MIHAILO PETROVIĆ

ELIPTIČKE FUNKCIJE

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

Dr MIHAILO PETROVIĆ

ELIPTIČKE FUNKCIJE

DRUGO IZDANJE
U REDAKCIJI
DR PETRA M. VASIĆA I DR MILORADA BERTOLINA

**IZDAVAČKO PREDUZEĆE
GRAĐEVINSKA KNJIGA
BEOGRAD, 1969.**

Za preduzeće:

LJUBICA JURELA, glavni urednik
DRAGOMIR LAZIN, urednik
JOVANKA PRŠENDIĆ, tehnički urednik
VUKA IVANOVIĆ, korektor
ALEKSANDAR PAJVANČIĆ, naslovna strana

ŠTAMPA: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

MIHAILO PETROVIĆ

Ako bi se postavilo pitanje koja je bila najistaknutija ličnost među srpskim matematičarima, bez dvoumljenja bi se moglo reći: Mihailo Petrović. On je znatno uticao na razvoj naše nauke i kulture kao naučnik i profesor Univerziteta u Beogradu, kao učesnik u polarnim ekspedicijama i plodni putopisac iz egzotičnih krajeva Zemljine kugle. Petrović nije samo nacionalni velikan, koji je ponikao iz srpskog naroda, već on uživa veliki ugled u celom svetu.

Po nepodeljenom priznanju Petrović je najveći srpski matematičar i njegovo stvaralačko delo zaslužuje da se svestrano i kritički prouči.

Rođen je 6. maja 1868. godine u Beogradu, gde je svršio osnovnu i srednju školu. Prirodno-matematički odsek Velike škole u Beogradu završio je 1889. godine. Iste godine otišao je u Pariz i tamo je, posle pripremanja od godinu dana, položio prijemni ispit na École Normale Supérieure, na kojoj je ostao sve do 1894. godine. Za to vreme završio je na Faculté des sciences u Parizu: lisans matematičkih nauka (1892), lisans fizičkih nauka (1893) i doktorat matematičkih nauka (juna 1894).

Period studija Mihaila Petrovića u Parizu pada u vreme kada je francuska matematička nauka dostizala jednu od svojih kulminacionih tačaka. Njegovi profesori su bili: Poincaré, Darboux, Picard, Hermite, Painlevé, Appell, Tannery, Boussinesq, Koenigs, Lippmann — sve slavna imena ne samo francuske već i svetske nauke.

Svoju doktorsku tezu: *Sur les zéros et les infinis des intégralez des équations différentielles algebriques* (Paris 1894, 109 p.) odbranio je pred komisijom koju su sačinjavali: Hermite (predsednik komisije), Picard i Painlevé (ispitivači). Rezultati do kojih je Petrović došao u tezi odmah su zapaženi i neke od ovih Picard je uneo u svoj udžbenik: *Traité d'Analyse*, t. III, deuxième édition, Paris, 1908, p. 378—381.

Odmah po položenom doktorskom ispitu Mihailo Petrović je izabran za redovnog profesora Velike škole u Beogradu. Početkom 1905. godine donet je Zakon o univerzitetu, po kome je Velika škola ukinuta a svi profesori stavljeni na raspolaganje. Po propisima toga Zakona, ministar prosvete postavio je prvih osam redovnih profesora Univerziteta u Beogradu, među kojima je bio i Mihailo Petrović.

Polovinu stoleća, od 1894. do 1943. godine, Mihailo Petrović neumorno i predano spremao je nastavne i naučne kadrove za matematiku.

Kao profesor Velike škole i Univerziteta u Beogradu održao je šesnaest raznih kurseva, od kojih je neke ponavljao gotovo iz godine u godinu. Bilo je školskih godina kada je sam držao sve kurseve iz matematike.

Mihailo Petrović voleo je svoj nastavnički poziv. Njegova predavanja odlikovala su se jednostavnošću i ona su privlačila studente.

Petrović je imao strogo merilo koje je preneo i na svoje učenike i time je u znatnoj meri doprineo da nastava matematike u našoj srednjoj školi zauzme lepo mesto.

Za svaki kurs Petrović je izdao skripta ili udžbenik. Pri kraju svoje karijere održao je i neke specijalne kurseve kojima je hteo uputiti slušaoce u problematiku iz analitičke teorije diferencijalnih jedračina.

Pod uticajem Mihaila Petrovića formiran je čitav niz naučnih radnika na matematičkom polju. Iz teorijske matematike kod Mihaila Petrovića doktorirali su: Mladen Berić, Sima Marković, Tadija Pejović, Radivoje Kašanin, Jovan Karamata, Miloš Radojčić, Dragoslav Mitrinović, Danilo Mihnjević, Konstantin Orlov, Petar Muzen i Dragoljub Marković.

Petrović se radovao naučnom uspehu svojih učenika i nije im nametao oblast u kojoj će oni vršiti istraživanja. U periodu Petrovićevog delanja zapaženi su, u drugim oblastima nauke, mnogobrojni slučajevi sputavanja naučnog rada, pa je utoliko značajnije što je on davao podstreka za naučni rad.

Godine 1932. Matematički institut Univerziteta u Beogradu, na inicijativu Mihaila Petrovića i Milutina Milankovića, pokreće časopis na inostranim jezicima *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade.* Do 1941. godine izišlo je sedam knjiga.

Navedeni časopis bio je kruna uspeha Mihaila Petrovića. To je u stvari bio časopis njegove škole. Preko tog časopisa naši matematičari mogli su se kao kolektiv predstaviti svetskoj javnosti.

Kao mlad čovek, 1900. godine Petrović je postao redovan član Srpske akademije nauka. U odeljenju prirodnih nauka ove Akademije on je živo učestvovao u radu. Na sednicama Odeljenja prikazao je veliki broj rasprava svojih ili svojih učenika. Ovi radovi štampani su u Glasu Srpske akademije nauka.

Petrović je jedan od inicijatora publikacije *Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles de Belgrade.* U ovoj publikaciji štampani su na inostranim jezicima izvodi iz radova koji su objavljeni u Glasu. U seriji matematičko-fizičkih nauka navedene publikacije, u periodu od 1933. do 1941. objavljeno je sedam knjiga koje većim delom sadrže rasprave pripadnika škole Mihaila Petrovića.

Petrović je bio član više inostranih akademija nauka i član mnogobrojnih naučnih društava. Učestvovao je na više međunarodnih matematičkih kongresa i držao predavanja na inostranim univerzitetima.

17. novembra 1939. promovisan je za počasnog doktora filozofije Beogradskog univerziteta.

Petrović je bio plodan naučni radnik. Prva njegova rasprava objavljena je 1894. godine u izdanju Akademije nauka u Parizu. Od tada pa sve do smrti, 1943. godine, on je stalno i sistematski radio i objavio blizu 250 radova od kojih su 12 posebna naučna dela. Rasprave je štampao u zemlji i inostranstvu, na srpskom i francuskom jeziku.

Petrovićeve rasprave mogu se razvrstati u sledeće oblasti: aritmetika, nejednakosti, polinomi, funkcije kompleksne promenljive, diferencijalne jednačine, integralni račun i opšta fenomenologija.

Mihailo Petrović imao je intuicije, pronalazio je interesantne probleme za proučavanje i često im davao elegantna rešenja. On je imao mnogo ideja, pa nije stizao da ih do tančina obradi. Stoga se proučavanjem njegovih rasprava, naročito iz oblasti diferencijalnih jednačina, mogu naći ideje za nova istraživanja. Zato nove generacije naših matematičara treba da proučavaju Petrovićeve rasprave jer će se ovim ne samo usavršavati, već se mogu inspirisati za nova sopstvena istraživanja.

Treba primetiti da se u radovima M. Petrovića nailazi, ne tako retko, na štamparske i računske greške. Na neke od njih biće ukazano u Predgovoru.

Nemački matematičar H. Schwarz na jednom internacionalnom kongresu matematičara izjavio je da u njegovim radovima nema nikakvih grešaka. Na to mu je M. Petrović odgovorio: »Kod mene, naprotiv, u svakom radu ima grešaka.«

Petrović nije bio samo profesor i naučnik, već je bio i alas i stručnjak za pitanja ribolova, zbog čega je dobio svoje popularno ime Mika-Alas. Postao je stvarno ribarski kalfa 1888. godine, a nešto kasnije položio je ispit za ribarskog majstora. Imao je svoju ribarsku družinu i kada je odlazio u ribolov potpuno se ponašao kao profesionalni alas.

Petrović je takođe bio strastan putnik u egzotične krajeve sveta i putopisac. Godine 1931. i 1933. boravio je kao član jedne naučne ekspedicije u Severnoj polarnoj oblasti, a 1935. godine u Južnoj polarnoj oblasti.

Srpska književna zadruga objavila mu je knjige: *Kroz polarnu oblast* (1932), *U carstvu gusara* (1935), *Sa okeanskim ribarima* (1935), *Po zabačenim ostrvima* (1936), *Roman jegulje* (1940).

M. Petrović je u toku svoje nastavničke karijere držao sledeće kurseve:

* Analitička geometrija u ravni i prostoru.
* Viša algebra.
* Diferencijalni i integralni račun.
* Geometrijske primene teorije diferencijalnih jednačina.
Računanje sa brojnim razmacima.
Teorija beskrajnih redova.
Eliptičke funkcije.
* Parcijalne diferencijalne jednačine matematičke fizike.
Linearna diferencijalna jednačina drugog reda i njene primene.
Kvalitativna integracija diferencijalnih jednačina.
Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova.
Analitički problemi za obradu.
* Teorija grešaka (Beograd, 1930).
* Teorija analitičkih funkcija.
Elementi matematičke fenomenologije.

Za kurseve označene zvezdicom, M. Petrović je objavio tabake.

Pored toga, on je objavio i sledeće udžbenike:

Elementi matematičke fenomenologije (Beograd, 1911, 774 str.).
Računanje sa brojnim razmacima (Beograd, 1932, 193 str.).
Eliptičke funkcije (Beograd, 1937, 128 str.).
Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova (Beograd, 1938, 221 str.).

Povodom stogodišnjice rođenja Mihaila Petrovića mnogo je napisano i još više usmeno kazano. Međutim, samo izuzetno date su kritične ocene na Petrovićeve naučne doprinose pojedinim oblastima matematike. Suviše se insistira, ali ne potkrepljuje dokazima, da je Petrović posebno originalan u fenomenologiji i u numeričkim spektrima. Međutim, potvrđuje se sve više da su njegovi rezultati iz teorije polinoma, specijalnih funkcija, diferencijalnih jednačina i nejednakosti (brojnih razmaka) ne samo i danas aktuelni već da oni služe kao polazna tačka za razne generalizacije.

D. S. Mitrinović

PREDGOVOR

Posle dužeg vremena došlo je do ponovnog izdavanja knjiga Mihaila Petrovića: *Računanje sa brojnim razmacima* (prvo izdanje 1932. godine), *Eliptičke funkcije* (1937) i *Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova* (1938). Mihailo Petrović je ove knjige pisao kao udžbenike za redovne kurseve koje je držao na Beogradskom univerzitetu. Međutim, svaka od njih je više nego običan udžbenik, jer sadrži u sebi mnogo onoga što jednu knjigu karakteriše kao monografiju. Da je zaista tako, vidi se i iz toga, što se i danas jedna grupa Beogradskih matematičara inspiriše rezultatima koji se nalaze u njima i daje nove naučne priloge u oblastima koje su ovde tretirane. Ono što smeta da bismo mogli slobodno da tvrdimo da se zaista radi o monografijama u pravom smislu reči je činjenica da ni u jednoj od njih nema bibliografskih podataka, tako da nije uvek mogućno utvrditi o čijem se rezultatu radi, kao ni iz kog perioda je taj rezultat. Ovo je štetilo i samom Mihailu Petroviću kao naučniku. Naime, u ovim knjigama ima dosta njegovih rezultata koji su kasnije u svetskoj literaturi pripisivani drugim matematičarima, mada su ovi došli do njih često puta znatno posle M. Petrovića. Tek danas, za neke od tih rezultata utvrđen je Petrovićev prioritet.

Prilikom čitanja ovih knjiga mora se biti obazriv u odnosu na terminologiju. Često će se naići na neadekvatnosti kao i na nesavremeno shvatanje nekih matematičkih pojmova i to ne samo sa današnjeg stanovišta već i, donekle, sa stanovišta koje su zauzimali pojedini matematičari iz vremena u kome je živeo i stvarao Mihailo Petrović. Redaktori, mada su, prirodno, ovoga svesni, nisu želeli da vrše izmene u tom pravcu, radi istorijske autentičnosti teksta.

Čitalac će naići na pojedine arhaične izraze koji će pri prvom sretanju smetati ali se za neke, posle razmišljanja, čini da su čak i prikladniji od onih koji se danas upotrebljavaju.

Prilikom redakcije novog—drugog—izdanja, ponegde su ispravljena suviše gruba gramatička odstupanja. Jezik je, u osnovi, zadržan, mada je prilikom nedoslednosti autora, izabrana ona varijanta koja je bliža današnjim shvatanjima. Pravopisne greške su, uglavnom, ispravljene, osim u slučajevima kada bi ove ispravke davale bitno drukčiji utisak o tekstu.

Terminologija i simbolika najčešće nije menjana, mada su izvršena neka skraćivanja u simbolici, na primer, pisano je $\equiv$ umesto „identički $= 0$“.

U novom izdanju ispravljene su ranije štamparske greške. Takođe su ispravljeni neki pogrešni rezultati, kojih je najviše bilo u knjizi *Računanje sa brojnim razmacima*. Valja naglasiti da su ove greške uglavnom računske prirode. Ponajmanje ovakvih grešaka, koliko su redaktori uspeli da utvrde, bilo je u knjizi *Eliptičke funkcije*.

Ubeđeni smo da će ponovno izdavanje Petrovićevih knjiga značiti značajan podsticaj i u nastavi i u naučnom radu u oblastima o kojima je reč. Pitanja porekla pojedinih rezultata predstavljaju poseban interes i za istoričare matematike. I pored nedostataka koje smo podvukli, Petrovićeve knjige imaju niz visokih kvaliteta, koji u potpunosti opravdavaju ponovno izdavanje. Petrović piše lako, živo, zanimljivo, uvek sa ukazivanjem na otvorena pitanja. Ove knjige su primer kako matematičko izlaganje ne mora da bude suvoparno i odbojno: u nizu razmatranja jasno se vidi ruka velikog majstora, mnoge specifičnosti naučnog postupka našeg velikog matematičara Mihaila Petrovića.

Beograd
30. VI 1969.

Milorad Bertolino
Petar M. Vasić

REČ UNAPRED

Iz obimne, danas toliko obrađene teorije eliptičkih funkcija, u ovaj kratak udžbenik ušlo je samo ono što se, prema elementarnim znanjima iz diferencijalnog i integralnog računa, i opšte teorije analitičkih funkcija, sa kojima se pretpostavlja da raspolažu slušaoci, može preći na predavanjima od jednog skraćenog semestra.

Dokazi su, mestimice i na račun onakve tačnosti sa kakvom se danas radi, uprošćeni i skraćeni do krajnjih granica mogućnosti, a u nameri da slušalac što lakše i brže dođe ma i do ovlašne slike stvari i da mu se omogući upotreba računskog instrumenta koji pružaju eliptičke funkcije. To je, uostalom, sve što se može tražiti od jednog, ovako skraćenog, udžbenika.

Pisac

SADRŽAJ

PRVI ODELJAK

Osnovni pojmovi o periodičnim funkcijama

DRUGI ODELJAK

Generalnosti o dvoperiodičnim funkcijama

TREĆI ODELJAK

Osnovne eliptičke funkcije

ČETVRTI ODELJAK

Razni oblici redova za osnovne eliptičke funkcije

PETI ODELJAK

Eliptičke funkcije definisane inverzijom opštijih integrala

ŠESTI ODELJAK

Opšti pogled na dvoperiodične funkcije

PRVI ODELJAK

OSNOVNI POJMOVI O PERIODIČNIM FUNKCIJAMA

1. POJAM O PERIODIČNOSTI

Iz trigonometrije se zna da kad se za merenje uglova uzme takva jedinica mere, pun ugao ima za vrednost 2π, funkcija $\sin z$ ne menja se kad se vrednosti z doda ili oduzme 2π, što izražava jednačina

$$\sin(z \pm 2\pi) = \sin z.$$

Isto tako, iz elementarne analize zna se da je

$$e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

prema čemu funkcija e^z ima tu osobinu da ne menja vrednost kad se vrednosti z doda ili oduzme $2\pi i$, što se izražava jednačinom

$$e^{z \pm 2\pi i} = e^z.$$

Za te dve funkcije kaže se da su *periodične* i da imaju za *periodu*, prva broj 2π, druga broj $2\pi i$.

I uopšte, *za jednu funkciju $f(z)$ kaže se da je periodična ako postoji takav jedan broj ω, nezavisan od z, da je za ma kakvo z*

$$f(z \pm \omega) = f(z).$$

Broj ω naziva se tada *perioda* funkcije $f(z)$. Lako se uviđa da, kad $f(z)$ ima kao periodu jedan broj ω, imaće beskrajno mnogo perioda, a to su

$$\pm\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega, \pm 4\omega, \ldots$$

tj. *pozitivni i negativni multipli broja* ω. To se vidi iz toga što je očevidno

$$f(z \pm 2\omega) = f(z \pm \omega) = f(z),$$

$$f(z \pm 3\omega) = f(z \pm 2\omega) = f(\omega),$$

$$f(z \pm 4\omega) = f(z \pm 3\omega) = f(\omega).$$

Kad je, dakle, ω perioda funkcije, biće joj perioda i $m\,\omega$, gde je m ma kakav, pozitivan ili negativan, ceo broj. Kada je broj ω takav da ispunjava ove pogodbe: 1^0 da se svaka druga perioda funkcije izražava kao multipl toga broja; 2^0 da je svaki multipl toga broja jedna perioda funkcije, onda se za takav broj ω kaže da je *osnovna*, *nesvodljiva perioda* funkcije.

Takvi su npr. brojevi

$$\omega = 2\pi \text{ za funkciju } \sin z,$$

$$\omega = 2\pi i \text{ za funkciju } e^z.$$

Međutim, takav nije broj π za funkciju $\sin z$: tačno je da su sve periode funkcije multipli broja π, ali svakav njegov multipl, npr. 3π, 5π $7\pi, \ldots$ nisu periode.

Iz same definicije osnovne periode vidi se da je to među svima periodama ona koja je, u ravni promenljive z, *najbliža koordinatnom početku.*

No ima funkcija čije se sve periode ne izražavaju kao multipli jedne iste periode, već se jedne izražavaju kao multipli jednog broja ω_1, druge kao multipli drugoga kakvog broja ω_2, treće kao multipli trećega broja ω_3 itd., gde su brojevi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ takođe periode iste funkcije, ali nijedan od njih nije multipl drugog.

U takvom se slučaju ima smatrati da funkcija ima nekoliko nizova perioda

$$\begin{array}{l} \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \pm 3\omega_1, \ldots \\ \pm\omega_2, \pm 2\omega_2, \pm 3\omega_2, \ldots \\ \pm\omega_3, \pm 2\omega_3, \pm 3\omega_3, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \tag{1}$$

Za prvi niz ima se smatrati kao osnovna perioda broj ω_1, za drugi niz broj ω_2, za treći broj ω_3, itd. Za funkciju ima se takođe smatrati da ima onoliko osnovnih perioda koliko ima takvih brojeva $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$

Kad su ω_1 i ω_2 dve osnovne periode funkcije $f(z)$, biće

$$f(z + m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2) = f(z + m_1\,\omega_1) = f(z).$$

I uopšte, kad su $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ osnovne periode funkcije $f(z)$, biće

$$f(z + m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2 + \cdots + m_n\,\omega_n) = f(z),$$

pa ma kakve vrednosti imali celi, pozitivni ili negativni brojevi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Prema tome funkcija će, pored nizova (1), imati kao periode i sve vrednosti

$$\omega = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2 + \cdots + m_n\,\omega_n. \tag{2}$$

Izraz (2) je najopštiji izraz za periode posmatrane funkcije; on izražava svaku periodu kao linearnu i homogenu kombinaciju osnovnih perioda $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, gde su koeficijenti kombinacije celi brojevi. Svaka se perioda izražava u obliku (2), i obratno, svaki oblik (2) je jedna perioda funkcije.

Funkcije $f(z)$, za koje postoji samo jedan broj ω_1 pomenute vrste, nazivaju se *prostoperiodične funkcije*. One za koje postoje dva takva broja ω_1 i ω_2, nazivaju se *dvoperiodične funkcije*, sa osnovnim periodima ω_1 i ω_2. I uopšte funkcije za koje postoje n takvih brojeva $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n$ nazivaju se *n-periodične funkcije*, sa osnovnim periodama $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

2. PROSTOPERIODIČNE FUNKCIJE

Kao što je napred kazano funkcija $f(z)$ naziva se *prostoperiodičnom funkcijom* kad ima periode i kad se sve njene periode izražavaju kao multipli jednog istog broja ω koji ima ove osobine: 1° svaka druga perioda je multipl broja ω; 2° svaki multipl broja ω je jedna perioda funkcije; broj ω je i sam jedna perioda. Broj ω je tada *osnovna perioda* funkcije.

Osnovna perioda ω može biti realan, ili čisto imaginaran, ili kompleksan broj. Tako npr. funkcija $\sin az$, gde je a realan broj, ima za periodu realan broj

$$\omega = \frac{2\pi}{a};$$

funkcija e^{az} ima za periodu čisto imaginaran broj

$$\omega = \frac{2\pi i}{a},$$

a funkcija $e^{(1+i)z}$ ima za periodu kompleksan broj

$$\omega = (1+i)\pi.$$

Pomoću elementarnih funkcija e^z i $\sin z$ može se formirati beskrajno mnogo prostoperiodičnih funkcija $f(z)$. Takve su npr. funkcije sa periodom

$$\omega = \frac{2\pi i}{a}:$$

1° svaki polinom po e^{az}

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{az} + A_2 e^{2az} + \cdots + A_n e^{naz};$$

2° svaka racionalna funkcija po e^{az}, t.j. količnik takva dva polinoma;

3° svaki konvergentan red oblika

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{az} + A_2 e^{2az} + \cdots = \sum_{=0}^{\infty} A_n e^{naz}$$

kao i red oblika

4° $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{naz} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-naz}.$$

Takve su i funkcije sa periodom

$$\omega = \frac{2\pi}{a},$$

naime, svaki konvergentan red oblika

$$f(z) = A_0 + A_1 \sin az + A_2 \sin 2az + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin naz,$$

$$f(z) = B_0 + B_1 \cos az + B_2 \cos 2az + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \cos naz.$$

3. POSTANAK PERIODA

Sa gledišta opšte teorije analitičkih funkcija, periode funkcija proizilaze iz činjenica izraženih Cauchyevim stavovima o krivolinijskim integralima, a ponaosob stavom o ekvivalenciji integracionih putanja i stavom o integralu uzetom duž konture što opkoljava singularitete funkcija.

Posmatrajmo integral

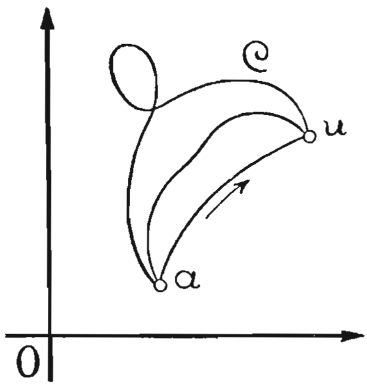
(3) $$z = J(u) = \int_a^u f(u)\, du,$$

gde je $f(u)$ data funkcija promenljive u, a a jedna stalna tačka u ravni te promenljive (sl. 1). Obrazac (3) definiše z kao funkciju $J(u)$ promenljive u, a u isto vreme i u kao funkciju $u(z)$ promenljive z. Ova funkcija $u(z)$ naziva se *inverzija integrala* $J(u)$.

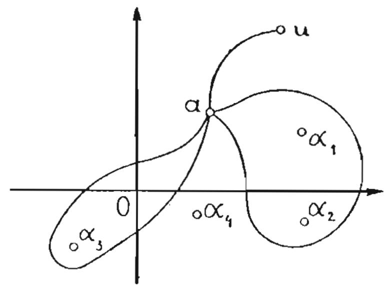
Integral J može se uzeti duž raznih, beskrajno mnogih putanja što vode od stalne tačke a do promenljive krajnje tačke u koja se posmatra. Prema Cauchyevom stavu sve će te putanje dovoditi do jedne iste vrednosti z integrala, osim onih putanja po kojima se obilazi oko koga od singulariteta funkcije $f(z)$. Neka su

(4) $$u = \alpha_1, u = \alpha_2 \quad u = \alpha_3 \ldots$$

takvi singulariteti, pa pre no što se izvrši integracija duž direktne putanje C što vodi od a do u, izvršimo je duž kakve konture C' koja obuhvata jedan ili više tih singulariteta (sl. 2). Integral J duž C' imaće za vrednost jedan određen broj ω, a funkcija pod integralnim znakom koja je u polaznoj tački konture imala jednu određenu svoju determinaciju $f(u)$, može po obilasku oko singulariteta duž konture imati ili opet tu istu, ili drugu koju od svojih determinacija (u slučaju kad je koji od singulariteta kritička tačka funkcije).



Sl. 1



Sl. 2

Uočimo slučaj kad je ta determinacija, posle obilaska, *ista kao prvobitna.* Ako se tada, tj. posle obilaska, produži integracioni put duž direktne putanje C, stiže se u istu tačku u u koju bi se stiglo i da se nije izvršilo zaobilaženje oko singulariteta, već se odmah išlo putanjom C.

Integral J će, dakle, za jednu istu krajnju tačku u imati dve vrednosti z i $z+\omega$, prema putanjama kojima se od tačke a išlo do tačke u. Drugim rečima: jednoj istoj vrednosti u odgovaraju dve vrednosti z, od kojih je jedna jednaka vrednosti integrala J uzetog duž direktne putanje C, a druga je jednaka vrednosti istoga integrala uzetog duž kombinovane putanje sastavljene iz putanje C i konture C'. Obrnuto: kad se u smatra kao funkcija promenljive z, onda vrednostima z i $z+\omega$ odgovara jedna ista vrednost u.

Funkcija $u(z)$ ima dakle tu osobinu da je, za ma koju vrednost promenljive z

$$u(z+\omega)=u(z);$$

ona je, dakle, periodična i ima za periodu broj ω.

Kad funkcija $f(u)$ nema nikakvih singulariteta, tj. kad je to kakva *cela* funkcija promenljive u, sve su putanje što vode od a do u ekvivalentne; konture C' ne postoje i funkcija $u(z)$ nema perioda.

Kad $f(u)$ ima samo jedan singularitet $u=\alpha$, ako je ovaj pol, determinacija funkcije po obilasku oko tačke α ostaje nepromenjena. Sa druge strane, integral J duž konture C' po kojoj se bude vršilo to obilaženje, jednak je broju $2\pi i$ pomnoženom sa ostatkom B funkcije $f(u)$ za pol α. I tada:

Ako je $B=0$, funkcija u nema perioda; ako je B različno od nule, funkcija u je periodična i ima za periodu broj

$$\omega = 2\pi i \cdot B.$$

Za takvu periodu se kaže da je *polarna perioda*, jer proizilazi od pola α i njegovog ostatka B.

Kad $f(u)$ ima više singulariteta (4), može postojati više raznih kontura C' duž kojih funkcija $f(u)$ ne menja svoju determinaciju. Duž svake od njih integral J ima po jednu određenu vrednost, pa ako su

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \tag{5}$$

takve vrednosti što odgovaraju raznim takvim konturama C', te će vrednosti (5) biti periode funkcije $u(z)$.

Pri tom se može desiti:

1° ili da su sve periode (5) među sobom nesvodljive, tj. da se nijedna od njih ne može izraziti kao linearna i homogena kombinacija (sa celim koeficijentima) drugih, u tome smislu nesvodljivih perioda; *tada se svi brojevi* (5) *imaju smatrati kao osnovne periode funkcije* $u(z)$;

2° ili su neke od perioda (5) među sobom svodljive, tj. izražavaju se kao linearne i homogene funkcije (sa celim koeficijentima) jedne ili nekolikih drugih nesvodljivih perioda, npr. perioda

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \tag{6}$$

tako da je

$$\omega_{k+1} = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_k\omega_k,$$

$$\omega_{k+2} = m'_1\omega_1 + m'_2\omega_2 + \cdots + m'_k\omega_k,$$

$$\omega_{k+3} = m''_1\omega_1 + m''_2\omega_2 + \cdots + m''_k\omega_k.$$

Tada se svi brojevi (6) *imaju smatrati kao nesvodljive periode funkcije* $u(z)$.

Kao što se vidi, broj osnovnih perioda može biti proizvoljno veliki, prema prirodi funkcije $f(u)$ pod integralnim znakom. *Postoje, dakle, n-periodične funkcije, gde je n proizvoljno veliki ceo pozitivan broj.*

Kad jedna takva perioda proističe od zaobilaženja oko kakve kritičke tačke funkcije $f(u)$, za nju se kaže da je *kritička perioda* funkcije $u(z)$.

4. POSTANAK PERIODA OBJAŠNJEN PRIMERIMA

Način postanka perioda, izložen u ovome što je napred kazano, biće rasvetljen primerima što sleduju.

