{t=b} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \eta^i \right)_{t=a} - \int_a^b \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \right) dt$$

(интегрирование по частям).

Так как $\eta^i(a) = \eta^i(b) = 0$, то мы получаем:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i dt = - \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \right) \eta^i dt.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.16), мы видим, что для любой гладкой вектор - функции $\eta^i(t)$, обращающейся в нуль на концах отрезка $a \leq t \leq b$, верно равенство

$$\frac{d}{d\varepsilon} S_{[\gamma+\varepsilon\eta]}|_{\varepsilon=0} = 0 \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \eta^i dt = 0, \quad (2.17)$$

в предположении, что на кривой $\gamma: x^i = x^i(t)$ достигается минимум функционала $S_{[\gamma]}$, рассматриваемого на множестве всех гладких кривых, соединяющих точки P и Q .

Отсюда следует равенство

$$\Psi^i(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Действительно, если $\Psi^i(t) = 0$ для какого-нибудь i и какого-нибудь $t = t_0$ между a и b , то легко подобрать такую функцию $\eta^i(t)$, что интеграл (2.17) не будет равным нулю (например, полагая $\eta^i(t) = \Psi^i f(t)$, будем иметь положительное число, если $f(t) \geq 0$ и обращается в нуль на конусах). Итак, теорема доказана.

Замечание. Решения уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

называются экстремальными функционала S .

Дадим теперь несколько определений. Подинтегральная функция

$$L = L(x, \dot{x}) = L(x, \xi)$$

называется *лагранжионом*.

Энергией называется выражение

$$E = E(x, \dot{x}) = E(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial L}{\partial \xi^i} - L = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L.$$

Импульсом называется ковектор

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Силой называется ковектор

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Уравнение Эйлера - Лагранжа - это уравнение из теоремы 2.1 (уравнение экстремалей)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \text{ или } \dot{p}_i = F_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Выражение

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)$$

называется вариационной - производной функционала. Из доказательства теоремы 2.1 вытекает другое определение вариационной производной: это величина $\frac{\delta S}{\delta x^i}$, определяемая равенством

$$\frac{d}{d\varepsilon} S_{[\gamma+\varepsilon\eta]}|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\delta S}{\delta x^i} \eta^i dt.$$

26. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла представляют собой уравнения Эйлера - Лагранжа для функционала действия $S = S_f + S_m + S_{mf}$, которые мы сейчас опишем. Слагаемое S_m - это та часть действия, которая определяется только самими частицами (зарядами), движущимися в поле (т.е. S_m - это действие частиц в отсутствие поля). Обычно это действие определяется как

$$S_m = -\sum_{mc} \int_a^b dl,$$

где сумма берется по всем частицам, движущимся в поле, m - масса частицы, c - скорость света, интеграл $\int_a^b dl$ берется вдоль мировой линии в R_1^4 между двумя фиксированными событиями: нахождением частицы в начальном и конечном положениях в моменты времени t_1 и t_2 ; l - длина дуги. Это действие можно представить в трехмерном виде:

$$S_m = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

где $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, v - трехмерная скорость.

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

Слагаемое S_{mf} это та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Обычно это действие определяется формулой

$$S_{mf} = -\sum_j \frac{e_j}{c} \int \sum_{k=1}^4 A_k^{(j)} dx^k,$$

где сумма берется по всем частицам j , e - заряды частиц, а интеграл берется вдоль мировой линии частицы (как и предыдущий интеграл). Свойства поля характеризуются 4- вектором $\{A_i\}$, который обычно называется 4- *потенциалом электромагнитного поля*; его компоненты A_i зависят от времени и пространственных координат. В интеграле S_{mf} значения вектора $\{A_i\}$ вычисляются в точках мировой линии частицы j , вдоль которой ведется интегрирование. Свойства частицы j с точки зрения ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются только одним параметром - зарядом e_j , который и включен в действие S_{mf} . Итак, действие $S_m + S_{mf}$ для заряда в электромагнитном поле принимает вид

$$\int_a^b \left(-mcdl - \frac{e}{c} \sum_{k=1}^4 A_k dx^k \right).$$

Слагаемое S_f это та часть действия, которая зависит от свойств самого поля; иными словами, S_f есть действие для поля в отсутствие зарядов. Слагаемое S_f несущественно, если мы интересуемся только движением зарядов в данном электромагнитном поле, но это слагаемое становится существенным, как только мы ставим задачу о нахождении уравнений, определяющих само поле.

Три пространственных компонента $\{A^1, A^2, A^3\}$ 4- вектора образуют трехмерный вектор \vec{A} , называемый векторным потенциалом поля. Временная компонента A_0 имеет вид $A_0 = \phi$, где вещественная функция ϕ называется скалярным потенциалом поля. Индексы здесь поднимаются при помощи метрики Минковского

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Напряженностью электрического поля называется вектор

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi$$

(это трехмерный вектор). Далее, напряженностью магнитного поля называется трехмерный вектор

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}.$$

Электромагнитное поле, у которого $\vec{E} \neq 0, \vec{H} = 0$, называется *электростатическим полем*; если же $\vec{E} = 0, \vec{H} \neq 0$, то говорят о *магнитном поле*.

Введем в рассмотрение тензор электромагнитного поля $F_{ik} \ 0 \leq i, k \leq 3$, полагая

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Тогда действие S_f принимается равным

$$S_f = a \int 2(E^2 - H^2) d^4x,$$

где $H^2 = (\vec{H}, \vec{H}), E^2 = (\vec{E}, \vec{E})$ - скалярные квадраты трехмерных векторов \vec{H} и \vec{E} , a - некоторая постоянная; интеграл берется по пространственным координатам по всему трехмерному пространству, а по переменной x^0 (пропорциональной времени) - между двумя фиксированными моментами. Действие S_f можно записать в четырехмерном виде.

Предложение 2.3.

$$2(E^2 - H^2) = \sum_{i,k=1}^4 F_{ik} F^{ik},$$

где $F^{ik} = \sum_{j,l=1}^4 g^{ij} g^{kl} F_{jl}$, (g^{ij}) - метрика Минковского.

Доказательство. Из определения тензора F_{ik} электромагнитного поля прямым вычислением получается, что

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^4 F_{ik} F^{ik} &= \text{trace}(F_{ik}) \cdot (F^{ik}) = \\ &= \text{trace} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \text{trace} \begin{pmatrix} E^2 & E_2 H_3 - E_3 H_2 & -E_1 H_3 + E_3 H_1 & E_1 H_2 - E_2 H_1 \\ E_2 E_3 + E_3 H_2 & E_1^2 - H_2^2 - H_3^2 & E_1 E_2 + H_1 H_2 & E_1 E_3 + H_1 H_3 \\ E_1 H_3 - E_3 H_1 & E_1 H_2 + H_1 H_2 & E_2^2 - H_1^2 - H_3^2 & E_2 E_3 + H_2 H_3 \\ -E_1 H_2 + E_2 H_1 & E_1 E_3 + H_1 H_3 & E_2 E_3 + H_2 H_3 & E_3^2 - H_1^2 - H_2^2 \end{pmatrix} \\ &= E^2 + E_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_2^2 - H_1^2 - H_3^2 + E_3^2 - H_1^2 - H_2^2 = 2(E^2 - H^2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Обозначим $\sum_{i,k=1}^4 F_{ik} F^{ik}$ через F_{ik}^2 . Тогда $S_f = a \int F_{ik}^2 d^4x$.

Постоянная a обычно выбирается равной $-\frac{1}{16c\pi}$. Тогда

$$S_f = \frac{1}{16c\pi} \int 2(E^2 - H^2) d^4x = \frac{1}{16c\pi} \int F_{ik}^2 d^4x.$$

Итак, полное действие для электромагнитного поля с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S = -\sum \int mc dl - \sum \int \frac{e}{c} A_k dx^k - \frac{1}{16c\pi} \int F_{ik}^2 d^4x.$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

До сих пор мы рассматривали точечные заряды, однако иногда удобно считать заряд распределенным во всем пространстве непрерывным образом. Если ρ - плотность заряда, то тогда ρdV - заряд, находящийся, в объеме $dV = d^3x$ трехмерного пространства; плотность ρ зависит от x^1, x^2, x^3 и от времени t .

Рассмотрим мировые линии зарядов в R_1^4 , и пусть $\frac{dx^i}{dt}$ есть 4- вектор скорости зарядов. Тогда 4- вектор j^i , где $j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$, называется 4- вектором тока.

Три пространственные компоненты этого 4- вектора j^1, j^2, j^3 образуют обычный пространственный вектор $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где v - скорость заряда в данной точке. Составляющая j^0 равна ρv . Прямое вычисление показывает, что в терминах тока j^i действие можно записать в виде

$$S = -\int mc dl - \frac{1}{c^2} \int \sum_i A_i j^i d^4x - \frac{1}{16\pi} \int F_{ik}^2 d^4x.$$

Теперь перейдем к нахождению уравнений поля. Прежде всего, исходя из определения тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0. \tag{2.18}$$

Выражение, стоящее в левой части этого равенства, представляет собой тензор третьего ранга, антисимметричный по всем индексам. Его компоненты не равны тождественно нулю лишь при $i \neq k \neq l$. Всего, таким образом, имеется четыре различных скалярных уравнения. Запишем их в трехмерной форме. Подставляя в (2.18) компоненты

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем следующие два уравнения (одно скалярное и одно векторное):

а) $d_{iv} \vec{H} = 0,$

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

$$\text{б) } \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0.$$

Уравнение а) говорит об отсутствии магнитных зарядов. Уравнение б) выражает закон Фарадея: изменение магнитного поля ведет к возникновению электрического поля.

Остальные соотношения, которым удовлетворяет электромагнитное поле, мы найдем исходя из вариационного принципа. При этом мы будем считать заданным движение зарядов. Это означает, что при выводе уравнений Эйлера - Лагранжа варьированию должны подвергаться только потенциалы поля (т.е. 4- вектор потенциала A_i).

Итак, поскольку траектории зарядов не варьруются, то $\delta S_m = 0$, а в слагаемом S_{mf} не должен варьироваться ток j^i , так как

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta S = \delta(S_{mf} + S_f) &= - \int \left\{ \frac{1}{c^2} \sum_i j^i \delta A_i + \frac{1}{16c\pi} \delta(F_{ik}^2) \right\} d^4x = \\ &= \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_i j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} \sum_{i,k} F^{ik} \delta(F_{ik}) \right\} d^4x = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

то

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_i j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} \sum_{i,k} F^{ik} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \right\} d^4x = \\ &= - \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_i j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} \sum_{i,k} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta A_k) - \frac{1}{8\pi} \sum_{i,k} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta A_i) \right\} d^4x. \end{aligned}$$

Поскольку $F_{ik} = -F_{ki}$, то

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_i j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta A_i) \right\} d^4x.$$

Второе слагаемое в этом интеграле преобразуем путем интегрирования по частям:

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_i j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta A_i) \right\} d^4x = \\ &= -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_i j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right\} d^4x - \frac{1}{4c\pi} \int \sum_{i,k} F^{ik} \delta A_i dS_k \Big|_P.\end{aligned}$$

В последнем слагаемом интегрирование выполняется по границе четырехмерной области; при этом границей области по пространственным координатам является "бесконечность", где поля аннулируются (а поэтому и $F^{ik} \equiv 0$); границей области по времени являются два фиксированных момента времени t_1, t_2 ; в этих точках аннулируются вариации потенциалов δA_i .

Таким образом, последнее слагаемое равно нулю. Следовательно,

$$\int \sum_i \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d^4x = 0.$$

В силу произвольности вариаций δA_i получаем

$$\sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (2.19)$$

Это и есть уравнения Эйлера - Лагранжа, возникающие при варьировании потенциалов полей в действии. Запишем полученные четыре скалярных уравнения ($i = 0, 1, 2, 3$) в трехмерной форме. Напомним явный вид тензора F^{ik} :

$$(F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & -H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

(тензор записан в координатах $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$). Первое из уравнений (2.19) при $i = 1$ имеет, следовательно, вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j^1.$$

Отсюда

$$-\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j_x.$$

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

Аналогично преобразуются и уравнения для $i = 2, 3$, что окончательно дает

$$c) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Нулевое уравнение (при $i = 0$) дает

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

т.е.

$$d) \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho.$$

Уравнение c) выражает закон Ампера $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, в который введен дополнительный член $\frac{\partial \vec{E}}{c \partial t}$, учитывающий то обстоятельство, что изменение электрических полей приводит к изменению магнитных полей. Уравнение d) выражает теорему Остроградского - Гаусса: полный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности, может быть получен интегрированием нормальной составляющей вектора \vec{E} по поверхности.

Уравнение a) - d) или эквивалентные им уравнения в четырехмерной форме (2.18), (2.19) называются уравнениями Максвелла. Сведем их в единую таблицу:

Уравнения Максвелла

Четырехмерная форма	Трехмерная форма	Физическое содержание
$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$	$\text{div } \vec{H} = 0$	Отсутствие магнитных зарядов
$i \neq k \neq l$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	Закон Фарадея
$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^0$	$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	Закон Ампера - Максвелла
$i = 0, 1, 2, 3$	$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$	Закон Остроградского - Гаусса

Уравнения Максвелла полностью определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями электродинамики.

