Глас CCCXXIV Српске академије наука и уметности,
Одељење природно-математичких наука, књ. 47—1981.
Glas CCCXXIV de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences mathématiques et naturelles № 47—1981.

Ј. Л. СИМОВЉЕВИЋ

О ПРИМЕНИ ПОЛУАНАЛИТИЧКЕ МЕТОДЕ РАЧУНА ПОРЕМЕЋАЈА У КРЕТАЊУ ПЛАНЕТОИДА У ПРОКСИМИТЕТУ

(Примљено на IX скупу 24. XI 1978. на основу реферата академика *Р. Кашанина* и *Т. Анђелића*)

Развија се у ред главни члан поремећајног убрзања које у кретању једног планетоида изазива други при њиховом проксимитету високог реда. Одређује се полупречник конвергенције тог развоја и закључује да метода полуаналитичког рачуна поремећаја практично није применљива при врло тесним зближавањима планетоида.

У свом раду [1] је *E. Strömgren* испитивао поремећајно дејство једног планетоида на кретање другог при њиховом проксимитету. Како ту нису у питању дуги времени интервали, он је искористио тзв. полуаналитички рачун поремећаја. Ради се о развијању у редове потребних величина, но у те редове се одмах уносе нумеричке вредности коефицијената. Горња граница интеграљења није строго фиксирана; једном изведени изрази се могу користити и за нешто дуже време, но не по цену онако обимног аналитичког или нумеричког рачуна како би то било при примени рачуна апсолутних или специјалних поремећаја. У испитиваном случају је проксимитет износио свега 0.048 а.ј., па је примењени поступак могао да одговори на основно питање о износу поремећаја.

Међутим, радовима *Ј. П. Лазовића* добили смо потврду о реалним могућностима постојања планетоидских проксимитета далеко вишег реда. Исти аутор је у [2] и [3] испитивао и динамичке последице сто пута мањег проксимитета но што је био *Strömgren*-ов, и то рачуном специјалних поремећаја, који је најпогоднији за овакве случајеве. У свом последњем објављеном раду из ове области [4] *Ј. Лазовић* и *М. Кузманоски* доносе списак изразито тесних зближавања путања ових малих небеских тела, и то само квазикомпланарних, која се већ мере стотинама километара. Захваљујући љубазности истих аутора могао је писац ових редова да искористи један њихов тада још необјављени резултат из [4], то јест податке о проксимитету путања планетоида (205) *Martha* и (992) *Swasey* — који не спада међу данас најтешње познате из [4] — и да у свом раду [5] испита главне контуре механизма поремећаја при овако тесним зближавањима планетоида. При томе је користио и резултате *E. Strömgren*-а у методи која је у суштини нумеричка. О примени полуаналитичке методе интеграљења из [1] при проксимитетима високог реда изрекао је скептичко мишљење, али је читаоцу тога рада [5] остао дужан да то своје мишљење и докаже.

1. За то му се сада пружа прилика, користећи и резултате из свог рада [6], да се при примени векторских елемената кретања може оперисати са најједноставнијим обликом поремећајног убрзања

$$\mathbf{F}=k^2 m_i(\rho^{-3}\vec{\rho}-r_i^{-3}\mathbf{r}_i),\quad \vec{\rho}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}. \tag{1}$$

Он се у овом случају своди на

$$\mathbf{F}=k m_i \rho^{-3}\vec{\rho}, \tag{2}$$

пошто је у питању врло мала маса m_i, а и међусобно растојање тела ρ је врло мало. У (2) смо, такође, усвојили, из чисто рачунских разлога, средњи Гаусов дан за јединицу времена. Тако се у полуаналитичком рачуну поремећаја при проксимитету планетоида поставља питање развоја у ред практично само тзв. главног члана поремећајног убрзања, то јест оног који садржи ρ^{-3}. Уосталом, то је и најкомпликованији посао сваке методе апсолутних или полуаналитичких поремећаја, пошто други члан у општем изразу (1) не представља велике тешкоће.

