

Dokt. 16/1

DO AS. 6

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Olga Atanacković - Vukmanović

PRILOG REŠAVANJU PROBLEMA PRENOSA ZRAČENJA
U ZVEZDANIM ATMOSFERAMA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

**Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA**

Broj Dokt. 16/1 **Data** 20. 5. 1991.

Beograd, 1991

SADRŽAJ

UVOD	1
1. PROBLEM FORMIRANJA LINIJA. OSNOVNE JEDNAČINE. NUMERIČKI METODI.....	8
1.1. Jednačina prenosa zračenja	10
1.2. Jednačine statističke ravnoteže	15
1.3. Numerički metodi	19
1.3.1. Metod diskretnih ordinata	20
1.3.2. Metod Λ iteracije	23
1.3.3. Metod kompletne linearizacije	26
1.3.4. Iteracija sa aproksimativnim Λ operatorom	28
2. REŠAVANJE PROBLEMA PRENOSA ZRAČENJA KADA KOEFIČIJENTI PRENOSA ZAVISE EKSPPLICITNO OD POLJA ZRAČENJA	32
2.1. Ideja metode promenljivih Eddingtonovih faktora u monohromatskom problemu	32
2.2. Metod iteracionih faktora u problemu prenosa zračenja atomima sa dva nivoa	35
2.2.1. Prva familija iteracionih faktora. Najdirektnija relacija zatvaranja.	38
2.2.2. Druga familija iteracionih faktora. Model dva fluida. .	48
2.2.3. Najopštija relacija zatvaranja	54
2.2.4. Dalja diskusija o relacijama zatvaranja	63
3. REŠAVANJE PROBLEMA PRENOSA ZRAČENJA KADA KOEFIČIJENTI PRENOSA NE ZAVISE EKSPPLICITNO OD POLJA ZRAČENJA	68
3.1. Prenos zračenja atomima sa više nivoa. Jednačine.	68
3.2. Iterativna procedura	70
3.3. Koeficijenti linearne relacije	72
3.3.1. Iteracija sa koeficijentima α i β . Model dva fluida.	74

3.3.2. Upotreba modela dva fluida za ubrzavanje iterativne procedure	78
3.3.2.1. Λ^- iteracija	79
3.3.2.2. Iteracija sa koeficijentima α^- i β^-	82
3.3.2.3. Iteracija sa faktorom f^-	83
3.3.3. Primer	85
ZAKLJUČAK	92
LITERATURA	95

Želela bih na ovom mestu da izrazim svoju najveću i najiskreniju zahvalnost Dr. Eduardu Simonneau-u koji je predložio temu za ovu disertaciju i koji mi je svojim rukovodjenjem, savetima i diskusijama pružao svesrdnu pomoć i podršku tokom njene izrade.

Zahvaljujem se svim kolegama sa Astronomske opservatorije u Beogradu i Instituta za astrofiziku u Parizu gde je ova teza radjena, na povoljnim uslovima koje su mi omogućili za njenu izradu.

Želela bih takodje da se zahvalim svojim profesorima sa Instituta za astronomiju Prof.Dr. M.Vukićević - Karabin i Prof.Dr. T.Angelovu, kao i kolegama sa Opservatorije Mr.J.Arsenijević , Dr.I.Vinceu, Dr.M.Dimitrijeviću, B.Jovanoviću i Dr.Z.Kneževiću na korisnim savetima i podršci u radu.

Teza je realizovana u okviru Projekta "Fizika i kretanje nebeskih tela i veštačkih satelita" finansiranog od strane Republičkog fonda za nauku Srbije. Njenu realizaciju su pomogli i Republički i Savezni zavod za međunarodnu saradnju, Ministarstvo za obrazovanje Francuske i Francuski kulturni centar koji su sredstvima i angažovanjem omogućili rad na Projektu "Nove numeričke metode u rešavanju jednačine prenosa zračenja" u okviru Programa međudržavne naučne saradnje između Jugoslavije i Francuske.

Zahvaljujem se i svima koji su svojim strpljenjem i razumevanjem doprineli da se ovaj rad realizuje.

Mojim roditeljima

UVOD

Teorija prenosa zračenja ima izuzetno značajnu ulogu u rešavanju mnogih astrofizičkih problema. S jedne strane, njeno detaljno poznavanje predstavlja važno orudje u dijagnostici plazme, tj. izvodjenju fizičkih svojstava plazme iz njenog spektra. S druge strane, sam proces prenosa energije zračenjem u znatnoj meri određuje strukturu i dinamiku mnogih astrofizičkih sredina.

Dostupnost zvezdanih atmosfera direktnim posmatranjima čini ih objektima od posebnog astrofizičkog interesa. Fizička svojstva atmosfera izvedena iz oblika i intenziteta spektralnih linija i kontinuuma služe kao polazna tačka u izučavanju zvezdanih unutrašnjosti, načina prenosa energije, teoriji zvezdane evolucije itd. U toku poslednjih decenija uloženo je mnogo napora u rešavanje problema prenosa zračenja u zvezdanim atmosferama (Jefferies, 1968; Hummer i Rybicki, 1971; Mihalas, 1970, 1978; Cannon, 1985). Osnovne jednačine problema su poznate odavno, ali je njihovo rešavanje bilo relativno sporo zbog matematičkih teškoća vezanih za nelokalnu prirodu prenosa zračenja.

Jednačina koja opisuje prenos zračenja je obična diferencijalna jednačina samo ako su izvori i ponori fotona poznati. Međutim, u mnogim slučajevima u astrofizici, izvori i ponori fotona (koeficijenti emisije i apsorpcije) zavise od intenziteta polja zračenja (rešenja problema). Kako je sam intenzitet nelokalna funkcija ovih koeficijenata - intenzitet u svakoj tački jako zavisi od koeficijenata prenosa (emisija i apsorpcija) u drugim udaljenim tačkama sredine - prenos zračenja postaje nelokalan problem. Matematički to implicira integro-diferencijalni oblik jednačine prenosa. Postoji nekoliko grupa problema prema načinu na koji koeficijenti prenosa (izvori i ponori fotona) zavise od polja zračenja.

Problem prenosa zračenja u spektralnim linijama koji ćemo u ovom radu razmatrati sastoji se u nalaženju polja zračenja i stanja gasa (naseljenosti atomskih nivoa u raznim stanjima ekscitacije i jonizacije) za svaku tačku u atmosferi poznate raspodele temperature i pritiska. Med-

jusobna fizička povezanost polja zračenja i ekscitacionog/ionizacionog stanja gasa se matematički formuliše kroz istovremeno rešavanje odgovarajućih jednačina - prenosa zračenja i kinetičke ravnoteže, koje opisuju proces prenosa na makroskopskom i mikroskopskom nivou, respektivno. Naime, jednačina prenosa zračenja opisuje promenu u intenzitetu zračenja kao funkciju makroskopskih koeficijenata prenosa (apsorpcija i emisija) u gasu. Sa svoje strane, apsorpcioni i emisijski koeficijenti zavise od polja zračenja preko radijativnih mikroprocesa koji naseljavaju atomske nivoe (jednačine kinetičke/statističke ravnoteže).

S obzirom da je rešavanje prenosa zračenja neizbežan korak u mnogim astrofizičkim problemima, traganje za dovoljno tačnim i brzim metodama za njegovo rešavanje zaslužuje posebnu pažnju. Izbor odgovarajućeg metoda zavisi od oblika koeficijenata prenosa i njihove zavisnosti od polja zračenja. Ako je ova zavisnost eksplicitna, jednačine prenosa zračenja i kinetičke ravnoteže se mogu rešavati bilo direktnom zamenom jedne jednačine u drugoj ili iterativno. Ako pak nije moguće dobiti eksplicitan izraz između koeficijenata prenosa i odgovarajućeg polja zračenja, neka vrsta iterativne procedure se mora koristiti. Na taj način, analitička rešenja je moguće dobiti samo za relativno mali broj problema koji koriste najjednostavnije atomske modele i parametrizovane sredine. Medjutim, ova tačna rešenja veoma su značajna za testiranje numeričkih metoda koje je neophodno razvijati za rešavanje realnih problema. Numeričke metode su svoju ekspanziju doživele naročito u toku poslednje dve decenije sa razvojem i upotrebom sve moćnije računarske tehnike.

Prva ideja u rešavanju nelokalnog problema prenosa zračenja bio je jednostavan metod Λ iteracije, gde se naizmenično odredjuju polje zračenja i naseljenosti atomskih nivoa. Zbog beskonačno spore konvergencije (tačnije, korekcija rešenja) u optički dubokim sredinama kakve su zvezdane atmosfere, ovaj metod je u praksi ubrzo bio napušten.

Metodi konačnih razlika (Feautrier, 1964a; Rybicki, 1971), najčešće korišćeni u problemima formiranja linija, pripadaju grupi direktnih metoda matrice diskretizacije. Metod kompletne linearizacije (višedimenzionalni Newton-Raphson metod) razvijen u radu Auer-a i Miha-

las-a (1969), predstavlja njihovu generalizaciju na nelinearne probleme zvezdanih atmosfera (konstrukciju atmosferskih modela). Uzajamna povezanost svih promenljivih uzeta je u obzir na samo-usaglašen način linearizacijom svih jednačina po relevantnim veličinama problema. Iterativno određivanje korekcija tekućeg rešenja je brzo konvergentno. Medjutim, ovaj moćan i tokom sedamdesetih godina najčešće primenjivan metod ima izvesne mane. Zbog velikog broja diskretnih vrednosti nezavisno promenljivih veličina (frekvenci, pravaca, dubina) koje su eksplicitno potrebne za dobar opis problema, ovaj metod zahteva ogromnu memoriju za čuvanje matrica velikih dimenzija i računarsko vreme za operacije sa njima. Stoga je u praksi ograničen na prostije geometrije i ne suviše komplikovane atomske modele. Osim toga, moguća je pojava numeričkih nestabilnosti zbog velikih korekcija u strukturi linearizacije koje je, zbog glomaznog algoritma, teško kontrolisati. Preformulacija metode kompletne linearizacije (Auer, Heasley (1976)) koja umesto Feautrier šeme koristi šemu Rybicki-a (1971), pokazuje prednost u pogledu potrebnog računarskog vremena u problemima koji zahtevaju veliki broj frekventnih tačaka.

U toku poslednje decenije, iterativne metode su opet postale popularne zbog svog znatno jednostavnijeg algoritma. One pojednostavljaju potpuni (detaljni) opis nelokalne prirode prenosa zračenja, tj. rešavaju jednačinu prenosa koristeći izvesne fizičke aproksimacije (tzv. aproksimativni Λ^* operator), korigujući zatim rešenje iterativno. Da bi obezbedio konvergenciju, aproksimativni operator mora biti, s jedne strane, fizički što bliži tačnom, a sa druge, što jednostavniji za praktičnu upotrebu. Ovakav pristup čini osnovu tzv. metoda operatora perturbacije (iteracije sa aproksimativnim Λ^* operatorom) koje su se, zasnovane na metodologiji verovatnoće bekstva (Sobolev, 1957; Athay, 1972a,b; Frisch i Frisch, 1975), kasnije razvile kao nezavisne tehnike. Kombinujući pretpostavku o saturaciji jezgra (Rybicki, 1972) i Eddington-Barbier relaciju sa perturbacionom tehnikom Cannon-a (1973a,b), Scharmer (1981) je konstruisao dva aproksimativna Λ^* operatora za prenos zračenja atomima sa dva nivoa. Zbog brzih konvergentnih svojstava, rafiniraniji operator je ubrzo zatim bio primenjen na ne-LTR probleme u sredinama sa

brzinskim poljima (Scharmer i Nordlund, 1982) i na probleme prenosa atomima sa više nivoa (Scharmer i Carlsson, 1985; Carlsson, 1986). Medjutim, iako je matrica aproksimativnog operatora skoro trougaona, neophodne inverzije dovode do gotovo istih ograničenja kao kod metoda kompletne linearizacije.

Werner i Husfeld (1985) su primenili dijagonalni Rybicki-ev i Scharmer-ov jednostavniji (gornje trougaoni) Λ^* operator na problem atoma sa više nivoa. Upotreba lako invertibilnih aproksimativnih operatora u jednostavnoj iterativnoj šemi (tzv. accelerated lambda iteration - ALI metodi) drastično smanjuje memorijske zahteve omogućavajući tretman od oko 100 atomskih nivoa. ALI metodi su primenjeni na statične, plan-paralelne sredine (Werner i Husfeld, 1985; Werner, 1986, 1989) i na sferno-simetrične proširene atmosfere (Hamann, 1985, 1986; Hamann i Wessolowski, 1990). Medjutim, mana ove grupe metoda je u neophodnosti odredjivanja jednog parametra od čije vrednosti znatno zavise brzina i kvalitet konvergencije.

Olson, Auer i Buchler (1986, nadalje OAB) su predložili aproksimativni Λ^* operator koji ne zahteva odredjivanje dodatnog parametra. Oni su prvi istakli da dijagonala tačne Λ matrice predstavlja skoro optimalan Λ^* operator, koji su aproksimirali matematički. Neodredjenost OAB pristupa je zavisnost vrednosti elemenata aproksimativne matrice od korišćenog diskretnog numeričkog opisa sistema.

Zajednička crta gore pomenutih metoda (sa izuzetkom dijagonalnih operatora) je korišćenje matričnog opisa koji, za svoju praktičnu realizaciju u rešavanju realnih problema, zahteva veliki računarki prostor.

Metod koji ni konceptualno ni praktično ne koristi nikakvu matričnu strukturu je metod faktora iteracije koji je predmet ove teze. On koristi kvazi-invarijante problema (faktore iteracije) za ubrzanje konvergencije jednostavne iterativne procedure.

Koreni ovog metoda mogu se naći u radu Feautrier-a (1964b), koji je predvideo da bi iterativno izračunavanje odnosa momenata intenziteta zračenja moglo ubrzati proceduru temperaturske korekcije. Auer i Michalas (1970) su prvi praktično realizovali ovu ideju koristeći promenljive

Eddingtonove faktore (PEF) kao odnose trećeg i prvog ugaonog momenta intenziteta zračenja (K_ν/J_ν) za rešavanje monohromatskog problema. Upotreba PEF-ova u okviru jednostavne iterativne procedure obezbeđuje brzu konvergenciju ka "tačnom" rešenju zahvaljujući njihovom svojstvu kvazi-invarijantnosti. Korišćenje PEF-ova u metodi kompletne linearizacije je imalo za cilj da se potpuni opis sistema redukuje za njegovu "ugaonu dimenziju", dok je, međutim, veliki broj frekventnih tačaka i dalje činio numeričko rešavanje glomaznim.

Metod iteracionih faktora ove teškoće prevazilazi tako što ideju kvazi-invarijantnosti PEF-ova primenjuje na relevantne promenljive razmatranog problema. Uvodjenjem odgovarajućih kvazi-invarijanti problema kao tzv. faktora iteracije u jednostavnu iterativnu proceduru dobija se brzo i tačno rešenje. Da bi se postigla konvergencija, iteracioni faktori treba da budu praktično nezavisni od početnog skupa rešenja i da na jednostavan način omoguće dobijanje novog, poboljšanog, rešenja. Korišćenje ovog metoda omogućava da se izbegnu problemi slabe uslovljenosti polaznih jednačina, velikog računarskog vremena i prostora ili nestabilnosti koje prate sva matrična izračunavanja.

Ova ideja je bila uspešno primenjena u rešavanju dve kinetičke jednačine (za fotone i ekscitovane atome) pri izučavanju prenosa zračenja u rezonantnim linijama koje uzima u obzir i transport ekscitovanih atoma (Borsenberger, Oxenius i Simonneau, 1987). Metod iteracionih faktora je takodje razvijen za problem temperaturske korekcije - konstruisanja atmosferskih modela u lokalnoj termodinamičkoj i radijativnoj ravnoteži (Simonneau i Crivellari, 1988), kao i za slučaj kada se konvektivni prenos energije uzima u obzir (Crivellari i Simonneau, 1991).

Cilj ove teze je da razvije metod iteracionih faktora za tačno rešavanje problema prenosa zračenja (formiranja spektralnih linija) u zvezdanim atmosferama u nelokalnoj (ne-LTR) ravnoteži.

Definicija problema sa osnovnim veličinama i jednačinama koje ga opisuju, kao i pregled najvažnijih numeričkih metoda razvijenih za njegovo rešavanje dati su u prvom poglavlju teze.

U drugom i trećem poglavlju razmatraju se dve osnovne grupe problema: kada je zavisnost izmedju koeficijenata prenosa zračenja i in-

tenzитета zračenja moguće izraziti eksplicitno (formiranje linija atomima sa dva nivoa) i kada to nije slučaj (formiranje linija atomima sa više nivoa).

Kao primer rešavanja prve grupe problema, razmatramo dobro poznati problem prenosa zračenja atomima sa dva nivoa u plan - paralelnoj sredini konstantnih fizičkih svojstava. Razvijanje metode na ovom problemu, čije tačno, analitičko rešenje znamo, služi nam za izučavanje njenih svojstava - tačnosti i brzine konvergencije. Tome posvećujemo drugo poglavlje koje predstavlja jezgro ovog rada, gde uvodimo više familija iteracionih faktora i analiziramo njihova svojstva. Metod koji razvijamo za ovaj problem može se jednostavno primeniti i na druge kinetičke probleme (sve one u kojima se gore pomenuta zavisnost može izraziti eksplicitno).

Tehnika iteracionih faktora za rešavanje problema prenosa zračenja atomima sa više nivoa (gde nije moguće eksplicitno izraziti zavisnost koeficijenata emisije i apsorpcije od polja zračenja) razvijena je u trećem poglavlju. Predložene iterativne procedure su testirane na modelu atoma sa dva nivoa čiji se eksplicitan izraz za funkciju izvora pritom ne koristi, i, na kraju, primenjene na rešavanje jednog realnijeg problema formiranja vodonikovih linija u datom atmosferskom modelu.

Ova metoda, koja ima niz praktičnih prednosti, postaje izuzetno značajna u slučajevima kada se prenos zračenja kombinuje sa fizičkim uslovima (napr. hidrostatičke, radijativne i statističke ravnoteže pri konstrukciji modela zvezdanih atmosfera) ili sa drugim fizičkim procesima (kao što je slučaj sa prenosom zračenja u prisustvu hidro-dinamičkih procesa koji se javljaju u mnogim astrofizičkim situacijama). U tim slučajevima vrlo je teško povezati, napr. hidrodinamičke, jednačine sa jednačinom prenosa za svaku frekvencu i pravac. Problem se, međutim, znatno pojednostavljuje ako se sistem velikog broja međusobno povezanih jednačina prenosa zameni samo jednom jednačinom sa srednjim koeficijentima - "faktorima iteracije". Ovi faktori se jednostavno mogu izračunati rešavanjem jednačine prenosa za svaku frekvencu i svaki pravac sa datim izvorima i ponorima fotona dobijenim iz fizike problema u prethodnoj iteraciji.

Ukratko, ovaj rad ima za cilj da razvije jednostavnu iterativnu metodu za tačno i brzo rešavanje problema prenosa zračenja u spektralnim linijama koji predstavlja sastavni deo složenijih astrofizičkih problema.

1. PROBLEM FORMIRANJA LINIJA. OSNOVNE JEDNAČINE. NUMERIČKI METODI.

Spektralne linije se formiraju kao posledica interakcija polja zračenja sa atomima, jonima i elektronima. Osnovna teškoća u rešavanju problema formiranja linija se javlja zbog činjenice da naseljenosti atomskih nivoa zavise od polja zračenja. Na taj način stanje gasa u jednoj tački zavisi preko polja zračenja od stanja gasa u svim drugim tačkama sredine. Problem je nelokalan i, zbog složene uzajamne povezanosti svih fizičkih veličina, u opštem slučaju i nelinearan.

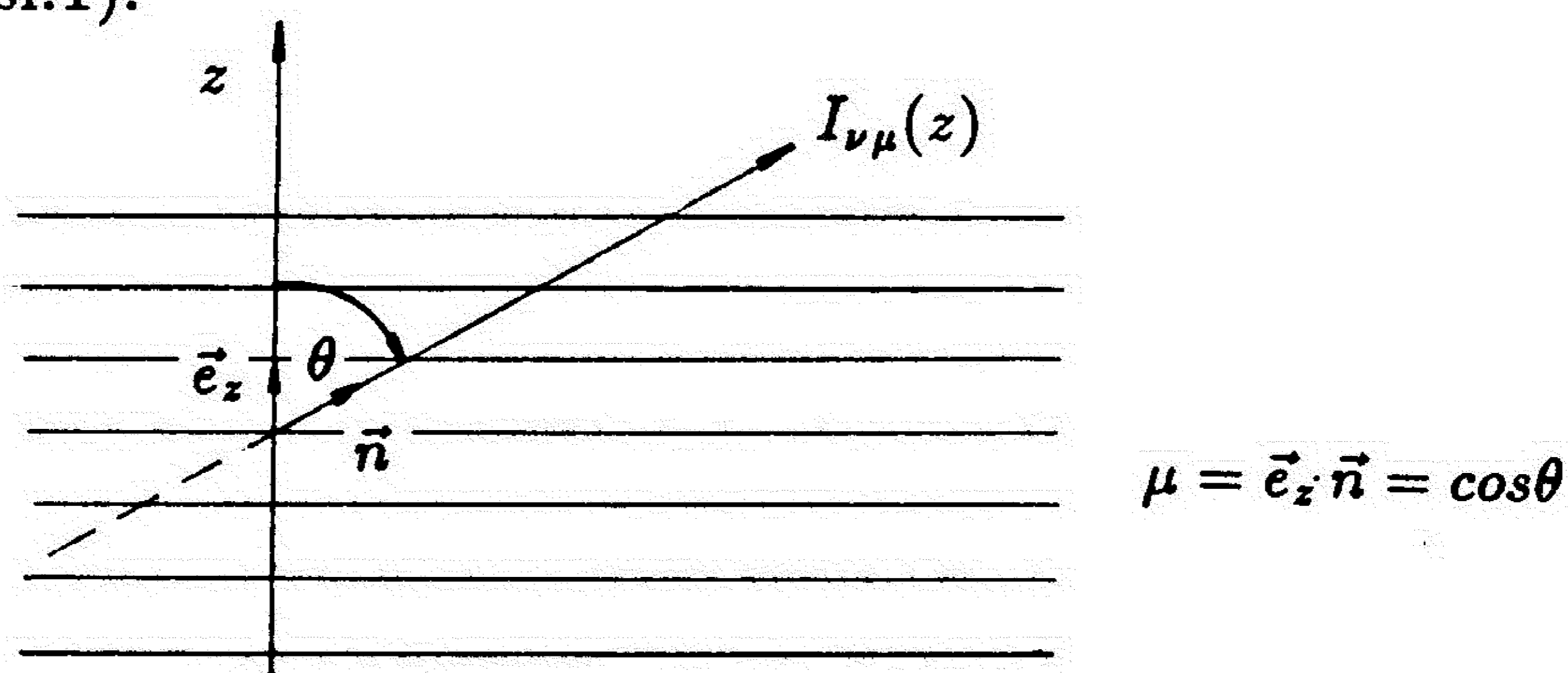
Prostiranje zračenja kroz atmosferski gas opisuje se jednačinom prenosa zračenja:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{d}{dt} + (\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\right) I_{\nu, \vec{n}}(\vec{r}, t) = \eta_{\nu, \vec{n}}(\vec{r}, t) - \chi_{\nu, \vec{n}}(\vec{r}, t) I_{\nu, \vec{n}}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

Vremenska i prostorna promena (u pravcu definisanim jediničnim vektorom \vec{n}) intenziteta zračenja $I_{\nu, \vec{n}}(\vec{r}, t)$ je rezultat razlike između emitovane i apsorbovane energije, opisane pomoću makroskopskih koeficijenata η and χ , respektivno. Sve veličine mogu biti funkcije frekvence ν , pravca \vec{n} , položaja \vec{r} i vremena t . U ovom radu ograničićemo se na razmatranje stacionarne (vremenski nezavisne), statične, plan-paralelne i homogene atmosfere. Sa ovim pretpostavkama, jednačina (1.1) postaje:

$$\mu \frac{dI_{\nu, \mu}(z)}{dz} = \eta_{\nu}(z) - \chi_{\nu}(z) I_{\nu, \mu}(z) \quad (1.2)$$

gde je z promenljiva po dubini u pravcu normalnom na plan-paralelni sloj i merena pozitivno ka spolja, a μ je kosinus ugla između putanje fotona i z -ose (sl.1).



Sl.1. Geometrija plan-paralelne atmosfere

S obzirom na pretpostavku o statičnoj atmosferi, možemo smatrati da su koeficijenti apsorpcije χ_ν i i emisije η_ν nezavisni od pravca (u opštem slučaju, oni mogu zavisiti od μ zbog redistribucije zračenja u toku procesa rasejanja). Ovi koeficijenti zavise od naseljenosti atomskih nivoa n_i , tj. n_j ($i < j$) i odgovarajućih funkcija profila φ_ν i ψ_ν za apsorpciju i emisiju, respektivno:

$$\chi_\nu(z) \propto n_i(z) B_{ij} \varphi_\nu(z) \left(1 - \frac{g_i n_j \psi_\nu}{g_j n_i \varphi_\nu} \right)$$

$$\eta_\nu(z) \propto n_j(z) A_{ji} \psi_\nu(z) \quad . \quad (1.3)$$

Ukoliko su dve funkcije profila (frekventne zavisnosti odgovarajućih makroskopskih koeficijenata) jednake i poznate, potrebno je rešiti samo jednačine za nepoznate naseljenosti atomskih nivoa (Mihalas, 1978):

$$\frac{dn_i}{dt} = -\nabla(n_i \vec{v}) + \sum_{i \neq j} (n_j P_{ji} - n_i P_{ij}) \quad .$$

Za stacionarnu ($d/dt = 0$) i statičnu ($\vec{v} = 0$) atmosferu, gornji izraz se redukuje u dobro poznat sistem jednačina statističke ravnoteže. Za svaki atomski nivo i može se pisati po jedna jednačina:

$$n_i \sum_{j \neq i} P_{ij} = \sum_{j \neq i} n_j P_{ji} \quad (1.4)$$

koja izražava jednakost broja svih procesa u jedinici vremena koji polaze sa razmatranog nivoa i i onih koji se na njemu završavaju. Ukupne verovatnoće prelaza P_{ij} sadrže odgovarajuće radijativne i sudarne doprinose. Upravo je u radijativnim članovima sadržana zavisnost naseljenosti nivoa (odnosno, preko (1.3), koeficijenata prenosa) od polja zračenja.

Zbog uzajamne, nelokalne zavisnosti polja zračenja i stanja gasa u celoj sredini, neophodno je rešavati istovremeno odgovarajuće jednačine prenosa zračenja i statističke ravnoteže.

Jednakost dve funkcije profila koju smo i koju ćemo nadalje pretpostaviti predstavlja poznatu aproksimaciju potpune preraspodele (kompletne redistribucije) zračenja. Ona sledi iz pretpostavke da sve čestice

(u svim stanjima ekscitacije) imaju Maxwellovu raspodelu po brzinama na istoj temperaturi. Uopšteno govoreći, odstupanje od ravnotežne raspodele po brzinama za ekscitovane atome može biti pre pravilo nego izuzetak, što je posledica znatnog broja radijativno indukovanih prelaza i selektivnosti procesa apsorpcije. Prema tome bi trebalo razmatrati i jednačine koje odredjuju raspodele po brzinama čestica u raznim stanjima ekscitacije. Poreklo efekata parcijalne redistribucije upravo leži u zavisnosti ovih funkcija raspodele od polja zračenja. Medjutim, pretpostavka o Maxwellovoj ravnotežnoj raspodeli je dobra ako je frekvenca elastičnih sudara medju atomima dovoljno velika. Takodje, elastični sudari koji se dešavaju u toku vremena života ekscitovanog atoma vrše redistribuciju energije medju elektronima unutar nivoa, dovodeći do toga da se sukcesivni radijativni procesi koji se odnose na taj nivo mogu smatrati potpuno nezavisnim. To vodi potpunoj nekoherentnosti zračenja u toku procesa rasejanja ili, drugim rečima, do jednakosti apsorpcionog i emisionog profila. S obzirom da naš cilj u ovom radu nije analiza procesa rasejanja, već razvijanje novog metoda za rešavanje problema prenosa, koristićemo pretpostavku potpune preraspodele zračenja zbog njene jednostavnosti. Razmotrimo sada jednačine prenosa zračenja (1.2) i statističke ravnoteže (1.4) u više detalja.

1.1. Jednačina prenosa zračenja

Pretpostavimo da je linija formirana potpuno nekoherentnim rasejanjem u vezano-vezanim prelazima razmatranog atoma i da je superponirana na kontinuum koji potiče od vezano-slobodnih prelaza drugih atoma u gasu.

Onda se ukupni koeficijent apsorpcije χ_ν u (1.2) može podeliti na odgovarajući doprinos u liniji χ_ν^l i kontinuumu χ^c . Frekventna zavisnost linijskog koeficijenta apsorpcije je opisana profilom φ_ν , tako da $\chi_\nu^l = \chi^l \varphi_\nu$. Ovde je χ^l srednji apsorpcioni koeficijent u liniji koji zavisi samo od gustine apsorbera i jačine oscilatora za dati prelaz u liniji. Apсорpcioni koeficijent u kontinuumu χ^c može se smatrati konstantnim na frekvencama unutar profila linije.

Slično, emisijski koeficijent η_ν se može podeliti na doprinos u liniji η_ν^l i kontinuumu η^c . Emisiona sposobnost sredine se može zameniti funkcijom izvora, definisanom odnosom dva makroskopska koeficijenta:

$$S_\nu(\tau) = \frac{\eta_\nu(\tau)}{\chi_\nu(\tau)} \quad (1.5)$$

Koristeći definiciju (1.5), emisijski koeficijent je:

$$\eta_\nu = \eta^c + \eta_\nu^l = \chi^c S^c + \chi^l \varphi_\nu S^l \quad (1.6)$$

gde su S^l i S^c funkcije izvora u liniji i kontinuumu, respektivno. Drugi član u (1.6) se u ovom obliku može pisati samo pri potpunoj nekoherentnosti zračenja. Funkcija izvora u liniji je tada frekventno nezavisna. Podsetimo se da, u opštem slučaju, linijski emisijski koeficijent, zbog izvesnog stepena koherentnosti u procesu rasejanja, ima različiti frekventni profil od onoga za apsorpciju, što za posledicu ima frekventno zavisnu funkciju izvora u liniji (parcijalna preraspodela).

Koristeći (1.6), možemo prepisati jednačinu prenosa (1.2) na sledeći način:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = \chi^l \varphi_\nu S^l + \chi^c S^c - (\chi^l \varphi_\nu + \chi^c) I_{\nu\mu} \quad (1.7)$$

Jednačina prenosa se često piše i u bezdimenzionom obliku. Pritom se koristi frekventna promenljiva x koja predstavlja rastojanje od centra linije ν_0 izraženo u jedinicama Dopplerove širine ($x = (\nu - \nu_0) / \Delta\nu_D$). Doppler-ov i Voigt-ov profil linije se onda mogu respektivno pisati:

$$\varphi_x = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \quad (1.8a)$$

i

$$\varphi_x = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\exp(-y^2) dy}{(x-y)^2 + x^2} \quad (1.8b)$$

U praktičnom rešavanju prenosa zračenja uobičajeno je uvođenje skale srednjih optičkih dubina u liniji:

$$d\tau = -\chi^l dz \quad (1.9)$$

Suprotno orijentisana od skale geometrijskih dubina z , skala optičkih dubina raste od vrednosti $\tau = 0$ na površini atmosfere ka njenoj unutrašnjosti. Nezavisna je od oblika profila φ_x i predstavlja direktnu meru opaciteta materijala na geometrijskoj dubini z (zavisi samo od broja apsorbera u pravcu vizure i jačine oscilatora). Sa optičkom dubinom u centru linije τ_c povezana je relacijom $\tau_c = \varphi_{x=0}\tau$.

Korišćenjem skale optičkih dubina, jednačina (1.7) u bezdimenzionom obliku postaje:

$$\mu \frac{dI_{x,\mu}(\tau)}{d\tau} = (\varphi_x + \beta)(I_{x,\mu}(\tau) - S_x(\tau)) , \quad (1.10)$$

gde je

$$\beta = \frac{\chi^c}{\chi^l} \quad (1.11)$$

odnos opaciteta u kontinuumu i u liniji, a ukupna funkcija izvora $S_x(\tau)$ je data izrazom:

$$S_x(\tau) = \frac{\varphi_x}{\varphi_x + \beta} S^l(\tau) + \frac{\beta}{\varphi_x + \beta} S^c(\tau) . \quad (1.12)$$

Jednačina (1.10) se može napisati i na sledeći način:

$$\mu \frac{dI_{x,\mu}(\tau)}{d\tau_x} = I_{x,\mu}(\tau) - S_x(\tau) \quad (1.13)$$

gde je $d\tau_x$ ukupna monohromatska optička dubina usled prelaza u liniji i procesa u kontinuumu koji se odigravaju na istoj frekvenci x :

$$d\tau_x = -(\chi^l \varphi_x + \chi^c) dz = (\varphi_x + \beta) d\tau . \quad (1.14)$$

Jednačina prenosa (1.13) je obična diferencijalna jednačina kada je poznata funkcija izvora. Za njeno rešavanje potrebno je definisati granične uslove.