Возможно, окажется полезным следующее замечание относительно калибровочных преобразований. Хотя электрическое и магнитное поля и определяются через \vec{A} и ϕ соотношениями

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A},$$

такое определение не является единственным, поскольку при калибровочном преобразовании

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \text{grad} \chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

или (в четырехмерной форме)

$$A^k \rightarrow A^k + \frac{\partial \chi}{\partial x^k},$$

где χ - произвольная скалярная функция, величины \vec{E} и \vec{H} не изменяются. Эквивалентное выражение этого факта состоит в том, что не изменяется величина F^{kl} :

$$F^{kl} \rightarrow F^{kl} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \chi = F^{kl}$$

Подставляя выражение

$$F^{kl} = \frac{\partial A^l}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^l}$$

в уравнение Максвелла

$$\frac{\partial F^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{i3}}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c} j^i,$$

мы видим, что 4- вектор A^k удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^k}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A^k - \frac{\partial^2}{\partial x^k} \left(\sum_l \frac{\partial^2}{\partial x^l} A^l \right) = j^k.$$

Мы можем воспользоваться свободой, даваемой нам соотношением

$$A^k \rightarrow A^k + \frac{\partial \chi}{\partial x^k},$$

и выбрать функцию χ так, чтобы преобразованный 4- вектор A^k удовлетворял условию калибровки Лоренца:

$$\sum_k \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{rot} \vec{A} = 0.$$

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

При таком выборе калибровки уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^k}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A^k - \frac{\partial^2}{\partial x^k} \left(\sum_l \frac{\partial^2}{\partial x^l} A^l \right) = j^k$$

принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial z^2} = j^k,$$

т.е., очевидно, является четырехмерным представлением известных уравнений

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \rho,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \vec{j}.$$

В пустоте предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial z^2} = 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Delta \Phi,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Delta \vec{A}.$$

Найдем теперь явное выражение для тензора энергии - импульса электромагнитного поля при условии отсутствия заряда.

Действие S_f имеет вид

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{kl}^2 d^4x,$$

поэтому функция Лагранжа L выглядит следующим образом:

$$L = -\frac{1}{16\pi c} F_{kl}^2 = -\frac{1}{16\pi c} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right)^2.$$

По определению тензора энергии - импульса T_j^k получаем

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$T_i^k = \sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)} - \delta_i^k L.$$

Найдем $\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)}$. Для этого вычислим дифференциал dL . Имеем:

$$\begin{aligned} dL &= -\frac{1}{8c\pi} \sum_{k,l} F^{kl} \left(d \frac{\partial A_l}{\partial x^k} + d \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right) = \\ &= -\frac{1}{8c\pi} \sum_{k,l} \left(F^{kl} d \frac{\partial A_l}{\partial x^k} + F^{kl} d \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right) = \\ &= -\frac{1}{4c\pi} \sum_{k,l} F^{kl} d \frac{\partial A_l}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)} = -\frac{1}{4c\pi} F^{kl},$$

следовательно

$$T_i^k = -\frac{1}{4c\pi} \sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16c\pi} \sum_{l,m} \delta_i^k F_{lm} F^{lm}.$$

Поднимая индекс l при помощи метрики Минковского g^{im} , получим

$$T^{ik} = -\frac{1}{4c\pi} \sum_{l,m} g^{im} \frac{\partial A_l}{\partial x^m} F^{kl} + \frac{1}{16c\pi} \sum_{l,m} g^{ik} F_{lm} F^{lm}.$$

Полученный тензор энергии - импульса пока что не симметричен. Чтобы избавиться от этого недостатка, вычтем из T^{ik} сумму вида

$$\frac{1}{4c\pi} \sum_l \frac{\partial A^l}{\partial x^i} F^{kl},$$

которую можно представить в дивергентной форме $\sum_l \frac{\partial}{\partial x^i} (\psi^{ikl})$.

В самом деле,

$$\sum_l \frac{\partial A^l}{\partial x^i} F^{kl} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x^i} (A^l F^{kl}) - \sum_l A^l \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^i} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x^i} (A^l F^{kl}),$$

так как $\sum_l \frac{\partial F^{jl}}{\partial x^l} = 0$ в силу уравнений Максвелла, описывающих поле в отсутствие заряда ($j = 0$). По теореме Стокса величина $\sum_l \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl}$ может быть добавлена к тензору энергии - импульса без изменения вектора - импульса системы.

Так как

$$\frac{\partial A_l}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^l} = F_{il},$$

то, окончательно, для симметричного тензора энергии - импульса электромагнитного поля получаем

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi c} \sum_{l,m} \left(-F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right).$$

27. Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

Уравнения Максвелла связывают антисимметричные тензоры с векторами, однако эта связь устанавливается для отдельных компонент, на что указывает индексная запись. В связи с этим возникает вопрос: можно ли записать уравнения Максвелла так, чтобы в них входили тензор F и ток j и не фигурировали бы явно компоненты. Благодаря методам дифференциальной геометрии такая возможность действительно существует, и уравнения Максвелла принимают элегантный вид

$$dF = 0, \quad d^*F = \mathfrak{J},$$

причем автоматически учитывается антисимметрия тензора электромагнитного поля F . Такие интерпретации уравнений Максвелла проливает свет на их геометрическую природу и занимает центральное место в современной электродинамике.

Займемся выводом указанных уравнений. Для этого нам понадобятся некоторые элементарные сведения о дифференциальных формах и их интегралах. Чтобы не обращаться к специальной литературе, мы приведем здесь неформальный набросок соответствующей теории. Начнем с того, что выясним, каков смысл обычных линейных и поверхностных интегралов

$$I_1 = \int_{\Gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

$$I_2 = \int_S G_x dy \wedge dz + G_y dz \wedge dx + G_z dx \wedge dy = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Величины I_1 и I_2 - это числа. Величина I_1 есть интеграл чего-то вдоль отрезка кривой Γ , а I_2 - интеграл чего-то другого по куску поверхности S . Таким образом, в определенном смысле это "что-то" дуально отрезку кривой, поскольку когда они "объединяются" (с помощью интегрирования), в результате получается число. Аналогично в случае I_2 "что-то другое" дуально куску поверхности. Мы систематизируем сказанное, вводя новые слова: отрезки кривых и куски поверхностей будем называть *цепями*, а объекты, которые интегрируются по цепям, будем называть *дифференциальными формами* или просто *формами*. Таким образом, формы дуальны цепям.

Назовем *k-мерной цепью* или просто *k-цепью* k -мерную компактную поверхность (с краем или замкнутую). Стало быть, 1-цепь - это отрезок кривой (или замкнутая кривая, возможно состоящая из нескольких связанных компонент) и т.д.. Обозначим через C_k множество всех k -мерных цепей в трехмерном пространстве R^3 . Таким образом, $C_0 = \{\text{множество всех конечных наборов точек в } R^3\}$, $C_1 = \{\text{множество всевозможных компактных кривых в } R^3\}$, $C_2 = \{\text{множество всевозможных компактных поверхностей в } R^3\}$, $C_3 = \{\text{множество всевозможных компактных трехмерных областей в } R^3\}$ цепей размерности большей 3 в трехмерном пространстве R^3 , очевидно нет.

Далее, границей n - цепи назовем $(n-1)$ - цепь. Границей поверхности является кривая, границей кривой являются две точки. Определим *граничный оператор* ∂ , отображающий C_n в C_{n-1}

$$\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$$

Некоторые цепи не имеют границ: поверхность сферы является 2-цепью, не обладающей границей; замкнутые кривые представляют собой 1-цепи без границы. Такие замкнутые цепи называются *циклами*; множество n - мерных циклов обозначается через Z_n . Поскольку у них нет границы, очевидно, что $\partial\alpha = 0$ для любого $\alpha \in Z_n$. В то же время существуют цепи, которые сами служат границей для цепей более высокой размерности. Множество таких n - мерных цепей обозначается через B_n :

$$B_n = \partial C_{n+1}.$$

Например, замкнутая поверхность является границей трехмерной области, а замкнутая кривая - границей поверхности. Очевидно, что элементы из B_n не обладают границей (являются замкнутыми), т.е.

$$\partial B_n = 0.$$

Комбинируя два последних соотношения, получаем

$$\partial^2 = 0.$$

Словами это можно выразить так: граница границы равна нулю, т.е. цепь, являющаяся границей, должна быть замкнутой. Справедливо ли обратное утверждение: является ли замкнутая цепь с необходимостью границей другой цепи? В евклидовых пространствах ответ утвердительный, т.е. $Z_n = B_n$. В общем же случае существуют замкнутые цепи, не являющиеся границей, т.е. в общем случае $B_n \subset Z_n$. Например, на торе замкнутая кривая, подобная Γ_1 , изображенной на рис. 32, не является границей какой-либо части поверхности тора, тогда как Γ_2 , очевидно является границей области.

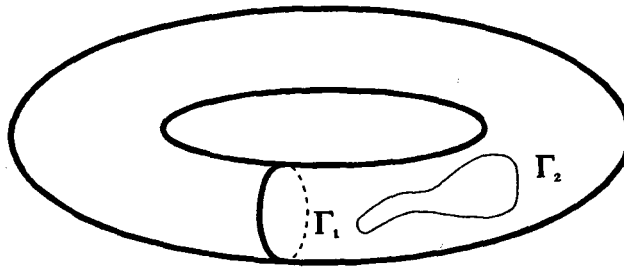


Рис. 32. Замкнутые кривые на торе. Кривая Γ_2 ограничивает часть поверхности тора, кривая Γ_1 такой границей не является

Аналогично в пространстве S^1 , т.е. на окружности, сама окружность не является границей какой-либо области пространства.

Этим завершается то, что необходимо было сказать о цепях.

Обратимся теперь к формам. Как уже говорилось выше, интеграл от формы по цепи равен числу. Символически обозначим это число так:

$$\int_{\alpha} \omega_n \equiv \int_{\alpha} f_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \quad \alpha \in C_n.$$

Символ произведения \wedge в этом выражении введен с тем, что существенна ориентация кривой, поверхности и т.д. Существование интегралов связано с

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

дуальностью форм и цепей, что мы увидим явно. Некоторая 1-форма ω_1 - это величина, которую надо проинтегрировать вдоль кривой (1-цепи), т.е. величина вида

$$A dx + B dy + C dz$$

Другие формы строятся по этому же образцу, и мы получаем в трехмерном пространстве:

0 - форма	ω_0 - это функция,
1 - форма	$\omega_1 = A dx + B dy + C dz,$
2 - форма	$\omega_2 = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx,$
3 - форма	$\omega_3 = F dx \wedge dy \wedge dz$

где

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dx = 0 \text{ и т.д.}$$

В силу этих последних равенств ясно, что в n - мерном пространстве существуют n - формы, но не существуют $(n+1)$ - формы, т.е. формы порядка, большего размерности.

Формы можно дифференцировать. Эта операция называется операцией *внешнего дифференцирования*.

На 1- формах в трехмерном пространстве операция внешнего дифференцирования определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} d(A dx + B dy + C dz) &= \frac{\partial A}{\partial x} dx \wedge dx + \\ &+ \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy + \\ &+ \frac{\partial B}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial C}{\partial x} dx \wedge dz + \\ &+ \frac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial z} dz \wedge dz = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \\ &\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx. \end{aligned}$$

На 0-формах (т.е. функциях) операция есть не что иное, как операция взятия полного дифференциала:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Внешний дифференциал от 2- формы имеет вид:

$$\begin{aligned} d(fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdx \wedge dz) = \\ + \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dz + \\ + \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dx = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

В формуле для внешнего дифференциала 1-формы величины

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

являются компонентами вектора $rot \vec{F}$, где $\vec{F} = \{A, B, C\}$. Из формулы для внешнего дифференциала 2-формы, вводя вектор $\vec{G} = (g, h, f)$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = div \vec{G}.$$

Заметим теперь, что если мы вычислим внешний дифференциал от дифференциала 1-формы, то получим тождественный нуль. Иными словами,

$$d(d(A dx + B dy + C dz)) = d^2(A dx + B dy + C dz) = 0.$$

Подобным образом и вобщем смысле

$$d^2 = 0.$$

На языке компонент это равенство записывается $rot grad = 0$ (для 0-формы) или $div rot = 0$ (для 1-формы).

Оператор d иногда называются *кограничным оператором*, подчеркивая то обстоятельство, что равенство $d^2 = 0$ дульно равенству $\partial^2 = 0$.

Введем следующее определение. Форма ω_n называется *замкнутой*, если $d\omega_n = 0$; n - форма ω_n называется *точной*, если она является дифференциалом некоторой $(n-1)$ - формы: $\omega_n = d\omega_{n-1}$.

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Равенство $d^2 = 0$ гласит, что все точные формы являются замкнутыми, поскольку $d(d\omega_{n-1}) = d^2\omega_{n-1} = 0$. Однако в общем случае утверждение, что все замкнутые формы являются точными, неверно, хотя это и так в случае евклидовых пространств. Это также следует из дуальности цепей и форм: в евклидовых пространствах все замкнутые формы являются границами.

Хорошо известные результаты вытекают из формулы Стокса, которая устанавливает следующую связь между p -формой ω и $(p+1)$ -цепью α :

$$\int_{\partial\alpha} \omega = \int_{\alpha} d\omega.$$

В качестве примера рассмотрим случай $p=2$. Пусть дана 2-форма ω в трехмерном пространстве

$$\omega = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy$$

и пусть цепь α - это трехмерная область V с границей ∂V . В этом случае формула Стокса дает

$$\int_{\partial V} A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy = \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV.$$

Последнее равенство называют теоремой о дивергенции или теоремой Остроградского - Гаусса. Читатель может показать в качестве упражнения, что $p=1$ мы получаем теорему Стокса

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Мы рассматриваем соотношения, существующие между оператором внешнего дифференцирования d и обычными дифференцированными операторами grad , div , и rot . Но как это видно из приведенного выше вывода теоремы Остроградского - Гаусса, если компоненты вектора \vec{A} являются коэффициентами 2-формы, то $\operatorname{div} \vec{A}$ является коэффициентом 3-формы, полученной действием d на 2-форму. На языке обычного векторного анализа оператор ∇ превращает скаляр в вектор, а вектор - либо в скаляр (div), либо в аксиальный вектор (rot). Существует, однако

оператор, не изменяющий векторного характера величин; это лапласиан ∇^2 (иначе обозначаемый через Δ). Величина $\nabla^2\phi$ является скаляром, величина $\nabla^2\vec{A}$ - вектором и т.д. Как это выражается на языке форм?