Другу олакшицу у решавању основног задатка овог рада, развијања у ред ρ^{-3}, представља чињеница, позната већ из [5], да се релативни положај планетоида $\vec{\rho}$ може изразити као линеарна функција времена:

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}_p+\mathbf{V}_p\tau, \tag{3}$$

$$\vec{\rho}_p=\mathbf{r}_{ip}-\mathbf{r}_p,\ \mathbf{V}_p=\mathbf{v}_{ip}-\mathbf{v}_p,\ \tau=k(t-t_p)$$

(индекс i означава одговарајућу величину за поремећајни планетоид, док индекс p означава вредност сваке промењљиве у тренутку проксимитета t_p). Релација (3), која у општем облику потиче из *Лаїранжева* развоја у ред вектора положаја поремећајног ($\mathbf{r}_i$) и поремећеног ($\mathbf{r}$) планетоида

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p+\mathbf{r}_p'\tau+\frac{1}{2}\mathbf{r}_p''\tau^2+\ldots,$$

садржи трећи члан

$$-\frac{1}{2}(r_{ip}^{-3}\,\mathbf{r}_{ip}-r_p^{-3}\mathbf{r}_p)\,\tau^2,$$

чији се коефицијент практично анулира при проксимитетима високог реда. Апсолутне вредности неких извода вишег реда могу да буду и веће од оног другог реда, али се множе малим значењима одговарајућих степена кратког, па и веома кратког, временог интервала τ пре и после проксимитета (краћег од пола дана, дакле $\tau<0.0043$). Зато нас једначина (3) доводи, у целом потребном интервалу интеграљења око t_p, до тачности која је чак десет до сто пута већа од оне коју обезбеђују реална посматрања са Земље.

Квадрат једначине (3) је

$$\rho^2=\rho_p^2+V_p^2\tau^2,$$

пошто из услова проксимитета $d(\vec{\rho}\,\vec{\rho})/dt=0$ произилази да је $(\vec{\rho}_p\mathbf{V}_p)=0$ Напишемо ли ову једначину у облику

$$\rho^2=\rho_p^2(1+q) \quad \text{са} \quad q=\rho_p^{-2}\,V_p^2\tau^2,$$

имаћемо да је

$$\rho^{-3}=\rho_p^{-3}(1+q)^{-3/2}.$$

Ако је $q<1$, то јест ако се ограничимо на времени интервал

$$|t-t_p|<\rho_p(kV_p)^{-1}, \tag{4}$$

моћи ћемо се послужити развојем

$$(1+q)^{-3/2}=1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{3.\,5.\,7.\,\ldots(2j+1)}{2.\,4.\,6.\,\ldots\ldots(2j)}q^j,$$

како бисмо решење нашег задатка добили у облику

$$km_i\rho^{-3}=U_o+\sum_{j=1}^{\infty}U_j\tau^{2j}, \tag{5}$$

$$U_o=km_i\rho_p^{-3},\ U_j=km_i(-1)^j\frac{3.\,5.\,7.\,\ldots(2j+1)}{2.\,4.\,6.\,\ldots\ldots(2j)}V_p^{2j}\rho_p^{-3-2j}.$$

Даљи рад би био очигледан. Помоћу (5), (3) и (2) добили бисмо ред за поремећајно убрзање, чијим бисмо интеграљењем добили ред за вектор **G** из [6], или бисмо интеграљење оставили за касније, пошто претходно формирамо редове са **F** за изводе коришћених оскулационих елемената поремећеног планетоида. Но пре тих елементарних рачуна погледајмо прво основно решење (5).

Колико је оно примењљиво у пракси рачуна поремећаја? Одговор на ово питање даће нам, у сваком конкретном случају, релација (4). Очигледно је потребно да је времени интервал $|t-t_p|$ из (4) већи од половине времена осетне поремећајне акције једног планетоида на кретање другог. Друга је ствар, потом, брзина конвергенције развоја (5).

