Г. Ђорђу Нешићу, проф. Вел. Шк.

Писац.

DIE INVARIANTEN DER LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN n^{TER} ORDNUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

AM SONNABEND, DEN 29. SEPTEMBER 1894

VON

PETAR L. VUKIĆEVIĆ

AUS SVETLIĆ (SERBIEN).

OPPONENTEN:

HERR STUD. PHIL. **EMIL LADEWIG.**
HERR DR. PHIL. **ERNST WENDT.**
HERR DR. PHIL. **GEORG WALLENBERG.**

BERLIN

DRUCK VON GEBR. UNGER (TH. GRIMM)

1894.

Litteratur:

G. H. Halphen, Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. [Acta mathem. T. 3.]

F. Brioschi, Les invariants des équations différentielles linéaires. [Acta mathem. T. 14.]

Lipmann Schlesinger, Ein Beitrag zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit einer Relation dritten Grades. [Inauguraldissertation.] Berlin 1888.

Max Meyer, Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Hilfe von Differentialinvarianten. [Inauguraldissertation.] Berlin 1893.

Berichtigungen.

Seite 2,	Zeile	10 v. u.	lies	λ_{n-i}	statt	$\lambda_{n\ i}$
„ 5,	„	4 v. u.	„	η_1 und	„	η_2 und
„ 6,	„	5 v. o.	„	Inte-	„	Inter-
„ 11,	„	8 v. u.	„	$\frac{n-1}{2}$	„	$\frac{n\ 1}{2}$
„ 24,	„	9 v. o.	„	die	„	dic

Erstes Capitel.

Vorbereitung.

1. Ich nehme an, dass y eine Function von z und z eine Function von x ist. Ferner werde $\frac{d^n v}{dx^n} = v^{(n)}$ gesetzt.

Durch successive Differentiation erhalten wir bekanntlich:

$$y' = \frac{dy}{dz} z',$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dz^2} z'^2 + \frac{dy}{dz} z'',$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dz^2} z'^3 + 3 \frac{d^2y}{dz^2} z'' z' + \frac{dy}{dz} z''',$$

$$y'''' = \frac{d^4y}{dz^4} z'^4 + 6 \frac{d^3y}{dz^3} z'' z'^2 + \frac{d^2y}{dz^2} [4 z''' z' + 3 z''^2] + \frac{dy}{dz} z'''',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daraus ersieht man, dass die n^{te} Ableitung durch eine Gleichung von der Form

$$(\alpha_1) \,.\,. \, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dz^n} z'^n + \binom{n}{2} \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} z'' z'^{n-2} + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \lambda_{n-3} \frac{d^{n-3}y}{dz^{n-3}} + \ldots + \lambda_2 \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} z^{(n)};$$

bestimmt wird, worin die Coefficienten λ_i vorläufig unbekannte rationale Functionen von z' und der Ableitungen von z' sind. Es handelt sich um die Bestimmung derselben. Zu dem Ende schreibe ich:

$$(\alpha_2) \,.\,.\,.\,.\,. \qquad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dz^n} z'^n + \binom{n}{2} \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} z'' z'^{n-2} + \ldots\ldots\ldots$$

Ersetzt man in dieser Formel n durch $n-\nu$, wo $\nu \geqq 3$ ist, differentiirt den so erhaltenen Ausdruck ν-mal hintereinander, so kommt $y^{(n)}$ wieder in der Entwickelung zum Vorschein, woraus sofort das Gesetz erhellt, nach welchem λ_{n-2} zu construiren ist; benutzt man dabei die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)\dots(\nu+m+1) = \frac{n(n+1)\dots(n+m)}{m+1}$$

so ergiebt sich:

$$\lambda_{n-2} = \binom{n}{3} z''' z'^{n-3} + 3\binom{n}{4} z''^2 z'^{n-4},$$

wo

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1\,.\,2\,\,\dots\,\,r}$$

ist, und

$$(\alpha_3)\dots\quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dz^n} z'^n + \binom{n}{2}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} z'' z'^{n-2} + \frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}\left[\binom{n}{3} z''' z'^{n-3} + 3\binom{n}{4} z''^2 z'^{n-4}\right] + \dots$$

Unterwirft man (α_3) derselben Operation, so findet man:

$$\lambda_{n-3} = \binom{n}{4} z^{\mathrm{IV}} z'^{n-4} + 10\binom{n}{5} z''' z'' z'^{n-5} + 15\binom{n}{6} z''^3 z'^{n-6}.$$

Fährt man so fort, so lassen sich bilden

$$\lambda_{n-4} = \binom{n}{5} z^{\mathrm{V}} z'^{n-5} + 15\binom{n}{6} z^{\mathrm{IV}} z'' z'^{n-6} + 10\binom{n}{6} z'''^2 z'^{n-6} + 7\cdot 15\binom{n}{7} z''' z''^2 z'^{n-7} + \\ + 7\cdot 15\binom{n}{8} z''^4 z'^{n-8},$$

$$\lambda_{n-5} = \binom{n}{6} z^{(6)} z'^{n-6} + 21\binom{n}{7} z^{\mathrm{V}} z'' z'^{n-7} + 35\binom{n}{7} z^{\mathrm{IV}} z''' z'^{n-7} + 2\cdot 7\cdot 15\binom{n}{8} z^{\mathrm{IV}} z''^2 z'^{n-8} + \\ + 2\cdot 7\cdot 20\binom{n}{8} z'''^2 z'' z'^{n-8} + 7\cdot 12\cdot 15\binom{n}{9} z''^3 z''' z'^{n-9} + 7\cdot 9\cdot 15\binom{n}{10} z''^5 z'^{n-10}.$$

. . . .

Setzt man diese Werthe für $\lambda_{n-i\ (i=2,3,\dots,n-2)}$ in der Gleichung (α_1), so folgt die Formel:

$$\begin{aligned}(\mathrm{I})\dots\quad y^{(n)} = {} & \frac{d^n y}{dz^n} z'^n + \binom{n}{2}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} z'' z'^{n-2} + \frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}\left[\binom{n}{3} z''' z' + 3\binom{n}{4} z''^2\right] z'^{n-4} \\ & + \frac{d^{n-3}y}{dz^{n-3}}\left[\binom{n}{4} z^{\mathrm{IV}} z'^2 + 10\binom{n}{5} z''' z'' z' + 15\binom{n}{6} z''^3\right] z'^{n-6} \\ & + \frac{d^{n-4}y}{dz^{n-4}}\left[\binom{n}{5} z^{\mathrm{V}} z'^3 + 15\binom{n}{6} z^{\mathrm{IV}} z'' z'^2 + 10\binom{n}{6} z'''^2 z'^2 + 7\cdot 15\binom{n}{7} z''' z''^2 z' + \right. \\ & \left. + 7\cdot 15\binom{n}{8} z''^4\right] z'^{n-8} \\ & + \frac{d^{n-5}y}{dz^{n-5}}\left[\binom{n}{6} z^{(6)} z'^4 + 21\binom{n}{7} z^{\mathrm{V}} z'' z'^3 + 35\binom{n}{7} z^{\mathrm{IV}} z''' z'^3 + 2\cdot 7\cdot 15\binom{n}{8} z^{\mathrm{IV}} z''^2 z'^2 \right. \\ & \left. + 2\cdot 7\cdot 20\binom{n}{8} z'''^2 z'' z'^2 + 7\cdot 12\cdot 15\binom{n}{9} z''' z''^2 z' + 7\cdot 9\cdot 15\binom{n}{10} z''^5\right] z'^{n-10} \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{dy}{dz} z^{(n)}\end{aligned}$$

2. Nun schreite ich zur Herleitung der Umkehrungsformel, ganz durch denselben Gedankengang, mit etwas anderer Anordnung.

Wiederum erhält man durch successive Differentiation:

$$\frac{dy}{dz}=y'\frac{1}{z'},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=y''\frac{1}{z'^2}-y'\frac{z''}{z'^3},$$

$$\frac{d^3y}{dz^3}=y'''\frac{1}{z'^3}-3y''\frac{z''}{z'^4}-y'\left[\frac{z'''}{z'^4}-3\frac{z''^2}{z'^5}\right],$$

$$\frac{d^4y}{dz^4}=y^{\mathrm{IV}}\frac{1}{z'^4}-6y'''\frac{z''}{z'^5}-y''\left[4\frac{z'''}{z'^5}-15\frac{z''^2}{z'^6}\right]-y'\left[\frac{z^{\mathrm{IV}}}{z'^5}-10\frac{z'''z''}{z'^6}+15\frac{z''^3}{z'^7}\right],$$

$$\frac{d^5y}{dz^5}=y^{\mathrm{V}}\frac{1}{z'^5}-10y^{\mathrm{IV}}\frac{z''}{z'^6}-y'''\left[10\frac{z'''}{z'^6}-45\frac{z''^2}{z'^7}\right]-y''\left[5\frac{z^{\mathrm{IV}}}{z'^6}-60\frac{z'''z''}{z'^7}+7\cdot15\frac{z''^3}{z'^8}\right]$$
$$-y'\left[\frac{z^{\mathrm{V}}}{z'^6}-15\frac{z^{\mathrm{IV}}z''}{z'^7}-10\frac{z'''^2}{z'^7}+7\cdot15\frac{z'''z''^2}{z'^8}-7\cdot15\frac{z''^4}{z'^9}\right],$$

. . . .

woraus folgt:

$$(\beta)\;\ldots\;\frac{d^ny}{dz^n}=y^{(n)}\frac{1}{z'^n}-\binom{n}{2}y^{(n-1)}\frac{z''}{z'^{n+1}}-\mu_{n-2}\,y^{(n-2)}-\mu_{n-3}\,y^{(n-3)}\ldots-\mu_2y''-\mu_1y',$$

worin die Coefficienten $\mu_{n-i\;(i=2,3,\ldots\,n-1)}$ vorläufig unbekannte rationale Functionen von z' und der Ableitungen von z' sind. Nach derselben Methode findet man:

$$\mu_{n-2}=\binom{n}{3}\frac{z'''}{z'^{n+1}}-3\binom{n+1}{4}\frac{z''^2}{z'^{n+2}}$$

$$\mu_{n-3}=\binom{n}{4}\frac{z^{\mathrm{IV}}}{z'^{n+1}}-10\binom{n+1}{5}\frac{z'''z''}{z'^{n+2}}+15\binom{n+2}{6}\frac{z''^3}{z'^{n+3}},$$

$$\mu_{n-4}=\binom{n}{5}\frac{z^{\mathrm{V}}}{z'^{n+1}}-15\binom{n+1}{6}\frac{z^{\mathrm{IV}}z''}{z'^{n+2}}-10\binom{n+1}{6}\frac{z'''^2}{z'^{n+2}}+7\cdot15\binom{n+2}{7}\frac{z'''z''^2}{z'^{n+3}}-7\cdot15\binom{n+3}{8}\frac{z''^4}{z'^{n+4}},$$

$$\mu_{n-5}=\binom{n}{6}\frac{z^{(6)}}{z'^{n+1}}-21\binom{n+1}{7}\frac{z^{\mathrm{V}}z''}{z'^{n+2}}-35\binom{n+1}{7}\frac{z^{\mathrm{IV}}z'''}{z'^{n+2}}+2\cdot7\cdot15\binom{n+2}{8}\frac{z^{\mathrm{IV}}z''^2}{z'^{n+3}}+$$
$$+2\cdot7\cdot20\binom{n+2}{8}\frac{z'''^2z''}{z'^{n+3}}-7\cdot12\cdot15\binom{n+3}{9}\frac{z'''z''^2}{z'^{n+4}}-7\cdot9\cdot15\binom{n+4}{10}\frac{z''^5}{z'^{n+5}},$$

Durch Einsetzung der Werthe von $\mu_{n-i\;(i=2,\ldots\,n-2)}$ in der Gleichung (β) und durch beiderseitige Multiplication mit z'^n, erhält man die Umkehrungsformel:

$$(\mathrm{II})\dots\quad \frac{d^n y}{dz^n} z'^n = y^{(n)} - \binom{n}{2} y^{(n-1)} \frac{z''}{z'} - y^{(n-2)}\left[\binom{n}{3}\frac{z'''}{z'} - 3\binom{n+1}{4}\frac{z''^2}{z'^2}\right]$$
$$- y^{(n-3)}\left[\binom{n}{4}\frac{z^{IV}}{z'} - 10\binom{n+1}{5}\frac{z'''z''}{z'^2} + 15\binom{n+2}{6}\frac{z''^3}{z'^3}\right]$$
$$- y^{(n-4)}\left[\binom{n}{5}\frac{z^{V}}{z'} - 15\binom{n+1}{6}\frac{z^{IV}z''}{z'^2} - 10\binom{n+1}{6}\frac{z'''^2}{z'^2} + 7\cdot 15\binom{n+2}{7}\frac{z'''z''^2}{z'^3} - \right.$$
$$\left. - 7\cdot 15\binom{n+3}{8}\frac{z''^4}{z'^4}\right]$$
$$- y^{(n-5)}\left[\binom{n}{6}\frac{z^{(6)}}{z'} - 21\binom{n+1}{7}\frac{z^{V}z''}{z'^2} - 35\binom{n+1}{7}\frac{z^{IV}z'''}{z'^2} + 2\cdot 7\cdot 15\binom{n+2}{8}\frac{z^{IV}z''^2}{z'^3} + \right.$$
$$\left. + 2\cdot 7\cdot 20\binom{n+2}{8}\frac{z'''^2 z''}{z'^3} - 7\cdot 12\cdot 15\binom{n+3}{9}\frac{z'''z''^3}{z'^4} - 7\cdot 9\cdot 15\binom{n+4}{10}\frac{z''^5}{z'^5}\right]$$
$$- \dots\dots\dots$$

Durch ihre Zusammensetzung bietet uns diese Formel sehr interessante Wahrnehmungen: abgesehen von den Binominalfactoren, stimmt der Coefficient von $y^{(n-\varrho)}$ völlig mit dem Coefficienten von y' in dem Ausdrucke für $\frac{d^{\varrho+1}y}{dz^{\varrho+1}} z'^{\varrho+1}$ überein; die Binominalfactoren in dem Coefficienten von $y^{(n-\varrho)}$ sind einem bestimmten Gesetze unterworfen: nämlich in dem ersten Gliede steht $\binom{n}{\varrho+1}$, in jedem folgenden wachsen gleichzeitig n und ϱ um eine Einheit oder nicht, je nachdem der Exponent von z' im Nenner wächst oder nicht.

Der Beweis, dass alle beide Formeln (I) und (II) richtig sind, wird durch das Schliessen von n auf $n+1$ geführt.

Diese Formeln (I) und (II) nebst der Leibniz'schen Formel finden ihre unentbehrliche Anwendung bei der Transformation der Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mittelst der Substitution

$$\begin{cases} z = \varphi(x) \\ y = \varrho(x)\cdot u \end{cases}$$

je nachdem uns die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit der abhängigen Variablen y und der unabhängigen Veränderlichen x oder z gegeben ist.