Za plan-paralelnu, polu-beskonačnu atmosferu, možemo pretpostaviti da na gornjoj granici ($\tau_x = 0$) nema upadnog zračenja, tj. da je

$$I_{x,\mu}(\tau_x = 0) = 0 \quad , \mu < 0 \quad (1.15a)$$

a da je na velikim optičkim dubinama polje zračenja u liniji zarobljeno (u termalnoj ravnoteži sa materijom):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I_{x\mu}(\tau) \exp(-\tau/\mu) = 0 \quad , \quad (1.15b)$$

ili da važi difuzni režim u kome je:

$$I_{x\mu}(\tau) \approx S_x(\tau) + \mu \frac{dS_x}{d\tau} \quad . \quad (1.15b')$$

Sa datom raspodelom funkcije izvora po dubini i graničnim uslovima (1.15a) i (1.15b) dobijamo rešenja jednačine (1.13):

$$I_{x\mu}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} S_x(t) \exp(-(t-\tau)/\mu) \frac{dt}{\mu} \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (1.16a)$$

$$I_{x\mu}(\tau) = - \int_0^{\tau} S_x(t) \exp((\tau-t)/\mu) \frac{dt}{\mu} \quad , \quad -1 \leq \mu \leq 0 \quad (1.16b)$$

za izlazno i ulazno polje zračenja, respektivno. Sa dobijenim intenzitetima polja zračenja možemo definisati veličine koje se često koriste u teoriji prenosa zračenja. To su ugaoni momenti - integrali intenziteta zračenja po svim pravcima. Momenat m -tog reda definisan je izrazom:

$$M_x^m(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{x\mu}(\tau) \mu^m d\mu \quad .$$

Prva tri momenta koja su najčešće korišćena u literaturi i u ovom radu su:

- momenat nultog reda ili srednji intenzitet

$$J_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{x\mu}(\tau) d\mu \quad , \quad (1.17a)$$

- momenat prvog reda ili Eddington-ov fluks

$$H_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{x\mu}(\tau) \mu d\mu \quad , \quad (1.17b)$$

- momenat drugog reda koji je proporcionalan pritisku zračenja

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{x\mu}(\tau) \mu^2 d\mu \quad . \quad (1.17c)$$

Vratimo se sada jednačini prenosa zračenja (1.13). Vidimo da je njeno rešenje moguće eksplicitno izraziti u obliku (1.16) samo ako je funkcija izvora $S_x(\tau)$ poznata. To je slučaj samo kada se pretpostavi da se linija formira u uslovima LTR, tj. da je funkcija izvora uslovljena isključivo termalnim procesima. Termalni, sudarni procesi uspostavljaju poznate, ravnotežne raspodele polja zračenja i čestica gasa. Dok možemo smatrati da uslovi LTR važe u oblastima formiranja kontinuuma (dublji, gušći slojevi gde sudari dominiraju), na linije se gornja aproksimacija ne može a priori primeniti. Naime, linije se formiraju u višim i redjim slojevima atmosfere u kojima radijativni prelazi u atomima dominiraju nad sudarnim. Kako je polje zračenja po svojoj prirodi nelokalno (neosporna činjenica je postojanje granice kroz koju zračenje slobodno napušta atmosferu), stanje gasa (naseljenosti atomskih nivoa), a time i funkcija izvora u liniji, određena pretežno radijativnim prelazima, slabo je vezana za lokalne uslove sredine. Drugim rečima, funkcija izvora u liniji nije uslovljena samo lokalnim, termalnim procesima, već značajnu ulogu u njoj igraju procesi rasejanja, u toku kojih zračenje povezuje stanje gasa u raznim, često dosta udaljenim, delovima atmosfere. Matematički rečeno, funkcija izvora u liniji sadrži jedan integral polja zračenja (po frekvencama i pravcima) koji opisuje doprinos rasejanja. Tako, koeficijenti jednačine prenosa (1.13) postaju funkcije njenog rešenja, odnosno, jednačina (1.13) postaje integro-diferencijalna.

Sada ćemo preći na određivanje nepoznate funkcije izvora u liniji. Funkcija izvora $S^l(\tau)$ u liniji koja je formirana prelazima između atomskih nivoa i i j ($i < j$) pri potpunoj preraspodeli zračenja, data je izrazom:

$$S_{ij}^l = \frac{A_{ji}g_j}{B_{ij}g_i} \left[\frac{n_i g_j}{n_j g_i} - 1 \right]^{-1}, \quad (1.18)$$

koji je dobijen korišćenjem (1.5) i (1.3). Ovde su g_j i g_i statističke težine gornjeg i donjeg nivoa u atomu. Verovatnoće po atomu u jedinici vremena za spontanu emisiju A_{ji} i apsorpciju B_{ij} zračenja su poznate konstante za dati atom. Nepoznate naseljenosti atomskih nivoa n_i i n_j određuju se iz jednačina stanja gasa (jednačina statističke ravnoteže).

1.2. Jednačine statističke ravnoteže

Jednačine statističke ravnoteže (1.4) izražavaju konstantnost broja atoma u pojedinim stanjima ekscitacije i jonizacije u toku vremena kroz ravnotežu svih mikroprocesa koji naseljavaju (raseljavaju) svaki pojedini atomski nivo.

Za jedan atom sa NL vezanih stanja, naseljenosti pojedinih stanja n_i ($i = 1, NL$) se određuju rešavanjem sistema $NL - 1$ nezavisnih jednačina statističke ravnoteže (1.4) i jedne jednačine koja opisuje održanje ukupnog broja čestica:

$$\sum_{i=1}^{NL} n_i = n_{tot} \quad . \quad (1.19)$$

U jednačinama (1.4), verovatnoća svih prelaza P_{ij} između dva nivoa ($i < j$) može se izraziti sumom radijativnih R_{ij} i sudarnih C_{ij} doprinosa.

Vezano-vezane radijativne ekscitacije i deekscitacije date su sa:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= B_{ij} J_{\varphi} \\ R_{ji} &= A_{ji} + B_{ji} J_{\varphi} \end{aligned} \quad (1.20)$$

gde između Einstein-ovih koeficijenata za apsorpciju B_{ij} , spontanu A_{ji} i stimulisanu B_{ji} emisiju važe sledeće relacije:

$$B_{ji} = \frac{A_{ji}}{(2h\nu_{ij}^3/c^2)} \quad g_i B_{ij} = g_j B_{ji} \quad . \quad (1.20a)$$

J_{φ} predstavlja srednji intezitet zračenja J_{ν} integraljen po profilu linije:

$$J_{\varphi} = \int \varphi_{\nu} J_{\nu} d\nu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\nu} d\nu \int_{-1}^1 I_{\nu\mu} d\mu \quad , \quad (1.21)$$

ili tzv. integral rasejanja, jer je medjusobna povezanost zračenja na raznim frekvencama i uglovima (pravcima) na svakoj dubini prouzrokovana rasejanjem.

Za vezano-slobodne prelaze, radijativni doprinosi R_{ik} su:

$$R_{ik} = 4\pi \int_{\nu_{ki}}^{\infty} \frac{a_{ik}(\nu)}{h\nu} J_{\nu} d\nu \quad (1.22)$$

gde je $a_{ik}(\nu)$ poprečni presek za foto-jonizaciju atoma. Inverzni proces radijativne rekombinacije dat je izrazom:

$$R_{ki} = \frac{n_i^*}{n_k^*} 4\pi \int_{\nu_{ki}}^{\infty} \frac{a_{ik}(\nu)}{h\nu} \exp(-h\nu/kT) \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu \right) d\nu \quad (1.23)$$

Ovde zvezdica označava naseljenosti nivoa u lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži (LTR). Odnos broja atoma u ekscitovanom stanju i prema ukupnom broju jonizovanih atoma, n_i^*/n_k^* , dat je jednačinom Boltzmann-Saha:

$$\frac{n_i^*}{n_k^*} = n_e \frac{g_i}{2U_k} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \exp(h\nu_{ik}/kT) \quad (1.24)$$

(n_e je gustina elektrona, a U_k - suma po stanjima).

Verovatnoće za sudarnu ekscitaciju i jonizaciju date su izrazom:

$$C_{ij} = n_e \int_{\nu_0}^{\infty} \sigma_{ij}(v) f(v) v dv \equiv n_e q_{ij}(T) \quad (1.25)$$

gde je $\sigma_{ij}(v)$ poprečni presek za prelaz ($i \rightarrow j$) ostvaren sudarima sa elektronima brzine v (j može označavati vezani ili slobodni nivo). Detalji određivanja veličine $q_{ij}(T)$ se mogu naći u knjizi Mihalasa (1978), kao i literaturi koja se u njoj citira. Ako se pretpostavi da je raspodela elektrona po brzinama $f(v)$ Maxwellova, polazeći od uslova detaljne ravnoteže, verovatnoće za sudarnu de-ekscitaciju i rekombinaciju zadovoljavaju sledeće izraze:

$$C_{ji} = C_{ij}(n_i^*/n_j^*) \quad (1.26)$$

i

$$C_{ki} = C_{ik}(n_i^*/n_k^*) \quad (1.27)$$

Ovde je odnos naseljenosti dva nivoa u atomu dat sa:

$$n_i^*/n_j^* = (g_i/g_j) \exp(h\nu_{ij}/kT) \quad (1.28)$$

a (n_i^*/n_k^*) je dato izrazom (1.24).

Konačno, jednačine statističke ravnoteže za atom sa NL nivoa i kontinuumom (k), za svaki atomski nivo i će biti oblika:

$$n_i \sum_{j \neq i}^{NL} (R_{ij} + C_{ij}) + n_i (R_{ik} + C_{ik}) = \sum_{j \neq i}^{NL} n_j (R_{ji} + C_{ji}) + n_k (R_{ki} + C_{ki}) \quad (1.29)$$

Da bismo iz ovih jednačina odredili naseljenosti nivoa n_i , potrebno je znati polje zračenja u svakom pojedinom radijativnom prelazu u atomu (jedn. (1.20)-(1.23)). S obzirom na to da je polje zračenja rešenje jednačine prenosa (1.13) sa funkcijom izvora (1.12), tj. (1.18), koja zavisi od naseljenosti atomskih nivoa kao rešenja gornjih jednačina (1.29), jasna je uzajamna zavisnost polja zračenja i stanja gasa. U problemima formiranja linija - atomima sa dva i atomima sa više nivoa - oblik ove zavisnosti se razlikuje zbog različite kompleksnosti fizičkih interakcija sadržanih u ova dva atomska modela.

a) Atom sa dva nivoa

Razmatranje problema prenosa zračenja počecemo vrlo jednostavnim modelom atoma koji ima samo dva vezana stanja ($i < j$) izmedju kojih se ostvaruje prelaz u liniji. Premda znatno pojednostavljenje realnosti, ovaj prototip omogućava jasan uvid u fiziku prenosa zračenja, a s obzirom da je rešenje ovog problema poznato, veoma je značajan i za testiranje novih pristupa i metoda.

Jednačina statističke ravnoteže će u ovom slučaju imati oblik:

$$n_i(B_{ij}J_\varphi + C_{ij}) = n_j(A_{ji} + B_{ji}J_\varphi + C_{ji}) \quad . \quad (1.30)$$

Zamenom odnosa (n_i/n_j) iz (1.30) u izraz za funkciju izvora (1.18), korišćenjem jednačina (1.20a), (1.26), (1.28) i definicije Planck-ove funkcije

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [e^{(h\nu/kT)} - 1]^{-1} \quad ,$$

dobijamo sledeću eksplicitnu relaciju izmedju funkcije izvora u liniji i polja zračenja J_φ :

$$S^l = \varepsilon B + (1 - \varepsilon)J_\varphi \quad . \quad (1.31)$$

Ovde je

$$\varepsilon = \frac{C_{ji}(1 - \exp(-h\nu/kT))}{A_{ji} + C_{ji}(1 - \exp(-h\nu/kT))} \quad (1.32)$$

standardni ne-LTR parametar koji predstavlja verovatnoću da je foton termalizovan pri sudarnoj de-ekscitaciji, odnosno da je njegova energija pretvorena u kinetičku energiju gasa. U LTR, $\varepsilon = 1$, dok je u tipičnim ne-LTR situacijama, $\varepsilon \ll 1$.

Primetimo ovde da jednačina (1.31) opisuje samo jedan specijalan slučaj široke klase problema za koje se funkcija izvora $S(\tau)$ može izraziti kao srednja vrednost termalnog (lokalnog) i rasejavajućeg (nelokalnog) doprinosa sa težinama ε i $1 - \varepsilon$, respektivno.

Ukoliko uzmemo u obzir prisustvo kontinuuma na koji naleže linija, zbog prisustva atoma u gasu koji mogu biti fotojonizovani linijskim zračenjem, izraz za ukupnu funkciju izvora $S_x(\tau)$ na frekvenci x u liniji (1.12), sa pretpostavkom da je $S^c(\tau) = B(\tau)$ i korišćenjem (1.31), može se prepisati u obliku:

$$S_x(\tau) = (1 - \xi_x)J_\varphi(\tau) + \xi_x B(\tau) \quad (1.33)$$

Ovde je

$$\xi_x = (\beta + \varepsilon\varphi_x)/(\beta + \varphi_x)$$

parametar koji opisuje ukupnu verovatnoću destrukcije fotona na frekvenci x . Efektivni parametar interakcije izmedju materije i zračenja, definisan je sa:

$$\bar{\xi} = \int \xi_x \varphi_x dx = \varepsilon + (1 - \varepsilon)\beta \int \frac{\varphi_x dx}{\beta + \varphi_x} \quad (1.33a)$$

i igra istu ulogu koju i parametar ε kada se kontinualna apsorpcija ne uzima u obzir ($\beta = 0$).

b) Atom sa više nivoa

Razmatranje više od dva atomska nivoa čini problem formiranja linija znatno težim ne samo zbog većeg broja jednačina koje treba rešiti već i zbog kvalitativno novih interakcija koje se sada javljaju. Naime, glavna teškoća u tretiranju prenosa zračenja atomima sa više nivoa je u tzv.

"interlocking" efektu (uzajamnim interakcijama polja zračenja u raznim atomskim prelazima). U lancima interakcija u toku procesa rasejanja, fotoni mogu prelaziti iz jedne linije u drugu, pripadajući tako ne samo jednoj određenoj liniji već "kolektivnom bazenu" fotona (Jefferies, 1968) polja zračenja svih atomskih prelaza. Zbog toga je nemoguće eksplicitno izraziti funkciju izvora u jednoj liniji kao što je to slučaj kada se koristi model atoma sa dva nivoa (jedn. (1.31)), već je neophodno sve linije (prelaze) razmatrati i rešavati istovremeno.

Direktna primena metoda koje su razvijene za rešavanje problema prenosa atomima sa dva nivoa na probleme sa složenijim atomskim modelom omogućena je tzv. metodom ekvivalentnog atoma sa dva nivoa (equivalent-two-level-atom approach - ETLA). Pod pretpostavkom da je medjusobna povezanost polja zračenja u raznim linijama jednog atoma slaba, prenos zračenja se rešava za svaku liniju posebno, dok se interakcije medju linijama uzimaju u obzir iterativno. Medjutim, kako je u opštem slučaju, polje zračenja u raznim linijama jako povezano, što je u suprotnosti sa osnovnom pretpostavkom ETLA pristupa, pomenuta procedura ili ne konvergira ili se stabilizuje oko rešenja koje nije tačno i konzistentno. Metodi koji ostvaruju traženu konzistentnost u rešavanju ovog problema, bilo kroz potpunu matricnu diskretizaciju bilo u okviru raznih iterativnih procedura, biće ukratko izloženi u narednim odeljcima ovog poglavlja.

1.3. Numerički metodi

U ovom odeljku dajemo kratak pregled ključnih numeričkih metoda za rešavanje problema prenosa zračenja u spektralnim linijama. Detaljniji opis ovih tehnika se može naći u originalnim naučnim radovima, kao i preglednim člancima (napr., Hummer i Rybicki, 1967; Mihalas, 1985) i knjigama (Kalkofen, 1984,1987; Cannon, 1985).

Ovaj pregled ćemo početi metodom diskretnih ordinata čija je važnost dvostruka: a) reprezentacija diskretnih ordinata čini osnovu svih modernih tehnika i b) "tačna" rešenja jednostavnijih problema prenosa

dobijena ovim metodom služe kao pouzdan test tačnosti novih numeričkih metoda. S obzirom da ćemo u radu na isti način testirati tačnost našeg metoda, metod diskretnih ordinata ćemo izložiti u nešto više detalja.

Numerički metodi koji slede razvijeni su sa ciljem da se reše realniji i komplikovaniji problemi. Zbog nelokalne i nelinearne prirode prenosa zračenja, oni su u osnovi iterativnog tipa. Prva dva metoda, metod Λ iteracije i metod kompletne linearizacije, konceptualno potpuno različiti, koriste tačan opis prenosa zračenja. Dok se prvi zbog beskonačno spore konvergencije praktično ne može koristiti, drugi se pokazao moćnim u mnogim astrofizičkim aplikacijama u toku poslednje dve decenije. Međutim, zbog ograničenja koje postavljaju računarsko vreme i prostor, primena ovog potpunog tretmana prenosa na složenije geometrije ili atomske modele je praktično nemoguća. Kao posledica toga, razvijani su metodi koji su pokušavali da pojednostave opis statističke ravnoteže (ETLA) ili prenosa zračenja (metodi verovatnoće bekstva, tehnike operatora perturbacije ili aproksimativnog Λ operatora).

1.3.1. Metod diskretnih ordinata

Prikažimo ukratko prvi metod korišćen da se reši jednačina prenosa zračenja. To je metod diskretnih ordinata - osnova svih modernih tehnika. Iako u osnovi analitički, ovaj metod zahteva numeričke tehnike za svoju praktičnu realizaciju. Prvenstveno razvijen za slučaj koherentnog rasejanja (Chandrasekhar, 1950), uopšten je na slučaj nekoherentnog rasejanja u radovima King-a (1955, 1956), Jefferies i Thomas-a (1958, 1959), Avrett i Hummer-a (1965) i Hummer-a (1968).

Daćemo osnovne korake ovog metoda na primeru rešavanja jednačine prenosa zračenja (1.10) sa funkcijom izvora $S_x(\tau)$ na frekvenci x koja potiče od linije formirane potpuno nekoherentnim rasejanjem i kontinualnog fona. (1.33). Jednačinu (1.10) onda možemo prepisati u obliku:

$$\frac{\mu}{\varphi_x + \beta} \frac{dI_{x\mu}(\tau)}{d\tau} = I_{x\mu}(\tau) - \frac{1}{2}(1 - \xi_x) \int dx \varphi_x \int I_{x\mu}(\tau) d\mu - \xi_x B(\tau) \quad (1.34)$$

Za rešavanje integro-diferencijalne jednačine (1.34) neophodno je korišćenje tzv. reprezentacije diskretnih ordinata. Naime, kontinualne vrednosti svih relevantnih promenljivih problema prikazuju se na diskretnom skupu frekvenci x_i , ($i = 1, nf$); uglova μ_j , ($j = 1, nm$) i dubina τ_l , ($l = 1, nd$). Integrali po kontinualnim promenljivim μ i x zamenjuju se, pomoću kvadrature formula, odgovarajućim sumama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \rightarrow \sum_{i=-nf}^{nf} a_i f(x_i) \quad (1.35a)$$

i

$$\int_{-1}^1 f(\mu)d\mu \rightarrow \sum_{j=-nm}^{nm} b_j f(\mu_j) \quad (1.35b)$$

gde su a_i i b_j težine koje odgovaraju kvadraturi reda nf i nm po frekvencama i uglovima, respektivno, a koje zadovoljavaju uslove normiranja:

$$\sum_{i=-nf}^{nf} a_i = 1 \quad , \quad \sum_{j=-nm}^{nm} b_j = 2 .$$

Pomoću ovih operacija integro-diferencijalna jednačina (1.34) se pretvara u skup $nf * nm$ linearnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\mu_j}{\varphi_i + \beta} \frac{dI_{ij}}{d\tau} = I_{ij} - \frac{1}{2}(1 - \xi_i) \sum_{i'} \sum_{j'} a_{i'} b_{j'} I_{i'j'} - \xi_i B \quad (1.36)$$

Opšte rešenje jednačine (1.36):

$$I_{ij}(\tau) = g_{ij} e^{\Gamma\tau} + I^P(\tau) \quad (1.37)$$

sastoji se od rešenja njenog homogenog dela i partikularnog rešenja $I^P(\tau)$ koje zavisi od oblika $B(\tau)$. Ako pretpostavimo da $B(\tau)$ ima oblik:

$$B(\tau) = 1 + g\tau + h e^{-\delta\tau} \quad , \quad (1.38)$$

partikularno rešenje je suma partikularnih rešenja koja odgovaraju svakom članu u $B(\tau)$. Tako je (Hummer, 1968):

$$I^P(\tau) = 1 + g\left(\tau + \frac{\mu_j}{\beta + \varphi_i}\right) + h \frac{[(1 - \xi_i)\gamma + \xi_i]}{1 + \delta\mu_j/(\beta + \varphi_i)} e^{-\delta\tau} \quad (1.39)$$

za γ datim izrazom:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{nf} \sum_{j=1}^{nm} [a_i b_j \xi_i / (1 - \delta^2 (\mu_j / (\beta + \varphi_i))^2)]}{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{nf} \sum_{j=1}^{nm} [a_i b_j (1 - \xi_i) / (1 - \delta^2 (\mu_j / (\beta + \varphi_i))^2)]} .$$

Funkcija izvora u liniji je, prema jednačinama (1.31) i (1.21), u reprezentaciji diskretnih ordinata data izrazom:

$$S^l(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \sum_i \sum_j a_i b_j I_{ij} + \varepsilon B(\tau) . \quad (1.40)$$

S obzirom na oblik opšteg i partikularnog rešenja, $S^l(\tau)$ možemo tražiti u sledećem obliku:

$$S^l(\tau) = (1 - \varepsilon) \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{-\Gamma_{\alpha} \tau} + 1 + g\tau + h \left[(1 - \varepsilon)\gamma + \varepsilon \right] e^{-\delta \tau} . \quad (1.41)$$

Koristeći (1.12) i definiciju ξ_x , ukupna funkcija izvora će biti oblika:

$$S_x(\tau) = (1 - \xi_x) \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{-\Gamma_{\alpha} \tau} + 1 + g\tau + h \left[(1 - \xi_x)\gamma + \xi_x \right] e^{-\delta \tau} . \quad (1.42)$$

Konstante A_{α} i Γ_{α} ($\alpha = 1, nk$; $nk = nf * nm$) u gornjim izrazima treba odrediti. Γ_{α} se odredjuje rešavanjem tzv. karakteristične jednačine:

$$\sum_k w_k \frac{1 - \xi(x_i)}{1 - \Gamma_{\alpha}^2 (\mu_j / (\beta + \varphi_{x_i}))_k^2} = 1 , \quad (1.43)$$

dobijene zamenom rešenja jednačine prenosa (prema (1.16) sa $S_x(\tau)$ datim sa (1.42)) u izraz za funkciju izvora (1.33). Pri tome se za $J_{\varphi}(\tau)$ koristi relacija:

$$J_{\varphi}(\tau) = \sum_{k=1}^{nk} w_k \frac{I_x^-(\mu) + I_x^+(\mu)}{2} . \quad (1.44)$$

Karakteristična jednačina ima $nf * nm$ ne-negativnih korena Γ_{α}^2 koji zadovoljavaju nejednakost:

$$0 < \Gamma_1^2 < (\mu / (\beta + \varphi_x))_1^{-2} < \Gamma_2^2 < (\mu / (\beta + \varphi_x))_2^{-2} < \dots < \Gamma_{nk}^2 < (\mu / (\beta + \varphi_x))_{nk}^{-2} .$$

Nepoznate A_{α} se odredjuju iz graničnog uslova na površini (1.15a). Primena ovog uslova na izraz za intenzitet ulaznog zračenja (dobijen

pomoću (1.16b) sa $S_x(\tau)$ datim sa (1.42)), daje sistem od nk jednačina za nk nepoznatih vrednosti A_α :

$$1 - g\left(\frac{\mu}{\beta + \varphi_x}\right)_k + (1 - \xi_x)_k \sum \frac{A_\alpha}{1 - \Gamma_\alpha\left(\frac{\mu}{\beta + \varphi_x}\right)_k} + \frac{h[(1 - \xi_x)\gamma + \xi_x]_k}{1 - \delta\left(\frac{\mu}{\beta + \varphi_x}\right)_k} = 0 .$$

Tražena funkcija izvora u liniji konačno se dobija zamenom konstanti A_α i Γ_α u izraz (1.41).

Ovaj metod je u primeni ograničen na sredine konstantih fizičkih svojstava, odnosno sredine u kojima se parametri ε i β kao i funkcija profila φ_x ne menjaju sa dubinom. Pregled metoda koje rešavaju probleme gde parametri sredine variraju sa dubinom dat je u radu Hummer-a i Rybicki-a (1967).

1.3.2. Metod Λ iteracije

U metodu Λ iteracije, naizmenično se rešavaju jednačina prenosa zračenja i jednačine statističke ravnoteže. Tako se ova najjednostavnija iterativna procedura sastoji iz dva koraka: a) sa datom funkcijom izvora $S_x(\tau)$ rešava se jednačina prenosa zračenja čime se dobijaju intenziteti $I_{x\mu}(\tau)$ na datom skupu frekvenci x_i i pravaca μ_j i b) sa tako dobijenim $I_{x\mu}(\tau)$ izračunavaju se srednji intenziteti $J_x(\tau)$ i, rešavanjem jednačina statističke ravnoteže, dobija se nova funkcija izvora $S_x(\tau)$. Procedura se ponavlja do konvergencije.

Ova metoda je dobila ime po linearnom operatoru Λ_x koji povezuje srednji (po pravcima) intenzitet zračenja $J_x(\tau)$ i funkciju izvora $S_x(\tau)$:

$$J_x(\tau) = \Lambda_x(\tau, \tau') S_x(\tau') . \quad (1.45)$$

Naime, integracijom izraza za specifični intenzitet (1.16) po svim pravcima dobija se koncizni izraz za srednji intenzitet zračenja (Schwarzschildova jednačina):

$$J_x(\tau_x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_x(t) E_1 |t - \tau_x| dt$$

gde je

$$E_1(t) = \int_1^\infty e^{-yt} \frac{dy}{y}$$

integro-eksponencijalna funkcija prve vrste. Integral u Schwarzschildovoj jednačini se u teoriji prenosa zračenja često sreće u operatorskoj notaciji (1.45), upotrebom operatora Λ :

$$\Lambda(f(t)) \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) E_1 |t - \tau| dt .$$

Za probleme koji tretiraju istovremeno više frekvenci (problem formiranja linija), moguće je napisati sličan izraz izrazu (1.45), samo kada je funkcija izvora frekventno nezavisna. To je slučaj formiranja linija potpuno nekoherentnim rasejanjem kakav ovde razmatramo. Tada imamo:

$$J_\varphi(\tau) = \Lambda(\tau, \tau') S(\tau')$$

sa Λ datim (prema (1.21)) izrazom:

$$\Lambda = \int \varphi_x dx \Lambda_x .$$

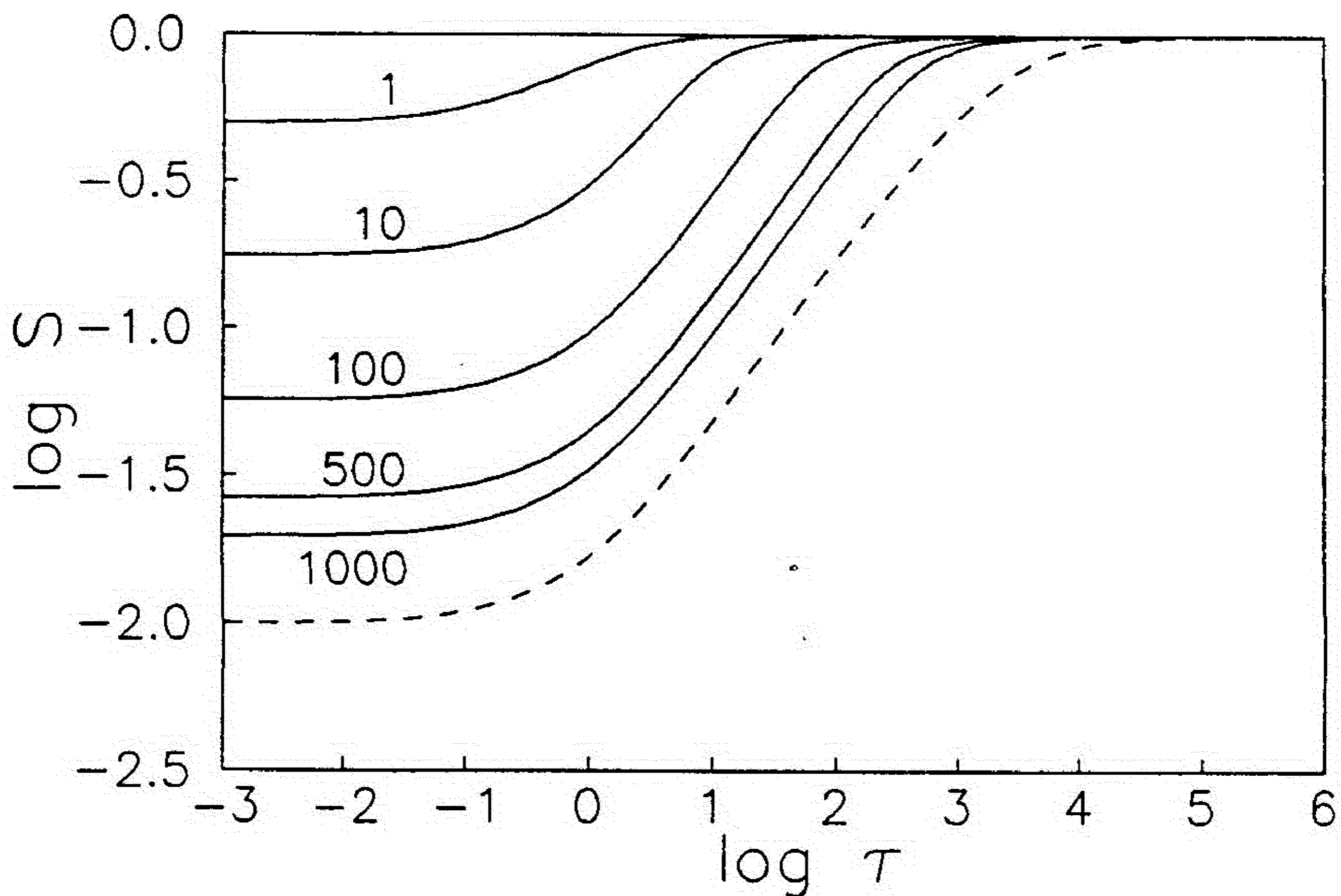
Pri prezentaciji ove, kao i narednih iterativnih metoda, pogodno je koristiti model atoma sa dva nivoa zbog eksplicitnog izraza za funkciju izvora:

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon) J_\varphi + \varepsilon B . \quad (1.46)$$

Tada se direktna Λ iterativna šema simbolično može pisati u obliku:

$$S^{(n+1)} = (1 - \varepsilon) \Lambda[S^{(n)}] + \varepsilon B . \quad (1.47)$$

Ova jednostavna iterativna procedura, međutim, ne konvergira u tipičnim ne-LTR uslovima. To se može objasniti na sledeći način. Funkcija izvora na datoj optičkoj dubini τ zavisi od broja fotona koji direktno napuštaju atmosferu sa te dubine. Za velike vrednosti τ , to su fotoni J_x koji pripadaju krilima linije gde je apsorpcioni koeficijent φ_x vrlo mali. Drugim rečima, funkcija izvora za $\tau \gg 1$ zavisi od intenziteta zračenja J_x za x u krilima. Međutim, u matematičkom izrazu za funkciju izvora (1.46), kakav se koristi u proceduri Λ iteracije, fotoni J_x se množe sa profilom φ_x da bi integraljeni po frekvencama dali srednji intenzitet J_φ . Pošto se φ_x vrlo brzo menja unutar uskog frekventnog opsega, fotoni u krilima linije su numerički loše tretirani ovakvom procedurom.



Sl.2. Funkcija izvora u izotermnoj sredini sa $\varepsilon = 10^{-4}$ određena metodom Λ iteracije u naznačenom broju iteracija. Isprekidana linija predstavlja tačno rešenje dobijeno metodom diskretnih ordinata.

Samo fotoni u jezgru linije igraju značajnu ulogu u integralu J_φ , i prema tome samo ovi fotoni doprinose korekciji funkcije izvora. Na taj način, delovi funkcije izvora koji zavise od fotona u krilima linije (na velikim optičkim dubinama) se teško mogu korigovati u ovakvoj vrsti numeričke procedure.

Da bi se ova teškoća izbegla, Rybicki (1972) je predložio da se integral J_φ podeli u dve oblasti, za frekvence u jezgru (core - c) i u krilima (wings - w) linije:

$$\Lambda_c S^c + \Lambda_w S^w .$$

Za $\tau \gg 1$, J_φ^c je poznato iz fizičkih razmatranja. Difuzna aproksimacija je dovoljna i taj član postaje poznata funkcija $S(\tau)$. Fotoni u krilima su izolovani u članu J_φ^w i učestvuju u korekciji funkcije izvora.

Drugo objašnjenje za sporu konvergenciju se može dobiti ako se operator rasejanja Λ razmatra kao matrica, a konvergentna svojstva iterativne procedure preko maksimalne sopstvene vrednosti λ_{max} iterativne

matrice $(1 - \epsilon)\Lambda$ u (1.47). Prema jednoj teoremi (Tošić, 1987) iterativni proces konvergira samo ako je λ_{max} manje od 1. Vrednost λ_{max} određuje brzinu konvergencije. Što je manje λ_{max} to će konvergencija biti brža. Kao što je pokazano u iscrpnoj analizi matematičkih svojstava postojećih iterativnih procedura u radu Olson i dr. (1986), za običnu Λ iteraciju $\lambda_{max} = (1 - \epsilon)(1 - T^{-1})$ gde je T optička dubina u liniji. Ako je ϵ malo (za radijativno dominantne prelaze) i veliko T (kao u većini praktičnih problema), λ_{max} je blisko jedinici što vodi beskonačno sporoj konvergenciji. Sporu korekciju rešenja upotrebom Λ iteracije pri tipičnim ne-LTR uslovima u atmosferama zvezda ilustrovali smo na sl.2.

1.3.3. Metod kompletne linearizacije

Filozofija ovog pristupa se najbolje može izraziti zapažanjem Auer-a (1971): "... pokušavamo da rešimo jednačinu prenosa sa nizom nelinearnih dopunskih uslova. Realne zvezde ih rešavaju istovremeno i, kao što ćemo videti, da bismo napredovali u ne-LTR teoriji atmosfera i mi moramo učiniti isto."

Za rešavanje globalnog problema konstrukcije zvezdanih atmosfera (jednačine prenosa zračenja sa nelinearnim uslovima statističke, radijativne i hidrodinamičke ravnoteže), Auer i Mihalas (1969) su razvili moćan metod kompletne linearizacije. U toku poslednje dve decenije, ovaj metod je bio često primenjivan i na problem formiranja linija (pri datoj raspodeli temperature i pritiska sa dubinom).