2. У радовима [5] и [6] обрађивали смо, како смо навели, поремећаје које у кретању планетоида (992) *Swasey* изазива планетоид (205) *Martha*, при претпоставци о проксимитету ових небеских тела на положају проксимитета њихових путања. У том случају је било

$$\vec{\rho}_p = (-0.0000\ 0313,\ +0.0000\ 0701,\ +0.0000\ 3713),$$

$$\mathbf{V}_p = (-0.0001\ 0233,\ +0.0568\ 3298,\ -0.0108\ 5231)$$

(еклиптика, 1950.0), па је

$$\rho_p = 0.0000\ 3792,\quad V_p = 0.0578\ 5992.$$

Зато услов (4) казује да се у овом случају развој (5) може применити само у временом интервалу од

$$t_p \pm 0.038 \text{ ср. дана},$$

док је у [5] и [6] потребан интервал за интеграљење био $t_p \pm 0.15$ ср. дана. Добивени поремећаји су били мали, практично на граници износа који би се могли установити посматрањима са Земље, па би се довољно добри њихови износи могли добити и рачуном који би обухватио и нешто краће време; но, у сваком случају не онако кратко као што га захтева услов (4).

Нажалост, по свему судећи, овако непогодна ситуација за примену развоја (5) може се очекивати при изразито тесним проксимитетима. Мањи износ апсолутне вредности разлике брзина оба планетоида при проксимитету биће, уопште, код оних са квазикомпланарним путањама, какав је и пар (205) *Martha* и (992) *Swasey*.

Ако би у неким специјалним случајевима услов (4) дозвољавао примену развоја (5), ипак би она у пракси била тешко остварљива. Лако је, наиме, закључити да тај ред врло споро конвергира чим се иоле удаљимо од тренутка проксимитета t_p $(\tau=0)$. Навешћемо само да би било потребно узети у рачун, у нашем примеру, првих седам чланова да би се за $t-t_p=0.01$ ср. дан обезбедила тачност од $\pm 10^{-8}$. Напоменимо да је за масу поремећајног планетоида усвојена вредност $m_i = 10^{-13}$ масе Сунца, као и у претходним радовима.

3. За тренутке $|t-t_p| > \rho_p(kV_p)^{-1}$ — но још увек, наравно, у границама важности (3) — можемо лако добити конвергентан развој за ρ^{-3}, полазећи опет од нашег израза за квадрат међусобног растојања планетоида око положаја проксимитета. Ту једначину можемо писати и у облику

$$\rho^2 = V_p^2 \tau^2 (1+q) \quad \text{са} \quad q = \rho_p^2\, V_p^{-2}\, \tau^{-2},$$

што ће нас довести, исто као и раније, до развоја

$$km_i\, \rho^{-3} = V_0 \tau^{-3} + \sum_{j=1}^{\infty} V_j \tau^{-3-2j},$$

$$V_0 = km_i\, V_p^{-3}\,,\quad V_j = km_i (-1)^j \frac{3.\,5.\,7.\,..\,(2j+1)}{2.\,4.\,6.\,.....\,(2j)}\, \rho_p^{2j}\, V_p^{-3-2j}.$$

Но ни овај развој, као ни онај (5), не конвергира за $|t-t_p|=\rho_p(kV_p)^{-1}$, па их не можемо спојити у циљу да ,,покријемо'' шири времени интервал око проксимитета, потребан за поуздано извођење поремећајних промена оскулационих елемената кретања поремећеног планетоида.