I primer: Uočimo integral

$$z = J(u) = \int_1^u \frac{du}{u}, \tag{7}$$

gde funkcija pod integralnim znakom ima samo jedan singularitet $u=0$ i on je pol prvoga reda, čiji je ostatak $B=1$. Kad se za konturu C' uzme jedna ma koja kontura koja opkoljava tačku $u=0$ (sl. 3), integral J duž te konture imaće za vrednost

$$\omega = B = 1$$

i prema tome će funkcija

$$u(z) = e^z,$$

kao inverzija integrala (7), biti periodična i imati za osnovnu periodu broj

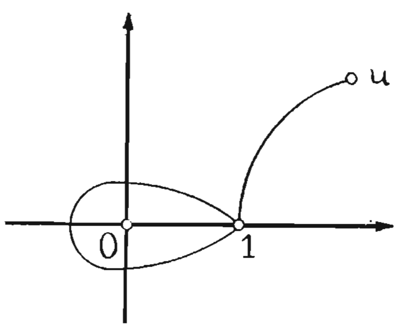
$$\omega = 2\pi i B = 2\pi i$$

i taj broj je polarna perioda funkcije.

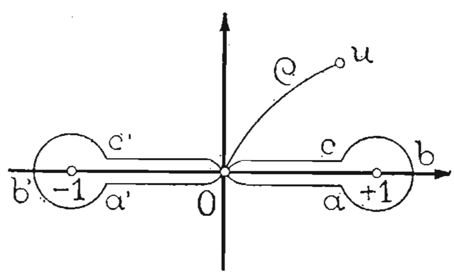
II primer: Uočimo integral

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{8}$$

gde funkcija pod integralnim znakom ima dva singulariteta: tačke $u=-1$ i $u=+1$, a oba su algebarske kritičke tačke drugoga reda.



Sl. 3



Sl. 4

Posmatrajmo dve konture C' što polaze iz tačke O i opkoljavaju: prva C'_1 tačku $u=+1$, druga C'_2 tačku $u=-1$ (sl. 4).

Kontura C'_1 ekvivalentna je zamki $O\,abc\,O$ sastavljenoj od pravih $O\,a$ i $O\,c$, beskrajno bliskih realnoj osovini i kružića abc opisanog oko tačke $u = +1$. Duž te zamke integral ima vrednost

$$\int_{Oa} + \int_{abc} + \int_{cO}.$$

Prvi od ta tri integrala ima za vrednost

$$\int_{Oa} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Drugi integral, uzet duž kružića abc poluprečnika r, dobija se kad se stavi

$$u = 1 + re^{\theta i}, \quad du = rie^{\theta i}\, d\theta$$

i pusti se da θ raste od 0 do 2π; on dakle ima za vrednost

$$\int_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1+u)}} = i\sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\, d\theta}{\sqrt{2+re^{\theta i}}}.$$

Vrednost integrala, prema Cauchyevom stavu, ostaje ista za ma koliku vrednost poluprečnika r, pa dakle i za r beskrajno malo, iz čega izlazi da je taj integral jednak nuli.

Treći integral ima za vrednost

$$\int_{cO} = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2},$$

gde znak — pred drugim članom dolazi otuda što je funkcija pod integralnim znakom posle obilaska oko kritičke tačke $u = +1$ promenila determinaciju, tj. svoj znak.

Duž konture C'_1 integral J imaće dakle za vrednost π, a u tačku O se stiže sa determinacijom

$$f(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tag{9}$$

funkcije $f(u)$ pod integralnim znakom.

Na isti način, a vodeći računa o tome da je funkcija $f(u)$ parna i da se ad iz O polazi sa determinacijom (9), nalazi se da duž konture C'_2 integral J ima stu vrednost π, a da se preko nje stiže u O sa determinacijom

$$f(u) = +\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

funkcije pod integralnim znakom.

Prema tome, celokupna vrednost integrala J duž dvostruke konture sastavljene iz C'_1 i C'_2 iznosi 2π. Broj ω ovde je dakle $\omega = 2\pi$, što znači da je funkcija

$$u(z) = \sin z$$

kao inverzija integrala (8) periodična i ima za periodu $\omega = 2\pi$. Taj broj je kritička perioda funkcije.

III primer: Uočimo integral

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{U}} = J(u), \tag{10}$$

gde je U polinom četvrtog stepena po promenljivoj u, oblika

$$U = (1-u^2)(1-k^2u^2), \tag{11}$$

a gde je k kakav stalan realan broj što leži između 0 i 1.

Funkcija pod integralnim znakom ima četiri singulariteta

$$u = -1, \quad u = +1, \quad u = -\frac{1}{k}, \quad u = +\frac{1}{k},$$

koji su svi algebarske kritičke tačke drugoga reda.

Posmatrajmo najpre dve konture C'_1 i C'_2 (sl. 4) što polaze iz tačke $u = 0$ i opkoljavaju: prva tačku $u = +1$, druga tačku $u = -1$.

Kontura C'_1 ekvivalentna je malopređašnjoj zamki $OabcO$, a duž te zamke integral J ima za vrednost

$$\int_{Oa} + \int_{abc} + \int_{cO}.$$

Prvi od tih integrala ima za vrednost K, gde K označuje realni određeni integral

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{12}$$

Drugi integral, uzet duž kružiča abc poluprečnika r, dobija se kad se izvrši smena

$$u = 1 + re^{\theta i}, \quad du = rie^{\theta i}\, d\theta$$

i pusti se da θ raste od O do 2π; on dakle ima za vrednost

$$\int_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1+u)(1-k^2u^2)}} = i\sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{(2+re^{\theta i})[1-k^2(1+re^{\theta i})^2]}}$$

pa pošto vrednost integrala ostaje ista i kad se poluprečnik r beskrajno smanjuje, to je i taj integral jednak nuli.

Treći integral ima za vrednost

$$\int_{cO} = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{U}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{U}} = K$$

tako, da duž konture C'_1 integral J ima za vrednost $2K$, a u tačku O se, po povratku, stiže sa determinacijom

$$f(u) = -\frac{1}{\sqrt{U}} \tag{13}$$

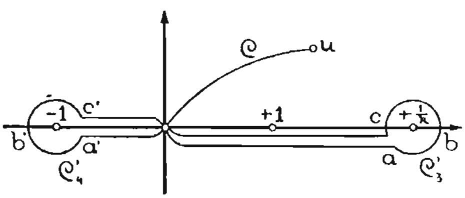
funkcije pod integralnim znakom.

Na isti način, a vodeći računa o tome da je funkcija $f(u)$ parna i da se iz O sad polazi sa determinacijom (13), nalazi se da duž konture C'_2 integral J opet ima za vrednost $2K$ a da se preko te konture stiže u tačku O sa determinacijom

$$f(u) = +\frac{1}{\sqrt{U}}. \tag{14}$$

Prema tome: celokupna vrednost integrala J duž dvostruke konture sastavljene iz C'_1 i C'_2 iznosi $4K$. Broj ω ovde je $4K$, što znači da funkcija $u(z)$, inverzija integrala $J(u)$, ima za periodu $\omega = 4K$.

Posmatrajmo sad dve konture C'_3 i C'_4 što polaze iz tačke O i opkoljavaju: prva tačku $u = \frac{1}{k}$, druga tačku $u = -1$ (sl. 5).



Sl 5

Kontura C'_3, ne opkoljavajući tačku $u = +1$, ekvivalentna je zamki $OabcO$ koja takođe ne opkoljava tu tačku, a sastavljena je iz pravih Oa i cO beskrajno bliskih realnoj osovini, i kružića abc opisanog oko tačke $u = +\frac{1}{k}$. Duž te zamke integral J ima za vrednost

$$\int_{Oa} + \int_{abc} + \int_{cO}. \tag{15}$$

Prvi od ta tri integrala ima za vrednost

$$\int_{Oa} = \int_0^{\frac{1}{k}} = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} = K + L,$$

gde je

$$L = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}.$$

Duž prave $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ vrednost $\sqrt{1-u^2}$ je imaginaran broj, jer je $u > 1$, a vrednost $\sqrt{1-k^2 u^2}$ je realan broj, jer je $u < \frac{1}{k}$. Ako se, dakle, napiše

$$\sqrt{1-u^2} = i\sqrt{u^2-1},$$

vrednost integrala

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2 u^2)}}$$

je realna i integral L će imati za vrednost

$$L = \frac{1}{i} K' = -i K'$$

prema čemu je

$$\int_{Oa} = \int_0^{\frac{1}{k}} = K - iK'.$$

Drugi od integrala (15), uzet duž kružića poluprečnika r, dobija se kad se stavi

$$u = \frac{1}{k} + re^{\theta i}, \quad du = rie^{\theta i}\, d\theta$$

i pusti se da θ raste od 0 do 2π; on, dakle, ima vrednost

$$\int_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-ku)(1+ku)}} = i\sqrt{kr} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\, d\theta}{\sqrt{(1-r^2 e^{2\theta i})(2+kre^{\theta i})}}$$

koja teži nuli kad se poluprečnik r beskrajno smanjuje, pa je, dakle, vrednost integrala jednaka nuli.

Treći od integrala (15) je

$$\int_{eO} = -\int_{\frac{1}{k}}^{0} = \int_{0}^{\frac{1}{k}} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\frac{1}{k}} = K - iK'$$

(znak — pred drugim članom proizlazi otuda, što je posle obilaska oko kritičke tačke $u = \frac{1}{k}$ funkcija pod integralnim znakom promenila svoj znak), a u tačku O se stiže sa determinacijom (13).

Iz toga izlazi da je vrednost integrala J duž konture C'_3 jednaka broju $2K - 2iK'$ i da se, posle obilaska tom konturom, stiže u tačku O sa determinacijom (13) funkcije $f(u)$.

Ako se posle toga integracija produži duž konture C'_4 vodeći računa o tome da se polazi sa determinacijom (13) funkcije pod integralnim znakom, nalazi se, kao i u sl, 3. da integral J duž te konture ima za vrednost $2K$ i da se u tačku O, po obilasku duž konture, stiže sa determinacijom (14).

Prema tome, celokupna vrednost integrala J duž dvostruke konture sastavljene od C'_3 i C'_4, jednaka je broju $4K - 2iK'$, pa pošto ta kontura dovodi do determinacije (14) funkcije pod integralnim znakom, to se zaključuje da je taj broj jedna perioda funkcije $u(z)$. Ali pošto je napred nađeno da je i sam broj $4K$ jedna perioda te funkcije, to sleduje da je i broj $-2iK'$, pa dakle i broj $2iK'$, jedna njena perioda.

Funkcija $u(z)$ ima, dakle, dve periode

$$\omega_1 = 4K \qquad \text{i} \qquad \omega_2 = 2iK'$$

gde su K i K' realni određeni integrali:

(16) $$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

(17) $$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}.$$

Svaka druga kontura, različita od ovih ovde posmatranih, dovodi ili do istih perioda ω_1 i ω_2, ili do njihovih linearnih kombinacija koje ne dovode do kakve nove periode.

Nađene dve periode ω_1 i ω_2 su kritičke periode; one su očevidno jedna na drugu nesvodljive i imaju se smatrati kao osnovne periode funkcije $u(z)$. Jedna je od njih, kao što se vidi, realna, a druga čisto imaginarna.

Za $k=0$ integrali K i K' postaju

$$K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$K'=\int_2^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\Big[\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\Big]_0^{+\infty}=+\infty,$$

tako da funkcija $u(z)=\sin z$, na koju se za $k=0$ svodi inverzija integrala J, ima samo jednu konačnu periodu

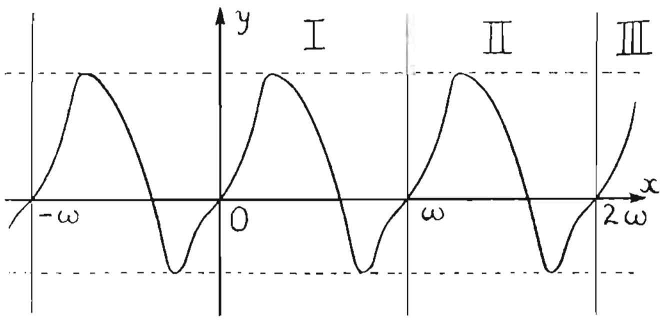
$$\omega=4K=2\pi.$$

5. GEOMETRIJSKO ZNAČENJE PERIODIČNOSTI

Periodičnost se sastoji u činjenici da se vrednosti funkcije ponavljaju kad se nezavisno promenljivoj količini doda ili oduzme jedna stalna količina ω, koja tada igra ulogu periode.

Kad se radi samo o realnim količinama, a i perioda je realna, onda je periodičnost geometrijski izražena činjenicom da se luk krive linije, što predstavlja posmatranu funkciju, ponavlja u određenim stalnim razmacima nezavisno promenljive količine (apscise) (sl. 6).

Kad se radi o imaginarnim količinama, bilo da je perioda realna ili kompleksna, takvo je geometrijsko izražavanje periodičnosti nemoguće u jednoj



Sl. 6

ravni, jer samo označavanje promena nezavisno promenljive z zahteva jednu ravan, a označavanje promena funkcije drugu, zasebnu ravan.

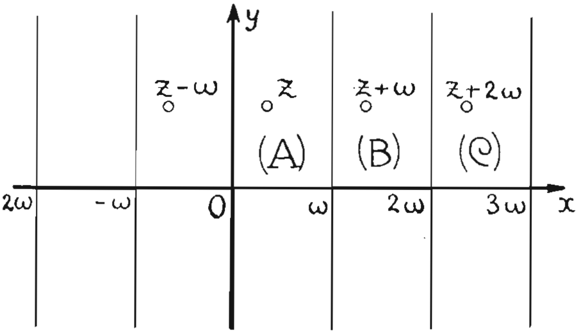
Da bi se videlo značenje periodičnosti u ravni z, razlikujmo ove slučajeve:

Prvi slučaj: *neka je perioda ω realna.* Označimo na realnoj osovini (sl. 7) tačke

(18) $$\pm\omega,\ \pm 2\omega,\ \pm 3\omega, \ldots$$

kroz njih povucimo upravne paralelne imaginarnoj osovini.

Ako se uoči jedna ma koja tačka z u oblasti (A), funkcija će imati istu vrednost i onda kad se tačka z premesti u tačku $z+\omega$ oblasti (B) ili u tačku $z+2\omega$ oblasti (C) itd., i to će važiti za ma koju tačku z oblasti (A). Periodičnost



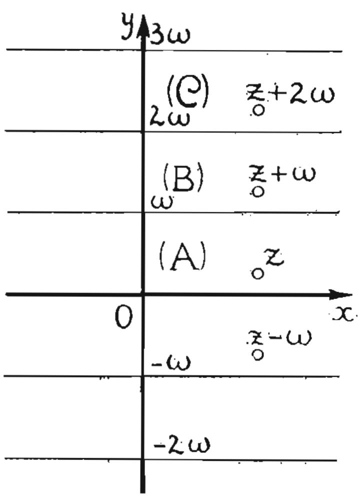
Sl. 7

funkcije sastoji se, dakle u tome što, kakve god vrednosti funkcija dobije u oblasti (A) u pojedinim njenim tačkama z, takve će iste vrednosti ona dobiti i u ostalim oblastima (B), (C), . . . u odgovarajućim tačkama

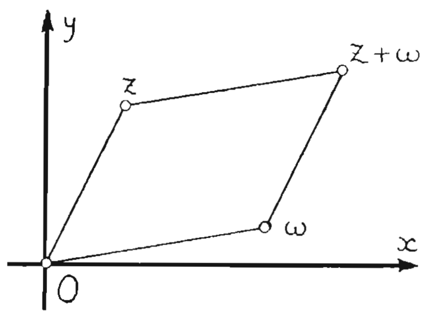
(19) $$z \pm \omega, \quad z \pm 2\omega, \quad z \pm 3\omega, \ldots$$

koje se sve nalaze na jednoj pravoj paralelnoj realnoj osovini.

Drugi slučaj: *neka je perioda čisto imaginarna količina.* Tačka ω nalaziće se na imaginarnoj osovini (sl. 7'). Ako se na ovoj označe tačke (18), pa se kroz ove povuku paralelne realnoj osovini, dobijaju se pojasi (A), (B), (C),...



Sl. 7'



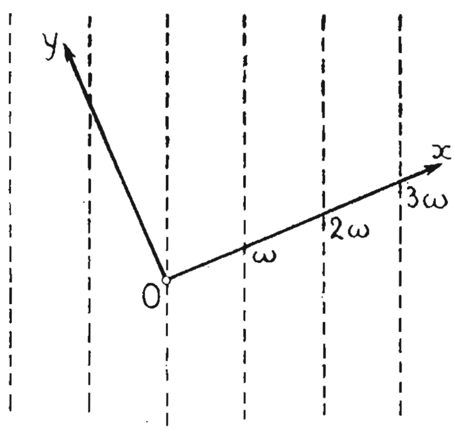
Sl. 8

od kojih, kad (A) sadrži posmatranu tačku z, svaki od njih sadrži po jednu njoj odgovarajuću tačku (19). Ove se tačke sve nalaze na jednoj pravoj paralelnoj imaginarnoj osovini. Periodičnost funkcije opet se sastoji u činjenici da funkcija u tačkama (19) tih pojaseva dobija jednu istu vrednost, onu koja ona ima u tački z pojasa (A).

I u prvom i u drugom slučaju oblasti (A), (B), (C), . . . nazivaju se *pojasima periodičnosti* funkcije. Tih pojaseva ima beskrajno mnogo, ali je dovoljno poznavati funkciju u jednome, kome bilo od njih, pa će se ona poznavati u celoj ravni, pošto se ona ponavlja u svima ostalim pojasevima. *Prvim pojasom periodičnosti* obično se naziva prvi pojas sa desne strane imaginarne osovine.

Tačke (19) nazivaju se *homologim tačkama* ili *homologama* tačke z za posmatranu funkciju $f(z)$. Periodičnost ove sastoji se tada u tome, što funkcija u svima homologim tačkama ima istu vrednost, onu koju ima u tački z.

Međutim, i u prvome i u drugom slučaju pojasima periodičnosti *može se dati proizvoljna orijentacija*, ali tako da uvek ostanu međusobno paralelni. Pretpostavimo da se prvobitne pravougle koordinatne osovine obrnu oko koordinatnog početka za ugao α, a da početak ostane isti. Međusobni položaji tačaka O, ω, z i (19) ostaju tada neizmenjeni, pošto se npr. tačke O, ω, z, $z+\omega$ nalaze na temenima paralelograma koji ostaje neizmenjen obrtanjem osovina (sl. 8), jer položaji njegovih temena zavise samo od pravaca i potega tačaka z i ω, a ne i od pravaca osovina. Prema tome i pojasi periodičnosti ostaju isti, samo im se menja nagib prema osovinama. A rezultat je isti kao da su koordinatne osovine ostale iste, a pojasi promenili svoj nagib prema osovinama (sl. 9).



Sl. 9

Obrtanjem osovina, kojim se ne menjaju *međusobni položaji* koordinatnog početka, periode i homologih tačaka, menjaju se same *vrednosti* svih tih tačaka, i to na jedan isti način: njihovi potezi (moduli) ostaju neizmenjeni, a p o l a r n i uglovi se smanjuju ili povećavaju (prema smislu obrtanja) za ugao α, za koji se koordinatni sistem obrnuo oko početka. U prvome slučaju vrednost z postaje $ze^{\alpha i}$, a ω postaje $\omega e^{\alpha i}$; u drugome slučaju izmenjenje su vrednosti $ze^{-\alpha i}$ i $\omega e^{-\alpha i}$.

Treći slučaj: *neka je perioda kompleksna količina.* Obrtanjem koordinatnog sistema oko početka, čime pojasi i homologe tačke ostaju neizmenjeni, može se učiniti da se tačka ω nađe na realnoj, ili na imaginarnoj osovini, pa dakle da se određivanje tih pojaseva i tih tačaka svede na prvi ili drugi slučaj. A iz ovoga što je napred kazano izvodi se tada ovaj zaključak:

Kakva bila perioda ω, realna, čisto imaginarna ili kompleksna, prvi pojas periodičnosti dobija se kad se kroz početak i kroz tačku ω povuku dve među sobom paralelne prave L i L' proizvoljnog pravca; deo ravni između tih dveju pravih je prvi pojas periodičnosti, a svi ostali se dobijaju povlačeći kroz tačke

$$\pm 2\omega, \quad \pm 3\omega, \quad \pm 4\omega, \ldots$$

prave paralelne pravama L i L'.

Kao što se vidi, postojanje jedne periode ω povlači sobom ograničenje dela ravni u kome funkcija dobija sve mogućne svoje vrednosti, a koje se samo ponavljaju u pojasima periodičnosti, u njihovim homologim tačkama.

DRUGI ODELJAK

GENERALNOSTI O DVO-PERIODIČNIM FUNKCIJAMA

6. NEPOSREDNI NAČINI FORMIRANJA DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA

Videli smo kako se proučavanjem krivolinijskih integrala

$$z=\int_{a}^{u} f(u)\,du \tag{20}$$

dolazi do saznanja da inverzija $u(z)$ takvoga integrala ima jednu ili više nesvodljivih perioda. To daje mogućnost da se neposredno formiraju integrali (20) čija će inverzija biti dvoperiodična funkcija.

Takva je jedna funkcija napred proučena inverzija $u(z)$ integrala

$$z=\int_{0}^{u}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}}. \tag{21}$$

Drugi jedan način za neposredno formiranje dvoperiodičnih funkcija daje teorija redova čiji je opšti član određena funkcija promenljive z. Uočimo npr. red

$$f(z)=U_0+U_1+U_2+\cdots \tag{22}$$

čiji je opšti član oblika

$$U_n=u_n+v_n, \tag{23}$$

gde je

$$u_n=\frac{e^{z+n\omega}}{(e^{\alpha}-e^{z+n\omega})\,(e^{\beta}-e^{z+n\omega})}, \tag{24}$$

$$v_n=\frac{e^{z-n\omega}}{(e^{\alpha}-e^{z-n\omega})\,(e^{\beta}-e^{z-n\omega})}, \tag{25}$$

gde su α i β dve ma kakve konstante, a ω konstanta čiji je realan deo negativan.

Pokazaćemo najpre da je red (22) konvergentan za sve vrednosti z, osim za one za koje imenioci izraza u_n i v_n postaju jednaki nuli. Konvergencija zavisi od načina na koji se u_n i v_n ponašaju za velike vrednosti n. Pošto je realan deo konstante ω negativan, izraz $e^{n\omega}$, pa dakle i $e^{z+n\omega}$, teže nuli kad n beskrajno raste, i prema tome imenilac izraza u_n ponaša se u beskrajnosti kao $e^{\alpha+\beta}$. Član u_n ponaša se, dakle, kao izraz

$$\frac{e^{z+n\omega}}{e^{\alpha+\beta}} = e^{z-\alpha-\beta} \cdot e^{n\omega}$$

što znači da se red

2 6) $$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

ponaša kao geometrijska progresija

$$e^{z-\alpha-\beta}(1 + e^{\omega} + e^{2\omega} + e^{3\omega} + \cdots)$$

koja je konvergentna, jer je e^{ω} po svome modulu manje od jedinice. Prema tome će i red (26) biti konvergentan za sve vrednosti z različne od

(27) $$\alpha - n\omega + 2k\pi i \quad \text{i} \quad \beta - n\omega + 2k\pi i$$

gde je n koji bilo ceo pozitivan broj, a k koji bilo ceo (pozitivan ili negativan) broj; za vrednosti (27) član u_n postaje beskrajno veliki.

Da bi se dokazala konvergencija reda

(28) $$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

primetimo da izraz $e^{-n\omega}$, pa dakle i izraz $e^{z-n\omega}$, beskrajno raste pri rašćenju broja n, pa da se za velike vrednosti n izrazi

$$e^{\alpha} - e^{z-n\omega} \quad \text{i} \quad e^{\beta} - e^{z-n\omega}$$

ponašaju kao $-e^{z-n\omega}$, tako da se član v_n ponaša kao

$$\frac{e^{z-n\omega}}{e^{2(z-n\omega)}} \; e^{-z+n\omega}.$$

Red (28) ponaša se, dakle, kao geometrijska progresija

$$e^{-z}(1 + e^{\omega} + e^{2\omega} + e^{3\omega} + \cdots)$$

koja je konvergentna. Prema tome će i red (28) biti konvergentan za sve vrednosti z različne od

(29) $$\alpha + n\omega + 2k\pi i \quad \text{i} \quad \beta + n\omega + 2k\pi i$$

za koje konvergencija prestaje, jer član v_n postaje beskrajno veliki.

Prema tome i red (22), kao zbir redova (26) i (28), konvergentan je za sve vrednosti z osim (27) i (29). *Te su vrednosti* (27) i (29) *polovi prvog reda za funkciju* $f(z)$ *koju izražava red* (22). Da je svaka od tih vrednosti pol funkcije, jasno je iz toga što za svaku od njih po jedan od članova u_n i v_n reda (22) postaje beskrajan, a njegova obrnuta vrednost postaje jednaka nuli. Kad se $f(z)$ pomnoži razlikom $z-a$, gde je a jedna, ma koja, od vrednosti (27) i (29), biće svaki član u_n i v_n pomnožen tom razlikom. A ti su članovi dvojaki: jedni, čiji imenilac ne postaje jednak nuli za $z=a$, a drugi čiji je imenilac nula za $z=a$. Oni prvi pomnoženi sa $z=a$ postaju jednaki nuli za $z=a$, a drugi se javljaju u prividno neodređenom obliku $\frac{0}{0}$, ali se primenom L'Hospitalovog pravila nalazi da je ta vrednost konačna i od nule različna. A sve to dokazuje da je vrednost $z=a$ odista pol prvog reda za $f(z)$, pa pošto ta funkcija ne može imati drugih singulariteta osim vrednosti (27) i (29), to je ona *meromorfna* funkcija promenljive z.

Pošto se ni u_n ni v_n ne menjaju kad se vrednosti z doda $2\pi i$, to funkcija $f(z)$ ima broj $2\pi i$ za periodu. Ali se može dokazati da ona ima za periodu i broj ω, i to na ovaj način:

Pošto v_n nije ništa drugo do u_n kad se u njemu indeksu n promeni znak, to se red (22) može napisati u obliku

$$(30) \qquad \cdots + u_{-3} = u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

tj. u obliku reda čiji su indeksi svi celi brojevi od $-\infty$ do $+\infty$. Kad se na mesto z stavi $z+\omega$, opšti član u_k reda (30) postaje

$$\frac{e^{z+(k+1)\omega}}{[e^{\alpha}-e^{z+(k+1)\omega}]\,[e^{\beta}-e^{z+(k+1)\omega}]} = u_{k+1}$$

i to bilo da je k pozitivan, bilo da je negativan ceo broj. To znači da zamena vrednosti z vrednošću $z+\omega$ ima za posledicu samo pomeranje članova reda (30) na desno za jedan rang, što ni u koliko ne menja zbir toga reda (Primetimo da takvo pomeranje članova samo onda ne menja zbir reda, kad se indeks menja od $-\infty$ do $+\infty$; kad bi se on menjao samo od 0 do ∞, zbir bi se morao promeniti, jer ne bi postojao član u_1 koji bi takvim pomeranjem došao na mesto člana u_0). Prema svemu tome:

Funkcija $f(z)$ *je meromorfna funkcija sa dve nesvodljive periode*

$$\omega_1 = 2\pi i \ \text{ i } \ \omega_2 = \omega.$$

Da su one odista nesvodljive, vidi se iz toga što, kako je realan deo periode ω različan od nule, nijedna od perioda ω_1 i ω_2 ne može biti multipl druge.

7. JACOBIEVA TEOREMA O PERIODAMA DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA

Za periode ω_1 i ω_2 ma koje dvoperiodične funkcije vezana je jedna aritmetička osobina iskazana stavom:

Jacobieva teorema: Količnik perioda nikad nije realan broj.

Jer, kad bi taj količnik bio realan broj, taj bi broj bio racionalan ili iracionalan, i onda:

1° Pretpostavimo najpre da je taj broj *racionalan*, tj. oblika $\frac{p}{q}$, gde su p i q dva cela broja, za koja se uvek može smatrati da nemaju zajedničkih činilaca. Iz jednakosti

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{p}{q}$$

dobija se da je

$$\frac{\omega_1}{p}=\frac{\omega_2}{q},$$

pa ako se zajednička vrednost ta dva količnika označi sa λ, dobija se da je

$$\omega_1=p\lambda, \qquad \omega_2=q\lambda$$

tj. da su ω_1 i ω_2 multipli jednog istog broja λ. Ali za broj λ može se dokazati da je i sam perioda funkcije $f(z)$ koja ima za periode ω_1 i ω_2. Jer, prema poznatom aritmetičkom stavu o linearnim neodređenim jednačinama sa dve nepoznate x i y, ma kakvi bili celi brojevi p i q (bez zajedničkih činilaca), uvek postoje celi brojevi x i y takvi da je

$$px-qy=\pm 1.$$

Ako je $x=m_1$ i $y=m_2$ jedan par takvih brojeva, biće

$$pm_1-qm_2=\pm 1,$$

pa prema tome, množeći sa λ

$$m_1\omega_1-m_2\omega_2=\pm\lambda,$$

odakle je

$$m_1\omega_1=m_2\omega_2\pm\lambda.$$

Pa pošto je tada

$$f(z)=f(z+m_1\omega_1)=f(z+m_2\omega_2\pm\lambda)=f(z\pm\lambda),$$

to je λ perioda funkcije. Obe su periode ω_1 i ω_2, dakle, multipli jedne iste periode λ, pa prema tome to nisu nesvodljive periode.