Uzajamno povezivanje svih fizičkih veličina je potpuno uzeto u obzir kompletnom linearizacijom jednačina po svim relevantnim promenljivima problema i njihovim istovremenim rešavanjem. Procedura je sledeća. Diskretizacijom svih nezavisnih promenljivih (pravaca, frekvenci, dubina), zamenom izvoda konačnim razlikama i integrala kvadrturnim sumama, sve jednačine su svedene na algebarski oblik. Traži se vektor nepoznatih veličina

$$\Psi_d = \Psi_d(J_1, \dots, J_{NF+NA}, n_1, \dots, n_{NL})$$

koje opisuju stanje atmosfere u svakoj njenoj tački.

Sistem nelinearnih algebarskih jednačina

$$A(\Psi) = 0$$

rešava se kompletnom linearizacijom svih jednačina (tj. više-dimenzionim Newton-Raphson-ovim metodom). Polazaći od neke početne procene $\Psi^{(0)}$, sistem linearizovanih jednačina se rešava po korekcijama $\delta\Psi$ tekućeg rešenja Ψ . S obzirom da prenos zračenja predstavlja granični problem u dve tačke, linearizovane jednačine imaju tridijagonalni oblik

$$-A_d\delta\Psi_{d-1} + B_d\delta\Psi_d - C_d\delta\Psi_{d+1} = L_d \quad ,$$

i mogu se rešiti rekurzivnom šemom Feautrier (Feautrier, 1964) ili Rybicki (Rybicki, 1971) tipa.

Nov vektor rešenja $\Psi^{(n+1)} = \Psi^{(n)} + \delta\Psi$ se zatim dobija i iterativna procedura se ponavlja do konvergencije. Rešenje je brzo konvergentno ako polazna pretpostavka $\Psi^{(0)}$ nije suviše daleko od tačne vrednosti i ako se funkcije lako mogu linearizovati oko tačnog vektora Ψ .

Ovaj metod je bio uspešno primenjivan kako za sintezu profila spektralnih linija tako i za modeliranje zvezdanih atmosfera. Međutim, on ima izvesne mane. Zbog velikog broja tačaka diskretizacije koje su eksplicitno potrebne za dobar opis problema, tretiranje složenijih geometrija i komplikovanijih atomskih modela je onemogućeno ograničenjima u računarskoj memoriji i vremenu. Iz numeričkih razloga, njegova primena je ograničena na modele atoma do 20 nivoa. Moguće su takodje nestabilnosti prouzrokovane velikim korekcijama u proceduri linearizacije. Konačno, iako jedinstvena procedura omogućava da se različit broj jednačina i dopunskih uslova uzme u obzir na isti način, modifikacija koda za svaki pojedinačni problem zahteva velike napore.

Preformulacija metoda kompletne linearizacije koju su dali Auer i Heasley (1976) bazirana na rekurzivnoj šemi Rybicki-a pokazuje izvesna poboljšanja u brzini u odnosu na originalni metod Auera i Mihalasa.

1.3.4. Iteracija sa aproksimativnim Λ operatorom

Obzirom da je potpuno samo-usaglašeno rešavanje ne-LTR problema zbog potrebnog vremena i memorijskog prostora veoma skupo, metode koje aproksimativno tretiraju prenos zračenja u cilju dobijanja "tačnog" rešenja iterativno, postaju veoma popularne.

Osnovna prednost iterativnih metoda nad direktnim je u njihovoj jednostavnosti, time lakšoj kontroli algoritma i, uopšte, većoj tačnosti zbog manjeg broja neophodnih numeričkih operacija. Pošto su po strukturi slične proceduri obične Λ iteracije, ove metode su dobile naziv "metode ubrzane lambda iteracije" (accelerated lambda iteration - ALI). S druge strane, s obzirom da je njihova ideja bazirana na perturbacionoj tehnici Cannon-a u kojoj se umesto tačnog koristi aproksimativni, jednostavniji Λ operator, a greška učinjena tom aproksimacijom se tretira kao poznati izvorni član u nizu perturbacionih jednačina, naziv "metode operatora perturbacije" se takodje upotrebljava da označi ovu grupu metoda.

Prvi pokušaj ubrzanja iterativne procedure učinjen je u radu Rybicki-a (1972). Da bi eliminisao uzrok spore konvergencije obične Λ iteracije - slabu uslovljenost originalnih jednačina, Rybicki je predložio eliminaciju fotona koji pripadaju jezgru linije i igraju pasivnu ulogu u prenosu zračenja (posebno na velikim optičkim dubinama) iz jednačina, zadržavajući samo aktivne komponente prenosa - fotone u krilima linije. Ovo tzv. "pre-uslovljavanje" jednačina realizuje se aproksimacijom saturacije zračenja u jezgru, kojom se izjednačava monohromatski srednji intenzitet polja zračenja i lokalna izotropna funkcija izvora za frekvence u jezgru linije:

$$J_x = S_x, \quad \tau_x > \gamma$$

za koje je monohromatska optička dubina τ_x do najbliže granice veća od γ . γ je slobodan parametar čija je vrednost obično jednaka ili veća od 1.

Rešavanje "pre-uslovljenih" jednačina koje sadrže samo aktivne komponente u krilu linije direktnom Λ iteracijom pokazalo je mnogo bolja konvergentna svojstva od Λ iteracije sa originalnim, potpunim jednačinama. Medjutim, tačnost i brzina konvergencije dosta zavise od

izbora frekvence koja deli jezgro od krila linije (tj. od parametra γ). Pretpostavka saturacije u jezgru je fizički model koji je u osnovi mnogih iterativnih tehnika razvijenih tokom osamdesetih godina.

ALI metode ćemo najbolje ilustrovati ako koristimo integralni oblik jednačine prenosa:

$$S = (1 - \epsilon)\Lambda S + \epsilon B \quad . \quad (1.48)$$

Njihova osnovna ideja je zamena "tačnog" Λ operatora tzv. aproksimativnim Λ^* operatorom, pomoću identiteta:

$$\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \quad , \quad (1.49)$$

čijom se zamenom u (1.48) dobija:

$$S = (1 - \epsilon)\Lambda^* S + \epsilon B + (1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S \quad . \quad (1.50)$$

Mali korektivni član $(1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S$ koji je posledica učinjene aproksimacije tretira se kao poznati izvor fotona. Rešenje se može popravljati iterativno ili koristeći perturbacionu tehniku.

Ideja se prvi put javila u radu Cannon-a (1973a,b). On je sugerisao zamenu integrala intenziteta zračenja po frekvencama i pravcima (u članu koji opisuje rasejanje) kvadraturnom sumom nižeg reda od one koja je uobičajeno korišćena da se dobije rešenje zahtevane tačnosti. Ovo je ekvivalentno zameni "tačnog" Λ operatora aproksimativnim. Cannon-ov aproksimativni operator odgovara manjem broju kvadraturenih tačaka. Iako Cannon rešava jednačinu (1.50) Feautrier šemom, nastavićemo da koristimo operatorsku reprezentaciju, jer je pogodnija za dalji prikaz generalizacije njegove ideje.

Koristeći (1.49), rešenje jednačine (1.48) se može napisati u vidu perturbacionog niza (Cannon, 1973b):

$$\begin{aligned} S &= \frac{\epsilon B}{1 - (1 - \epsilon)\Lambda} \\ &= \frac{\epsilon B}{1 - (1 - \epsilon)\Lambda^*} \left(1 + \frac{(1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)}{1 - (1 - \epsilon)\Lambda^*} + \left(\frac{(1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)}{1 - (1 - \epsilon)\Lambda^*} \right)^2 + \dots \right) \\ &= \sum_{k=1}^K S_k \end{aligned} \quad (1.51)$$

Funkcija izvora S_1 dobijena rešavanjem (1.48) sa jednostavnijim Λ^* operatorom:

$$S_1 = (1 - \varepsilon)\Lambda^* S_1 + \varepsilon B \quad (1.52)$$

popravlja se dodavanjem članova niza (1.51), dobijenih rešavanjem sledećih perturbacionih jednačina:

$$S_k = (1 - \varepsilon)\Lambda S_k + (1 - \varepsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S_{k-1} \quad , \quad (1.53)$$

dok se ne postigne željena tačnost.

Iterativno rešavanje jednačine (1.50) je prvi predložio Scharmer (1981, 1984). Primenio je ideju Cannon-ove perturbacione tehnike sa aproksimativnim Λ^* operatorom na jednostavnu iterativnu šemu:

$$[1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]S^{(n+1)} = \varepsilon B + (1 - \varepsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S^{(n)} \quad (1.54)$$

koja direktno sledi iz (1.50).

S obzirom da je potrebno jednačinu (1.54) rešavati više puta u toku iterativne procedure, prvi uslov za izbor Λ^* operatora je da je izraz

$$I - (1 - \varepsilon)\Lambda^*$$

jednostavno invertovati. Jasno, da bi se obezbedila brza konvergencija, Λ^* istovremeno mora biti što je moguće fizički bliži tačnom operatoru prenosa. Medjutim, treba imati u vidu da je prvi uslov numerički neophodan. Tako su najčešće korišćene aproksimacije bile da je Λ^* dijagonalan ili tridijagonalan operator.

S druge strane, da bi se dobio "tačan" operator, potrebno je da se izvrši diskretizacija sistema u dovoljnom broju slojeva koji su definisani svojim optičkim dubinama, kao i da se formira diskretan skup frekvenci i pravaca za numeričko izračunavanje J_φ kao operacionalne funkcije S . Iskustvo nam pokazuje da se isti numerički opis sistema mora koristiti za izračunavanje aproksimativnog operatora.

Pošto se jednom odredi "tačan" Λ operator, najbolje je da se za aproksimativni Λ^* , uzme glavna dijagonala matrice Λ operatora (Olson i dr., 1986). Ovaj izbor je učinjen u saglasnosti sa teoremom Gerschgorina (Tošić, 1987, Olson i dr., 1986) i pretpostavkom da je fizika fotona

na velikim dubinama uglavnom sadržana u glavnoj dijagonali Λ matrice. Olson i Kunasz (1987) su tako definisan dijagonalni Λ^* operator aproksimirali matematički.

U literaturi su predloženi mnogi načini da se izabere aproksimativni Λ^* operator, a konvergentna svojstva različitih operatora su poredjena i diskutovana u brojnim radovima (Kalkofen, 1987; Olson i dr., 1986; Olson i Kunasz, 1987; Puls i Herrero, 1988).

Univerzitet u Beogradu
Prirnodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ **Datum** _____

2. REŠAVANJE PROBLEMA PRENOSA ZRAČENJA KADA KOEFICIJENTI PRENOSA ZAVISE EKSPPLICITNO OD POLJA ZRAČENJA

2.1. Ideja metode promenljivih Eddingtonovih faktora u monohromatskom problemu

Kao što smo već napomenuli u uvodu, metod iteracionih faktora, koji je predmet ovoga rada, razvijen je kao generalizacija ideje promenljivih (sa dubinom) Eddingtonovih faktora - PEF (definisanih za monohromatski problem) na relevantne promenljive problema prenosa zračenja u spektralnim linijama. Pre nego što predjemo na razmatranje metoda faktora iteracije, ukratko ćemo analizirati kako i zašto upotreba PEF-ova u jednostavnoj iterativnoj proceduri ubrzava konvergenciju.

U monohromatskom problemu, potrebno je rešiti jednačinu prenosa zračenja:

$$\mu \frac{dI_\mu(\tau)}{d\tau} = (I_\mu(\tau) - S(\tau)) \quad (2.1)$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima. Funkcija izvora

$$S(\tau) = \varepsilon B(\tau) + (1 - \varepsilon)J(\tau) \quad (2.2)$$

sadrži termalni član $B(\tau)$ i član rasejanja

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int I_\mu(\tau) d\mu \quad (2.3)$$

koji je funkcija rešenja $I_\mu(\tau)$ jednačine (2.1). Zamenom (2.2) i (2.3) u (2.1) dobijamo po jednu integro-diferencijalnu jednačinu za svaki pravac μ .

U proceduri Λ iteracije, gornje jednačine se rešavaju u sledećim koracima: a) sa datom funkcijom izvora $S(\tau)$ (u prvoj iteraciji, obično sa ravnotežnom vrednošću $S(\tau) = B(\tau)$), rešava se jednačina prenosa zračenja (2.1) kao obična diferencijalna jednačina prvog reda da bi se

dobili specifični intenziteti $I_\mu(\tau)$ za svaki pravac, b) sa ovim intenzitetima izračunava se srednji intenzitet $J(\tau)$ pomoću (2.3), tj. nova funkcija izvora $S(\tau)$ iz (2.2). Procedura se ponavlja dok se ne ispuni zahtevani kriterijum za konvergenciju. U monohromatskom problemu, konvergencija se dostiže u razumnom broju iteracija. Ali, za sisteme čiji je geometrijski oblik mnogo komplikovaniji od plan- paralelnog, broj potrebnih iteracija za dobru konvergenciju je veliki. Slično, i za klasični plan-paralelni sistem, ako je potrebno ponoviti više puta proceduru Λ iteracije (napr. za više medjusobno nezavisnih frekvenci), neophodno je konvergenciju ubrzati. To i predstavlja osnovni cilj metoda PEF.

Naime, ideja je da se predloži drugi način za iterativnu korekciju promenljivih problema, ili, jednostavno, drugi način da se dobije nova funkcija izvora, odnosno novo $J(\tau)$. Da bismo dobili $J(\tau)$, potrebno je naći momente jednačine prenosa zračenja. Momenti prvog i drugog reda (2.1) su:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = J(\tau) - S(\tau) \quad (2.4a)$$

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = H(\tau) \quad (2.4b)$$

Gornji sistem se, sa upotrebom (2.2), može prepisati u obliku diferencijalne jednačine drugog reda:

$$\frac{d^2K(\tau)}{d\tau^2} = \varepsilon[J(\tau) - B(\tau)] \quad (2.5)$$

Da bi se rešile jednačine (2.4), odnosno jednačina (2.5), neophodna je relacija zatvaranja izmedju momenata: $J(\tau)$, $H(\tau)$ i $K(\tau)$.

Najjednostavniji način da se ona definiše je da se generalizuje Edingtonova aproksimacija:

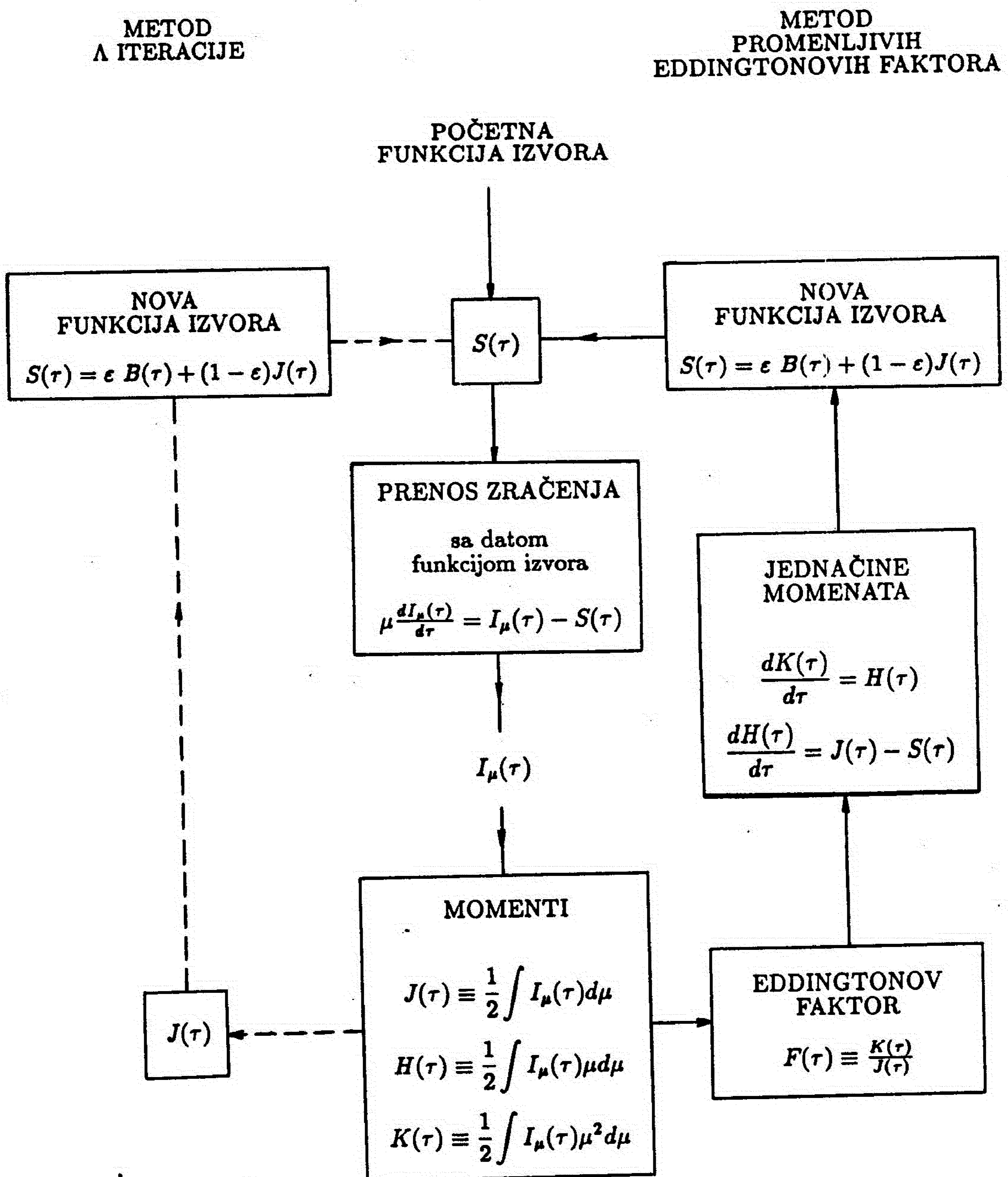
$$\frac{K(\tau)}{J(\tau)} = \frac{1}{3} \quad (2.6)$$

u obliku

$$\frac{K(\tau)}{J(\tau)} = \frac{\frac{1}{2} \int I_\mu \mu^2 d\mu}{\frac{1}{2} \int I_\mu d\mu} = F(\tau) \quad (2.7)$$

tako da se $F(\tau)$ izračunava kao odnos momenata intenziteta $I_\mu(\tau)$ dobijenih sa $S(\tau)$ iz prethodne iteracije. Sa poznatim $F(\tau)$ možemo dobiti

novu vrednost $J(\tau)$ korišćenjem (2.7) i rešavanjem (2.5), a otuda i novu funkciju izvora $S(\tau)$. Ova procedura PEF, ne mnogo komplikovanija od klasične lambda iteracije (sl.3.), vodi vrlo brzom konvergenciji. Obično su dovoljne tri iteracije za klasične geometrije (Auer, Mihalas (1970); Hummer, Rybicki (1971)).



Sl.3. Dijagram metode promenljivih Eddingtonovih faktora

Razlog za ovako brzu konvergenciju leži u činjenici da je promenljivi Eddingtonov faktor (2.7) kao odnos dve homologne veličine skoro nezavisan od početnih uslova (početne funkcije izvora) iz kojih je bio izračunat. On je kvazi-invarijanta problema. S obzirom da predstavlja odnos dva funkcionala polja zračenja, manje je osetljiv na grešku u intenzitetu $I_\mu(\tau)$, pa je već u prvoj iteraciji skoro tačan. Pošto brzo postaje tačan koeficijent diferencijalne jednačine (2.5) koju treba rešiti, a koja se može prepisati u obliku:

$$\frac{d^2 K(\tau)}{d\tau^2} = \varepsilon \frac{K(\tau)}{F(\tau)} - \varepsilon B(\tau) ,$$

omogućava time i brzu korekciju (konvergenciju) ka "tačnom" rešenju.

Moguće su i opštije relacije zatvaranja od (2.7), i one čak mogu dovesti i do boljih konvergentnih svojstava kao što ćemo videti kasnije. Posebno, za sferno- simetričnu geometriju, generalizacija Eddingtonove relacije (2.7) je:

$$K(\tau) - J(\tau) = 2\mu_c(\tau)H(\tau) \quad (2.8)$$

gde je $\mu_c(\tau)$ poznati faktor opaciteta sistema (Simonneau, 1979, 1980).

Ukratko, metod koji koristi pogodno izabrane faktore iteracije za ubrzavanje iterativne procedure može se definisati kao vrsta mešovite iterativne šeme u kojoj se smenjuju formalno rešenje jednačine prenosa korišćeno za izračunavanje faktora iteracije i rešenje jednačina momenata (integralnih jednačina prenosa) zatvorenih ovim faktorima.

2.2. Metod iteracionih faktora u problemu prenosa zračenja atomima sa dva nivoa

U ovom poglavlju razvićemo metod iteracionih faktora za rešavanje problema formiranja linija atomima sa dva nivoa. Iako znatno pojednostavljenje realnosti, ovaj problem je značajan ne samo kao nezaobilazan prototip - problem čija poznata rešenja služe da se testira tačnost novih metoda, već takodje kao važan korak ka rešavanju opštijih problema prenosa.

Pretpostavićemo da je linija, formirana potpuno ne-koherentnim rasejanjem, superponirana na kontinualnom fonu koji potiče od drugih

čestica gasa u plan- paralelnoj, polu-beskonačnoj, statičnoj sredini konstantnih svojstava. Doprinos kontinualne apsorpcije određen je a priori datim parametrom β definisanim sa (1.11), a kontinualne emisije funkcijom izvora u kontinuumu za koju ćemo pretpostaviti da je jednaka ravnotežnoj ($S^c = B$).

Sa ovim pretpostavkama, jednačina prenosa zračenja koju treba rešiti je oblika:

$$\mu \frac{dI_{x\mu}}{d\tau} = (\varphi_x + \beta)(I_x(\mu, \tau) - S_x(\tau)) \quad (2.9)$$

sa graničnim uslovima: na površini ($\tau = 0$)

$$I_x(\mu < 0, \tau = 0) = 0 \quad (2.10a)$$

i na velikim optičkim dubinama

$$I_x(\mu > 0, \tau \gg 1) = S_x(\tau) + \frac{\mu}{\varphi_x + \beta} S'_x(\tau) \quad , \quad (2.10b)$$

gde je primenljiva difuzna aproksimacija. Ukupna funkcija izvora $S_x(\tau)$ (u liniji i kontinuumu) data je sa:

$$S_x(\tau) = \frac{\varphi_x}{\varphi_x + \beta} S^l(\tau) + \frac{\beta}{\varphi_x + \beta} S^c(\tau) \quad , \quad (2.11)$$

a funkcija izvora u liniji za atom sa dva nivoa pri pretpostavci potpune nekoherentnosti zračenja ima poznati oblik:

$$S^l(\tau) = \varepsilon B(\tau) + (1 - \varepsilon) J_\varphi(\tau) \quad . \quad (2.12)$$

Kao što smo već diskutovali u odeljku 1.3.2., rešavanje ovih jednačina direktnom Λ iterativnom procedurom je ekstremno sporo za tipične uslove prenosa zračenja u spektralnim linijama (iz razloga što fotoni u krilima linije - važni za korekcije funkcije izvora na velikim optičkim dubinama - nisu u takvoj vrsti procedure numerički dobro uzeti u obzir).

Da bismo ubrzali konvergenciju u iterativnom rešavanju problema formiranja linija, pokušaćemo da generalizujemo ideju promenljivih Edingtonovih faktora. Kako sada dve promenljive definišu problem - pravci (uglovi) i frekvence - potražimo najpre odgovarajuće ugaone, a

zatim po frekvencama u profilu linije integrisane momente originalne jednačine prenosa zračenja.

Ugaoni momenti nultog i prvog reda jednačine (2.9), dobijeni integracijom po $(1/2)\int_{-1}^1 d\mu$ i po $(1/2)\int_{-1}^1 \mu d\mu$, respektivno, su:

$$\frac{dH_x}{d\tau} = (\varphi_x + \beta)J_x - (\varphi_x + \beta)S_x \quad (2.13a)$$

$$\frac{dK_x}{d\tau} = (\varphi_x + \beta)H_x \quad (2.13b)$$

Da bismo odredili funkciju izvora, prema izrazu (2.12) moramo znati integraljen po frekvencama linije srednji intenzitet J_φ . Znači, potrebno je izvršiti integraciju sistema (2.13) po profilu linije, čime se ujedno znatno redukuje broj jednačina koje treba rešiti.

Za integrale po frekvencama koje ćemo pritom dobiti, uvedimo sledeću notaciju:

$$Q_{\varphi^n}^m(\tau) \equiv \int Q_x^m(\tau) \varphi_x^n dx \quad n \geq 1 \quad (2.14a)$$

i

$$Q_{\varphi^n}^m(\tau, \beta) \equiv \int Q_x^m(\tau) \varphi_x (\varphi_x + \beta)^{n-1} dx \quad n \geq 2, \quad (2.14b)$$

gde su

$$Q_x^m(\tau) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{x\mu}(\tau) \mu^m d\mu \quad m \geq 0$$

ugaoni momenti intenziteta zračenja reda m , a

$$\varphi^n \equiv \int \varphi_x^n dx$$

Najdirektniji način da se jednačine (2.13a,b) integrale po profilu linije, kako bi se sistem što jednostavnije zatvorio, je da se na prvu i drugu jednačinu (2.13) primene operatori: $\int \varphi_x (\varphi_x + \beta) dx$ i $\int \varphi_x dx$, respektivno. To daje novi sistem jednačina:

$$\frac{dH_{\varphi^2}(\tau, \beta)}{d\tau} = J_{\varphi^3}(\tau, \beta) - S_{\varphi^3}(\tau, \beta) \quad (2.15a)$$

$$\frac{dK_{\varphi}(\tau)}{d\tau} = H_{\varphi^2}(\tau, \beta) \quad (2.15b)$$

gde je

$$S_{\varphi^3}(\tau, \beta) = (\varphi^2\beta + \beta^2 + \varepsilon\varphi^3 + \varepsilon\beta\varphi^2)B(\tau) + (1 - \varepsilon)(\varphi^3 + \beta\varphi^2)J_{\varphi}(\tau) \quad (2.16)$$

Umesto sistema (2.15), možemo rešavati diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$\frac{d^2 K_{\varphi}}{d\tau^2} = J_{\varphi^3}(\tau, \beta) - S_{\varphi^3}(\tau, \beta) \quad (2.17)$$

Kao i u metodi PEF-ova, da bismo rešili (2.15), odnosno (2.17), neophodno je imati relacije zatvaranja, s obzirom da imamo dve jednačine (2.15a,b) a četiri nepoznate funkcije: J_{φ} , K_{φ} , $H_{\varphi^2}(\beta)$ i $J_{\varphi^3}(\beta)$. Prema tome, potrebno je definisati još dve relacije kojima će se zatvoriti sistem.

2.2.1. Prva familija iteracionih faktora. Najdirektnija relacija zatvaranja.

Slično prethodnom monohromatskom problemu, uvešćemo sada generalisani Eddingtonov faktor

$$F(\tau) \equiv \frac{K_{\varphi}(\tau)}{J_{\varphi}(\tau)} \quad (2.18)$$

koji sadrži informaciju o anizotropnosti polja zračenja (za sve frekvence u liniji) kao posledici određene vrste geometrije, nagiba u funkciji izvora i blizine granice atmosfere.

Kako u jednačini (2.17) imamo $J_{\varphi^3}(\beta)$, a u izrazu za funkciju izvora (2.16) J_{φ} , druga najdirektnija relacija zatvaranja dobija se uvođenjem faktora:

$$f_J(\tau) \equiv \frac{J_{\varphi^3}(\tau, \beta)}{J_{\varphi}(\tau)} \quad (2.19)$$

koji opisuje preraspodelu fotona po frekvencama u liniji, tj. predstavlja odnos između fotona u jezgru ($J_{\varphi^3}(\beta)$ je integral po uskom profilu φ_x^3 koji pokriva jezgro linije) i fotona u jezgru i krilima zajedno (J_{φ}).

Na taj način, dobijamo dve pomoćne relacije: $K_{\varphi}(\tau) = F(\tau)J_{\varphi}(\tau)$ i $J_{\varphi^3}(\tau, \beta) = f_J(\tau)J_{\varphi}(\tau)$ koje omogućavaju da rešimo (2.17) sa datim

graničnim uslovima. Granične uslove dobijamo koristeći istu vrstu aproksimacije. Tako, možemo definisati faktor:

$$\gamma_i \equiv \frac{H_{\varphi^2}(\beta)}{J_{\varphi}}$$

na obe granice sistema ($i = 1$ - na površini i $i = N$ dovoljno duboko u atmosferi), koji ćemo kao i faktore $F(\tau)$ i $f_J(\tau)$ odrediti na osnovu rezultata prethodne iteracije, a koji (prema (2.15b)) vodi graničnom uslovu:

$$\left(\frac{dK_{\varphi}}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_i} = \frac{\gamma(\tau_i)}{F(\tau_i)} K_{\varphi}(\tau_i) .$$

Dve nove funkcije: $F(\tau)$ i $f_J(\tau)$ zadovoljavaju sve uslove da budu dobri iteracioni faktori. Odnosi su homolognih veličina što treba da obezbedi dobru kvazi-invarijantnost. Dalje, omogućavaju dobijanje nove i tačnije funkcije izvora na jednostavan način, sličan proceduri prikazanoj na sl.3.

Predloženi metod ćemo testirati na jednom specifičnom problemu: formiranju linije u sredini konstantnih fizičkih svojstava, $B = 1$, i bez kontinualne apsorpcije, $\beta = 0$. Ovako pojednostavljen problem je potreban i dovoljan za tu namenu. Dovoljan je jer sadrži sva osnovna fizička svojstva opštijih problema. Njegovo rešenje zavisi samo od fizičkih karakteristika problema, a ne od vrednosti ulaznih podataka. Potreban je, s obzirom da su tačna, analitička rešenja ovog problema poznata, pa predstavljaju svojevrsan test kvaliteta novih numeričkih metoda. Naime, znamo da je vrednost funkcije izvora na površini $S(\tau = 0) = \sqrt{\epsilon}$ i da $S(\tau)$ raste monotono sa porastom τ , dostižući asimptotski vrednost $B = 1$ na tzv. dubini termalizacije L_T . Dubina termalizacije predstavlja onu dubinu na kojoj se polje zračenja, odnosno funkcija izvora približava svojoj ravnotežnoj vrednosti. Vrednost L_T zavisi od parametra ϵ i načina na koji je linija proširena. Za linije sa Dopplerovim profilom koje ćemo ovde razmatrati (primena metode na druge profile je sasvim direktna), L_T je reda $1/\epsilon$. Vidimo da male vrednosti parametra ϵ (velika odstupanja od LTR) impliciraju velike vrednosti dubina termalizacije, što prouzrokuje numeričke teškoće na kojima se kvalitet novog metoda

može testirati. Prvo, za dobijanje korektnog rešenja na ovim dubinama, neophodan je dobar opis polja zračenja na frekvencama u krilima linije. Drugo, potrebno je korigovati vrednost rešenja $S(\tau)$ na većim intervalima optičkih dubina.

Uzimanjem u obzir izvora kontinualne apsorpcije, $\beta \neq 0$, smanjuje se dubina termalizacije L_T (Hummer, 1968), koja je tada reda $1/\bar{\xi}$, gde je $\bar{\xi}$ dato izrazom (1.33a). Za datu vrednost parametra ε , pokazuje se da sa porastom β , L_T opada i rešenje postaje bliže uslovima LTR. To čini problem numerički lakše rešivim. Ako, dalje, svojstva sredine nisu konstantna, $B \neq const$, ponašanje funkcije izvora zavisice više od varijacije ovih svojstava nego od parametra ε . I u ovom slučaju problem je jednostavnije rešiti.

Zbog svega izloženog, izabrali smo da metodu razvijamo i testiramo na prvom od gore pomenutih problema ($B = 1$, $\beta = 0$).