Оператор d превращает p - форму в $(p+1)$ - форму, так что нам необходимо найти другой оператор δ , который превращал бы p - форму в $(p-1)$ - форму. Мы сейчас покажем, как можно построить такой оператор.

Начнем с описания пространств форм в трехмерном пространстве R^3 . Мы можем записать базисы этих пространств следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_0 &: 1; \\ \omega_1 &: dx, dy, dz; \\ \omega_2 &: dx \wedge dy, dy \wedge dx, dz \wedge dx; \\ \omega_3 &: dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Ясно, что в трехмерном пространстве не существуют 4- формы. Ясно также, что размерность пространства p - форм равна размерности пространства $(3-p)$ - форм. Таким образом, мы можем определить оператор, переводящий одно из этих пространств в другое. Он называется *оператором Ходжа* и обозначается звездочкой $*$. В пространстве R^n с евклидовой метрикой оператор Ходжа определяется соотношением

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \sum_{i_{p+1}, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n},$$

где $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ - полностью антисимметричный тензор в R^n , равный 1, если $(i_1 \dots i_n)$ - четная перестановка набора $(1, 2, \dots, n)$, -1, если $(i_1 \dots i_n)$ - нечетная перестановка набора $(1, 2, \dots, n)$ и 0 в остальных случаях. Без труда проверяется, что оператор Ходжа действует на базисные формы bR^3 следующим образом:

$$\begin{aligned}*(1) &= dx \wedge dy \wedge dz, \\ *(dx) &= dy \wedge dz, \quad *(dy) = dz \wedge dx, \quad *(dz) = dx \wedge dy, \\ *(dx \wedge dy) &= dz, \quad *(dy \wedge dz) = dx, \quad *(dz \wedge dx) = dy, \\ *(dx \wedge dy \wedge dz) &= 1.\end{aligned}$$

Повторное действие оператора $*$ на p - форму ω_p в R^n дает

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$**\omega_p = (-1)^{p(n-p)} \omega_p.$$

В частности, в трехмерном пространстве R^3

$$**\omega_p = \omega_p.$$

Определим оператор δ как

$$\delta = (-1)^{np+p+1} * d*$$

где p - степень той формы ω_p , на которую действует оператор δ , а n - размерность пространства. Оператор δ называют *свряженным ойерайиором внешнейо дифференцирования*. Ясно, что степень формы $\delta\omega$ равна $(p-1)$.

Для иллюстрации покажем, как оператор δ превращает 1- форму $\vec{v} \cdot d\vec{S}$ в 0- форму:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \delta(v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \\ &= -*d*(v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \\ &= -*d(v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy) = \\ &= -*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = -div \vec{v} \end{aligned}$$

Легко видеть, что также как и в случае оператора d , квадрат оператора δ равен нулю. В самом деле

$$\begin{aligned} \delta\delta &= (-1)^{np+n+1} (-1)^{n(p-1)+n+1} * d* * d* = \\ &= (-1)^{pn-p^2+n} * d^2 * = 0. \end{aligned}$$

Наконец, *лайласиан* Δ переводит p -формы в p - формы и определяется как $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$.

Аналогичные конструкции существуют и в псевдоевклидовом пространстве $R_{k,l}^n (k+l=n)$. Только теперь оператор Ходжа определяется правилом:

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} (-1)^l dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

В частности, для евклидовой метрики ($l = 0$), это определение совпадает с определением (2.20). Для пространства Минковского R_1^4 ($k = 1, l = 3$) имеем:

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(4-p)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} i_4} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_4}.$$

После этого долгого вступления нетрудно записать уравнения Максвелла в геометрической (или, как ее называют иначе, "внутренней" форме). Мы работаем в четырехмерном пространстве - времени Минковского R_1^4 . Выберем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$. По определению тензора электромагнитного поля F_{kl} имеем:

$$F_{01} = Ex, \quad F_{02} = Ey, \quad F_{03} = Ez,$$

$$F_{12} = -Hz, \quad F_{31} = -Hy, \quad F_{23} = Hx,$$

где $Ex \equiv E_1$ и т.д.

Определим теперь 2- форму Фарадея F , полагая

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} F_{kl} dx^k \wedge dx^l = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + H_z dx \wedge dy + H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx.$$

Дуальная форма $*F$ (которая также является 2- формой) имеет вид

$$*F = -\frac{1}{2} * \left(\sum_{k,l=0} F_{kl} dx^k \wedge dx^l \right) =$$

$$= -E_x dy \wedge dz - E_y dz \wedge dx - E_z dx \wedge dy + (H_x dx + H_y dy + H_z dz) \wedge dt.$$

Наконец определим плотность тока как 3- форму \mathfrak{J} :

$$\mathfrak{J} = (j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy) \wedge dt - \rho dx \wedge dy \wedge dz.$$

Простые вычисления показывают, что уравнения Максвелла имеют вид

$$dF = 0, \quad d * F = \mathfrak{J}.$$

В самом деле,

$$dF = \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt +$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt + \\
 & + \frac{\partial E_z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt + \\
 & + \frac{\partial H_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy + \\
 & + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \\
 & + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial H_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx = \\
 & = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) dx \wedge dy \wedge dt + \\
 & + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{\partial t} \right) dy \wedge dz \wedge dt + \\
 & + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) dz \wedge dx \wedge dt + \\
 & + \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.
 \end{aligned}$$

Имеем

$$\left\{ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{\partial t}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \right\} = \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

в силу второго уравнения Максвелла. Значит, все эти три компоненты равны нулю. Далее

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \text{div } \vec{H} = 0.$$

в силу первого уравнения Максвелла.

Аналогично можно показать, что уравнение $d * F = \mathfrak{J}$ эквивалентно неоднородным уравнениям.

В пространстве Минковского (и, вообще, в любом линейном пространстве, независимо от метрики) справедливо утверждение, называемое *леммой Пуанкаре*: все замкнутые формы являются точными. Следовательно, если $dF = 0$, то существует такая 1-форма A что

$$F = dA.$$

В координатном базисе 1- форма A имеет вид

$$A = \sum_{k=0}^3 A_k dx^k,$$

откуда прямо следует, что равенство эквивалентно соотношению

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}.$$

Геометрический смысл 1- формы A более глубок: это *форма связности*, используемая для определения ковариантных производных, которые рассматриваются в следующем параграфе. Если же мы исходим из той точки зрения, что присутствие электромагнитного поля требует введения ковариантной производной и, следовательно, 1- формы связности A , то величина $F = dA$ есть так называемая 2- форма кривизны, а тождество $dF = 0$ есть тождество Бьянки.

28. Электромагнитное поле $U(1)$ - калибровочная теория

Электромагнитное поле взаимодействует только с материальными субстанциями, несущими электрический заряд. Это свойство может быть получено из так называемого *калибровочного принципа*, который гласит, что электромагнитное взаимодействие возникает при расширении глобальной калибровочной инвариантности до локальной калибровочной инвариантности.

Чтобы дать точную математическую формулировку калибровочного принципа, нам потребуется полевое описание частицы, несущей электрический заряд. В полевом подходе заряженной частице сопоставляется комплекснозначное поле, т.е. функция $\varphi(x, y, z, t)$ зависящая от точки пространства Минковского R_1^4 , и принимающая значения в множестве комплексных чисел. Эволюция поля φ описывается действием

$$S = \int \left(\sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^l} - m^2 \bar{\varphi} \varphi \right),$$

где m - масса частицы, $\bar{\varphi}$ - знак комплексного сопряжения.

Уравнения Эйлера - Лагранжа для этого действия имеют вид

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$(\square + m^2)\varphi = 0,$$

$$(\square + m^2)\bar{\varphi} = 0,$$

где \square - это так называемый оператор Даламбера:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

(напомним, что мы работаем с системой единиц, в которой скорость света $c = 1$). Вектор

$$\mathfrak{J}^k = i \left(\vec{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right)$$

представляет собой 4- вектор тока; величина

$$Q = \int \mathfrak{J}^0 dV = i \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \bar{\varphi} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \varphi \right) dV$$

отождествляется с электрическим зарядом. С учетом уравнений

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (\square - m^2)\bar{\varphi} = 0.$$

мы непосредственно получаем, что 4- дивергенция тока равна нулю:

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial \mathfrak{J}^k}{\partial x^k} = 0.$$

Легко видеть, что лагранжиан

$$L = \sum_{k,l=0}^3 g^{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^l} - m^2 \varphi \bar{\varphi}$$

комплексного поля φ инвариантен относительно преобразования

$$\varphi \rightarrow e^{-i\wedge} \varphi, \quad \bar{\varphi} \rightarrow e^{i\wedge} \bar{\varphi}, \tag{2.21}$$

где \wedge - действительная постоянная. Данное преобразование называется калибровочным преобразованием первого рода. В инфинитезимальном случае оно имеет вид

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

$$\delta\varphi = -i \wedge \varphi, \quad \delta\bar{\varphi} = i \wedge \bar{\varphi},$$

откуда

$$\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) = -i \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}, \quad \delta\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^k}\right) = i \wedge \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^k} \quad (2.22)$$

Мы можем придать калибровочному преобразованию (2.21) геометрическую форму. Прежде всего, комплексное поле можно выразить через две действительные компоненты и, полагая

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad (2.23)$$

т.е.

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{\sqrt{2}i}.$$

Подставим теперь выражение (2.23) в лагранжиан L . Это даст нам

$$L = \sum_{k=0}^3 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^k} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x^k} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x^k} \right) - m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Представим теперь поле φ в виде

$$\vec{\varphi} = \varphi_1 \vec{e}_1 + \varphi_2 \vec{e}_2,$$

т.е. в виде вектора в двумерном пространстве с ортонормированными базисными векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Лагранжиан принимает теперь вид

$$L = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x^k} - m^2 \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi},$$

где знак " \cdot " означает скалярное произведение в плоскости (e_1, e_2) . Калибровочные преобразования (2.21) записываются в виде

$$\varphi'_1 + i\varphi'_2 = e^{-i\wedge} (\varphi_1 + i\varphi_2),$$

$$\varphi'_1 + i\varphi'_2 = e^{-i\wedge} (\varphi_1 - i\varphi_2),$$

или (что эквивалентно) в виде

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \cos\wedge + \varphi_2 \sin\wedge$$

$$\varphi'_2 = -\varphi_1 \sin\wedge + \varphi_2 \cos\wedge.$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Это, очевидно, вращение вектора φ в плоскости (e_1, e_2) на угол как показано на рис. 33.

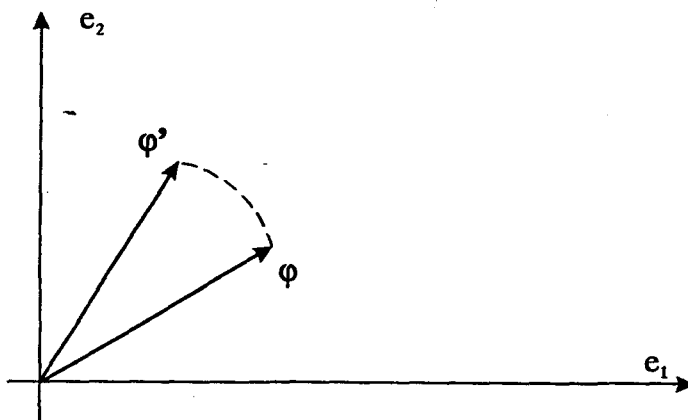


Рис. 33

Вращения в двух измерениях образуют группу $SO(2)$. В то же время, поскольку данное преобразование эквивалентно представляется в виде одномерной унитарной "матрицы" $e^{i\wedge}$:

$$e^{i\wedge}(e^{i\wedge})^* = 1,$$

рассматриваемая группа является унитарной группой $U(1)$. Таким образом, мы имеем дело с калибровочными преобразованиями, которые образуют группу $SO(2) \cong U(1)$. Легко видеть, что это одна и та же группа: каждый элемент группы $SO(2)$ однозначно задается углом вращения φ в плоскости (e_1, e_2) . Групповое пространство есть набор значений φ . Мы должны отождествить значения φ с $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$ и т.д., чтобы они соответствовали одному и тому же вращению. Таким образом, групповое пространство группы $SO(2)$ есть окружность. Группа же $U(1)$ - это группа всех комплексных чисел вида $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, и поскольку $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, соответствующее пространство есть также окружность).

Вернемся к нашей основной теме. Мы рассматриваем существование сохраняющейся величины Q как следствие инвариантности действия относительно калибровочного преобразования (2.21). Но поскольку Λ -постоянная, это калибровочное преобразование должно быть одним и тем же для всех точек пространства-времени — это *глобальное* калибровочное преобразование. Таким образом, когда мы совершаем вращение во внутреннем пространстве поля $\bar{\phi}$ в одной точке на угол Λ , мы должны *одновременно совершить то же самое вращение во всех других точках*. Если мы будем рассматривать эту картину всерьез, то увидим, что она неосуществима, поскольку противоречит букве и духу теории относительности, согласно которой должно существовать минимальное временное запаздывание, равное времени прохождения светового сигнала. Чтобы обойти эту трудность, мы просто опустим требование, чтобы Λ была константной, и будем считать ее произвольной функцией пространства-времени $\Lambda(x^0, \dots, x^3)$. Соответствующее преобразование называется *локальным калибровочным преобразованием*, поскольку оно, очевидно, меняется от точки к точке. Его также называют *калибровочным преобразованием вихорого рода*.