4. Закључак овог рада је, дакле, негативан: у великој већини случајева изразито тесних зближавања планетоида полуаналитичка метода рачуна поремећаја тешко да ће моћи бити применљива због малог полупречника конвергенције реда за главни члан поремећајног убрзања. Већу вредност тог полупречника конвергенције добили бисмо у случају што приближније једнаких брзина хелиоцентричног кретања оба планетоида при проксимитету. Но у том случају би из (3) произилазило да је

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_p+\mathbf{V}_p'\tau+\frac{1}{2}\mathbf{V}_p''\tau^2+\dots ,$$

где би сви коефицијенти били мали. Разлика брзина би се мало мењала са временом у околини проксимитета, што би довело до дужег трајања ове појаве, релативно дужег, наравно. Вероватно би то за последицу имало дуготрајније дејство једног планетоида на други, дакле потребу за ширим границама интеграљења, па би применљивост описана поступка опет била доведена у питање.

Неке прецизније закључке од горњег не можемо доносити. Разлоге за то смо већ навели у једном свом ранијем раду из ове области: проблем проксимитета планетоидских путања зависи од десет параметара, који су још и променљиви с временом. Стога смо принуђени да врло обазриво приступамо покушајима уопштавања свих појединачних закључака. То ће рећи да у овом питању применљивости или не полуаналитичке методе интеграљења морамо ефективно израчунати, за сваки поједини случај, нумеричке вредности ,,константи проксимитета'' $\vec{\rho}_p$ и V_p. Тада ће нам поуздан одговор дати релација (4).

* *
*

Овај рад је део истраживачког пројекта Основне организације удруженог рада за математику, механику и астрономију Природно-математичког факултета у Београду, који финансира Републичка заједница науке Србије.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Strömgren: Ueber die gegenseitigen Störungen zweier einander nahekommenden kl. Planeten; *Astr. Nachr.* **165** (1904), 17—24.

[2] Јован П. Лазовић: Важније особености у кретању квазикомпланарних планетоида; докторска дисертација на Природно-математичком факултету у Београду, 1964.

[3] J. Lazović: The perturbed motion of asteroid in proximity; *Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd* **3** (1971), 29—35.

[4] J. Lazović, M. Kuzmanoski: Minimum distances of the quasicomplanar asteroid orbits; *ibid.* **8** (1978), 47—54.

[5] J. Л. Симовљевић: Прилог рачуну поремећаја путања планетоида у проксимитету; *Глас САНУ CCCXI, Прир.-мат.* **44** (1979), 7—22.

[6] J. Л. Симовљевић: О примени векторских елемената у рачуну специјалних поремећаја путања планетоида у проксимитету; *Глас САНУ CCCXXIV, Прир.—мат.* **47** (1981), 7—16.

J. L. Simovljevitch

ON THE SEMIANALYTICAL METHOD OF PERTURBATIONS OF ASTEROID ORBITS IN PROXIMITY

Summary

The principal term of perturbative acceleration in cases of asteroids proximities of a very high degree is developed into

$$k\, m_i \rho^{-3} = U_0 + \sum_{j=1}^{\infty} U_j \tau^{2j},$$

$$U_0 = k m_i \rho_p^{-3},\quad U_j = k m_i (-1)^j \frac{3.\,5.\,7.\,\ldots\,(2j+1)}{2.\,4.\,6.\,\ldots\,(2j)}\, \rho_p^{-3-2j}\, V_p^{2j},$$

where

$$\vec{\rho}_p = |\mathbf{r}_{ip} - \mathbf{r}_p|,\quad V_p = |\mathbf{v}_{ip} - \mathbf{v}_p|,\quad \tau = k(t - t_p),$$

indices i resp. p denoting the values corresponding to the perturbing asteroid, resp. the values of variables at the instant of proximity t_p. The series is convergent for

$$|t - t_p| < \rho_p (k V_p)^{-1},$$

but the all time interval of sensible perturbative action (i.e. the time interval between the limits of integration) is often longer than the above radius of convergency. So the semianalytical method of perturbations, as proposed by *E. Strömgren* in his paper [1], can hardly be useful in cases of very short mutual distances between asteroids in proximity.