3. Gesetzt dass

$$(\gamma_1)\dots\; \eta'' + g\eta_{\prime} = 0$$
$$(\gamma_2)\dots\; y = \eta_{\prime}^{\,n-1}$$

ist, so lässt sich durch die successive Differentiation der Gleichung (γ_2), Einsetzung der Werthe für η'' aus (γ_1) in dieselbe und durch Umsetzung dieser Glieder von der rechten nach der linken Seite, folgende Differentialgleichung n^{ter} Ordnung aufstellen:

$$\begin{aligned}0 = y^{(n)} &+ (n-1)(gy)^{(n-2)} + 2(n-2)(gy')^{(n-3)} + 3(n-3)\big(g[y''+(n-1)gy]\big)^{(n-4)} \\ &+ 4(n-4)\big(g[y'''+(n-1)(gy)'+2(n-2)gy']\big)^{(n-5)} + 5(n-5)\big(g[y^{\mathrm{IV}}+ \\ &\qquad +(n-1)(gy)''+2(n-2)(gy')'+3(n-3)g\big(y''+(n-1)gy\big)]\big)^{(n-6)} \\ &+ 6(n-6)\big(g[y^{\mathrm{V}}+(n-1)(gy)'''+2(n-2)(gy')''+3(n-3)\{g\big(y''+ \\ &\qquad +(n-1)gy\big)\}'+4(n-4)g\big(y'''+(n-1)(gy)'+2(n-2)gy'\big)]\big)^{(n-7)} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \nu(n-\nu)\big(g[y^{(\nu-1)}+(n-1)(gy)^{(\nu-3)}+2(n-2)(gy')^{(\nu-4)}+3(n-3)\{g\big(y''+ \\ &\qquad +(n-1)gy\big)\}^{(\nu-5)}+4(n-4)\{g\big(y'''+(n-1)(gy)'+2(n-2)gy'\big)\}^{(\nu-6)}+ \\ &\qquad +\ldots.]\big)^{(n-\nu-1)} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (n-1)g[y^{(n-2)}+(n-1)(gy)^{(n-4)}+2(n-2)(gy')^{(n-5)}+3(n-3)\{g\big(y''+ \\ &\qquad +(n-1)gy\big)\}^{(n-6)}+4(n-4)\{g\big(y'''+(n-1)(gy)'+2(n-2)gy'\big)\}^{(n-7)}+\ldots];\end{aligned}$$

d. h.

$$y^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu(n-\nu)[gy^{(\nu-1)}]^{(n-\nu-1)}+\sum_{\mu=1}^{n-3}\mu(n-\mu)\sum_{\nu=\mu+2}^{n-1}\nu(n-\nu)[g\cdot(gy^{(\mu-1)})^{(\nu-\mu-2)}]^{(n-\nu-1)}+\ldots=0,$$

woraus sich ergiebt

$$\begin{aligned}y^{(n)}+y^{(n-2)}\cdot g\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu(n-\nu)+y^{(n-3)}\cdot g'\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(n-\nu-1)+y^{(n-4)}[g''\sum_{\nu=1}^{n-3}\nu(n-\nu)\tbinom{n-\nu-1}{2}+ \\ +g^2\sum_{\mu=1}^{n-3}\mu(n-\mu)\sum_{\nu=\mu+2}^{n-1}\nu(n-\nu)]+y^{(n-5)}[g'''\sum_{\nu=1}^{n-4}\nu(n-\nu)\tbinom{n-\nu-1}{3}+ \\ +gg'\sum_{\mu=1}^{n-4}\mu(n-\mu)\sum_{\nu=\mu+2}^{n-1}\nu(n-\nu)(2n-\nu-\mu-4)]+\ldots\ldots=0\end{aligned}$$

oder

$$\text{(III)}\ldots\qquad y^{(n)}+k_2y^{(n-2)}+k_3y^{(n-3)}+k_4y^{(n-4)}+\ldots\ldots+k_ny=0$$

worin

$$\text{(IV)}\ldots\qquad\begin{cases}k_2=\binom{n+1}{3}g,\ k_3=2\binom{n+1}{4}g',\ k_4=\binom{n+1}{5}[3g''+\dfrac{5n+7}{3}g^2], \\ k_5=\binom{n+1}{6}[4g'''+2(5n+7)gg'],\ \text{etc.}\end{cases}$$

Sind nun η_2 und η_2 zwei verschiedene Integrale der Differentialgleichung (γ_1), so haben wir n Integrale y_i der Differentialgleichung (III)

$$\text{(V)}\ldots.\qquad y_i=\eta_1^{n-i}\eta_2^{i-1}\qquad\qquad (i=1,2,\ldots.n)$$

und das allgemeine Integral von (III) ist:

$$y = \varphi(\eta_1, \eta_2),$$

wo $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ eine binäre Form von dem Grade $n-1$ mit constanten Coefficienten bedeutet.

Aus (V) lässt sich schliessen, dass die Differentialgleichung (III) der Typus einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist, zwischen deren Integralen die Relationen:

$$y_\nu\, y_{\mu+1} - y_\mu\, y_{\nu+1} = 0 \qquad {\scriptstyle \nu<\mu} \left({\nu=1,2\ldots(n-2) \atop \mu=2,3\ldots(n-1)}\right)$$

bestehen, von denen übrigens nur $n-2$ parabolische Relationen

$$y_\nu\, y_{\nu+2} = y_{\nu+1}^2 \qquad (\nu=1,2,\ldots n-2)$$

von einander unabhängig sind.

4. Bestehen zwischen n monogenen Functionen $y_{i\,(i=1,2,\ldots n-2)}$ einer Variablen z $n-2$ homogene irreductible Relationen vom Grade $m_{k\,(k=1,2,\ldots n-2)}$ mit constanten Coefficienten:

$$\text{(VI)} \ldots\ldots \varphi_k(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \qquad (k=1,2,3,\ldots n-2)$$

so sind, wenn man

$$\frac{y_i}{y_n} = \mathfrak{y}_{i\,(i=1,2,\ldots n-1)} \text{ und } \varphi_k(y_1, y_2, \ldots y_n) = y_n^{m_k}\, F_k(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_{n-1}) \qquad (k=1,2,\ldots n-2)$$

setzt, die Grössen

$$\mathfrak{y}_{i\,(i=2,3,\ldots n-1)}$$

durch die irreductiblen Gleichungen:

$$\text{(VII)} \ldots\ldots F_k(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_{n-1}) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots n-2)$$

als algebraische Functionen von $\mathfrak{y}_1$ bestimmt:

$$\text{(VIII)} \ldots\ldots \mathfrak{y}_i = f_{i-1}(\mathfrak{y}_i) \qquad (i=2,3,\ldots n-1)$$

Es befriedige nun noch ein zweites System von Functionen $Y_{i\,(i=1,2,\ldots n)}$ der unabhängigen Veränderlichen z' dieselben Relationen:

$$\text{(VI}'\text{)} \ldots\ldots \varphi_k(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_n) = 0$$

so dass bei analoger Bezeichnung:

$$\text{(VII}'\text{)} \ldots\ldots F_k(\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots \mathfrak{Y}_{n-1}) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots n-2)$$

und

$$\text{(VIII}'\text{)} \ldots\ldots \mathfrak{Y}_i = f_{i-1}(\mathfrak{Y}_1) \qquad (i=2,3,\ldots n-1)$$

wird. Es sei ferner:

$$\begin{aligned} &\text{(IX)} \ldots\ldots \mathfrak{y}_i = g_i(z) \\ &\text{(IX}'\text{)} \ldots\ldots \mathfrak{Y}_i = G_i(z') \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

Wir setzen nun die unabhängigen Variablen z und z' in Abhängigkeit von einander durch die Gleichung

$$g_1(z) = G_1(z'),$$

aus welcher sich

$$(\mathrm{X}) \ldots . \; z = \psi(z')$$

ergeben mag, so dass also identisch:

$$(\mathrm{XI}) \ldots . \; g_1[\psi(z')] = G_1(z')$$

ist und demnach $\mathfrak{y}_1$ durch die Substitution (X) in $\mathfrak{Y}_1$ übergeht. Gleichzeitig gehen dann aber auch

$$\mathfrak{y}_i \text{ in } \mathfrak{Y}_i \qquad (i=2,3,\ldots . n-1)$$

über, denn einerseits ist

$$\mathfrak{y}_i = f_{i-1}[g_1(z)] = f_{i-1}[G_1(z')] \qquad (i=2,3,\ldots . n-1)$$

und andererseits:

$$\mathfrak{Y}_i = f_{i-1}[G_1(z')]^{*)} \qquad (i=2,3,\ldots . n-1)$$

Also:

$$(\mathrm{XII}) \ldots . \; y_i = \frac{y_n}{Y_n} \cdot Y_i \qquad (i=1,2,3,\ldots . n)$$

Daher folgt der Satz:

Bestehen zwischen n monogenen Functionen $y_{i\,(i=1,2\ldots . n)}$ der Variablen z $n-2$ homogene irreductible Relationen von den Graden resp. $m_{k\,(k=1,2,\ldots . n-2)}$ mit constanten Coefficienten

$$\varphi_k(y_1, y_2, y_3 \ldots . y_n) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots . n-2)$$

und befriedigt dieselben Relationen ein zweites System von n Functionen Y_i der unabhängigen Veränderlichen z', so unterscheiden sich die n Functionen y_i, wenn man sie durch die Substitution

$$z = \psi(z')$$

transformirt, als Functionen von z' aufgefasst, von den n Functionen Y_i nur durch den allen gemeinsamen Factor $\frac{y_n}{Y_n}$.

---

*) Vgl. *Lipm. Schlesinger*, Dissert. p. 18; *Max Mayer*, Dissert. p. 11.

Zweites Capitel.

Die Invarianten der linearen homogenen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

1. Transformirt man die lineare homogene Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A})\ldots \frac{d^ny}{dz^n}+\mathfrak{p}_1\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\mathfrak{p}_2\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}+\ldots+\mathfrak{p}_{n-1}\frac{dy}{dz}+\mathfrak{p}_n y=0,$$

worin $\mathfrak{p}_{i\,(i=1,2,\ldots n)}$ Functionen von z bedeuten, durch die Substitution

$$y=\sigma\cdot v$$

wo σ und v Functionen von z sind, so erhält man die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}_1)\ldots \sigma\frac{d^nv}{dz^n}+\mathfrak{q}_1\frac{d^{n-1}v}{dz^{n-1}}+\mathfrak{q}_2\frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}}+\ldots+\mathfrak{q}_{n-1}\frac{dv}{dz}+\mathfrak{q}_n v=0$$

in welcher

$$(\alpha_1)\ldots \mathfrak{q}_k=\binom{n}{k}\frac{d^k\sigma}{dz^k}+\binom{n-1}{k-1}\mathfrak{p}_1\frac{d^{k-1}\sigma}{dz^{k-1}}+\binom{n-2}{k-2}\mathfrak{p}_2\frac{d^{k-2}\sigma}{dz^{k-2}}+\ldots+\binom{n-k+1}{1}\mathfrak{p}_{k-1}\frac{d\sigma}{dz}+\mathfrak{p}_k\sigma \qquad (k=1,2,3\ldots n)$$

ist.

Nun aber setze ich:

$$(\alpha_2)\ldots \mathfrak{q}_1=n\frac{d\sigma}{dz}+\mathfrak{p}_1\sigma=0$$

woraus folgt:

$$(\alpha_3)\ldots \sigma=e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1dz}$$

Mit Hülfe dieser Substitution (α_3) haben wir für jeden Coefficient der Gleichung $(\mathfrak{A}_1)$

$$\mathfrak{q}_k=\mathfrak{a}_k e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1dz}$$

wo $\mathfrak{a}_1=0$ ist. Mit anderen Worten, die Gleichung $(\mathfrak{A})$ geht durch die Substitution:

$$(1)\ldots y=v\cdot e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1dz}$$

über in die Differentialgleichung mit verschwindendem Coefficienten der $(n-1)^{ten}$ Ableitung:

$$(\mathfrak{B})\ldots \frac{d^nv}{dz^n}+\mathfrak{a}_2\frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}}+\mathfrak{a}_3\frac{d^{n-3}v}{dz^{n-3}}+\ldots+\mathfrak{a}_{n-1}\frac{dv}{dz}+\mathfrak{a}_n v=0,$$

worin die Coefficienten $\mathfrak{a}_i$ ganze und rationale Functionen der Coefficienten $\mathfrak{p}_i$ und deren Ableitungen sind. Für dieselben gelten folgende Gleichungen:

$$
(2)\ldots\quad
\begin{cases}
\mathfrak{a}_2 = -\dfrac{n-1}{2}\,\mathfrak{p}_1' - \dfrac{n-1}{2n}\,\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2, \\[2ex]
\mathfrak{a}_3 = -\dfrac{1}{3}\binom{n-1}{2}\mathfrak{p}_1'' + \dfrac{2}{3n^2}\binom{n-1}{2}\mathfrak{p}_1^3 - \dfrac{n-2}{n}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3, \\[2ex]
\mathfrak{a}_4 = -\dfrac{1}{4}\binom{n-1}{3}\mathfrak{p}_1''' + \dfrac{3}{4n}\binom{n-1}{3}\mathfrak{p}_1'^2 + \dfrac{3}{2n^2}\binom{n-1}{3}\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_1' - \dfrac{3}{4n^3}\binom{n-1}{3}\mathfrak{p}_1^4 \\[2ex]
\qquad - \dfrac{1}{n}\binom{n-2}{2}\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2 + \dfrac{1}{n^2}\binom{n-2}{2}\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2 - \dfrac{n-3}{n}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_4, \\[2ex]
\mathfrak{a}_5 = \binom{n-1}{4}\left[-\dfrac{1}{5}\mathfrak{p}_1^{\mathrm{IV}} + \dfrac{2}{n}\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1'' + \dfrac{2}{n^2}\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_1'' - \dfrac{4}{n^3}\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_1' + \dfrac{4}{5n^4}\mathfrak{p}_1^5\right] \\[2ex]
\qquad + \binom{n-2}{3}\left[-\dfrac{1}{n}\mathfrak{p}_1''\mathfrak{p}_2 + \dfrac{3}{n^2}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2 - \dfrac{1}{n^3}\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2\right] + \binom{n-3}{2}\left[-\dfrac{1}{n}\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_3 + \dfrac{1}{n^2}\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_3\right] \\[2ex]
\qquad - \dfrac{n-4}{n}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4 + \mathfrak{p}_5,
\end{cases}
$$

. . . . etc. . . . .

wobei überall: $\mathfrak{p}_1^{(r)} = \dfrac{d^r\mathfrak{p}_1}{dz^r}$ gesetzt worden ist.

Mit Hülfe der Formel (II) des ersten Capitels geht ferner die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) durch die Substitution

$$(3)\ldots\quad z = \varphi(t)$$

in

$$(\bar{A})\ldots\quad \frac{d^ny}{dt^n} + q_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + q_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + q_{n-1}\frac{dy}{dt} + q_n y = 0$$

über, wo:

$$
(4)\ldots\quad
\begin{cases}
q_1 = -\binom{n}{2}\dfrac{\varphi''}{\varphi'} + \mathfrak{p}_1\varphi', \\[2ex]
q_2 = -\binom{n}{3}\dfrac{\varphi'''}{\varphi'} + 3\binom{n+1}{4}\left(\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 - \binom{n-1}{2}\mathfrak{p}_1\varphi'' + \mathfrak{p}_2\varphi'^2, \\[2ex]
q_3 = -\binom{n}{4}\dfrac{\varphi^{\mathrm{IV}}}{\varphi'} + 10\binom{n+1}{5}\dfrac{\varphi'''\varphi''}{\varphi'^2} - 15\binom{n+2}{6}\left(\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\right)^3 - \mathfrak{p}_1\left[\binom{n-1}{3}\varphi''' - 3\binom{n}{4}\dfrac{\varphi''^2}{\varphi'}\right] \\[2ex]
\qquad - \binom{n-2}{2}\mathfrak{p}_2\varphi''\varphi' + \mathfrak{p}_3\varphi'^3, \\[2ex]
q_4 = -\binom{n}{5}\dfrac{\varphi^{\mathrm{V}}}{\varphi'} + 15\binom{n+1}{6}\dfrac{\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi''}{\varphi'^2} + 10\binom{n+1}{6}\left(\dfrac{\varphi'''}{\varphi'}\right)^2 - 7\cdot 15\binom{n+2}{7}\dfrac{\varphi'''\varphi''^2}{\varphi'^3} \\[2ex]
\qquad + 7\cdot 15\binom{n+3}{8}\left(\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\right)^4 - \mathfrak{p}_1\left[\binom{n-1}{4}\varphi^{\mathrm{IV}} - 10\binom{n}{5}\dfrac{\varphi'''\varphi''}{\varphi'} + 15\binom{n+1}{6}\dfrac{\varphi''^3}{\varphi'^2}\right] \\[2ex]
\qquad - \mathfrak{p}_2\left[\binom{n-2}{3}\varphi'''\varphi' - 3\binom{n-1}{4}\varphi''^2\right] - \binom{n-3}{2}\mathfrak{p}_3\varphi''\varphi'^2 + \mathfrak{p}_4\varphi'^4,
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{aligned}
q_5 &= -\binom{n}{6}\frac{\varphi^{(6)}}{\varphi'} + 21\binom{n+1}{7}\frac{\varphi^{\mathrm{V}}\varphi''}{\varphi'^2} + 35\binom{n+1}{7}\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi'''}{\varphi'^2} - 2\cdot7\cdot15\binom{n+2}{8}\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi''^2}{\varphi'^3} \\
&\quad - 280\binom{n+2}{8}\frac{\varphi'''^2\varphi''}{\varphi'^3} + 7\cdot12\cdot15\binom{n+3}{9}\frac{\varphi'''\varphi''^3}{\varphi'^4} - 7\cdot9\cdot15\binom{n+4}{10}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^5 \\
&\quad - \mathfrak{p}_1\Big[\binom{n-1}{5}\varphi^{\mathrm{V}} - 15\binom{n}{6}\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi''}{\varphi'} - 10\binom{n}{6}\frac{\varphi'''^2}{\varphi'} + 7\cdot15\binom{n+1}{7}\frac{\varphi'''\varphi''^2}{\varphi'^2} - \\
&\qquad\qquad - 7\cdot15\binom{n+2}{8}\frac{\varphi''^4}{\varphi'^3}\Big] \\
&\quad - \mathfrak{p}_2\left[\binom{n-2}{4}\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi' - 10\binom{n-1}{5}\varphi'''\varphi'' + 15\binom{n}{6}\frac{\varphi''^3}{\varphi'}\right] \\
&\quad - \mathfrak{p}_3\left[\binom{n-3}{3}\varphi'''\varphi'^2 - 3\binom{n-2}{4}\varphi''^2\varphi'\right] - \mathfrak{p}_4\binom{n-4}{2}\varphi''\varphi'^3 + \mathfrak{p}_5\varphi'^5 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_n &= \mathfrak{p}_n\varphi'^n
\end{aligned}\right.$$

und überall $\varphi^{(r)} = \dfrac{d^r\varphi}{dt^r}$ zu setzen ist.