2° Pretpostavimo da je pomenuti broj *iracionalan*. Zna se da za svaki iracionalan broj μ postoji takvih racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ koji se od μ razlikuju za koliko se hoće malo, što se može izraziti jednakošću

$$\mu = \frac{p+\varepsilon}{q}$$

gde je ε koliko se hoće mali broj. Iz jednačine

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p+\varepsilon}{q}$$

dobija se tada

$$q\,\omega_1 = p\,\omega_2 + \varepsilon\omega_2,$$

prema čemu je

$$f(z) = f(z + q\,\omega_1) = f(z + p\,\omega_2 + \varepsilon\omega_2) = f(z + \varepsilon\omega_2),$$

što bi značilo da funkcija ima za periodu i broj $\varepsilon\omega_2$. Pa kako ta perioda može biti koliko se hoće mala, takva bi se funkcija morala svesti na konstantu.

Kao neposredna posledica Jacobieve teoreme izvodi se zaključak:

Nesvodljive periode ω_1 i ω_2 *ne mogu biti ni obe realne, ni obe čisto imaginarne*, jer bi u oba slučaja njihov količnik bio realan broj.

Tako isto iz nje sleduje i zaključak:

Tačke ω_1 i ω_2 *nikad se ne nalaze na jednoj pravoj što prolazi kroz koordinatni početak*, jer kad bi tako bilo, ω_1 i ω_2 bi imali isti argumenat θ, pa ako im se moduli označe sa ϱ_1 i ϱ_2, bilo bi

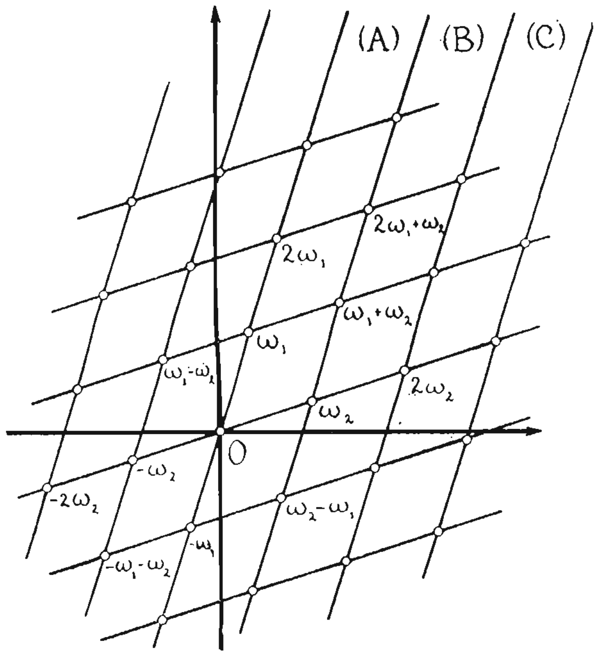
$$\omega_1 = \varrho_1\, e^{\theta i}, \qquad \omega_2 = \varrho_2\, e^{\theta i}$$

pa bi, dakle količnik $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bio realan broj $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$.

8. GEOMETRIJSKO ZNAČENJE DVOPERIODIČNOSTI

Napred je pokazano da postojanje jedne periode ω_1, za datu funkciju $f(z)$ povlači sobom činjenicu da je dovoljno poznavati funkciju za tačke z u jednom pojasu periodičnosti, pa da se ona poznaje za tačke z u celoj ravni te promenljive.

Pretpostavimo sad da funkcija, pored periode ω_1, ima još jednu periodu ω_2, nesvodljivu na ω_1. I ta perioda povlači sobom svoje pojaseve periodičnosti, koji će se ukrštati sa onima koje povlači perioda ω_1. Pošto su pravci graničnih pravih tih pojaseva proizvoljni, oni se mogu izabrati tako, da pojasevi što odgovaraju prvoj periodi budu paralelni potegu druge periode, i obratno: da pojasevi što odgovaraju drugoj periodi budu paralelni potegu prve periode (sl. 10).



Sl. 10

Ta će dva sistema pojaseva obrazovati u ravni promenljive z jednu *mrežu paralelograma* koji su, po samome načinu svoga postanka karakterisani time što:

1° paralelogram, precrtan na sl. 10 ima za temena tačke

$$O,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1+\omega_2; \tag{31}$$

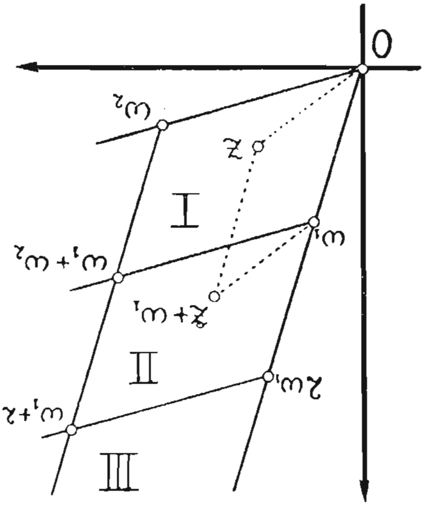
2° svi ostali paralelogrami imaju za temena homologe tačke tačkama (31);

3° strane svih paralelograma paralelne su potezima perioda ω_1 i ω_2.

Geometrijskim sabiranjem lako je uveriti se da će temena paralelograma I (sl. 11) imati za svoje homologe tačke, a za periodu ω_1, temena paralelograma II, III, ... Zatim, da će proizvoljna tačka z u paralelogramu I imati u svakome od tih drugih paralelograma po jednu svoju homologu tačku, u kojoj funkcija dobija onu istu vrednost koju ima u tački z. Prema tome funkcija, određena u paralelogramu I, ponavlja se u svakome od paralelograma II, III, ..., što znači da prenoseći paralelogram I duž pojasa periodičnosti (A), (sl. 10) tako da se I poklapa redom sa II, III, ..., učiniće se da funkcija bude poznata u celome pojasu (A), a prema tome i u svima pojasima periodičnosti (B), (C), ..., pa dakle u celoj ravni.

Svi su paralelogrami mreže na taj način ekvivalentni u pogledu vrednosti funkcije.

Do istog bi se rezultata došlo i kad bi se, na mesto periode ω_1, uzela perioda ω_2; paralelogrami i njihova uloga ostali bi neizmenjeni. Dodaće se još i to, da se međusobni položaji homologih tačaka ne menjaju obrtanjem koordi-



Sl. 11

natnih osovina za proizvoljan ugao, jer pravci osovina ne igraju nikakvu ulogu pri geometrijskoj konstrukciji tih tačaka. Obrtanje ima za efekat samo promenu nagiba mreže paralelograma prema osovinama, a ne utiče ni na oblik, ni na veličinu paralelograma, pa dakle ni na međusobne položaje homologih tačaka.

Paralelogrami mreže nazivaju se *paralelogrami perioda;* paralelogram I je *osnovni paralelogram perioda.* A iz ovoga što je kazano sleduje da se dvoperiodičnost funkcije sastoji u tome, *što se funkcija, određena u jednome, npr. u osnovnom paralelogramu perioda, ponavlja u svakome od ostalih paralelograma.*

Pošto su za datu tačku z njene homologe

$$z + m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2$$

tj. one što se iz z dobijaju dodavanjem ili oduzimanjem multipla perioda, to sleduje da:

1^0 svako teme osnovnog paralelograma ima za homologu odgovarajuće teme svakoga od ostalih paralelograma;

2^0 svaka tačka z na jednoj strani osnovnog paralelograma ima za svoju homologu po jednu tačku na odgovarajućoj strani svakog paralelograma, i to onu sa kojom se z poklapa kad se poklope paralelogrami;

3^0 svaka tačka z u unutrašnjosti osnovnog paralelograma ima po jednu homologu tačku u unutrašnjosti svakoga od ostalih paralelograma, i to onu sa kojom se z poklapa kad se poklope paralelogrami. U svakoj od homologih tačaka funkcija ima istu vrednost koju ona ima u tački z.

Očevidno je da bi, prema samoj konstrukciji paralelograma perioda, njihovo postojanje bilo nemogućno kad bi tačke $z = \omega_1$ i $z = \omega_2$ ležale na jednoj pravoj što prolazi kroz tačku $z = 0$. Ali prema Jacobievoj teoremi o periodama taj slučaj ne može nikad nastupiti.

9. NEMOGUĆNOST UNIFORMNIH FUNKCIJA SA VIŠE OD DVE PERIODE

Iz posmatranja pojasa periodičnosti može se geometrijski shvatiti da *ne postoji nikakva uniformna funkcija sa više od dve periode.* Jer, kao što je pokazano, postojanje svake periode povlači sobom ograničenje dela ravni u kome funkcija dobija sve svoje vrednosti. Jedna osnovna perioda ω_1 ograničava taj deo na jedan pojas, tj. na deo ravni beskrajno manji od nje. Druga osnovna perioda ω_2 ograničava taj pojas na jedan paralelogram, tj. na jedan deo pojasa beskrajno manji od njega. Treća osnovna perioda smanjila bi paralelogram na jedan njegov deo beskrajno manji od njega samog, tako da bi funkcija, koja bi imala tri periode, a uniformna je, pa se može predstaviti u jednoj ravni, dobila sve mogućne svoje vrednosti u beskrajno malom delu paralelograma i morala bi svesti na konstantu.

Međutim, kao što je napred pokazano, posmatrajući inverziju $u(z)$ integrala

$$z = \int_a^u f(u)\, du,$$

funkcija $u(z)$ može stvarno imati koliko se hoće osnovnih perioda. Ali, prema gornjem stavu, to se može desiti samo kad je ta funkcija *multiformna*, a nikad kad je *uniformna*. Uostalom, za multiformne funkcije ne mora postojati gore navedeni razlog za nemogućnost većeg broja perioda od dve, jer se takve funkcije, sa svojim raznim determinacijama, ne mogu celokupne predstaviti u jednoj istoj ravni.

10. NEKOLIKO OPŠTIH OSOBINA MEROMORFNIH DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA

Pored osobina, vezanih za pojedine dvoperiodične funkcije, ima ih i takvih koje važe za sve meromorfne funkcije sa dvema periodama. Ovde će se navesti nekoliko takvih opštih osobina, koje su osnova opštoj teoriji funkcija te vrste, u obliku stavova što sleduju.

S t a v I: *Integral ma koje meromorfne dvoperiodične funkcije $f(z)$, uzet duž ma koga paralelograma perioda, jednak je nuli.*

Jer takav integral

$$J = \int_c f(z)\,dz \tag{32}$$

jednak je zbiru integrala uzetih duž strana paralelograma. Međutim u svakoj tački z jedne strane ovoga funkcija $f(z)$ ima istu vrednost kao i u njoj homologoj tački što se nalazi na suprotnoj strani paralelograma, ali u tim dvema tačkama dz ima suprotne znake, jer su pravci integracije suprotnog smisla. Integral J duž jedne strane paralelograma biće, dakle, jednak integralu uzetom duž suprotne strane, ali suprotno označenom. Zbir takva dva integrala jednak je nuli, pa je dakle i $J=0$.

Stav II: *Zbir ostataka ma koje meromorfne dvoperiodične funkcije, za njene polove što se nalaze u ma kome paralelogramu perioda, jednak je nuli.*

Jer, ako se ti ostaci označe sa $B_1, B_2, B_3, \ldots$, prema Cauchyevoj teoremi integral (32), uzet duž paralelograma, ima za vrednost

$$J = 2\pi i \cdot \sum B_k;$$

pa pošto, prema stavu I, mora biti $J=0$, to je

$$\sum B_k = 0.$$

Stav III: *Meromorfna dvoperiodična funkcija ne može imati u paralelogramu perioda samo jedan pol koji bi bio prvog reda.*

Jer, prema stavu II, zbir ostataka za polove sadržane u paralelogramu perioda jednak je nuli, a on to ne bi mogao biti kad bi paralelogram sadržao samo jedan pol koji bi bio prvoga reda, jer bi tada taj jedini ostatak, pa dakle i zbir $\sum B_k$, morao biti različan od nule. Međutim, za više prostih polova, kao i za pol višega reda, to može biti, jer ostatak za takav pol, kao i zbir ostataka, može biti jednak nuli.

Stav IV: *Za svaku meromorfnu dvoperiodičnu funkciju zbir redova nula, sadržanih u paralelogramu perioda, jednak je zbiru redova polova sadržanih u tome paralelogramu.*

Jer, kao što se zna iz opšte teorije analitičkih funkcija, svaka se takva funkcija može, za vrednosti z u blizini jedne svoje nule $z=\alpha$ koja je m-toga reda, napisati u obliku:

$$f(z) = (z-\alpha)^m \varphi(z), \tag{33}$$

a u blizini jednoga svoga pola $z=\beta$ koji je n-toga reda u obliku

$$f(z) = (z-\beta)^{-n} \psi(z), \tag{34}$$

gde su $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ dve funkcije koje ne postaju ni jednake nuli, ni beskrajne za $z=\alpha$, odnosno za $z=\beta$.

Neka je $f(z)$ kakva meromorfna dvoperiodična funkcija, pa se logaritmisanjem i diferencijaljenjem jednačina (33) i (34) dobija da je u blizini tačke α

(35) $$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-\alpha}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

a u blizini tačke β

(36) $$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-n}{z-\beta}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Iz (35) i (36) se vidi: 1^0 da je svaka nula α pol prvoga reda za funkciju $\frac{f'(z)}{f(z)}$ i da je ostatak za taj pol jednak broju m; 2^0 da je svaki pol β pol prvoga reda za isti količnik i da je ostatak za taj pol jednak $-n$. Pa pošto je količnik $\frac{f'(z)}{f(z)}$ i sam meromorfna dvoperiodična funkcija, i u paralelogramu perioda ne može imati drugih singulariteta osim takvih vrednosti kao što su α i β, zbir ostataka te funkcije za polove sadržane u njenom paralelogramu perioda (istom kao paralelogram funkcije f) mora prema stavu II, biti jednak nuli. Međutim taj zbir ostatka je

$$\sum m-\sum n$$

prema čemu mora biti

$$\sum m=\sum n,$$

čime je stav dokazan.

S t a v V: *Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija $f(z)$ ima u svome paralelogramu perioda bar jedan pol.*

Jer ako se u paralelogramu uoči jedna proizvoljna stalna tačka $z=a$, funkcija

$$\varphi(z)=f(z)-f(a)$$

je takođe meromorfna i dvoperiodična, sa istim paralelogramom perioda kao $f(z)$. Prema stavu IV za tu funkciju mora biti

$$\sum m=\sum n,$$

a pošto ona ima bar jednu nulu, a to je vrednost $z=a$, to broj $\sum m$ ne može biti jednak nuli, pa dakle ni broj $\sum n$. Pa kako svaki od brojeva n predstavlja red po jednoga pola funkcije $f(z)$ (te dve funkcije φ i f imaju iste polove), to polovi odista moraju postojati.

Iz ovoga stava izlazi kao obična posledica:

S t a v VI: *Ne postoji nikakva cela dvoperiodična funkcija.*

Stav je poznat pod nazivom *Liouvilleove teoreme*. Funkcija mora u paralelogramu perioda imati bar jedan pol, i prema tome ne može biti cela funkcija.

U tome je stavu iskazana jedna od razlika između funkcija sa jednom, i funkcija sa dve periode. Među prvima se nalaze npr. cele funkcije e^z i $\sin z$, dok se među drugima ne nalazi ni jedna cela funkcija.

TREĆI ODELJAK

OSNOVNE ELIPTIČKE FUNKCIJE

11. FUNKCIJE sn z, cn z, dn z I NJIHOVE NEPOSREDNE MEĐUSOBNE VEZE

Napred proučavana funkcija $u(z)$, definisana kao inverzija integrala

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{37}$$

polazna je tačka za teoriju eliptičkih funkcija. Ona se označuje oznakom

$$u(z) = \operatorname{sn} z.$$

Pored nje su uvedene još i ove dve njene kombinacije: funkcija

$$\operatorname{cn}(z) = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} \tag{38}$$

i funkcija

$$\operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 z}. \tag{39}$$

Uvođenje tih kombinacija učinjeno je po analogiji sa trigonometrijskim funkcijama, koje se mogu smatrati kao specijalni slučajevi eliptičkih funkcija. A to je učinjeno naročito s toga, što se te dve kombinacije funkcije sn z često pojavljuju u obrascima za eliptičke funkcije, pa je bilo od koristi, kao i pri uvođenju kosinusa, kao kombinacije sinusa, proučiti im jednom za svagda analitičke osobine, pa ih sa tako proučenim osobinama uvesti u račune kao računske elemente.

Uvođenje funkcije cn z imalo je još i tu dobru stranu što, kad je ona uvedena, obrasci teorije eliptičkih funkcija postali su slični obrascima iz teorije trigonometrijskih funkcija, na koje se one svode u specijalnom slučaju kad je $k=0$.

Kao što će se videti iz onoga što će docnije biti pokazano, celokupna teorija eliptičkih funkcija može se svesti na proučavanje triju funkcija

$$\operatorname{sn} z,\ \operatorname{cn} z,\ \operatorname{dn} z$$

i njihovih algebarskih kombinacija. One se stoga nazivaju *osnovne eliptičke funkcije*.

Prva neposredna veza između te tri funkcije izražena je obrascima što služe za samu njihovu definiciju:

(40) $$\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z = 1,$$

(41) $$\mathrm{dn}^2 z + k^2 \,\mathrm{sn}^2 z = 1$$

od kojih je prvi isti kao i onaj što izražava vezu između sinusa i kosinusa.

Druga je veza izražena u obrascima koji daju izvode tih triju funkcija. Obrazac (37) dovodi do jednačine

(42) $$\frac{du}{dz} = \sqrt{1-u^2} \cdot \sqrt{1-k^2 u^2}$$

koja pokazuje da je

(43) $$\mathrm{sn}' z = \mathrm{cn}\, z \cdot \mathrm{dn}\, z.$$

Iz obrasca (40) dobija se diferencijaljenjem

$$\mathrm{sn}\, z \cdot (\mathrm{sn}\, z)' + \mathrm{cn}\, z \cdot (\mathrm{cn}\, z)' = 0,$$

odakle je

(44) $$(\mathrm{cn}\, z)' = -\frac{\mathrm{sn}\, z \cdot (\mathrm{sn}\, z)'}{\mathrm{cn}\, z} = -\mathrm{sn}\, z \cdot \mathrm{dn}\, z.$$

Naposletku, iz (41) dobija se diferencijaljenjem

$$\mathrm{dn}\, z \cdot (\mathrm{dn}\, z)' + k^2 \,\mathrm{sn}\, z \cdot (\mathrm{sn}\, z)' = 0,$$

odakle je

(45) $$(\mathrm{dn}\, z)' = -k^2 \,\mathrm{sn}\, z \cdot \mathrm{cn}\, z.$$

Obrasci (43), (44), (45) uopštavaju elementarne obrasce za izvode funkcija $\sin z$ i $\cos z$, na koje se svode za $k = 0$, a to su obrasci

$$(\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z.$$

Druge veze između $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$, koje takođe uopštavaju slične veze između osnovnih trigonometrijskih funkcija, biće pokazane u daljim izlaganjima.

12. NEKOLIKE OSOBINE FUNKCIJE sn z

Za proučavanje osobina funkcije $\mathrm{sn}\, z$ polazne su tačke:

1^0 izraz te funkcije u obliku inverzije integrala (37):

2^0 opšti integral diferencijalne jednačine prvoga reda

(46) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}{(1-x^2)(1-k^2 x^2)},$$

koja nosi naziv Eulerove diferencijalne jednačine i koja se može integraliti na dva načina: kvadraturama i algebarskim operacijama.

Napisana u obliku

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{47}$$

jednačina (46) ima za opšti integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}+C. \tag{48}$$

Sa druge strane, Euler je našao da se njen opšti integral može izraziti i u algebarskom obliku

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}-y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C'. \tag{49}$$

Slučaj je sličan onome sa prostijom diferencijalnom jednačinom

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1-y^2}{1-x^2}$$

napisanom u obliku

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

čiji se opšti integral može napisati u dva razna oblika

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+C$$

tj.

$$\arcsin x=\arcsin y+C$$

i

$$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=C',$$

o čemu je lako uveriti se diferencijaljenjem jedne i druge od dveju poslednjih jednačina.

Pomoću jednačine (49) dokazuje se *da je* $\operatorname{sn} z$ *uniformna funkcija promenljive* z. Jer kad ne bi bila takva, ona bi za datu vrednost z (izuzimajući pojedine, specijalne vrednosti z) imala više od jedne vrednosti. Neka su x i y dve takve vrednosti, što odgovaraju jednome istome z i menjaju se sa ovom. Prema jednačini (37), koju zadovoljava funkcija $\operatorname{sn} z$, tada bi moralo biti

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{50}$$

iz čega se diferencijaljenjem vidi da x i y moraju zadovoljavati jednačinu (47), a prema tome i jednačinu (49), kad se u ovoj bude podesno izabrala konstanta C'. A ova je određena time što je jednačina (50) zadovoljena za $x=0$, $y=0$ pa dakle tako mora biti i sa jednačinom (49), što daje $C'=0$. A tada je prema istoj jednačini (49)

$$x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}-y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=0,$$

iz čega se dobija da je

$$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}. \tag{51}$$

Poređenjem jednačina (47) i (51) dobija se da je

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

prema čemu je integracijom

$$y=ax, \tag{52}$$

gde je a integraciona konstanta. Smenom te vrednosti y u jednačini (51) nalazi se da je

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{a}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-k^2a^2x^2)}},$$

pa, pošto a ne zavisi od x, to može biti samo za $a=1$. Iz (52) tada se zaključuje da je $y=x$, tj. da se pretpostavljene dve vrednosti funkcije sn z među sobom poklapaju, i prema tome funkcija je uniformna. Ona dakle nema kritičkih tačaka.

A jednačina (42) pokazuje da funkcija $u=\operatorname{sn} z$, kao integral te jednačine, nema ni esencijalnih tačaka. To sleduje iz poznatih stavova iz analitičke teorije diferencijalnih jednačina prvoga reda, a ponaosob iz stava prema kome, kad je u jednačini

$$\frac{du}{dz}=\varphi(z, u)$$

funkcija φ za jedan dati par vrednosti $z=\alpha$, $u=\beta$ holomorfna, tačka (α, β) je obična tačka za integral u koji za $z=\alpha$ dobija vrednost $u=\beta$.

Pošto sn z, kao dvoperiodična funkcija, ne može, prema stavu VI, biti cela funkcija, a nema ni kritičkih ni esencijalnih tačaka, to ona mora imati polova, pa je prema tome to *meromorfna funkcija* promenljive z.

Iz jednačine (42), koju zadovoljava $u=\operatorname{sn} z$, vidi se *da je* sn z *neparna funkcija* promenljive z. Jer je ta jednačina zadovoljena kad se z smeni sa $-z$, a u sa $-u$.

Kao što je napred nađeno, *funkcija* sn z *ima dve osnovne, nesvodljive periode*

(53) $$\omega_1 = 4\,K \text{ i } \omega_2 = 2\,i\,K',$$

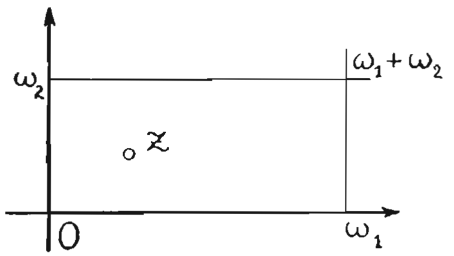
gde su K *i* K' *realni određeni integrali:*

(54) $$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2\,u^2)}},$$

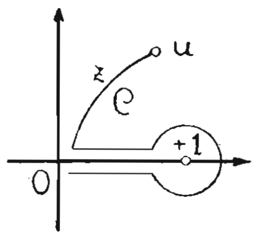
(55) $$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)\,(1-k^2\,u^2)}}.$$

Stalan broj k, koji leži između O i 1, nazvan je *moduo* funkcije sn z, kao što se vidi, *periode* ω_1 *u* ω_2 *su određene funkcije toga modula.*

Osnovni paralelogram funkcije sn z je pravougaonik čija su temena tačke O, $\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ (sl. 12).



Sl. 12



Sl. 13

Pošto je sn z uniformna funkcija, to ona za jednu datu vrednost z ima samo jednu, i to tačno određenu vrednost $u = \beta$. Ali iz jednačine (37) nalazi se *da ona tu istu vrednost* β *dobija za dve vrednosti* z *koje nisu jedna drugoj homologe.*

Jer, kad se integracija, označena u obrascu (37), izvrši po putanji C' sastavljenoj iz zamke što polazeći iz tačke O, opkoljava tačku $u = +1$ (sl. 13), i direktne putanje C od O do u, integral kad se stigne u tačku O ima za vrednost $2K$, ali se u tu tačku stiže sa promenjenom determinacijom funkcije pod integralnim znakom, tako da će se u tačku u stići sa vrednošću $2K - z$ istoga integrala. Celokupna putanja $C' + C$ daje, dakle, za integral vrednost $2K - z$, dok putanja C daje vrednost z. Pa pošto obe putanje dovode do iste tačke u, to *funkcija* $u = \text{sn}\,z$ *ima tu osobinu da*

(56) $$\text{sn}\,(2\,K - z) = \sin z,$$

a to je osobina slična onoj što važi za $\sin z$, da je

$$\sin(\pi - z) = \sin z.$$

Kad dakle funkcija sn z *dobije jednu vrednost* β *za* $z=\alpha$ *ona tu istu vrednost dobija i za* $z'=2K-\alpha$.

Tačke z i z' uopšte (tj. kad je tačka z proizvoljna) nisu jedna drugoj homologe, jer se ne svode jedna na drugu dodavanjem ili oduzimanjem multipla perioda. One su različite među sobom, pa se ili obe nalaze u osnovnom paralelogramu perioda u kome je z, ili tačka z' ima svoju homologu u tome paralelogramu, pošto se dodavanjem ili oduzimanjem perioda z' može dovesti u koji se hoće paralelogram.

Prema tome, kad funkcija sn z dobije jednu datu vrednost β za kakvu vrednost $z=\alpha$, ona tu istu vrednost β dobija i za beskrajno mnogo vrednosti z, a to su:

1° sve homologe vrednosti α, tj. vrednosti

$$z=\alpha+4mK+2niK',$$

gde su m i n ma kakvi, pozitivni ili negativni, celi brojevi;

2° vrednost

$$z'=2K-\alpha;$$

3° sve homologe vrednosti z', tj. vrednosti

$$z''=z'+4mK+2niK'.$$

Kad je tačka α u osnovnom paralelogramu perioda, onda, ako to nije slučaj i sa odgovarajućom tačkom z', jedna će se njena homologa z'' sigurno nalaziti u tome paralelogramu. Te se dve tačke α i z', odnosno α i z'', mogu i među sobom poklapati, kao što je slučaj npr. kad je $\alpha=K$.

13. NULE I POLOVI FUNKCIJE sn z

Jednačina (37) zadovoljena je za $z=0$, $u=0$, što znači da funkcija $u=\text{sn}\,z$ postaje jednaka nuli za $z=0$, a ona će to biti i za sve homologe vrednosti, tj. za

$$z=4mK+2niK'.$$

Ali, prema obrascu (56) ona će biti jednaka nuli i za vrednost $z=2K$. *Funkcija* sn z *ima, dakle, u osnovnom paralelogramu perioda dve nule*

$$z=0 \text{ i } z'=2K.$$

Kad se tim dvema nulama pridadu multipli $4mK$ realne periode funkcije, dobija se *beskrajni niz njenih pozitivnih i negativnih realnih nula, koje se sve mogu izraziti opštim obrascem*

$$z=2mK.$$

A kad se ovima pridadu multipli $2niK'$ imaginarne periode, dobija se *beskrajni niz imaginarnih nula koje se sve izražavaju opštim obrascem*

$$z' = 2mK + 2niK'.$$

Sve su te nule *proste*, jer kad za jednu vrednost z bude $u = 0$, izvod

$$u'(z) = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \tag{57}$$

dobija od nule različnu vrednost ± 1. Pa pošto su nule proste, to *funkcija menja znak pri prolasku kroz svaku svoju realnu nulu.*

Po svojim realnim nulama $\operatorname{sn} z$ pokazuje sličnost sa $\sin z$: i ova funkcija ima beskrajno mnogo nula, koje su sve multipli poluperiode π, i sve su proste. Ali, dok $\sin z$ ima samo realne nule, $\operatorname{sn} z$ ih ima i beskrajno mnogo imaginarnih.

Potražimo polove funkcije $\operatorname{sn} z$. Kad se u obrascu (37) stavi na desnoj strani da je $u = +\infty$, nalazi se da će jedan pol α funkcije biti

$$\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

što se može napisati u obliku

$$\alpha = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} + \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty}.$$

Prvi integral ima za vrednost K, drugi $-iK'$, a treći se može izračunati kad se u njemu izvrši smena

$$u = \frac{1}{kv}, \quad du = -\frac{dv}{kv^2} \tag{58}$$

koja taj integral pretvara u

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = -K,$$

pa se nalazi da je

$$\alpha = K - iK' - K = -iK' = -\frac{\omega_2}{2}.$$

A pošto je funkcija u neparna, to je i vrednost

$$\alpha' = iK' = \frac{\omega_2}{2}$$

jedan njen pol. Sa druge strane, prema obrascu (56), nalazi se da će i $2K - iK'$ biti jedan pol funkcije. Pa pošto će ona ostati pol i kad joj se doda perioda $\omega_2 = 2\,iK'$, to će i $\alpha'' = 2\,K + iK'$ biti takođe pol. Pa pošto se obe vrednosti α' i α'' nalaze u osnovnom paralelogramu perioda, to se zaključuje da:

Funkcija $\operatorname{sn} z$ *ima u osnovnom paralelogramu perioda dva pola, oba imaginarna, a to su vrednosti*

$$iK' = \frac{\omega_2}{2} \quad \text{i} \quad 2\,K + iK' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,.$$

Dodavanjem multipla perioda

$$4\,mK + 2\,niK'$$

dobija se beskrajan niz polova funkcije, koji su svi imaginarni. *Funkcija* $\operatorname{sn} z$ *ostaje, dakle, konačna za sve realne vrednosti* z.