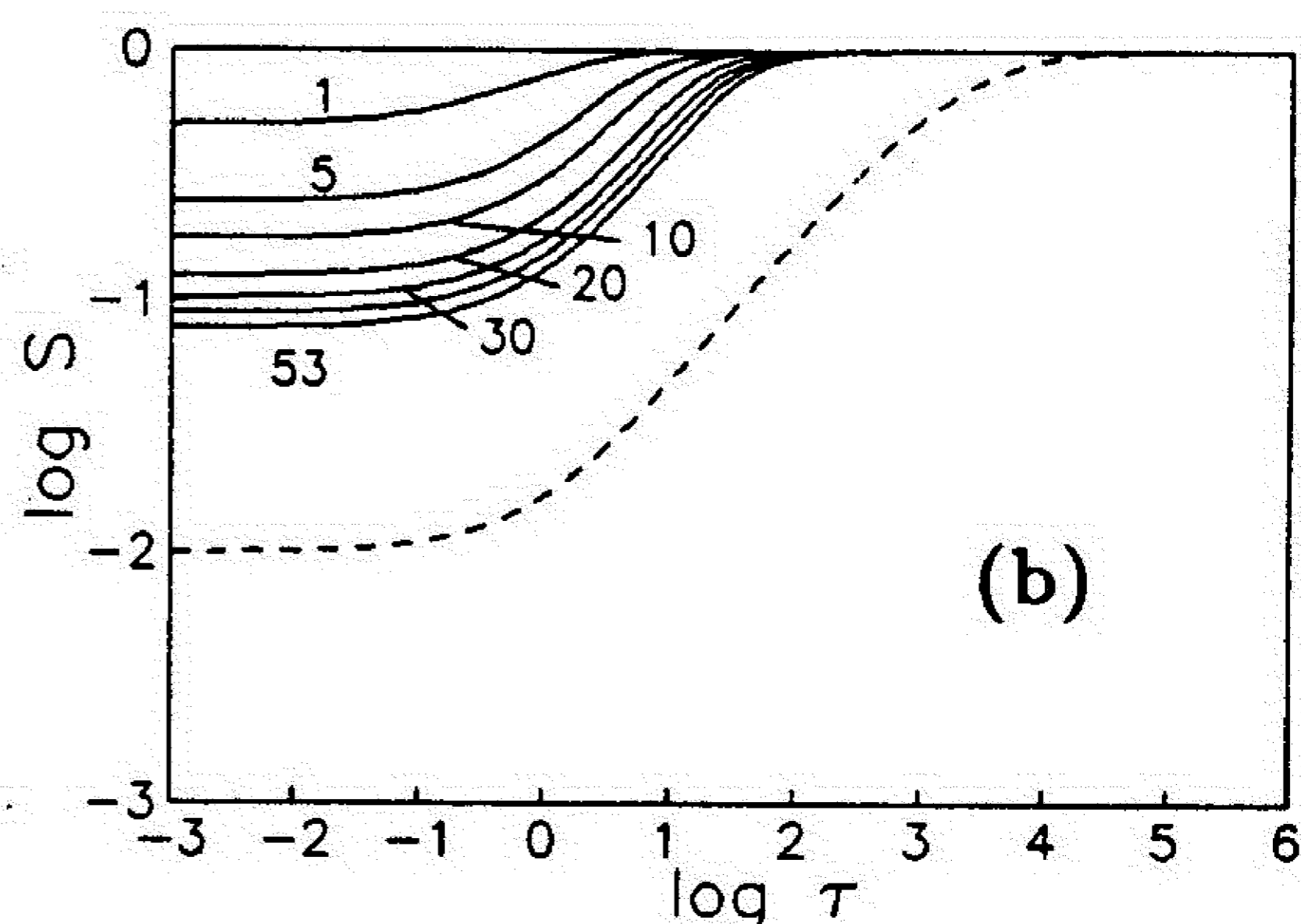
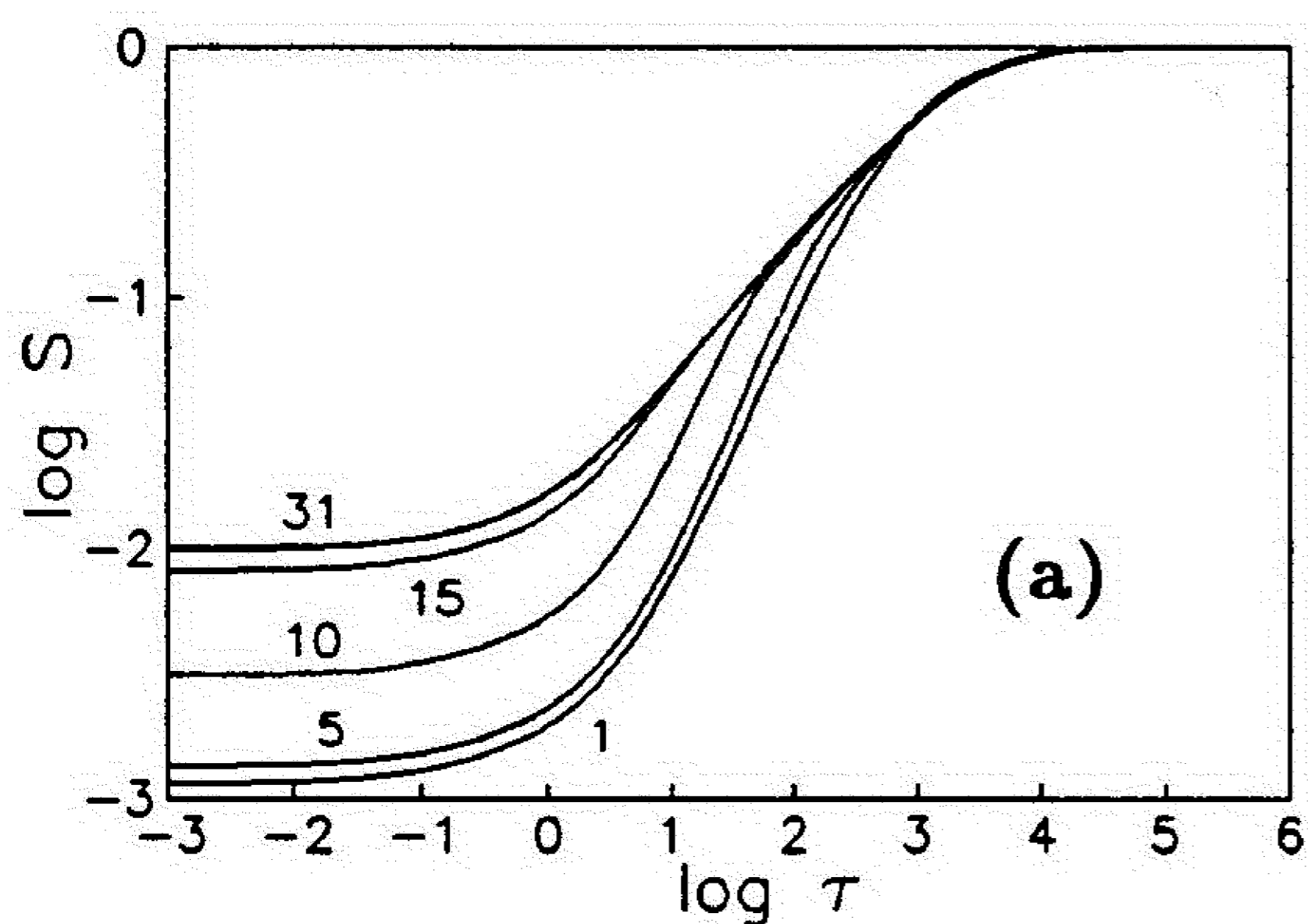
Kao kriterijum za konvergenciju, uzimamo da relativna razlika izmedju vrednosti funkcije izvora u sukcesivnim iteracijama na svim optičkim dubinama bude manja od unapred zadate vrednosti δ . Vrednost δ odgovara preciznosti rešenja koju možemo dobiti sa datim numeričkim opisom sistema. Da bismo odredili preciznost, iteracije smo započeli sa tačnom funkcijom izvora dobijenom pomoću metode diskretnih ordinata pri istim numeričkim uslovima (isti broj diskretnih tačaka). Relativna razlika izmedju polazne funkcije izvora koja je tačna i odgovarajuće funkcije izvora odredjene u prvoj iteraciji je reda 1%. Zato uzimamo da je $\delta = 1\%$, s obzirom da korekcije manje od 1% ne bi trebale uticati na rešenje.

Postavljeni problem smo rešavali za vrednosti ne-LTR parametara $\varepsilon = 10^{-2}$ i $\varepsilon = 10^{-4}$, a dobijeni rezultati prikazani su u tablici 1. Iterativnu proceduru smo započinjali sa ravnotežnom vrednošću $S = B$.

Kao što vidimo iz tablice 1., uslov za konvergenciju je ispunjen u relativno malom broju iteracija, a greška dobijenog rešenja na površini polu- beskonačnog sloja je manja od 1% u poredjenju sa tačnom vrednošću ($\sqrt{\varepsilon}$).

Tablica 1. Rešenje na površini dobijeno u naznačenom broju iteracija pri primeni faktora $F(\tau)$ i $f_J(\tau)$ (r -parametar relaksacije iterativne procedure, * označava da je iterativna procedura započeta rešenjem problema sa $\epsilon = 10^{-2}$)

ϵ	r	$S(\tau = 0)$	Br. iter.
10^{-2}	0	0.10023	18
	0.5	0.10045	11
10^{-4}	0.75	0.010067	17*
	0.75	0.010080	31



Sl.4. Funkcija izvora za $B = 1$ i $\epsilon = 10^{-4}$, dobijena metodom iteracionih faktora koja koristi $F(\tau)$ i $f_J(\tau)$ (a) i metodom Λ iteracije (b)

Kvalitet dobijenog rešenja pokazan je i na slici 4a), gde je ponašanje funkcije izvora $S(\tau)$ sa dubinom (za $\epsilon = 10^{-4}$), dato za prvu, poslednju i svaku petu iteraciju. Rešenje se već u 20-toj iteraciji gotovo potpuno poklapa sa tačnim rešenjem koje je na slikama a) i b) dato iskprekidanom linijom. Slika 4b) prikazuje rešenje istog problema dobijeno metodom obične Λ iteracije. Za istu vrednost δ , rešenje se numerički stabilizuje u 53-ćoj iteraciji, ali sa greškom 7000%! na površini. Za razliku od metoda iteracionih faktora kojim se dobra osnovna skala

procesa prenosa zračenja, dubina termalizacije, dobija već u prvoj iteraciji, metodom Λ iteracije ona se veoma sporo koriguje i ne dostiže se ni po ispunjenju kriterijuma za konvergenciju. Prethodna poredjenja jasno ukazuju na razliku u kvalitetu i brzini rešenja koja se dobijaju primenom metoda faktora iteracije sa jedne, i klasične Λ iteracije sa druge strane.

U toku iteracija se, medjutim, zbog akumulacije numeričkih grešaka, javljaju nestabilnosti u iterativnoj proceduri. Ponekad, rešenja u uzastopnim iteracijama osciluju znatno oko tačne vrednosti. Ove oscilacije se mogu sprečiti pomoću relaksacione tehnike, gde se poboljšana vrednost funkcije izvora izvodi iz njenih vrednosti u dve uzastopne iteracije (i) i ($i + 1$) na sledeći način:

$$S^{(i+1)} = (1 - r)S_{output}^{(i+1)} + rS_{input}^{(i+1)}$$

$$S_{input}^{(i+1)} = S^{(i)}$$

gde je r - relaksacioni parametar ($0 \leq r \leq 1$). (S_{input} i S_{output} označavaju polaznu i dobijenu funkciju izvora u datoj iteraciji, dok S (bez indeksa) predstavljala relaksiranu funkciju izvora - polaznu u narednoj iteraciji.)

Nestabilnosti koje se javljaju u toku iteracija su naročito izražene kod malih vrednosti ϵ . Iz tablice 1. vidimo da je za manje ϵ bilo potrebno koristiti veći relaksacioni parametar. Medjutim, za $\epsilon < 10^{-4}$ ni sa $r \geq 0.75$ (za $r = 1$ nema korekcija), konvergenciju nije moguće ostvariti.

Uopšte, odavno su poznate numeričke teškoće koje se javljaju u konvergenciji kada je rešenje dosta daleko od polaznog, kao što je to slučaj sa rešavanjem ne-LTR problema kod kojih se, prirodno, polazi od poznatog rešenja u lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži. Kako ovde takodje počinjemo iterativnu proceduru sa ravnotežnom vrednošću funkcije izvora $S = B$ (tj., rešenjem problema sa parametrom $\epsilon = 1$), na slučajeve velikih odstupanja od LTR pokušali smo primeniti tehniku Hummer-a i Voels-a (1988) koja prevazilazi teškoće ovog tipa rešavanjem problema uz postepeno smanjivanje vrednosti parametra ϵ od $\epsilon = 1$ do željene vrednosti. Drugim rečima, rešenje sa jednom vrednošću ϵ , koje zadovoljava postavljeni uslov za konvergenciju, služi kao polazno za

sledeću iterativnu proceduru sa nešto manjim parametrom ε . U tablici 1. je dato jedno takvo rešenje (označeno sa *) gde smo u rešavanju problema za $\varepsilon = 10^{-4}$ kao polazno koristili rešenje dobijeno sa $\varepsilon = 10^{-2}$. U ovom slučaju, za koji je inače bilo moguće ostvariti konvergenciju, postignuta je izvesna ušteta u broju iteracija. Medjutim, za $\varepsilon < 10^{-4}$, ni primenom ovakve tehnike (i sa manjim korakom u promeni parametra ε) nije ostvarena konvergencija.

Prema tome, ove nestabilnosti su prouzrokovane kako numeričkim opisom fizičkog sistema (diskretizacijom svih kontinualnih promenljivih: dubina, frekvenci i pravaca, i time i njihovih funkcija) tako i greškama unetih numeričkim operacijama. Ove greške mogu falsifikovati termalne izvore reda ε i tako destabilizivati problem. To se može pokazati sledećim razmatranjem.

Prepišimo jednačinu drugog reda (2.17) sa $\beta = 0$ (izostavljajući, radi jednostavnosti u notaciji, zavisnost od τ) u obliku:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} = J_\varphi^3 - \varphi^3 S \quad (2.20)$$

gde je

$$S = \varepsilon B + (1 - \varepsilon) J_\varphi .$$

Korišćenjem:

$$\frac{K_\varphi}{J_\varphi} = F \quad , \quad \frac{J_\varphi^3}{J_\varphi} = f_J \quad (2.21)$$

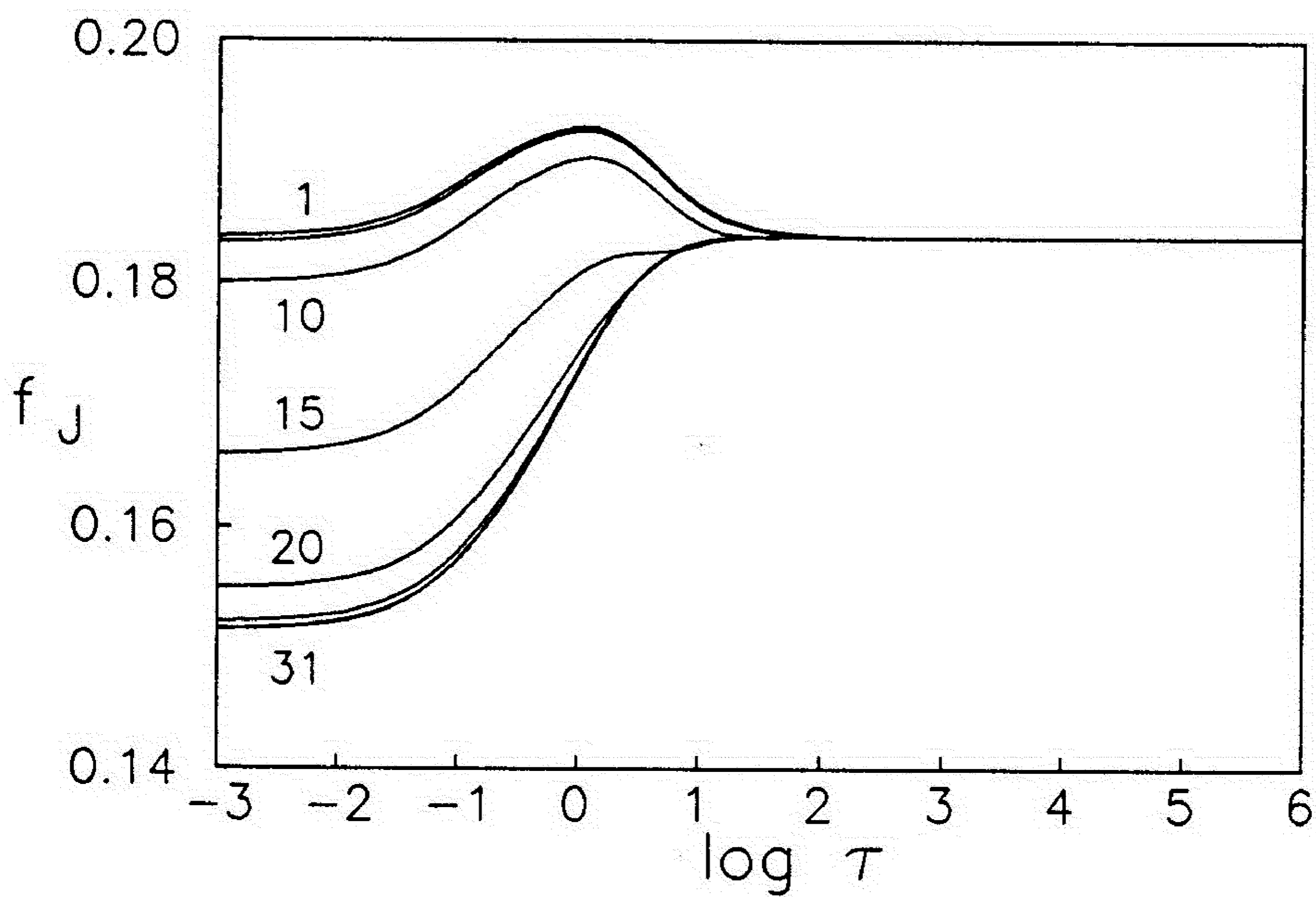
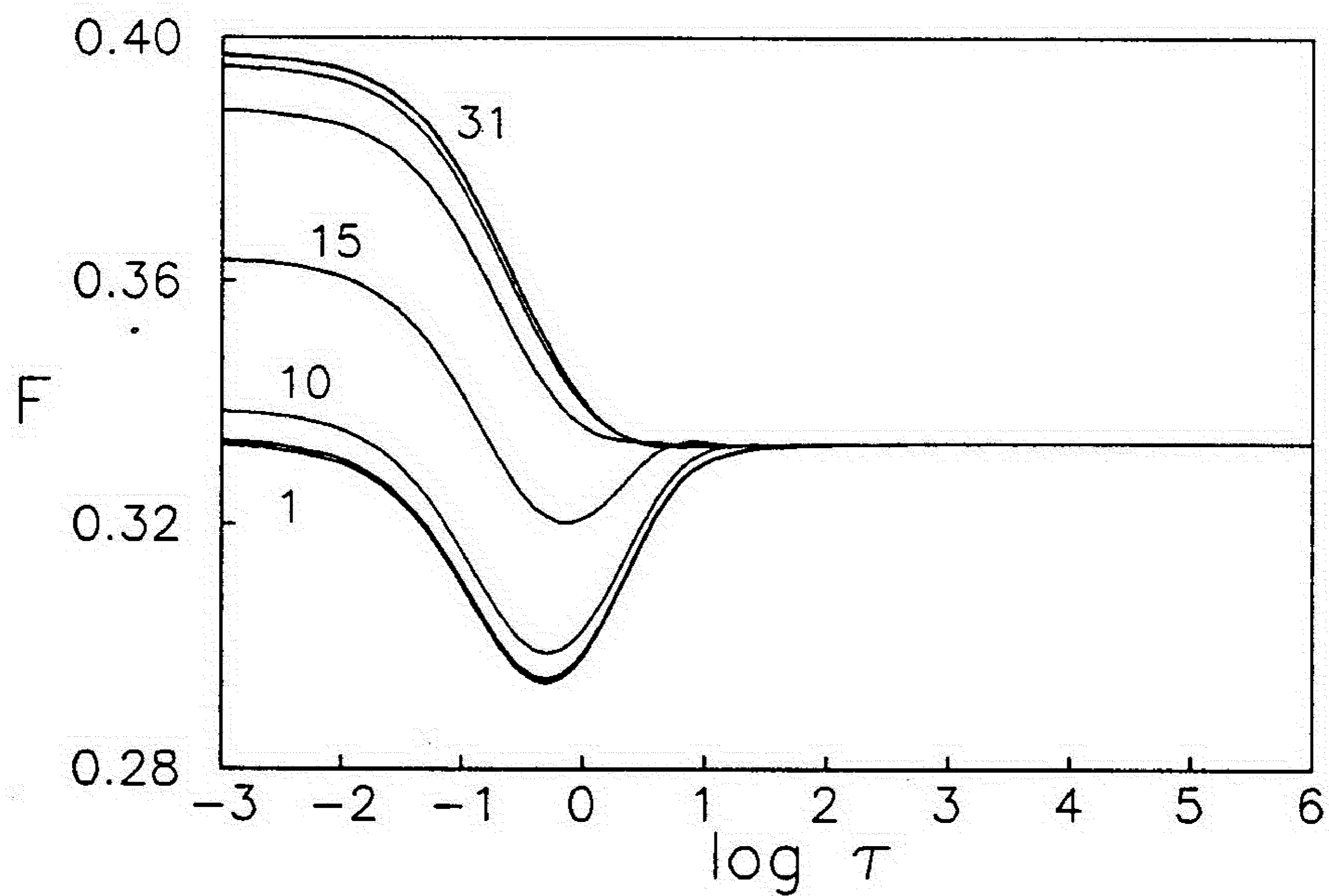
jednačina (2.20) postaje:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} = [f_J - \varphi^3(1 - \varepsilon)] J_\varphi - \varphi^3 \varepsilon B \quad (2.22)$$

Znamo da na velikim dubinama, gde važi difuzna aproksimacija, f_J teži $\varphi^3 (\approx 0.1838)$, a $F = 1/3$ (sl.5), pa se jednačina (2.22) svodi na difuznu jednačinu drugog reda:

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\varphi}{d\tau^2} = \varepsilon \varphi^3 (J_\varphi - B) .$$

Medjutim, ako u izračunavanju f_J postoje numeričke greške reda ϵ (prvi član na desnoj strani (2.22)), do ostvarenja ove situacije, tj. zadovoljenja gornje jednačine numerički neće doći (rešenje neće konvergirati).



Sl.5. Iteracioni faktori F i f_J u sredini sa $B = 1$ i $\epsilon = 10^{-4}$ u naznačenom broju iteracija

Da bismo našli mogući uzrok ovih nestabilnosti, analizirali smo sve numeričke procese koje koristimo u iterativnoj proceduri - izračunavanje intenziteta $I_{x\mu}(\tau)$ sa datom funkcijom izvora i rešavanje jednačine momenata drugog reda zatvorenoj faktorima iteracije.

Za dobijanje intenziteta $I_{x\mu}(\tau)$, jednačina prenosa sa datom funkcijom izvora $S(\tau)$ je rešavana na dva načina. Prvo je primenjeno analitičko rešenje (od sloja do sloja) sa vrednostima funkcije izvora (i njenih numeričkih izvoda) u tačkama koje odgovaraju skupu diskretnih optičkih dubina. Funkcija izvora je aproksimirana nizom paraboličnih (kubnih) lukova koji obezbeđuju kontinuitet funkcije $S(\tau)$ u ovim tačkama kao i njenih prvih izvoda. Intenziteti $I_{x\mu}(\tau)$ su računati i Feautrier metodom koja implicira paraboličnu aproksimaciju za srednji intenzitet duž pravca prostiranja zračenja $(I_x(\mu > 0, \tau) + I_x(\mu < 0, \tau))/2$ između svake tri uzastopne tačke po dubini.

U nekim slučajevima oba metoda vode istom rezultatu i istom stepenu konvergencije. Ali, u većini primera, na više teškoća se nailazi kada se koristi drugi, Feautrier metod. Razlog leži u tome, što formalno rešenje za datu funkciju izvora (1.16) predstavlja pravu fizičku simulaciju prenosa zračenja, i što je rešenje matematički korektno kada funkciju izvora aproksimiramo paraboličnim lukovima. Nasuprot tome, metod konačnih razlika kao što je Feautrier metod, koristi paraboličnu aproksimaciju za same intenzitete što unosi nove nestabilnosti.

U rešavanju jednačine momenata drugog reda (2.20), korišćeno je takodje nekoliko pristupa. Prvo, rešenje je dobijeno na implicitan način aproksimiranjem K_φ polinomom trećeg stepena između dve uzastopne tačke po dubini. Drugo, korišćen je Feautrier metod sa paraboličnom aproksimacijom za K_φ u tri uzastopne tačke. Dobijeni su isti rezultati. Pretpostavljajući da mogući uzrok nestabilnosti leži u grešci u ovoj konačnim razlikama koje su korišćene da se izračunaju izvodi u ove dve metode, jednačina drugog reda je rešena i analitički, korak po korak. Pretpostavljajući koeficijente jednačine konstantnim u sloju između dve uzastopne tačke po dubini, dobili smo rešenja u eksponencijalnom obliku.

Rezultati dobijeni gore pomenutim metodama su praktično isti što

se može videti iz Tablice 2. Ipak, analizom raznih metoda smo konstatovali da je za razliku od Feautrier metoda, kvazi-analitički metod korišćen za formalno rešenje u prvom delu iterativne procedure (kada računamo intenzitete i iteracione faktore) kompatibilan sa sva tri metoda korišćena da se reši jednačina momenata drugog reda u drugom delu iteracije.

Tablica 2. Funkcija izvora na površini $S(\tau = 0)$ dobijena korišćenjem raznih metoda za rešavanje jednačine momenata

ε	r	polinom.	Feautrier	eksponenc.	Br. iter.
10^{-2}	0	0.10023	0.10019	0.10046	18(p), 20(F), 15(e)
	0.5	0.10045	0.10057	0.10044	11 (sve tri)
10^{-4}	0.75	0.010067	0.010078	0.010099	17 (sve tri)*
	0.75	0.010080	0.010092	0.010112	31 (sve tri)

Nasuprot tome, ako se za dobijanje intenziteta koristi metod Feautrier, da bi se postigla konvergencija potrebno je rešavati i jednačinu drugog reda (jednačinu momenata) Feautrier metodom. Drugim rečima, ako koristimo paraboličnu reprezentaciju za intenzitete između svake tri uzastopne dubinske tačke, potrebno je učiniti tu istu aproksimaciju za funkciju K_{φ} kao rešenje jednačine momenata. Ova restrikcija nije potrebna kada jednačinu prenosa (običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda za svaki pravac i svaku frekvencu) rešavamo kvazi-analitičkim metodom.

Uprkos korišćenju raznih metoda za rešavanje pojedinih delova iterativnog dijagrama, spomenute nestabilnosti i dalje ostaju na dubinama termalizacije. To je, kao što smo već diskutovali, posledica greške u određivanju f_J u ovim oblastima, a koja se u toku iteracija povećava. S obzirom na dubine u kojima se nestabilnost javlja, uzrok treba pripisati lošoj reprezentaciji fotona u krilima linije koji su sadržani u raznim momentima intenziteta zračenja potrebnim za izračunavanje faktora iteracije. Numeričke greške pri izračunavanju ovih momenata mogu biti veće od odgovarajućeg doprinosa fotona u krilima linije. Sličnim razmatranjem smo ranije objasnili zašto Λ iteracija ne koriguje rešenje na velikim dubinama.

Na taj način, da bismo potvrdili gornju pretpostavku o uzroku nestabilnosti, pokušaćemo da bolje predstavimo prenos zračenja u krilima linije. Razdvajamo profil linije na dve oblasti: jezgro (c) i krila (w) čime udvostručujemo broj potrebnih momenata: $Q_{\varphi^n}^c(\tau)$ i $Q_{\varphi^n}^w(\tau)$ i iteracionih faktora.

Sada za svaku oblast u liniji imamo po jedan sistem jednačina momenata:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{\varphi^2}^c}{d\tau} &= J_{\varphi^3}^c - \varphi^{3c} S & \frac{dH_{\varphi^2}^w}{d\tau} &= J_{\varphi^3}^w - \varphi^{3w} S \\ \frac{dK_{\varphi}^c}{d\tau} &= H_{\varphi^2}^c & \frac{dK_{\varphi}^w}{d\tau} &= H_{\varphi^2}^w \end{aligned}$$

povezanih funkcijom izvora

$$S = \varepsilon B + (1 - \varepsilon)(J_{\varphi}^c + J_{\varphi}^w) .$$

Za rešavanje ova dva medjusobno povezana sistema jednačina, odnosno dve odgovarajuće diferencijalne jednačine drugog reda korišćene su iste metode kao u slučaju kada se rešava samo jedna jednačina.

Rezultati prikazani u Tablici 3. potvrđuju pretpostavke o uzroku nestabilnosti. Uvodjenje momenata i iteracionih faktora posebno za jezgro, a posebno za krila linije omogućava bržu i stabilniju konvergenciju, ostvarenu i za $\varepsilon = 10^{-6}$.

Tablica 3. Rešenja dobijena pri podeli linije na dve oblasti: jezgro - krila

ε	r	$S(\tau = 0)$	Br. iter.
10^{-2}	0	0.10017	5
10^{-4}	0.5	0.010049	9
10^{-6}	0.75	0.001003	23

Iako ovi rezultati predstavljaju značajno poboljšanje, očigledno je da neke nestabilnosti još uvek postoje, pa moramo koristiti veliki relaksacioni faktor ($r = 0.75$) za male vrednosti ε . One možda mogu nestati nekim drugim izborom granice kojom liniju delimo na dve oblasti, a koja u krajnjoj instanci može biti nov iteracioni faktor, promenljiv sa dubinom. Isto tako, nestabilnosti bi nestale podelom linije na još

veći broj oblasti. Ali, na ovaj način bismo došli do metoda diskretnih ordinata sa promenljivim težinama integracije što opet nosi numeričke teškoće koje želimo izbeći.

Naš je cilj, zapravo, da definišemo iteracione faktore za liniju u celini kojima ćemo zatvoriti i rešavati samo jednu (skalarnu) diferencijalnu jednačinu drugog reda (2.20), ali bez teškoća koje smo upravo analizirali. Ovaj cilj je, kao što smo već rekli, motivisan željom da razvijemo jednostavan metod rešavanja prenosa zračenja koji bi omogućio lakše rešavanje kompleksnijih problema u kojima je prenos zračenja povezan sa drugim fizičkim fenomenima.

2.2.2. Druga familija iteracionih faktora. Model dva fluida.

U prvom odeljku ovog poglavlja kada smo diskutovali tehniku promenljivih Eddingtonovih faktora, napomenuli smo da bi relacije koje su opštije od $K(\tau) - F(\tau)J(\tau) = 0$, mogle dati bolju konvergenciju. Tako, možemo razmatrati linearnu relaciju izmedju momenata: J , H i K ili, štaviše, izmedju J , H , K i S , s obzirom da u problemu koji ovde rešavamo S predstavlja linearnu funkciju J . Ovakav stav baziran je na pretpostavci da bi korekcije tekućeg rešenja bile bolje rasporedjene iterativnim izračunavanjem većeg broja koeficijenata nego samo jednog (kao što je (1.7)), i da bi opis anizotropnosti polja zračenja bio korektniji korišćenjem modela dva fluida, a time i dva odgovarajuća koeficijenta za ulazno i izlazno polje zračenja.

Ovo pitanje ćemo sada detaljnije razmotriti na problemu formiranja spektralnih linija. Diferencijalnu jednačinu drugog reda (2.20) ćemo rešavati sa relacijama zatvaranja koje su opštije od relacija (2.21). Razne mogućnosti će biti analizirane i diskutovane u ovom i narednim odeljcima.

Pokušajmo sada dobiti relaciju zatvaranja oblika:

$$J_{\varphi^3} = f_J J_{\varphi} + f_H H_{\varphi^2} \quad (2.23)$$

koja će zajedno sa generalisanim Eddingtonovim faktorom (2.18) zatvoriti jednačinu (2.20).