Durch die Substitution:

$$(5)\ldots\ldots y = e^{-\frac{1}{n}\int q_1\,dt}\cdot w$$

geht die Gleichung (A) über in

$$(B)\ldots\ldots\frac{d^nw}{dt^n} + a_2\frac{d^{n-2}w}{dt^{n-2}} + a_3\frac{d^{n-3}w}{dt^{n-3}} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{dw}{dt} + a_n w = 0$$

mit verschwindendem Coefficienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung. Die Coefficienten a_i ergeben sich, indem man in (2) die $\mathfrak{p}_i$ durch q_i ersetzt und für die letzteren ihre Werthe aus (4) einsetzt; somit lassen sich dieselben schreiben:

$$(6)\ldots\left\{\begin{aligned}
a_2 &= \mathfrak{a}_2\varphi'^2 + \frac{1}{2}\binom{n+1}{3}\left[\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right], \\
a_3 &= \mathfrak{a}_3\varphi'^3 + (n-2)\,\mathfrak{a}_2\varphi''\varphi' + \binom{n+1}{4}\left[\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}}{\varphi'} - 4\frac{\varphi'''\varphi''}{\varphi'^2} + 3\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^3\right], \\
a_4 &= \mathfrak{a}_4\varphi'^4 + \frac{3}{2}(n-3)\,\mathfrak{a}_3\varphi''\varphi'^2 + \mathfrak{a}_2\left[\frac{n+5}{6}\binom{n-2}{2}\varphi'''\varphi' - \frac{3}{4}\binom{n-1}{3}\varphi''^2\right] \\
&\quad + \binom{n+1}{5}\Big[\frac{3}{2}\frac{\varphi^{\mathrm{V}}}{\varphi'} - \frac{15}{2}\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi''}{\varphi'^2} + \frac{5(n-13)}{12}\left(\frac{\varphi'''}{\varphi'}\right)^2 - \frac{5(n-19)}{4}\frac{\varphi'''\varphi''^2}{\varphi'^3} + \\
&\qquad\qquad + \frac{15(n-13)}{16}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^4\Big], \\
a_5 &= \mathfrak{a}_5\varphi'^5 + 2(n-4)\,\mathfrak{a}_4\varphi''\varphi'^3 + \mathfrak{a}_3\left[\frac{n+7}{6}\binom{n-3}{2}\varphi'''\varphi'^2 - \frac{3}{4}\binom{n-3}{3}\varphi''^2\varphi'\right] \\
&\quad + \mathfrak{a}_2\left[\frac{n+3}{4}\binom{n-2}{3}\varphi^{\mathrm{IV}}\varphi' - 2\binom{n-1}{4}\varphi'''\varphi''\right]
\end{aligned}\right.$$

$$+\binom{n+1}{6}\left[2\frac{\varphi^{(6)}}{\varphi'}-12\frac{\varphi^{V}\varphi''}{\varphi'^2}+\frac{5(n-9)}{2}\frac{\varphi^{IV}\varphi'''}{\varphi'^2}-\frac{15(n-13)}{4}\frac{\varphi^{IV}\varphi''^2}{\varphi'^3}-\right.$$
$$\left.-10(n-7)\frac{\varphi'''^2\varphi''}{\varphi'^3}+\frac{15(3n-19)}{2}\frac{\varphi'''\varphi''^3}{\varphi'^4}-\frac{45(n-5)}{4}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^5\right],$$

. . . . etc. . . . .

wo in den Coefficienten $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots$ die Veränderliche z durch $\varphi(t)$ zu ersetzen ist. Ein für alle mal setze ich fest, um die Schreibweise abzukürzen, dass die gestrichenen lateinischen (Cursiv-) Buchstaben die Ableitungen nach t, die gestrichenen deutschen (Fractur-) Buchstaben die Ableitungen nach z resp. φ bedeuten.

Ferner geht die Differentialgleichung (A) durch die Substitution:

$$y = \varrho(t)\cdot u$$

über in

$$(A)\ \ldots\ \frac{d^n u}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\ldots\ldots+p_{n-1}\frac{du}{dt}+p_n u=0.$$

Hierin ist nach (α_1):

$$p_k=\frac{1}{\varrho}\left[\binom{n}{k}\frac{d^k\varrho}{dt^k}+\binom{n-1}{k-1}q_1\frac{d^{k-1}\varrho}{dt^{k-1}}+\ldots+\binom{n-k+1}{1}q_{k-1}\frac{d\varrho}{dt}+q_k\varrho\right],$$

also

$$p_1=n\frac{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)}{\varrho}+q_1,$$

woraus folgt:

$$\varrho(t)=e^{-\frac{1}{n}\int(q_1-p_1)\,dt}$$

oder mit Berücksichtigung von (4):

$$(a)\ \ldots\ \varrho(t)=e^{-\frac{1}{n}\int\left(\mathfrak{p}_1\varphi'-\binom{n}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}-p_1\right)dt}$$

Aus (1) und (5) ergiebt sich:

$$v=\varphi'^{\,\frac{n-1}{2}}\cdot w$$

Fasst man alle vorliegenden Ergebnisse zusammen, so kann man aussagen:

Die gegebene Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ geht durch die Substitutionen:

$$(b)\ \ldots\ z=\varphi(t)\begin{cases}1.,\quad y=u\cdot e^{-\frac{1}{n}\int\left(\mathfrak{p}_1\varphi'-\binom{n}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}-p_1\right)dt} & \text{in } (A)\\ 2.,\quad y=w\cdot e^{-\frac{1}{n}\int\left(\mathfrak{p}_1\varphi'-\binom{n}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)dt} & \text{in } (B)\end{cases}$$

$$(c)\ \ldots\ y=v\cdot e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1\,dz}\quad\text{in } (\mathfrak{B})$$

über.

Die Differentialgleichung ($\mathfrak{B}$) wird durch die Substitution:

$$(d) \ldots \begin{cases} z = \varphi(t) \\ v = w \cdot e^{\int \frac{n-1}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'} dt} \end{cases}$$

in (B) transformirt. — Aus (b) folgt weiter, dass die Differentialgleichung (A) durch die Substitution

$$(e) \ldots . u = e^{-\frac{1}{n}\int \mathfrak{p}_1 dt} \cdot w$$

in die Differentialgleichung (B) übergeht, woraus ersichtlich ist, dass sich die Werthe der Coefficienten a_i auch ergeben, indem man in den Gleichungen (2) die Coefficienten $\mathfrak{a}_i$ durch a_i und $\mathfrak{p}_i$ durch p_i ersetzt.

2. Wie man aus (6) ersieht, lassen sich die Coefficienten a_i durch φ', die in Bezug auf t genommenen Ableitungen von φ' und die Coefficienten $\mathfrak{a}$ ausdrücken. Jede Function von a, a', a'' ... lässt sich also durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ... φ', φ'' ... darstellen. Ist diese Function von der Beschaffenheit, dass die Grössen φ', φ'' ... aus derselben verschwunden sind, so haben wir

$$f(a, a' \ldots .) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \ldots .)$$

Diese Function f wird dann eine *absolute Invariante* der linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, oder kurz *absolute Differentialinvariante* genannt. Dieselbe besagt, dass man zu demselben Ergebnisse gelangt, wenn man ($\mathfrak{B}$) erst auf (B) transformirt und *dann* den durch f definirten Ausdruck aus den *neuen* Coefficienten bildet, oder diesen Ausdruck aus den Coefficienten von ($\mathfrak{B}$) bildet, und dann $\varphi(t)$ für z einsetzt. Die Function f_r, welche durch die charakteristische Relation

$$f_r(a, a' \ldots .) = f_r(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \ldots .) \cdot \varphi'^r$$

bestimmt wird, heisst eine *relative Differentialinvariante*. Die Zahl r, — den Exponenten von φ', den Index von f — nennt man das *Gewicht* (*Halphen*), oder den *Exponent* (*Lipm. Schlesinger*) oder die *Ordnung* (*Brioschi*) der Differentialinvariante.

Halphen nennt in der ν^{ten} Ableitung eines Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung die Summe aus den Ordnungs- und Indexzahlen desselben das Gewicht; z. B. $\frac{d^\nu \mathfrak{a}_m}{dz^\nu}$ hat zum Gewicht die Zahl $m+\nu$; dasselbe gilt auch für ν^{te} Ableitung einer jeden Differentialinvariante f_r, also $\frac{d^\nu f_r}{dz^\nu}$ hat das Gewicht $\nu+r$.

3. Wir schreiten nun zur Bildung der Fundamentaldifferentialinvarianten. — Durch einmalige Differentiation der ersten der Relationen (6) erhält man.

$$a'_2 = \mathfrak{a}'_2 \varphi'^3 + 2\,\mathfrak{a}_2\, \varphi'' \varphi' + \frac{1}{2}\binom{n+1}{3}\left[\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}}{\varphi'} - 4\,\frac{\varphi'''\varphi''}{\varphi'^2} + 3\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right]$$

woraus mit Berücksichtigung der zweiten der genannten Relationen (6), wenn man setzt:

$$(7) \ldots a_3 - \frac{n-2}{2}\, a'_2 = \mathrm{a}_3,$$

$$(8) \ldots \mathfrak{a}_3 - \frac{n-2}{2}\, \mathfrak{a}'_2 = \alpha_3,$$

folgt:

$$(\mathrm{I}) \ldots \mathrm{a}_3 = \alpha_3\, \varphi'^3.$$

Da $\varphi(t)$ nicht constant sein darf, so kann φ' nicht beständig gleich Null sein. Aus den Gleichungen (I), (7) und (8) ist dann ersichtlich:

erstens, dass die Ausdrücke a_3 und α_3 gleichzeitig 0 oder von Null verschieden sind;

zweitens, dass der Ausdruck a_3 aus den Coefficienten von (B) und den in Bezug auf t genommenen Ableitungen derselben als ganze rationale Function dieser Grössen ebenso gebildet ist, wie der Ausdruck α_3 aus den Coefficienten von $(\mathfrak{B})$ und den in Bezug auf z genommenen Ableitungen derselben; und

drittens, dass alle beide Ausdrücke a_3 und α_3 homogen in Bezug auf das Gewicht 3 sind, (was der beigefügte Index andeutet) wie immer auch die Transformationsfunction gewählt sein mag.

Also alle beide Ausdrücke a_3 und α_3 sind relativ invariant. *Laguerre* hat den Ausdruck $a_3 - \frac{n-2}{2} a'_2$, welchen ich mit a_3 bezeichne, während *Halphen* ihn mit v und Herr *Brioschi* mit a_3 zu bezeichnen pflegen, oder noch besser den Ausdruck $\mathfrak{a}_3 - \frac{n-2}{2}\mathfrak{a}'_2$ *die Invariante der linearen Differential-Gleichung* genannt.

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung besitzt $n-2$ Invarianten dieser Art. Es möge gestattet sein, dieselben wie Herr *Brioschi* vorgeschlagen hat,*) *fundamentale* Differentialinvarianten zu nennen, weil sich

*) Acta math. T 14.

alle anderen aus diesen herleiten lassen. Um die Regel zur Bildung der fundamentalen Differentialinvarianten aufzustellen, sei folgende Bestimmung festgestellt: für jede der Invarianten haben wir:

$$\mathfrak{a}_r = \alpha_r \varphi'^r,$$

wo $\mathfrak{a}_r$ eine ganze rationale Function der Grössen $a_2, a_3 \dots a_r$ und der Ableitungen dieser Grössen nach t und homogen in Bezug auf das Gewicht r, α_r aber dieselbe ganze rationale Function der Grössen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots \mathfrak{a}_r$ und der in Bezug auf z genommenen Ableitungen dieser Grössen ist.

Um nun eine Differentialinvariante $\mathfrak{a}_r$ zu berechnen, wollen wir, abgesehen von langwierigen Rechnungen, folgendermassen verfahren:

erstens, jede der Relationen (6):

$$(9) \dots a_i = \mathfrak{a}_i \varphi'^i + \frac{(i-1)(n-i-1)}{2} \mathfrak{a}_{i-1} \varphi'' \varphi'^{i-2} + \dots\dots$$

$$(i = 2, 3, \dots (r-1), r)$$

hintereinander $(r-i)$-mal differentiiren,

zweitens, aus dem so entstandenen System von Relationen mit (9) zusammengenommen, durch Multiplication ein neues System (C) von k Relationen so combinatorisch herleiten, dass auf dessen linker Seite alle möglichen eingliedrigen Ausdrücke — Producte — von einem und demselben Gewichte r zum Vorschein kommen;

drittens: die k Gleichungen des Systems (C) der Reihe nach mit zu bestimmenden Constanten $l_1, l_2 \dots l_k$ multipliciren, dann addiren, woraus eine einzige Gleichung (D) folgt, deren linke Seite eine ganze rationale Function der Grössen $a_r, a_{r-1} \dots a_2$ und ihrer Ableitungen nach t mit unbestimmten Coefficienten l, und homogen in Bezug auf das Gewicht r ist;

viertens, durch Nullsetzen der Coefficienten der Grössen vom Gewichte $< r$ auf der rechten Seite von (D), die $k-1$ Bestimmungsgleichungen von l aufsuchen, aus denen sich alle Constanten l durch eine einzige z. B. l_h ausdrücken lassen. Für diese Werthe von l verschwinden dann aus der Gleichung (D) alle Grössen, deren Gewicht kleiner als r ist, so dass sich am Ende eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{a}_r = \alpha_r \varphi'^r$$

ergiebt. Aus dieser Gleichung sind die gesuchten relativen Differentialinvarianten $\mathfrak{a}_r$ α_r zu entnehmen.

Beispiel. Aus den Gleichungen:

$$(\mathrm{C})\left\{\begin{aligned} a_4 &= \mathfrak{a}_4\varphi'^4 + \frac{3}{2}(n-3)\,\mathfrak{a}_3\varphi''\varphi'^2 + \mathfrak{a}_2\left[\frac{n+5}{6}\binom{n-2}{2}\varphi'''\varphi' - \frac{3}{4}\binom{n-1}{3}\varphi''^2\right] + \dots,\\ a'_3 &= \mathfrak{a}'_3\varphi'^4 + 3\,\mathfrak{a}_3\varphi''\varphi'^2 + (n-2)\,\mathfrak{a}'_2\varphi''\varphi'^2 + (n-2)\,\mathfrak{a}_2(\varphi''^2 + \varphi'''\varphi') + \dots\\ a''_2 &= \mathfrak{a}''_2\varphi'^4 + 5\,\mathfrak{a}'_2\varphi''\varphi'^2 + 2\,\mathfrak{a}_2(\varphi''^2 + \varphi''\varphi') + \dots\dots\dots\\ a_2^2 &= \mathfrak{a}_2^2\varphi'^4 + \binom{n+1}{3}\mathfrak{a}_2\left(-\frac{3}{2}\varphi''^2 + \varphi'''\varphi'\right) + \dots, \end{aligned}\right.$$

wenn ich die linken und rechten Seiten derselben der Reihe nach mit l_1, l_2, l_3 und l_4 multiplicire, dann addire, folgen für $l_{i\,(i=1,2,3,4)}$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{3}{2}(n-3)\;l_1 + 3\,l_2 = 0,\ (n-2)\,l_2 + 5\,l_3 = 0 \text{ und } \binom{n-2}{2}\frac{5n+7}{6}\,l_1 + 5\binom{n+1}{3}l_4 = 0,$$

also:

$$l_2 = -\frac{1}{2}(n-3)\,l_1,\ l_3 = \frac{(n-3)(n-2)}{2\,.\,5}\,l_1,\ l_4 = -\frac{(n-2)(n-3)(5n+7)}{10\,(n+1)\,n\,(n-1)}\,l_1.$$

Daher wird, wenn man setzt:

$$(10)\dots\ a_4 - \frac{1}{2}(n-3)\,a'_3 + \frac{(n-3)(n-2)}{2\cdot 5}\,a''_2 - \frac{(n-3)(n-2)(5n+7)}{10(n+1)\,n(n-1)}\,a_2^2 = \mathfrak{a}_4$$

$$(11)\dots\ \mathfrak{a}_4 - \frac{1}{2}(n-3)\,\mathfrak{a}'_3 + \frac{(n-3)(n-2)}{2\cdot 5}\,\mathfrak{a}''_2 - \frac{(n-3)(n-2)(5n+7)}{10(n+1)n(n-1)}\,\mathfrak{a}_2^2 = \alpha_4,$$

$$(\mathrm{II})\dots\ \mathrm{a}_4 = \alpha_4\,\varphi'^4.$$

Ganz in derselben Weise verfahrend, habe ich noch die Invariante a_5 ausgerechnet. Sie wird durch folgende Gleichung gegeben

$$(12)\dots\ \mathrm{a}_5 = a_5 - \frac{n-4}{2}\,a'_4 + \frac{3(n-4)(n-3)}{4\cdot 7}\,a''_3 - \frac{3(n-4)(n-3)(n-2)}{4\cdot 7\cdot 9}\,a'''_2 - \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(7n+13)}{2\cdot 7\cdot (n+1)n(n-1)},$$

und daher:

$$(\mathrm{III})\dots\ \mathrm{a}_5 = \alpha_5\,\varphi'^5.$$

Der lineare Theil irgend einer Invariante a_r wird nach der Formel

$$(13)\dots\ \Sigma_s A_{r,s}\left[\left[a_{r-2s}^{(2s)} - \frac{(n-r+2s+1)(r-2s-1)}{2(2s+1)(r-s-1)}\,a_{r-2s-1}^{(rs+1)}\right]\right.$$

gefunden, wo: $A_{r,o} = 1$

$$A_{r,s+1} = \binom{n-r+2s+2}{2}\frac{(r-2s-2)(r-2s-1)^2(r-2s)}{4(s+1)(2s+1)(r-s-1)(2r-2s-3)}\,\frac{(2s+2)!}{r(r-1)}\,A_{r,s}$$

und

$$s = 0, 1, \ldots\ldots \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r \equiv 0 \pmod{2}$$

$$s = 0, 1, \ldots\ldots \frac{r-3}{2} \quad \text{„} \quad r \equiv 1 \pmod{2}\text{*)}$$

Den anderen, nicht linearen Theil muss man auf alle Fälle ausrechnen.