Svi su polovi funkcije $\operatorname{sn} z$ *prvoga reda*, jer kad se u jednačini (57) izvrši smena (58), ona postaje

$$v' = -\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)};$$

svaki pol funkcije u je nula funkcije v, a za jednu takvu nulu dobija se za v' vrednost ± 1 različna od nule.

Potražimo ostatke funkcije $\operatorname{sn} z$ za jedan ma koji njen pol $z = \alpha$. Ostatak B je granična vrednost kojoj teži izraz:

$$(z-\alpha)\,u(z) = \frac{z-\alpha}{\dfrac{1}{u}} \quad \text{za } z \to \alpha.$$

Za $z = \alpha$ ta se vrednost javlja u prividno neodređenom obliku $\frac{0}{0}$, ali se primenom L'Hospitalovog pravila nalazi da je ona

$$B = \frac{1}{\dfrac{u'}{u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{u^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{u^2}-k^2\right)}} = \pm\frac{1}{k}\,.$$

Ostatak funkcije $\operatorname{sn} z$ *za ma koji njen pol ima, dakle, za vrednost ili* $-\frac{1}{k}$ *ili* $+\frac{1}{k}$.

14. VREDNOSTI z ZA KOJE $\operatorname{sn} z$ DOBIJA VREDNOSTI ± 1 I $\pm \frac{1}{k}$

Prema obrascu (37) z *ima realne vrednosti samo dok se* u *menja od* -1 *do* $+1$. Za ostale vrednosti u ili je U negativno, ili, kad je pozitivno, integral z je ipak sastavljen iz zbira jednog realnog i jednoga čisto imaginarnog integrala.

Potražimo vrednosti z za koje će u dostizati svoje krajnje realne vrednosti ± 1.

1° Vrednost z za koju je $u = -1$ data je obrascem

$$z = \int_0^{-1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = -K = -\frac{\omega_1}{4}.$$

Ta tačka nije sadržana u osnovnom paralelogramu perioda (p), ali je u ovome sadržana njena homologa tačka $3K$, za koju u takođe dobija vrednost -1. Tu istu vrednost -1 dobija u i za drugu homologu tačku $3K + 2iK'$, takođe sadržanu u (p). Obrazac (56) ne dovodi ni do koje nove tačke z koja bi bila sadržana u (p) i za koju bi u imalo istu vrednost -1.

Funkcija sn z *dobija, dakle, vrednost* -1 *za dve tačke sadržane u osnovnom paralelogramu perioda, a to su tačke* $3K$ *i* $3K + 2iK'$.

2° Vrednost z za koju je $z = +1$ data je obrascem

$$z = \int_0^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = K = \frac{\omega_1}{4},$$

a ta je tačka sadržana u (p), kao i njena homologa $K + 2iK'$. Obrazac (56) ne dovodi do koje nove takve tačke koja bi bila sadržana u (p).

Funkcija sn z *dobija, dakle, vrednost* $+1$ *za dve tačke sadržane u osnovnom paralelogramu perioda, a to su tačke* K *i* $K + 2iK'$.

Vrednost z, za koju će u dobiti jednu ili drugu od vrednosti $\pm \frac{1}{k}$, dobija se kad se u obrascu (37) stavi kao gornja granica integrala $u = -\frac{1}{k}$ ili $u = +\frac{1}{k}$. I tada se nalazi da:

3° Vrednost z za koju je $u = -\frac{1}{k}$ data je obrascem

$$z = \int_0^{-\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = -\int_0^{\frac{1}{k}} = -\left(\int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} \right)$$

$$= -K + iK' = -\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{4},$$

koja vrednost nije sadržana u (p), ali je u ovome sadržana njena homologa

$3K+iK'$, za koju u dobija istu vrednost $-\frac{1}{k}$. Obrazac (56) ne dovodi ni do čega novog, tako da:

Funkcija $\operatorname{sn} z$ *dobija vrednost* $-\frac{1}{k}$ *za jednu tačku sadržanu u osnovnom paralelogramu perioda, a to je tačka* $3K+iK'$.

4° vrednost z za koju je $u=+\frac{1}{k}$ data je obrascem

$$z=\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\int_0^1+\int_1^{\frac{1}{k}}=K-iK'.$$

Ta tačka nije sadržana u (p), ali je u ovome sadržana njena homologa $K+iK'$, za koju je takođe $u=\frac{1}{k}$. Obrazac (56) ne dovodi ni do čega novog, tako da:

Funkcija $\operatorname{sn} z$ *dobija vrednost* $\frac{1}{k}$ *u jednoj tački sadržanoj u osnovnom paralelogramu perioda, a to je tačka* $K+iK'$.

Kao što se vidi, sve vrednosti z za koje $\operatorname{sn} z$ dobija vrednosti $\pm\frac{1}{k}$ imaginarne su.

15. EFEKAT DODATKA POLUPERIODA VREDNOSTI PROMENLJIVE z

Prema osnovnoj osobini funkcije $\operatorname{sn} z$, ona se ne menja kad se vrednosti z doda jedna ili druga perioda ω_1 ili ω_2. Da vidimo šta biva od funkcije kad se vrednosti z doda jedna ili druga od poluperioda

$$\frac{\omega_1}{2}=2K, \qquad \frac{\omega_2}{2}=iK'.$$

Iz obrasca (56) dobija se da je

$$\operatorname{sn}(2K+z)=-\operatorname{sn} z$$

što znači da je

$$\operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right)=-\operatorname{sn} z.$$

Kad se, dakle, u funkciji $\operatorname{sn} z$ *vrednosti* z *doda realna poluperioda, funkcija zadržava istu vrednost, ali menja znak.*

Da bi se videla posledica dodatka poluperiode $\frac{\omega_2}{2}$, primetimo, da prema poznatom integralnom obrascu, za svaki integral je

$$\int_a^b - \int_a^c = \int_c^b .$$

Uzevši za funkciju pod integralnim znakom izraz

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

a za a, b, c vrednosti $a=o$, $b=u$, $c=\infty$, dobija se da je

$$\int_0^u \frac{du}{W(u)} - \int_0^\infty \frac{du}{W(u)} = \int_\infty^u \frac{du}{W(u)} . \tag{59}$$

Kad se u integralu na desnoj strani izvrši smena (58), on postaje

$$-\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}},$$

pa pošto pravi integral na levoj strani ima za vrednost z, a drugi vrednost $-iK'$, to jednačina (59) postaje

$$z + iK' = -\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}}$$

iz čega se inverzijom vidi da je

$$v = \operatorname{sn}(-z - iK') = -\operatorname{sn}(z + iK') = -\operatorname{sn}\left(z + \frac{\omega^2}{2}\right);$$

pa pošto je

$$u = \operatorname{sn} z, \qquad v = \frac{1}{ku},$$

to se dobija obrazac

$$\operatorname{sn}\left(z + u\,\frac{\omega_2}{2}\right) = -\frac{1}{k \operatorname{sn} z}$$

koji pokazuje da:

Kad se u funkciji $\operatorname{sn} z$ *vrednosti* z *doda imaginarna poluperioda, vrednost funkcije postaje* $-\dfrac{1}{k \operatorname{sn} z}$.

16. UNIFORMNOST FUNKCIJA cn z i dn z

Posmatrajmo funkciju

$$v = \Phi(u), \tag{60}$$

gde je Φ kakva algebarska funkcija promenljive u, inversije integrala

(61) $$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}.$$

Pošto, kao što je pokazano, u nema kritičkih tačaka, neće ih imati ni $\Phi(u)$ kad god je Φ racionalna funkcija. Ali ih *može* imati kad je Φ kakva algebarska iracionalna funkcija, premda to *ne mora* uvek biti: ima slučajeva kad je v *uniformna* funkcija promenljive z, pored svega toga što, smatrana kao funkcija promenljive u, ista funkcija *ima kritičkih tačaka.*

Takav se slučaj javlja npr. kad je

(62) $$v = \sqrt{a^2 - u^2},$$

gde je a konstanta koja ispunjava izvesne pogodbe. Smatrana kao funkcija promenljive u, funkcija v ima dve kritičke tačke $u=a$ i $u=-a$. Neka je λ jedan koren jednačine

(63) $$u(z)^2 - a^2 = 0,$$

pa pretpostavimo da je konstanta a takva, da je za njoj odgovarajući koren λ jednačine (63) izraz $u(\lambda + x)$ *parna funkcija promenljive* x, *koja ima* $x=0$ *kao svoju običnu tačku.* Tada se ta funkcija, za vrednosti x u blizini nule, može razviti u red koji će sadržati samo parne stepene promenljive x

$$u(\lambda + x) = A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \cdots$$

što za $x=0$ daje

$$A_0 = u(\lambda), \qquad A_0^2 = u(\lambda)^2 = a^2,$$

pošto je λ koren jednačine (63). Prema tome je

(64) $$[u(\lambda + x)]^2 - a^2 = x^2 (B_2 + B_4 x^2 + B_6 x^4 + \cdots).$$

Ako se tada za x uzme vrednost $x = z - \lambda$, jednačina (64) postaje

$$u(z)^2 - a^2 = (z-\lambda)^2 [B_2 + B_4 (z-\lambda)^2 + B_6 (z-\lambda)^4 + \cdots],$$

a prema tome je

(65) $$v = \sqrt{a^2 - u^2} = (z-\lambda)\, \Psi(z),$$

gde je $\Psi(z)$ funkcija konačna i različita od nule za $z=\lambda$.

Jednačina (65) pokazuje da vrednost $z=\lambda$ nije kritička kačka funkcije v, već jedna njena obična nula. A ako što se vidi, takav slučaj uvek nastupa kad su ispunjeni ovi uslovi:

1° koren $z=\lambda$ jednačine (63) je obična tačka za funkciju $u(z)$;

2° izraz $u(\lambda + x)$ je parna funkcija promenljive x.

A očevidno je da bi to sve važilo i onda, kad bi jedan ili više prvih koeficijenata B_2, B_4, $B_6, \ldots$ na desnoj strani jednačine (64) bili jednaki nuli; i tada bi se opet imao kao zajednički činilac paran stepen promenljive x, pa bi se imao isti zaključak.

Primenimo sad to na funkciju

$$v = \operatorname{cn} z = \sqrt{1-u^2}.$$

Jednačina (63) je

$$1-\operatorname{sn}^2 z = 0$$

i ona ima u osnovnom paralelogramu perioda za korene vrednosti $\lambda = K$ i $\lambda = K + 2\,iK'$ od kojih se druga može smatrati kao homologa vrednosti K, pa je, dakle, dovoljno ispitati samo koren $\lambda = K$.

Smenom $z = K + x$ u jednačini

$$\operatorname{sn}(2\,K - z) = \operatorname{sn} z$$

dobija se da je

$$\operatorname{sn}(K-x) = \operatorname{sn}(K+x),$$

što pokazuje da, kad se uzme za λ vrednost K, izraz $\operatorname{sn}(\lambda + x)$ je parna funkcija promenljive x, pa kako je $z = K$ obična tačka za $\operatorname{sn} z$, to su oba gornja uslova 1° i 2° ispunjena, i prema tome za funkciju $v = \operatorname{cn} z$ vrednost $z = K$ nije kritička tačka. Ta funkcija ima, dakle, kao singularitete samo polove, tako da je i ona, kao i $\operatorname{sn} z$, *meromorfna* funkcija promenljive z.

Izraz

$$\pm\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}$$

smatran kao funkcija promenljive $u = \operatorname{sn} z$ je neosporno multiformna funkcija te promenljive, ali, smatran kao funkcija promenljive z, on je uniformna funkcija ove promenljive. On, sa svojim dvojnim znakom $\pm$ ne predstavlja dve determinacije jedne iste multiformne funkcije, već dve jednu od druge različne funkcije $\operatorname{cn} z$ i $-\operatorname{cn} z$, kao što je to slučaj sa izrazom $\pm z^3$, i kao što je takođe slučaj sa izrazom $\pm\sqrt{1-\sin^2 z}$. Ovu poslednju funkciju obuhvata gornji zaključak o nepostojanju kritičkih tačaka, i njoj za λ odgovara vrednost $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$.

Primenimo sad gornje opšte zaključke na funkciju

$$v = \operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 z} = \sqrt{1-k^2 u^2}$$

napisanu u obliku

$$v = k\sqrt{\frac{1}{k^2} - u^2}.$$

Jednačina (63) je

$$\mathrm{sn}^2 z - \frac{1}{k^2} = 0$$

i ima u osnovnom paralelogramu perioda za korene vrednosti $K+iK'$ i $3K+ +iK'$. Pošto je $2iK'$ perioda funkcije sn z, biće

$$\mathrm{sn}(2K-z) = \mathrm{sn}(2K+2iK'-z) = \mathrm{sn}\, z,$$

tako da kad se za λ uzme $K+iK'$, biće

$$\mathrm{sn}(2\lambda - z) = \mathrm{sn}\, z,$$

pa se smenom $z=\lambda+x$ dobija da je

$$\mathrm{sn}(\lambda+x) = \mathrm{sn}(\lambda-x),$$

što pokazuje da je izraz $\mathrm{sn}(\lambda+x)$ parna funkcija promenljive x.

Tako isto, pošto su $4K$ i $2iK'$ periode funkcije sn z, to ako se za koren λ uzme $3K+iK'$ biće

$$\mathrm{sn}(6K+2iK'-z) = \mathrm{sn}(2\lambda-z) = \mathrm{sn}\, z,$$

tako da je opet izraz sn $(\lambda+x)$ parna funkcija promenljive x.

To pokazuje da su uslovi 1° i 2° ispunjeni i da koreni λ nisu za funkciju v kritičke tačke. I funkcija dn z ima, dakle, kao singularitete samo polove, tako da je i ona *meromorfna* funkcija promenljive z.

Izraz

$$\pm\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 z}$$

ne predstavlja, dakle, kao ni u slučaju funkcije cn z, dve determinacije jedne iste funkcije, već dve različne funkcije $-$dn z i $+$dn z.

17. PERIODE FUNKCIJA cn z i dn z

Posmatrajmo opet funkciju

$$v = \Phi(u),$$

gde je Φ data algebarska funkcija promenljive u, inverzije integrala (61).

Moglo bi na prvi pogled izgledati da, pošto u ima za osnovne periode vrednosti

$$\omega_1 = 4K \quad \text{i} \quad \omega_2 = 2iK',$$

te će iste vrednosti imati za periode i funkcija v. I to će odista tako biti kad god je Φ racionalna funkcija promenljive u. Ali to ne mora biti kad je Φ iracionalna algebarska funkcija sa više determinacija, pa ma ona i bila uniformna funkcija promenljive z.

Prema napred izloženom opštem postupku za određivanje perioda funkcija što zavise od jedne promenljive z, vidi se da osnovne periode funkcije v zavise:

1° od vrednosti integrala (61) uzetog duž kontura u ravni promenljive u opisanih oko kritičkih tačaka funkcije

$$\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)};$$

2° od promena determinacija toga izraza po obilasku promenljive u oko tih kritičkih tačaka;

3° od promena determinacija funkcije $\Phi(u)$ pri tim obilascima.

Posmatrajmo najpre funkciju

$$v=\sqrt{1-u^2}=\operatorname{cn} z,$$

gde je u inverzija integrala (61). Kao što je napred pokazano, kad se integracija izvrši duž putanje označene na sl. 13, pošavši iz O sa determinacijom $(+)$ kvadratnog korena, stiže se ponovo u O sa vrednošću $2K$ integrala, a sa determinacijom $(-)$ kvadratnog korena: u tačku u se, dakle, stiže sa vrednošću $2K-z$ integrala.

Ako se sad funkcija v posmatra, ne kao funkcija promenljive z, već kao funkcija promenljive u, ona ima $u=1$ kao kritičku tačku i pri obilasku oko te tačke prelazi od determinacije $+\sqrt{1-u^2}$ na determinaciju $-\sqrt{1-u^2}$. Ako se, dakle, pri odredbi integrala (61) ide direktnom putanjom C od tačke O do u, funkcija v će imati za vrednost

$$v_0=+\sqrt{1-u^2}=+\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z};$$

a ako se ide najpre konturom sl. 13, pa zatim direktnim putem do u, funkcija v će imati za vrednost

$$v_1=-\sqrt{1-\operatorname{sn}^2(2K-z)}.$$

Pa pošto je

$$v_0=\operatorname{cn} z, \qquad v_1=-\operatorname{cn}(2K-z),$$

a funkcija $v=\operatorname{cn} z$ je uniformna, pa dakle obe putanje moraju dovesti do jedne iste vrednosti v, to je $v_1=v_0$ tj.

$$\operatorname{cn}(2K-z)=-\operatorname{cn} z.$$

Kad se u tome obrascu izvrši smena

$$z=2K+x,$$

on postaje

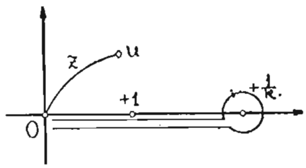
$$\operatorname{cn} x=-\operatorname{cn}(2K+x),$$

pa kad se ta smena još jednom ponovi, tj. smeni se x sa $2K+x$, dobija se da je

$$\operatorname{cn}(x+4K)=\operatorname{cn} x,$$

iz čega se vidi da $\operatorname{cn} x$ ima za periodu $4K$.

Posmatrajmo sad integral (61) uzet duž konture označene na sl. 14. Napred je pokazano da, kad se integracija izvrši duž takve konture, pošavši iz O sa determinacijom (+) kvadratnog korena, stiže se ponovo u O sa vrednošću $2K-2iK'$ integrala, a sa determinacijom (—) kvadratnog korena pod integralnim znakom; u tačku u se, dakle, stiže sa vrednošću $2K-2iK'-z$ integrala.



Sl. 14

Sa druge strane, ako se v smatra kao funkcija promenljive u, ona nema tačku $u=\frac{1}{k}$ kao kritičku tačku (jer su joj kritičke tačke samo $u=\pm 1$), pa, dakle, po obilasku promenljive u oko tačke $u=\frac{1}{k}$ funkcija v ne menja determinaciju. Ako se, dakle, pri odredbi integrala (61), ide direktnom putanjom C od tačke O do u, funkcija v će imati za vrednost

$$v_0=+\sqrt{1-u^2}=+\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}=\operatorname{cn} z;$$

a ako se ide najpre konturom sl. 14, pa zatim direktnom putanjom do u, stiže se u u sa vrednošću

$$v_1=+\sqrt{1-\operatorname{sn}^2(2K-2iK'-z)}.$$

Pa pošto je

$$v_1=\operatorname{cn}(2K-2iK'-z)=\operatorname{cn}(z-2K+2iK'),$$

to, ako se vrednosti z doda $4K$ (što ne menja vrednost funkcije, pošto je $4K$ perioda) dobija se da je

$$v_1=\operatorname{cn}(z+2K+2iK').$$

A kako je $v=\operatorname{cn} z$ uniformna funkcija, to sve putanje moraju dovoditi do jedne iste vrednosti v, pa je, dakle, $v_1=v_0$, a iz toga je

$$\operatorname{cn}(z+2K+2iK')=\operatorname{cn} z,$$

iz čega se vidi da je $2K+2iK'$ jedna osnovna perioda funkcije $\operatorname{cn} z$.

Funkcija cn z *ima, dakle, dve osnovne periode, jednu realnu*

$$\omega_1 = 4K$$

i jednu kompleksnu

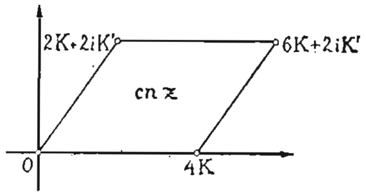
$$\omega_2 = 2K + 2iK'.$$

Njen osnovni paralelogram perioda ima oblik sl. 15.

Uočimo sad funkciju

$$v = \sqrt{1 - k^2 u^2} = \operatorname{dn} z,$$

gde je opet u inverzija integrala (61).



Sl. 15

Kao što je napred pokazano, kad se integracija izvrši duž putanje sl. 13, pošavši sa determinacijom (+) kvadratnog korena, stiže se ponovo u O sa vrednošću $2K$ integrala, a sa determinacijom (—) kvadratnog korena pod integralnim znakom; u tačku u se stiže sa vrednošću $2K - z$ integrala (61).

Pa kako, kad se v smatra kao funkcija promenljive u, ona nema tačku $u = +1$ kao kritičku tačku, to po obilasku oko te tačke ona ne menja svoju polaznu determinaciju $+\sqrt{1-k^2u^2}$. Ako se, dakle, ide direktnom putanjom od O do u, funkcija v će imati za vrednost

(66) $$v_0 = +\sqrt{1-k^2u^2} = +\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 z} = \operatorname{dn} z;$$

a ako se ide najpre konturom sl. 13, pa zatim direktnom putanjom C do u, ona će imati za vrednost

$$v_1 = +\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 (2K - z)} = \operatorname{dn}(2K - z),$$

pa pošto je funkcija dn z uniformna, mora biti $v_1 = v_0$, tj.

$$\operatorname{dn}(2K - z) = \operatorname{dn} z.$$

Kad se u tome obrascu smeni z sa $-z$, dobija se, pošto je dn z parna funkcija, da je

$$\operatorname{dn}(z + 2K) = \operatorname{dn} z$$

što pokazuje da je $2K$ perioda funkcije dn z.

Posmatrajmo sad integral (61) uzet najpre duž konture sl. 14. Kao što je pokazano, pošavši iz O sa determinacijom (+) kvadratnog korena, stiže se ponovo u O sa vrednošću $2K-2iK'$ integrala, a sa determinacijom (—) kvadratnog korena; u tačku u stiže se sa vrednošću $2K-2iK'-z$ istog integrala.

Sa druge strane, kad se v smatra kao funkcija promenljive u, ona ima tačku $u=\frac{1}{k}$ kao kritičku tačku, pa dakle po obilasku promenljive u oko te tačke funkcija v menja determinaciju. Ako se, prema tome, ide direktnom puanjom od O do u, funkcija v će imati za vrednost (66), a ako se najpre ide konturom sl. 14, pa zatim direktnom putanjom do u, stiže se u u sa vrednošću

$$v_1=-\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(2K-2iK'-z)}=-\operatorname{dn}(2K-2iK'-z),$$

pa pošto mora biti $v_1=v_0$ (jer je funkcija u uniformna), to je

$$\operatorname{dn}(2K-2iK'-z)=-\operatorname{dn}z;$$

a pošto je $2K$ jedna perioda funkcije, to se dobija

$$\operatorname{dn}(-z-2iK')=-\operatorname{dn}z,$$

ili, pošto je dn z parna funkcija

$$\operatorname{dn}(z+2iK')=-\operatorname{dn}z.$$

Ako se sad vrednosti z doda $2iK'$, poslednji obrazac daje

$$\operatorname{dn}(z+4iK')=-\operatorname{dn}(z+2iK')=\operatorname{dn}z$$

što pokazuje da je $4iK'$ perioda funkcije.

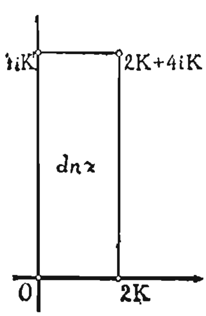
Funkcija dn z *ima dakle dve osnovne periode, jednu realnu*

$$\omega_1=2K$$

i jednu čisto imaginarnu

$$\omega_2=4iK'.$$

Njen osnovni paralelogram perioda ima oblik sl. 16.



Sl. 16

18. NULE I POLOVI FUNKCIJE cn z

Za proučavanje funkcije cn z služe kao polazna tačka njene veze sa funkcijom sn z iskazane obrascima

$$\text{cn}\, z = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z}, \tag{67}$$

$$(\text{cn}\, z)' = -\text{sn}\, z \cdot \text{dn}\, z. \tag{68}$$

Funkcija cn z postaje jednaka nuli za vrednosti z za koje je

$$\text{sn}\, z = -1 \quad \text{i} \quad \text{sn}\, z = +1,$$

a takve vrednosti, sadržane u osnovnom paralelogramu perioda funkcije, jesu

$$z = 3\,K \quad \text{i} \quad z = K.$$

Kad se tim dvema vrednostima pridadu multipli realne periode $4\,K$ funkcije, dobija se *beskrajni niz njenih pozitivnih i negativnih realnih nula koje se sve mogu izraziti opštim obrascem*

$$z = (2\,m + 1)\,K.$$

A kad se ovima pridadu multipli imaginarne periode $2\,K + 2\,iK'$, dobija se *beskrajni niz imaginarnih nula funkcije koje se sve izražavaju opštim obrascem*

$$z' = (2\,m + 1)\,K + 2\,niK'.$$

Sve su te nule *proste*, jer je za svaku od njih

$$\text{sn}\, z = \pm 1, \quad \text{dn}\, z = \pm\sqrt{1 - k^2},$$

pa dakle izvod

$$\text{cn}'\, z = -\text{sn}\, z \cdot \text{dn}\, z$$

ima od nule različnu vrednost $\pm\sqrt{1 - k^2}$.

To pokazuje u isto vreme da *funkcija* cn z *menja znak pri svakom prolasku kroz jednu svoju realnu nulu.*

Iz obrasca (67) jasno je da cn z *ima iste polove i istoga reda kao i funkcija* $\text{sn}^2 z$, jer se za velike vrednosti sn z potkoreni izraz ponaša kao $\text{sn}^2 z$, a sam kvadratni koren kao sn z. Svi su polovi, prema tome, *imaginarni i prosti.* Funkcija cn z *ostaje konačna za sve realne vrednosti* z.

Iz istih razloga i ostaci funkcije cn z za svaki njen pol $z = a$ su jedna od vrednosti $-\dfrac{1}{k}$ ili $+\dfrac{1}{k}$, jer je granična vrednost izraza

$$(z - a) \cdot \text{cn}\, z \qquad \text{za} \qquad z = a$$

ista kao i za izraz

$$(z - a) \cdot \text{sn}\, z.$$

Primetimo još i to da, pošto se sve realne vrednosti funkcije $\operatorname{sn} z$ nalaze između -1 i $+1$, prema obrascu (67) tako će isto biti i sa funkcijom $\operatorname{sn} z$.

Vrednosti z, za koje $\operatorname{cn} z$ dobija svoje krajnje vrednosti ± 1, jesu one za koje je $\operatorname{sn} z = 0$, a to su u osnovnom paralelogramu perioda vrednosti 0 i $2K$.

19. NULE I POLOVI FUNKCIJE dn z

I za proučavanje osobina funkcije $\operatorname{dn} z$ polazna je tačka njena veza sa funkcijom $\operatorname{sn} z$, izražena relacijama

$$\operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}, \tag{69}$$

$$(\operatorname{dn} z)' = -k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z. \tag{70}$$

Funkcija postaje jednaka nuli za vrednosti z za koje je

$$\operatorname{sn} z = \pm \frac{1}{k},$$

a one od tih vrednosti, što su sadržane u njenom osnovnom paralelogramu perioda, jesu

$$\alpha = K + iK' \qquad \text{i} \qquad \alpha' = K + 3\,iK'.$$

Kad se tim nulama pridadu multipli $2\,mK + 4\,niK'$ njenih perioda $2K$ i $4\,iK'$, dobija se *beskrajan niz nula funkcije koje su sve imaginarne i izražene opštim obrascem*

$$\alpha = (2\,m + 1)\,K + (2\,n + 1)\,iK'.$$

Sve su te nule *proste*, jer za ma koju od njih je

$$\operatorname{sn} z = \pm \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}},$$

tako da izvod (70) ima od nule različnu vrednost $\pm\sqrt{k^2 - 1}$.

Iz obrasca (69) vidi se da $\operatorname{dn} z$ ima sve svoje polove iste kao i $\operatorname{sn} z$ i da su svi *prvoga reda*, jer se za velike vrednosti $\operatorname{sn} z$ potkoreni izraz (69) ponaša kao $k^2 \operatorname{sn}^2 z$. *Svi su polovi, dakle, imaginarni i prosti.* To pokazuje da *funkcija ostaje konačna za sve realne vrednosti z.*

Iz istih razloga i ostaci funkcije $\operatorname{dn} z$ za svaki njen pol $z = a$ su jedna od vrednosti ± 1, jer je granična vrednost izraza

$$(z - a) \cdot \operatorname{dn} z \qquad \text{za} \qquad z = a$$

jednaka jednoj ili drugoj od tih dveju vrednosti.