Теперь мы видим, что при $\Lambda \ll 1$

$$\phi \rightarrow \phi - i \Lambda \phi$$

и, следовательно,

$$\delta \phi = -i \Lambda \phi,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - i \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \right) \phi - i \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^k}. \quad (2.24)$$

Таким образом,

$$\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right) = -i \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - i \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \right) \phi, \quad (2.25)$$

и, аналогично,

$$\delta \bar{\phi} = i \Lambda \bar{\phi},$$

$$\delta \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^k} \right) = i \Lambda \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^k} + i \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \right) \bar{\phi}. \quad (2.26)$$

Сравнивая эти соотношения с соотношениями (2.22), мы видим, что в формулы для преобразования производных от полей теперь входит дополнительный член с $\frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$. Поэтому, как явствует из соотношений (2.24) и (2.25), величина преобразуется нековариантно, т.е. не таким же образом, как само поле. Более того, как мы сейчас увидим, благодаря этим добавочным

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

членам само действие не является более инвариантным. В самом деле, изменение лагранжиана равно

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial L}{\partial \bar{\varphi}} \delta \bar{\varphi} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right).$$

Выражая первое слагаемое из уравнения Эйлера - Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)} \right] = 0$$

и используя равенства (2.24) и (2.25), получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \delta L = \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)} \right] (-i \wedge \varphi) + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)} \left(-i \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - i \varphi \frac{\partial \wedge}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right)} \right] (i \wedge \bar{\varphi}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right)} \left(i \wedge \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} + i \bar{\varphi} \frac{\partial \wedge}{\partial x^k} \right) \right\} = \sum_k \left\{ -i \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)} \varphi \right] - \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)} \frac{\partial \wedge}{\partial x^k} \varphi + \right. \\ \left. + i \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right)} \bar{\varphi} \right] + i \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right)} \frac{\partial \wedge}{\partial x^k} \bar{\varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое пропорционально 4- мерной дивергенции тока, которая, как мы установили ранее, равна нулю. Использование явного выражения

$$L = \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^l} - m^2 \bar{\varphi} \varphi$$

для лагранжиана дает

$$\delta L = \sum_k \left\{ i \frac{\partial \wedge}{\partial x^k} \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \varphi \right) \right\} = \sum_k \mathfrak{J}^k \frac{\partial \wedge}{\partial x^k}, \quad (2.27)$$

где \mathfrak{J}^k - вектор тока, задаваемый формулой

$$\mathfrak{J}^k = i \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right).$$

Действие в том виде, в котором мы его записываем, неинвариантно относительно калибровочных преобразований второго рода. Чтобы сделать его инвариантным, мы введем новый 4-вектор A_k , непосредственно взаимодействующий с током \mathfrak{J}^k , что дает дополнительный член в L :

$$L_1 = -e \sum_k \mathfrak{J}^k A_k = -ie \sum \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right) A_k.$$

Константа связи e есть такое число, что произведение eA_k имеет ту же размерность, что $\frac{\partial}{\partial x^k}$. Мы потребуем также, чтобы при калибровочных преобразованиях второго рода величины преобразовывались по формуле

$$A_k \rightarrow A_k + \frac{1}{e} \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}, \quad (2.28)$$

так что

$$\delta L_1 = e \sum_k \{ (\delta \mathfrak{J}^k) A_k - \mathfrak{J}^k (\delta A_k) \} = -e \sum_k \left\{ (\delta \mathfrak{J}^k) A_k - \mathfrak{J}^k \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \right\}.$$

За счет второго члена этого выражения уничтожается величина δL в выражении (2.27), но теперь требуется устранить первый член! Мы имеем

$$\delta \mathfrak{J}^k = i \delta \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right) = 2 \bar{\varphi} \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}.$$

Следовательно,

$$\delta L + \delta L_1 = -2e \sum_k A_k \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \bar{\varphi} \varphi.$$

Добавим к L еще одно слагаемое

$$L_2 = e^2 \sum_k A_k^2 \bar{\varphi} \varphi.$$

В силу соотношения (2.28) имеем

$$\delta L_2 = 2e^2 \sum_k A_k \delta A_k \bar{\varphi} \varphi = 2e \sum_k A_k \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \bar{\varphi} \varphi$$

и, стало быть,

$$\delta L + \delta L_1 + \delta L_2 = 0.$$

В результате введения поля A_k , связывающего ток \mathfrak{J}^k с комплексным полем φ , полный лагранжиан $L + L_1 + L_2$ теперь инвариантен относительно калибровочных преобразований. Но поле A_k само должно давать вклад в лагранжиан. Поскольку величина $L + L_1 + L_2$ инвариантна, нам необходимо

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

найти такой член L_3 , который также был бы калибровочно - инвариантным. Чтобы построить такой член, введем четырехмерный ротор

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}. \quad (2.29)$$

Очевидно, что при калибровочном преобразовании (2.28) величина F_{kl} инвариантна. Возьмем лагранжиан L_3 в виде

$$L_3 = -\frac{1}{4} \sum_{k,l} F^{kl} F_{kl}.$$

Собирая все формулы воедино, имеем

$$\begin{aligned} L_{\text{полный}} &= L + L_1 + L_2 + L_3 = \\ &= \sum_k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} - ie \sum_k \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} \right) A_k + \\ &+ e^2 \sum_k A_k^2 \bar{\varphi} \varphi - m^2 \bar{\varphi} \varphi - \frac{1}{4} \sum_{k,l} F^{kl} F_{kl} \end{aligned}$$

или

$$L_{\text{полный}} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + ie A_k \varphi \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} - ie A_k \bar{\varphi} \right) - m^2 \bar{\varphi} \varphi - \frac{1}{4} \sum_{k,l} F^{kl} F_{kl}^2.$$

В величине F_{kl} , определенной равенством (2.29), мы узнаем тензор электромагнитного поля, шесть компонент которого - это три компоненты электрического и три компоненты магнитного поля. Итак, мы показали, что электромагнитное поле появляется естественным образом как следствие требования инвариантности действия относительно калибровочного преобразования второго рода, т.е. относительно локальных (зависящих от $x \in R_1^4$) вращений во внутреннем пространстве (в пространстве значений) комплексного поля φ . Калибровочный потенциал связан с током \mathfrak{J}_k , причем константа связи e есть заряд поля φ . Теперь разберемся в этих результатах более детально.

Сравнивая лагранжианы

$$L_{\text{полный}} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + ie A_k \varphi \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} - ie A_k \bar{\varphi} \right) - m^2 \bar{\varphi} \varphi - \frac{1}{4} \sum_{k,l} F_{kl}^2$$

и

$$L = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} - m^2 \bar{\varphi} \varphi,$$

мы видим, что величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ заменяются величинами $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + ieA_k\right)\varphi$.
Последние обозначаются через $D_k\varphi$:

$$D_k\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + ieA_k\right)\varphi$$

и называются *ковариантными производными*, поскольку в отличие от $\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ преобразуются ковариантно при калибровочных преобразованиях, т.е. так же, как и само поле φ . В самом деле, из соотношений (2.24), (2.25) и (2.28) прямо следует равенство

$$\delta(D_k\varphi) = \varphi\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^k}\right) + ie(\delta A_k)\varphi + ieA_k\delta\varphi = -i \wedge \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + ieA_k\varphi\right) = -i \wedge (D_k\varphi),$$

т.е. закон ковариантного преобразования. Правило, согласно которому в присутствии электромагнитного поля производные $\frac{\partial}{\partial x^k}$ заменяются величинами $\frac{\partial}{\partial x^k} + ieA_k$, представляет собой результат, хорошо известный из классической физики. Поскольку при $c = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right), \quad A_k = \left(\varphi, -\vec{A}\right),$$

то "пространственная" часть подстановки имеет вид

$$\nabla \rightarrow \nabla - ie\vec{A}$$

В частности в квантовой механике положив $\vec{p} = -ih\nabla$, мы при $\hbar = 1$ получаем следующий закон преобразования для оператора импульса

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \tag{2.30}$$

Идентичность формулы (2.29) с формулой, определяющей тензор электромагнитного поля, гарантирует, что введенный нами компенсирующий векторный потенциал, действительно является электромагнитным векторным потенциалом и, следовательно, для F_{kl} справедливы однородные уравнения Максвелла. Кроме того, калибровочное преобразование (2.28) при $\Lambda = e\chi$ совпадает с преобразованием, рассмотренным в §26. Тем самым, мы приходим к новой интеграции электромагнитного поля: это калибровочное поле, которое необходимо ввести, чтобы гарантировать инвариантность относительно локальных $U(1)$ -калибровочных преобразований.

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Отметим, что уравнения Максвелла следуют из лагранжиана

$$L_{\text{полный}} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + ieA_k \varphi \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} - ieA_k \bar{\varphi} \right) - m^2 \bar{\varphi} \varphi - \frac{1}{4} \sum_{k,l} F_{kl}^2$$

при вариациях векторного потенциала A_k . Уравнения Эйлера Лагранжа в данном случае принимают вид

$$\sum_l \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^l} = -e \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k} + 2e^2 A^k |\varphi|^2 \right) = -ie (\bar{\varphi} D^k \varphi - \varphi D^k \bar{\varphi}) \equiv -e \mathfrak{J}^k, \quad (2.31)$$

где величина $\mathfrak{J}^k = i(\bar{\varphi} D^k \varphi - \varphi D^k \bar{\varphi})$ представляет собой ковариантную форму тока \mathfrak{J}^k . Благодаря антисимметрии тензора F^{kl} , из (2.31) немедленно следует равенство

$$\sum_k \frac{\partial \mathfrak{J}^k}{\partial x^k} = 0,$$

т.е. в присутствии электромагнитного поля сохраняется ток \mathfrak{J}^k , а не J^k .

Заряд e выступает как *константа связи*, входящая в определение ковариантной производной.

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x^k} + ieA_k$$

В самом деле, из лагранжиана $L_{\text{полный}}$ видно, что интенсивность взаимодействия поля φ с электромагнитным полем характеризуется множителем e . Это проясняет двойную роль электрического заряда. С одной стороны, заряд есть сохраняющаяся величина; с другой стороны, заряд - это мера интенсивности, с которой частица взаимодействует с электрическим и магнитными полями. Это динамический аспект заряда является следствием "калибровочного принципа", который в связи с этим играет исключительно важную роль в современной теории поля и физике частиц.

Возникающие при изучении электромагнитного поля $U(1)$ -калибровочная эквивалентность и ковариантная производная D_k могут быть рассмотрены в контексте обширной геометрической теории, называемой теорией связностей в главных расслоениях. Мы не станем здесь развивать эту теорию, отсылая заинтересованного читателя к руководствам по дифференциальной геометрии. Вместо этого мы рассмотрим одно весьма интересное и красивое следствие калибровочной инвариантности в

электродинамике, а именно так называемый эффект Ааронова - Бома (Aharonov - Bohm).

29. Топология и вакуум

В Классической электродинамике сила, действующая на заряженную частицу с зарядом в электромагнитном поле, задается формулой Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{H}, \quad (2.32)$$

где \vec{E} и \vec{B} - электрическое и магнитное поле, связанные с вектор - потенциалом \vec{A} и скалярным потенциалом ϕ соотношениями

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi,$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}.$$

Как мы видели в предыдущей главе, величины \vec{A} и ϕ не определены однозначно. Они могут меняться при калибровочных преобразованиях

$$A \rightarrow A - \text{grad} \chi, ; \phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

или, эквивалентно,

$$A_k \rightarrow A_k + \frac{\partial \chi}{\partial x^k};$$

В то же время векторы \vec{E} и \vec{H} инвариантны относительно этих преобразований. В этой связи обычно утверждается, что единственным физическим воздействием электромагнитного поля на заряд является сила Лоренца (2.32), при чем эта сила действует только в тех областях, где \vec{E} и \vec{H} отличны от нуля. Эффект Ааронова - Бома показывает, что в квантовой механике это не так: физические эффекты имеют место и в областях, где \vec{E} и \vec{H} равны нулю, но потенциал A_k отличен от нуля. Следовательно, векторный потенциал A_k имеет более глубокий физический смысл, чем это считалось раньше.

Эффект относится к хорошо известному мысленному квантомеханическому опыту с электронами, проходящими через две щели (рис. 34.). В силу волновой природы электронов, пока мы не фиксировали,

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

через какую именно щель проходят электроны, они дают характерную интерференционную картину. Если длина волны электрона равна λ , то разность фаз волн, приходящих от двух щелей, равна

$$\delta = 2\pi \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\lambda_c}$$

При $x \ll L$ мы имеем

$$a = \frac{x}{L}d,$$

так что

$$\delta = \frac{x}{L} \cdot \frac{d}{\lambda_c}; \quad x = \frac{L\lambda_c}{d}\delta$$

В точках, где $\delta = 2n\pi$, мы имеем максимумы, а в точках, где $\delta = (2n + 1)\pi$ - минимумы, т.е. эта формула описывает интерференционную картину.

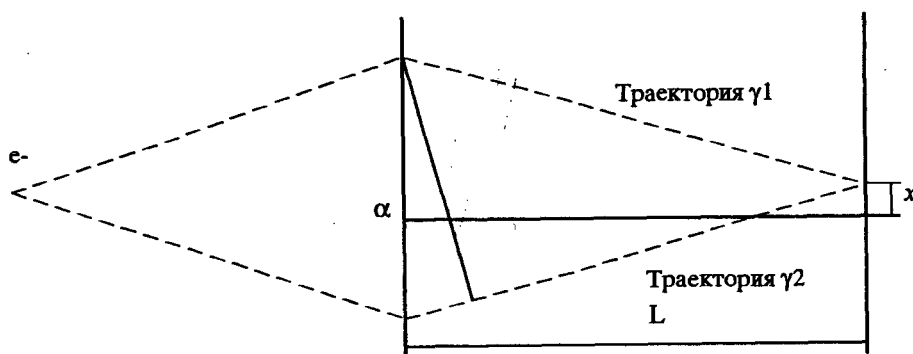


Рис. 34. Схема опыта с двумя щелями по интерференции электронов.