4. Die Ausrechnung der fundamentalen Invarianten lässt sich in folgender Weise etwas vereinfachen.

Indem man in der Gleichung (III) des ersten Capitels y durch v, k_i durch $\mathfrak{l}_i$ und g durch $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)\,n\,(n-1)}\mathfrak{a}_2$ ersetzt, wird man finden:

$$(14)\ldots\quad \frac{d^n v}{dz^n} + \mathfrak{l}_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \mathfrak{l}_3 \frac{d^{n-3} v}{dz^{n-3}} + \ldots + \mathfrak{l}_{n-1}\frac{dv}{dz} + \mathfrak{l}_n v = 0$$

worin:

$$(15)\ldots \begin{cases} \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{l}_3 = \frac{n-2}{2}\mathfrak{a}'_2,\ \mathfrak{l}_4 = \frac{3}{5}\binom{n-2}{2}\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}''_2 + \frac{5n+7}{3(n+1)n(n-1)}\mathfrak{a}_2^2\right], \\ \mathfrak{l}_5 = \frac{1}{5}\binom{n-2}{3}\left[\mathfrak{a}'''_2 + 3\,\frac{5n+7}{(n+1)n(n-1)}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}'_2\right], \ \ldots\text{ etc. }\ldots \end{cases}$$

Durch die Substitution [(d), 1.]:

$$z = \varphi(t)$$
$$v = \varrho_1 \cdot w$$

wo $\frac{\varrho_1'}{\varrho_1} = \frac{n-1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}$ ist, geht die Gleichung (14) über in:

$$(16)\ldots\quad \frac{d^n w}{dt^n} + l_2 \frac{d^{n-2} w}{dt^{n-2}} + l_3 \frac{d^{n-3} w}{dt^{n-3}} + \ldots + l_{n-1}\frac{dw}{dt} + l_n w = 0.$$

Die Coefficienten l_i ergeben sich einerseits, indem man in (6) die a_i durch l_i und $\mathfrak{a}_i$ durch $\mathfrak{l}_i$ ersetzt, andererseits, indem man in (15) $\mathfrak{l}_i$ durch l_i und $\mathfrak{a}_i$ durch a_i ersetzt. Wenn man daher setzt:

$$\mathfrak{a}_r - \mathfrak{l}_r = \mathfrak{L}_r$$
$$a_r - l_r = L_r$$

so erhält man, was leicht einzusehen ist, indem man in (6) a_r durch L_r und $\mathfrak{a}_r$ durch $\mathfrak{L}_r$ ersetzt:

*) *Brioschi*, Acta math. T. 14, giebt eine ähnliche Formel an.

$$(17)\ldots\begin{cases} L_3 = \mathfrak{L}_3\,\varphi'^3 \\ L_4 = \mathfrak{L}_4\,\varphi'^4 + 3\,\frac{n-3}{2}\,\mathfrak{L}_3\,\varphi''\,\varphi'^2 \\ L_5 = \mathfrak{L}_5\,\varphi'^5 + 2\,(n-4)\,\mathfrak{L}_4\,\varphi'^3\varphi'' + \mathfrak{L}_3\left[\frac{n+7}{6}\binom{n-3}{2}\varphi'''\,\varphi'^2 - \frac{3}{4}\binom{n-3}{3}\varphi''^2\,\varphi'\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hieraus findet man leicht die fundamentalen Invarianten in der Form:

$$(18)\ldots\begin{cases} \mathfrak{a}_3 = L_3 \\ \mathfrak{a}_4 = L_4 - \frac{n-3}{2}\,L_3' \\ \mathfrak{a}_5 = L_5 - \frac{n-4}{2}\,L_4' + \frac{3}{7}\,\frac{(n-3)(n-4)}{4}\,L_3'' - \frac{1}{5}\,\frac{(n-3)(n-4)(7n+13)}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}\,\mathfrak{a}_2\,L_3\text{*)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

5. Wir nehmen nun irgend zwei der fundamentalen Invarianten:

$$\mathfrak{a}_r = \alpha_r\,\varphi'^r$$

und

$$\mathfrak{a}_s = \alpha_s\,\varphi'^s$$

Erhebt man die erste in die s^{te}, die zweite in die r^{te} Potenz, so folgen $\binom{n-2}{2}$ Gleichungen:

$$(\alpha)\ldots\frac{\mathfrak{a}_r^s}{\mathfrak{a}_s^r} = \frac{\alpha_r^s}{\alpha_s^r} \qquad (r \gtrless s = 3, 4 \ldots n)$$

was besagt, dass man zu demselben Ergebnisse gelangt, wenn man ($\mathfrak{B}$) erst auf (B) transformirt und dann den durch $\frac{\mathfrak{a}_r^s}{\mathfrak{a}_s^r}$ definirten Ausdruck aus den neuen Coefficienten bildet, oder diesen Ausdruck aus den Coefficienten von ($\mathfrak{B}$) bildet und dann für z einsetzt $\varphi(t)$, d. h. die Ausdrücke $\frac{\mathfrak{a}_r^s}{\mathfrak{a}_s^r}$ oder $\frac{\alpha_r^s}{\alpha_s^r}$, welche aus den Coefficienten der Differentialgleichung und den Ableitungen dieser Coefficienten rational gebildet sind, sind *absolute* Differentialinvarianten. Dass $\mathfrak{a}_r$ und $\mathfrak{a}_s$ relative Differentialinvarianten sind, wissen wir schon. — Eine algebraische Summe von relativen Differentialinvarianten desselben Gewichtes ist selbst eine relative Differentialinvariante von diesem Gewichte. Ein Product oder ein Quotient von zwei relativen Differentialinvarianten ist wiederum eine relative Differentialinvariante, deren Gewicht gleich der Summe oder der Differenz der Gewichte der beiden ersteren ist. Daher

*) Vgl. *Brioschi*, Acta math. T. 14.

ist der Quotient zweier relativen Differentialinvarianten desselben Gewichtes eine *absolute* Invariante; ihr Gewicht ist immer gleich Null.

Wir schreiten nun zur Bildung der zusammengesetzten relativen Differentialinvarianten, oder der relativen Differentialinvarianten *zweiter* Art.

Aus $\mathrm{a}_r = \alpha_r \varphi'^r$ und $\mathrm{a}_s = \alpha_s \varphi'^s$ lässt sich durch einmalige Differentiation wenn man setzt:

$$(19) \ldots r\,\mathrm{a}_r \mathrm{a}_s' - s\,\mathrm{a}_r' \mathrm{a}_s = \underset{r}{\overset{s}{\mathrm{b}}}_1$$

$$(20) \ldots r\,\alpha_r \alpha_s' - s\,\alpha_r' \alpha_s = \underset{r}{\overset{s}{\beta}}_1$$

eine Serie von $\binom{n-2}{2}$ Differentialinvarianten von der Form:

$$(\mathrm{IV}) \ldots .\ \underset{r}{\overset{s}{\mathrm{b}}}_1 = \underset{r}{\overset{s}{\beta}}_1 \varphi'^{r+s+1} \qquad (r \gtrless s = 3, 4 \ldots n)$$

ableiten.

Durch zweimalige Differentiation aber lässt sich, wenn man setzt:

$$(21) \ldots .\ \mathrm{a}_r \mathrm{a}_s \alpha_2 - \left[\frac{2r+1}{4s(r+s+1)} \mathrm{a}_r \mathrm{a}_s'' + \frac{2s+1}{4r(r+s+1)} \mathrm{a}_s \mathrm{a}_r'' - \frac{(2r+1)(2s+1)}{4rs(r+s+1)} \mathrm{a}_r' \mathrm{a}_s'\right] \binom{n+1}{3} = \underset{r}{\overset{s}{\mathrm{c}}}_2$$

$$(22) \ldots .\ \alpha_r \alpha_s \mathfrak{a}_2 - \left[\frac{2r+1}{4s(r+s+1)} \alpha_r \alpha_s'' + \frac{2s+1}{4r(r+s+1)} \alpha_s \alpha_r'' - \frac{(2r+1)(2s+1)}{4rs(r+s+1)} \alpha_r' \alpha_s'\right] \binom{n+1}{3} = \underset{r}{\overset{s}{\gamma}}_2$$

eine zweite Serie von $\binom{n-1}{2}$ Differentialinvarianten von der Form:

$$(\mathrm{V}) \ldots .\ \underset{r}{\overset{s}{\mathrm{c}}}_2 = \underset{r}{\overset{s}{\gamma}}_2 \varphi'^{r+s+2} \qquad (r, s = 3, 4 \ldots . n)$$

aufstellen welche für $r = s = 3$ die *Halphen*'sche Invariante $\triangle$ liefert.*)

Verfährt man mit a_r und $\underset{r}{\overset{s}{\mathrm{b}}}_1 \ldots .$ in der oben angegebenen Weise, so kann man eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten bilden, deren Gewicht constant um $r+1$ Einheiten wächst:

$$(23) \ldots . \begin{cases} \underset{r}{\overset{r+s+1}{\mathrm{b}}}_1 = r\mathrm{a}_r \underset{r}{\overset{s}{\mathrm{b}}}{}_1' - (r+s+1) \underset{r}{\overset{s}{\mathrm{b}}}_1 \mathrm{a}_r' \\ \underset{r}{\overset{2r+s+2}{\mathrm{b}}}_1 = r\,\mathrm{a}_r \underset{r}{\overset{r+s+1}{\mathrm{b}}}{}_1' - (2r+s+2) \underset{r}{\overset{r+s+1}{\mathrm{b}}}_1 \mathrm{a}_r' \\ \underset{r}{\overset{3r+s+3}{\mathrm{b}}}_1 = r\,\mathrm{a}_r \underset{r}{\overset{2r+s+2}{\mathrm{b}}}{}_1' - (3r+s+3) \underset{r}{\overset{2r+s+2}{\mathrm{b}}}_1 \mathrm{a}_r' \end{cases} \qquad (r \gtrless s = 3, 4 \ldots n)$$

. . . .

*) *Halphen*, Acta math. T. 3.

Diese Reihe von Invarianten ist die verallgemeinerte Form der *Halphen*'schen $s_8, s_9 \ldots.$ Für jede dieser Invarianten haben wir:

$$(\mathrm{VI}) \ldots \overset{\mu r+s+u}{\underset{r}{\mathfrak{b}_1}} = \overset{\mu r+s+\mu}{\underset{r}{\beta_1}} \varphi^{\prime(u+1)r+s+(u+1)}. \qquad \left(\begin{smallmatrix} r \gtrless s=3,4\ldots n \\ u=1,2,3\ldots \end{smallmatrix}\right)$$

Ebenso lässt sich aus $\mathfrak{a}_t$ und $\overset{s}{\underset{r}{\mathfrak{c}_2}}$ bilden:

$$(\mathrm{VII}) \ldots . \overset{r+s+2}{\underset{t}{\mathfrak{d}_1}} = \overset{r+s+2}{\underset{t}{\delta_1}} \cdot \varphi^{\prime r+s+t+3},$$

wo

$$(24) \ldots . \overset{r+s+2}{\underset{t}{\mathfrak{d}_1}} = t\mathfrak{a}_t \overset{s}{\underset{r}{\mathfrak{c}_2'}} - (r+s+2) \overset{s}{\underset{r}{\mathfrak{c}_2}} \mathfrak{a}_t'^{*)}$$

etc. .... etc. ....

6. Die Methode zur Herleitung der Invarianten mit fest bestimmtem Gewichte 2 und 1 durch logarithmische Differentiation, welche *Lipm. Schlesinger***) und *Max Meyer****) auf die Differentialgleichung 3ter resp. 4ter Ordnung angewendet haben, lässt sich verallgemeinern. Ich schlage denselben Weg ein. Es sei α_r also auch $\mathfrak{a}_r$ von Null verschieden, so folgt aus der Gleichung:

$$\varphi'^r = \frac{\mathfrak{a}_r}{\alpha_r}$$

durch logarithmische Differentiation

$$(25) \ldots . . r\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\mathfrak{a}_r'}{\mathfrak{a}_r} - \frac{\alpha_r'}{\alpha_r}\varphi'$$

und durch Differentiation von (25) unter Berücksichtigung dieser Gleichung:

$$(26) \ldots . r\frac{\varphi'''}{\varphi'} = \frac{\mathfrak{a}_r''}{\mathfrak{a}_r} - \frac{r-1}{r}\left(\frac{\mathfrak{a}_r'}{\mathfrak{a}_r}\right)^2 - \frac{3}{r}\frac{\mathfrak{a}_r'}{\mathfrak{a}_r}\frac{\alpha_r'}{\alpha_r}\varphi' + \left[\frac{r+2}{r}\left(\frac{\alpha_r'}{\alpha_r}\right)^2 \frac{\alpha_r''}{\alpha_r}\right]\varphi'^2$$

Indem man diese Werthe für $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ und $\frac{\varphi'''}{\varphi'}$ in den Ausdruck für a_2 einsetzt, so erhält man $n-2$ rationale Invarianten von *fest bestimmtem Gewichte* „2" von der Form:

$$(\mathrm{VIII}) \ldots . {}^{(r)}\mathfrak{e}_2 = {}^{(r)}\varepsilon_2 \varphi'^2 \qquad (r=3,4\ldots n)$$

wo

*) Vgl. *Brioschi*, Act. math. T. 14.
**) Dissert. p. 9, 11.
***) Dissert. p. 6—8.

$$(27) \ldots \; {}^{(r)}\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{a}_2 + \binom{n+1}{3} \frac{1}{2r}\left[\frac{2r+1}{2r}\left(\frac{\mathfrak{a}_r'}{\mathfrak{a}_r}\right)^2 - \frac{\mathfrak{a}_r''}{\mathfrak{a}_r}\right] = \frac{\overset{r}{\mathfrak{e}}_{\underset{r}{2}}}{\mathfrak{a}_r^2}$$

und entsprechend

$$(28) \ldots \; {}^{(r)}\varepsilon = \alpha_2 + \binom{n+1}{3} \frac{1}{2r}\left[\frac{2r+1}{2r}\left(\frac{\alpha_r'}{\alpha_r}\right)^2 - \frac{\alpha_r''}{\alpha_r}\right] = \frac{\overset{r}{\gamma}_{\underset{r}{2}}}{\alpha_r^2}$$

gesetzt ist.