Pošto $\operatorname{dn} z$ nema realnih nula, a postaje jednaka jedinici za vrednosti z za koje je $\operatorname{sn} z = 0$, tj. za vrednosti

$$z = 0, \quad \pm 2K, \quad \pm 4K, \quad \pm 6K, \ldots$$

to kriva linija $y = \operatorname{dn} x$ ne preseca osovinu Ox. A pošto se za

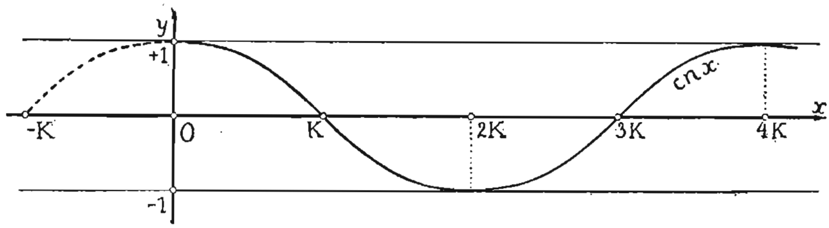
$$z = \pm K, \quad \pm 3K, \quad \pm 5K, \ldots$$

dobija kao krajnja donja granična vrednost funkcije broj $\sqrt{1-k^2}$, to je cela kriva sadržana u oblasti ravni xOy ograničenoj dvema pravama

$$y = 1 \quad \text{i} \quad y = \sqrt{1-k^2}.$$

20. KRIVE LINIJE KOJE PREDSTAVLJAJU OSNOVNE ELIPTIČKE FUNKCIJE

Iz svega što je dovde kazano može se sastaviti slika o oblicima krivih linija koje predstavljaju osnovne eliptičke funkcije. Ti su oblici predstavljeni na sl. 17, 18 i 19 i to u okviru jedne periode od $z = 0$ do $z = 4K$ za krive linije

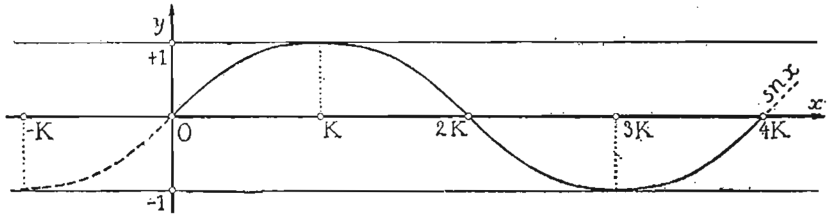


Sl. 17

(71) $$y = \operatorname{sn} x \quad \text{i} \quad y = \operatorname{cn} x,$$

a u okviru jedne periode od $z = 0$ do $z = 2K$ za krivu

(72) $$y = \operatorname{dn} x.$$



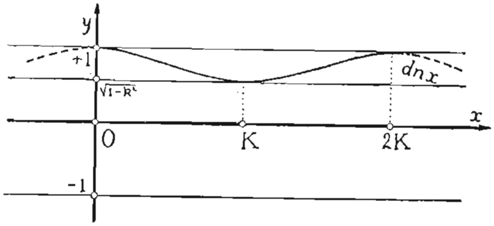
Sl. 18

Krive (71) jako podsećaju na krive

$$y = \sin x \quad \text{i} \quad y = \cos x$$

sa podesnom izabranom periodom. U tačkama u kojima je

$$y = -1, \quad y = 0, \quad y = +1,$$



Sl. 19.

krive (71) se tačno poklapaju sa krivama

$$y = \sin \frac{\pi x}{2K} \qquad \text{i} \qquad y = \cos \frac{\pi x}{2K} \tag{73}$$

koje takođe imaju za periodu $4K$.

Iste krive (71) i nisu ništa drugo do nešto deformisane krive (73). Ta deformacija je utoliko slabija, ukoliko se k manje razlikuje od nule. Kad je $k = 0$, krive (71) i (73) se tačno poklapaju.

21. MODULARNA TRANSFORMACIJA OSNOVNIH ELIPTIČKIH FUNKCIJA

Označimo sa

$$u_1 = \operatorname{sn}(k_1, z), \quad u_2 = \operatorname{sn}(k_2, z)$$

funkcije u definisane kao inverzije integrala

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

za dve razne vrednosti $k = k_1$ i $k = k_2$ modula k.

Opšti problem *modularne transformacije* funkcije $\operatorname{sn} z$ sastojao bi se u tome da se, znajući vezu

$$\varphi(k_1, k_2) = 0$$

između modula k_1 i k_2, odredi veza između odgovarajućih im funkcija u_1 i u_2.

Između specijalnih problema te vrste ovde će biti rešen jedan od najprostijih, poznat pod imenom *Landenove transformacije.* On se sastoji u tome *da se nađe veza između u_1 i u_2 kad su k_1 i k_2 vezani relacijom oblika*

$$k_1^2(1 + k_2) - 4k_2 = 0.$$

Kad se u jednačini

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

izvrši smena

$$u = \frac{(1+k')\,v}{1+k'\,v^2}, \tag{74}$$

gde su k i k' vezani relacijom

$$k^2 (1+k')^2 - 4\,k' = 0,$$

jednačina se pretvara u

$$dz = (1+k')\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2 v^2)}}$$

o čemu se uveravamo neposredno, izvršivši takvu smenu.

Ako se tada uzme za k vrednost k_1, a za k' vrednost k_2, funkcija u postaje u_1, a v postaje u_2. Sa druge strane, iz jednačine

$$dz = \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-k_1^2 u_1^2)}} = (1+k_2)\frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-k_2^2 u_2^2)}}$$

nalazi se inverzijom da je

$$u_1 = \operatorname{sn}(k_1, z),$$

$$u_2 = \operatorname{sn}\left(k_2, \frac{z}{1+k_2}\right).$$

Pa pošto su u i v vezani relacijom (74), ista će relacija vezivati u_1 i u_2, pa se iz toga izvodi stav:

Kad se u funkciji $\operatorname{sn}(k_1, z)$ *vrednost* k_1 *smeni drugom vrednošću* k_2, *koja je takva da je*

$$k_1^2 (1+k_2)^2 - 4\,k_2 = 0$$

između prvobitne i nove funkcije $\operatorname{sn}(k_1, z)$ *i* $\operatorname{sn}(k_2, z)$ *postoji veza*

$$\operatorname{sn}(k_1, z) = \frac{(1+k_2)\,v}{1+k_2\,v^2},$$

gde je

$$v = \operatorname{sn}\left(k_2, \frac{z}{1+k_2}\right).$$

Važnost stava leži u tome, što on daje mogućnost da se jedna data funkcija $\operatorname{sn} z$ izrazi pomoću druge čiji će moduo k biti različan od modula k date funkcije. Tako npr. funkcije

$$u = \operatorname{sn}\left(\frac{4}{5}, z\right),$$

$$v = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{4}, \frac{4z}{5}\right)$$

vezane su relacijom

$$u = \frac{5v}{4+v^2}.$$

Pomoću veza između funkcija

$$\operatorname{sn} z, \ \operatorname{cn} z, \ \operatorname{dn} z$$

lako je formulisati i odgovarajuće stavove za ostale dve eliptičke funkcije $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$.

22. DEGENERACIJE OSNOVNIH ELIPTIČKIH FUNKCIJA

Za specijalne vrednosti $k=0$ i $k=1$ modula k osnovne eliptičke funkcije svode se (degenerišu) na elementarne funkcije ili na konstantu. Tako, za $k=0$ integral

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{75}$$

što definiše funkciju $u = \operatorname{sn} z$, svodi se na integral

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u,$$

a odgovarajuća mu inverzija $\operatorname{sn} z$ svodi se na $\sin z$. Funkcija $\operatorname{sn} z$ svodi se tada na $\cos z$, a funkcija $\operatorname{dn} z$ na 1.

Za $k=1$ integral (75) se svodi na

$$z = \int_0^u \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u};$$

odgovarajuća funkcija $\operatorname{sn} z$ svodi se na prostoperiodičnu funkciju

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},$$

a funkcije $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$ na jednu istu prostoperiodičnu funkciju

$$\frac{2}{e^{2z}+e^{-2z}+2}.$$

Za sve ostale vrednosti k, što leže između 0 i 1, takvo je svođenje nemogućno i inverzija integrala (75) predstavlja jednu *sasvim novu transcendentnu funkciju, nesvodljivu ni na kakve kombinacije ograničenog broja elementarnih funkcija.*

Kao što je napred pokazano, krive linije

$$y=\operatorname{sn} x \qquad \text{i} \qquad y=\operatorname{cn} x$$

malo se razlikuju od krivih

$$y=\sin\frac{\pi x}{2K} \qquad \text{i} \qquad y=\cos\frac{\pi x}{2K}$$

sa kojima se tačno poklapaju u beskrajno mnogo tačaka i to u onima za koje je:

$$y=-1,\ y=0,\ y=+1.$$

Ta sličnost, kao i mnogobrojne druge sličnosti u osobinama tih osnovnih eliptičkih i trigonometrijskih funkcija, učinile su da su oni, što su stvorili teoriju eliptičkih funkcija, nazvali $\operatorname{sn} z$ "pseudosinus", a $\operatorname{cn} z$ "pseudokosinus". Funkcija $\operatorname{dn} z$, koja se za $k=0$ svodi na 1, bila je nazvana "pseudo-poluprečnik", jer sinus i kosinus predstavljaju poznate iz trigonometrije dužine za krug čiji je poluprečnik 1.

Ista je sličnost dala povoda i tome da se osnovne eliptičke funkcije definišu još i na ovaj način:

Kad se u obrascu (75) izvrši smena

$$u=\sin\varphi, \qquad du=\cos\varphi\cdot d\varphi,$$

integral (75) se pretvara u

$$z=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{76}$$

U specijalnom slučaju kad je $k=0$ dobija se da je $z=\varphi$; kad je moduo k različan od nule, φ se ne poklapa više sa z, već pokazuje izvesno odstupanje od te vrednosti, koje je utoliko veće ukoliko se k više razlikuje od nule.

Jacobi je promenljivu φ nazvao „amplitudom" promenljive z i to je označavao znakom

$$z=am\,\varphi.$$

Pa pošto je za $k=0$

$$\sin z = \sin \varphi, \quad \cos z = \cos \varphi,$$

to je za k različno od nule Jacobi označavao funkciju $\operatorname{sn} z$ sa $\sin am\, z$, a funkciju $\operatorname{cn} z$ sa $\cos am\, z$. Tek su docnije uvedene oznake $\operatorname{sn} z$ i $\operatorname{cn} z$.

23. ADICIONA TEOREMA ZA ELIPTIČKE FUNKCIJE

Ima bezbroj funkcija $f(z)$ za koje se $f(\alpha+\beta)$, za ma kakve vrednosti α i β, može izraziti kao *algebarska* funkcija izraza $f(\alpha)$, $f(\beta)$ i jednog ograničenog broja uzastopnih izvoda

$$f'(\alpha), \quad f''(\alpha), \ldots$$

$$f'(\beta), \quad f''(\beta), \ldots$$

Kad se ti izvodi i sami izražavaju kao algebarske funkcije izraza $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, onda se i $f(\alpha+\beta)$ izražava kao algebarska funkcija istih izraza $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

Kad jedna funkcija ispunjava uslov takve vrste, za nju se kaže da ima svoju *adicionu teoremu:* ova iskazuje način toga izražavanja za tu funkciju.

Za svaku funkciju $f(z)$ ne postoji adiciona teorema. Tako npr. za funkciju

$$f(z) = e^{e^z}$$

dobija se da je

$$f(\alpha+\beta) = e^{e^{\alpha+\beta}} = e^{e^\alpha \cdot e^\beta};$$

pa pošto je

$$e^z = \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

$f(\alpha+\beta)$ se izražava u obliku

$$f(\alpha+\beta) = e^{\log f(\alpha) \cdot \log f(\beta)} = e^{\frac{f'(\alpha) \cdot f'(\beta)}{f(\alpha) \cdot f(\beta)}}$$

iz čega se vidi da se to izražava ne kao algebarska, već kao transcendentna funkcija izraza $f(\alpha)$, $f(\beta)$, ili još i $f'(\alpha)$ i $f'(\beta)$. A za nepreglednu množinu funkcija uopšte je i nemogućno izraziti $f(\alpha+\beta)$ tako da funkcija bude imala svoju adicionu teoremu.

Ali postoji i bezbroj funkcija koje imaju adicionu teoremu u navedenom smislu. Tako npr. za funkcije e^z je

$$f(\alpha+\beta) = e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta = f(\alpha) \cdot f(\beta).$$

Za $\sin z$ je

$$f(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha=f(\alpha)\cdot f'(\beta)+f(\beta)\cdot f'(\alpha)$$
$$=f(\alpha)\sqrt{1-f(\beta)^2}+f(\beta)\sqrt{1-f(\alpha)^2}.$$

Isti je slučaj i sa funkcijama $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, a očevidno je da će tako biti i sa ma kakvom algebarskom funkcijom promenljive z, ili promenljive e^{az}. Sve takve funkcije imaju svoju adicionu teoremu.

Ovde će biti pokazano da i *svaka od triju osnovnih eliptičkih funkcija takođe ima svoju adicionu teoremu.*

Dokaz je sličan onome na koji se dokazuje u matematičkoj analizi adiciona teorema za $\sin z$. Za tu se funkciju na elementaran *trigonometrijski* način dokazuje postojanje takve teoreme. Takav se dokaz ne primenjuje na funkciju $\operatorname{sn} z$, ali se teorema može dokazati na način sličan onome kojim se *analitički* ističe na vidik postojanje teoreme za funkciju $\sin z$.

Taj dokaz za $\sin z$ osnovan je na činjenici da se opšti integral diferencijalne jednačine

(77) $$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

može izraziti u dva razna oblika

(78) $$\arcsin x-\arcsin y=C,$$

(79) $$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=C',$$

gde su C i C' integracione konstante.

Jednačina (78) se dobija neposrednom integracijom obeju strana jednačine (77). A da je i (79) opšti integral iste jednačine (77), vidi se njenim diferencijaljenjem koje daje jednačinu

$$xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)+dx\cdot\sqrt{1-y^2}-dy\cdot\sqrt{1-x^2}=0,$$

u kojoj su, prema (77), sva tri člana jednaka nuli.

Međutim, kao što se zna iz opšte teorije diferencijalnih jednačina prvoga reda, kad god dve jednačine

$$f(x,\ y)=C,\qquad \varphi(x,\ y)=C'$$

predstavljaju opšti integral jedne iste jednačine one ne mogu biti jedna od druge nezavisne, već je jedna od funkcija f i φ funkcija druge, tako da je

(80) $$C'=\Phi(C),$$

pa taj slučaj mora biti i sa dvema jednačinama (78) i (79).

Sa druge strane, kad se u jednačini (78) stavi da je

$$\arcsin x = \alpha, \qquad \arcsin y = \beta,$$

prema čemu je

$$x = \sin \alpha, \qquad y = \sin \beta,$$

jednačina postaje

$$\alpha - \beta = C, \tag{81}$$

a jednačina (79) se pretvara u

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha = C',$$

tako da jednačina (80) postaje

$$\Phi(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta. \tag{82}$$

Da bi se odredio oblik funkcije Φ, stavimo u (82) da je $\beta = 0$, pa se dobija

$$\Phi(\alpha) = \sin \alpha$$

prema čemu (82) postaje

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

ili, smenom β sa $-\beta$,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

koji obrazac izražava adicionu teoremu za funkciju $\sin z$.

Isti se analitički dokaz primenjuje i na funkciju $\operatorname{sn} z$. Kao što je napred kazano, Eulerova diferencijalna jednačina, napisana u obliku

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{83}$$

gde je

$$X = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}, \tag{84}$$

$$Y = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}, \tag{85}$$

može se napisati u dva razna oblika

$$\int_0^x \frac{dx}{X} - \int_0^y \frac{dy}{Y} = C, \tag{86}$$

$$\frac{xY - yX}{1 - k^2 x^2 y^2} = C'. \tag{87}$$

Prema gore kazanome mora biti

(88) $$C' = \Phi(C).$$

Sa druge strane, ako se stavi da je

$$\int_0^x \frac{dx}{X} = \alpha, \qquad \int_0^y \frac{dy}{Y} = \beta$$

prema čemu je

$$x = \operatorname{sn} \alpha, \qquad y = \operatorname{sn} \beta,$$

$$X = \frac{dx}{d\alpha} = (\operatorname{sn} \alpha)', \qquad Y = \frac{dy}{d\beta} = (\operatorname{sn} \beta)',$$

ednačina (86) pretvara se u

$$\alpha - \beta = C$$

a jednačina (87) u

$$\frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot (\operatorname{sn} \beta)' - \operatorname{sn} \beta \cdot (\operatorname{sn} \alpha)'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta} = C',$$

pa se zamenom u (88) dobija

(89) $$\Phi(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot (\operatorname{sn} \beta)' - \operatorname{sn} \beta \cdot (\operatorname{sn} \alpha)'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta}.$$

Da bi se odredio oblik funkcije Φ, stavimo u (89) da je $\beta = 0$, pa se, pošto je

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \qquad \operatorname{sn}' 0 = 1$$

dobija da je

$$\Phi(\alpha) = \operatorname{sn} \alpha.$$

Obrazac (89) dobija tada oblik

(90) $$\operatorname{sn}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot (\operatorname{sn} \beta)' - \operatorname{sn} \beta \cdot (\operatorname{sn} \alpha)'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta}$$

odakle je, smenom β sa $-\beta$,

(91) $$\operatorname{sn}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot (\operatorname{sn} \beta)' + \operatorname{sn} \beta \cdot (\operatorname{sn} \alpha)'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta}.$$

A pošto je

$$\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{dn} x,$$

to se obrazac (91) može napisati i u obliku

(92) $$\operatorname{sn}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \beta \cdot \operatorname{dn} \beta + \operatorname{sn} \beta \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta}.$$

Naposletku, u obrascu (92) mogu se funkcije $\operatorname{cn} x$ i $\operatorname{dn} x$ smeniti svojim izrazima kao funkcije promenljive $\operatorname{sn} x$, po obrascima

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x},$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x},$$

pa se dobija obrazac koji izražava $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ kao algebarsku funkciju izraza $\operatorname{sn}\alpha$ i $\operatorname{sn}\beta$. Taj obrazac, kao i obrazac (91), pokazuje da *za funkciju* $\operatorname{sn} z$ *postoji adiciona teorema* i ističe na vidik oblik te teoreme, tj. *način na koji se* $sn(\alpha+\beta)$ *izražava kao racionalna funkcija izraza*

$$\operatorname{sn}\alpha,\quad \operatorname{sn}\beta,\quad (\operatorname{sn}\alpha)',\, (\operatorname{sn}\beta)'$$

ili kao algebarska funkcija izraza

$$\operatorname{sn}\alpha \text{ i } \operatorname{sn}\beta.$$

Ti obrasci uopštavaju elementarni trigonometrijski obrazac za $\sin(\alpha+\beta)$, na koji se oni svode kad je $k=0$, tj. kad $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$ degenerišu u $\sin z$, $\cos z$ i 1.

Iz istih se obrazaca i onih što iskazuju vezu između funkcija sn, cn, dn izvode i adicione teoreme za $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$, koje su iskazane obrascima sličnim obrascu (92):

$$\operatorname{cn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\beta - \operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{dn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\beta}, \tag{93}$$

$$\operatorname{dn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{dn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\beta - k\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\beta} \tag{94}$$

odakle se, smenom β sa $-\beta$, dobijaju obrasci za

$$\operatorname{cn}(\alpha-\beta) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{dn}(\alpha-\beta).$$

Tako isto, iz tih se obrazaca izvodi mnoštvo drugih koji, kao i oni, uopštavaju poznate trigonometrijske obrasce i od kojih će neki biti izvedeni u ovome što sleduje.

Kao prost primer biće navedena primena obrazaca na slučaj kad je $\alpha=z$ i $\beta=K$, kao i kad je $\alpha=z$ i $\beta=-K$

$$\operatorname{sn}\beta = \operatorname{sn} K = 1, \qquad \operatorname{sn}\beta = \operatorname{sn}(-K) = -1,$$

$$\operatorname{cn}\beta = \operatorname{cn} K = 0, \qquad \operatorname{cn}\beta = \operatorname{cn}(-K) = 0,$$

$$\operatorname{dn}\beta = \operatorname{dn} K = \sqrt{1-k^2}, \quad \operatorname{dn}\beta = \operatorname{dn}(-K) = \sqrt{1-k^2}.$$

Primenom obrasca za $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ i $\operatorname{sn}(\alpha-\beta)$ nalazi se tada da je

$$\operatorname{sn}(z+K)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$\operatorname{sn}(z-K)=-\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}.$$

Kad se, dakle, vrednosti z *doda četvrtina realne periode,* $\operatorname{sn} z$ *postaje* $\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}$; *kad se oduzme ta četvrtina,* $\operatorname{sn} z$ *postaje* $-\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}$.

To je uopštenje pravila po kome je

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z, \qquad \sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos z.$$

24. FUNKCIJE sn mz, cn mz, dn mz

Kad se u obrascima (92), (93), (94) stavi da je $\alpha=\beta$ dobijaju se obrasci

$$\operatorname{sn} 2\alpha=\frac{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha},$$

$$(95)\qquad \operatorname{cn} 2\alpha=\frac{1-2\operatorname{sn}^2\alpha+k^2\operatorname{sn}^4\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha},$$

$$\operatorname{dn} 2\alpha=\frac{1-2k^2\operatorname{sn}^2\alpha+k^2\operatorname{sn}^4\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha}$$

koji se za $k=0$ svode na elementarne trigonometrijske obrasce

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

Pomoću obrazaca za zbirove $\alpha+\beta$ i obrazaca (95), uzevši da je $\beta=2\alpha$, dobijaju se obrasci pomoću kojih se mogu izračunati

$$\operatorname{sn} 3\alpha, \quad \operatorname{cn} 3\alpha, \quad \operatorname{dn} 3\alpha,$$

kad se znaju vrednosti

$$\operatorname{sn}\alpha, \quad \operatorname{cn}\alpha, \quad \operatorname{dn}\alpha,$$

i to se može produžiti tako, da se pomoću poznatih vrednosti ovih poslednjih izraza mogu odrediti uzastopce sve vrednosti

$$\operatorname{sn} m\alpha, \quad \operatorname{cn} m\alpha, \quad \operatorname{dn} m\alpha.$$

25. OBRASCI ZA ZBIROVE I RAZLIKE FUNKCIJA sn z, cn z, dn z

Sabiranjem i oduzimanjem obrazaca za $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ i $\operatorname{sn}(\alpha-\beta)$ i stavivši da je

$$\alpha+\beta=p, \qquad \alpha-\beta=q,$$

odakle je

$$\alpha=\frac{p+q}{2}, \qquad \beta=\frac{p-q}{2},$$

dobijaju se obrasci koji izražavaju

$$\operatorname{sn} p \pm \operatorname{sn} q, \qquad \operatorname{cn} p \pm \operatorname{cn} q, \qquad \operatorname{dn} p \pm \operatorname{dn} q,$$

pomoću proizvoda funkcija

$$\operatorname{sn}\frac{p+q}{2}, \qquad \operatorname{cn}\frac{p+q}{2}, \qquad \operatorname{dn}\frac{p+q}{2},$$

$$\operatorname{sn}\frac{p-q}{2}, \qquad \operatorname{cn}\frac{p-q}{2}, \qquad \operatorname{dn}\frac{p-q}{2}.$$

Takvi su npr. obrasci

$$\operatorname{sn} p+\operatorname{sn} q=\frac{2\operatorname{sn}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{p-q}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{p-q}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\frac{p-q}{2}},$$

(96)

$$\operatorname{sn} p-\operatorname{sn} q=\frac{2\operatorname{sn}\frac{p-q}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{p+q}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\frac{p-q}{2}}$$

i slični obrasci za

$$\operatorname{cn} p+\operatorname{cn} q, \qquad \operatorname{dn} p+\operatorname{dn} q,$$

$$\operatorname{cn} p-\operatorname{cn} q, \qquad \operatorname{dn} p-\operatorname{dn} q.$$

Ti obrasci uopštavaju Neperove trigonometrijske obrasce kao što su

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

i slični obrasci za kosinus. Obrasci (96) se svode na Neperove obrasce za $k=0$. Oni su, kao i ovi, od koristi pri logaritmisanju, a tako isto i za dokazivanje raznih stavova u teoriji eliptičkih funkcija.

ČETVRTI ODELJAK

RAZNI OBLICI REDOVA ZA OSNOVNE ELIPTIČKE FUNKCIJE

26. RAZVIJANJE U MACLAURINOV RED

Funkcije $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$ su *parne*, a funkcija $\operatorname{sn} z$ *neparna* funkcija promenljive z. Pa pošto vrednost $z=0$ nije nikakav singularitet ni za jednu od tih funkcija, to se one mogu razviti u redove oblika

$$\operatorname{sn} z = A_1 z + A_3 z^3 + A_5 z^5 + \cdots,$$

(97) $$\operatorname{cn} z = B_0 + B_2 z^2 + B_4 z^4 + \cdots,$$

$$\operatorname{dn} z = C_0 + C_2 z^2 + C_4 z^4 + \cdots.$$

Koeficijenti A_n određuju se pomoću obrasca

(98) $$A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{sn} z \qquad \text{za} \quad z=0.$$

Uzastopni izvodi funkcije sn dobijaju se pošavši od obrasca

$$(\operatorname{sn} z)' = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z$$

iz koga se diferencijaljenjem i smenom izvoda funkcija $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$ njihovim vrednostima

$$(\operatorname{cn} z)' = -\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z,$$

$$(\operatorname{dn} z)' = -k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} z$$

dobija niz obrazaca

$$(\operatorname{sn} z)^{('')} = 2 k^2 \operatorname{sn}^2 z - (1 + k^2) \operatorname{sn} z,$$

$$(\operatorname{sn} z)^{(3)} = (6 k^2 \operatorname{sn}^2 z - 1 - k^2) \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z,$$

$$(\operatorname{sn} z)^{(4)} = 24 k^2 \operatorname{sn}^3 z - 20 (k^2 + k^4) \operatorname{sn}^2 z + (1 + 14 k^2 + k^4) \operatorname{sn} z,$$

$$\vdots$$

Kad se u tim obrascima stavi $z=0$ dobijaju se za uzastopne koeficijente A_n vrednosti:

$$A_1 = \frac{1}{1!}, \quad A_3 = -\frac{1+k^2}{3!}, \quad A_5 = \frac{1 + 14k^2 + k^4}{5!}, \ldots$$

Na isti način se određuju i koeficijenti B_n i C_n, a to su:

$$B_0 = 1, \qquad B_2 = -\frac{1}{2!},$$

$$B_4 = \frac{1+4k^2}{4!}, \qquad B_6 = -\frac{1+44k^2+14k^4}{6!}, \ldots$$

$$C_0 = 1, \qquad C_2 = -\frac{k^2}{2},$$

$$C_4 = \frac{4k^2+k^4}{4!}, \qquad C_6 = -\frac{16k^2-44k^4+k^6}{6!}, \ldots$$

Kao što se vidi, *opšti koeficijent Maclaurinovog reda za svaku od funkcija* $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ *je racionalan razlomak, koji za imenilac ima odgovarajući faktorijel, a za brojilac jedan polinom po modulu* k, *čiji su svi koeficijenti celi brojevi.*

Pitanje je još: za koje će vrednosti z dobijeni redovi konvergirati? Pošto sve tri funkcije imaju iste singularitete, a to su u njihovim paralelogramima polovi

(99) $$iK' \quad \text{i} \quad 2K+iK',$$

to će svaki od gornja tri reda biti konvergentan za vrednosti z u krugu opisanom oko tačke $z=0$ sa poluprečnikom jednakim odstojanju te tačke do najbližeg joj pola, a to znači sa poluprečnikom K'. A smenivši u redovima (97) na desnoj strani z ma kojom svojom homologom u ravni z, dobiće se nova tri reda za $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ koji će konvergirati za sve vrednosti z u krugu opisanom oko te homologe sa poluprečnikom K'.

27. RAZVIJANJE U LAURENTOV RED

Označimo sa α jedan ma koji pol funkcije $\operatorname{sn} z$. Pošto su svi polovi prvoga reda, funkcija se može razviti u Laurentov red koji će biti konvergentan za sve vrednosti z sadržane u krugu koji ima za centar tačku $z=\alpha$, a za poluprečnik odstojanje te tačke do najbližeg joj drugog koga pola funkcije. Red je oblika

$$\operatorname{sn} z = \frac{B}{z-\alpha} + A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \cdots.$$

Napred je pokazano da svi ostaci funkcije, za sve njene polove, imaju za vrednost jednu ili drugu od vrednosti $-\frac{1}{k}$ ili $+\frac{1}{k}$. Prema tome je

$$B = \pm \frac{1}{k}.$$

Da bi se odredili koeficijenti A_n, može se u smeniti sa $\operatorname{sn} z$ u jednačini koju u zadovoljava

$$u'^2 = (1-u^2)(1-k^2 u^2), \tag{100}$$

pa porediti među sobom članove istih stepena izraza $\frac{1}{z-a}$ i $(z-a)$, pošto se na levoj strani jednačine (100) smeni

$$u' = -\frac{B}{(z-a)^2} + A_1 + 2A_2(z-a) + 3A_3(z-a)^2 + \cdots$$

pa dakle

$$u'^2 = \frac{B^2}{(z-a)^4} - \frac{2A_1 B}{(z-a)^2} + \frac{4A_2 B}{z-a} + 3A_3 B + \cdots$$

a na desnoj strani,

$$u = \frac{B}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots$$

Tada se npr. nalazi da na levoj strani ne figuriše član sa $\frac{1}{(z-a)^3}$; a na desnoj on figuriše i ima za koeficijenat $4k^2 B^3 A_0$; pa pošto su k i B različni od nule, mora biti $A_0 = 0$.

Red je, dakle, oblika

$$\operatorname{sn} z = \pm \frac{1}{k}\frac{1}{z-a} + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots \tag{101}$$

a red za kvadrat te funkcije je oblika

$$\operatorname{sn}^2 z = \frac{1}{k^2}\frac{1}{(z-a)^2} + M_0 + M_1(z-a) + M_2(z-a)^2 + \cdots \tag{102}$$

gde se koeficijenti M_k određuju pomoću koeficijenata A_n.