В 1959 году Ааронов и Бом выдвинули идею, состоящую в том, чтобы поместить за экраном со щелями в промежутке между ними малый соленоид (рис. 35). Внутри соленоида имеются линии магнитной индукции \vec{H} , во вне соленоида их нет. Таким образом, если соленоид достаточно мал, то все электроны движутся в области, в которой поле отсутствует.

Нетрудно найти вид потенциала \vec{A} , который давал бы магнитное поле соленоида (рис. 36). В цилиндрических координатах отлична от нуля только компонента потенциала \vec{A} , отвечающая азимутальному углу φ : она имеет вид

Глава V. Уравнения электромагнитного поля

$$A_r = A_z = 0, \quad (2.33)$$

$$A_\varphi = \frac{Hr}{2} \quad (\text{внутри соленоида})$$

и

$$A_r = A_z = 0, \quad (2.34)$$

$$A_\varphi = \frac{HR^2}{2r} \quad (\text{вне соленоида})$$

Здесь R - радиус соленоида. Поскольку $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, в цилиндрических координатах мы получаем

$$H_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]$$

и аналогичные формулы для H_r и H_φ . Это дает

$$H_r = H_\varphi = 0 \quad H_z = H \quad (\text{внутри соленоида}),$$

$$\vec{H} = 0 \quad (\text{вне соленоида}).$$

что и требуется.

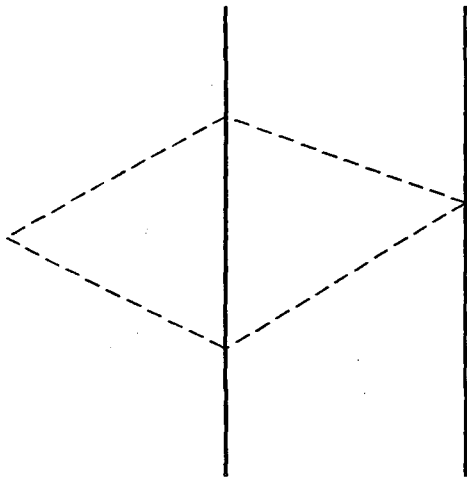


Рис. 35. Эффект Ааронова-Бома. Между двумя щелями почен соленойд.

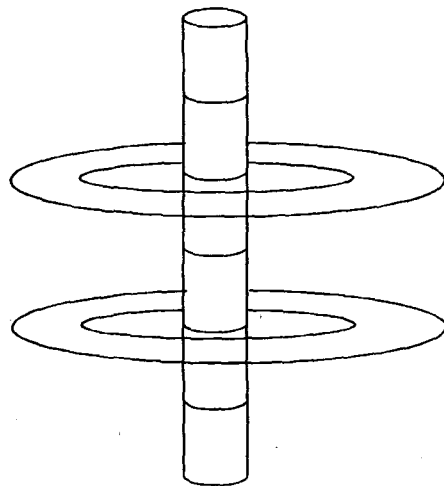


Рис. 36. Векторный потенциал A и магнитная индукция H в соленойде.

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Посмотрим теперь, как действует поле соленоида на электрон. Из квантовой механики известно, что волновая функция электрона в свободном пространстве имеет вид

$$\psi = |\psi| \exp \frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} \equiv |\psi| \exp i\alpha.$$

При наличии электромагнитного поля импульс \vec{p} электрона изменяется согласно формуле (2.30):

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A},$$

где e - (отрицательный) заряд электрона. При этом фаза α волновой функции изменяется так:

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r},$$

а изменение фазы вдоль траектории равно

$$\Delta\alpha = -\frac{e}{\hbar} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r},$$

где γ - траектория движения электрона. Таким образом, для траекторий γ_1 и γ_2 (см. рис. 35 и 36) мы имеем

$$\Delta\alpha_1 = -\frac{e}{\hbar} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{r}, \quad \Delta\alpha_2 = -\frac{e}{\hbar} \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Следовательно, изменение разности фаз δ равно

$$\Delta\delta = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 = \frac{e}{\hbar} \int_{\gamma_2 \curvearrowright \gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{e}{\hbar} \int_{\Sigma} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\hbar} \int_{\Sigma} \vec{H} d\vec{S} = \frac{e}{\hbar} \Phi, \quad (2.35)$$

где Σ - область, ограниченная траекториями γ_1 и γ_2 , а Φ - магнитный поток через соленоид. В результате интерференционная картина сдвинется на величину

$$\Delta x = \frac{L\lambda_c}{d} \Delta\delta = \frac{L\lambda_c e}{d \hbar} \Phi. \quad (2.36)$$

Итак, конечный результат таков: *при наличии соленоида интерференционная картина сдвигается, хотя электроны движутся только в области, где магнитное поле отсутствует.*

Такой опыт нелегко провести, поскольку соленоид должен быть очень малым. В первом опыте Чамберса (Chambers), в котором наблюдается этот эффект и было подтверждено согласие с теоретическим предсказанием, использовался намагниченный нитевидный монокристалл железа (1960 г.). Позже эффект был подтвержден в ряде других экспериментов.

Смысл этого эффекта состоит в том, что в квантовой теории вектор - потенциал \vec{A} воздействует на электрон даже тогда, когда движение последнего ограничено областями, в которых $\vec{H} = 0$. В то же время из соотношений (2.36) и (2.35) следует, что физические эффекты зависят только от $rot\vec{A}$. Приходится сделать вывод, что на электрон оказывают воздействие поля, которые отличны от нуля только в областях, недоступных для него. Более формально это равносильно нелокальному характеру интеграла

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Как мы сейчас покажем, эффект Ааронова - Бома обусловлен нетривиальной топологией вакуума и тем, что электродинамика является калибровочной теорией. В последнее время стало ясно, что вакуум в калибровочных теориях обладает богатой геометрической структурой с вытекающими из этого физическими следствиями.

Вне соленоида мы имеем $\vec{E} = 0$ и $\vec{H} = 0$, так что плотность энергии электромагнитного поля $U = 0$, т.е. мы находимся в вакууме. Но, поскольку, $\vec{A} \neq 0$, вакуум обладает некой структурой. На основании, что $rot\vec{A} = 0$, мы можем написать $\vec{A} = grad\chi$, где χ - некоторая функция, которую можно найти, заметив, что согласно формуле (2.33)

$$A_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \frac{HR^2}{2r},$$

откуда следует выражение

$$\chi = \frac{HR^2}{2} \phi, \tag{2.37}$$

в котором опущена произвольная константа интегрирования. Функция χ не является однозначной, она возрастает на величину $\pi R^2 H$ при замене ϕ на $\phi + 2\pi$. В самом деле, из (2.35) следует, что

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$\Delta\delta = \Delta\alpha = \frac{e}{h} \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{e}{h} \int \text{grad}\chi \cdot d\vec{r} = \frac{e}{h} [\chi]_{\Phi}^{\Phi+2\pi} = \frac{e}{h} \pi R^2 H = \frac{e}{h} \Phi.$$

Однако регулярные неоднозначные функции могут существовать лишь в неодносвязных пространствах. Односвязное пространство таково, что в нем любая замкнутая кривая может быть непрерывным образом продеформирована в точку. Неодносвязные пространства - это такие пространства, в которых не все кривые могут быть непрерывно продеформированы в точку. В нашем случае мы имеем дело с пространством вне соленоида, которое не является односвязным.

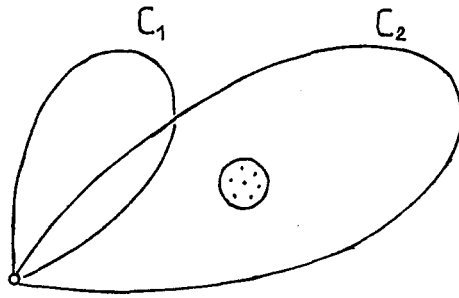


Рис. 37.

Это видно на рис. 37. Кривая C_1 может быть продеформирована в точку, а кривая C_2 нет. Кроме того, кривая, обходящая соленоид n раз, не может быть продеформирована в кривую, обходящую соленоид $m (\neq n)$ раз.

Итак, функция χ многозначна, и это возможно благодаря тому, что она определена в неодносвязном пространстве. Этому эквивалентно обратное утверждение: если бы функция χ была однозначной, то всюду бы выполнялось равенство $H = \text{rot}A = \text{rot} \int \text{grad}\chi = 0$ и магнитный поток вообще отсутствовал бы. Таким образом, необходимым условием существования эффекта Ааронова - Бома является неодносвязность координатного пространства.

Калибровочное преобразование вакуума имеет вид

$$A_k = \frac{\partial \chi}{\partial x^k};$$

Соответствующим калибровочным преобразованием заряженной частицы является оператор $e^{-ie\chi}$, т.е. элемент группы $U(1)$. Таким образом, мы получаем отображение конфигурационного пространства M в группу $U(1)$. Конфигурационное пространство M в эксперименте Ааронова - Бома представляет собой плоскость R^2 с дыркой (которую занимает соленоид). Это пространство топологически эквивалентно произведению прямой R^1 и окружности S^1 .

$$M \cong R^1 \times S^1$$

После введения в $R^1 \times S^1$ полярных координат (r, φ) прямую можно параметризовать величиной r , а окружность - величиной φ . Функция χ зависит только от координаты φ , поэтому отображение эквивалентно отображению $S^1 \rightarrow U(1)$. Чтобы продвинуться дальше, напомним некоторые элементарные факты из гомотопической топологии.

Пусть X - некоторое топологическое пространство. Путем f в пространстве называется произвольная непрерывная функция $f(s)$ действительного параметра s из отрезка $[0, 1]$. Точка $f(0)$ называется началом, а точка $f(1)$ - концом пути $f(s)$. Если $f(0) = f(1) = P$, то мы имеем *замкнутый путь* или *петлю* в точке P . Рассмотрим две петли $f(s)$ и $g(s)$ в фиксированной точке P и предположим, что существует такая непрерывная функция $F(t, s)$ в пространстве X , $0 \leq t, s \leq 1$ что

$$F(0, s) = f(s), \quad F(1, s) = g(s), \quad F(t, 0) = F(t, 1) = P.$$

В этом случае пути $f(s)$ и $g(s)$ называются *гомотопными* (относительно отмеченной точки P) и обозначаются $f \sim g$. Путь, обратный по отношению к пути f , обозначается через f^{-1} и определяется соотношением

$$f^{-1}(s) = f(1 - s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Таким образом, он соответствует первоначальному пути, проходимому в обратном направлении. Если конечная точка пути f совпадает с начальной точкой пути g , так что $f(1) = g(0)$, то можно определить произведение путей $f \cdot g$, полагая

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2, \\ g(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

В частности, произведение определено для петель. Нулевая петля представляет собой просто отмеченную точку P . Если $f \sim g$, то петля fg^{-1} гомотопна нулевой петле.

Теперь мы можем построить группу, вводя класс петель, гомотопных петле f . Обозначим этот класс через $[f]$. Гомотопические классы петель можно умножать друг на друга по закону умножения, который определяется следующим образом:

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g].$$

Нетрудно показать, что этим законом умножения определяется группа, называемая *фундаментальной группой* топологического пространства X и обозначаемая через $\pi_1(X)$. Для группы $U(1) \cong S^1$ фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел:

$$\pi_1(U(1)) \cong Z.$$

После этого небольшого экскурса в гомотопическую топологию мы можем подвести итог нашим рассмотрениям. В эксперименте Ааронова - Бома электрона дифрагируют по обе стороны бесконечного соленоида в области нулевого поля. Тем не менее наличие соленоида сказывается на расположении интерференционных полос. С геометрической точки зрения причина этого состоит в том, что конфигурационное пространство M , соответствующее нулевому полю (вакууму), представляет собой плоскость с дыркой в ней, т.е. гомеоморфно произведению $S \times R^1$. Векторный потенциал A_k строится с помощью калибровочных функции χ , которая задает отображение в калибровочную группу $U(1)$. Такого рода отображения гомотопически эквивалентны отображениям из S^1 в $U(1)$ и распадаются на отдельные классы вследствие того, что

$$\pi_1(U(1)) = Z.$$

По этой причине их невозможно деформировать в постоянную калибровочную функцию, которая приводила бы к равенству $A_k = 0$ и отсутствию эффекта Ааронова - Бома.

ЛОКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

25. Вводные замечания

В современных исследованиях по математической и теоретической физике все возрастающую роль играет принцип симметрии. Это связано прежде всего с тем, что различные математические модели обладают явной или скрытой, локальной или нелокальной геометрическими симметриями. Все основные уравнения математической физики обладают высокой симметрией. Именно это свойство выделяет их из множества других дифференциальных уравнений, рассматриваемых в математике.

Принцип симметрии может играть роль правила отбора, выделяющего из множества допустимых математических моделей только такие, которые обладают соответствующими свойствами инвариантностями. Этот принцип в явном или неявном виде используется при построении современных физических теорий, но, к сожалению, еще мало используется в прикладной математике.

В некоторых случаях требование инвариантности уравнений движения относительно той или иной группы позволяет однозначно выбрать его из достаточно широкого класса допустимых уравнений. Так например, среди множества систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для двух вектор-функций $\vec{E}_{(x_0, x)}$ и $\vec{H}_{(x_0, x)}$ существует единственная система, инвариантная относительно группы Пуанкаре, а именно, уравнения Максвелла.