Aus $n-2$ Fundamentalinvarianten und $n-2$ rationalen Invarianten von fest bestimmtem Gewichte „2" ergeben sich drei Systeme der absoluten Invarianten, definirt durch die Gleichungen:

$$(\alpha) \ldots \frac{\mathfrak{a}_r^s}{\mathfrak{a}_s^r} = \frac{\alpha_r^s}{\alpha_s^r} \qquad (r \gtrless s = 3, 4, \ldots n)$$

$$(\beta) \ldots \frac{\mathfrak{a}_{2p+1}^2}{{}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2^{2p+1}} = \frac{\alpha_{2p+1}^2}{{}^{(2p+1)}\varepsilon_2^{2p+1}} \qquad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots \frac{n-2}{2} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ p = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2} & \text{„ } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$(\gamma) \ldots \frac{{}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2^{p+1}}{\mathfrak{a}_{2(p+1)}} = \frac{{}^{(2p+2)}\varepsilon_2^{p+1}}{\alpha_{2p+2}} \qquad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots \frac{n-2}{2} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ p = 1, 2, \ldots \frac{n-3}{2} & \text{„ } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Durch logarithmische Differentiation dieser Gleichungen (α), (β) und (γ) nach t, erhält man drei neue Systeme von Invarianten, die fest das bestimmte Gewicht „1" besitzen:

$$(\text{IX}) \ldots \; {}^{(r,s)}\mathfrak{l}_1 = {}^{(rs)}\lambda_1 \varphi'$$

$$(\text{X}) \ldots \; {}^{(2p+1)}\mathfrak{m}_1 = {}^{(2p+1)}\mu_1 \varphi'$$

$$(\text{XI}) \ldots \; {}^{(2p+2)}\mathfrak{n}_1 = {}^{(2p+2)}\nu_1 \varphi'$$

wo:

$${}^{(r,s)}\mathfrak{l}_1 = s\frac{\mathfrak{a}_r'}{\mathfrak{a}_r} - r\frac{\mathfrak{a}_s'}{\mathfrak{a}_s} = \frac{\overset{s}{\mathfrak{b}}_{\underset{r}{1}}}{\mathfrak{a}_r\mathfrak{a}_s} \qquad (r \gtrless s = 3, 4 \ldots n)$$

$${}^{(2p+1)}\mathfrak{m}_1 = 2\frac{\mathfrak{a}'_{2p+1}}{\mathfrak{a}_{2p+1}} - (2p+1)\frac{{}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2'}{{}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2} \qquad \begin{cases} p = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-2}{2} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ p = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2} & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$${}^{(2p+2)}\mathfrak{n}_1 = (p+1)\frac{{}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2'}{{}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2} - \frac{\mathfrak{a}_{2p+2}'}{\mathfrak{a}_{2p+2}} \qquad \begin{cases} p = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-2}{2} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ p = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-3}{2} & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

und entsprechend ${}^{(r,s)}\lambda_1$ ${}^{(2p+1)}\mu_1$ und ${}^{(2p+2)}\nu_1$ in griechischen Buchstaben gesetzt ist.

7. In den vorhergehenden Nummern wurde die Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ mit verschwindendem Coefffcienten der $n-1^{\text{ten}}$ Ableitung benutzt, um die Differentialinvarianten zu bilden. Es ist sehr leicht, auf den allgemeinen Fall $(\mathfrak{A})$ zurückzukommen. Die Gleichung $(\mathfrak{B})$ wurde aus $(\mathfrak{A})$ durch die

Substitution $y = \sigma \cdot v$ hergeleitet, für $n\frac{d\sigma}{dz} + \mathfrak{p}_1 \sigma = 0$, oder was auf dasselbe hinauskommt, für $\mathfrak{a}_1 = 0$. Wenn wir nun in einer Differentialinvariante, worin $\mathfrak{a}_1 = 0$ gesetzt ist, die Coefficienten $\mathfrak{a}_i$ durch ihre Werthe aus (2) ersetzen, so ist klar, dass die allgemeine Form zum Vorschein kommt. Ich benutze dieselben Buchstaben griechisch oder lateinisch, gross oder klein, für dieselbe Invariante, je nachdem sie sich auf die Gleichungen ($\mathfrak{A}$) oder (A) resp. ($\mathfrak{B}$) oder (B), ($\mathfrak{A}$) oder ($\mathfrak{B}$) resp. (A) oder (B) bezieht. Somit lautet z. B. die erste fundamentale Invariante für die vollständige Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) resp. (A):

$$\mathcal{A}_3 = \mathfrak{p}_3 - \frac{n-2}{2}\mathfrak{p}_2' - \binom{n-1}{2}\left[\frac{1}{6}\mathfrak{p}_1'' - \frac{1}{n}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1' - \frac{2}{3n^2}\mathfrak{p}_1^3\right] - \frac{n-2}{n}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,$$

$$A_3 = p_3 - \frac{n-2}{2}p_2' - \binom{n-1}{2}\left[\frac{1}{6}p_1'' - \frac{1}{n}p_1 p_1' - \frac{2}{3n^2}p_1^3\right] - \frac{n-2}{n}p_1 p_2,$$

und

$$A_3 = \mathcal{A}_3 \varphi'^3,$$

. . . . etc. . . . .

Bemerkung 1. Hätten wir in dem bisherigen Verfahren überall $\mathfrak{p}_i$, durch $\binom{n}{i}\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{a}_i$ durch $\binom{n}{i}\mathfrak{a}_i$ ebenso p_i durch $\binom{n}{i}p_i$ und a_i durch $\binom{n}{i}a_i$ ersetzt, wie es Herr *Brioschi* gethan, so würden sich alle Differentialinvarianten etwas einfacher ergeben haben.

Bemerkung 2. Unter Hinzuziehung dieser Binominalfactoren, giebt Herr *Brioschi* in seiner Abhandlung „Les invariants des équations différentielles linéaires, Acta math. T. 14." noch die Ausdrücke a_6 und a_7 an, welche Herr *Forsyth* ausgerechnet hat. Dieselben lauten nach seiner Bezeichnungsweise:

$$a_6 = p_6 - 3p_5' + \frac{10}{3}p_4'' - \frac{5}{3}p_3''' + \frac{5}{14}p_2^{\mathrm{IV}} - 5\,\frac{3n+7}{n+1}p_2 a_4$$
$$- \frac{7n+8}{14(n+1)}(4p_2 p_2'' - 5p_2'^2) - \frac{3}{7}\,\frac{35n^2+112n+93}{(n+1)^2}p_2^3,$$

$$a_7 = p_7 - \frac{7}{2}p_6' + \frac{105}{22}p_5'' + \frac{35}{11}p_4''' + \frac{35}{33}p_3^{\mathrm{IV}} - \frac{7}{44}p_2^{\mathrm{V}} - \frac{21}{11}\,\frac{11n+31}{n+1}p_2 a_5$$
$$- \frac{9}{22}\,\frac{385n^2+1728n+1919}{(n+1)^2}p_2^2 a_3$$
$$- \frac{3n+4}{11(n+1)^3}\left[10p_2 a_3'' - 35p_2' a_3' + 21p_2'' a_3\right].$$

Drittes Capitel.

Anwendung der Invarianten der linearen homogenen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

I.

1. Wir setzen voraus, dass für die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}) \ldots \frac{d^n y}{dz^n} + \mathfrak{p}_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \mathfrak{p}_2 \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} + \ldots + \mathfrak{p}_{n-2} \frac{dy}{dz} + \mathfrak{p}_n y = 0$$

die Invarianten ${}^{(rs)}\lambda_1$, ${}^{(2p+1)}\mu_1$ und ${}^{(2p+2)}\nu_1$ vom Gewichte „1" nicht gleichzeitig verschwinden oder ihren Sinn verlieren, dadurch, dass fundamentale Invarianten α_r $(r=3, 4 \ldots, n)$ oder Invarianten ε_2 vom Gewichte „2" identisch Null sind, dann gilt dasselbe für die entsprechenden Invarianten l_1, m_1, n_1, a_r und e_2 einer jeden Differentialgleichung (A), welche aus $(\mathfrak{A})$ durch die Substitution

$$(1) \ldots \begin{cases} z = \varphi(t) \\ y = \varrho(t) \cdot u \end{cases}$$

hervorgeht; φ und ϱ sind beliebige Functionen von t. Unter dieser Voraussetzung können die absoluten Invarianten $\frac{\alpha_r^s}{\alpha_s^r}$, $\frac{\alpha_{2p+1}^2}{\varepsilon_2^{2p+1}}$ und $\frac{\varepsilon_2^{p+1}}{\alpha_{2p+2}}$ nicht constant sein. — Ich nehme ferner an, dass die Coefficienten $\mathfrak{p}_i$ *algebraische* Functionen von z sind, dann sind auch die Invarianten der Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ *algebraische* Functionen von z. Sind nun auch die Coefficienten p_i der Differentialgleichung (A) *algebraische* Functionen der unabhängigen Variablen t, so folgert man aus (α), (β) und (γ) des zweiten Capitels dass $\varphi(t)$ eine algebraische Function von t ist. Demnach folgt der Satz:

„Wenn eine Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ mit algebraischen Coefficienten, für welche nicht gleichzeitig die Invarianten von fest bestimmtem Gewichte 1 verschwinden oder ihren Sinn verlieren, durch die Substitution:

$$z = \varphi(t)$$
$$y = \varrho(t) \cdot u$$

in eine Differentialgleichung:

$$(A)\ldots \frac{d^n u}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\ldots+p_{n-1}\frac{du}{dt}+p_n u=0$$

mit ebenfalls algebraischen Coefficienten übergeht, so ist die Transformationsfunction $\varphi(t)$ eine algebraische Function von t."

Der Factor $\varrho(t)$, dessen logarithmische Abteilung eine algebraische Function von t ist, hat den Wert [Cap. 2, (a)]:

$$\varrho(t)=e^{-\frac{1}{n}\int(\mathfrak{p}_1\varphi'-\binom{n}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}-p_1)\,dt}$$
$$=\varphi'^{\frac{n-1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1\varphi'\,dt}\cdot e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dt}$$
$$=\varphi'^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1\,dz}\right)_{z=\varphi(t)}\cdot e^{\frac{1}{n}\int p_1\,dt}$$

Nun ist φ' eine algebraische Function von t. Ist ferner

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n$$

das Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) und setzt man die Fundamentaldeterminante dieses Systems

$$\left|\frac{d^k y_r}{dz^k}\right|=\Delta \qquad \binom{k=0,1\ldots n-1}{r=0,1\ldots n},$$

bezeichnet man ferner die Determinante, welche aus Δ entsteht, wenn man die $(n-i)^{\text{ten}}$ Ableitungen der y_r durch die n^{ten} Ableitungen ersetzt, mit Δ_i für $i=1,2\ldots n$, so ergiebt sich bekanntlich:

$$(2)\ldots\ \mathfrak{p}_i=-\frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{p}_1=-\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{\Delta'}{\Delta}$$

also:

$$e^{-\frac{1}{n}\int\mathfrak{p}_1\,dz}=\Delta^{\frac{1}{n}}.$$

Sind die Integrale y_i algebraische Functionen von z, also auch von t, so ist Δ ebenfalls eine algebraische Function von t. Der Bestandtheil von $\varrho(t)$, welcher nicht algebraisch zu sein braucht, lautet: $e^{\frac{1}{n}\int p_1\,dt}$. Ist noch p_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function, so ist $\varrho(t)$ selber algebraisch. Daraus ergiebt sich der Satz;

„Sind die Integrale y_i einer Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) mit algebraischen Coefficienten $\mathfrak{p}_i$, für welche nicht gleichzeitig die Invarianten λ_1, μ_1, ν_1

identisch verschwinden oder ihren Sinn verlieren, sämmtlich algebraisch, und geht dieselbe durch die Substitution:

$$z = \varphi(t)$$
$$y = \varrho(t) \cdot u$$

in eine Differentialgleichung (A) mit algebraischen Coefficienten p_i über, so unterscheiden sich alle Integrale der letzteren von algebraischen Functionen nur durch einen allen gemeinsamen Factor $\varrho(t)$, dessen logarithmische Ableitung selber eine algebraische Function von t ist. Ist p_1 noch logarithmische Ableitung einer algebraischen Function von t, so sind auch die Integrale u_i der Differentialgleichung (A) algebraische Funtionen von t."

3. Betrachtet man die n Funtionen y_i und n Functionen Y_i, für $i=1,2,\ldots n$, im ersten Capitel 4., als Fundamentalintegle zweier Differentialgleichungen $(\mathfrak{A})$ und (A), indem man Y, z', ψ resp. durch u, t, ϱ ersetzt, so folgt der Satz:

„Bestehen zwischen den Integralen y_i eines Fundamentalsystems einer Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ n^{ter} Ordnung $n-2$ von einander unabhängige irreductible homogene Relationen, und befriedigt dieselben Relationen das Fundamentalsystem von Integralen u_i einer zweiten Differentialgleichung (A) n^{ter} Ordnung, so lassen sich die beiden Differentialgleichungen durch eine Substitution:

$$z = \varphi(t)$$
$$y = \varrho(t) \cdot u$$

aus einander ableiten."

4. Es bestehe zwischen den Grössen y_i für ${}_{i=1,2\ldots n}$ das irreductibe System homogener Relationen:

$$(3) \ldots . \varphi_k(y_1, y_3, \ldots y_n) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots n-2).$$

Setzt man für y_1 und y_2 beliebige algebraische Functionen einer Variablen z, deren Quotient nicht constant ist,

$$y_1 = g_1(z), \quad y_2 = g_2(z)$$

so sind durch die $n-2$ Relationen (3) auch $y_{i\,(i=3,4\ldots n)}$ als algebraische Functionen von z

$$y_i = g_i(z) \qquad (i=3,4\ldots n)$$

bestimmt, und es besteht zwischen den $g_i(z)_{(i=1,2,3\ldots n)}$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, weil sich sonst die Verhältnisse je zweier $g_i(z)$ als constant ergeben würden; $g_1(z)$ und $g_2(z)$ waren aber linear unabhängig von einander gewählt.

Diese Functionen $y_i = g_i(z)$ können aufgefasst werden als Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ n^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten, denn diese lassen sich aus den Elementen eines jeden Fundamentalsystems und ihren Ableitungen [2. (2)] rational zusammensetzen. Macht man nun die Annahme, dass für die Differentialgleichung (A) die Invarianten $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{n}_1$ nicht gleichzeitig verschwinden oder ihren Sinn verlieren, so folgt aus den Sätzen 2. und 3. der Satz:

„Bestehen zwischen den Integralen u_i einer Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten

$$(\mathrm{A}) \ldots \frac{d^n u}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} + \ldots + p_{n-1} \frac{du}{dt} + p_n u = 0,$$

für welche nicht *gleichzeitig* die Invarianten $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{n}_1$ verschwinden oder ihren Sinn verlieren, die $n-2$ Relationen (3), so unterscheiden sich die Integrale derselben von algebraischen Functionen der unabhängigen Veränderlichen t nur durch einen allen gemeinsamen Factor, dessen logarithmische Ableitung ebenfalls eine algebraische Function von t ist. Ist noch p_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (A) algebraische Functionen von t.“

II.

1. Lassen wir nun die Voraussetzung I. 1. fallen, und versuchen wir die Fälle zu erörtern, in denen für die Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ die Invarianten von fest bestimmtem Gewichte „1“, nämlich λ_1, μ_1 und ν_1, gleichzeitig verschwinden oder ihren Sinn verlieren; dasselbe gilt natürlich für die gleichbenannten Invarianten der Differentialgleichung (A). Unter dieser Voraussetzung können die Fundamentalinvarianten $\alpha_{\nu\,(\nu=3\ldots n)}$ und die Invarianten ε_2 nur constant oder identisch Null sein. Aus den absoluten Invarianten (α), (β) und (γ) [Zweites Capitel] kann man nicht mehr folgern, dass die Transformationsfunction $\varphi(t)$ eine algebraische Function von t ist. — Es sind folgende Fälle zu erörtern:

$a) \ldots . \mathfrak{a}_{2p+1} = 0,\ \mathfrak{a}_{2p+2} = 0$

$b) \ldots . \mathfrak{a}_{2p+1} = 0,\ \mathfrak{a}_{2p+2} \neq 0,\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{l}_1 = 0$

$\quad 1)\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2 = 0;$

$\quad 2)\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2 \neq 0,\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{n}_1 = 0.$

$c) \ldots . \mathfrak{a}_{2p+1} \neq 0,\ \mathfrak{a}_{2p+2} = 0,\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{l}_1 = 0$

$\quad 1)\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2 = 0;$

$\quad 2)\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2 \neq 0,\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{m}_1 = 0.$

$d) \ldots . \mathfrak{a}_{2p+1} \neq 0,\ \mathfrak{a}_{2p+2} \neq 0,\ {}^{(r,s)}\mathfrak{l}_1 = 0$

$\quad 1)\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2 = 0,\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2 = 0;$

$\quad 2)\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2 \neq 0,\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2 \neq 0,\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{m}_1 = 0,\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{n}_1 = 0.$

wo überall

$$\begin{pmatrix} p=1,2,3\ldots\frac{n-2}{2} \text{ für ein gerades } n \\ p=1,2,3\ldots\frac{n-1}{2} \text{ „ „ ungerades } n \end{pmatrix} \text{ in dem Index } 2p+1$$

$$\begin{pmatrix} p=1,2,3\ldots\frac{n-2}{2} \text{ für ein gerades } n \\ p=1,2,2\ldots\frac{n-3}{2} \text{ „ „ ungerades } n \end{pmatrix} \text{ „ „ „ } 2p+2$$

$$r \lesseqgtr s=3,4\ldots n \text{ „ „ „ } (r,s)$$

zu nehmen ist. Ferner ist zu bemerken, dass ${}^{(2p+1)}\mathfrak{l}_1$ nur auf die Fundamentalinvarianten $\mathfrak{a}_{2p+1}$ und ${}^{(2p+2)}\mathfrak{l}_1$ nur auf die $\mathfrak{a}_{2p+2}$ sich beziehen, und dass das Zeichen „$\neq$“ die Bedeutung haben soll „sind nicht alle identisch gleich“.