Kao što se vidi:

1° Red za $\operatorname{sn} z$ ne sadrži član nezavisan od $(z-a)$;

2° Red za $\operatorname{sn}^2 z$ ne sadrži član sa $\frac{1}{z-a}$ na prvom stepenu.

Ta na prvi pogled beznačajna činjenica ima svoju naročitu važnost, što će se videti iz ovoga što sleduje.

Iz obrasca (102) se vidi *da je ostatak funkcije* $\mathrm{sn}^2 z$ *za ma koji njen pol jednak nuli.* I to je takođe činjenica od važnosti za istu teoriju, jer su mnogi rezultati na njoj osnovani.

28. OSNOVNE ELIPTIČKE FUNKCIJE IZRAŽENE KAO KOLIČNICI CELIH FUNKCIJA

Napred je pokazano da nikakva meromorfna dvoperiodična funkcija ne može biti cela funkcija. Ali, iz opšte teorije analitičkih funkcija zna se da se svaka meromorfna funkcija može izraziti kao količnik dveju celih funkcija. Potražimo koje su to cele funkcije za $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$.

Toga radi uočimo funkciju

$$Z(z) = k^2 \int_0^z \mathrm{sn}^2 z \cdot dz \tag{103}$$

koja u teoriji eliptičkih funkcija igra dosta važnu ulogu i naziva se „zeta-funkcija".

Iz obrasca (103) se vidi da $Z(z)$ ne može imati drugih singulariteta osim onih što ih ima $\mathrm{sn}\, z$, a to su polovi ove funkcije. Iz obrasca (102) dobija se integracijom

$$\int \mathrm{sn}^2 z \cdot dz = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{z-a} + M_0 (z-a) + \frac{M_1}{2}(z-a)^2 + \cdots + \mathrm{const},$$

tako da se za $Z(z)$ dobija red

$$Z(z) = -\frac{1}{z-a} + k^2 M_0 (z-a) + \frac{k^2 M_1}{2}(z-a)^2 + \cdots + \mathrm{const} \tag{104}$$

iz čega se vidi *da je svaki pol funkcije* $\mathrm{sn}\, z$ *pol prvoga reda za* $Z(z)$ *i da su svi ostaci ove funkcije za te polove jednaki* -1. U isti mah se vidi i to da je $Z(z)$ *meromorfna* funkcija.

Pomoću tako definisane funkcije $Z(z)$ formirajmo funkciju

$$G(z) = e^{-\int_0^z Z(z)\, dz}, \tag{105}$$

pa je očevidno da, kad bi ona imala singulariteta, ovi bi mogli proizaći samo od funkcije $Z(z)$, pa dakle bi se svaki od njih morao poklopiti sa kojim polom te funkcije. Ali, ni jedan pol $z=a$ te funkcije ne može biti singularitet za $G(z)$, jer se iz obrasca (104) integracijom dobija da je

$$\int Z(z)\,dz = -\log(z-a) + \frac{k^2 M_0}{2}(z-a)^2 + \frac{k^2 M_1}{6}(z-a)^3 + \cdots$$

tako da se može napisati da je

$$G(z) = e^{\log(z-a)} \cdot e^{f(z)} = (z-a)\,e^{f(z)}, \tag{106}$$

gde je $f(z)$ jedna funkcija predstavljena redom uređenim po celim pozitivnim stepenima razlike $(z-a)$ i koja, prema tome, nema $z=\alpha$ kao singularitet. Iz toga se vidi *da je $G(z)$ cela funkcija promenljive z koja ima $z=\alpha$ kao svoju prostu nulu, pa dakle kao svoju običnu tačku.*

Pomoću tako definisane cele funkcije $G(z)$ formirajmo sad funkciju

$$G_1(z) = \operatorname{sn} z \cdot G(z). \tag{107}$$

Ona se, prema obrascima (101) i (106), može napisati u obliku

$$G_1(z) = \left[\pm\frac{1}{k}\frac{1}{z-a} + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots\right](z-a)\,e^{f(z)}$$

$$= \left[\pm\frac{1}{k} + A_1(z-a)^2 + A_2(z-a)^3 + \cdots\right]e^{f(z)}.$$

Iz tog se izraza vidi da je $z=a$ obična tačka za funkciju $G_1(z)$. Pa kako singulariteti te funkcije mogu proizlaziti samo od takvih vrednosti kao što je $z=a$, time je dokazano da ona nema nikakvih singulariteta, što znači *da je $G_1(z)$ cela funkcija promenljive z.* Iz (107) se tada dobija da je

$$\operatorname{sn} z = \frac{G_1(z)}{G(z)}$$

tako da je funkcija $\operatorname{sn} z$ izražena kao količnik dveju celih funkcija, za koje se zna i njihov način formiranja.

Na isti se način, a imajući u vidu da funkcije $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$ imaju iste polove i istoga reda kao i $\operatorname{sn} z$, nalazi *da su i funkcije*

$$G_2(z) = \operatorname{cn} z \cdot G(z),$$

$$G_3(z) = \operatorname{dn} z \cdot G(z)$$

cele funkcije.

Funkcije G, G_1, G_2, G_3 uveo je u teoriju eliptičkih funkcija Weierstrass i označio ih je oznakama

$$G(z) = \operatorname{Al} z, \quad G_1 = \operatorname{Al}_1 z, \quad G_2 = \operatorname{Al}_2 z, \quad G_3 = \operatorname{Al}_3 z$$

i tako označene one nose naziv *Weierstrassove funkcije* Al.

Pomoću njih se osnovne eliptičke funkcije izražavaju u obliku

$$\operatorname{sn} z = \frac{\mathrm{Al}_1 z}{\mathrm{Al}\, z},$$

(108)
$$\operatorname{cn} z = \frac{\mathrm{Al}_2 z}{\mathrm{Al}\, z},$$

$$\operatorname{dn} z = \frac{\mathrm{Al}_3 z}{\mathrm{Al}\, z},$$

tako da se dolazi do ovog rezultata:

Svaka od funkcija $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, *izražava se kao količnik dveju celih funkcija; te funkcije su Weierstrassove funkcije* Al.

Takav način izražavanja osnovnih eliptičkih funkcija od naročite je važnosti s toga, što je upotrebljiv *za sve vrednosti z u ravni te promenljive*, pri čemu se nema potrebe voditi računa ni o kakvoj konvergenciji, pošto su funkcije Al cele funkcije, pa se mogu razviti u Maclaurinov red konvergentan u celoj ravni z. Pri svima drugim načinima izražavanja eliptičkih funkcija pomoću redova to nije slučaj, jer je red konvergentan i upotrebljiv samo u određenoj oblasti ravni z.

29. WEIERSTRASSOVE FUNKCIJE Al

Te cele funkcije, čija je uloga u teoriji eliptičkih funkcija navedena maločas, mogu se, pre svega, razviti u Maclaurinov red konvergentan u celoj ravni z. Tako se nalazi da je

$$\mathrm{Al}\, z = 1 - \frac{A_4}{4!} z^4 + \frac{A_6}{6!} z^6 - \frac{A_8}{8!} z^8 + \cdots,$$

$$\mathrm{Al}_1 z = z - \frac{B_3}{3!} z^3 + \frac{B_5}{5!} z^5 - \frac{B_7}{7!} z^7 + \cdots,$$

$$\mathrm{Al}_2 z = 1 - \frac{C_2}{2!} z^2 + \frac{C_4}{4!} z^4 - \frac{C_6}{6!} z^6 + \cdots,$$

$$\mathrm{Al}_3 z = 1 - \frac{D_2}{2!} z^2 + \frac{D_4}{4!} z^4 - \frac{D_6}{6!} z^6 + \cdots,$$

gde je svaki od koeficijenata A_n, B_n, C_n, D_n *racionalan razlomak koji ima za imenilac n! a za brojilac po jedan polinom po k, sa koeficijentima celim brojevima.*

Postupnim izračunavanjem tih koeficijenata nalazi se da je

$$A_4 = 2\,k^2,$$

$$A_6 = 8\,(k^2 + k^4),$$

$$A_8 = 32\,(k^2 + k^6) + 68\,k^4,$$

$$A_{10} = 128\,(k^2 + k^8) + 480\,(k^4 + k^6),$$

$$\vdots$$

$$B_3 = 1 + k^2,$$

$$B_5 = 1 + k^4 + 4\,k^2,$$

$$B_7 = 1 + k^6 + 9\,(k^2 + k^4),$$

$$B_9 = 1 + k^8 + 16\,(k^2 + k^6) - 6\,k^4,$$

$$\vdots$$

$$C_2 = 1,$$

$$C_4 = 1 + 2\,k^2,$$

$$C_6 = 1 + 6\,k^2 + 8\,k^4,$$

$$C_8 = 1 + 12\,k^2 + 60\,k^4 + 32\,k^6,$$

$$\vdots$$

$$D_2 = k^2,$$

$$D_4 = 2\,k^2 + k^4,$$

$$D_6 = 8\,k^2 + 6\,k^4 + k^6,$$

$$D_8 = 32\,k^2 + 60\,k^4 + 12\,k^6 + k^8,$$

$$\vdots$$

Funkcije Al su među sobom vezane raznim konačnim i diferencijalnim relacijama, od kojih će biti izvedene ove što sleduju.

Kad se u jednačinama

$$\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z = 1,$$

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{dn}^2 z = 1$$

smene $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$ svojim vrednostima

$$\mathrm{sn}\, z = \frac{G_1(z)}{G(z)}, \quad \mathrm{cn}\, z = \frac{G_2(z)}{G(z)}, \quad \mathrm{dn}\, z = \frac{G_3(z)}{G(z)}, \tag{109}$$

dobija se između funkcija G_k relacije

$$
(110) \qquad \begin{aligned} G_1{}^2 + G_2{}^2 &= G^2, \\ k^2 G_1{}^2 + G_3{}^2 &= G^2. \end{aligned}
$$

Međutim, iz jednačine (105) dobija se da je

$$\log G = -\int_0^z Z(z)\, dz$$

odakle je, posle dva uzastopna diferencijaljenja,

$$(\log G)'' = -Z'(z).$$

Sa druge strane iz jednačine (103) je

$$Z'(z) = k^2 \operatorname{sn}^2 z,$$

prema čemu je

$$(\log G)'' = -k^2 \operatorname{sn}^2 z = -k^2 \left(\frac{G_1}{G}\right)^2.$$

Odatle je

$$G_1 = \frac{G}{k} \sqrt{-(\log G)''}$$

ili, kad se to razvije,

$$(111) \qquad G_1 = \frac{1}{k} \sqrt{G'^2 - GG''},$$

a taj obrazac izražava funkciju $\mathrm{Al}_1 z$ pomoću funkcije $\mathrm{Al}\, z$.

Iz jednačina (110), smenom (111), dobijaju se obrasci

$$(112) \qquad G_2 = \sqrt{G^2 + \frac{1}{k}(GG'' - G'^2)},$$

$$(113) \qquad G_3 = \sqrt{G^2 + GG'' - G'^2},$$

koji izražavaju funkcije $\mathrm{Al}_2 z$ i $\mathrm{Al}_3 z$ pomoću funkcije $\mathrm{Al}\, z$.

Sve tri funkcije

$$\mathrm{Al}_1 z, \ \mathrm{Al}_2 z, \ \mathrm{Al}_3 z$$

izražavaju se dakle pomoću osnovne funkcije $\mathrm{Al}\, z$ *i njenog prvog i drugog izvoda.*

Od interesa je primetiti i to da se za $k=0$ dve od funkcija Al svode na 1, a druge dve na $\sin z$ i $\cos z$. Jer iz obrasca (103) se vidi da se za $k=0$ funkcija $Z(z)$ svodi na nulu, što znači da se funkcija G svodi na jedinicu; pošto se tada $\operatorname{sn} z$ svodi na $\sin z$, $\operatorname{cn} z$ na $\cos z$, a $\operatorname{dn} z$ na 1, to se vidi da za $k=0$ funkcije Al postaju

$$\mathrm{Al} = 1, \ \mathrm{Al}_1 = \sin z, \ \mathrm{Al}_2 = \cos z, \ \mathrm{Al}_3 = 1.$$

Primetimo još i to, da funkcije Al nisu jedine pomoću kojih se osnovne eliptičke funkcije izražavaju kao količnici dveju celih funkcija. To se postiže i pomoću jedne cele funkcije, koju je u teoriju eliptičkih funkcija uveo Jacobi i koja se može razviti, za sve vrednosti z, u red oblika

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{nz+an^2},$$

a gde je a određena konstanta, čiji je realni deo negativan, čime je osigurana konvergencija reda.

Međutim, metoda Weierstrassova, napred izložena, koja problem rešava pomoću funkcija Al, ne samo što je znatno prostija od ostalih, već je i opštija, jer se primenjuje i na druge eliptičke funkcije u beskrajnom broju.

30. RAZVIJANJE U RED ČIJI SU ČLANOVI RACIONALNE FUNKCIJE IZRAZA e^{az}

Napred je proučena funkcija $f(z)$ izražena redom

(114)
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n,$$

gde je

(115)
$$u_n=\frac{e^{z+n\omega}}{(e^{\alpha}-e^{z+n\omega})(e^{\beta}-e^{z+n\omega})},$$

gde su α, β, ω konstante (realni deo konstante ω treba da je negativan), pa je nađeno da ona ima dve periode $\omega_1=\omega$ i $\omega_2=2\pi i$, a da kao polove ima vrednosti $z=\alpha$ i $z=\beta$, kao i one što se dobijaju iz ovih pridavanjem multipla perioda. Svi su ti polovi prvoga reda.

Uočimo sad funkciju

(116)
$$\psi(z)=f(z)-\mu\cdot\operatorname{sn}\lambda z,$$

gde su μ i λ dve neodređene konstante. Podesnim izborom svih konstanata može se učiniti

1° da funkcija $\varphi(z)$ ima periode jednake periodama, funkcije $\operatorname{sn}\lambda z$;

2° da $\varphi(z)$ ima iste polove kao $\operatorname{sn}\lambda z$;

3° da $f(z)$ ima za te polove iste ostatke kao $\mu\cdot\operatorname{sn}\lambda z$.

Pošto $\operatorname{sn}\lambda z$ ima za periode vrednosti

$$\frac{4K}{\lambda} \text{ i } \frac{2iK'}{\lambda},$$

pa dakle i vrednost $-\frac{4K}{\lambda}$, to će uslov 1° biti ispunjen kad se λ i ω izberu tako da bude

$$\omega = -\frac{4K}{\lambda}, \qquad 2\pi i = \frac{2iK'}{\lambda},$$

a to će biti ako se uzme

$$\lambda = \frac{K'}{\pi}, \qquad \omega = -\frac{4K\pi}{K'}.$$

A pošto $\operatorname{sn}\lambda z$ ima u osnovnom paralelogramu perioda za polove vrednosti

$$\frac{iK'}{\lambda} = \pi i \quad \text{i} \quad \frac{2K + iK'}{\lambda'} = \frac{2K\pi}{K'} + \pi i,$$

to će uslov 2° biti ispunjen kad se za α i β uzmu te dve vrednosti.

Tada obe funkcije $f(z)$ i $\mu \cdot \operatorname{sn}\lambda z$ imaju iste polove, koji su svi prvoga reda. Prema ranijem opštem stavu, koji važi za sve meromorfne dvoperiodične funkcije, zbir ostataka za te polove jednak je nuli za svaku pojedince od tih funkcija, pa dakle i za funkciju $\varphi(z)$. Za funkciju $\operatorname{sn}\lambda z$ ti su ostaci, za jedan pol u osnovnom paralelogramu perioda, $-\frac{1}{k\lambda}$, a za drugi pol $+\frac{1}{k\lambda}$. Jer pošto je u blizini jednoga pola $t = a$ funkcije $\operatorname{sn} t$

$$\operatorname{sn} t = -\frac{1}{k}\frac{1}{t-a} + \cdots$$

biće u blizini pola $z = \frac{a}{\lambda} = \alpha$ funkcije $\operatorname{sn}\lambda z$

$$\operatorname{sn}\lambda z = -\frac{1}{k}\frac{1}{\lambda z - a} + \cdots = -\frac{1}{k\lambda}\frac{1}{z-\alpha} + \cdots$$

tako, da će ostatak za taj pol biti $-\frac{1}{k\lambda}$, pa za drugi pol on mora biti $+\frac{1}{k\lambda}$, pošto je zbir ostataka jednak nuli. Za funkciju $\mu \cdot \operatorname{sn}\lambda z$ ostatak za jedan pol biće, dakle, $-\frac{\mu}{k\lambda}$, a za drugi pol će biti $+\frac{\mu}{k\lambda}$.

Sa druge strane, za funkciju $f(z)$ ostaci takođe moraju biti među sobom jednaki a suprotno označeni, pošto je i njihov zbir jednak nuli. Neka su ti ostaci $-B$ i $+B$; ako se za konstantu μ uzme vrednost

$$\mu = \frac{kBK'}{\pi},$$

biće ispunjen i uslov 3°.

Kad je tako izabrano svih pet konstanata

$$\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \omega$$

funkcija $\varphi(z)$ će ispunjavati ove pogodbe:

a) to je jedna meromorfna dvoperiodična funkcija;

b) ona ima u svome osnovnom paralelogramu perioda dva pola, koja su oba prvog reda.

Međutim, ostatak za svaki pol jednak je nuli, pošto je taj ostatak jednak razlici ostataka funkcija $f(z)$ i $\mu \cdot \operatorname{sn} \lambda z$, a ovi su među sobom jednaki. Prema tome u Laurentovom redu za $\varphi(z)$ nedostajaće član sa $\dfrac{1}{z-\alpha}$, kao i član sa $\dfrac{1}{z-\beta}$, što znači da su tačke $z=\alpha$ i $z=\beta$ obične tačke za tu funkciju. Pa pošto ona ne može imati kakvih drugih singulariteta, osim α i β (i njihovih homologa), to bi ona bila dvoperiodična funkcija bez singulariteta; takva funkcija, prema ranije dokazanom opštem stavu svodi se na konstantu. Prema tome je

$$f(z) - \mu \cdot \operatorname{sn} \lambda z = C$$

iz čega se, smenivši z sa $\dfrac{z}{\lambda}$, dobija da je

$$\operatorname{sn} z = \frac{1}{\mu} f\left(\frac{z}{\lambda}\right) - C = \frac{\pi}{kBK'} f\left(\frac{\pi z}{K'}\right) - C. \tag{117}$$

Pa pošto se $f(z)$ izražava kao zbir reda čiji su članovi racionalne funkcije izraza e^z, to se vidi *da se funkcija* $\operatorname{sn} z$ *može izraziti kao zbir reda čiji su članovi racionalne funkcije izraza*

$$e^{az}\left(a = \frac{\pi}{K'}\right).$$

Konstanta C, što odgovara datoj funkciji $\operatorname{sn} z$, dobija se kad se u obrascu (117) stavi da je $z=0$, što daje

$$C = \frac{\pi}{kBK'} f(0) = \frac{\pi}{kBK'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n,$$

gde je

$$u_n = \frac{e^{n\omega}}{(e^{\alpha} - e^{n\omega})(e^{\beta} - e^{nw})}$$

pošto se u tome izrazu smene α, β, ω napred nađenim vrednostima.

Konstanta C se, dakle, dobija kao zbir jednoga reda koji je konvergentan, jer je konstanta ω negativna, a njegov se opšti član u_n za velike pozitivne vrednosti n ponaša kao

$$\frac{e^{n\omega}}{e^{\alpha+\beta}}$$

tj. kao opšti član geometrijske progresije

$$e^{\alpha+\beta}(q+q^2+q^3+\cdots)$$

gde je

$$q=e^{\omega}<1,$$

a za velike negativne vrednosti n on se ponaša kao $\dfrac{1}{e^{-n\omega}}$, tj. kao član geometrijske progresije

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots$$

gde je

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{e^{-\omega}}=e^{\omega}<1.$$

Sličan se rezultat dobija i za druge dve eliptičke funkcije $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$, pošto su im polovi isti i istoga reda kao i za $\operatorname{sn} z$.

PETI ODELJAK

ELIPTIČKE FUNKCIJE DEFINISANE INVERZIJOM OPŠTIJIH INTEGRALA

31. INVERZIJE INTEGRALA ŠTO SADRŽE KVADRATNI KOREN OPŠTEG POLINOMA TREĆEG ILI ČETVRTOG STEPENA

U ovome što prethodi proučene su funkcije definisane inverzijom integrala

$$z=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{118}$$

tj. integrala u kome se pod kvadratnim korenom nalazi jedan specijalan polinom četvrtog stepena.

U ovome će odeljku biti proučene funkcije koje se dobijaju inverzijom integrala

$$z=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}} \tag{119}$$

gde je $F(u)$ *ma kakav polinom četvrtog stepena*

$$F(u)=Au^1+Bu^3+Cu^2+Du+E. \tag{120}$$

Pre svega, da bi integral svojom inverzijom mogao dati kakvu dvoperiodičnu funkciju, sve nule polinoma $F(u)$ moraju biti proste. Jer, kad bi koja nula, npr. $u=c$ bili dvostruka, u $F(u)$ bi se javio kao koreni činilac izraz $(u-c)^2$, tako da bi pod kvadratnim korenom ostao polinom drugoga stepena po u, a inverzije integrala što sadrže kvadratni koren kakvog polinoma drugog stepena nisu dvoperiodične funkcije. Tako bi isto bilo kad bi koren bio trostruki ili četvorostruki, ili kad više od jednog korena ne bi bili prosti.

Neka su, dakle, c_1, c_2, c_3, c_4 nule polinoma $F(u)$, koje su sve proste pa se može napisati

$$F(u)=A(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)(u-c_4).$$

Izvršimo smenu

$$u=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}, \qquad du=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma y+\delta)^2}dy, \tag{121}$$

gde su α, β, γ, δ neodređene konstante. Takva smena pretvara jednačinu

$$dz = \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

u jednačinu oblika

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{\Phi(y)}},$$

gde je $\Phi(y)$ polinom opet četvrtog stepena. Podesnim izborom konstanata α, β. γ, δ može se učiniti da se poslednja jednačina svede na oblik

(122) $$dz = \frac{dy}{\sqrt{(1-py^2)(1-qy^2)}},$$

gde su p i q konstante, što se dobija stavljajući da su koeficijenti stepena y i y^3 jednaki nuli, i da je koeficijenat stepena y^4 jednak jedinici, pa se onda smeni z sa $\frac{z}{B}$.

Očevidno je da, ako se traži da inverzija y integrala jednačine (122) bude dvoperiodična funkcija, nijedna od konstanata p i q ne može biti jednaka nuli, ni beskrajna, niti može biti $p=q$. I tada je mogućno izvršiti takvu smenu promenljive y, da se jednačina (122) svede na oblik

(123) $$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gde će k biti realan broj koji leži između 0 i 1.

Kada su p i q realni brojevi, takva je smena vrlo prosta. Tako:

1° Kada su oba broja p i q istoga znaka, pa se izvrši smena

$$y = \frac{x}{\sqrt{q}}, \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{q}},$$

(gde q označuje onaj od dva broja koji je veći po apsolutnoj vrednosti), jednačina (122) pretvara se u jednačinu (123) u kojoj je

(124) $$k = \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad \text{pa dakle} \qquad 0<k<q$$

i tada je

$$y = \frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{sn} z\sqrt{q},$$

gde sn ima za moduo vrednost (124);

2° Kad su brojevi p i q suprotnih znakova, npr. q pozitivan, a p negativan, pa se izvrši smena

$$y=\frac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{1-x^2}, \qquad dy=-\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

jednačina (122) postaje (123), gde je

(125) $$k=\sqrt{\frac{p}{p-q}}, \quad \text{pa dakle} \quad 0<k<1$$

i tada je

$$y=\frac{1}{\sqrt{q}}\operatorname{cn}(z\sqrt{q-p}),$$

gde cn ima za moduo k vrednost (125).

U svakom slučaju, jednačina (119) *ne dovodi ni do kakve nove dvoperiodične funkcije, već samo do racionalnih kombinacija funkcija* $\operatorname{sn} az$ *i* $\operatorname{cn} az$, *gde je* a *konstanta.*

Do istog se rezultata dolazi i u slučaju inverzije integrala (119), *gde je* $F(u)$ *ma kakav polinom trećeg stepena*

$$F(u)=Bu^3+Cu^2+Du+E.$$

Taj se slučaj, uostalom, ima smatrati kao specijalan slučaj polinoma $F(u)$ četvrtog stepena (120). Jer, kad se u integralu (120) izvrši smena

$$u=\frac{1}{v}, \qquad du=-\frac{dv}{v^2},$$

obrazac (120) postaje

$$z=-\int\frac{dv}{\sqrt{Dv^4+Cv^3+Bv^2+Av}},$$

pa se dakle svodi na slučaj polinoma četvrtog stepena, ali koji ima za jednu svoju nulu vrednost $v=0$. Odgovarajuća tačka $u=\frac{1}{v}$ nalazi se tada u beskrajnosti, tako da se slučaj polinoma trećeg stepena ima smatrati kao slučaj polinoma četvrtog stepena, ali koji ima jednu od svojih nula u beskrajnosti. Pa pošto je svaka od nula ovoga polinoma jedna kritička tačka funkcije pod integralnim znakom, to se slučaj polinoma trećeg stepena ima smatrati kao da je to polinom četvrtog stepena, ali takav da funkcija pod integralnim znakom ima jednu svoju kritičku tačku u beskrajnosti.

32. NEKOLIKO OSOBINA TAKO DEFINISANIH DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA

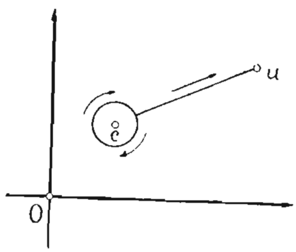
Neka je c jedna nula polinoma trećeg ili četvrtog stepena $F(u)$, pa posmatrajmo integral

(127) $$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

Prema napred kazanome, c je prosta nula za $F(u)$ kad god inverzija u integrala (127) definiše kakvu dvoperiodičnu funkciju. A tada se može dokazati ovaj rezultat:

Funkcija u uvek je parna funkcija promenljive z.

Da bi se to dokazalo, izvršimo integraciju (127) od tačke c do tačke u idući putanjom cu, pa će integral imati izvesnu vrednost z. Međutim, ako se, pre no što se pođe tim direktnim putem, izvrši oko tačke c obrt duž jednoga malog kruga (sl. 20), pa se tek onda ide direktnim putem cu, integral će biti



Sl. 20

jednak zbiru dva integrala: jednoga uzetog duž malog kruga, drugoga uzetog duž putanje cu. Prvi je jednak nuli, jer ako se, da bi se izvršila integracija duž kruga, stavi

$$z = c + re^{\theta i}, \qquad dz = rie^{\theta i}\, d\theta,$$

lako se uveravamo da integral teži nuli kad se r beskrajno smanjuje. Ali, obilaženjem oko kritičke tačke c menja se i determinacija kvadratnog korena polinoma $F(u)$, tako da ako se pošlo sa $(+)$, posle obilaska imaće se $(-)$. Pa kad se, sa tako promenjenom determinacijom, izvrši integracija duž direktne putanje cu, integral će imati vrednost z, ali sa promenjenim znakom.

Prema tome, jednoj istoj vrednosti u odgovaraju dve jednake, a suprotno označene vrednosti $+z$ i $-z$, i obratno, tim dvema vrednostima odgovara jedna ista vrednost u, što pokazuje da je u, smatrano kao funkcija promenljive z, odista parna funkcija.

Taj zaključak važi bilo da je polinom $F(u)$ *četvrtog, bilo da je trećeg stepena.* Primetimo da on ne važi kad se za donju granicu integrala (127) uzme kakva vrednost a koja nije nula polinoma $F(u)$, jer u tome slučaju vrednost $z=a$ nije kritička tačka za kvadratni koren (127) koji, prema tome, ne menja znak pri obilasku oko tačke $z=a$.

Kao što je pokazano, inverzija u integrala (127) je jedna racionalna kombinacija izraza $\operatorname{sn} az$ i $\operatorname{cn} az$, gde je a određena konstanta. Pa pošto su te dve funkcije uniformne, takva će biti i inverzija u. Ona, očevidno, ne može imati nikakvih drugih singulariteta osim polova: to je, dakle, *meromorfna dvoperiodična funkcija* promenljive z.

Periode ω_1 i ω_2 funkcije u poklapaju se sa zajedničkim periodama funkcija $\operatorname{sn} az$ i $\operatorname{cn} az$, čija je racionalna kombinacija funkcija u. Kao i te dve funkcije, kad u dobije jednu vrednost β za jednu vrednost $z=\alpha$, dobiće istu vrednost β i za još jednu vrednost z u svome paralelogramu perioda što sadrži tačku α.

Prema tome u će imati u svome osnovnom paralelogramu perioda dve nule, od kojih je jedna

(128) $$z=\int_c^0 \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

Sve su nule *proste*, jer kad se u obrascu

(129) $$\frac{du}{dz}=\sqrt{F(u)}$$

smeni z jednom takvom nulom, pošto je za nju $u=0$, dobija se za izvod u' vrednost $\sqrt{F(0)}$, različna od nule.