Da bismo dobili koeficijente relacije zatvaranja (2.23), zbog prisustva fluksa potrebno je uvesti u razmatranje model dva fluida kao najjednostavniji model za opisivanje procesa prenosa zračenja. Ovim modelom odvojeno se razmatraju u svakoj tački izlazno $I_{x\mu}^+(\tau)$ i ulazno $I_{x\mu}^-(\tau)$ polje zračenja, definisano na odgovarajućim intervalima μ : $(0, 1)$ i $(-1, 0)$, respektivno. Odgovarajuće integrisane veličine - momenti: J_φ^\pm , $J_{\varphi^3}^\pm$, $H_{\varphi^2}^\pm$, K_φ^\pm zadovoljavaju onda izraze:

$$J_\varphi = \frac{J_\varphi^+ + J_\varphi^-}{2}, \quad J_{\varphi^3} = \frac{J_{\varphi^3}^+ + J_{\varphi^3}^-}{2}, \quad H_{\varphi^2} = \frac{H_{\varphi^2}^+ - H_{\varphi^2}^-}{2}, \quad K_\varphi = \frac{K_\varphi^+ + K_\varphi^-}{2} \quad (2.24)$$

S obzirom na momente u (2.23), najdirektniji način da se definišu iteracioni faktori je sledeći:

$$\alpha^\pm \equiv \frac{J_{\varphi^3}^\pm}{J_\varphi^\pm}, \quad \theta^\pm \equiv \frac{H_{\varphi^2}^\pm}{J_\varphi^\pm} \quad (2.25)$$

Koristeći ove faktore u izrazu za J_{φ^3} (jedn. (2.24)), imamo:

$$J_{\varphi^3} = \frac{\alpha^+}{2} [\lambda^+ J_\varphi^+ + (1 - \lambda^+) \frac{H_{\varphi^2}^+}{\theta^+}] + \frac{\alpha^-}{2} [\lambda^- J_\varphi^- + (1 - \lambda^-) \frac{H_{\varphi^2}^-}{\theta^-}] \quad (2.26)$$

gde su λ^+ i λ^- težinski parametri koji određuju doprinos različitih momenata, a koji, da bi se iz (2.26) dobila relacija (2.23), moraju da zadovolje sledeće izraze:

$$\alpha^+ \lambda^+ = \alpha^- \lambda^-$$

$$\frac{\alpha^+(1 - \lambda^+)}{\theta^+} = -\frac{\alpha^-(1 - \lambda^-)}{\theta^-} \quad (2.26')$$

Korišćenjem (2.26') u (2.26) i poredjenjem koeficijenata uz J_φ i H_{φ^2} u (2.23) i (2.26), f_J i f_H se mogu izraziti preko faktora α^\pm i θ^\pm na sledeći način:

$$f_J = \alpha^+ \lambda^+ = \frac{\alpha^+ \theta^- + \alpha^- \theta^+}{\theta^+ + \theta^-}$$

$$f_H = \frac{\alpha^+(1 - \lambda^+)}{\theta^+} = \frac{\alpha^+ - \alpha^-}{\theta^+ + \theta^-} \quad (2.27)$$

Drugu familiju iteracionih faktora tako čine: Eddingtonov faktor $F(\tau)$, dva "faktora forme" $\alpha^\pm(\tau)$ i dva "faktora pravca/forme" $\theta^\pm(\tau)$. Koeficijenti relacije zatvaranja, f_J i f_H , se lako iz njih izvode. Sa relacijom zatvaranja (2.23), jednačina momenata drugog reda (2.20) postaje:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} - f_H \frac{dK_\varphi}{d\tau} - \frac{f_J - \varphi^3(1 - \varepsilon)}{F} K_\varphi = -\varphi^3 \varepsilon B. \quad (2.28)$$

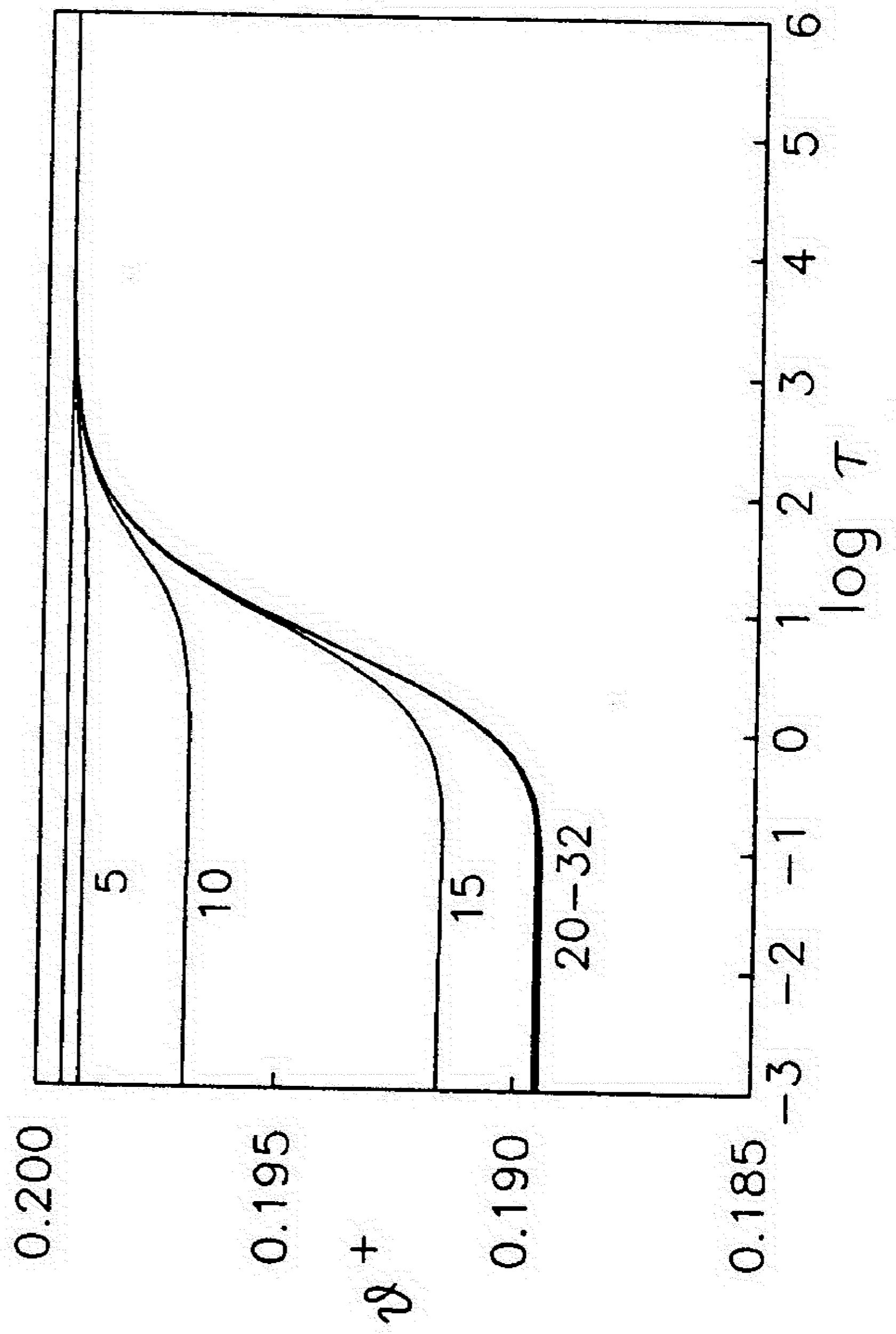
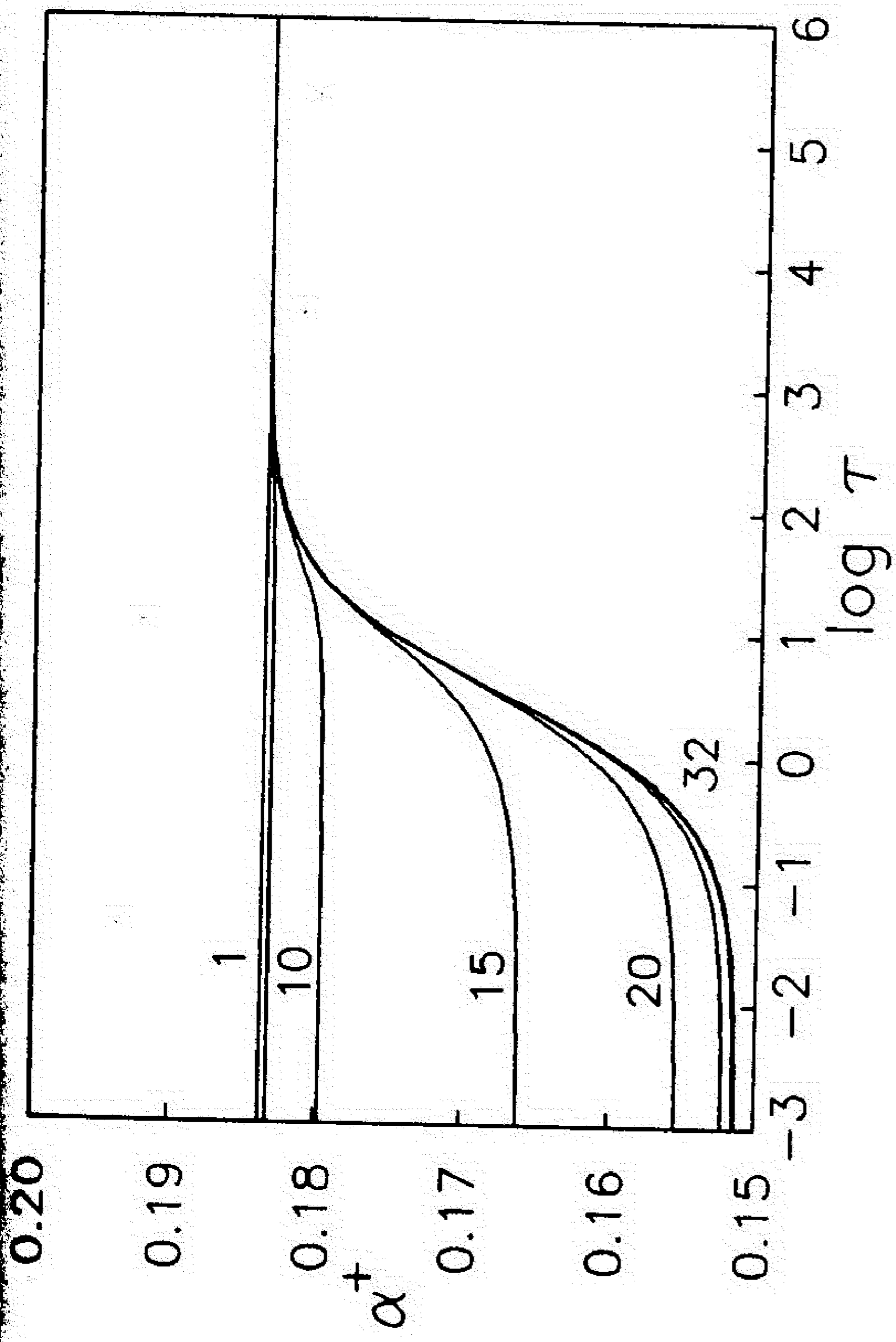
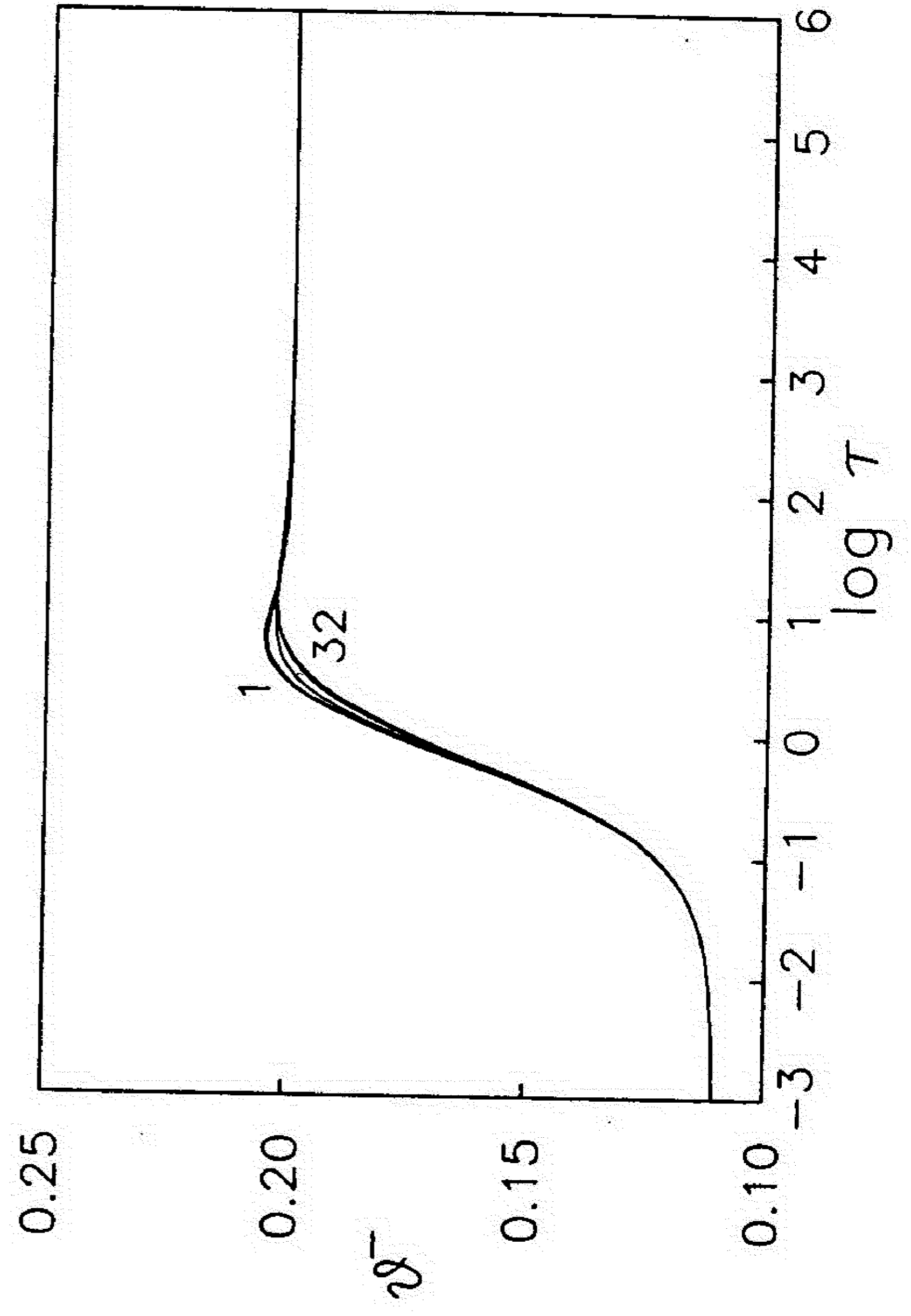
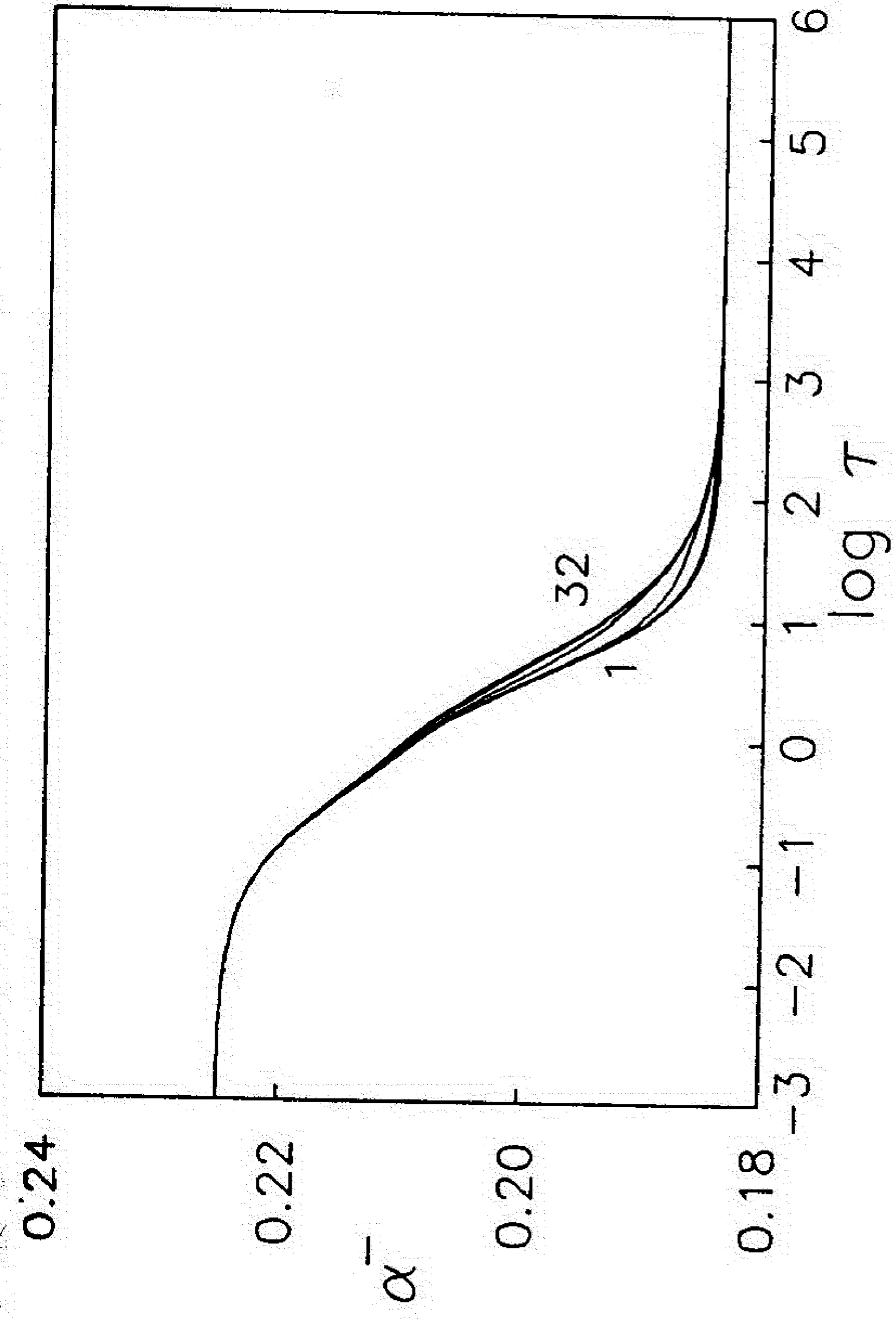
Sa ovom familijom iteracionih faktora i novom definicijom f_J , mogli bismo očekivati da će numeričke greške pri izračunavanju f_J biti manje nego u prethodnom slučaju i da će se prema tome redukovati nestabilnosti na velikim optičkim dubinama. Štaviše, i da će novi član $dK_\varphi/d\tau$ imati ulogu prigušenja u prostiranju nestabilnosti.

Tablica 4. Rešenje na površini i broj iteracija pri primeni druge familije iteracionih faktora (* označava početak iterativne procedure sa rešenjem za $\varepsilon = 10^{-2}$)

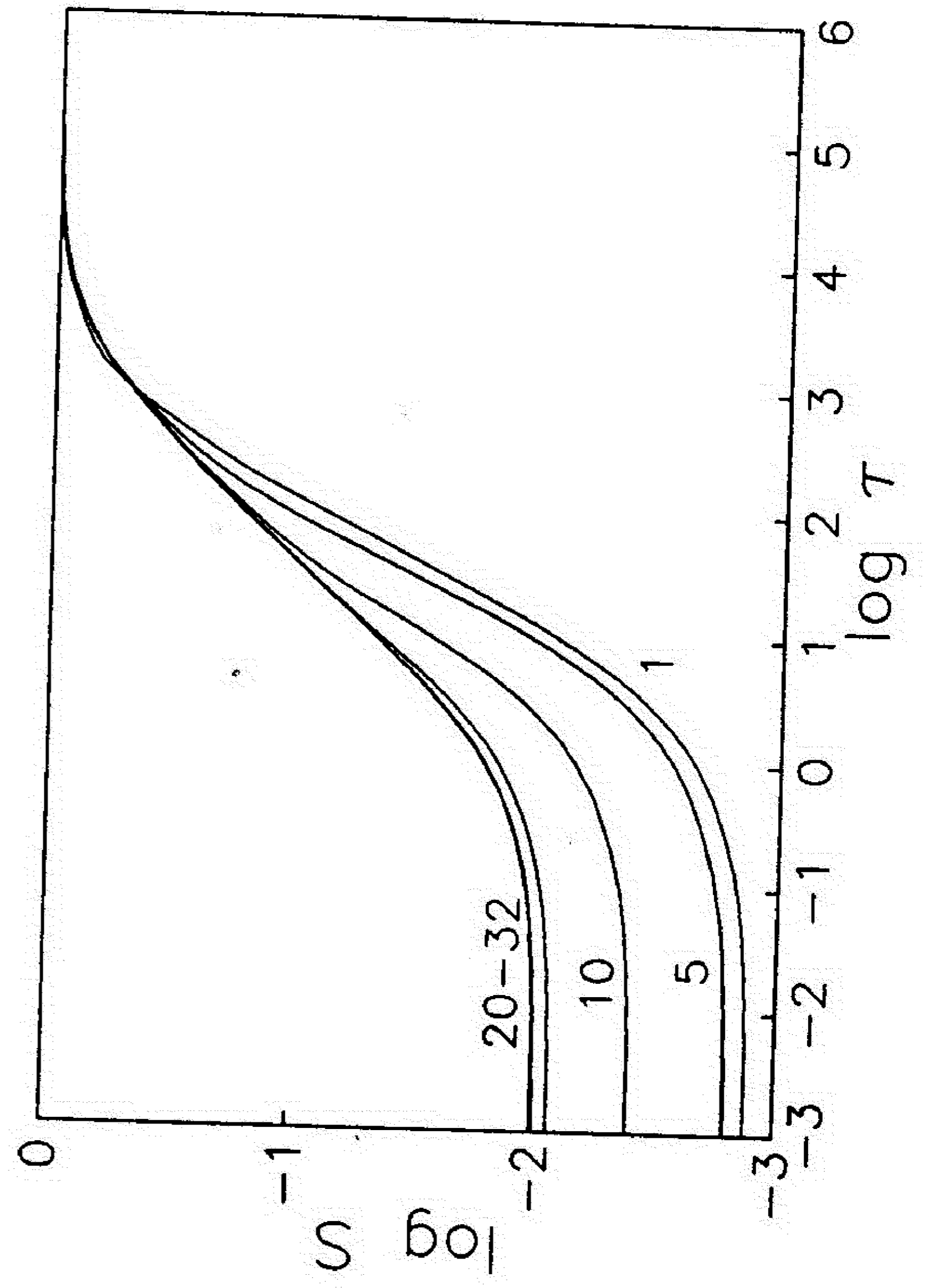
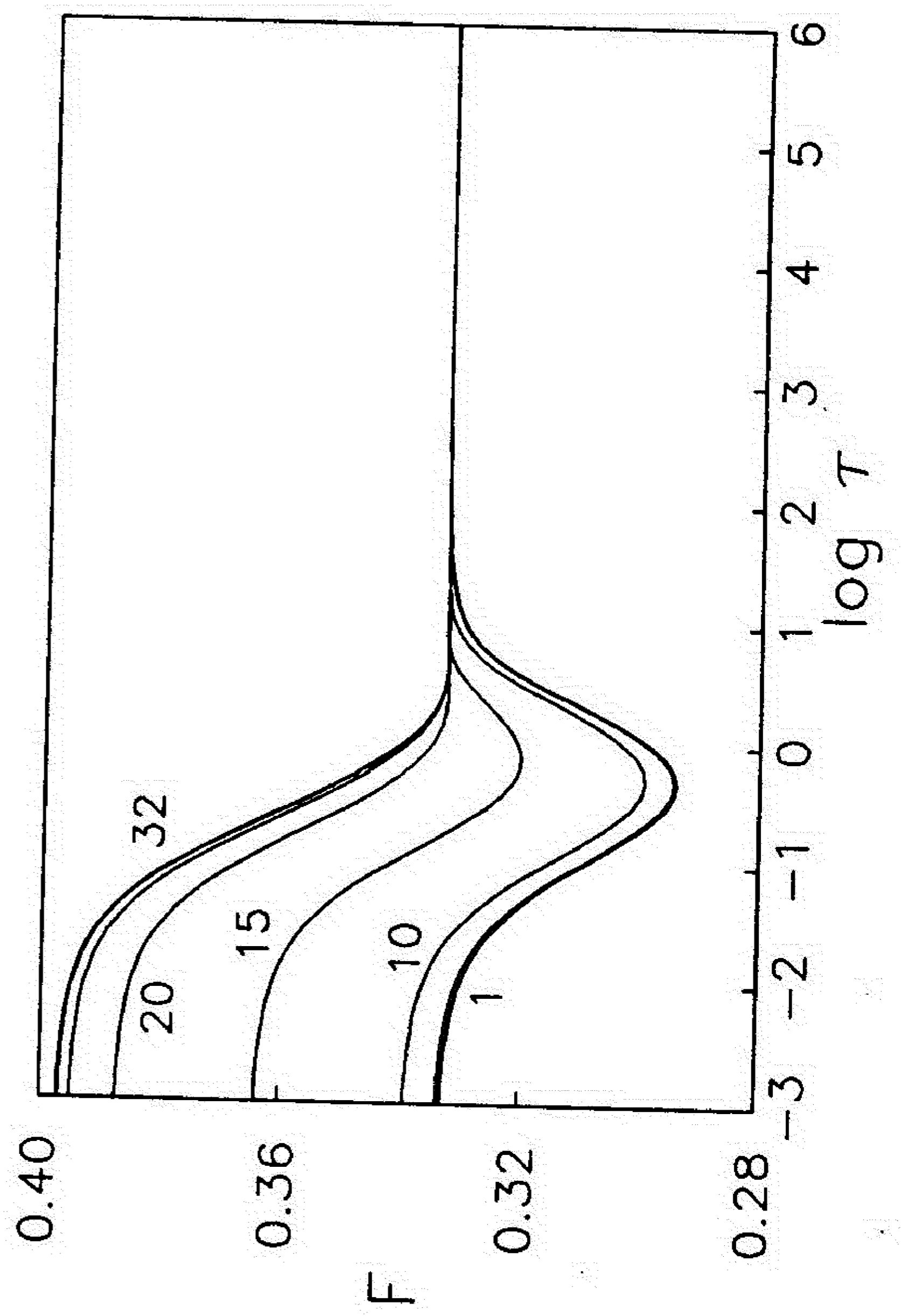
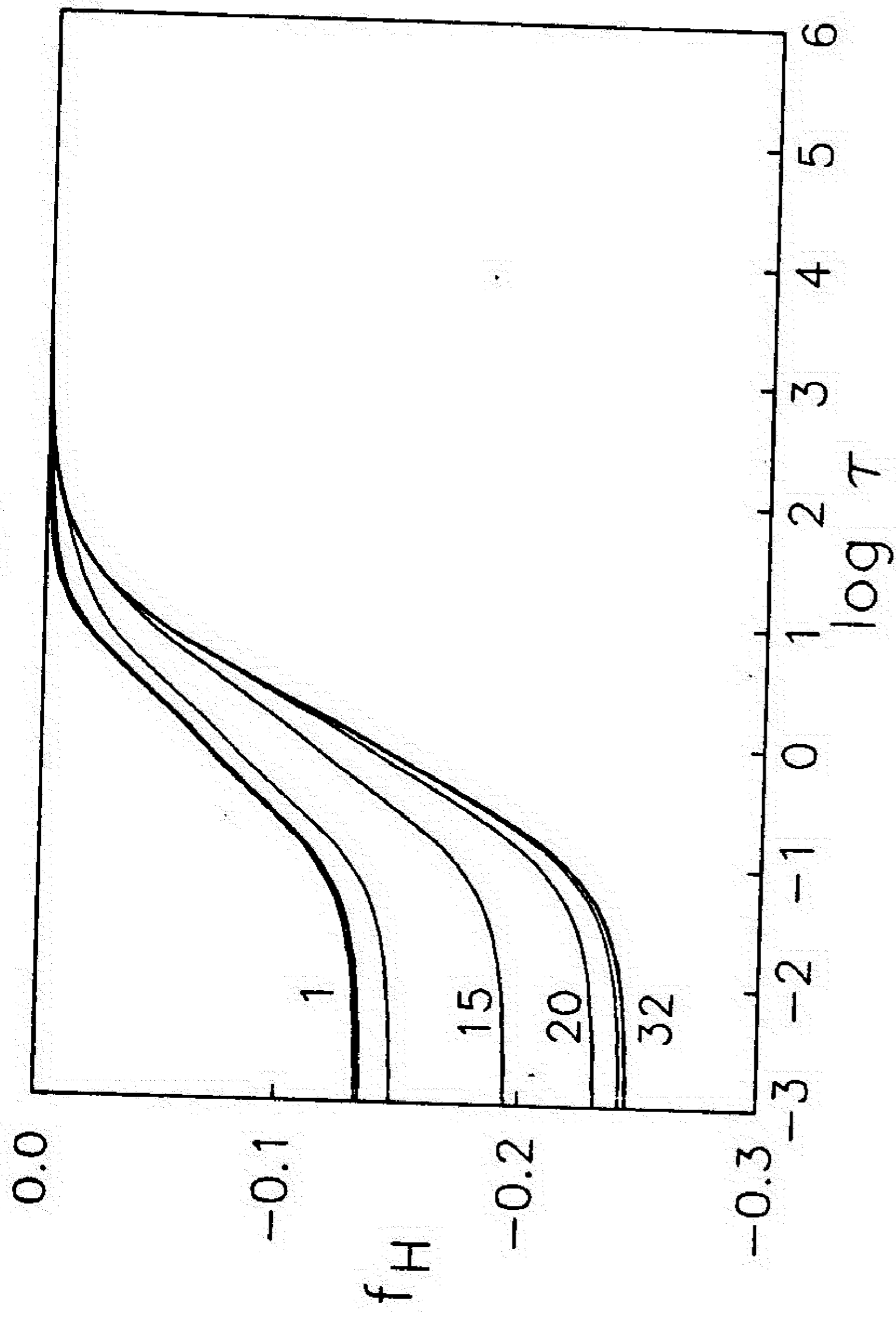
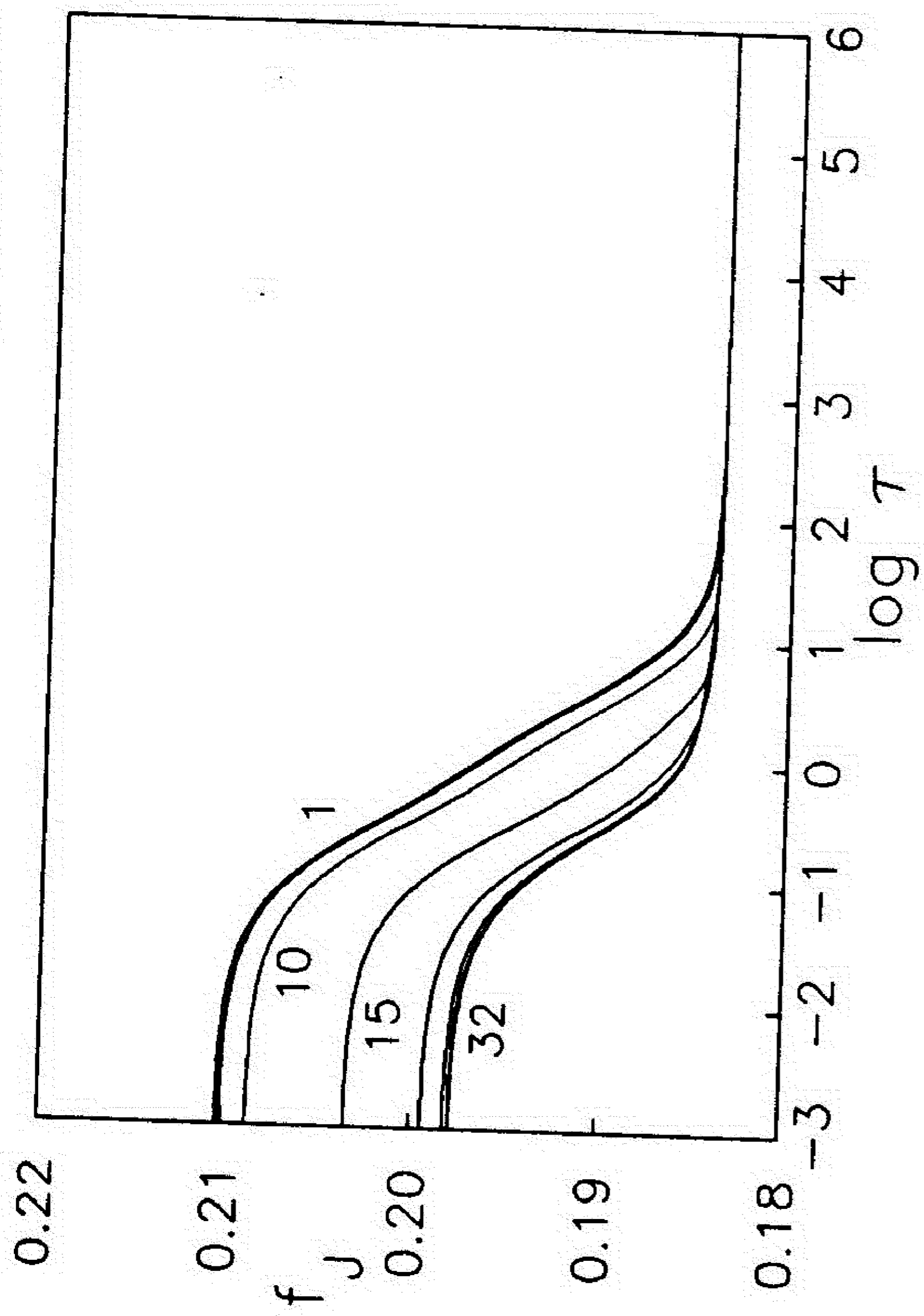
ε	r	$S(\tau = 0)$	Br. iter.
10^{-2}	0	0.09998	13
	0.5	0.10037	11
10^{-4}	0.75	0.010048	17*
	0.75	0.010065	32

Medjutim, rezultati, prikazani u tablici 4., praktično su isti kao u slučaju korišćenja prve familije faktora (2.21). Ponašanje iteracionih faktora α^\pm, θ^\pm , koeficijenata relacija zatvaranja f_J, f_H, F i rešenja (funkcije izvora) sa dubinom u sredini sa $B = 1$ i $\varepsilon = 10^{-4}$ ilustrovano je slikama 6 i 7.

Gotovo isti rezultat koji smo dobili primenom druge familije faktora posledica je činjenice da smo poboljšali samo opis anizotropnosti polja zračenja (uvodjenjem modela dva fluida), ali ne i opis preraspodele fotona u jezgru i krilima linije.



Sl.6. Iteracioni faktori α^\pm i θ^\pm u sredini sa $B = 1$ i $\epsilon = 10^{-4}$ u naznačenom broju iteracija



Sl.7. Koeficijenti relacija zatvaranja f_J , f_H i F i funkcija izvora S u sredini sa $B = 1$ i $\epsilon = 10^{-4}$ u naznačenom broju iteracija

Napomenimo ovde postojanje još jedne mogućnosti da se definišu faktori iteracije pri upotrebi modela dva fluida. Naime, podela polja zračenja na ulazni i izlazni fluid može se, umesto na jednačine momenta (2.20), direktno primeniti na jednačine prenosa zračenja za svaku frekvencu i svaki pravac:

$$\pm \frac{dI_{x,\mu}^{\pm}}{d\tau} = \varphi_x(I_{x,\mu}^{\pm} - S) \quad (2.29)$$

Korišćenje μ -integracije na intervalu (0,1) i integracije po frekvencama u liniji dovodi do jednačina za svaki od fluida posebno:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{\varphi}^{+}}{d\tau} &= J_{\varphi^2}^{+} - \varphi^2 S \\ -\frac{dH_{\varphi}^{-}}{d\tau} &= J_{\varphi^2}^{-} - \varphi^2 S \end{aligned} \quad (2.30)$$

Kako je

$$S = \varepsilon B + (1 - \varepsilon)J_{\varphi} \quad ,$$

a J_{φ} je dato jednačinom (2.24), dve jednačine (2.30) povezane su izvornim članom. Kao i ranije, potrebna nam je dopunska informacija kojom ćemo zatvoriti sistem, tj. potrebni su iteracioni faktori. U ovom slučaju to su:

$$\alpha^{\pm} \equiv \frac{J_{\varphi^2}^{\pm}}{J_{\varphi}^{\pm}}$$

"faktori forme" i

$$\theta^{\pm} \equiv \frac{H_{\varphi}^{\pm}}{J_{\varphi}^{\pm}}$$

"faktori pravca".

Numerički, ovaj model je isti kao prethodni. Ovde bi se eventualno mogao očekivati bolji opis doprinosa pojedinih delova linije funkciji izvora, jer su sada faktori forme α^{\pm} definisani integralima intenziteta po širem profilu φ_x^2 . Time bi (za razliku od faktora (2.25) gde je integracija vršena po uskom profilu φ_x^3), doprinos fotona u krilima linije trebao biti bolje numerički odvojen od opisa prenosa energije fotonima u jezgru. Medjutim, dobijeni rezultat je isti, a izbor jedne ili druge definicije faktora zavisiće samo od izbora vrste diferencijalnih jednačina koje treba rešiti (jednačinu (2.28) ili sistem (2.30)).

2.2.3. Najopštija relacija zatvaranja

Upravo smo videli da iteracioni faktori izvedeni iz boljeg opisa anizotropnosti polja zračenja nisu doveli do stabilnije konvergencije.