2. Ich fange an mit dem Falle

$$a) \ldots . \mathfrak{a}_{2p+1} = 0,\ \mathfrak{a}_{2p+2} = 0.$$

Wir gehen aus von dem Satze 3. des I. Abschnittes. Aus demselben folgert man: wenn für eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, zwischen deren Integralen $n-2$ von einander unabhängige irreductible homogene Relationen bestehen, die *sämmtlichen* Fundamentalinvarianten verschwinden, so findet dies für alle Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit diesen Relationen statt. — Die Differentialgleichung:

$$(\mathfrak{B}_1) \ldots . \frac{d^n v}{dz^n} = 0$$

hat die Integrale

$$1,\ z,\ z^2,\ \ldots z^{n-1}$$

welche ein Fundamentalsystem bilden und die von einander unabhängigen Relationen

$$(4) \ldots . v_{\nu+1}^2 - v_\nu v_{\nu+2} = 0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n-2)$$

befriedigen.

Die Fundamentalintegrale der Differentialgleichung ($\mathfrak{B}_1$), für welche sämmtliche Fundamentalinvarianten identisch Null sind, genügen also $n-2$ parabolischen Relationen zweiten Grades, also sind für *jede* Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit den Relationen (4) die sämmtlichen Fundamentalinvarianten identisch gleich Null.

Umgekehrt gehören auch zu jeder Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$(B) \ldots \frac{d^n w}{dt^n} + a_2 \frac{d^{n-2} w}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dw}{dt} + a_n w = 0,$$

für welche alle $n-2$ Fundamentalinvarianten $\mathfrak{a}_{2p+1}$ und $\mathfrak{a}_{2p+2}$ identisch verschwinden, *die $n-2$ parabolischen Relationen zweiten Grades;* denn transformirt man dieselbe durch Substitution [2. Cap. (d)]

$$(5) \ldots \begin{cases} t = \psi(z) \\ w = \varphi'^{-\frac{n-1}{2}} \cdot v \end{cases}$$

worin $z = \varphi(t)$ ist, welche aus der Differentialgleichung:

$$(6) \ldots \frac{1}{2} \binom{n+1}{3} \left[\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 \right] = a_2$$

bestimmt wird, so folgt aus der ersten der Gleichungen (6) des 2^{ten} Capitels, dass in der transformierten Differentialgleichung $\mathfrak{a}_2 = 0$ ist. Dann folgt aus *a*) dass hintereinander $\mathfrak{a}_3 = 0$, $\mathfrak{a}_4 = 0 \ldots \mathfrak{a}_n = 0$ wird. Die Differentialgleichung (B) geht also durch die Substitution (5) in die Differentialgleichung ($\mathfrak{B}_1$) über, d. h. ihre Integrale genügen den $n-2$ parabolischen Relationen zweiten Grades (4).

Ferner folgt aus den Gleichungen (18) des zweiten Capitels, dass hintereinander $L_3 = 0$, $L_4 = 0$, $L_5 = 0 \ldots L_n = 0$ werden, wenn $\mathfrak{a}_{2p+1} = 0$ und $\mathfrak{a}_{2p+2} = 0$ sind, d. h. es wird $a_r = l_r$. Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Entwickelung 3. des ersten Capitels:

Erster *Brioschi'scher Satz*: „Sind die Fundamentalinvarianten einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung identisch gleich Null, so lässt sich das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ausdrücken durch eine binäre Form $(n-1)^{ten}$ Grades mit constanten Coefficienten, deren Argumente die Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind."

Zweiter Satz: „Sind die Fundamentalinvarianten einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung identisch gleich Null, so ist dieselbe von der Form:

$$(B_1)\ldots\frac{d^n w}{dt^n}+\binom{n+1}{3}g\frac{d^{n-2}w}{dt^{n-2}}+2\binom{n+1}{4}g'\frac{d^{n-3}w}{dt^{n-3}}+\binom{n+1}{5}\left[3g''+\frac{5n+7}{3}g^2\right]\frac{d^{n-4}w}{dt^{n-4}}$$
$$+\binom{n+1}{6}\left[4g'''+2(5n+7)gg'\right]\frac{d^{n-5}w}{dt^{n-5}}+\ldots=0,$$

worin $\binom{n+1}{3}g=a_2$ eine beliebige Function von t bedeutet, und ihre Fundamentalintegrale w_i befriedigen $n-2$ von einander unabhängige irreductible homogene parabolische Relationen zweiten Grades

$$w_{\nu+1}^2-w_\nu w_{\nu+2}=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots n-2)."$$

Dritter Satz: „Eine solche Differentialgleichung (B_1), deren sämmtliche Fundamentalinvarianten identisch Null sind, lässt sich stets durch die Substition:

$$t=\psi(z)$$
$$w=\varphi'^{-\frac{n-1}{2}}\cdot v,$$

— wo $z=\varphi(t)$ aus der Differentialgleichung

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2=2g$$

zu bestimmen ist, — in eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten, nämlich in

$$(\mathfrak{B}_1)\ldots\frac{d^n v}{dz^n}=0$$

transformiren."

3. Betrachten wir nun den zweiten Fall:

$$b)\ldots\ \mathfrak{a}_{2p+1}=0,\ \mathfrak{a}_{2p+2}\neq 0,\ {}^{(2p+2)}\mathfrak{l}_1=0.$$

Da $\mathfrak{l}_1=0$, also auch $\lambda_1=0$ sind, so müssen sämmtliche absolute Invarianten

$$(7)\ldots\frac{\mathfrak{a}_{2p+2}^{2p+4}}{\mathfrak{a}_{2p+2}^{2p+4}}=\text{Const.}$$

sein, von denen mindestens *eine* von Null verschieden ist. Hier unterscheiden wir zwei Unterfälle:

$$1)\ldots{}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2=0$$

Transformirt man die Differentialgleichnng (B) durch die Substitution (5), worin $z = \varphi(t)$ ist, und*) $\varphi(t)$ die Gleichung

$$(8) \ldots \mathfrak{a}_4 = \alpha_4 \varphi'^4$$

befriedigt, in welcher α_4 eine beliebige aber von Null verschieden gewählte Constante $\varkappa_4$ bedeutet, so folgt aus (7) dass alle Invarianten α_{2p+2} dann Constanten $\varkappa_{2p+2}$ sind: dann ergiebt sich aus ${}^{(2p+2)}\varepsilon_2 = 0$, $\alpha_{2p+1} = 0$ und $\alpha_{2p+2} = \varkappa_{2p+2}$, dass hintereinander $\mathfrak{a}_2 = 0$, $\mathfrak{a}_3 = 0$, $\mathfrak{a}_4 = \varkappa_4$, $\mathfrak{a}_5 = 0$, $\mathfrak{a}_6 = \varkappa_6 \ldots$, im allgemeinen $\mathfrak{a}_{2p+1} = 0$ und $\mathfrak{a}_{2p+2} = \varkappa_{2p+2}$. Somit wird die transformite Differentialgleichung lauten:

$$(\mathfrak{B}_2) \ldots\ldots \frac{d^n v}{dz^n} + \Sigma_p \varkappa_{2p+2} \frac{d^{n-2p-2} v}{dz^{n-2p-2}} = 0,$$

worin:
$$p = 1, 2, \ldots \frac{n-2}{2} \text{ für ein gerades } n$$
$$p = 1, 2, \ldots \frac{n-3}{2} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{ungerades } n$$

zu setzen ist. —

$$2) \ldots {}^{(2p+2)}\mathrm{e}_2 \neq 0, \; {}^{(2p+2)}\mathrm{n}_1 = 0.$$

Da $\mathrm{n}_1 = 0$ sind, so müssen sämmtliche absolute Invarianten

$$(9) \ldots \frac{{}^{(2p+2)}\mathrm{e}_2^{p+1}}{\mathfrak{a}_{2p+2}} = \text{Const.}$$

sein, von denen mindestens eine von Null verschieden ist. Wir transformiren die Differentialgleichung (B) durch die Substitusion (5), in welcher $z = \varphi(t)$ ist, und $\varphi(t)$ der Gleichung

$$(10) \ldots\ldots {}^{(4)}\mathrm{e}_2 = {}^{(4)}\varepsilon_2 \varphi'^2$$

genügt, worin ${}^{(4)}\varepsilon_2$ eine beliebige aber von Null verschieden gewählte Constante $\varkappa_2$ bedeutet; so muss wegen (9) auch α_4 eine Constante $\varkappa_4$ sein, ferner werden wegen (7) alle Invarianten α_{2p+2} ebenfalls Constanten $\varkappa_{2p+2}$. Aus (28) des zweiten Capitels folgt dann, dass $\mathfrak{a}_2 = {}^{(4)}\varepsilon_2 = \varkappa_2$ ist. Nun folgt aus $\alpha_{2p+1} = 0$ und $\alpha_{2p+2} = \varkappa_{2p+1}$ hintereinander, dass $\mathfrak{a}_3 = 0$, $\mathfrak{a}_4 = \varkappa_4$, $\mathfrak{a}_5 = 0$, $\mathfrak{a}_6 = \varkappa_6 \ldots$, im allgemeinen $\mathfrak{a}_{2p+1} = 0$ und $\mathfrak{a}_{2p+2} = \varkappa_{2p+2}$. Somit wird die transformirte Differential-Gleichung lauten:

$$(\mathfrak{B}_3) \ldots \frac{d^n v}{dz^n} + \varkappa_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \Sigma_p \varkappa_{2p+2} \frac{d^{n-2p-2} v}{dz^{n-2p-2}} = 0$$

---

*) Wenn $\mathfrak{a}_4$ die erste von Null verschiedene Invariante ist (dass ähnliche ist bei jeder $\varphi(t)$ bestimmenden Gleichung zu bemerken.)

worin $\left\{\begin{array}{l} p=1, 2 \ldots \frac{n-2}{2} \text{ für } n\equiv 0 \pmod{2} \\ p=1, 2 \ldots \frac{n-3}{2} \text{ für } n\equiv 1 \pmod{2} \end{array}\right\}$ zu setzen ist.

4. Wir gehen nun zur Betrachtung des dritten Falles über:

$$c) \ldots . \mathfrak{a}_{2p+1} \neq 0,\ \mathfrak{a}_{2p+2}=0,\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{l}_3=0.$$

Da ${}^{(2p+1)}\mathfrak{l}_1=0$, also auch die Invarianten ${}^{(2p+1)}\lambda_1=0$ sind, so müssen sämmtliche absolute Invarianten

$$(11) \ldots . \frac{\mathfrak{a}_{2p+1}^{2p+3}}{\mathfrak{a}_{2p+3}^{2p+1}}=\text{Const.}$$

sein, von denen mindestens eine von Null verschieden ist. Hier sind auch zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1)\ {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2=0.$$

Wir transformiren die Differentialgleichung (B) durch die Substitution (5), in welcher $z=\varphi(t)$, und $\varphi(t)$ durch die Gleichung

$$(12) \ldots . \mathfrak{a}_3=\alpha_3 \varphi'^3$$

bestimmt wird, wo α_3 eine beliebige aber von Null verschieden gewählte Constante $\varkappa_3$ bedeutet, so folgt aus (11), dass alle α_{2p+1} Constanten $\varkappa_{2p+1}$ sind; dann ergiebt sich aus ${}^{(2p+1)}\varepsilon_2=0$, $\alpha_{2p+1}=\varkappa_{2p+1}$ und $\alpha_{2p+2}=0$, dass hintereinander $\mathfrak{a}_2=0$, $\mathfrak{a}_3=\varkappa_3$, $\mathfrak{a}_4=0$, $\mathfrak{a}_5=\varkappa_5 \ldots .$ allgemein $\mathfrak{a}_{2p+1}=\varkappa_{2p+1}$ und $\mathfrak{a}_{2p+2}=0$. Somit wird die transformirte Differentialgleichung lauten:

$$(\mathfrak{B}_4) \ldots . \frac{d^n v}{dz^n}+\Sigma_p \varkappa_{2p+1} \frac{d^{n-2p-1} v}{dz^{n-2p-1}}=0$$

worin $\left\{\begin{array}{l} p=1, 2 \ldots \frac{n-2}{2} \text{ für } n\equiv 0 \pmod{2} \\ p=1, 2 \ldots \frac{n-1}{2} \text{ für } n\equiv 1 \pmod{2} \end{array}\right\}$ zu setzen ist.

$$2)\ {}^{(2n+1)}\mathfrak{e}_2 \neq 0,\quad {}^{(2p+1)}\mathfrak{m}_1=0.$$

Da ${}^{(2p+1)}\mathfrak{m}_1=0$ sind, so müssen sämmtliche absolute Invarianten:

$$(13) \ldots . \frac{\mathfrak{a}_{2p+1}^2}{{}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2^{2p+1}}=\text{Const.}$$

sein, von denen mindestens eine von Null verschieden ist. Transformirt man die Differentialgleichung (B) durch die Substitution (5), worin $z=\varphi(t)$

ist, auf die unabhängige Veränderliche z, in welcher $\varphi(t)$ bestimmt wird durch

$$(14) \ldots\ldots {}^{(3)}\mathfrak{e}_2 = {}^{(3)}\varepsilon_2 \, \varphi'^2$$

wo ${}^{(3)}\varepsilon_2$ eine beliebige, aber von Null verschieden gewählte Constante $\varkappa_2$ bedeutet, so folgt aus (13), dass α_3 auch eine Constante $\varkappa_3$ ist, dann schliesst man aus (11), dass sämmtliche ungerade Fundamentalinvarianten α_{2p+1} ebenso Constanten $\varkappa_{2p+1}$ sind; ferner ergiebt sich aus (28) des zweiten Capitels, dass sämmtliche ${}^{(2p+1)}\varepsilon_2 = \mathfrak{a}_2 = \varkappa_2$ sind. Aus $\alpha_{2p+1} = \varkappa_{2p+1}$ und $\alpha_{2p+2} = 0$ folgt hinter einander, dass $\mathfrak{a}_3 = \varkappa_3$, $\mathfrak{a}_4 = 0$, $\mathfrak{a}_5 = \varkappa_5 \ldots$ allgemein $\mathfrak{a}_{2p+1} = \varkappa_{2p+1}$ $\mathfrak{a}_{2p+2} = 0$. Somit wird die transformirte Differentialgleichung lauten:

$$(\mathfrak{B}_5) \ldots\ldots \frac{d^n v}{dz^n} + \varkappa_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \Sigma_p \, \varkappa_{2p+1} \frac{d^{n-2p-1} v}{dz^{n-2p-1}} = 0,$$

worin $p = 1, 2, \ldots \frac{n-2}{2}$ oder $p = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ zu setzen ist, je nachdem n gerade oder ungerade.

5. Nun kommt der vierte Fall an die Reihe:

$$d) \ldots\ldots \mathfrak{a}_{2p+1} \neq 0, \ \mathfrak{a}_{2p+2} \neq 0, \ {}^{(r,s)}I_2 = 0.$$

Da ${}^{(r,s)}I_1 = 0$ sind, so müssen sämmtliche absolute Invarianten (α)

$$(15) \ldots\ldots \frac{\mathfrak{a}_r^s}{\mathfrak{a}_s^r} = \text{Const.}$$

sein, von denen mindestens eine von Null verschieden ist. Ich bemerke hierzu, dass unter der Voraussetzung ${}^{(r,s)}I_1 = 0$ die Invarianten ${}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2$ und ${}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2$ gleichzeitig 0 oder von Null verschieden sind. ~~Hiernach~~ sind demnach zwei Unterfälle zu unterscheiden:

$$1) \ldots\ldots {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2 = 0, \quad {}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2 = 0.$$

Transformirt man die Differentialgleichung (B) auf die unabhängige Veränderliche z durch die Substitution (5), in welcher $z = \varphi(t)$ ist, und $\varphi(t)$ durch die Gleichung

$$(16) \ldots\ldots \mathfrak{a}_3 = \varkappa_3 \, \varphi'^3$$

bestimmt, wo α_3 eine beliebige, aber von 0 verschieden gewählte Constante $\varkappa_3$ ist, dann folgt zunächst aus (15), dass auch alle α_r Constanten $\varkappa_r$ sein müssen. Ferner folgt aus (28) des zweiten Capitels $\mathfrak{a}_2 = 0$. Hieraus schliesst man, dass alle Coefficienten $\mathfrak{a}_r = \alpha_r$ constant sind. Somit wird die transformirte Differentialgleichung lauten

$$(\mathfrak{B}_6) \ldots \frac{d^n v}{dz^n} + \varkappa_3 \frac{d^{n-3} v}{dz^{n-3}} + \varkappa_4 \frac{d^{n-4} v}{dz^{n-4}} + \ldots + \varkappa_{n-1} \frac{dv}{dz} + \varkappa_n v = 0.$$

$$2) \ldots {}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2 \neq 0 \quad {}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2 \neq 0 \quad {}^{(2p+1)}\mathfrak{n}_1 = 0 \quad {}^{(2p+2)}\mathfrak{m}_1 = 0.$$

Da $\mathfrak{n}_1 = 0$ und $\mathfrak{m}_1 = 0$ sind, so müssen alle beide Systeme von absoluten Invarianten (β) und (γ) des 2ten Capitels constant sein, nämlich:

$$(17) \ldots \frac{\mathfrak{a}_{2p+1}^2}{{}^{(2p+1)}\mathfrak{e}_2{}^{2p+1}} = \text{Const.}$$

$$(18) \ldots \frac{{}^{(2p+2)}\mathfrak{e}_2^{p+1}}{\mathfrak{a}_{2p+2}} = \text{Const.}$$

von denen mindestens je eine von Null verschieden ist. Transformirt man die Differentialgleichung (B) durch die Substitution (5), in welcher $z = \varphi(t)$, und $\varphi(t)$ durch eine der Gleichungen:

$$(19) \ldots \begin{cases} \mathfrak{a}_3 = \alpha_3 \varphi'^3 \\ {}^{(3)}\mathfrak{e}_2 = {}^{(3)}\varepsilon_2 \varphi'^2 \\ {}^{(4)}\mathfrak{e}_2 = {}^{(4)}\varepsilon_2 \varphi'^2 \end{cases}$$

bestimmt wird, wo eine der Grössen α_3, ${}^{(3)}\varepsilon_2$ und ${}^{(4)}\varepsilon_2$ eine beliebige, aber von Null verschieden gewählte Constante bedeutet, dann folgert man dass die transformirte Differentialgleichung lauten wird:

$$(\mathfrak{B}_7) \ldots \frac{d^n v}{dz^n} + \varkappa_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \varkappa_3 \frac{d^{n-3} v}{dz^{n-3}} + \ldots + \varkappa_{n-1} \frac{dv}{dz} + \varkappa_n v = 0,$$

in welcher $\varkappa_i$ constante Coefficienten bedeuten.