Tako isto će u imati u paralelogramu *dva pola*, od kojih je jedan

(130) $$z=\int_c^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

Kad je polinom $F(u)$ *četvrtog stepena, svi su polovi prvoga reda.* Jer smenom

(131) $$u=\frac{1}{v}, \qquad du=-\frac{dv}{v^2}$$

jednačina (129) postaje

(132) $$\frac{dv}{dz}=-\sqrt{v^4\cdot F\left(\frac{1}{v}\right)}$$

pa ako je

$$F(u)=Au^4+Bu^3+Cu^2+Du+E,$$

jednačina (132) dobija oblik

$$\frac{dv}{dz} = -\sqrt{Ev^4 + Dv^3 + Cv^2 + Bv + A},$$

pa, dakle, za $v=0$ izvod v' dobija vrednost $-\sqrt{A}$, različnu od nule.

Međutim, *kad je polinom $F(u)$ trećeg stepena, svi su polovi drugog reda.* Jer ako je

$$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

jednačina (132) je

$$\frac{dv}{dz} = -\sqrt{Ev^4 + Dv^3 + Cv^2 + Bv}, \tag{133}$$

pa za $v=0$ izvod v' dobija vrednost jednaku nuli, što znači da je svaki pol funkcije u pol višeg reda. Pa kako u osnovnom paralelogramu perioda u dobija jednu istu vrednost za dve vrednosti z, pa dakle ima dva pola, to se ta dva pola poklapaju. *Funkcija u ima, dakle, u paralelogramu perioda jedan pol, a taj je pol drugoga reda.*

33. WEIERSTRASSOVA NORMALNA ELIPTIČKA FUNKCIJA

Kao što je pokazano, smena (131) svodi jednačinu

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{F(u)}, \tag{134}$$

gde je $F(u)$ polinom trećeg stepena, na jednačinu (133), gde je pod kvadratnim korenom polinom četvrtog stepena, ali koji ima vrednost $v=0$ kao svoju prostu nulu. Taj kvadratni koren ima, dakle, $v=0$ kao svoju kritičku tačku, pa se, prema tome, u jednačini (134) ima smatrati kao da joj je pod kvadratnim korenom kakav polinom četvrtog stepena, ali koji ima jednu kritičku tačku u beskrajnosti.

Uzmimo za kritičku tačku c tu vrednost $c=\infty$ i uočimo integral

$$z = \int_{+\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \tag{135}$$

gde je

$$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E. \tag{136}$$

Smena

$$u = av + b, \qquad du = a\,dv,$$

(a i b su proizvoljne konstante), svodi jednačinu (135) na

(137)
$$z = a \int_{\infty}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}},$$

gde je

$$\Phi(v) = Mv^3 + Nv^2 + Pv + Q,$$

i gde će koeficijenti M i N imati za vrednosti

$$M = Ba^3, \qquad N = a^2(3Bb + C).$$

Izberimo za konstante a i b takve vrednosti da bude $M = 4$, $N = 0$, što će biti ako se uzme

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{B}}, \qquad b = -\frac{C}{3B},$$

pa jednačina (137) dobija oblik

(138)
$$\sqrt[3]{\frac{B}{4}}\, z = \int_{\infty}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}},$$

gde je

(139)
$$\Phi(v) = 4v^3 - g_2 v - g_3,$$

i gde su g_2 i g_3 stalni koeficijenti.

Stavimo u (138) u na mesto v i uočimo inverziju integrala

(140)
$$z = \int_{+\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}.$$

Ta inverzija nosi naziv *normalne eliptičke funkcije*. Nju je u teoriju eliptičkih funkcija uveo Weierstrass, označio je oznakom

$$u = \wp(z),$$

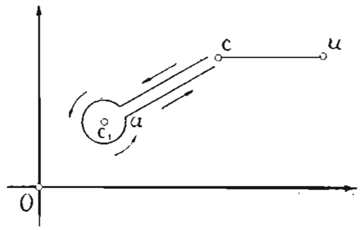
ispitao joj u pojedinostima osobine i istaknuo na vidik njene veze sa ostalim dvoperiodičnim funkcijama.

Iz ovoga, što je napred kazano, sleduje da je $p(z)$ *meromorfna dvoperiodična funkcija* promenljive z. Da bi smo joj odredili periode, vratimo se napred posmatranom slučaju kad je

$$z = \int_{c}^{u} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \qquad F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

pa neka su c, c_1, c_2, c_3 nule polinoma $F(u)$. One su sve proste i svaka je od njih kritička tačka za kvadratni koren pod znakom integrala.

Obeležimo u ravni promenljive u dve od tih nula, npr. c i c_1 (sl. 21). Kad bi se integral uzeo duž direktne putanje cu, on bi imao izvesnu vrednost z. Ako se pre toga on uzme duž konture koja, polazeći od c, obiđe jednim



Sl. 21

kružićem tačku c_1, pa se vrati u c, integral će imati za vrednost zbir od tri integrala: jednog uzetog duž putanje ca, drugoga duž kružića oko c_1, i trećeg duž ac, u smislu označenom, na slici.

Integral duž kružića jednak je nuli, o čemu se lako uveravamo stavivši u

$$F(u) = A\,(u-c)\,(u-c_1)\,(u-c_2)\,(u-c_3),$$

da je

$$u = c_1 + re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i}\, d\,\theta,$$

i pustivši da se r beskrajno smanjuje.

Integral duž ac jednak je integralu duž ca, jer je obilaskom oko kritičke tačke c_1 kvadratni koren promenio znak, pa je još jednom promenio znak i time što je smisao integracije duž ac suprotan onome duž ca.

Prema tome će integral duž cele konture imati za vrednost

$$2\int_c^a \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

pa kad se kružić beskrajno smanji, tako da se tačke a i c_1 poklope, on će imati za vrednost $2\,K_1$, gde je

$$K_1 = \int_c^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

Posle tog obilaska stiže se u tačku c sa vrednošću $2\,K_1$ integrala, a sa determinacijom $(-)$ kvadratnog korena pod integralnim znakom (ako se ne obilazi i tačka c). Kad se posle toga produži integracija duž direktne putanje cu, stiže se u tačku u sa vrednošću $2\,K_1 - z$ integrala. Pa pošto se obema putanjama stiže u istu tačku u, to je

$$u\,(2\,K_1 - z) = u\,(z),$$

što znači da funkcija u dobija jednu istu vrednost u dvema tačkama z i $2K_1-z$. A pošto je $u(z)$ parna funkcija (što sleduje iz § 32), smenivši u (141) z, sa $-z$, dobija se da je

$$u(z+2K_1)=u(z),$$

što znači da funkcija $u(z)$ ima za periodu $2K_1$ (isto bi bilo i kad bi se obišla i tačka c, jer je u parna funkcija).

Međutim, na mesto kritičke tačke $u=c_1$, može se uzeti još i jedna ili druga od ostalih kritičkih tačaka c_2 i c_3. Ako se, dakle, označi da je

$$K_2=\int_c^{c_2}\frac{du}{\sqrt{F(u)}},\qquad K_3=\int_c^{c_3}\frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

nalazi se da:

1° *funkcija u ima jednu istu vrednost u tačkama*

$$z,\qquad 2K_1-z,\qquad 2K_2-z,\qquad 2K_3-z;$$

2° *ona ima kao periode*

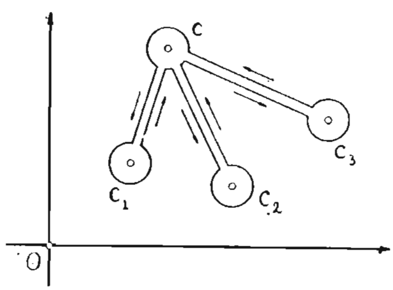
$$\omega_1=2K_1,\qquad \omega_2=2K_2,\qquad \omega_3=2K_3.$$

Tako bi izgledalo da u ima tri osnovne periode. Ali se lako dokazuje *da je treća perioda jednaka zbiru ostalih dveju*, pa da, prema tome, ona ne predstavlja nesvodljivu periodu.

Da bismo se o tome uverili, posmatrajmo integral

$$\int\frac{du}{\sqrt{F(u)}} \tag{141}$$

uzet duž konture označene na sl. 22, a sa polaznom tačkom c. Integral duž svakoga od kružića oko tačaka c, c_1, c_2, c_3 jednak je nuli, pošto se kružići



Sl. 22

mogu beskrajno smanjivati a da integral duž njih ne izmeni svoju vrednost. Sa druge strane, pri obilasku oko svake od tih tačaka kvadratni koren menja znak. Prema tome integral duž celokupne konture imaće za vrednost

$$2K_1+2K_2+2K_3.$$

Sa druge strane, prema teoremi o ekvivalenci integralnih putanja, taj će integral biti jednak istome integralu uzetom duž kruga C sa centrom u početku, a koji obuhvata sve četiri tačke c, c_1, c_2, c_3. Taj se krug može i beskrajno širiti, jer funkcija pod integralnim znakom (141) nema drugih singulariteta osim te četiri tačke. Iz toga se zaključuje da je taj integral duž kruga C jednak nuli. Jer kad se pusti da se tačka u beskrajno udalji od početka, polinom $F(u)$ se ponaša kao njegov član najvišeg stepena Au^4, a integralni elemenat kao

$$\frac{du}{u^2\sqrt{A}}.$$

Kad se, dakle, radi te integracije duž C, stavi

$$u = re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i}\,d\theta,$$

integralni elemenat se ponaša kao

$$\frac{i}{\sqrt{A}}\,\frac{e^{-\theta i}}{r}\,d\theta;$$

on teži nuli kad r beskrajno raste, pa će tada i integral, uzet između konačnih granica 0 i 2π, takođe težiti nuli; kako je njegova vrednost nezavisna od poluprečnika r, to je ona jednaka nuli.

Iz toga sleduje da je

$$2K_1 + 2K_2 + 2K_3 = 0,$$

to jest

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

a odatle je

$$\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2);$$

pa pošto, kad je $-\omega$ perioda, i $+\omega$ je perioda, to je gornje tvrđenje dokazano.

Napred je pokazano da kad u dobije jednu vrednost β za jednu vrednost $z = \alpha$, ona tu vrednost β dobija i u tačkama

$$\alpha' = 2K_1 + \alpha, \qquad \alpha'' = 2K_2 - \alpha, \qquad \alpha''' = 2K_3 - \alpha.$$

Lako se uveriti da su tačke α'' i α''' homologe tačke α', jer je

$$\alpha'' - \alpha' = 2K_2 - 2K_1 = \omega_2 - \omega_1,$$

$$\alpha''' - \alpha' = 2K_3 - 2K_1 = \omega_3 - \omega_1,$$

prema čemu je

$$\alpha'' = \alpha' + \omega_2 - \omega_1,$$

$$\alpha''' = \alpha' + \omega_3 - \omega_1,$$

što pokazuje da se α'' i α''' razlikuju od α' samo dodatkom perioda.

Da bi se sve to, kao i ono što je kazano u § 32, primenilo na normalnu eliptičku funkciju $\wp(z)$, treba uzeti da je $c = \infty$ (ta je vrednost jedna kritička tačka za kvadratni koren pod integralnim znakom). I tada se nalazi ovo što sleduje.

Funkcija $\wp(z)$ *ima dve periode*, za koje se mogu uzeti dve ma koje od triju vrednosti

$$\omega_1 = 2\int_{\infty}^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad \omega_2 = 2\int_{\infty}^{c_2} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad \omega_3 = 2\int_{\infty}^{c_3} \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

gde e

$$F(u) = 4u^3 - g_2 u - g_3;$$

treća je perioda svodljiva na one dve koje se budu uzele, pošto je

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_2 = 0.$$

Nule funkcije su vrednosti

$$z = -\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad z' = 2K_1 - z = 2\int_{\infty}^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}} + \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

i homologe tih vrednosti; sve su nule *proste*.

Svi su polovi funkcije dvostruki; sam početak $z=0$ je takav pol, jer se za pol dobija vrednost

$$z = \int_{\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = 0,$$

a ostali su polovi njene homologe

$$z = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2.$$

Pošto $z=0$ nije obična tačka za funkciju, *to se ova ne može razviti u Maclaurinov red*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Ali, pošto je $z=0$ pol drugoga reda, ona se za vrednosti z u blizini tog pola *može razviti u Laurentov red* oblika

$$\frac{B_2}{z^2} + \frac{B_1}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

A pošto je funkcija parna, taj red mora sadržati samo parne stepene promenljive z, pa dakle je oblika

$$\wp'(z) = \frac{B_2}{z_2} + A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots \tag{142}$$

iz čega se vidi *da je ostatak za pol* $z=0$ *jednak nuli, pa će tako biti i za sve ostale polove.*

Koeficijenti B_2, A_0, A_2, A_4, ... određuju se smenom izraza (142) i izraza

$$\wp'(z) = -\frac{2B_2}{z^3} + 2A_2 z + 4A_4 z^3 + \cdots$$

u diferencijalnoj jednačini

$$\left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{143}$$

koju zadovoljava funkcija $\wp(z)$. Upoređenjem članova sa istim stepenima promenljive z na levoj i desnoj strani tako dobijene jednačine, nalazi se da je

$$B_2 = 1,$$

$$A_0 = 0, \qquad A_2 = \frac{g_2}{20}, \qquad A_4 = \frac{g_3}{28}, \qquad A_6 = \frac{g_2^2}{240}, \ldots$$

i tako se može odrediti koliko se hoće uzastopnih koeficijenata A_n.

Prema tome *Laurentov red za funkciju* $(\gamma)z$ *je oblika*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots \tag{144}$$

tj. red ne sadrži ni član sa $\frac{1}{z}$, ni nezavisan član. Na toj je činjenici osnovano *izražavanje funkcije* $\wp(z)$ *kao količnika dveju celih funkcija*, potpuno slično onome koje je napred izloženo za funkcije $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$.

34. ADICIONA TEOREMA ZA FUNKCIJU $\wp(z)$

Na način sličan onome kojim se dolazi do adicione teoreme za funkcije $\sin z$ i $\operatorname{sn} z$, napred izložene, dolazi se i do adicione teoreme za funkciju $\wp(z)$. Ta teorema iskazuje *da se vrednost* $\wp(\alpha+\beta)$ *izražava kao algebarska funkcija vrednosti*

$$\wp(\alpha), \quad \wp(\beta), \quad \wp(\alpha), \quad \wp'(\beta)$$

tj. kao algebarska funkcija samih izraza $(\gamma)\alpha$ *i* $(\gamma)\beta$, *u obliku obrasca*

$$\wp(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(\alpha) - \wp'(\beta)}{\wp(\alpha) - \wp(\beta)}\right)^2 - \wp(\alpha) - \wp(\beta), \tag{145}$$

gde još treba smeniti $\wp'(\alpha)$ i $\wp'(\beta)$ njihovim vrednostima

$$\begin{aligned} \wp'(\alpha) &= \sqrt{4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3}, \\ \wp'(\beta) &= \sqrt{4\wp^3(\beta) - g_2\wp(\beta) - g_3}. \end{aligned} \tag{146}$$

Kad se β smeni sa $-\beta$ i primeti da je $\wp(z)$ parna, a $\wp'(z)$ neparna funkcija promenljive z, dobija se obrazac

$$\wp(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(\alpha)+\wp'(\beta)}{\wp(\alpha)-\wp(\beta)}\right)^2-\wp(\alpha)-\wp(\beta), \tag{147}$$

pa se od obrazaca (145) i (147) može činiti ista onakva upotreba, kao i od adicionih obrazaca za funkciju $\operatorname{sn} z$.

Tako, uzevši da je $\beta=\alpha$, leva strana obrasca (145) postaje $\wp(2\alpha)$, a zagrada na desnoj strani javlja se u obliku $\frac{0}{0}$. Da bismo našli njenu pravu vrednost, stavimo da je $\beta=\alpha+h$, pa pustimo da h teži nuli. Zagrada tada postaje

$$\left[\frac{\wp'(\alpha+h)-\wp'(\alpha)}{\wp(\alpha+h)-\wp(\alpha)}\right]^2=\left(\frac{\wp''(\alpha)}{\wp'(\alpha)}\right)^2,$$

pa je, dakle,

$$\wp(2\alpha)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(\alpha)}{\wp'(\alpha)}\right)^2-2\wp(\alpha).$$

Pvema obrascu (143) izvod $\wp'(\alpha)$ izražava se kao algebarska funkcija izraza $\wp(\alpha)$. Iz istog obrasca dobija se diferencijaljenjem i skraćenjem sa $2\wp'(\alpha)$ da je

$$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{g_2}{2},$$

pa se pomoću toga obrasca za drugi izvod $\wp''(z)$ i obrasca (143) za prvi izvod izraz $\wp(2\alpha)$ izražava kao racionalna funkcija izraza $\wp(\alpha)$ i $\wp(\beta)$.

Obrasci (145) i (147) dovode i do obrazaca za zbir i razliku izraza $\wp(\alpha)$ i $\wp(\beta)$, koji rešavaju isti zadatak kao i Neperovi obrasci u trigonometriji. Tako, ako se razviju kvadrati zagrada u tim obrascima, dobija se

$$\wp(\alpha-\beta)-\wp(\alpha+\beta)=\frac{\wp'(\alpha)\cdot\wp'(\beta)}{(\wp(\alpha)-\wp(\beta)^2};$$

pa ako se tu stavi da je

$$\alpha-\beta=a, \qquad \alpha+\beta=b,$$

odakle je

$$\alpha=\frac{b+a}{2}, \qquad \beta=\frac{b-a}{2},$$

dobija se obrazac

$$\wp(a)-\wp(b)=\frac{\wp'\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot\wp'\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\left[\wp\left(\frac{b+a}{2}\right)-\wp\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]^2},$$

a na sličan način bi se dobio i obrazac za zbir izraza $\wp(\alpha)$ i $\wp(\beta)$.

35. FUNKCIJA $\wp(z)$ IZRAŽENA KAO KOLIČNIK CELIH FUNKCIJA

Pomoću funkcije $\wp(z)$ formirajmo funkciju

(148) $$\zeta(z) = -\int \wp(z) \cdot dz.$$

Pošto se $\wp(z)$ može, za vrednosti z u blizini tačke $z=0$, razviti u red oblika

(149) $$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots,$$

to se $\zeta(z)$ može razviti u red oblika

(150) $$\zeta(z) = \frac{1}{z} + az^3 + bz^5 + \cdots,$$

iz čega se vidi da je ζ *neparna* funkcija promenljive z. Ona ne može imati drugih singulariteta do onih što ih ima funkcija $\wp(z)$. Obrazac (150), koji važi i kad se u njemu tačka $z=0$ smeni ma kojom svojom homologom pokazuje da ζ ima *beskrajno mnogo polova, koji su svi prvoga reda i koji su oblika*

$$z = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

(gde su ω_1 i ω_2 napred određene periode funkcije $\gamma(z)$, a *koji svi imaju za ostatak* 1.

Međutim, funkcija ζ *nema za periode ni* ω_1 *ni* ω_2. Jer, ako je ω jedna od tih perioda, pošto je iz (148)

$$\zeta'(z) = -\wp(z),$$

izvod $\zeta(z)$ ima iste periode kao $\wp(z)$. Ali to ne važi i za samu funkciju ζ, jer integracija jednačine

$$\zeta'(z+\omega) = \zeta'(z)$$

uvlači jednu integracionu konstantu C i daje

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + C.$$

Ako se u toj jednačini stavi da je $z = -\frac{\omega}{2}$, dobija se

$$\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) + C,$$

što daje

$$C = 2 \cdot \zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

pa dakle

$$\zeta(z+\omega)=\zeta(z)+2\cdot\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

što pokazuje da ω nije perioda funkcije ζ.

Formirajmo sad funkciju

(151) $$\sigma(z)=e^{\int\zeta(z)\,dz}$$

koja se neposredno pomoću funkcije $\wp(z)$ izražava u obliku

$$\sigma(z)=e^{-\iint\wp(z)\cdot dz\,dt}.$$

Pošto je

$$\int\gamma(z)\cdot dz=\log z+\frac{A_2}{3}z^3+\frac{A_4}{4}z^5+\cdots,$$

to je

(152) $$\sigma(z)=ze^{\varphi(z)},$$

gde je $\varphi(z)$ jedna funkcija koja ima $z=0$ kao svoju običnu tačku. Pa kako ta funkcija ne može imati drugih singulariteta, do onih što ih ima $\wp(z)$ a to je tačka $z=0$ i njene homologe, to izlazi *da je $\sigma(z)$ cela funkcija promenljive z.*

Ako se sad uoči funkcija

(153) $$G(z)=\wp(z)\cdot\sigma(z)^2,$$

iz obrazaca (149) i (152) vidi se da će tačka $z=0$ biti obična tačka za funkciju $G(z)$, jer se pri množenju funkcija $\wp$ i σ^2 član $\frac{1}{z^2}$ potire sa z^2. Pa pošto i $G(z)$ ne može imati drugih singulariteta osim vrednosti $z=0$ i njenih homologa, to će i ta *funkcija $G(z)$ biti cela funkcija promenjive z.*

Jednačina (153) tada daje

(154) $$\wp(z)=\frac{G(z)}{\sigma(z)^2},$$

a time je funkcija $\wp(z)$ izražena kao količnik dveju celih funkcija.

Cele funkcije $\zeta(z)$ i $\sigma(z)$ uveo je u teoriju eliptičkih funkcija Weierstrass i proučio im je osobine. One su u toj teoriji poznate pod nazivom „zeta-funkcija“ i „sigma-funkcija“.

Funkcija σ se izražava pomoću ζ obrascem (151), a ζ se izražava pomoću σ obrascem

$$\zeta(z)=\frac{d}{dz}\log\sigma(z),$$

koji se dobija logaritmisanjem i diferencijaljenjem obrasca (151).

Iz adicione teoreme za funkciju $\wp(z)$ izvodi se za ζ obrazac

$$\zeta(\alpha+\beta)=\zeta(\alpha)+\zeta(\beta)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(\alpha)-\wp'(\beta)}{\wp(\alpha)-\wp(\beta)}$$

koji, u vezi sa obrascima

$$\wp(z)=-\zeta'(z),$$

$$\wp'(z)=-\zeta''(z),$$

izražava $\zeta(\alpha+\beta)$ pomoću izraza

$$\zeta(\alpha),\ \zeta(\beta),\ \zeta'(\alpha),\ \zeta'(\beta),\ \zeta''(\alpha)\ \zeta''(\beta)$$

i to kao racionalnu funkciju tih izraza.

36. VEZA FUNKCIJE $\wp(z)$ SA FUNKCIJAMA sn z, cn z, dn z

Ako se u jednačini

(155) $$dz=\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

izvrši smena

(156) $$u^2=\frac{1}{v+a},\quad du=-\frac{dv}{2(v+a)^{\frac{3}{2}}},$$

ona postaje

(157) $$dz=\frac{-dv}{\sqrt{4v^3+cv^2+gv+h}},$$

gde je

$$c=4(3a-k^2-1),$$

(158) $$g=12a^2-8a(1+k^2)+4k^2,$$

$$h=4a^3-4a^2(1+k^2)+4ak^2.$$

Konstanta a može se izabrati tako da bude $c=0$, što će biti ako se uzme

(159) $$a=\frac{1+k^2}{3}.$$

Zamenom te vrednosti u jednačinama (158) jednačina (157) postaje

(160) $$dz=\frac{dv}{\sqrt{4v^3-g_2v-g_3}},$$

gde je

$$g_2=-\frac{4}{3}(1-k^2+k^4),\quad g_3=\frac{4}{3}k^2(1+k^2).$$

Između integrala $u = \operatorname{sn} z$ jednačine (155) i funkcije v postoji relacija (156) gde a ima vrednost (159). Pa pošto jednačina (160) ima za integral funkciju $\wp(z)$, *to između* $\wp(z)$ i $\operatorname{sn} z$ *postoji veza*

$$\operatorname{sn}^2 z = \frac{2}{\wp(z) + \dfrac{1+k^2}{3}} \tag{161}$$

ili

$$\wp(z) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3}. \tag{162}$$

Pomoću veze funkcije $\operatorname{sn} z$ sa funkcijama $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$, dobijaju se za ove funkcije njihove veze sa $\wp(z)$, a to su

$$\operatorname{cn}^2 z = 1 - \frac{1}{\wp(z) + \dfrac{1+k^2}{3}},$$

$$\operatorname{dn}^2 z = 1 - \frac{k^2}{\wp(z) + \dfrac{1+k^2}{3}}$$

ili

$$\wp(z) = \frac{1}{1 - \operatorname{cn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3},$$

$$\wp(z) = \frac{k^2}{1 - \operatorname{dn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3}.$$

Samo treba primetiti da veze izražene gornjim obrascima ne važe za *ma kakve* funkcije $\operatorname{sn} z$ (odnosno $\operatorname{cn} z$ i $\operatorname{dn} z$) i $\wp(z)$. Funkcija $\wp(z)$ sadrži dva promenljiva parametra g_2 i g_3; gornje veze postoje između jedne date, uostalom ma koje, funkcije $\operatorname{sn} z$ i jedne tada *tačno određene funkcije* $\wp(z)$, i to one čiji su parametri određeni pomoću modula k funkcije $\operatorname{sn} z$ obrascima (158) i (159).

Iz tih veza dolazi se i do zaključka o vezi između pojedinih osobina funkcija $\operatorname{sn} z$ i njoj odgovarajuće funkcije $\wp(z)$. Tako: funkcija $\wp(z)$ ima za polove nule funkcije $\operatorname{sn} z$; za svaki pol funkcije $\operatorname{sn} z$ funkcija $\wp(z)$ dobija vrednost $-\dfrac{1+k^2}{3}$ itd.

Veze između $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ i funkcija $\wp(z)$ koje imaju druge parametre g_2 i g_3 komplikovanije su i ne ulaze u okvir ovih predavanja.

37. SVODLJIVOST SVIH MEROMORFNIH DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA NA LINEARNE KOMBINACIJE FUNKCIJE ζ I NJENIH IZVODA

Neka je $F(z)$ jedna ma koja meromorfna dvoperiodična funkcija, čije periode neka su ω_1 i ω_2. Označimo sa

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

polove te funkcije u njenom osnovnom paralelogramu perioda, neka je m_k red pola α_k.

Prema opštoj Mittag-Lefflerovoj teoremi za izražavanje meromorfnih funkcija, može se napisati da je

$$F(z) = \sum \left[\frac{A_k}{z-\alpha_k} + \frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{H_k}{(z-\alpha_k)^m} \right] + G(z), \tag{163}$$

gde je $G(z)$ jedna cela funkcija i gde se sumiranje proteže na sve polove α_k. Red je konvergentan za sve vrednosti z, osim za same polove α_k.

Neka je $\wp(z)$ normalna eliptička funkcija koja ima iste periode ω_1 i ω_2 koje ima i $F(z)$. Iz obrasca (150) dobija se da je

$$\frac{1}{z} = \zeta(z) - az^3 - bz^5 - \cdots,$$

$$\frac{1}{z^2} = -\zeta'(z) + 3\,az^2 + 5\,bz^4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{2}\zeta''(z) - 3\,az - 10\,bz^3 + \cdots,$$

$$\vdots$$

Smenivši u tim obrascima z sa $z-\alpha_k$ dobija se niz obrazaca

$$\frac{1}{z-\alpha_k} = \zeta(z-\alpha_k) - \Psi_1(z),$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^2} = -\zeta'(z-\alpha_k) + \Psi_2(z),$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^2} = \frac{1}{2}\zeta''(z-\alpha_k) - \Psi_3(z),$$

$$\vdots$$

gde su $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$ funkcije koje imaju $z = \alpha_k$ kao običnu tačku.

Množeći leve i desne strane poslednjih obrazaca sa A_k, $B_k, \ldots, H_k$ i sabirajući tako dobijene jednačine, dobija se

$$\frac{A_k}{z-a_k}+\frac{B_k}{(z-a_k)^2}+\cdots+\frac{H_k}{(z-a_k)^m}=M_0\,\zeta(z-a_k)$$
$$+M_1\,\zeta'(z-a_k)+\cdots+M_m\,\zeta^{(m)}(z-a_k)+\Phi_k(z).$$

gde su M_0, $M_1, \ldots, M_m$ stalni koeficijenti, a Φ_k jedna funkcija koja ima a_k kao svoju običnu tačku.

Prema obrascu (163) može se tada napisati da je

(164) $$F(z)=\sum M_0\,\zeta(z-a_k)+\sum[M_1\,\zeta'(z-a_k)$$
$$+\cdots+M_m\,\zeta^{(m)}(z-a_k)]+H(z)$$

gde se znak sumiranja proteže na sve polove a_k i gde je $H(z)$ jedna funkcija koja ima te polove kao obične tačke.

Za prvi zbir na desnoj strani jednačine (164) može se dokazati da predstavlja jednu funkciju $\varphi(z)$ koja ima za periode ω_1 i ω_2. Jer, ako se sa ω označi jedna ili druga od tih perioda, napred je pokazano da je

$$\zeta(z+\omega)=\zeta(z)+2\,\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

prema čemu je

(165) $$\varphi(z+\omega)=\varphi(z)+2\,\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\sum M_0.$$

Međutim, koeficijenti M_0 nisu ništa drugo do koeficijenti A što množe

$$\frac{1}{z-a_1},\quad\frac{1}{z-a_2},\quad\frac{1}{z-a_3},\ldots$$

u izrazu (163) za funkciju $F(z)$; to su, dakle, ostaci te funkcije za njene polove a_1, a_2, $a_3, \ldots$ Pa pošto je $F(z)$ meromorfna dvoperiodična funkcija, to je zbir tih ostataka jednak nuli, tako da je

$$\sum M_0=0,$$

i jednačina (165) se svodi na

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z),$$

što pokazuje da $\varphi(z)$ ima ω kao periodu, pa prema tome ima obe vrednosti ω_1 i ω_2 za periode.