Sada ćemo uzeti u obzir različite doprinose fotona u jezgru i krilima linije, koristeći najopštiju relaciju zatvaranja u obliku:

$$J_{\varphi^3} = f_J J_{\varphi} + f_H H_{\varphi^2} + f_S S \quad . \quad (2.32)$$

Zadržaćemo model dva fluida koji tretira nezavisno izlazni $I_{x\mu}^+(\tau)$ i ulazni intenzitet $I_{x\mu}^-(\tau)$ polja zračenja i njegove odgovarajuće momente. Iz formalnog rešenja jednačine prenosa za plan-paralelni, polu-beskonačni sloj imamo:

$$I_{x\mu}^+(\tau) = S(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \left(\frac{dS}{d\tau} \right) e^{-(t-\tau)\varphi_z/\mu} dt$$

$$I_{x\mu}^-(\tau) = S(\tau)(1 - e^{-\tau\varphi_z/\mu}) - \int_0^{\tau} \left(\frac{dS}{d\tau} \right) e^{-(\tau-t)\varphi_z/\mu} dt \quad .$$

Gornje relacije će nam poslužiti da definišemo glavni ili "lokalni" deo polja zračenja na sledeći način:

$$I_{x\mu}^{o+}(\tau) = S(\tau)$$

$$I_{x\mu}^{o-}(\tau) = S(\tau)(1 - e^{-\tau\varphi_z/\mu}) \quad . \quad (2.33)$$

Ideja je da eksplicitnim izdvajanjem doprinosa lokalne funkcije izvora polju zračenja, korekcije rešenja vršimo samo iterativnim određivanjem njegovog "ne-lokalnog" dela, čime bi se numerički pravilno tretirao upravo taj deo polja zračenja u linijama koji aktivno učestvuje u prenosu energije. Vidimo da je "lokalni" deo, po definiciji, jednak funkciji izvora (u razmatranoj tački sredine) pomnoženoj poznatim koeficijentom. Na taj način, pri izračunavanju intenziteta sa datom funkcijom izvora (u prvom delu svake iteracije), možemo direktno dobiti tzv. "ne-lokalne" delove polja zračenja $\tilde{I}_{x\mu}^+(\tau)$ i $\tilde{I}_{x\mu}^-(\tau)$ kao razliku ukupne i "lokalne" vrednosti:

$$\tilde{I}_{x\mu}^+(\tau) = I_{x\mu}^+(\tau) - S(\tau)$$

$$\tilde{I}_{x\mu}^-(\tau) = I_{x\mu}^-(\tau) - S(\tau)(1 - e^{-\tau\varphi_z/\mu}) \quad , \quad (2.34)$$

a time i odgovarajuće "ne-lokalne" momente. Kao u prethodnom odeljku (jedm. (2.25)) i sada možemo definisati iteracione faktore:

$$\alpha^{\pm} \equiv \frac{\tilde{J}_{\varphi^3}^{\pm}}{\tilde{J}_{\varphi}^{\pm}} \quad \theta^{\pm} \equiv \frac{\tilde{H}_{\varphi^2}^{\pm}}{\tilde{J}_{\varphi}^{\pm}}$$

ali sada kao odnose ne-lokalnih delova polja zračenja. Koristeći (2.34) i definiciju odgovarajućih momenata (2.14a), ove faktore možemo prepisati u obliku:

$$\begin{aligned} \alpha^+ &\equiv \frac{J_{\varphi^3}^+ - S\varphi^3}{J_{\varphi}^+ - S} & \alpha^- &\equiv \frac{J_{\varphi^3}^- - S(\varphi^3 - M_{03})}{J_{\varphi}^- - S(1 - M_{01})} \\ \theta^+ &\equiv \frac{H_{\varphi^2}^+ - S\frac{\varphi^2}{2}}{J_{\varphi}^+ - S} & \theta^- &\equiv \frac{H_{\varphi^2}^- - S(\frac{\varphi^2}{2} - M_{11})}{J_{\varphi}^- - S(1 - M_{01})} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ovde su $M_{mn}(\tau)$ integro-eksponencijalne funkcije integraljene po profilu linije:

$$M_{mn}(\tau) \equiv \int \varphi_x^n dx \int_0^1 d\mu \mu^m e^{-\tau\varphi_x/\mu} = \int \varphi_x^n E_{m+2}(\varphi_x, \tau) dx$$

Relacija zatvaranja za nelokalni deo momenata:

$$\tilde{J}_{\varphi^3} = f_J \tilde{J}_{\varphi} + f_H \tilde{H}_{\varphi^2} \quad , \quad (2.36)$$

ima isti oblik kao (2.23), pri čemu su koeficijenti f_J i f_H definisani sa (2.27).

Relaciju zatvaranja za ukupne momente, (2.32) (u kojoj figuriše i nova funkcija izvora), dobijamo zamenom izraza za ne-lokalni deo momenata:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\varphi^3} &= J_{\varphi^3} - S[\varphi^3 - \frac{1}{2}M_{03}] \\ \tilde{J}_{\varphi} &= J_{\varphi} - S[1 - \frac{1}{2}M_{01}] \\ \tilde{H}_{\varphi^2} &= H_{\varphi^2} - \frac{1}{2}M_{12}S \end{aligned} \quad (2.37)$$

izraz (2.36). Tako dobijamo relaciju:

$$J_{\varphi^3} - \varphi^3 S = f_J(J_{\varphi} - S) + f_H H_{\varphi^2} + f_S S \quad , \quad (2.38)$$

u kojoj novi koeficijent f_S , dat izrazom:

$$f_S(\tau) = \frac{1}{2}[f_J M_{01} - M_{03} - f_H M_{12}] , \quad (2.38)$$

na velikim optičkim dubinama teži nuli ($M_{mn}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$) (sl.13 i 14).

Sa (2.38), diferencijalna jednačina drugog reda (2.20) postaje:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} = f_J(J_\varphi - S) + f_H H_\varphi^2 + f_S S , \quad (2.40)$$

i potpuno je zatvorena klasičnom Eddingtonovom relacijom:

$$K_\varphi(\tau) = F(\tau)J_\varphi(\tau) .$$

Na velikim optičkim dubinama gde $f_H(\tau) \rightarrow 0$ i $f_S(\tau) \rightarrow 0$ (difuzni režim), (2.40) se svodi na difuznu jednačinu:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} = f_J(J_\varphi - S) = f_J \varepsilon (J_\varphi - B) \quad (2.41)$$

sa f_J koje teži φ^3 .

Greške u odredjivanju f_J ne utiču na rešenje na onako dramatičan način kao što je to bio slučaj sa faktorima (2.21) i asimptotskim oblikom jednačine (2.22). One samo neznatno mogu da modifikuju skalnu varijaciju rešenja u difuznom režimu ($\approx 1/\sqrt{\varphi^3 \varepsilon}$).

Ako jednačinu (2.40) prepisemo u obliku:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} - f_H(\tau) \frac{dK_\varphi}{d\tau} - \frac{\varepsilon f_J(\tau) + (1 - \varepsilon) f_S(\tau)}{F(\tau)} K_\varphi(\tau) = -(f_J(\tau) - f_S(\tau)) \varepsilon B , \quad (2.42)$$

jasno možemo uočiti različite režime prenosa zračenja u problemu formiranja linija i njihove karakteristične dužine. Kada je $\varepsilon f_J > (1 - \varepsilon) f_S$ (na velikim optičkim dubinama) nailazimo na difuzni režim sa pomenutom dubinom difuzije $\approx 1/\sqrt{\varphi^3 \varepsilon}$. Kada je $\varepsilon f_J < (1 - \varepsilon) f_S$, imamo tzv. kinetički režim, sa klasičnom dubinom termalizacije definisanom relacijom $f_S(L_T) = \varepsilon f_J(L_T)$. Naime, koeficijent f_S sadrži frekventno integrisane integro-eksponencijalne funkcije koje tačno reprodukuju kinetičko ponašanje prenosa zračenja, a koje smo eksplicitno uveli definicijom iteracionih

faktora (2.35). Definisanje iteracionih faktora u skladu sa fizičkim karakteristikama problema trebalo bi da obezbedi veoma kvalitetnu iterativnu proceduru.

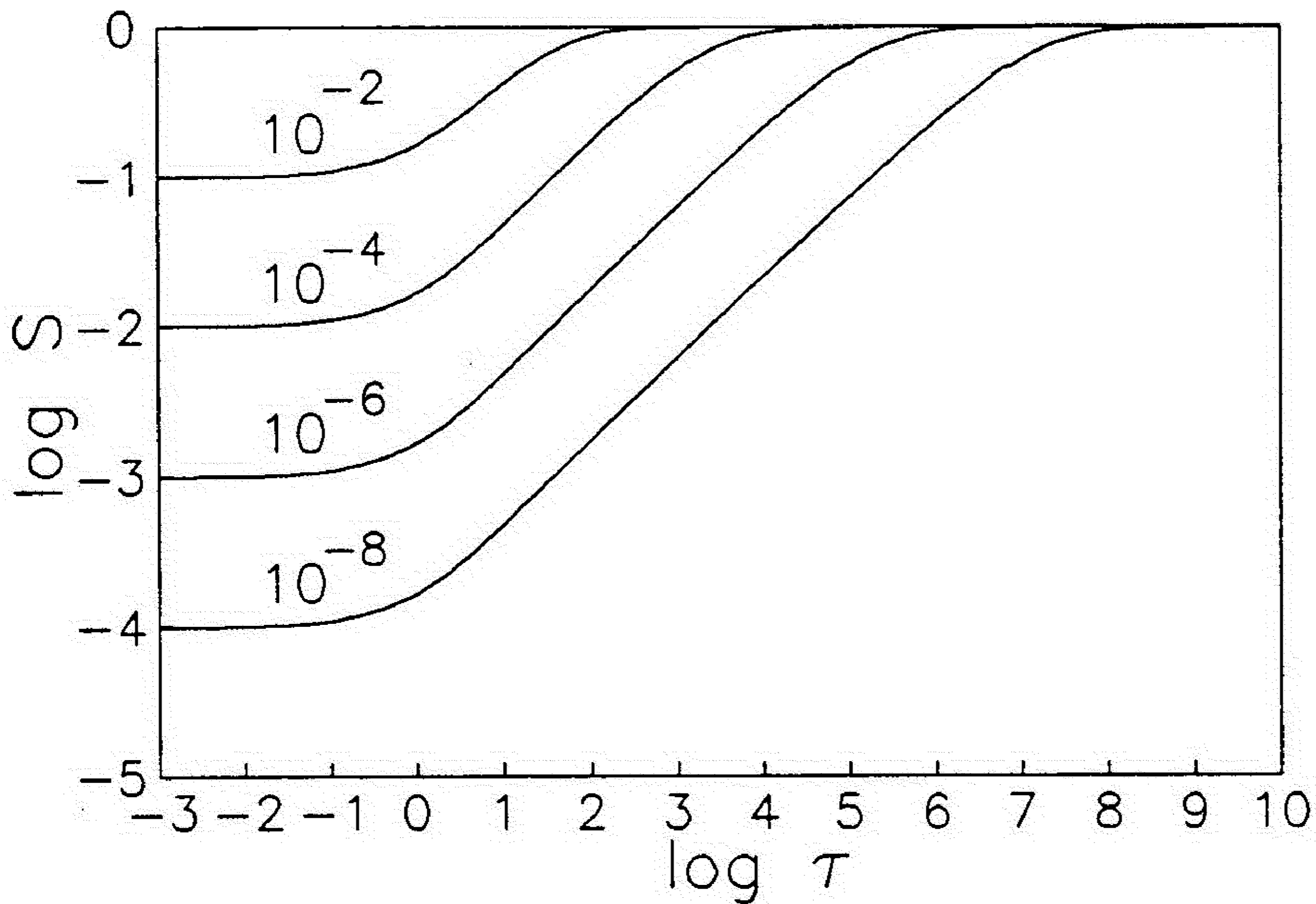
Dobijeni rezultati potvrđuju očekivanja. U tablici 5. data su rešenja na površini polu-beskonačnog sloja sa $B = 1$ i četiri vrednosti parametra $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$. Kao što vidimo, rešenja su dobijena u izuzetno malom broju iteracija čak i za veoma velika odstupanja od uslova LTR (napr., 10 iteracija je potrebno da se, polazeći od ravnotežnog (LTR) rešenja, dobije rešenje za $\varepsilon = 10^{-8}$). Potsetimo se da iterativni proces prekidamo kada je relativna razlika δ između funkcija izvora u dve sukcesivne iteracije manja od 1%. Greška rešenja dobijenog sa tim uslovom nije veća od 1%.

Tablica 5. Rešenja na površini polu-beskonačnog sloja ($B = 1$) dobijena korišćenjem najopštije relacije zatvaranja.

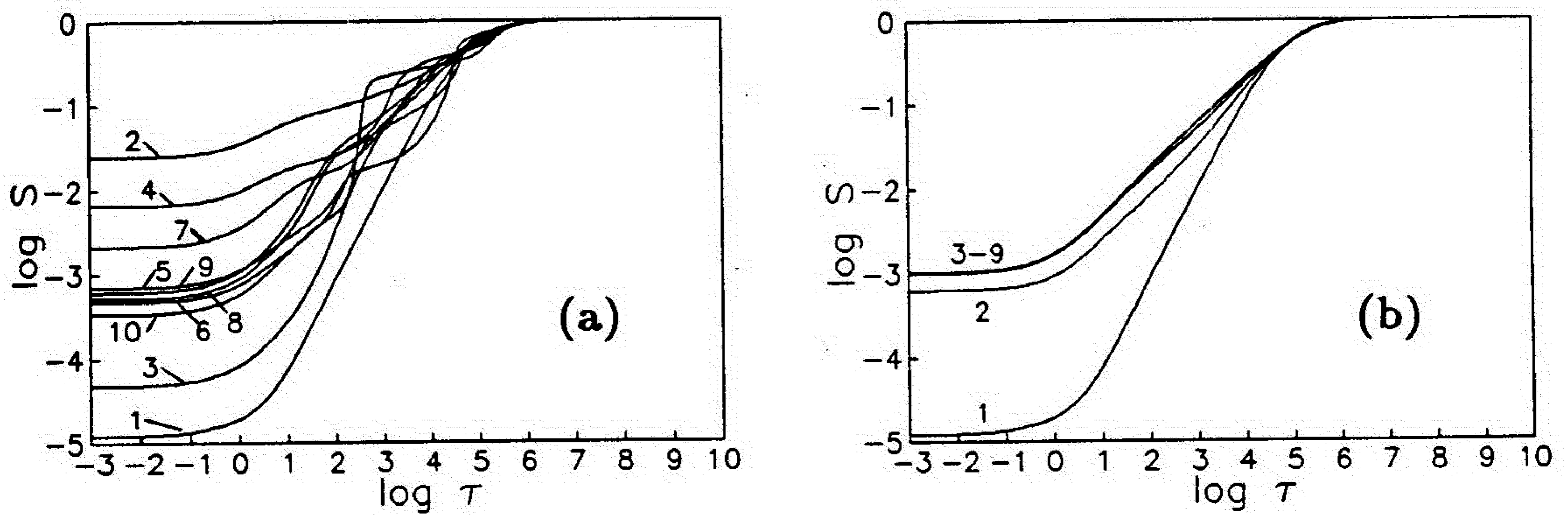
ε	r	$S(\tau = 0)$	Br. iter.
10^{-2}	0	0.996 (-1)	5
10^{-4}	0	0.997 (-2)	6
10^{-6}	0.5	0.992 (-3)	9
10^{-8}	0.5	0.989 (-4)	10

Funkcije izvora dobijene za razne vrednosti parametra ε su prikazane na sl.8. To su već dobro poznata rešenja koja se mogu naći, napr., u radu Avretta i Hummera (1965, sl.2).

Za $\varepsilon \geq 10^{-4}$ rešenja su dobijena direktno (bez relaksacije) uz veliku stabilnost i brzinu konvergencije. Medjutim, rešavajući problem za $\varepsilon = 10^{-6}$, našli smo da rešenja osciluju znatno oko tačne vrednosti, kao što je pokazano na sl.9a. Da bismo sprečili ove oscilacije i time ubrzali konvergenciju, najprirodniji put je da uzmemo srednju vrednost između ulazne (input) i dobijene (output) vrednosti rešenja za svaku iteraciju. Na taj način, za slučajeve $\varepsilon \leq 10^{-6}$ koristili smo relaksaciju $r = 0.5$ koja vodi stabilnom i brzom rešenju (sl.8 i 9b).

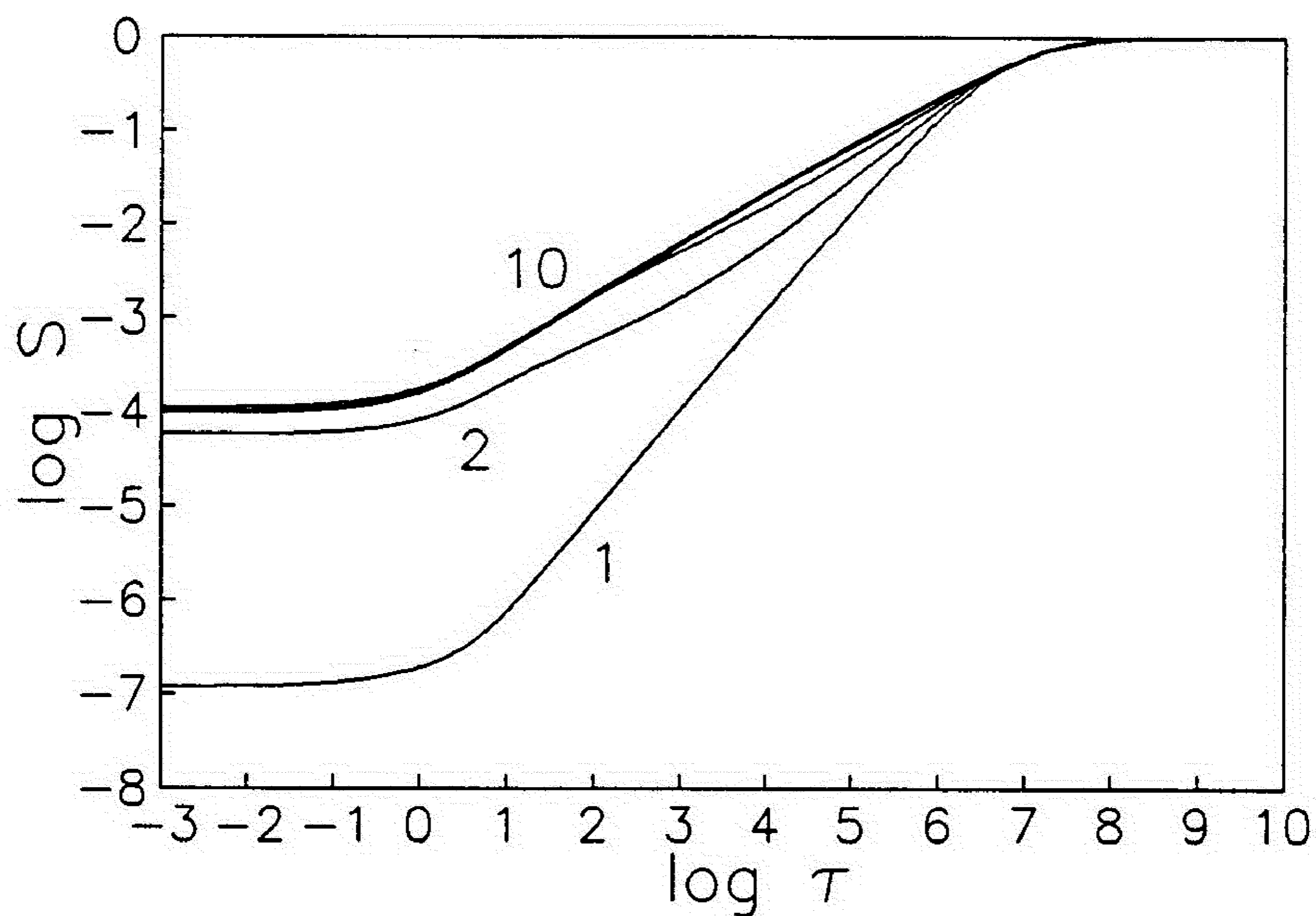


Sl.8. Funkcija izvora za razne vrednosti parametra ϵ u sredini konstantnih svojstava $B = 1$.

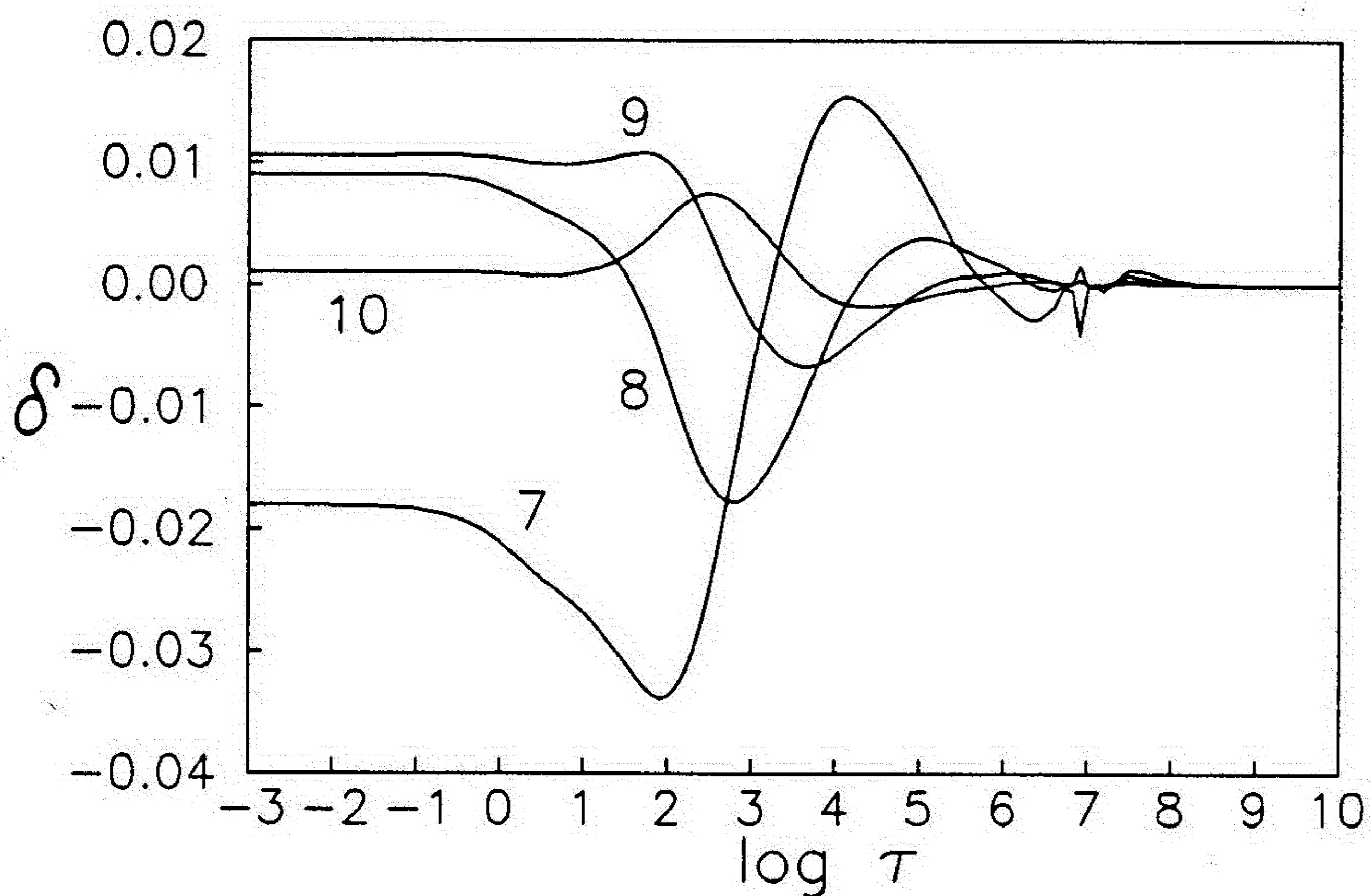


Sl.9. Funkcija izvora $S(\tau)$ u sredini sa $B = 1$ i $\epsilon = 10^{-6}$ u toku iteracija bez relaksacije (a) i sa $r=0.5$ (b)

Konvergentna svojstva metode su ilustrovana na sledećim slikama. Na slici 10. možemo videti da se u ekstremnom, numerički najtežem, slučaju sa $\epsilon = 10^{-8}$, funkcija izvora praktično već u trećoj iteraciji ne razlikuje od svoje konačne "tačne" vrednosti. Na sl.11. prikazana je brzina sukcesivnih korekcija rešenja u toku poslednje četiri iteracije.



Sl.10. Funkcija izvora $S(\tau)$ u sredini sa $B = 1$ i $\varepsilon = 10^{-8}$ u naznačenom broju iteracija



Sl.11. Brzina konvergencije (relativna razlika funkcije izvora u dve uzastopne iteracije δ data za poslednje četiri iteracije za slučaj $\varepsilon = 10^{-8}$)

Četiri iteraciona faktora α^\pm i θ^\pm prikazana su na sl.12. Iterativnu proceduru smo započeli procenom za faktore α^\pm i θ^\pm , koja je dobijena jednostavnim analitičkim razmatranjem dvo-fluidnog ravnotežnog mo-

dela. Jasno, isti rezultati bi se dobili da iteracije počnemo procenom za funkciju izvora. Kao što možemo videti, čak i ako je početna procena daleko od konačnog rešenja (za početnu procenu smo uzeli ravnotežnu vrednost), konvergencija je dostignuta u vrlo malom broju iteracija.

Na sl.13. prikazano je ponašanje generalisanog Eddingtonovog faktora (2.18) sa optičkom dubinom, kao i koeficijenata relacije zatvaranja: f_J , f_H i f_S . To su takodje vrlo ilustrativni primeri dobrih konvergentnih svojstava metode.

Ovde je interesantno napomenuti jednu značajnu činjenicu, a koja se tiče pravilnog izbora intervala koji pokriva kvadratura formula za integraciju po frekvencama. Naime, ovaj interval bi trebalo da je dovoljno veliki da oblast u kojoj se vrši prenos zračenja ne bude veštački ograničena, odnosno da poslednja frekventna tačka (u krilima linije) bude izabrana van frekvence x_N za koju je, na maksimalnoj optičkoj dubini od interesa za prenos L_T , monohromatska optička dubina jednaka jedinici, tj.:

$$L_T \varphi(x_N) = 1 \quad .$$

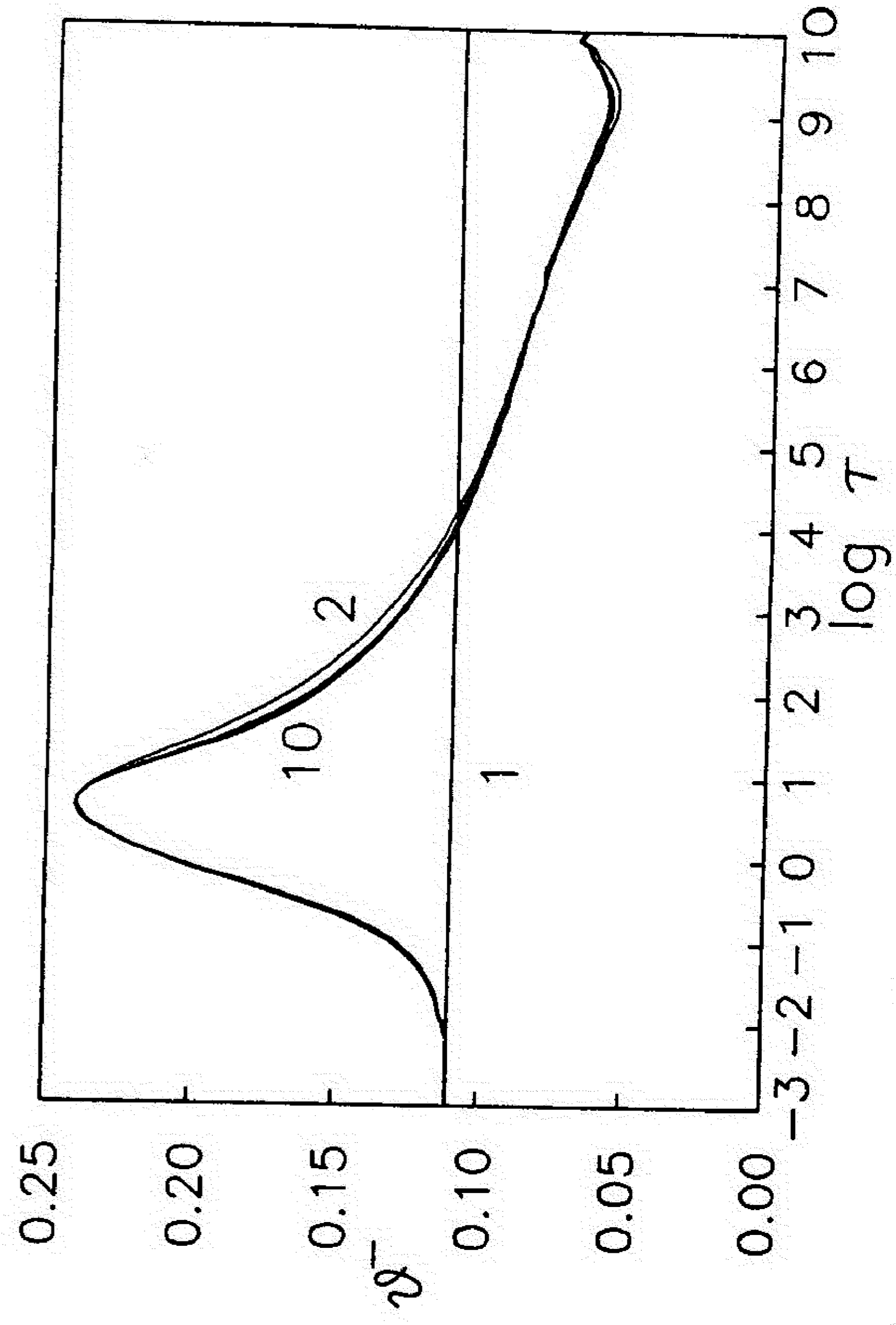
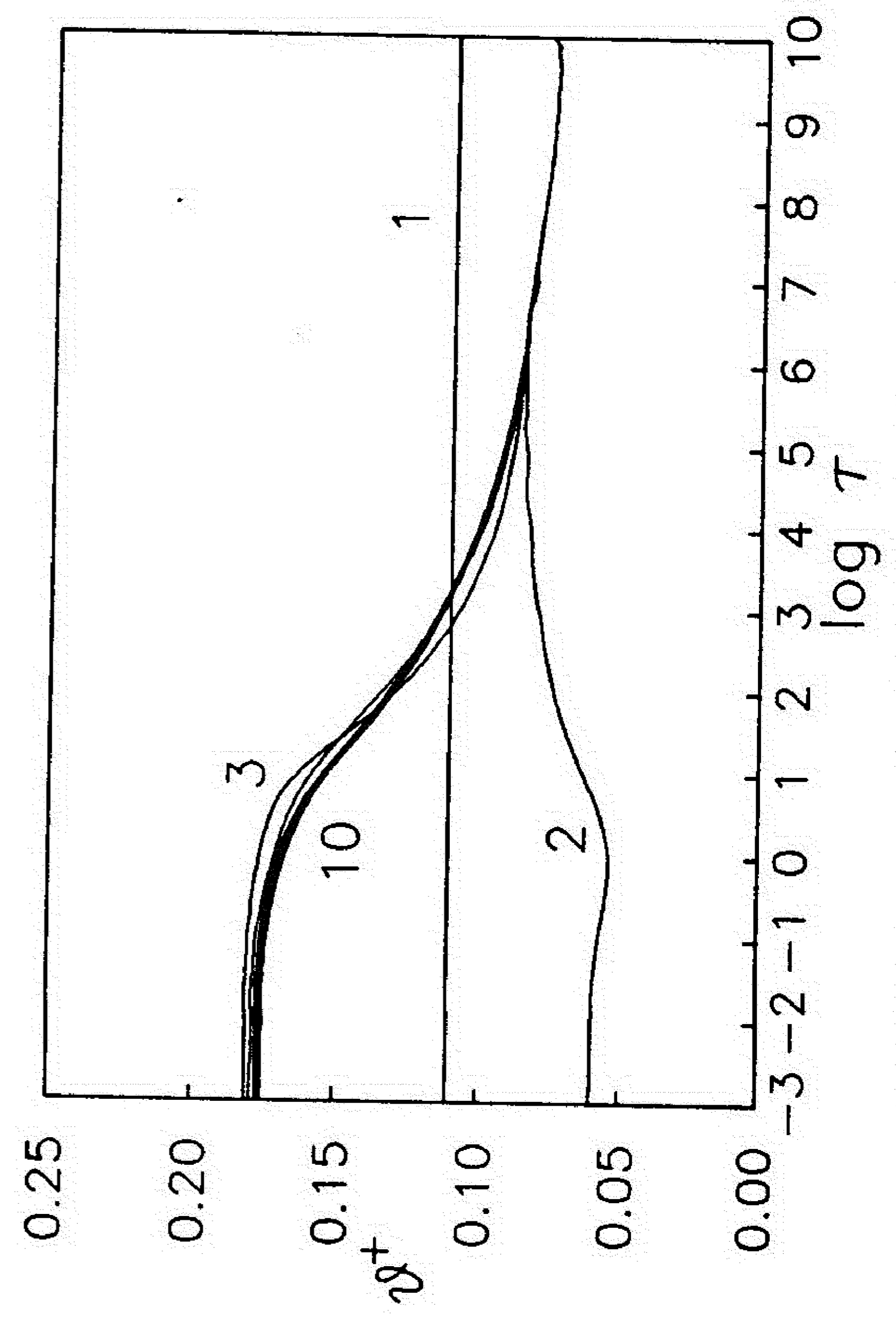
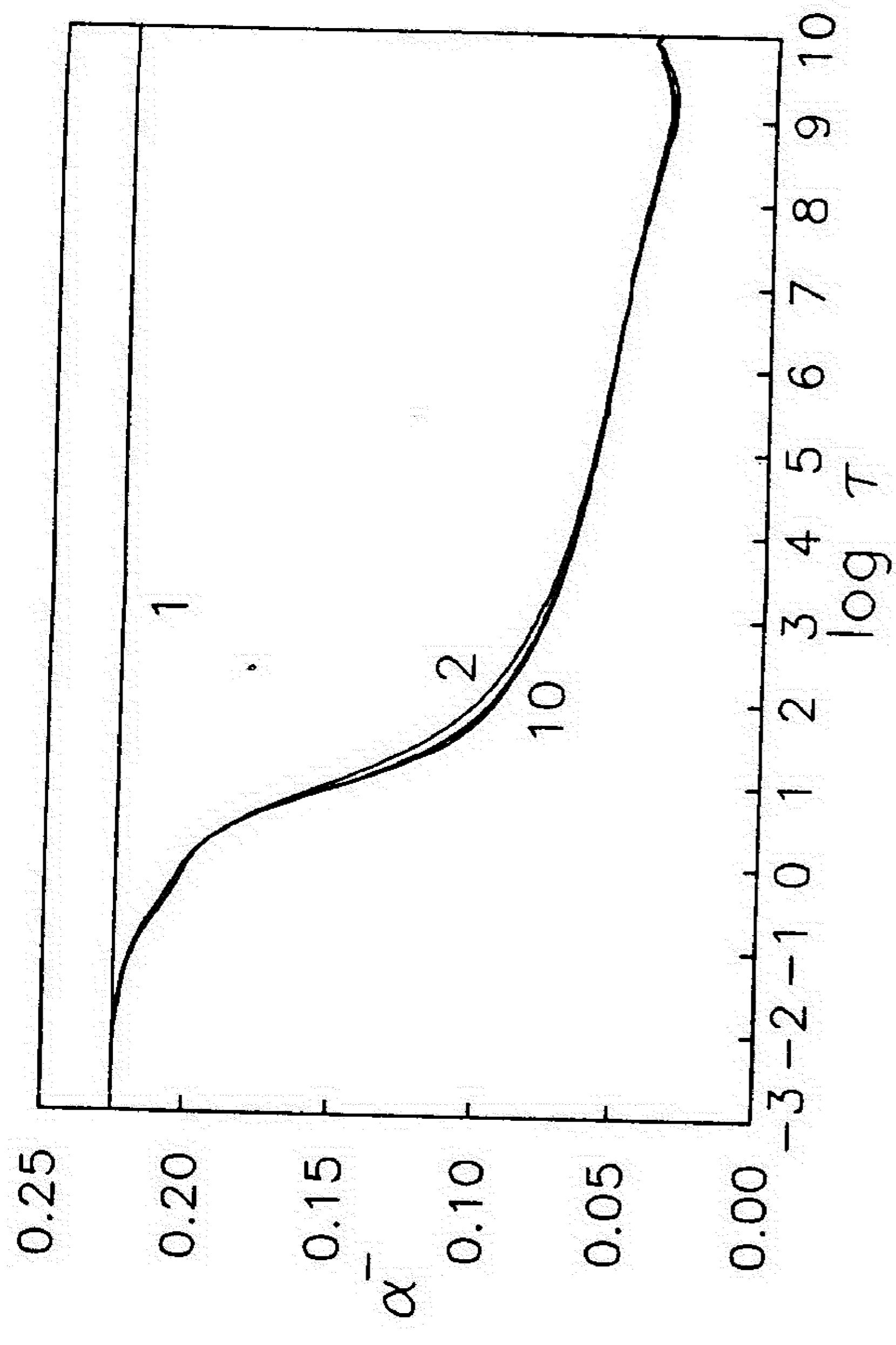
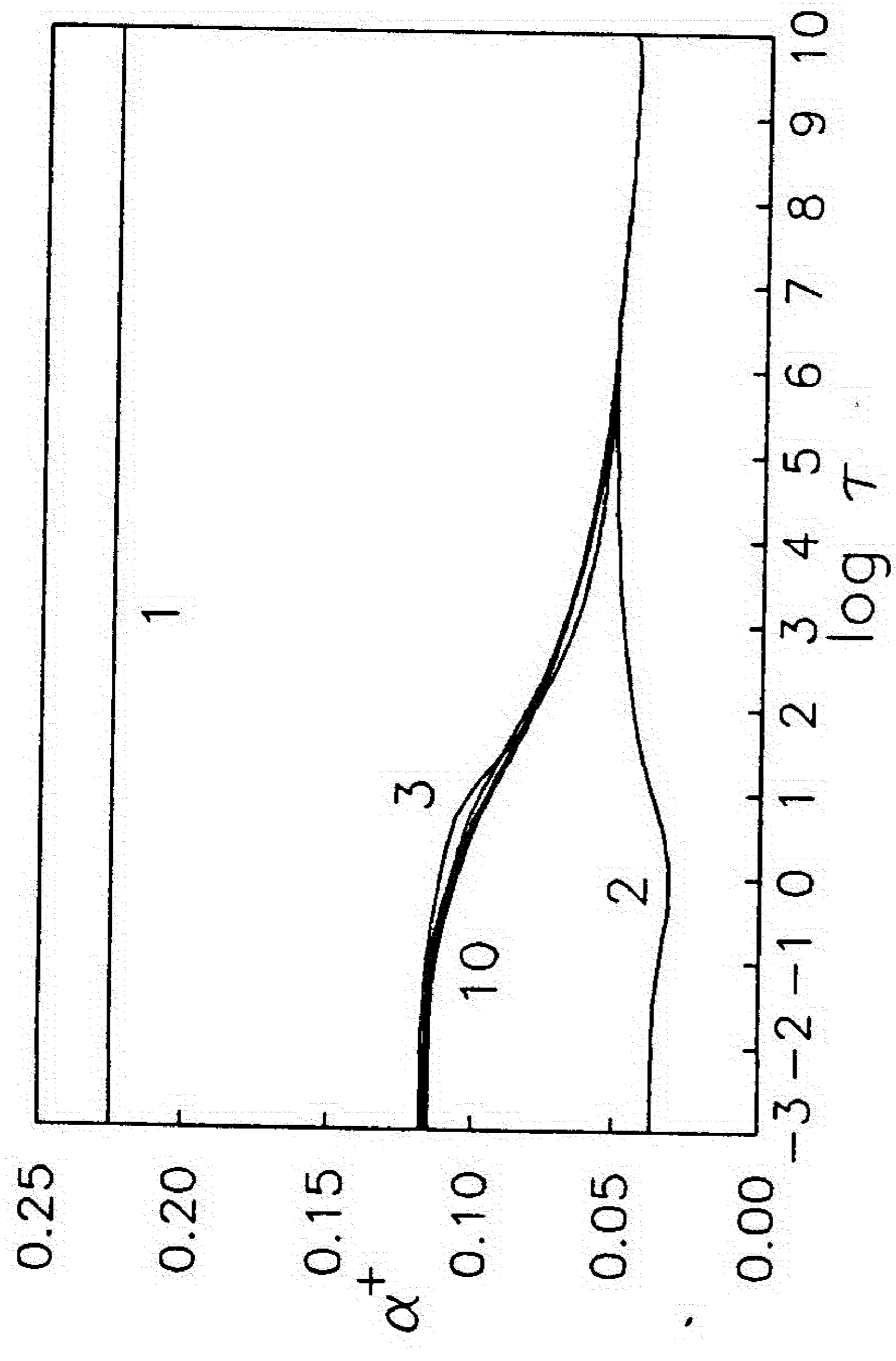
Na taj način smo frekventni opseg $(-x_N, x_N)$ definisali pomoću:

$$\varphi(x_N) = \varepsilon/10$$

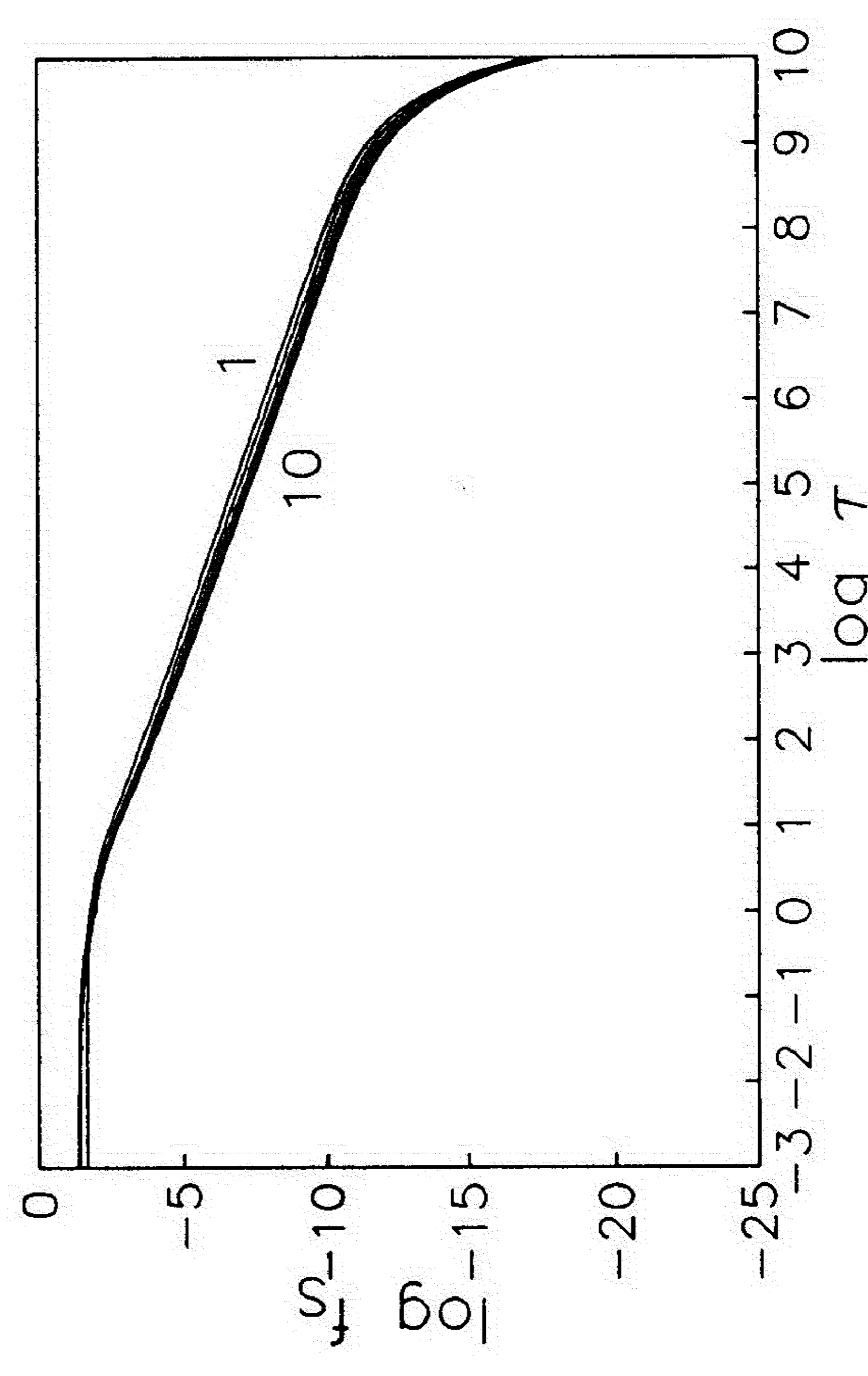
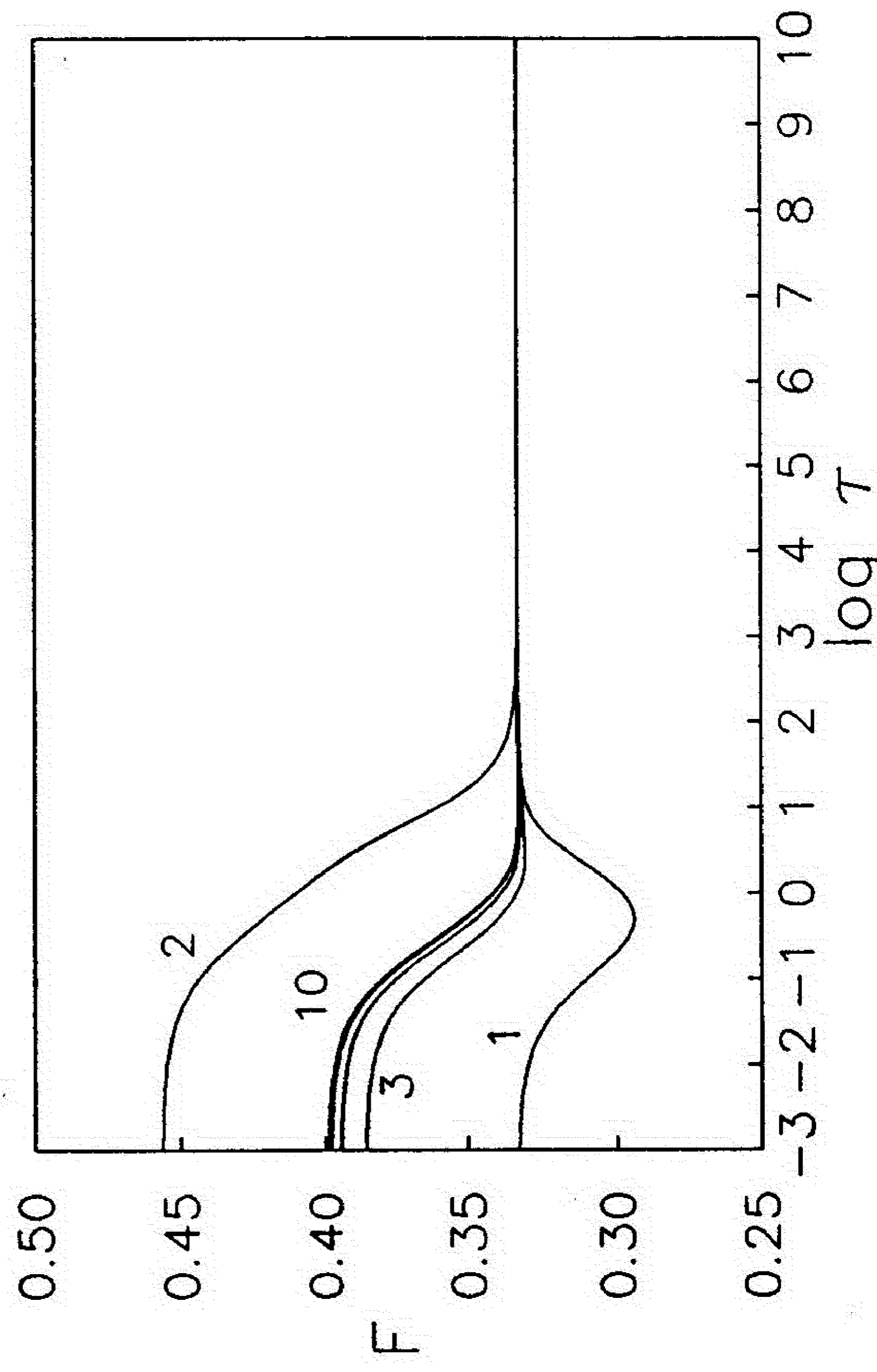
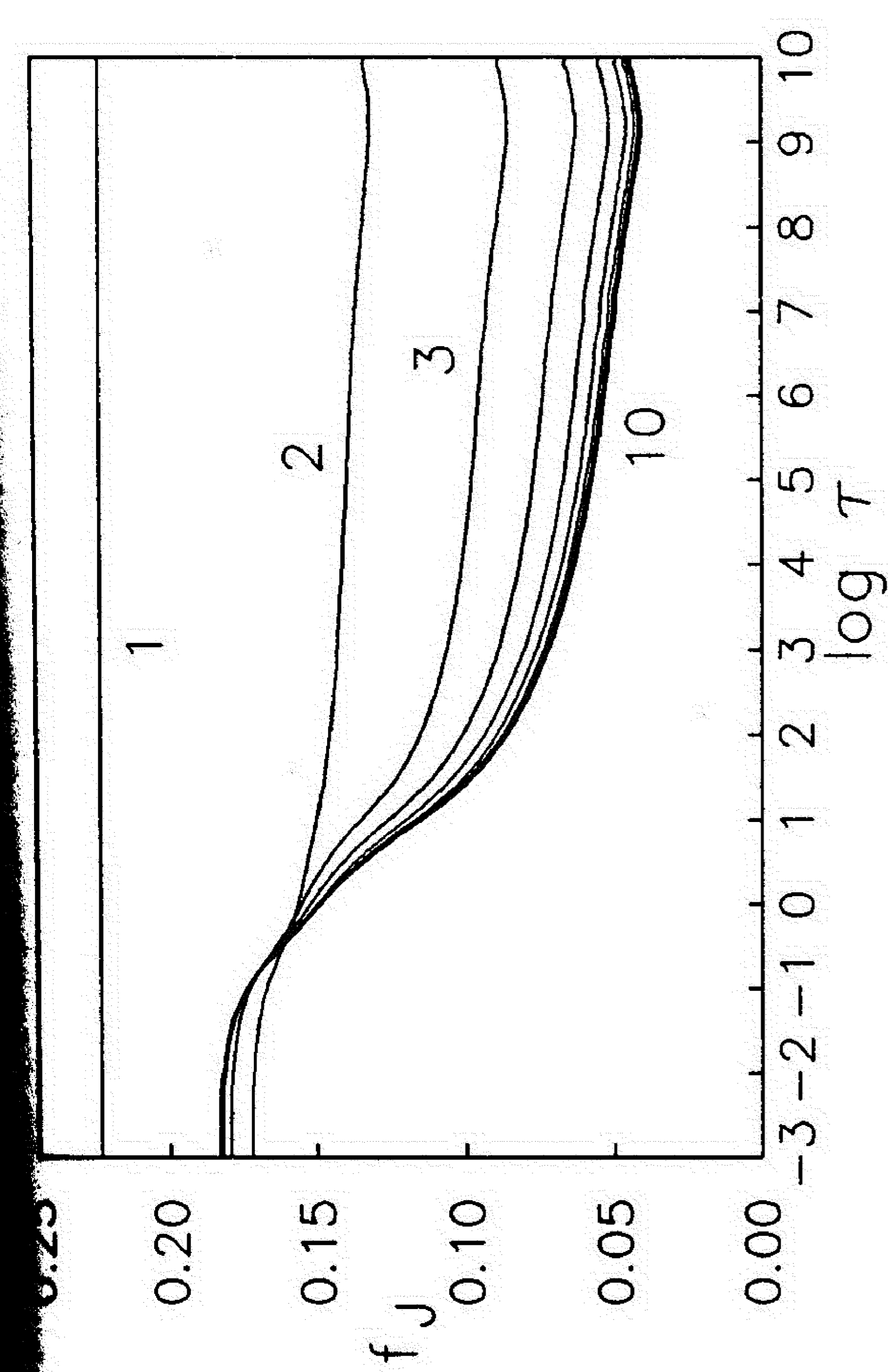
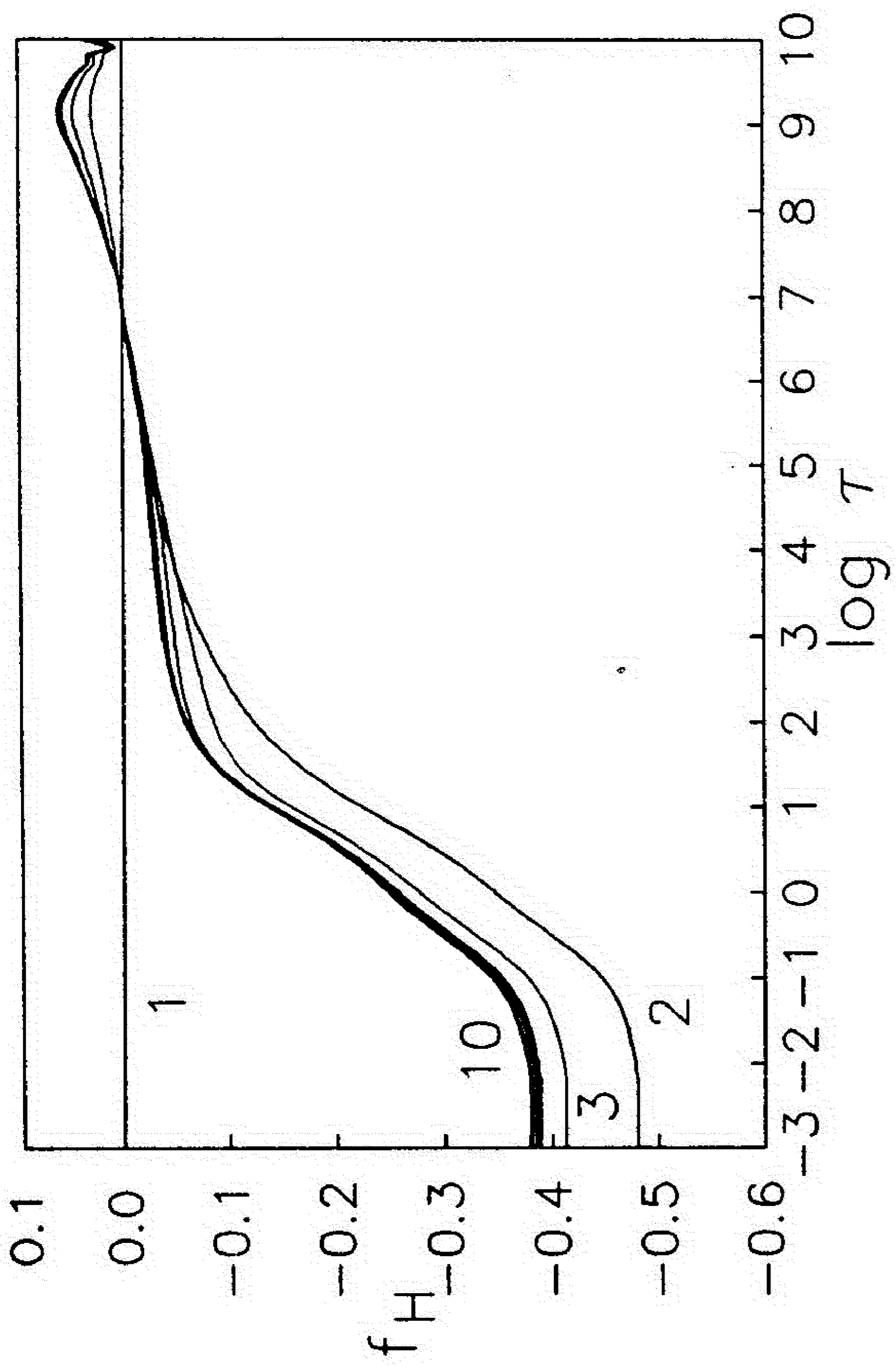
s obzirom da je za Dopplerov profil, $L_T \approx 1/\varepsilon$. Rezultati su dobijeni sa 24 frekventne tačke (na intervalu definisanom frekvencom x_N) i 4 pravca (ugla) μ korišćenjem Gauss-ove kvadrature formule (Abramowitz i Stegun, 1964). Učinjeni izbor frekventnih tačaka se odražava na ponašanje integrisanih po frekvencama integro-eksponencijalnih funkcija $M_{mn}(\tau)$ kao što je prikazano na sl.14. Strmi pad na velikim dubinama ($\tau > 10^9$) objašnjava se konačnim opsegom kvadrature. Ova pojava se uočava i u ponašanju faktora α^- i θ^- (sl.12) kao i koeficijenata f_H i f_S (sl.13), jednom rečju svih veličina koje sadrže integrale M_{mn} . Medjutim, kako je na dubinama $\tau > 10^9$ termalizacija već dostignuta (za slučaj $\varepsilon = 10^{-8}$), takvo ponašanje nema uticaja na rešenje (sl.10).

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

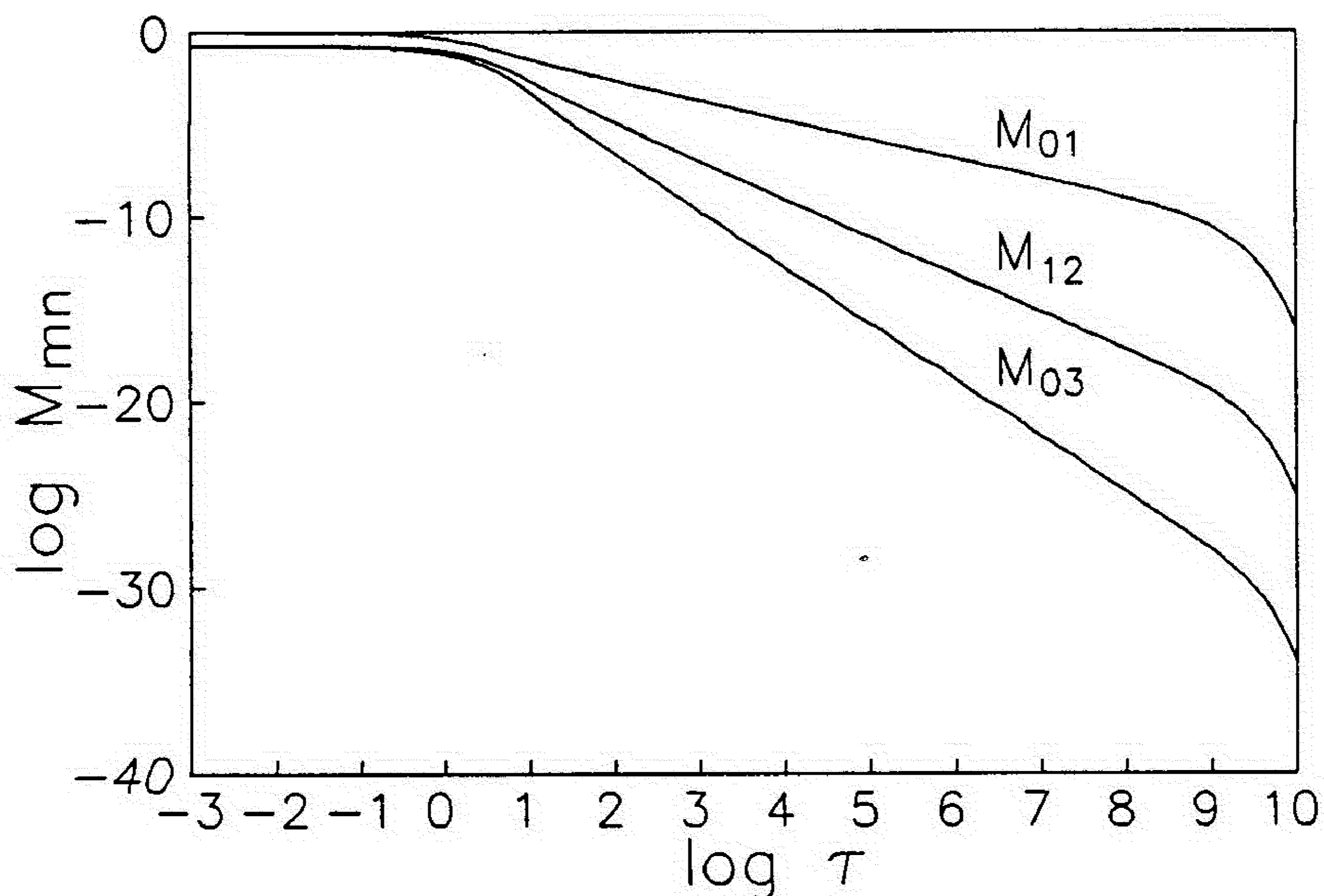
Broj _____ Datum _____



Sl.12. Iteracioni faktori α^\pm i θ^\pm u sredini sa $B \equiv 1$ i $\epsilon = 10^{-8}$ u naznaženom broju iteracija.



Sl.13. Koefficienti relacije zatvaranja f_J , f_H i f_s i Eddingtonov faktor F u sredini sa $B = 1$ i $\epsilon = 10^{-8}$ u naznačenom broju iteracija



Sl.14. Integro-eksponencijalne funkcije M_{01} , M_{12} i M_{03} u sredini sa $\varepsilon = 10^{-8}$

Napomenimo još da smo iteracione faktore mogli izvesti polazeći od sistema (2.30), kao što je već diskutovano u odeljku 2.2.2., ali sada uzimajući u obzir samo ne-lokalni deo polja zračenja. Tako se mogu definisati sledeći faktori:

$$\begin{aligned} \alpha^+ &\equiv \frac{J_{\varphi^2}^+ - S\varphi^2}{J_{\varphi}^+ - S} & \alpha^- &\equiv \frac{J_{\varphi^2}^- - S(\varphi^2 - M_{02})}{J_{\varphi}^- - S(1 - M_{01})} \\ \theta^+ &\equiv \frac{H_{\varphi}^+ - S/2}{J_{\varphi}^+ - S} & \theta^- &\equiv \frac{H_{\varphi}^- - S(1/2 - M_{11})}{J_{\varphi}^- - S(1 - M_{01})} \end{aligned} \quad (2.43)$$

sa kojima se dobijaju rezultati istih konvergentnih svojstava. Izbor zavisi samo od individualnih sklonosti ka rešavanju jednog ili drugog oblika jednačina momenata ((2.30) ili (2.40)).

2.2.4. Dalja diskusija o relacijama zatvaranja

Pošto smo analizirali evoluciju relacija zatvaranja uzimajući u obzir postepeno osnovne fizičke karakteristike procesa prenosa zračenja,

pokušaćemo sada da pružimo isti opis problema koristeći manji broj faktora iteracije od onog koji je definisan u prethodnom odeljku (2.2.3).

S obzirom da smo u odeljku 2.2.2. zaključili da bolji opis anizotropnosti polja zračenja (korišćenjem modela dva fluida) ne vodi poboljšanju stabilnosti konvergencije, pokušaćemo da zatvorimo sistem jednačina momenata Eddingtonovim faktorom $F(\tau)$ i faktorom koji, kao odnos ne-lokalnih momenata polja zračenja, daje dobar opis fotona u krilima linije na velikim optičkim dubinama. Tako ćemo, pored $F(\tau)$ uvesti iteracioni faktor:

$$f_J \equiv \frac{J_\varphi^3 - S(\varphi^3 - \frac{M_{03}}{2})}{J_\varphi - S(1 - \frac{M_{01}}{2})} , \quad (2.44)$$

koji vodi relaciji zatvaranja oblika:

$$J_\varphi^3 - \varphi^3 S = f_J(J_\varphi - S) + f_S S . \quad (2.45)$$

Jednačina momenata drugog reda (2.20) tada postaje:

$$\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} = f_J(J_\varphi - S) + f_S S \quad (2.46)$$

sa koeficijentom

$$f_S = \frac{1}{2}(f_J M_{01} - M_{03}) .$$

Relacija zatvaranja (2.45) sadrži sva fizička svojstva koja smo već diskutovali. Naime, dubina termalizacije je određena koeficijentom f_S , dok se za $f_S < \epsilon f_J$ dobija difuzna aproksimacija. Razlika u odnosu na jednačine (2.39) i (2.40) je da je sada koeficijent $f_H = 0$ (model dva fluida nije korišćen).

Medjutim, kako imenilac faktora (2.44) može postati vrlo mali (blizak nuli) i to bilo gde u sistemu, ovaj faktor može uvesti znatne numeričke nestabilnosti. Ako se to desi, jasno, rešenje će biti

$$J_\varphi = S(1 - \frac{M_{01}}{2}) \quad (2.47)$$

i rešavanje diferencijalne jednačine (2.46) nije potrebno. Ali da bismo znali da li i gde se ove nestabilnosti mogu pojaviti, moramo opteretiti

algoritam takvom pitalicom za svaki sloj. U slučaju da nestabilnost postoji, treba podeliti razmatrani sistem na različite oblasti: one gde se jednačina (2.46) mora rešavati i druge, gde stavljanjem da je imenioc jednak nuli, dobijamo direktno rešenje (2.47). Iako je ova procedura teoretski moguća, ona nema nikakvo praktično opravdanje. Prema tome, neophodno je birati iteracione faktore koji nemaju takvih teškoća.

Iteracioni faktori definisani sa (2.35) u prethodnom odeljku imaju isti oblik imenioca, naime:

$$J_{\varphi}^{+} - S \quad \cdot \quad i \quad \cdot \quad J_{\varphi}^{-} - S(1 - M_{01}) \quad ,$$

ali ove razlike (koje su suprotnog znaka) reda su prvih izvoda funkcije izvora (ili izvoda viših redova ako je prvi izvod nula). U problemu formiranja linija u polu-beskonačnoj sredini konstantnih fizičkih svojstava, ovi izvodi su, po definiciji, jednaki nuli samo na velikim optičkim dubinama. Osim na tim dubinama, gde smo u stanju da predvidimo ponašanje iteracionih faktora, nestabilnosti se ne javljaju na drugim mestima.

S druge strane, razlika $J_{\varphi} - S(1 - \frac{M_{01}}{2})$ u imeniocu faktora f_J (2.44) predstavlja sumu pomenutih razlika, pa s obzirom da je reda drugog izvoda funkcije izvora lako može postati bliska nuli, ali više ne obavezno na mestima koja je lako predvideti.

Iz svih analiza sledi zaključak da je model dva fluida sa iteracionim faktorima (2.35) najjednostavniji fizički model koji, bez dodatne spoljne kontrole algoritma, vodi tačnom i brzo konvergentnom rezultatu.