6. In allen in diesem Theile angeführten Fällen sind wir auf Differentialgleichungen $(\mathfrak{B}_s)$ mit constanten Coefficienten geführt worden. Um untersuchen zu können, welche Relationen zwischen den Integralen der zugehörigen Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der zugehörigen Differentialgleichung (B) möglich sind, betrachten wir nun die allgemeine *charakteristische* Gleichung:

$$(20) \ldots r^n + \mathfrak{a}_2 r^{n-2} + \mathfrak{a}_3 r^{n-3} + \ldots + \mathfrak{a}_{n-1} r + \mathfrak{a}_n = 0.$$

Zunächst erledigen wir den allgemeinen Fall. Es seien σ von einander verschiedenen α_i-fache Wurzeln $r_{i\,(i=1,2,\ldots\sigma)}$ vorhanden, so dass $\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i = n$ ist. Ausserdem seien die Wurzeln r_i so geordnet, dass stets $r_i > r_{i+1}$ ist. Das System der Fundamentalintegrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ wird dann lauten:

$$e^{r_i z},\ z e^{r_i z},\ z^2 e^{r_i z},\ \ldots\ z^{\alpha_i - 1} e^{r_i z},$$

welches wir bezeichnen mit

$$(21) \ldots\ldots v_{i1},\ v_{i2},\ v_{i3},\ \ldots\ldots v_{i\alpha_i},\ \scriptstyle (i=1,2,3\ldots\sigma).$$

Zwischen diesen Integralen bestehen offenbar die Relationen:

$$(21) \begin{cases} \frac{v_{11}}{v_{12}} = \frac{v_{12}}{v_{13}} = \frac{v_{13}}{v_{14}} = \ldots = \frac{v_{1,\alpha_1-1}}{v_{1\alpha_1}} \\ = \frac{v_{21}}{v_{22}} = \frac{v_{22}}{v_{23}} = \frac{v_{23}}{v_{24}} = \ldots = \frac{v_{2,\alpha_2-1}}{v_{2\alpha_2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = \frac{v_{\sigma 1}}{v_{\sigma 2}} = \frac{v_{\sigma 2}}{v_{\sigma 3}} = \frac{v_{\sigma 3}}{v_{\sigma 4}} = \ldots = \frac{v_{\sigma,\alpha_\sigma-1}}{v_{\sigma\alpha}} \end{cases}$$

woraus sich die folgenden, von einander unabhängigen quadratischen homogenen irreductiblen Relationen ergeben:

$$(22) \ldots\ldots v_{i,i+1}^2 - v_{i\nu_i}\, v_{i,i+2} = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,3\ldots\sigma \\ \nu_i = 1,2,3\ldots\alpha_i - 2 \end{smallmatrix}\right)$$

$$(23) \ldots\ldots v_{i,i-1}\, v_{i+1,2} - v_{i+1,1}\, v_{i\nu_i} = 0, \qquad (i=1,2,3,\ldots\sigma-2).$$

Die Relationen (22) hören auf zu bestehen für $\alpha_i \overline{\overline{<}} 2$ und die (23) für $\alpha_i = 1$ und $\sigma = 1$.

Zu diesen Relationen können noch einige hinzukommen, wobei wir zwei Fälle zu unterscheiden haben:

a) Wir setzen voraus, die Wurzeln r_i seien von der Beschaffenheit, dass ihre Verhältnisse rational sind, was besagt, dass ausser der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i r_i = 0$$

zwischen den Wurzeln r_i noch $\sigma - 2$ lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen; dann können wir

$$r_i = \gamma\, \varrho_i \qquad (i=1,2,\ldots\sigma)$$

setzen, wo ϱ_i ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler bedeuten, und die Integrale v_{i1} lassen sich als rationale Functionen des Parameters

$$\zeta = e^{\gamma z}$$

darstellen, nämlich:

$$v_{i1} = \zeta^{\varrho_i} \qquad (i=1,2\ldots\sigma).$$

Aus der Anordnung der Wurzeln r_i folgt, dass die ganzen Zahlen ϱ_i ebenso geordnet sind, nämlich

$$\varrho_i > \varrho_{i+1} \qquad (i=1,2\ldots\sigma-1);$$

und setzt man ferner

$$\frac{\varrho_i - \varrho_{i+1}}{\varrho_{i+1} - \varrho_{i+2}} = \frac{\mu_i}{\nu_i},$$

wo μ_i und ν_i ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so lassen sich die $\sigma-2$ von einander unabhängigen homogenen Relationen herstellen:

$$(24) \ldots\ldots v_{i+1,1}^{\nu_i+\mu_i} - v_{i1}^{\nu_i}\, v_{i+2,1}^{\mu_i} = 0 \qquad (i=1,2,3\ldots\sigma-2).$$

β) Sind aber die Wurzeln r_i von der Beschaffenheit, dass ihre Verhältnisse nicht rational sind, dass aber ausser der Gleichung $\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i r_i = 0$ noch $\sigma-3$ lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen, welchen die Wurzeln Genüge leisten, dann haben wir $\sigma-2$ Gleichungen mit σ Unbekannten, von denen also zwei als unabhängige Veränderliche zu nehmen sind. Seien dieselben r_1 und r_σ; dann lassen sich alle übrigen r_i als lineare homogene Functionen dieser r_1 und r_σ ausdrücken, nämlich

$$\lambda_i r_{i+1} = \mu_i r_1 + \nu_i r_\sigma \qquad (i=1,2\ldots\sigma-2)$$

also

$$v_{i+1,1}^{\lambda_i} = v_{i1}^{\mu_i} v_{\sigma1}^{\nu_i}$$

oder

$$\left(\frac{v_{i+1}}{v_{\sigma1}}\right)^{\lambda_i} = \left(\frac{v_{i1}}{v_{\sigma1}}\right)^{\mu_i} v_{\sigma1}^{\nu_i+\mu_i-\lambda_i} \qquad (i=1,2,3\ldots\sigma-2).$$

Wenn man das kleinste gemeinsame Vielfache der absoluten Werthe von $\nu_i + \mu_i - \lambda_i$ $(i=1,2,\ldots\sigma-2)$ mit m, alsdann $\frac{m}{\nu_i+\mu_i-\lambda_i}$ mit β_i bezeichnet, jede Gleichung zur β_i^{ten} Potenz erhebt und dann immer zwei aufeinander folgende durch einander dividirt, so erhält man:

$$\left(\frac{v_{i+1,1}}{v_{\sigma1}}\right)^{\beta_i\lambda_i} = \left(\frac{v_{i+2,1}}{v_{\sigma1}}\right)^{\beta_{i+1}\lambda_{i+1}} \cdot \left(\frac{v_{11}}{v_{\sigma1}}\right)^{\mu_i\beta_i - \mu_{i+1}\beta_{i+1}};$$

wenn man zur Abkürzung:

$$\beta_i\lambda_i = \lambda^{(i)},\ \beta_{i+1}\lambda_{i+1} = \lambda^{(i+1)} \text{ und } \mu_i\beta_i - \mu_{i+1}\beta_{i+1} = \mu^{(i)}$$

setzt, werden $\sigma-3$ homogene Relationen erhalten:

$$(25) \ldots v_{i+1,1}^{\lambda^{(i)}} \cdot v_{\sigma1}^{\lambda^{(i+1)}+\mu^{(i)}-\lambda^{(i)}} = v_{i+2,1}^{\lambda^{(i+1)}} \cdot v_{11}^{\mu^{(i)}}, \qquad (i=1,2,\ldots\sigma-3)$$

wo die Zahlen $\lambda^{(i)}$, $\lambda^{(i+1)}$ und $\mu^{(i)}$ nicht nur positiv, sondern auch negativ sein können.

Es bleibt uns nun nichts übrig als zu beweisen, dass ausser den Relationen (22), (23) und (24) oder (25) keine andere in dieselben *nicht zerfallende* Relation besteht. Diesen Beweis werden wir späterhin liefern. Wir gehen zur Betrachtung der speciellen Fälle über.

7. Unter der Annahme, dass $\sigma = n$, also $\alpha_i = 1$, $(i=1,2\dots n)$ und dass die Verhältnisse der Wurzeln r_i rational sind, hören die Relationen (22) und (23) auf zu gelten, und wir können nach dem Verfahren 6. α), folgende Gleichungen aufstellen:

$$r_i = \gamma \varrho_i \qquad (i=1,2\dots n)$$

$$\frac{\varrho_i - \varrho_{i+1}}{\varrho_{i+1} - \varrho_{i+2}} = \frac{\mu_i}{\nu_i} \qquad (i=1,2,\dots n-2)$$

$$(26)\dots\; v_{i+1}^{\nu_i + \mu_i} = v_i^{\nu_i}\, v_{i+2}^{\mu_i}, \qquad (i=1,2,\dots n-2)$$

wo die Grössen $\varrho_i > \varrho_{i+1}$ ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler, μ_i und ν_i ganze positive relative Primzahlen und v_i die Fundamentalintegrale der Differentialgleichung ($\mathfrak{B}$) bedeuten.

Durch die r_i werden die ϱ_i, durch die ϱ_i die Grössen μ_i und ν_i gegeben, und umgekehrt durch μ_i und ν_i sind die Verhältnisse der ϱ_i und dadurch die Verhältnisse der r_i bestimmt, da wegen $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 0$ noch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho_i = 0$$

besteht.

Man kann auch umgekehrt zeigen, dass, wenn zwischen den Integralen v_i die $n-2$ von einander unabhängigen homogenen Relationen bestehen, dieselben sich auf zweigliedrige reduciren lassen und die Verhältnisse der Wurzeln r_i rational sein müssen:

Es mögen zwischen den Integralen v_i die $n-2$ homogenen Relationen bestehen:

$$(27)\dots\; R_k = \sum c_{l_{m_k}^{(k)}} \prod_{i=1}^{n} v_i^{l_{m_k i}^{(k)}} = 0, \qquad \binom{k=1,2,2\dots n-2}{m_k=1,2,3\dots p_k},$$

von denen jede Relation R_k je p_k Glieder enthalte, so müssen sich die in der Relation R_k vorkommenden Glieder $\prod\limits_{i=1}^{n} v_i^{l_{m_k i}^{(k)}}$ — wenn v_i durch $e^{r_i z}$ ersetzt wird — zu demselben Gliede $e^{a_k z}$ vereinigen; es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$(28)\ldots l^{(k)}_{m_k1}\, r_1 + l^{(k)}_{m_k2}\, r_2 + \ldots\, l^{(k)}_{m_kn}\, r_n = a_k$$

und gleichzeitig

$$\Sigma c_{l^{(k)}_{m_k}} = 0$$

sein für $k=1,2,\ldots n-2$ und $m_k=1,2,3\ldots p_k$.

Setzt man

$$d^{(k)}_{i_{m_k}} = l^{(k)}_{m_ki} - l^{(k)}_{1i}$$

so gewinnen wir aus (28) durch Subtraction $n-2$ Systeme von je p_k-1 Gleichungen zur Bestimmung der Wurzeln r_i, nämlich:

$$(29)\ldots\, d^{(k)}_{1_{m_k}} r_1 + d^{(k)}_{2_{m_k}} r_2 + d^{(k)}_{3_{m_k}} r_3 + \ldots + d^{(k)}_{n_{m_k}} r_n = 0, \qquad \binom{k=1,2,\ldots n-2}{m_k=2,3\ldots p_k}.$$

Dazu kommt noch die Gleichung

$$(30)\ldots\, r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 0$$

und die Gleichungen

$$(31)\ldots\, d^{(k)}_{1_{m_k}} + d^{(k)}_{2_{m_k}} + \ldots + d^{(k)}_{n_{m_k}} = 0, \qquad \binom{k=1,2,\ldots n-2}{m_k=2,3,\ldots p_k}$$

welche sich aus den Gleichungen

$$l^{(k)}_{m_k1} + l^{(k)}_{m_k2} + \ldots + l^{(k)}_{m_kn} = 0 \qquad \binom{k=1,2,\ldots n-2}{m_k=1,2,3\ldots p_k}$$

ableiten lassen, wo n_k den Homogeneitätsgrad der Relation R_k bedeutet.

Die Gleichungen (29) sind wegen (31) von der Gleichung (30) unabhängig, und es ist ersichtlich, dass von den $n-2$ Gleichungssystemen (29) wegen (30) nur $n-2$ Gleichungen wirklich unabhängig sein *können*. Ich behaupte aber, dass $n-2$ der Gleichungen (29) von einander unabhängig sein *müssen*. Nimmt man nämlich an, dass nur $n-3$ der Gleichungen (29) von einander unabhängig wären z. B.

$$d^{(s)}_{1_2} r_1 + d^{(s)}_{2_2} r_2 + d^{(s)}_{3_2} r_3 + \ldots + d^{(s)}_{n_2} r_n = 0 \qquad (s=1,2,\ldots n-3)$$

so würden die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} d^{(k)}_{i_{m_k}} &= \sum_{s=1}^{n-3} \alpha^{(sk)}_{m_k}\, d^{(s)}_{i_2} \\ d^{(n-2)}_{i_{m_{n-2}}} &= \sum_{s=1}^{n-3} \alpha^{(s,n-2)}_{m_{n-2}}\, d^{(s)}_{i_2} \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{matrix} i=1,2,3\ldots n \\ k=1,2,3\ldots n-3 \\ m_k=3,4\ldots p_k \\ m_{n-2}=2,3\ldots, p_{n-2} \end{matrix}\right)$$

bestehen. In diesem Falle würden die Relationen (27), wenn man dieselben resp. durch $\prod_{i=1}^{n} v_i^{l^{(k)}_{1i}}$ $(k=1,2\ldots n-2)$ dividirt und $\prod_{i=1}^{n} v_i^{d^{(s)}_{i_2}} = u_s$ setzt, lauten:

$$(\overline{27})\ldots\left\{\begin{array}{ll}\overline{R}_k=\Sigma c_{l^{(k)}_{m_k}}\prod_{s=1}^{n-3}u_s^{\alpha^{(sk)}_{m_k}}=0 & \binom{m_k=3,4\,.\,.p_k}{k=1,2,\ldots n-3}, \\ \overline{R}_{n-2}=\Sigma c_{l^{(n-2)}_{m_{n-2}}}\prod_{s=1}^{n-3}u_s^{\alpha^{(s,n-2)}_{m_{n-2}}}=0 & (m_{n-2}=2,3,\ldots p_{n-2}).\end{array}\right.$$

Da aber andrerseits die Ausdrücke u_s $(s=1,2,\ldots n-3)$ wegen der Gleichungen (29) den Werth 1 haben, so würden sich die Relationen $(\overline{27})$ auf n--3 zweigliedrige, nämlich

$$u_s-1=0 \qquad (s=1,2,\ldots n-3)$$

oder

$$\prod_{i=1}^{n}v_i^{l^{(s)}_{2i}}=\prod_{i=1}^{n}v_i^{l^{(s)}_{1i}} \qquad (s=1,2,\ldots n-3)$$

reduciren, was gegen die Voraussetzung ist. Es müssen also $n-2$ der Gleichungen (29) von einander unabhängig sein und somit alle anderen sich aus denselben linear ableiten lassen.