Главная тема этой главы - симметричный анализ уравнений Максвелла. Исследование симметрий этих уравнений имеет долгую историю. В 1893 году Хевисайд (Heaviside), записав эти уравнения в векторных обозначениях, обратил внимание на то, что они инвариантны относительно замены

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow \vec{E}$$

где, как обычно, \vec{E} и \vec{H} - векторы напряженности электрического и магнитных полей. Позже Лармор и Райнич (Larmor-Rainich) обнаружили, что эту симметрию можно обобщить до семейства однопараметрических преобразований

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} \cos \theta + \vec{H} \sin \theta$$

$$\vec{H} \rightarrow \vec{H} \cos \theta - E \sin \theta \quad (2.38)$$

Основной результат относительно симметрии уравнений Максвелла, сыгравший поистине революционную роль в физике, был получен Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном. Именно Лоренц нашел все возможные линейные преобразования координат и времени (и соответствующие преобразования для \vec{E} и \vec{H}), оставляющие инвариантными уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Пуанкаре показал, что уравнения Максвелла остаются инвариантными относительно преобразований Лоренца и при наличии токов и зарядов. Пуанкаре впервые установил важнейшее свойство этих преобразований - их групповую структуру. В знаменитой работе Эйнштейна, сыгравшей выдающуюся роль в истории современной физики, также было установлено, что уравнения Максвелла с токами и зарядами инвариантны относительно преобразований, найденных Лоренцем. На основе этих свойств симметрии уравнений электромагнитного поля Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном были созданы основы релятивистской теории.

Следующий важнейший шаг в исследовании симметрии уравнений Максвелла сделали Бейтмен и Каннингхэм (Bateman - Cunningham), которые обнаружили, что эти уравнения инвариантны относительно преобразований инверсии

$$x_k \rightarrow \frac{x_k}{\sum_l x_l x_l'}$$

откуда следует инвариантность относительно конформных преобразований пространства Минковского R_1^4 , т.е. таких преобразований R_1^4 , при которых сохраняются углы. Бейтмен по существу доказал, что инвариантность относительно конформной группы определяет максимальную симметрию уравнений Максвелла с токами и зарядами.

Сравнительно недавно Ибрагимов провел групповой анализ уравнений Максвелла в рамках классического подхода Ли. При этом было строго доказано, что максимальной локальной группой инвариантности уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме является 16-параметрическая группа $C_{(1,3)} \times H$, где $C_{(1,3)}$ - группа конформных преобразований пространства Минковского, а H - однопараметрическая группа преобразований Хевисайда - Лармора - Райнича (2.38).

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Перечисленные выше преобразования не исчерпывают всех свойств симметрией уравнений Максвелла. Оказывается, что эти уравнения обладают скрытой симметрией, не связанный с преобразованием независимых переменных.

Мы ограничимся здесь обсуждением лишь классической (локальной) симметрии уравнений Максвелла.

31. Различные формулировки уравнений Максвелла

А. Уравнения Максвелла в векторных обозначениях.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме могут быть записаны в следующей форме

$$\vec{p} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{p} \times \vec{H} = i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.39)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.40)$$

где

$$\vec{p} = -i\nabla, \quad \text{т.е. } \vec{p}_a = -i\nabla_a = -i \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad a = 1, 2, 3;$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{(t,x)} \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_{(t,x)}$$

- векторы электрической и магнитной напряженности. Здесь и далее мы используем систему единиц, в которой скорость света $C = 1$.

При наличии токов и зарядов система уравнений Максвелла принимает вид:

$$i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{p} \times \vec{H} + i\vec{j}, \quad \vec{p} \cdot \vec{E} = -ij_0 \quad (2.41)$$

$$i \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad \vec{p} \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.42)$$

где $\vec{j} = (j_0, \vec{j})$ - четыре - вектор электрического тока. Константа электромагнитного взаимодействия в этих уравнениях выбрана равной единице.

Мы рассмотрим наряду с (2.39) - (2.42) также другие возможные формы записи уравнений Максвелла, более удобные с точки зрения исследования их симметрии.

Б. Уравнения Максвелла в форме Бейтмена - Майораны

Для изучения свойств симметрии уравнений Максвелла удобно представлять систему (2.39), (2.40) как результат действия некоторых линейных операторов на шестикомпонентную функцию

$$\varphi_{(t,x)} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \text{столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3) \quad (2.43)$$

где E_a и $H_a; (a=1, 2, 3)$ - компоненты векторов напряженности электрического и магнитных полей. Обозначим символами $S_a = (a = 1, 2, 3)$ и $\delta_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ следующие матрицы

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & 0 \\ 0 & \hat{S}_a \end{pmatrix}, \hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} I & \hat{O} \\ \hat{O} & I \end{pmatrix}, \delta_1 = \begin{pmatrix} \hat{O} & I \\ I & \hat{O} \end{pmatrix}, \delta_2 = i \begin{pmatrix} \hat{O} & -I \\ I & \hat{O} \end{pmatrix}, \delta_3 = \begin{pmatrix} I & \hat{O} \\ \hat{O} & -I \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Здесь \hat{O} и I - это нулевая и единичная матрицы размеров (3×3) используя обозначения (2.44), уравнения (2.39) могут быть представлены в следующей форме

$$\hat{L}_1 \varphi_{(t,x)} = 0, \quad \hat{L}_1 = i \frac{\partial}{\partial t} - H, \quad (2.45)$$

где оператор H имеет вид

$$H = -\delta_2 \vec{S} \cdot \vec{p}. \quad (2.46)$$

Уравнения (2.40) можно интерпретировать как дополнительные условия, накладываемые на множество решений уравнений (2.45). Эти условия можно записать в форме

$$\hat{L}_2^a \varphi_{(t,x)} = 0 \quad (2.47)$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Здесь \hat{L}_2^a - один из следующих трех операторов:

$$\hat{L}_2^a = \sum_{b=1}^3 (\delta_{ab} - S_b S_a) p_b, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Прямая проверка показывает, что уравнения (2.47), (2.48) для функции (2.43, записанные покомпонентно, совпадают с уравнениями (2.40). В силу уравнения (2.45) имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t} (L_2^a \varphi(t, x)) = 0 \quad (2.49)$$

и следовательно, уравнения (2.47) могут быть интерпретированы как начальные условия, накладываемые на функцию $\varphi(t, x)$. В самом деле, достаточно положить

$$\hat{L}_2^a \varphi(t, x)|_{t=0} = 0;$$

тогда это условие будет удовлетворяться в любой момент времени в силу тождества (2.49). Можно показать, что условие (2.47) уменьшает число независимых компонент функции (2.43) до четырех.

Теперь мы рассмотрим еще один вид уравнений (2.39), в котором используется трехкомпонентная функция.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 - iE_1 \\ H_2 - iE_2 \\ H_3 - iE_3 \end{pmatrix}.$$

В обозначениях (2.44) уравнения Максвелла (2.39), (2.40) принимают вид

$$\tilde{L}_1 \psi = 0, \quad \tilde{L}_1 = i \frac{\partial}{\partial t} - \vec{S} \cdot \vec{p}, \quad (2.50)$$

$$\tilde{L}_2^a \psi = 0, \quad \tilde{L}_2^a = p_a - \hat{S} \cdot \vec{p} \vec{S}_a. \quad (2.51)$$

Будучи записанными покомпонентно, уравнения (2.51) приводят к следующему условию на функцию ψ :

$$\vec{p} \cdot \vec{\psi} = 0,$$

где

$$\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Глава VI. Локальная симметрия уравнений Максвелла

Отметим, что уравнения (2.45), (2.47) и система (2.50), (2.51) могут быть представлены в ковариантной форме

$$\hat{L}_\mu \varphi = \sum_{\nu=0}^3 (S_{\mu\nu} p^\nu + i p_\mu) \varphi = 0,$$

$$\hat{L}_\mu \psi = \sum_{\nu=0}^3 (S_{\mu\nu} p^\nu + i p_\mu) \psi = 0.$$

Здесь

$$p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad S_{0a} = -i \delta_2 S_a, \quad S_{ab} = \varepsilon_{abc} S_c, \quad \hat{S}_{0a} = i \hat{S}_a, \quad \hat{S}_{ab} = \varepsilon_{abc} \hat{S}_c,$$

ε_{abc} - полностью антисимметричный тензор третьего ранга.

Ц. Уравнения Максвелла в форме Дирака

Обозначим через α_1 , α_2 и α_3 следующие (4x4)- матрицы

$$\alpha_1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и через $\chi(t, \mathbf{x})$ четырехкомпонентный вектор с первой компонентой, равной нулю:

$$\chi(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 - iH_1 \\ E_2 - iH_2 \\ E_3 - iH_3 \end{pmatrix}.$$

Используя эти обозначения, уравнения (2.39), (2.40) можно записать в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} \chi = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \cdot \chi. \quad (2.52)$$

в самом деле, выписывая уравнения (2.39), (2.40) и (2.52) покомпонентно и замечая, что \vec{E} и \vec{H} вещественны, мы получим те же самые системы уравнений.

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Определенные выше матрицы α_a удовлетворяют следующим соотношениям

$$\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a = 2\delta_{ab}$$

и называются матрицами Дирака.

Иногда уравнения Максвелла записывают с помощью матриц Дирака несколько в ином виде. Рассмотрим вещественную восьмикомпонентную функцию

$$\psi = \text{столбец } (H_1, H_2, H_3, 0, E_1, E_2, E_3, 0)$$

Тогда уравнения (2.39), (2.40) могут быть представлены в виде следующей системы:

$$\hat{L}_1 \psi = 0, \quad \hat{L}_1 = \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} p^{\mu}, \quad \hat{L}_2 \psi = 0, \quad \hat{L}_2 = \sum_{\mu, \nu, \lambda=0}^3 \gamma_{\mu} p^{\mu} S_{\nu\lambda} S^{\nu\lambda},$$

где γ_{μ} и $S_{\nu\lambda}$ - это (8x8)- матрицы

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} \tilde{O} & \tilde{I} \\ \tilde{I} & \tilde{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = -i \begin{pmatrix} \alpha_a & \tilde{O} \\ \tilde{O} & -\alpha_a \end{pmatrix}, \\ S_{ab} &= \begin{pmatrix} \tilde{S}_{ab} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{0a} = i \begin{pmatrix} \tilde{O} & \tilde{S}_{0a} \\ \tilde{S}_{0a} & \tilde{O} \end{pmatrix}, \\ S_{ab} &= -i \epsilon_{abc} \tilde{S}_{0c} = \epsilon_{abc} \begin{pmatrix} & 0 \\ S_c & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

\tilde{O} и \tilde{I} это нулевая и единичная матрица размера (4x4).

Д. Уравнения электромагнитного поля в форме Кеммера - Дюффина - Пейшо

Во всех рассмотренных выше формулировках уравнения Максвелла получались как результат действия двух (или четырех) линейных операторов на мультикомпонентную функцию. Однако система (2.39), (2.40) может быть записана в виде одного уравнения

Глава VI. Локальная симметрия уравнений Максвелла

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 \beta_{\mu} p^{\mu} - \beta \alpha \right) \psi = 0.$$

(2.53)

Здесь β_{μ} - так называемые неприводимые матрицы *Кеммера - Дюффина - Петью* (Kemmer Duffin Petiau) размера (10×10) , удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\beta_{\mu} \beta_{\nu} \beta_{\lambda} + \beta_{\lambda} \beta_{\nu} \beta_{\mu} = g_{\mu\nu} \beta_{\lambda} + g_{\nu\lambda} \beta_{\mu},$$

$$\beta = \beta_5^2, \quad \beta_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \beta_{\mu} \beta_{\nu} \beta_{\rho} \beta_{\sigma}.$$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ - полностью антисимметричный тензор четвертого ранга.

Покажем, что уравнения (2.39), (2.40) могут быть представлены в виде (2.53). Возьмем β_{μ} и ψ в виде

$$\beta_0 = i \begin{pmatrix} \hat{O} & \hat{O} & I & \tilde{O}^+ \\ \hat{O} & \hat{O} & \hat{O} & \tilde{O} \\ -I & \hat{O} & \hat{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O}^+ & \tilde{O}^+ & \tilde{O}^+ & O \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \begin{pmatrix} \hat{O} & \hat{O} & \hat{O} & \lambda \\ \hat{O} & \hat{O} & \hat{S}_a & \tilde{O} \\ \hat{O} & \hat{S}_a & \hat{O} & \tilde{O} \\ -\lambda_a^+ & \tilde{O}^+ & \tilde{O}^+ & O \end{pmatrix},$$

$$\beta_5 = i \begin{pmatrix} \hat{O} & -I & \hat{O} & \tilde{O} \\ I & \hat{O} & \hat{O} & \tilde{O} \\ \hat{O} & \hat{O} & \hat{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O}^+ & \tilde{O}^+ & \tilde{O}^+ & O \end{pmatrix},$$

(2.54)

$$\psi = \text{столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, A_1, A_2, A_3, A_0) = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \\ \vec{A} \\ A_0 \end{pmatrix},$$

где S_a - матрицы (2.44),

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

\hat{O} и I - нулевая и единичная матрицы размера (3×3) и \tilde{O} - нулевые матрицы размера (3×1) . Тогда мы получаем систему уравнений

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_0}{\partial x_b} = -\alpha E_b,$$

$$\alpha \vec{H} = \text{rot} \vec{A},$$

$$i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{p} \times \vec{H}, \quad \vec{p} \cdot \vec{E} = 0,$$

откуда немедленно вытекают уравнения Максвелла (2.39) и (2.40).

Уравнения Максвелла с зарядами и токами также могут быть представлены в общевариантной форме из двух уравнений. Обозначив

$$\psi = \text{столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, j_1, j_2, j_3, j_0),$$

мы можем записать уравнения (2.41), (2.42) в виде следующей системы

$$L_1 \psi = 0, \quad L_1 = \left(1 - \beta_5^2\right) \left(\sum_{\mu=0}^3 \beta_{\mu} p^{\mu} + 1\right),$$

$$L_2 \psi = 0, \quad L_2 = \sum_{\mu=0}^3 \beta_{\mu} p^{\mu} \beta_5,$$

(2.55)

где β_{μ} - матрицы Кеммера - Дюффина - Петью (2.54). В дальнейшем мы используем систему уравнений (2.55) для описания локальных симметрий Максвелла.