Za drugi zbir je očevidno da ima te iste periode, pošto je napred pokazano da te periode ima prvi izvod $\zeta'(z)$, pa će ih, prema tome, imati i svi izvodi te funkcije. Iz toga sledi da će i $H(z)$ imati te iste periode, kao linearna kombinacija samih dvoperiodičnih funkcija. Pa pošto ta funkcija ima vrednosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kao obične tačke, a ne može van tih vrednosti imati nikakvih singulariteta, ona je *cela* funkcija promenljive z. A kako se cela funkcija, koja ima dve periode, svodi na jednu konstantu C, obrazac (164) postaje

$$F(z) = C + \sum [M_0 \zeta(z-a_k) + M_1 \zeta'(z-a_k) + \cdots + M_m \zeta^{(m)}(z-a_k)] \tag{166}$$

i iskazuje ovu teoremu, poznatu pod nazivom *Hermiteove teoreme*:

Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija $F(z)$ *izražava se kao linearna kombinacija ograničenog broja izraza*

$$\zeta(z-a_k), \qquad \zeta'(z-a_k), \qquad \zeta''(z-a_k), \ldots$$

gde su $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *polovi funkcije* $F(z)$ *u njenome paralelogramu perioda, a* ζ *označuje Weierstrassovu zeta-funkciju, formiranu pomoću funkcija* $\wp(z)$ *koja ima istu periodu kao* $F(z)$.

Važnost teoreme leži u tome, što ona svodi sve meromorfne dvoperiodične funkcije na jednu jedinu funkciju, a to je *zeta-funkcija*. Kad je ova proučena, može se smatrati da su proučene i sve meromorfne dvoperiodične funkcije u onome što je za njih bitno.

Jedna od važnih posledica Hermiteove teoreme je ova:

Neodređeni integral

$$\int F(z)\,dz \tag{167}$$

jedne ma koje meromorfne dvoperiodične funkcije izražava se kao linearna kombinacija ograničenog broja izraza

$$\log \sigma(z-a_k), \qquad \frac{d}{dz} \log \sigma(z-a_k), \qquad \frac{d^2}{dz^2} \log \sigma(z-a_k), \ldots$$

gde $\sigma(z)$ *označava Weierstrassovu sigma-funkciju, formiranu pomoću funkcije* $\wp(z)$ *koja ima istu periodu kao* $F(z)$.

To izlazi otuda što je

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z),$$

pa je prema tome

$$\int \zeta(z-a_k)\,dz = \log(z-a_k),$$

$$\int \zeta'(z-a_k)dz = \zeta(z-a_k) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z-a_k),$$

$$\int \zeta''(z-a_k)\,dz = \zeta'(z-a_k) = \frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z-a_k).$$

$$\vdots$$

Takav je način izražavanja integrala (167) sličan onome na koji se izražava integral jedne racionalne funkcije $R(z)$. Kao što se zna, takva funkcija se izražava kao linearna kombinacija ograničenog broja izraza

$$\frac{1}{z-a_k},\quad \frac{1}{(z-a_k)^2},\quad \frac{1}{(z-a_k)^3},\ldots$$

ili, što je isto, kao linearna kombinacija izraza

$$\lambda(z-a_k),\ \lambda'(z-a_k),\ \lambda''(z-a_k),\ldots$$

gde je

$$\lambda(z) = \frac{1}{z},$$

a $a_1, a_2, a_3, \ldots$ označuju polove funkcije $R(z)$.

Integral

$$\int R(z)\,dz$$

izražava se, dakle, kao linearna kombinacija ograničenog broja izraza

$$\log(z-a_k),\ \frac{d}{dz}\log(z-a_k),\ \frac{d^2}{dz^2}\log(z-a_k),\ldots$$

Funkcija $\frac{1}{z}$ je, dakle, *reduktivan elemenat* za sve racionalne funkcije, a zeta-funkcija je reduktivni elemenat za sve meromorfne dvoperiodične funkcije.

Tako isto, logaritam je takav elemenat za integral ma kakve racionalne funkcije, a sigma-funkcija za ma kakvu meromorfnu dvoperiodičnu funkciju.

38. SVODLJIVOST SVIH MEROMORFNIH DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA NA RACIONALNE KOMBINACIJE FUNKCIJA sn z I sn$'z$

Prema onome što je gore pokazano, svaka se moromorfna dvoperiodična funkcija $F(z)$ može izraziti u obliku (166) gde je

(168) $$\sum M_o = 0,$$

i gde su a_1, a_2, a_3, ... polovi funkcije $F(z)$ sadržani u njenom paralelogramu perioda.

Prema napred dokazanom obrascu za sve vrednosti a i β je:

$$\zeta(a+\beta)=\zeta(a)+\zeta(\beta)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(a)-\wp'(\beta)}{\wp(a)-\wp(\beta)}, \tag{169}$$

pa, kad se a smeni sa z, a β sa $-a_k$, dobija se da je

$$\zeta(z-a_k)=\zeta(z)-\zeta(a_k)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)-\wp'(a_k)}{\wp(z)-\wp(a_k)}, \tag{170}$$

tako da je

$$\sum M_o\zeta(z-a_k)=\zeta(z)\sum M_o-\sum M_o\zeta(a_k)+\frac{1}{2}\sum M_o\cdot\frac{\wp'(z)-\wp'(a_k)}{\wp(z)-\wp(a_k)}.$$

Pošto je izraz

$$-\sum M_o\zeta(a_k)$$

nezavisan od z, pa dakle predstavlja jednu konstantu C, to se prema (168) nalazi da je

$$\sum M_o\zeta(z-a_k)=C+\frac{1}{2}\sum M_o\cdot\frac{\wp'(z)-\wp'(a_k)}{\wp(z)-\wp(a_k)},$$

iz čega se vidi da je izraz

$$\sum M_o\zeta(z-a_k) \tag{171}$$

racionalna funkcija promenljivih $\wp(z)$ i $\wp'(z)$.

Iz (170) se dobija diferencijaljenjem da je

$$\zeta'(z-a_k)=\zeta'(z)+\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{\wp'(z)-\wp'(a_k)}{\wp(z)-\wp(a_k)}. \tag{172}$$

Označeno diferencijaljenje na desnoj strani, kad se izvrši, daje jednu racionalnu kombinaciju funkcija

$$\wp(z),\quad \wp'(z),\quad \wp''(z),\ \ldots, \tag{173}$$

pa pošto je

$$\zeta'(z)=-\wp(z),\quad \wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{g_2}{2}, \tag{174}$$

to se, prema obrascu (172), izraz $\zeta'(z-a_k)$, pa dakle i zbir

$$\sum M_1\zeta'(z-a_k).$$

svodi na racionalnu kombinaciju funkcija $\wp(z)$ i $\wp'(z)$.

Diferencijaljenjem obrasca (172) dobija se $\zeta''(z-\alpha_k)$ kao racionalna kombinacija funkcija $\zeta''(z)$ i (173), što se, prema obrascima (174) opet izražava racionalno samo pomoću $\wp(z)$ i $\wp'(z)$. Prema tome se i izraz

$$\sum M_1 \zeta(z-\alpha_k)$$

izražava racionalno pomoću $\wp(z)$ i $\wp'(z)$.

Produživši tako, uzastopnim diferencijaljenjima i smenom izvoda $\wp''(z)$ njegovom vrednošću (174), nalazi se da se izvod ma koga reda funkcije $\zeta(z-\alpha_k)$, pa dakle i svi izrazi

$$\sum M_n \zeta^{(n)}(z-\alpha_k)$$

takođe izražavaju racionalno pomoću $\wp(z)$ i $\wp'(z)$, što dovodi do ove teoreme: *Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija $F(z)$ izražava se kao racionalna kombinacija funkcija $\wp(z)$ i $\wp'(z)$ koje imaju iste periode kao $F(z)$.*

A pošto se prema obrascu

$$\wp'(z) = \sqrt{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}$$

izvod $\wp'(z)$ izražava kao algebarska funkcija normalne funkcije $\wp(z)$, to ta teorema dovodi do ove:

Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija izražava se kao algebarska funkcija normalne funkcije $\wp(z)$ koja ima iste periode kao $F(z)$.

Iz obrasza

$$\wp(z) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3},$$

za koji smo napred našli da iskazuje vezu između $\operatorname{sn} z$ i one funkcije $\wp(z)$ što njoj odgovara prema vrednosti modula k, dobija se

$$\wp(z) = -\frac{2(\operatorname{sn} z)'}{\operatorname{sn}^3 z},$$

što dovodi do teoreme:

Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija $F(z)$ izražava se kao racionalna funkcija od $\operatorname{sn} z$ i $(\operatorname{sn} z)'$ vezanih sa odgovarajućom joj funkcijom $\wp(z)$.

Naposletku, prema obrascu

$$(\operatorname{sn} z)' = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 z)(1-k^2\operatorname{sn}^2 z)},$$

izvod $(\operatorname{sn} z)'$ izražava se kao algebarska funkcija osnovne eliptičke funkcije $\operatorname{sn} z$, što dovodi do ove teoreme:

Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija izražava se kao algebarska kombinacija funkcije sn z, *vezane sa odgovarajućom joj funkcijom* $\wp(z)$.

Te su teoreme poznate u teoriji eliptičkih funkcija pod nazivom *Liouville-ovih teorema*. Njihova važnost leži u tome, što one svode sve meromorfne dvoperiodične funkcije na jednu od njih, a to je bilo na $\wp(z)$, bilo na sn z; sve su ostale samo algebarske kombinacije tih specijalnih funkcija.

To je i razlog zbog koga se meromorfne dvoperiodične funkcije nazivaju *eliptičkim funkcijama*. Taj se naziv ranije odnosio samo na funkcije sn z, cn z, dn z; kad je pokazano da se i sve meromorfne funkcije sa dve periode svode na ove specijalne transcendente, taj naziv je obuhvatio i sve njih.

ŠESTI ODELJAK

OPŠTI POGLED NA DVO-PERIODIČNE FUNKCIJE

39. SLIČNOSTI I RAZLIKE IZMEĐU PROSTOPERIODIČNIH I DVOPERIODIČNIH FUNKCIJA

Kao što se vidi iz svega ovoga što prethodi, eliptičke funkcije, pod kojima se imaju podrazumevati uopšte sve meromorfne dvoperiodične funkcije, sastavljaju jednu klasu analitičkih funkcija koje pokazuju velike sličnosti sa elementarnim trigonometrijskim funkcijama i njihovim algebarskim kombinacijama i na koje se one svode za specijalnu vrednost modula k. Te su sličnosti istaknute na vidik u onome što je napred izloženo, i one se sastoje npr. u periodičnosti, oblicima krivih linija što ih geometrijski predstavljaju, u adicionoj teoremi, u raznovrsnim obrascima koji im izražavaju osobine, u mogućnosti izražavanja funkcije multipla promenljive pomoću funkcije same te promenljive, itd.

Međutim, između prostoperiodičnih i dvoperiodičnih funkcija postoje i bitne razlike. Postojanje dveju perioda čini da je skup dvoperiodičnih funkcija uži no skup prostoperiodičnih funkcija, jer svaka perioda unosi sobom jedan skup pogodaba koje funkcija treba da ispuni; dve periode unose više tih pogodaba nego jedna. A to povlači sobom često i bitne razlike između ta dva skupa funkcija.

Tako, postoji beskrajno mnogo celih funkcija sa jednom periodom: takve bi npr. bile funkcije

$$e^z, \quad e^{z^m}, \quad \sin z, \quad e^{\sin z}.$$

A ne postoji nikakva cela funkcija sa dve periode.

Zatim, svaka je meromorfna dvoperiodična funkcija izražljiva kao algebarska funkcija jedne jedine funkcije te vrste, npr. funkcije $\wp(z)$ ili $\operatorname{sn} z$. A nikakva slična teorema ne postoji za meromorfne prostoperiodične funkcije.

Prema Hermiteovoj teoremi svaka se meromorfna funkcija sa dve periode izražava kao linearna kombinacija ograničenog broja izraza

$$\zeta(z-a_k), \qquad \zeta'(z-a_k), \qquad \zeta''(z-a_k), \ldots$$

dok nikakva slična teorema ne postoji za meromorfne funkcije sa jednom periodom. Jedna takva teorema u stvari postoji za trigonometrijske funkcije, tj. za racionalne kombinacije funkcija $\sin z$ i $\cos z$, jer se zna iz elementarne analize da se svaka takva kombinacija izražava kao linearna kombinacija ograničenog broja izraza:

$$\sin az, \qquad \cos az,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{z-a_k}{2}, \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{cotg}\frac{z-a_k}{2}, \qquad \frac{d^2}{dz^2}\operatorname{cotg}\frac{z-a_k}{2}, \ldots,$$

gde su a_k određene konstante.

Ali se svaka meromorfna prostoperiodična funkcija ne može izraziti kao racionalna kombinacija funkcija $\sin az$ i $\cos az$, i poslednji stav ne važi za sve funkcije takve vrste.

Dokazano je *da se eliptičke funkcije ne mogu svesti ni na kakve konačne kombinacije elementarnih funkcija.* To su, dakle, potpuno nove transcendente koje je trebalo proučiti same za sebe, ne tražeći da se one svedu na elementarne funkcije, pa da tek onda, preko ovih, budu proučene.

40. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KOJE SE INTEGRALE POMOĆU ELIPTIČKIH FUNKCIJA

Postoji beskrajno mnogo algebarskih diferencijalnih jednačina prvog, drugog, trećeg i višeg reda, koje za svoje integrale imaju eliptičke funkcije.

Tako npr. jednačina prvog reda

(175) $$y'^2-(1-y^2)(1-k^2y^2)=0$$

ima za opšti integral

$$y=\operatorname{sn}(x+C).$$

Ista funkcija je i integral diferencijalne jednačine drugog reda

$$y''-ay^3-by=0,$$

gde su a i b dva stalna broja vezana relacijom

$$a+2(b+1)=0;$$

jednačina se dobija diferencijaljenjem jednačine (175).

Jednačina prvog reda

(176) $$y'^2-4y^3-\alpha y-\beta=0$$

ima za opšti integral

(177) $$y=\gamma(z+C)$$

sa parametrima $g_2=\alpha$, $g_3=\beta$.

Jednačina drugog reda

$$y''-6\,y^2-\frac{a}{2}=0$$

ima funkciju (177) kao jednu klasu svojih partikularnih integrala.

Isti je slučaj i sa jednačinom trećeg reda

$$y'''-12\,yy'=0$$

koja se dobija diferencijaljenjem napred pomenute jednačine

$$y''-6\,y^2-\frac{a}{2}=0.$$

Prema Liouvilleovoj teoremi svaka je meromorfna dvoperiodična funkcija izražljiva kao racionalna kombinacija

$$y=R\,(u,\ u') \tag{178}$$

osnovne eliptičke funkcije $u=\operatorname{sn} z$ i njenog izvoda $u'=(\operatorname{sn} z)'$.

Diferencijaljenjem jednačine (178) dobija se

$$y'=\frac{\partial R}{\partial u}\,u'+\frac{\partial R}{\partial u'}\,u''; \tag{179}$$

pa pošto je

$$u'^{\,2}=(1-u^2)\,(1-k^2\,u^2)=1-(1+k^2)\,u^2+k^2\,u^4, \tag{180}$$

$$u''=2\,k^2\,u^3-(1+k^2)\,u, \tag{181}$$

eliminacijom triju nepoznatih u, u', u'' iz četiri jednačine (178), (179), (180), (181) dobija se jedna algebarska diferencijalna jednačina

$$F(y,\ y')=0 \tag{182}$$

koja sadrži samo funkciju y i njen izvod y'. Prema tome:

Svaka meromorfna dvoperiodična funkcija zadovoljava po jednu algebarsku diferencijalnu jednačinu prvoga reda koja ne sadrži eksplicitno integracionu promenljivu z.

A za takve jednačine se zna da, kad im se poznaje jedan njihov partikularni integral $y=f(z)$, znaće se i opšti integral koji je

$$y=f(z+C).$$

Uzastopnim diferencijaljenjem jednačine (182) dobijaju se redom diferencijalne jednačine drugog, trećeg i višeg reda; sve će njih zadovoljavati meromorfne funkcije sa dve periode. Međutim postoji stav:

Nikakva diferencijalna jednačina

(183) $$F(z, y, y', y'', \ldots) = 0,$$

algebarska po z, y i izvodima, pa ma koga reda ona bila, ako sadrži eksplicitno promenljivu z, ne može imati kao integral nikakvu periodičnu funkciju.

Jer, kad bi se jednačina (183) rešila po z, dobila bi se jedna jednačina

(184) $$z = \Phi(y, y', y'', \ldots),$$

gde bi Φ bila algebarska funkcija promenljive y i njenih izvoda. Kad bi jednačina (183) imala kao integral kakvu periodičnu funkciju sa periodom ω, smena vrednosti z vrednošću $z + m\omega$ (gde je m ma kakav ceo broj) ostavlja vrednosti $y, y', y'', \ldots$ nepromenjene, a funkcija Φ možez a te vrednosti imati najviše onoliko vrednosti koliko ona, kao algebarska funkcija, ima raznih svojih determinacija, a ove su u konačnom broju. Međutim leva strana jednačine (184) imala bi beskrajno mnogo vrednosti $z + m\omega$, što je prema samoj jednačini nemogućno.

No, kao što je pokazano, jednačine (184), u kojima ne figuriše z, mogu imati kao integrale i prostoperiodične, i dvoperiodične funkcije.

Isto tako postoji i beskrajno mnogo sistema simultanih jednačina koje imaju za integrale dvoperiodične funkcije. Takav je npr. sistem

(185) $$\frac{du}{dz} - vw = 0, \qquad \frac{dv}{dz} + uv = 0, \qquad \frac{dw}{dz} + k^2 uv = 0,$$

gde je k kakav realan broj što se nalazi između 0 i 1. Sistem ima za integrale

$$u = \operatorname{sn}(z + C_1),$$

$$v = \operatorname{cn}(z + C_2),$$

$$w = \operatorname{dn}(z + C_3),$$

o čemu se može lako uveriti smenom tih izraza u jednačinama (185) i vodeći račun o obrascima koji izražavaju izvode

$$(\operatorname{sn} z)', \ (\operatorname{cn} z)', \ (\operatorname{dn} z)'$$

pomoću funkcija

$$\operatorname{sn} z, \ \operatorname{cn} z, \ \operatorname{dn} z.$$

A lako se može uveriti, kao i maločas u slučaju jednačine (184), da nikakav sistem simultanih jednačina

$$\frac{du}{dz} = f(z, u, v, w),$$

$$\frac{dv}{dz} = \varphi(z, u, v, w),$$

$$\frac{dw}{dz} = \psi(z, u, v, w),$$

gde su f, φ, ψ, algebarske funkcije promenljivih koje sadrže, ako koja od njih sadrži eksplicitno promenljivu z, ne može imati kao integrale periodične funkcije.

Neka je navedeno još i to, da su u teoriji algebarskih diferencijalnih jednačina prvoga reda poznati *potrebni* i *dovoljni* uslovi da bi data jednačina oblika (182) imala kao svoje integrale meromorfne dvoperiodične funkcije. Problem je rešen primenom opštih Cauchyevih teorema iz teorije analitičkih funkcija.

41. KRATKA ISTORIJA ELIPTIČKIH FUNKCIJA

Istorija eliptičkih funkcija može se podeliti na dve periode:

1^0 proučavanje *eliptičkih integrala*;

2^0 proučavanje *eliptičkih funkcija* kao inverzija eliptičkih integrala.

Prva perioda. — Pod eliptičkim integralima podrazumevaju se integrali u kojima pod integralnim znakom figuriše racionalno: ili sam kvadratni koren iz kakvog polinoma X četvrtog ili trećeg stepena, ili pored njega još i sama nezavisno promenljiva količina x. To su, dakle, integrali oblika

$$\int R(x, \sqrt{X})\, dx,$$

gde je X kakav polinom četvrtog ili trećeg stepena po x, a R je racionalna funkcija dveju promenljivih x i $\sqrt{X}$.

Na takve je integrale prvi naišao Wallis 1655. godine, pokušavajući da odredi dužinu luka elipse. Najdublja ispitivanja na eliptičkim integralima izvršio je Euler koji ih je sveo na nekoliko normalnih oblika i ovima ispitao osobine. Ali ono, zbog čega su njegova ispitivanja postala osnovica za teoriju i eliptičkih integrala i eliptičkih funkcija, jeste njegov pronalazak od 1751. godine o integralu diferencijalne jednačine

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

gde je X ma kakav polinom četvrtog ili trećeg stepena po promenljivoj x, a Y takav isti polinom po promenljivoj y.

U onome što je napred izloženo naveden je oblik toga integrala i on je iskorišćen za dobijanje osnovnih rezultata teorije eliptičkih funkcija. Euler je taj, za teoriju te klase funkcija, osnovni pronalazak učinio sretnim slučajem, probom, ili, kako on sam to kaže „tentando et divinando". Lagrange je 1768. godine prvi dao pravi, analitički dokaz Eulerovog rezultata.

Među mnogobrojnim ispitivanjima u oblasti eliptičkih integrala posle Eulerovih radova, najviše se ističu opsežna Legendreova ispitivanja, vršena u pravcu Eulerovih i publikovana u velikom delu toga matematičara „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes", štampanog 1825—1828. god. Pošto je eliptičke integrale sveo na utvrđene tipove, Legendre je ove u pojedinostima proučio, dao praktične metode za njihovo brojno izračunavanje i sastavio tablice njihovih brojnih vrednosti.

Landen je dosta unapredio teoriju eliptičkih integrala postavivši metodu za njihove modularne transformacije, tj. za promenu modula k u osnovnom eliptičkom integralu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

i time, pored ostalih koristi, jako uprostio i proširio upotrebu Legendreovih tablica.

Druga perioda. — U toj periodi istorije eliptičkih funkcija počinje proučavanje tih funkcija kao *inverzija eliptičkih integrala*. Ono počinje ispitivanjima Abela (1825. god.) i Jacobia (1828. god.), koji su skoro u jedno isto vreme, potpuno nezavisno jedan od drugoga, došli na ideju proučavanja inverzije eliptičkih integrala. Oni su odmah pronašli dvoperiodičnost tih inverzija i postavili osnovne obrasce za njihovu teoriju, istakli na vidik njihovu adicionu teoremu i njene posledice, našli njihove izraze u obliku beskrajnih redova i količnika takvih redova, izrazili ih u obliku beskrajnih produkata, našli veze između raznih eliptičkih funkcija, veze između njihovih perioda i modula k itd.

Jacobi je glavne rezultate svojih istraživanja izneo u svome osnovnom delu „Fundamenta nova theoriae funct. ellipt." publikovanom 1829. god. U tim istraživanjima osnovnu ulogu igra Jacobieva „teta-funkcija", o kojoj je bilo reči u prednjim izlaganjima, i koja je poslužila kao reduktivni elemenat za tri osnovne eliptičke funkcije.

Jacobi i njegovi savremenici upotrebljavali su za osnovne eliptičke funkcije $\operatorname{sn} z$ i $\operatorname{cn} z$ oznake $\sin am\, z$ i $\cos am\, z$, kao što je to pomenuto u ranijim izlaganjima. Današnja označavanja sa $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ uveo je Gudermann koji je takođe unapredio teoriju tih funkcija.

Razumljivo je da opšta Cauchyeva teorija analitičkih funkcija imaginarne promenljive količine nije mogla ostati bez jakog uticaja na teoriju eliptičkih funkcija. Primenom Cauchyevih teorema učinjeni su veliki napreci u toj teoriji, a mnogi su, dotle već poznati rezultati, postali bolje rasvetljeni kad se stalo na gledište opšte Cauchyeve teorije. Ova je npr. dovela Liouvillea (1847. god.) do pojma paralelograma perioda, do osnovnog stava po kome je integral dvoperiodične funkcije, uzet duž paralelograma perioda, jednak nuli, do stava po kome svaka takva funkcija mora imati singulariteta u ravni nezavisno promenljive količine itd., što mu je sve dalo osnovicu za jednu opštu teoriju dvoperiodičnih funkcija.

Jedan od najvažnijih rezultata Liouvilleovih istraživanja je stav da se sve meromorfne funkcije sa dve periode izražavaju kao racionalne kombinacije funkcija $\operatorname{sn} z$ i $\operatorname{sn}' z$, a kao algebarske kombinacije same funkcije $\operatorname{sn} z$. Liouville je dokazao i nesvodljivost eliptičkih funkcija na elementarne funkcije, pokazavši da su to potpuno nove transcendente, sasvim nov analitički instrumenat.

Opštoj teoriji dvoperiodičnih funkcija mnogo je doprineo i Jacobi, dokazavši između ostalog, i nemogućnost postojanja uniformnih funkcija sa više od dve periode, kao stav da količnik dveju perioda nije nikad realan broj.

Pravo poreklo perioda, sa gledišta opšte Cauchyeve teorije funkcija, prvi je istakao na vidik Puiseux, pokazavši kako se periode pojavljuju kad promenljiva, od koje zavisi funkcija pod integralnim znakom kakvog krivolinijskog integrala, opisuje razne putanje u svojoj ravni. U tome su pogledu jako doprinela rasvetljavanju stvari i istraživanja Riemanna, koji je naročito istakao ulogu algebarskih kritičkih tačaka pri javljanju perioda, upotrebivši pri tome svoju novu metodu za proučavanje račvanja i determinacija multiformnih funkcija i stvorivši pojam Riemannovih površina.

Od velikog su značaja za razvitak teorije eliptičkih funkcija bila Hermiteova istraživanja, otpočeta 1844. god, vršena opet sa gledišta Cauchyeve teorije analitičkih funkcija. Pored mnogobrojnih rezultata o transformacijama eliptičkih integrala i eliptičkih funkcija jednih u druge, o vezama između modula k i perioda funkcije (modularna funkcija), o aritmetičkim posledicama pojedinih stavova teorije eliptičkih funkcija itd. Hermite je dokazao stav od velike važnosti, da je svaka meromorfna dvoperiodična funkcija izražljiva kao linearna kombinacija jedne jedine funkcije i njenih izvoda, a to je „zeta-funkcija“ koja je napred proučena. Time je nađen jedan linearni reduktivni elemenat za sve funkcije te vrste, a kao neposredna posledica toga stava je činjenica da se integral ma koje meromorfne dvoperiodične funkcije izražava kao linearna kombinacija jedne jedine funkcije i njenih izvoda, a to je funkcija $\log \sigma(z)$ koja je takođe napred proučena.

Teoriju eliptičkih funkcija su znatno unapredila i proširila istraživanja Weierstrassa, početa 1840. godine, koji je u tu teoriju uneo nove poglede i nove metode. Uvođenjem svoje normalne eliptičke funkcije $\wp(z)$, na mesto dotle uvedene osnovne funkcije $\operatorname{sn} z$, Weierstrass je obrasce za eliptičke funkcije učinio prostijim i simetričnijim. Osim toga, pokazalo se da se tim i sama metoda istraživanja olakšava i uprošćava. Weierstrass je razvio potpunu teoriju svoje normalne funkcije $\wp(z)$, prilagodio joj sve do tada poznate obrasce za eliptičke funkcije, našao mnoštvo novih obrazaca i istakao na vidik ulogu te funkcije kao reduktivnog elementa za sve ostale meromorfne dvoperiodične funkcije. Način, na koji je on izrazio $\wp(z)$ kao količnik dveju celih funkcija, mnogo je opštiji od onoga na koji je Jacobi (pomoću svoje „teta-funkcije") rešio problem za funkcije $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$. Weierstrassov način takvog izražavanja je i prostiji, i proteže se i na druge dvoperiodične funkcije. I metoda koju je on uveo, i oblik koji je on dao teoriji eliptičkih funkcija, znatno se razlikuju od onoga što se imalo do njegovih radova.

Briot i Bouquet su doprineli teoriji ispitujući vezu eliptičkih funkcija sa diferencijalnim jednačinama. Oni su 1854. god. našli da kad god je integral jedne algebarske diferencijalne jednačine prvoga reda, koja ne sadrži eksplicitno nezavisno promenljivu z, *uniformna* funkcija te promenljive, onda je taj integral uvek:

1° ili racionalna,

2° ili prostoperiodična,

3° ili dvoperiodična funkcija te promenljive.

Isti su matematičari dali potrebne i dovoljne uslove za svaki od ta tri slučaja, da dakle i za slučaj kad je integral dvoperiodična funkcija promenljive z. Oni su svoja istraživanja proširili i na opštiji slučaj kad je integral *multiformna* funkcija promenljive z, ali za jednu datu vrednost z ima ograničen broj svojih vrednosti. Za takve slučajeve oni su našli da je integral algebarska funkcija ili promenljive z, ili izraza e^{az}, ili izraza $\operatorname{sn} az$ (gde je a stalan broj) i dali su potrebne uslove za svaki od tih slučajeva.

Hermite i Picard su našli za mnoštvo diferencijalnih jednačina, a naročito za izvesne tipove linearnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, da su im integrali dvoperiodične funkcije.

Uporedo sa razvijanjem teorije eliptičkih funkcija išle su i njihove primene na raznovrsne probleme matematičke analize, više aritmetike, analitičke geometrije, mehanike, matematičke fizike i dr. Takve su primene dovodile do rešenja problema koja su bila nemogućna ili nepotpuna bez uvođenja eliptičkih funkcija. I te su primene bile jedan od razloga što se teorija eliptičkih funkcija razvila do današnje njene potpunosti i obimnosti.