Es mögen die n--2 unabhängigen Gleichungen des Systems (29) lauten:

$$(32)\ldots\sum_{i=1}^{n}d^{(s)}_{i\lambda_s}r_i=0 \qquad (s=1,2\ldots,n-2)$$

so lassen sich alle d durch $d^{(s)}_{i\lambda_s}$ folgendermassen darstellen:

$$d^{(k)}_{im_k}=\sum_{s=1}^{n-2}\alpha^{(s,k)}_{m_k}\,d^{(s)}_{i\lambda_s} \qquad \left(\begin{array}{c}i=1,2,\ldots n\\ k=1,2,\ldots n-2\\ m_k=2,3\ldots p_k\end{array}\right).$$

Dividirt man die Relationen (27) der Reihe nach mit $\prod_{i=1}^{n}v_i^{l^{(k)}_{1i}}$ $(k=1,2\ldots n-2)$, so werden dieselben

$$\overline{\overline{R}}_k=\Sigma c_{l^{(k)}_{m_k}}\prod_{i=1}^{n}v_i^{d^{(k)}_{im_k}}=0 \qquad \binom{k=1,2\ldots n-2}{m_k=2,3\,.\,.p_k}$$

oder, wenn man

$$\prod_{i=1}^{n}v_i^{d^{(s)}_{i\lambda_s}}=u_s \qquad (s=1,2,\ldots n-2)$$

setzt,

$$\overline{\overline{R}}_k=\Sigma c_{l^{(k)}_{m_k}}\prod_{s=1}^{n-2}u_s^{\alpha^{(s,k)}_{m_k}}=0 \qquad \binom{k=1,2,\ldots n-2}{m_k=2,3,\ldots p_k}.$$

Andererseits haben aber die Ausdrücke u_s wegen der Gleichungen (32) den Werth 1, d. h. die vorgelegten Relationen (27) reduciren sich auf $n-2$ zweigliedrige:

$$u_s-1=0 \qquad (s=1,2,\ldots n-2)$$

oder

$$(33)\ldots\ \prod_{i=1}^{n} v_i^{l_i^{(s)}\lambda_s i} = \prod_{i=1}^{n} v_i^{l_{1i}^{(s)}} \qquad {\scriptstyle (s=1,2,3\ldots n-2)}.$$

Aus den Gleichungen (30) und (32) folgt, dass die Verhältnisse der Wurzeln r_i rational sein müssen.

Aus der ersten Hälfte dieser Nummer folgern wir den Satz:

„Sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von einander verschieden und ihre Verhältnisse rational, so bestehen zwischen den Fundamentalintegralen der Differentialgleichung $n-2$ unabhängige homogene zweigliedrige Relationen von der Form:

$$v_{i+1}^{\nu_i+\mu_i} = v_i^{\nu_i} \cdot v_{i+2}^{\mu_i} \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n-2)}.\text{“}$$

Aus der zweiten Hälfte dieser Nummer folgt der Satz:

„Wenn zwischen den Integralen v_i einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten $n-2$ unabhängige homogene Relationen bestehen, so können dieselben auf $n-2$ unabhängige zweigliedrige homogene irreductible Relationen reducirt werden, und die Verhältnisse der von einander verschiedenen Wurzeln r_i der charakteristischen Gleichung sind rational.“

8. Nimmt man an, dass $\sigma = n$, also $\alpha_i = 1$ ${\scriptstyle (i=1,2\ldots n)}$ und dass die Verhältnisse der Wurzeln r_i nicht rational sind, dass aber ausser der Gleichung (30) noch $n-3$ von derselben unabhängige lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten zwischen den Wurzeln r_i bebestehen, dann haben wir nach dem Verfahren 6. β) die Gleichungen:

$$\lambda_i r_{+1} = \mu_i r_1 + \nu_i r_n \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n-2)}$$

und, wenn man das kleinste gemeinsame Vielfache der absoluten Werthe von $\nu_i + \mu_i - \lambda_i$ wie vorhin mit m bezeichnet, $\dfrac{m}{\nu_i + \mu_i - \lambda_i} = \beta_i$ setzt, ferner zur Abkürzung $\beta_i \lambda_i = \lambda^{(i)}$ und $\mu_i \beta_i - \mu_{i+i} \beta_{i+1} = \mu^{(i)}$ setzt, die $n-3$ unabhängigen homogenen Relationen:

$$(34)\ldots\ v_{i+1}^{\lambda^{(i)}} \cdot v_n^{\lambda^{(i+1)} + \mu^{(i)} - \lambda^{(i)}} = v_1^{\mu_i} \cdot v_{i+2}^{\lambda^{(i+1)}} \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3\ldots n-3)},$$

wo die Zahlen $\lambda^{(i)}$, $\lambda^{(i+1)}$ und $\mu^{(i)}$ positiv oder negativ sein können.

Es kann umgekehrt gezeigt werden, dass, wenn zwischen den Integralen v_i einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten nur $n-3$ homogene Relationen bestehen, dieselben sich auf zweigliedrige reduciren lassen und zwischen den Wurzeln r_i der charakteristischen Gleichung ausser der Gleichung (30) nur noch $n-3$ unabhängige homogene lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen können.

Es mögen die $n-3$ Relationen lauten:

$$(35) \ldots . R_k = \Sigma c_{l_{m_k}^{(k)}} \prod_{i=1}^{n} v_i^{l_{m_k i}^{(k)}} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} k=1,2,3 \ldots n-3 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} l_{m_k i}^{(k)} = n_k \end{matrix} \right)$$

und die linken Seiten derselben mögen je p_k Glieder enthalten, so ergeben sich zur Bestimmung der Wurzeln r_i $n-3$ Systeme zu je p_k-1 Gleichungen:

$$(36) \ldots . d_{1m_k}^{(k)} r_1 + d_{2m_k}^{(k)} r_2 + \ldots . + d_{nm_k}^{(k)} r_n = 0 \qquad \left(\begin{matrix} k=1,2,3 \ldots . n-3 \\ m_k=2,3 \ldots . p_k \end{matrix} \right).$$

Dazu kommen noch die Gleichung (30) und die Gleichungen:

$$(37) \ldots . d_{1m_k}^{(k)} + d_{2m_k}^{(k)} + \ldots . + d_{nm_k}^{(k)} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} k=1,2 \ldots n-3 \\ m_k=2,3 \ldots p_k \end{matrix} \right).$$

Die Gleichungen (36) sind wegen (37) von der Gleichung (30) unabhängig, und von den Gleichungen (36) sind nur $n-3$ von einander unabhängig, da sich sonst im Falle, dass $n-2$ von einander unabhängig wären, die Verhältnisse der Wurzeln r_i als rationale Zahlen und hieraus $n-2$ homogene Relationen ergeben würden, und im Falle, dass $n-4$ von einander unabhängig sind, die Relationen (35) auf $n-4$ reduciren würden, was gegen die Voraussetzung ist. Es müssen also $n-3$ der Gleichungen (36) von einander unabhängig sein, und somit alle andere desselben Systems aus diesen $n-3$ sich linear ableiten lassen.

Nimmt man an, dass die $n-3$ unabhängigen der Gleichungen (36) lauten:

$$(38) \ldots . \sum_{i=1}^{n} d_{i_2}^{(s)} r_i = 0 \qquad (s=1,2,3 \ldots . n-3)$$

dann muss sein

$$d_{im_k}^{(k)} = \sum_{s=1}^{n-3} \alpha_{m_k}^{(sn)} d_{i_2}^{(s)} \qquad \left(\begin{matrix} i=1,2,3 \ldots . n \\ k=1,2,3 \ldots . n-3 \\ m_k=3,4 \ldots . p_k \end{matrix} \right).$$

Dividirt man die Relationen (35) der Reihe nach durch $\prod\limits_{i=1}^{n} v_i^{l_{si}^{(k)}}$, und setzt

$$\prod_{i=1}^{n} v_i^{d_{i_2}^{(s)}} = u_s \qquad (s=1,2,3, \ldots . n-3)$$

so werden dieselben:

$$\overline{R}_k = \Sigma c_{l_{m_k}^{(k)}} \prod_{s=1}^{n-3} u_s^{a_{m_k}^{(sk)}} = 0.$$

Sie reduciren sich daher, da andererseits $u_s = 1$ ist, auf $n-3$ zweigliedrige:

$$(39) \ldots \prod_{i=1}^{n} v_i^{l_{2i}^{(s)}} = \prod_{i=1}^{n} v_i^{l_{1i}^{(s)}} \qquad (s=1, 2, \ldots, n-3),$$

und zwischen den Wurzeln r_i bestehen nur die $n-2$ unabhängigen Gleichungen (30') und (38).

Setzt man diese Analyse fort, so wird man zum Schlusse kommen: Bestehen zwischen den Wurzeln r_i nur $n-\nu$ von einander unabhängige homogene lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, so bestehen zwischen den Integralen v_i nur $n-\nu-1$ homogene zweigliedrige irreductible Relationen, und umgekehrt.*)

9. Ich komme nun nachträglich dazu, zu beweisen, dass im Falle α), resp. β) Nr. 6 ausser den Relationen (22), (23) und (24) resp. (22) (23) und (26) keine andere in dieselben *nicht zerfallende* Relation bestehen kann. Denn es sei

$$(L) \ldots \sum_{k=1}^{p} c_k \prod_{i=1}^{\sigma} \prod_{\nu_i=1}^{a_i} v_{i\nu_i}^{l_{i\nu_i}^{(k)}} = 0 \qquad \left(\Sigma_i \Sigma_{\nu_i} l_{i\nu_i}^{(k)} = m\right)$$

eine von (22), (23) und (24) resp. (26) unabhängige nicht lineare homogene Relation, welche p Glieder enthält. Setzt man für die $v_{i\nu_i}$ $\left(\substack{i=1,2,\ldots\sigma \\ \nu_i=1,2,\ldots a_i}\right)$ ihre Werthe ein, so erhält man Glieder von der Form $c_i z^{s_i} e^{a_i z}$; eine Summe von solchen Gliedern kann aber nur dann verschwinden, wenn die *algebraischen* Summen der zu demselben $z^s e^{az}$ gehörigen Coefficienten c_i *einzeln* verschwinden. Die Relation (L) zerfällt demgemäss in mehrere Einzelrelationen (L_1), $(L_2) \ldots (L_\mu)$, welche resp. je p_1, $p_2 \ldots p_\mu$ Glieder enthalten mögen. Eine solche Relation legen wir der ferneren Betrachtung zu Grunde. Es möge dieselbe lauten:

$$(L_h) \ldots \sum_{k=1}^{p_h} c_k \prod_{i=1}^{\sigma} \prod_{\nu_i=1}^{a_i} v_{i\nu_i}^{l_{i\nu_i}^{(k)}} = 0 \qquad \left(\Sigma_i \Sigma_{\nu_i} l_{i\nu_i}^{(k)} = m\right)$$

*) So weit war ich gekommen, als ich von der interessanten Abhandlung von Dr. *Wallenberg*: „Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen", J. f. Math., B. 113, Kenntniss erhielt, in welcher derselbe Gegenstand behandelt worden ist, den ich zu behandeln unternommen hatte. Deswegen schliesse ich vorliegende Arbeit mit obiger Nummer.

welche, also, nach der Einsetzung der Werthe für $v_{i\nu_i}$ die Form

$$z^s e^{az} \sum_{k=1}^{p_h} c_k = 0$$

annimmt; es muss also

$$\Sigma c_k = 0$$

sein.

Hieraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\nu_i=1}^{a_i-1} \nu_i l_{i\nu_i+1}^{(k)} = s.$$

Dividirt man die Relation (L_h) durch v_{11}^m, so lautet dieselbe:

$$(\bar{L}_h) \ldots \Sigma_k c_k \prod_{i=1}^{\sigma} \prod_{\nu_i=1}^{a_i} \left(\frac{v_{i\nu_i}}{v_{11}}\right)^{l_{i\nu_i}^{(k)}} = 0.$$

Aus den Gleichungen (21'), oder was auf dasselbe hinauskommt, aus (22) und (23) folgt:

$$\frac{v_{i\nu_i}}{v_{11}} = \left(\frac{v_{12}}{v_{11}}\right)^{\nu_i-1} \frac{v_{i1}}{v_{11}}, \qquad \begin{pmatrix} \nu_i = 1, 2, \ldots a_i \\ i = 1, 2, 3 \ldots \sigma \end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Werthe in $(\bar{L}_h)$ ein, so erhält man:

$$(\bar{\bar{L}}_h) \ldots \Sigma c_k \left(\frac{v_{12}}{v_{11}}\right)^s \prod_{i=2}^{\sigma} \left(\frac{v_{i1}}{v_{11}}\right)^t = 0, \text{ wo } t = \sum_{\nu_i=1}^{a_i} l_{i\nu_i}^{(k)} \text{ ist.}$$

Da s und m fest bestimmte Zahlen bedeuten, so können wir diese Relation durch $\left(\frac{v_{12}}{v_{11}}\right)^s$ dividiren und dann mit v_{11}^m multipliciren, woraus folgen wird:

$$(\bar{\bar{\bar{L}}}_h) \ldots \Sigma c_k \prod_{i=1}^{\sigma} v_{i1}^{\sum_{\nu_i=1}^{a_i} l_{i\nu_i}^{(k)}} = 0.$$

Die vorgelegte Relation (L) zerfällt also in Einzelrelationen (L_h), von denen jede auf eine solche reducirt wird, welche nur die Integrale:

$$v_{11}, \; v_{21}, \; v_{31} \; \ldots \; v_{\sigma 1}$$

enthalten kann, deren Werthe $e^{r_i z}$ $(i=1, 2, \ldots \sigma)$ sind.*)

Die Relationen (24) resp. (26) sind *nun* eben von dieser Beschaffenheit; hätte also eine solche Relation $(\bar{\bar{\bar{L}}}_h)$ unabhängig von den Relationen (24) resp. (26) bestanden, so würde sich nach ähnlichem Verfahren

*) Vgl. *Wallenberg*, J. f. Math., Bd. 113, p. 20–21.

wie in der Nummer 7 resp. 8 ergeben, dass im Falle α) für die Bestimmung der Verhältnisse der Wurzeln r_i $_{(i=1,2,\ldots,\sigma)}$ mehr als $\sigma-1$ lineare unabhängige Gleichungen beständen, und im Falle β) die Verhältnisse der Wurzeln rational wären, was der Voraussetzung widerspricht. — Es bleibt also die Behauptung, dass ausser den Relationen (22), (23) und (24) resp. (26) keine andere nichtlineare unabhängige homogene Relation zwischen den Integralen $v_{i\nu_i}$ $\left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,\sigma \\ \nu_i=1,2,\ldots,a_i \end{smallmatrix}\right)$ besteht, aufrecht erhalten.

Thesen.

I.

Um die Infinitesimalrechnung streng zu begründen, ist es nothwendig, den Begriff der unendlich kleinen Grössen so zu fassen, dass er untrennbar mit dem Begriffe der Grenze verbunden ist.

II.

Die Behandlung der darstellenden Geometrie in organischer Verbindung mit der synthetischen Geometrie ist der getrennten Behandlung beider Disciplinen vorzuziehen.

III.

Das Causalgesetz entsteht durch Anwendung des apriorischen Denkgesetzes vom zureichenden Grunde auf die Thatsachen der Erfahrung.

VITA.

Natus sum Petrus L. Vukićević in Serbiae vico Svetlić die XIV. mensis Januarii anni h. s. LXII patre Luca matre Angelia, quos praematura morte abreptos lugeo. Fidei adscriptus sum orthodoxae orientali. Gymnasium frequentavi Kragujevacense, quod S. Živkovićo viro doctissimo et humanissimo rectore tum florebat; viri carissimi prof. Peić (†), cuius praeceptis ad studia mathematica incitatus sum, memoria semper mihi colenda erit. Maturitatis testimonium adeptus aestate anni h. s. LXXXII inter cives Academiae Belgradensis receptus per quattuor annos rebus mathematicis, physicis, philosophicis operam dedi; viros audivi clarissimos: Alković, Vuić, Dokić, Žujović, Klerić, Losanić, Nedeljković, Nedić, Nesić, Pančić (†), Stojanović, Srećković. Testimonio Academiae instructus per duos annos ibi repetitor fui geometriae descriptivae. Deinde universitatem adii Berolinensem ibique novem semestria commoratus sum; viros audivi celeberrimos: Dilthey, Ebbinghaus, Fuchs, de Gižycki, Glan, de Helmholtz (†), Hensel, Hettner, Knoblauch, E. Kötter, Kronecker (†), Kundt (†), Planck, Schlesinger, H. A. Schwarz. Seminarii mathematici per quattuor semestria fui sodalis.

Omnibus his viris de me meritis, imprimis Lazaro Fuchs studiorum meorum fautori benevolentissimo et Hermanno Amando Schwarz, quorum fructuosa disciplina in scholis et seminario usus sum, nec non viro doctissimo Wallenberg, qui privata eruditione omnium rerum mathematicarum cognitionem meam amplificavit, gratias maximas ago semperque agam.