32. Алгебры Ли и локальные симметрии

Сформулируем задачу исследования симметрии уравнений Максвелла. Мы будем рассматривать эти уравнения в форме Кеммера-Дюффина-Петью (2.55):

$$L_1 \psi = 0, \quad L_1 = \left(1 - \beta_5^2\right) \left(\sum_{\mu=0}^3 \beta_{\mu} p^{\mu} + 1\right),$$

$$L_2 \psi = 0, \quad L_2 = \sum_{\mu=0}^3 \beta_{\mu} p^{\mu} \beta_5,$$

где ψ = столбец $(E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, j_1, j_2, j_3, j_0)$ и β_μ - матрицы Кеммера-Дюффина-Петью (2.54). Основным понятием, которое мы будем использовать при изучении инвариантных свойств этих уравнений, является понятие оператора симметрии. В широком смысле оператором симметрии считается произвольный (линейный, нелинейный, дифференциальный, интегральный и т.д.) оператор, переводящий решения системы (2.55) в решения этой же системы, т.е. удовлетворяющий условиям

$$L_1(Q\psi) = 0, \quad L_2(Q\psi) = 0 \quad (2.56)$$

для каждого ψ , принадлежащего множеству решений системы (2.55). Однако, если исходить только из определения (2.56), то не представляется возможным эффективно найти все неэквивалентные операторы симметрии данной системы уравнений, так как наряду с Q условиям (2.56) удовлетворяют также Q^2, Q^3, \dots , т.е. число операторов симметрии для каждого дифференциального уравнения, вообще говоря, бесконечно. Поэтому на практике обычно предполагается, что операторы Q принадлежат некоторому сравнительно узкому классу (например, классу линейных дифференциальных операторов, включающих производные не выше n -го порядка), а затем находят все возможные (с точностью до эквивалентности) операторы симметрии $Q \in M$. При этом особый интерес представляют операторы симметрии, принадлежащие классу линейных дифференциальных операторов первого порядка, которые могут рассматриваться как производны Ли. Именно симметрия такого типа и будет рассматриваться в настоящей главе.

Перейдем к строгим определениям. Рассмотрим только такие решения системы (2.55), которые определены на некотором открытом множестве D четырехмерного пространства Минковского R_1^4 , состоящего из точек с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3) и аналитичны относительно вещественных переменных x^0, x^1, x^2, x^3 . Множество всех таких решений образует комплексное векторное пространство, которое мы будем обозначать символом F_0 . Действительно, если $\psi_1, \psi_2 \in F_0$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, то очевидно, что $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \in F_0$. Фиксируя D (например, предполагая, что D совпадает с R_1^4), будем называть F_0 пространством решений уравнений Максвелла.

Обозначим через F векторное пространство всех комплекснозначных функций, которые определены на D и являются вещественно-аналитическим. Тогда, если $\psi \in F$, то $L_1\psi \in F, L_2\psi \in F$. При этом

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

является таким подпространством векторного пространства, которое совпадает пересечением нуль-пространств (ядер) операторов L_1 и L_2 (2.55).

Пусть M_1 - множество дифференциальных операторов первого порядка, определенных на F . Понятие оператора симметрии в классе M_1 может быть сформулировано следующим образом.

Определение 2.4. Линейный дифференциальный оператор

$$Q = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu p_\mu + B, \quad A^\mu \in \text{Mat}(10, F) \quad (2.57)$$

называется *оператором симметрии уравнений Максвелла* (2.55) в классе M_1 , если

$$\begin{aligned} [Q, L_1] &= \beta_Q^1 L_1 + \beta_Q^2 L_2 \\ [Q, L_2] &= \lambda_Q^1 L_1 + \lambda_Q^2 L_2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

где L_1, L_2 - операторы (2.55), $\beta_Q^1, \beta_Q^2, \lambda_Q^1, \lambda_Q^2 \in \text{Mat}(10, F)$ и символом обозначено линейное пространство матриц размерности (10×10) , матричные элементы которых принадлежат F .

Соотношения (2.58) следует понимать в том смысле, что операторы, стоящие в левой и правой частях, дают один и тот же результат при действии на произвольную функцию $\psi \in F$.

Нетрудно убедиться, что так определенные операторы симметрии удовлетворяют условию (2.56) для любой функции $\psi \in F_0$. Действительно, согласно (2.58)

$$\begin{aligned} L_1 Q \psi &= Q L_1 \psi + \beta_Q^1 L_1 \psi + \beta_Q^2 L_2 \psi = 0, \\ L_2 Q \psi &= Q L_2 \psi + \lambda_Q^1 L_1 \psi + \lambda_Q^2 L_2 \psi = 0, \end{aligned}$$

в предположении, что $\psi \in F_0$. Справедливо и обратное утверждение: если оператор (2.57) удовлетворяет условиям (2.56) для произвольной функции $\psi \in F_0$, то для него выполняются также соотношения (2.58) с некоторыми матрицами $\beta_Q^1, \beta_Q^2, \lambda_Q^1, \lambda_Q^2 \in \text{Mat}(10, F)$.

Глава VI. Локальная симметрия уравнений Максвелла

Используя приведенные определения, мы вычислим в следующем параграфе в явном виде все возможные операторы симметрии уравнений Максвелла. В качестве технического средства нам понадобится понятие алгебры Ли, играющее исключительную роль во многих разделах математики и математического естествознания.

Определение 2.5.

Пусть L - конечномерное векторное пространство над полем комплексных чисел C . Пространство L называется (комплексной) алгеброй Ли, если в L задано правило композиции

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

- (i) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ (линейность);
- (ii) $[X, Y] = -[Y, X], X, Y \in L$ (антисимметричность);
- (iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, X, Y, Z \in L$ (тождество Якоби).

Операция $[,]$ называется *умножением Ли* (также употребительны названия *скобка Ли*, *коммутатор*). Из аксиомы (iii) следует, что умножением Ли, вообще говоря, неассоциативно. Алгебру Ли называют *абелевой* или *коммутативной*, если $[X, Y] = 0$ для любых $X, Y \in L$.

Пусть e_1, \dots, e_n - базис в нашем векторном пространстве L . Тогда в силу линейности коммутатор, выраженный через координаты (т.е. $X = \sum_i x^i e_i$ и т.д.) приобретает вид

$$z^i = [X, Y]^i = \sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i x^j y^k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Числа c_{jk}^i называются структурными константами, а n - размерностью алгебры Ли L . Из аксиомы (ii) и (iii) следует, что структурные константы c_{jk}^i удовлетворяют соотношениям

$$c_{jk}^i = -c_{kj}^i, \\ \sum_{\rho=1}^n (c_{i\rho}^p c_{jk}^\rho + c_{j\rho}^p c_{ki}^\rho + c_{k\rho}^p c_{ij}^\rho) = 0.$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Несмотря на свое название, структурные константы не являются постоянными. Действительно, из их определения следует, что при замене базиса в алгебре Ли L c_{jk}^i преобразуются как тензор третьего ранга с одним контравариантными и двумя ковариантными индексами.

А теперь вернемся к нашей основной теме. Мы собираемся вычислить все возможные операторы симметрии уравнений Максвелла. Оказывается, что любой оператор симметрии вида (2.57) может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов, к нахождению которых и сводится задача исследования симметрии уравнений (2.55). Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.6.

Множество S операторов симметрии уравнения Максвелла в классе M_1 образует комплексную алгебру Ли. Это означает, что если $Q_1, Q_2 \in S$, то

- 1) $a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \in S$ для всех $a_1, a_2 \in C$,
- 2) $[Q_1, Q_2] \in S$

Доказательство. По определению, операторы $Q_{i;(i=1,2)}$ удовлетворяют условиям

$$[Q_i, L_1] = \beta_{Q_i}^1 L_1 + \beta_{Q_i}^2 L_2,$$

$$[Q_i, L_2] = \lambda_{Q_i}^1 L_1 + \lambda_{Q_i}^2 L_2,$$

где L_1, L_2 - операторы (2.55) $\beta_{Q_i}^1, \beta_{Q_i}^2, \lambda_{Q_i}^1, \lambda_{Q_i}^2 \in Mat(10, F)$. Прямыми вычислениями получаем, что операторы

$$Q_3 = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \text{ и } Q_4 = [Q_1, Q_2]$$

принадлежат M_1 и удовлетворяют соотношениям (2.58) при

$$\beta_{Q_3}^1 = a_1 \beta_{Q_1}^1 + a_2 \beta_{Q_2}^1, \quad \beta_{Q_3}^2 = a_1 \beta_{Q_1}^2 + a_2 \beta_{Q_2}^2,$$

$$\lambda_{Q_3}^1 = a_1 \lambda_{Q_1}^1 + a_2 \lambda_{Q_2}^1, \quad \lambda_{Q_3}^2 = a_1 \lambda_{Q_1}^2 + a_2 \lambda_{Q_2}^2,$$

$$\beta_{Q_4}^1 = \beta_{Q_2}^2 \lambda_{Q_1}^1 - \beta_{Q_1}^2 \lambda_{Q_2}^1,$$

Глава VI. Локальная симметрия уравнений Максвелла

$$\beta_{Q_4}^2 = \beta_{Q_2}^1 \beta_{Q_1}^2 - \beta_{Q_1}^1 \beta_{Q_2}^2 + \beta_{Q_2}^2 \lambda_{Q_1}^2 - \beta_{Q_1}^2 \lambda_{Q_2}^2,$$

$$\lambda_{Q_4}^1 = \beta_{Q_1}^1 \lambda_{Q_2}^1 - \beta_{Q_2}^1 \lambda_{Q_1}^1 + \lambda_{Q_1}^1 \lambda_{Q_2}^2 - \lambda_{Q_2}^1 \lambda_{Q_1}^2,$$

$$\lambda_{Q_4}^2 = \beta_{Q_1}^2 \lambda_{Q_2}^1 - \beta_{Q_2}^2 \lambda_{Q_1}^1.$$

Таким образом, исследуя симметрию уравнения Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка, мы всегда будем иметь дело с алгеброй Ли.

Определение 2.7.

Пусть $\{Q_a\}, a = 1, 2, \dots, n$ - некоторая совокупность линейных дифференциальных операторов вида (2.57), образующих базис конечномерной алгебры Ли S . Будем говорить, что S является *алгеброй инвариантности симметрии* уравнений (2.55), если каждый из операторов Q_a удовлетворяет условиям (2.58), т.е. является оператором симметрии уравнений Максвелла.

В силу предыдущей теоремы задача отыскания всех возможных операторов симметрии уравнения Максвелла эквивалентна нахождению базиса максимально широкой алгебры инвариантности этих уравнений в классе M_1 .

33. Алгебра инвариантности уравнений Максвелла

Основное утверждение относительно симметрии уравнений Максвелла можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.8.

Уравнения Максвелла (2.55) инвариантны относительно 15- мерной алгебры Ли, базисные элементы которой могут быть выбраны в виде

$$P_\mu = p_\mu \equiv i \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

$$\mathfrak{J}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},$$

$$K_\mu = 2x_\mu D - \sum_{\nu=0}^3 x_\nu x^\nu p_\mu + 2 \sum_{\nu=0}^3 S_{\mu\nu} x^\nu,$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$D = \sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} p_{\mu} + i(3 - \beta_3^2), \quad (2.59)$$

где $S_{\mu\nu} = i(\beta_{\mu}\beta_{\nu} - \beta_{\nu}\beta_{\mu})$, β_{μ} -10- рядные матрицы Кеммера- Дюффина-Петью.

Указанные базисные элементы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0, \quad [P_{\mu}, \mathfrak{J}_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu}P_{\sigma} - g_{\mu\sigma}P_{\nu}), \\ [\mathfrak{J}_{\mu\nu}, \mathfrak{J}_{\lambda\sigma}] &= i(-g_{\mu\lambda}\mathfrak{J}_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\mathfrak{J}_{\mu\lambda} + g_{\mu\sigma}\mathfrak{J}_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}\mathfrak{J}_{\mu\sigma}), \\ [\mathfrak{J}_{\mu\nu}, K_{\lambda}] &= i(g_{\nu\lambda}K_{\mu} - g_{\mu\lambda}K_{\nu}), \\ [K_{\mu}, P_{\nu}] &= -2i(g_{\mu\nu}D - \mathfrak{J}_{\mu\nu}), \quad [K_{\mu}, K_{\nu}] = 0 \\ [D, P_{\mu}] &= -iP_{\mu}, \quad [D, K_{\mu}] = iK_{\mu}, \\ [\mathfrak{J}_{\mu\nu}, D] &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$.

Алгебра Ли, натянутая на базис (2.59), является максимальной алгеброй инвариантности уравнения Максвелла в классе M_1 .

Замечание. Алгебра Ли, порожденная базисными элементами $P_{\mu}, \mathfrak{J}_{\mu\nu}, D, K_{\mu}, 0 \leq \mu, \nu \leq 3$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям (2.60), называется алгеброй Ли конформной группы. Стало быть наша теорема может быть переформулирована следующим образом:

максимальной алгеброй инвариантности уравнений Максвелла в классе M_1 является 15- мерная алгебра Ли конформной группы.

Доказательство.

Напомним, что неприводимые 10- рядные матрицы Кеммера - Дюффина - Петью β_{μ} удовлетворяют следующим соотношениями:

$$\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\lambda} + \beta_{\lambda}\beta_{\nu}\beta_{\mu} = g_{\mu\nu}\beta_{\lambda} + g_{\nu\lambda}\beta_{\mu}, \quad 0 \leq \mu, \nu \leq 3,$$

$$\beta_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ - полностью антисимметричный тензор четвертого ранга. Из этих соотношений без труда вытекают следующие тождества:

$$\beta_5^3 = \beta_5, \quad (1 - \beta_5^2) \beta_\mu = \beta_\mu \beta_5^2,$$

$$\sum_{\mu=0}^3 \beta_\mu \beta^\mu = 3 - \beta_5^2,$$

$$[\beta_\mu, S_{\nu\lambda}] = i(g_{\mu\lambda} \beta_\nu - g_{\mu\nu} \beta_\lambda). \quad (2.61)$$

Используя эти тождества, прямой проверкой убеждаемся, что операторы (2.55), (2.59) удовлетворяют условиям инвариантности

$$[P_\mu, L_\alpha] = [\mathfrak{J}_{\mu\nu}, L_\alpha] = [D, L_\alpha] = [K_\mu, L_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.62)$$

которые совпадают с (2.58) при $\beta_Q^\alpha = \lambda_Q^\alpha = 0$.

Проверка соотношений (2.62) несложна, определенные трудности возникают лишь при вычислении последних коммутаторов. Приведем подробные выкладки для самого сложного случая:

$$\begin{aligned} [K_\mu, L_1] &= \\ &= \left[2x_\mu D - \sum_\nu x_\nu x^\nu p_\mu + 2 \sum_\nu S_{\mu\nu} x^\nu, (1 - \beta_5^2) \left(\sum_\lambda \beta_\lambda p^\lambda + 1 \right) \right] = \\ &= 2 \left[x_\mu, (1 - \beta_5^2) \sum_\lambda \beta_\lambda p^\lambda \right] D - \left[\sum_\nu x_\nu x^\nu, (1 - \beta_5^2) \sum_\lambda \beta_\lambda p^\lambda \right] p_\mu + \\ &\quad + 2 \left[\sum_\nu S_{\mu\nu} x^\nu, (1 - \beta_5^2) \sum_\lambda \beta_\lambda p^\lambda \right] = 2i(1 - \beta_5^2) \left\{ -\beta_\mu D + \right. \\ &\quad \left. + \sum_\nu \beta_\nu x^\nu p_\mu + \sum_\nu \beta^\nu S_{\mu\nu} - (g_{\mu\lambda} \beta_\nu - g_{\nu\lambda} \beta_\mu) \sum_\lambda x_\lambda p^\lambda \right\} = \\ &= 2i(1 - \beta_5^2) \left\{ -\beta_\mu \left(\sum_\lambda x_\lambda p^\lambda + 1(3 - \beta_5^2) \right) + \sum_\nu \beta_\nu x^\nu p_\mu - \right. \\ &\quad \left. - i \sum_\nu \beta^\nu (\beta_\mu p_\nu - \beta_\nu \beta_\mu) + \beta_\mu \sum_\nu x_\nu p^\nu - \sum_\nu \beta_\nu x^\nu p_\mu \right\} = \end{aligned}$$

РАЗДЕЛ II - ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

$$= 2i(1 - \beta_5^2) \left\{ -i\beta_\mu(3 - \beta_5^2) - \left(\sum_\nu \beta_\nu \beta^\nu - 1 \right) i\beta_\mu \right\} =$$

$$4(1 - \beta_5^2) \beta_5^2 \beta_\mu = 0,$$

что и требовалось.

С помощью соотношений (2.61) нетрудно убедиться, что операторы $P_\mu, \mathfrak{J}_{\mu\nu}, D, K_\mu$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.60).

Мы видим, что операторы $P_\mu, \mathfrak{J}_{\mu\nu}, D, K_\mu$ действительно образуют алгебру инвариантности уравнения Максвелла. Доказательство того факта, что эта алгебра инвариантности является максимальной в классе идейно несложно, но требует громоздких выкладок, и мы его опускаем.

Следствие 2.9.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме инвариантны относительно 16- мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (2.59) и формулой

$$F = \beta_5. \tag{2.63}$$

Доказательство.

Уравнения Максвелла без токов и зарядов можно представить в виде системы (2.55) с дополнительным условием

$$L_3 \psi \equiv (1 - \beta_5^2) \psi = 0. \tag{2.64}$$

Но матрица $(1 - \beta_5^2)$ коммутатирует со всеми операторами $P_\mu, \mathfrak{J}_{\mu\nu}, F, D, K_\mu$ задаваемыми формулами (2.59) и (2.63). Кроме того, выполняются соотношения

$$[L_1, F] = -iL_2,$$

$$[L_2, F] = L_1 - L_3 - FL_3,$$

откуда видно $P_\mu, \mathfrak{J}_{\mu\nu}, D, K_\mu, F$ что являются операторами симметрии системы, что и требовалось доказать.

Глава VI. Локальная симметрия уравнений Максвелла

Итак, симметрия уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме оказывается более широкой, чем при наличии токов и зарядов. Это связано с тем обстоятельством, что уравнения Максвелла включают ток несимметричным образом (из-за отсутствия магнитных зарядов). В результате теряется симметрия относительно преобразований Хвисайда - Лармора - Райнича

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} \cos \theta + \vec{H} \sin \theta,$$

$$\vec{H} \rightarrow \vec{H} \cos \theta - \vec{E} \sin \theta.$$

Указатель

А

азимутальная симметрия	39
алгебры Ли	132
аналитическая функция	8

В

вариационно исчисление	56	векторные пространства	45
вариационный принцип	58	вектор тока I в улазах	46
ветви	46	вектор тока и в ветвях	46
вектор потенциала узлов	48	временноподобны вектори	73

Г

гармонические функции	9	гомотопные пути	122
гармонический потенциал	54	граничные условия	32
гиперболические цилиндры	20	граничный оператор	46, 97

Д

действительна оса	16	древесны ветви	50
дерево раздела	50	дуальная цепь	51
диэлектрический цилиндр	25	дифференциальные формы	97

Е

емкость	11, 41
---------	--------

З

Закон Кулона и Кевендиша	5	Закон Ома	54
Закон Кирхгофа для токов	47	Закон Ампера	92
Закон Кирхгофа для напряжений	47	Закон Острогорского-Гауса	92
		Закон Кирхгофа - Второй	48

И

изотропный конус	73	испочник тока	41
индуктивность	41	источник напряжения	41
импульс	84		

К

катушка	41	конформные преобразование	6
калибровочные преобразования	93	конденсатор	41
калибровки	94	кограничный оператор	100
к-цепь	97	коворионтные производны	114
комплексный потенциал	19	квадратичная функция	56

Л

лагранпеиона	84, 108	линейный элемент	14
Лапласан	103	логарифмический потенциал	24
Лема Пуенкаре	105		

М

маслитабный множитель	14	множество раздела	51
матрица инцидентностей	47	момент времена t	46
матрица вращения	72	мыровые линии	74
метрика Минковского	87		

Н

нагруженный граф	52	нелинейная катушка	42
напряжение	41	нелинейная емкость	43
напряженность электрического поля	11	нелинейная индуктивность	43
		норма функции $R_n(M)$	33

О

общая мощность	55	однородное поле	18
оператор Даламбера	107	отдельный угол	18
оператор Лапласа	23	ортогональные функции	27
оператор Ходжа	102	ориентированный граф	45
оператор симметрии урэгбнении Максвела	134		

П

первый закон Кирхгофа	48	потенциал заряженного колца	34
потенциал точечного заряди	2а	потенциал линейного заряди	12
потенциал дизлектрической сферы	30	потенциал однородного поля	12
потенциал внутри и вне сверы	34	потенциал поля	7
		потенциал точки	8

потенциал электромагнитного поля	86	преобразования Шворца	14, 18
поле соленоида	119	принцип относительности Галилея	71
поле безвихревое	7	принцип наименьшей мощности	58
поток электрического поля	9	принцип симметрии	124
постоянная разделения	23	пространство Минковского	79
полиномы Лежандра	29	производная	13
преобразования Лоренца	76	прямолинейный отрезок	17
преобразования Галилея	71		

П

радиус - вектор	5	резистор	41
радиальные функции	29	релаксационные колебания	62
разложение Тейлора - Лорена	30	ротор градиента	7

С

смешанный потенциал	60	сопротивление	41
соотношения	5	спряженный оператор	103
соотношения Римана	9	сферические гармоники	28

Т

теорема Стокса	7	тензор энергии - импульса	96
теорема Вейштрасса	56	тензор электромагнитного поля	193
теорема Гауса о потоке электрического вектора	6	траектория	74
		трехмерная скорость Дирка	129

У

уравнение Лапласа	6	координатах	126
уравнение Пуассона	8	уравнение Лапласа в сферической системе координат	28
уравнение Эйлера - Лагранжа	81, 91	уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат	35
уравнение Максвелла	85, 124	уравнение электромагнитного поля	130
уравнение Максвелла векторных обозначениях	126	умножение Ли	135
уравнение Максвелла в форме Бейтмена - Маёрны	127		
уравнение Лапласа в полярных			

Ф

форма связности	106	функция Кронекера	69
функция Грина	19	функционала	56
функция Лежандра	29	фундаментальная группа	123
функция линий тока	13		

Х

хорда	50
-------	----

Ц

цилиндрические функции	38
цепи	44

Э

электрическое поле	5, 6	эквипотенциальная поверхность	10
электрические цепи	41	Эйлерова характеристика	50
электростатика	8	эффект Аронова - Бома	116
элемент поверхности	6		

Раздел II . Электромагнитное поле

Глава 4. Геометрия пространства Минковского

22. Пространство - временной континуум	70
23. Простейшие понятия специальной теории относительности	72
24. Преобразования Лоренца	76

Глава 5. Уравнения электромагнитного поля

25. Уравнения Элера - Лагранжа	81
26. Уравнения Максвелла	85
27. Уравнения Максвелла и дифференциальные формы	96
28. Электромагнитное поле: $U(1)$ - калибровочная теория	106
29. Топология и вакуум	116

Глава 6. Локальная симметрия уравнений Максвелла

30. Вводные замечания	124
31. Различные формулировки уравнений Максвелла	126
32. Алгебры Ли и локальные симметрии	132
33. Алгебра инвариантности уравнений Максвелла	137

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	3
Раздел I. Электростатика и электрические цепи	
Глава 1. Основная задача электростатики и конформные преобразования	
1. Обзор основных понятий электростатики	5
2. Задачи с двумерным распределением потенциалов	8
3. Емкость и напряженность электрического поля	10
4. Потенциал однородного поля. Потенциал линейного заряда	11
5. Преобразования в комплексной плоскости	13
6. Преобразование Шварца	14
7. Преобразование при наличии одного угла	18
8. Конформное отображение прямоугольника	21
Глава 2. Уравнение Лапласа в криволинейных системах координат	
9. Решение уравнения Лапласа в полярной системе координат	23
10. Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат	23
11. Потенциал точечного заряда	29
12. Потенциал диэлектрической сферы и точечного заряда	30
13. Потенциал диэлектрической сферы в однородном поле	31
14. Аксиально симметричный потенциал, заданный на сфере	33
15. Потенциал заряженного кольца	34
16. Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат	35
17. Применение цилиндрических функций к решению различных задач	38
Глава 3. Электрические цепи	
18. Основные элементы электрических цепей	41
19. Законы Кирхгофа и топология	44
20. Вариационный принцип для электрической цепи с активными сопротивлениями	51
21. Геометрия нелинейных цепей	59

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ё. Доличанин, Ю. Соловьёв - *Дифференциальная геометрия*.
Приштина, 1991 г.
2. Б. Дубровин, С. Новиков, А. Фоменко - *Современная геометрия*. Москва,
"Наука", 1979 г.
3. Л. Ландау, Е. Лифшиц - *Теория поля*.
Москва, "Наука" 1990 г.
4. В. Смайт - *Электростатика и электродинамика*.
Москва, ИЛ, 1954 г.
5. А. Зоммерфельд - *Электродинамика*.
Москва, ИЛ, 1948 г.
6. Дж. Стреттон - *Теория электромагнетизма*.
Москва, Гостехиздат, 1948 г.
7. П. Морс, Х. Фешбах - *Методы математической физики*.
Москва, ИЛ, 1958 г.
8. И. Тамм - *Основы теории электричества*.
Москва, Гостехиздат, 1957 г.
9. Дж. Джексон - *Классическая электродинамика*.
Москва, ИЛ, 1965 г.
10. А. Ахиезер, И. Ахиезер - *Электромагнетизм и электромагнитные волны*
Москва, Высшая школа, 1985 г.
11. Абдуллин Р.З., Авапольский Ю.
К задачам практической устойчивости.
В кн.: *Функции Лиунова и их применение*,
Новосибирск, Наука, 1980, С.34-92
12. Ангелич Т.П. (Angelitch T.P.) - *Tensorkalul des Ingenieurs, Teil III*,
Springer-Verlag, Berlin, 1968, 202 str.
13. Ансов Д.В. - *Геодезические точки на замкнутых Римановых многообразиях отрицательной кривизны*,
Наука, Москва, 1967, 309 стр.
14. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.И.
- *Численные процессы решения дифференциальных уравнений*,
Мир, Москва, 1969, 368 стр.
15. Барбашин Е.А. - *Дисперсивные динамические системы, Устойчивость*.
Матем. Наук No. 4(38), 1950, 138-139
- *Введение в теорию устойчивости*,
Наука, Москва, 1967, 223 стр.
16. Ё. Доличанин, Миодраг Поповић, Ю.Р. Соловьёв
- *Математика ИИИ, (ИИ део)*
Завод за учебнике и наставна средства, Приштина, 1989.

Ћ. Доличанин, Ю. П. Соловьев
**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Уредник
Зоран Марковић

Технички уредник
Драган Благојевић

За издавача
Зоран Марковић

Компијутерски слог
Desing data/Београд, Драган Павловић

Штампа
НИЈП "Панорама"-Штампарија "Грчаница" Приштина

Тираж
200

ISBN 86-80593-16-8

ЦИП - каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

537.8:514.7

ДОЛИЧАНИН, Ћемал

Геометрические методы в электродинамике /
Ћ. Доличанин, Ю. П. Соловьев. - Београд:
Математички институт, 1993 (Приштина : Панорама)
.-146 стр. :граф.прикази; 24 см

Ћир. - Регистар. - Библиографија: стр. 146.

ISBN 86-80593-16-8

1. Соловьев, Ю. П.

а) Електродинамика б) Диференцијална геометрија
ID=23258124