Već smo rekli da je Eddingtonov faktor $F(\tau) \equiv K_{\varphi}/J_{\varphi}$ korišćen da koriguje uticaj anizotropnosti u prenosu zračenja. Uticaj raspodele intenziteta po frekvencama uzet je u obzir pomoću relacije zatvaranja:

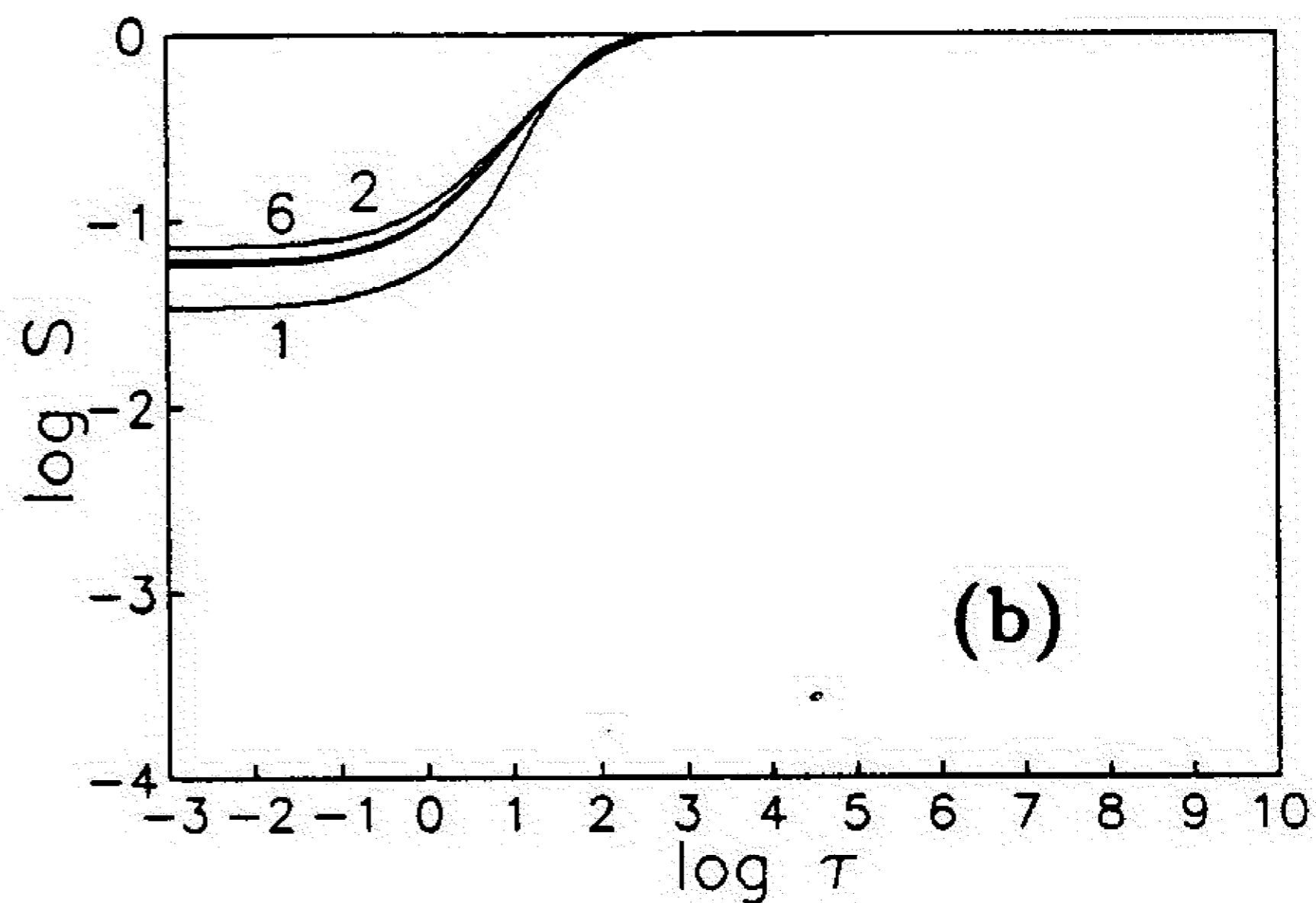
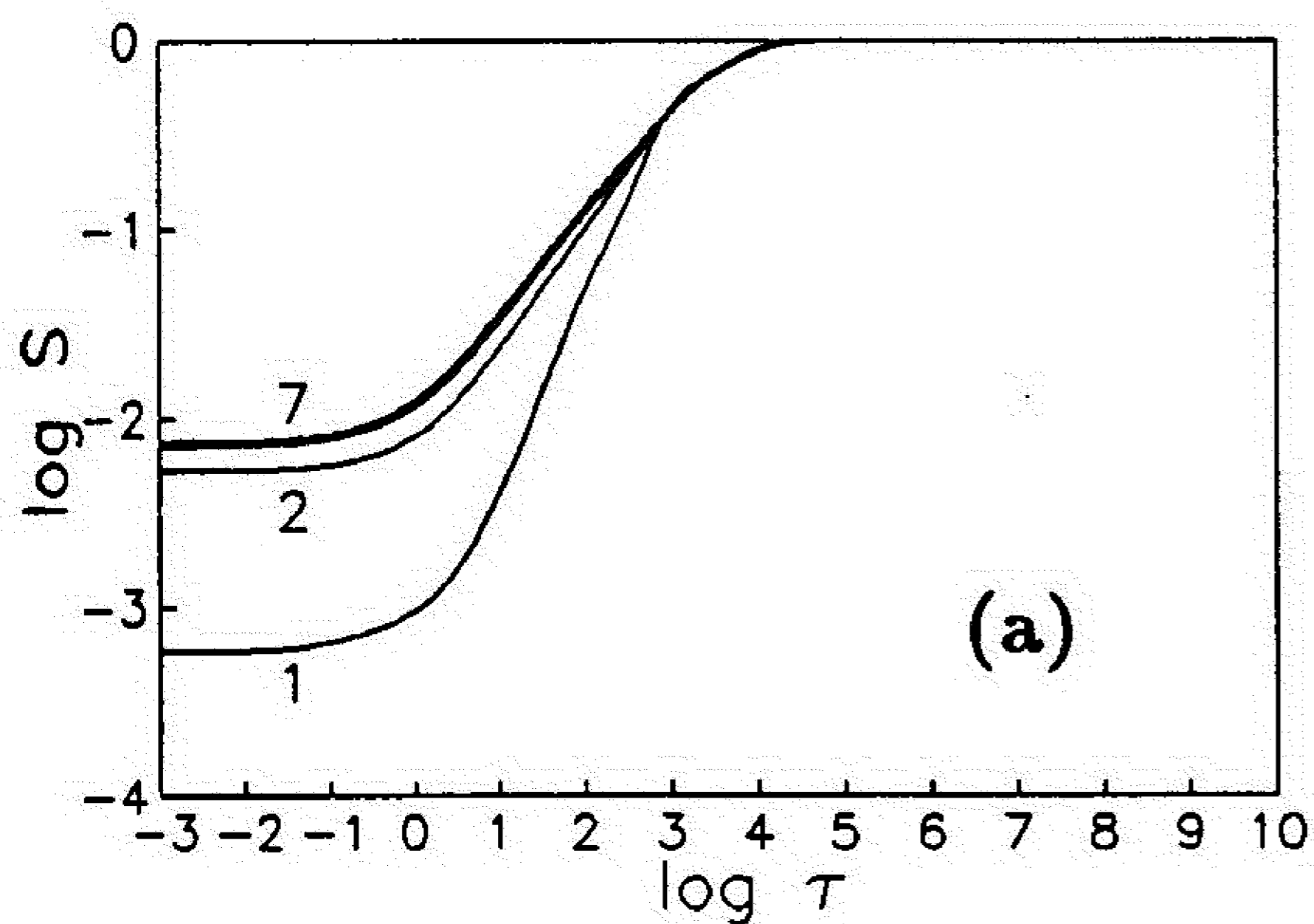
$$J_{\varphi^3} = f_J J_{\varphi} + f_H H_{\varphi^2} + f_S S \quad .$$

Ova raspodela je uzrokovana frekventnom zavisnošću opaciteta koja se ogleda i u različitim optičkim dubinama za razne frekvence u liniji. Medjutim, anizotropnost polja zračenja modifikuje i raspodelu intenziteta po frekvencama. Drugim rečima, dobar opis frekventne raspodele mora obuhvatati i dobar opis anizotropnosti. U tom smislu je model dva fluida (tj. uvođenje koeficijenta f_H) potreban.

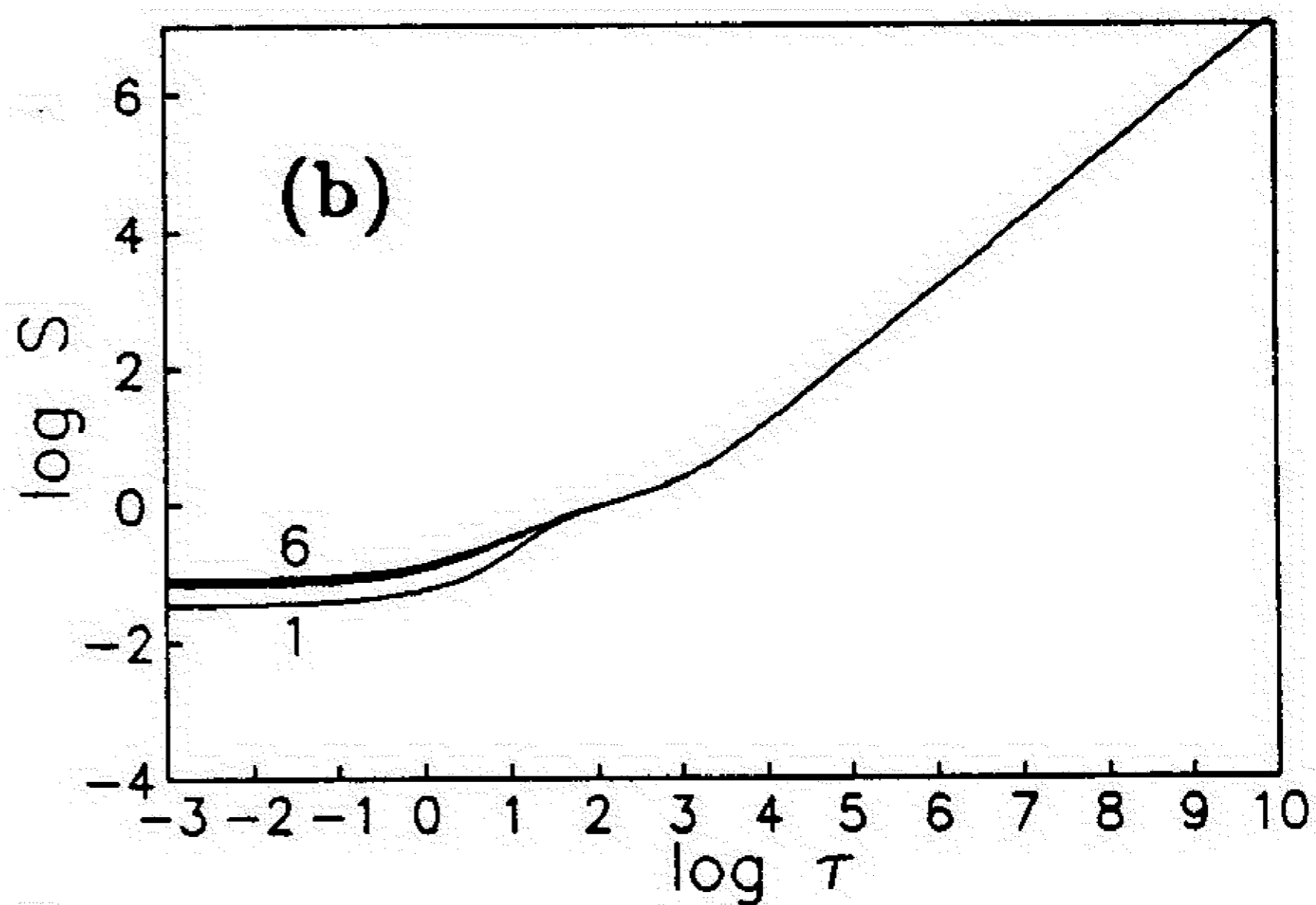
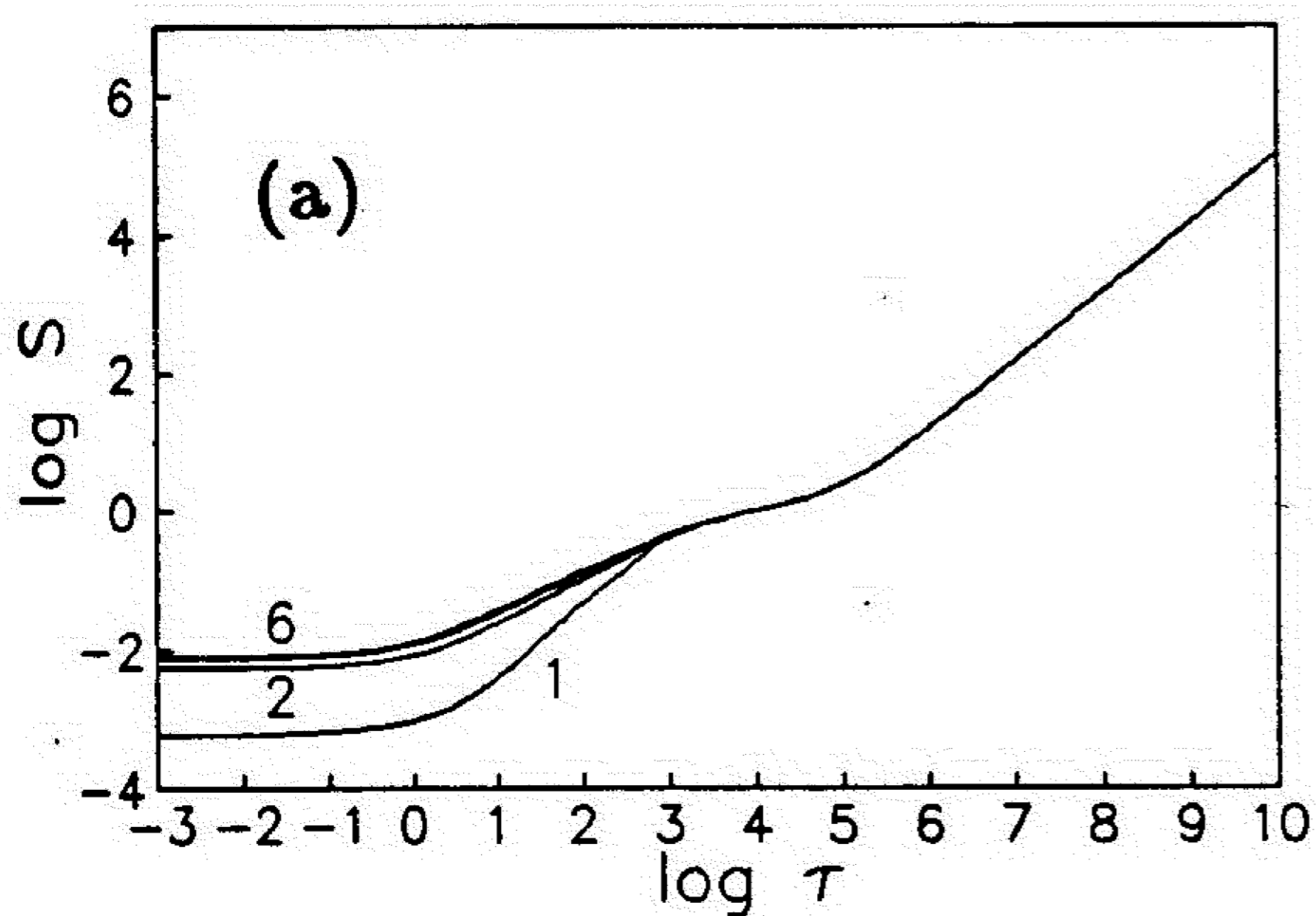
Na kraju, pošto smo pokazali da upotreba iteracionih faktora (2.35) i odgovarajuće najopštije relacije zatvaranja (2.32), vodi najbržoj i najstabilnijoj konvergenciji ka tačnom rešenju numerički najkompliciranijeg problema ($B = 1, \beta = 0$), završimo ovu analizu kraćim osvrtom na fizički realniji i opštiji (ali numerički lakši) problem, definisan na početku odeljka 2.2. To je problem koji u obzir uzima doprinos kontinualne apsorpcije ($\beta \neq 0$), tj. postojanje u sredini drugih čestica koje mogu biti fotojonizovane zračenjem u liniji. Ovaj problem je numerički jednostavniji za rešavanje, s obzirom da prisustvo još jednog izvora opaciteta (kontinualnog) povećava verovatnoću destrukcije fotona, smanjuje dubinu termalizacije i čini da su uslovi formiranja linije bliži LTR.

Generalizacija faktora iteracije (2.35) i odgovarajuće relacije zatvaranja diferencijalnih jednačina (2.15) odnosno (2.17) koje u ovom slučaju treba rešiti, jednostavna je i sasvim direktna. Rešenja, dobijena za slučaj $B = 1, \epsilon = 10^{-8}$ i dve vrednosti parametra $\beta = 10^{-5}$ i 10^{-3} , prikazana su na sl.15. i ilustruju prethodnu diskusiju. Poredjenjem funkcije izvora u liniji (za istu vrednost $\epsilon = 10^{-8}$) na sl.10 (kada nema kontinualne apsorpcije $\beta = 0$) i na sl.15, vidimo da sa porastom kontinualnog opaciteta (sa povećanjem β), ne-LTR parametar ϵ prestaje da ima odlučujuću ulogu u ponašanju funkcije izvora u liniji $S(\tau)$ (tu ulogu preuzima parametar $\bar{\xi}$ definisan sa (1.33a)) i da se funkcija izvora približava ravnotežnoj vrednosti $B = 1$. Ukoliko fizička svojstva sredine još variraju sa dubinom ($B(\tau) \neq \text{const}$), kao što je slučaj dat na sl.16, ponašanje funkcije izvora je tada kontrolisano ovim varijacijama i neće zavisiti od vrednosti ϵ . Detaljno izučavanje uticaja kontinualne apsorpcije na oblik funkcije izvora u liniji, kao i uticaja varijacije $B(\tau)$, može se naći u radovima Hummer-a (1968), Avrett-a (1965) i dr.

Ono što je ovde interesantno istaći je da gornji primeri ilustruju prethodnu diskusiju o manjim numeričkim teškoćama koje se javljaju u rešavanju fizički realnijih problema. Naime, problem sa kontinuumom rešen je u znatno manjem broju iteracija (u poredjenju sa rešenjem za slučaj $B = 1, \beta = 0$ (sl.10)) a rešenja su stabilnija, tj. sa povećanjem vrednosti β dobijena su direktno, bez korišćenja relaksacione tehnike.



Sl.15. Funkcija izvora u liniji u sredini sa $B = 1$, $\epsilon = 10^{-8}$, (a) $\beta = 10^{-5}$ i (b) $\beta = 10^{-3}$.



Sl.16. Funkcija izvora u liniji u sredini sa $B(\tau) = 1 + 1.5\beta\tau$, $\epsilon = 10^{-8}$, (a) $\beta = 10^{-5}$ i (b) $\beta = 10^{-3}$.

Prema tome, vidimo da metod iteracionih faktora, razvijen i testiran na numerički teže rešivom akademskom problemu, može imati samo bolja konvergentna svojstva u primeni na fizički kompleksnije, ali numerički jednostavnije probleme.

3. REŠAVANJE PROBLEMA PRENOSA ZRAČENJA KADA KOEFICIJENTI PRENOSA NE ZAVISE EKSPPLICITNO OD POLJA ZRAČENJA

Pristup rešavanju problema prenosa zračenja određen je zavisnošću apsorpcionih i emisionih koeficijenata (koeficijenata prenosa) od polja zračenja. U prethodnom poglavlju smo razmatrali problem formiranja linija atomima sa dva nivoa gde je ovu zavisnost moguće izraziti eksplicitno i razvili metodu iteracionih faktora za njegovo rešavanje.

Sada ćemo tretirati problem prenosa zračenja u liniji atomima sa više nivoa gde je zbog medjusobne povezanosti nivoa sveukupnošću prelaza koji se izmedju njih ostvaruju, nemoguće eksplicitno izraziti polje zračenja (funkciju izvora) u jednoj liniji. Naime, funkcija izvora u liniji formiranoj prelazom izmedju dva nivoa i i j u atomu nije više funkcija naseljenosti samo tih nivoa i odgovarajućeg polja zračenja, već zbog postojanja drugih nivoa i mogućih prelaza sa i na njih, zavisi i od polja zračenja i naseljenosti nivoa koji tim prelazima odgovaraju. Prema tome, zbog kompleksnosti fizičkih interakcija koje je u ovom slučaju potrebno tretirati na samousaglašen način, nije moguće direktno primeniti metode razradjene za model atoma sa dva nivoa. Tako ćemo u ovom poglavlju razviti metodu iteracionih faktora za implicitni oblik zavisnosti koeficijenata prenosa od polja zračenja karakterističan za problem formiranja linija atomima sa više nivoa. Najpre ćemo ukratko matematički definisati problem.

3.1. Prenos zračenja atomima sa više nivoa. Jednačine.

Razmatraćemo atom sa NL vezanih nivoa izmedju kojih je moguće ostvariti ukupno $NL(NL - 1)/2$ prelaza (linija). Polje zračenja u svakoj pojedinoj liniji, kao rešenje jednačine prenosa:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = \eta_{\nu} - \chi_{\nu} I_{\nu\mu} \quad , \quad (3.1)$$

preko apsorpcionog i emisionog koeficijenta:

$$\chi_\nu = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \varphi_\nu (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \quad (3.2a)$$

$$\eta_\nu = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \varphi_\nu n_j A_{ji} \quad (3.2b)$$

zavisi od naseljenosti n_i i n_j nivoa izmedju kojih se ostvaruje prelaz. Medjutim, zbog radijativnih ekscitacija i de-ekscitacija izmedju ova dva nivoa, kao i sa drugih nivoa u atomu, naseljenosti nivoa n_i i n_j zavise od polja zračenja (rešenja jednačine (3.1)) u svim radijativnim prelazima, pa time i od naseljenosti ostalih atomskih nivoa. Zato je neophodno naseljenosti svih nivoa u atomu odrediti zajedno sa poljem zračenja u svim razmatranim prelazima. To se ostvaruje istovremenim rešavanjem jednačina prenosa zračenja i sistema jednačina statističke ravnoteže. Naime, za svaki nivo j smešten izmedju niza donjih nivoa i ($i < j$) i gornjih nivoa k ($k > j$) u atomu, postoji po jedna jednačina kojom se izjednačava broj svih procesa koji naseljavaju i raseljavaju razmatrani nivo j . Tako, imamo NL jednačina oblika:

$$\begin{aligned} & \Sigma_{i < j} n_i B_{ij} J_{ij} + \Sigma_{i < j} n_i C_{ij} + \Sigma_{k > j} n_k (A_{kj} + B_{kj} J_{kj}) + \Sigma_{k > j} n_k C_{kj} - \\ & - n_j \left[\Sigma_{i < j} (A_{ji} + B_{ji} J_{ij}) + \Sigma_{i < j} C_{ji} + \Sigma_{k > j} B_{jk} J_{jk} + \Sigma_{k > j} C_{jk} \right] = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

za svaki od NL nivoa. Jasno, za $j = 1$, $B_{ij} = C_{ij} = 0$ a za $j = NL$, $A_{kj} = B_{kj} = C_{kj} = 0$. Kako je jedna od NL jednačina linearna kombinacija ostalih, potrebno je rešavati sistem od $NL - 1$ linearno nezavisnih jednačina statističke ravnoteže (3.3) zajedno sa jednačinom održanja broja čestica:

$$\Sigma_{j=1}^{NL} n_j = n_{total} \quad .$$

Članovi jednačine (3.3) odgovaraju pojedinim radijativnim i sudarnim procesima koji su detaljnije definisani u odeljku 1.2. Zavisnost od polja zračenja (rešenja jednačine (3.1)), sadržana je u radijativnim članovima jednačina (3.3) u kojima je sa J_{ij} označen srednji intenzitet zračenja J_ν integraljen po profilu linije na frekvenci ν_{ij} :

$$J_{ij} (= J_\varphi) = \int \varphi_\nu J_\nu d\nu = \frac{1}{2} \int \varphi_\nu d\nu \int_{-1}^1 I_{\nu\mu} d\mu \quad . \quad (3.4)$$

3.2. Iterativna procedura

Jednačine (3.1)-(3.4) opisuju opšti nelokalni problem za čije je rešavanje neophodno definisati neku iterativnu proceduru.

Podsetimo se da obična šema Λ iteracije rešava ovaj problem u sledećim koracima: a) polazi se od nekog datog skupa naseljenosti nivoa (najčešće u LTR) sa kojima se računaju apsorpcioni i emisijski koeficijenti (3.2), b) iz jednačina prenosa zračenja (3.1) dobijaju se zatim intenziteti $I_{x\mu}(\tau)$, odnosno iz (3.4) srednji intenziteti $J_{ij}(\tau)$ u linijama, c) sa ovim intenzitetima $J_{ij}(\tau)$ rešavaju se jednačine statističke ravnoteže (3.3) za dobijanje novog skupa naseljenosti nivoa. Konvergencija ove najjednostavnije iterativne šeme je, kao što smo već pokazali, vrlo spora, a rešenje na velikim optičkim dubinama se praktično uopšte ne koriguje.

Zbog činjenice da u ovom opštem nelokalnom problemu nemamo eksplicitni izraz za funkciju izvora kao u slučaju atoma sa samo dva nivoa, iterativnu proceduru koju smo razvili u prethodnom poglavlju ne možemo direktno primeniti. Međutim, možemo pokušati da generalizujemo njenu osnovnu ideju.

Kako je funkcija izvora za svaki prelaz u liniji, opisan jednačinom prenosa zračenja (3.1), data izrazom (prema (3.2)):

$$S_{ij} = \frac{n_j A_{ji}}{n_i B_{ij} - n_j B_{ji}} \quad , \quad (3.5)$$

pogodnije je, zbog dalje analize, prepisati jednačine statističke ravnoteže (3.3) u nešto drugačijem obliku. Za nivo j ($j = 2, 3, \dots, NL - 1$) u atomu imamo:

$$\begin{aligned} & \Sigma_{i < j} (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) J_{ij} + \Sigma_{k > j} (n_k B_{kj} - n_j B_{jk}) J_{kj} + \Sigma_{k > j} n_k A_{kj} - n_j \Sigma_{i < j} A_{ji} + \\ & + \Sigma_{i < j} n_i C_{ij} - n_j \Sigma_{i < j} C_{ji} + \Sigma_{k > j} n_k C_{kj} - n_j \Sigma_{k > j} C_{jk} = 0 \quad . \quad (3.6) \end{aligned}$$

Imajući u vidu oblik jednačina (3.5) i (3.6), najdirektnija generalizacija ideje razvijene u drugom poglavlju je da se definiše iteracioni faktor kao odnos polja zračenja u liniji i njene funkcije izvora, tj.:

$$f_{ij} \equiv \frac{J_{ij}}{S_{ij}} \quad . \quad (3.7)$$

Pošto se izračuna iz funkcije izvora koja je rešenje (i)-te iteracije i odgovarajućeg polja zračenja, faktor f_{ij} se u ($i+1$)-voj iteraciji koristi pomoću izraza:

$$J_{ij} = f_{ij}S_{ij} = f_{ij} \frac{n_j A_{ji}}{n_i B_{ij} - n_j B_{ji}}, \quad (3.8)$$

za dobijanje nove funkcije izvora S_{ij} . Zamenom izraza (3.8) za J_{ij} u jednačine statističke ravnoteže (3.6) dobija se novi sistem jednačina samo za nepoznate naseljenosti nivoa:

$$\begin{aligned} & \Sigma_{i < j} f_{ij} n_j A_{ji} + \Sigma_{k > j} f_{kj} n_k A_{kj} + \Sigma_{k > j} n_k A_{kj} - n_j \Sigma_{i < j} A_{ji} + \\ & + \Sigma_{i < j} n_i C_{ij} - n_j \Sigma_{i < j} C_{ji} + \Sigma_{k > j} n_k C_{kj} - n_j \Sigma_{k > j} C_{jk} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

koji je linearan i otuda lako rešiv. Sa novim naseljenostima nivoa, dobijamo apsorpcione i emisione koeficijente prema (3.2), odnosno funkciju izvora (3.5), i rešavamo jednačinu prenosa zračenja (3.1) da bi dobili nove intenzitete. Sa ovim intenzitetima i odgovarajućom funkcijom izvora (3.5) izračunavamo iteracione faktore (3.7) ponavljajući proceduru do konvergencije.

Kao odnos polja zračenja J_{ij} i funkcije izvora S_{ij} , faktor f_{ij} bi trebalo da u toku iteracija vrlo brzo dostigne tačnu vrednost i da kao tačan koeficijent jednačina statističke ravnoteže obezbedi brzu korekciju tačnom rešenju. Procedura koja koristi faktor f_{ij} , medjutim, vrlo brzo divergira. To je posledica činjenice da ovaj najdirektniji način zatvaranja jednačina koje treba rešiti, a koji je matematički opravdan, nije a priori opravdan i fizički. Ovo se može objasniti time da polje zračenja J_{ij} zavisi najviše od vrednosti funkcije izvora S_{ij} i njenih prvih izvoda, koji, na izvestan način, igraju glavnu ulogu u prenosu zračenja, a čiji uticaj definicijom faktora (3.7) nije dobro uzet u obzir.

Medjutim, s obzirom da uvodjenjem relacije (3.7) sistem jednačina statističke ravnoteže postaje linearan, prirodno je zadržati linearnu relaciju izmedju polja zračenja J i funkcije izvora S u opštem obliku:

$$J = \alpha + \beta S \quad (3.10)$$

a njene koeficijente α i β definisati u skladu sa fizikom problema. (Radi jednostavnosti, i u (3.10) i nadalje izostavljamo indeks ij za prelaz u liniji.)

U narednim odeljcima ćemo analizirati nekoliko definicija koeficijenata relacije (3.10) polazeći od najjednostavnijih ka rafiniranijim. Kao što ćemo videti, koeficijenti pokazuju bolja ili lošija konvergentna svojstva zavisno od stepena u kome reprodukuju osnovna fizička svojstva problema, i u kome se približavaju prvobitnoj definiciji faktora iteracije.

Kvalitet pojedinih koeficijenata α i β , tj. odgovarajućih iterativnih procedura koje razvijamo za problem formiranja linija atomima sa više nivoa, testiraćemo na modelu atoma sa dva nivoa pri čemu nećemo koristiti njegov eksplicitni izraz za funkciju izvora. To činimo jer su nam njegova tačna rešenja poznata.

3.3. Koeficijenti linearne relacije

Najdirektniji način definisanja koeficijenata relacije (3.10): $\alpha = 0$, $\beta = f$, sadržan u faktoru (3.7), doveo je do numeričkih teškoća, tačnije do divergencije.

Jedan način da se modifikuje ova direktna iterativna šema je parametrizovana srednja vrednost izmedju iteracije koja koristi faktor (3.7) i obične Λ iteracije (vrsta relaksacije sa parametrom λ):

$$J = \left(\frac{J}{S} \right)^o (\lambda S^o + (1 - \lambda)S) . \quad (3.11)$$

Ovde su sa (o) označene ulazne veličine (vrednosti iz prethodne iteracije). Za $\lambda = 1$ nalazimo Λ iteraciju sa beskonačno sporom konvergencijom, dok $\lambda = 0$ vodi iteraciji sa faktorom (3.7). Jednačina (3.11) ima traženi linearni oblik pogodan za povezivanje polja zračenja sa jednačinama statističke ravnoteže. Medjutim, problem je u izboru parametra λ . Nkakva teoretska razmatranja ne mogu dovesti direktno do nekog opravdavajućeg izbora vrednosti za λ . Konstantna vrednost λ ne može voditi dobrom rezultatu iz istog razloga zbog koga se ni upotrebom samog faktora (3.7) nije ostvarila konvergencija. S druge strane, nije moguće empirijski dobiti takvu promenu $\lambda(\tau)$ sa dubinom koja bi obezbedila dobru konvergenciju u svim problemima (za različite stepene odstupanja od LTR).

Imajući u vidu prethodnu analizu, pokušaćemo sada da koeficijente α i β linearne relacije (3.10) izvedemo iz fizičkih razmatranja sličnih onima koje smo koristili u prethodnom poglavlju. Međutim, s obzirom na opšti oblik zavisnosti polja zračenja i funkcije izvora određen relacijom (3.10), biće potrebno donekle modifikovati ideju iteracionih faktora kao odnosa dve homologne veličine. To ćemo učiniti na sledeći način.

U odeljku 2.2.3. došli smo do zaključka da odnosi "ne-lokalnih" delova momenata polja zračenja predstavljaju dobre faktore iteracije iz razloga što je znatan deo odgovarajućih momenata sadržan u njihovom "lokalnom" članu. U manjim, "ne-lokalnim" članovima sadržan je najefikasniji deo polja zračenja u prenosu energije, pa se njihovim iterativnim odredjivanjem ostvaruje i najbrža (najbolja) konvergencija. S obzirom da je deo $\tilde{J} = \alpha$ momenta $J = \alpha + \beta S$ mali u odnosu na njegovu ukupnu vrednost, mogli bismo očekivati da je moguće korigovati rešenje iterativnim odredjivanjem \tilde{J} . Otuda, možemo definisati linearnu relaciju tipa (3.10):

$$J(\tau) = J^o(\tau) + \tilde{J}(\tau) \quad (3.12)$$

u kojoj je član $J^o(\tau)$ (prema (2.37)) dat izrazom:

$$J^o(\tau) = \left(1 - \frac{M_{01}(\tau)}{2}\right) S(\tau) .$$

Napomenimo da sada član $\tilde{J}(\tau)$ (odnosno, koeficijent α relacije (3.10)):

$$\tilde{J}(\tau) = J(\tau) - \left(1 - \frac{M_{01}(\tau)}{2}\right) S(\tau) \quad (3.13)$$

nije iteracioni faktor po njegovoj definiciji i da, u stvari, (3.12) treba tretirati kao perturbacionu šemu u kojoj se korekcije vrše po \tilde{J} kao malom perturbacionom članu. Međutim, konvergencija se ne ostvaruje, bar ne sa ravnotežnim rešenjem $S = B$ kao početnim za iterativnu proceduru. Ovakav izbor koeficijenta α kao male perturbacije nije pogodan za korekciju perturbacione šeme. Fizičko objašnjenje za divergenciju pri ovakvom izboru koeficijenta α ($=\tilde{J}$) slično je već razmatranom u odeljku 2.2.4 kada je uveden faktor (2.44). Naime, zanemarivanje uticaja anizotropnosti

polja zračenja, tj. neadekvatan tretman prvih izvoda funkcije izvora kao protagonista problema, nezaobilazno vodi destabilizaciji iterativne procedure. Primetimo ovde da, premda različite iterativne procedure moramo razviti za problem prenosa zračenja atomima sa dva i sa više nivoa (zbog različite kompleksnosti mogućih interakcija), analogiju u svojstvima izabranih faktora iteracije možemo stalno povlačiti zbog iste fizike koja je u osnovi ova dva problema.

Konačno, svi dosadašnji pokušaji da se na relativno direktan način definišu koeficijenti α i β još jednom dokazuju da se stabilnost iterativne procedure u principu ne može ostvariti ako se ne uzmu u obzir osnovne fizičke karakteristike problema prenosa zračenja.

3.3.1. Iteracija sa koeficijentima α i β . Model dva fluida.

Zbog pomenutih teškoća pri direktnom definisanju koeficijenata α i β relacije (3.10), sada ćemo ove koeficijente izvesti koristeći najbolju numeričku simulaciju procesa prenosa zračenja - formalno rešenje jednačine prenosa. Naime, vraćajući se modelu dva fluida možemo iz sloja u sloj postepeno pratiti i uzimati u obzir nelokalnu, graničnu prirodu prenosa zračenja. Poći ćemo tako od integralnog oblika jednačine prenosa koji opisuje evoluciju specifičnog intenziteta duž datog pravca μ :

$$I_{x\mu}^-(\tau_l) = I_{x\mu}^-(\tau_{l-1})e^{-\frac{(\tau_l - \tau_{l-1})\varphi_x}{\mu}} + \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} S(t)e^{-\frac{(\tau_l - t)\varphi_x}{\mu}} \frac{\varphi_x}{\mu} dt \quad (3.14a)$$

za ulazno ($\tau_l > \tau_{l-1}$) i

$$I_{x\mu}^+(\tau_l) = I_{x\mu}^+(\tau_{l+1})e^{-\frac{(\tau_{l+1} - \tau_l)\varphi_x}{\mu}} + \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} S(t)e^{-\frac{(t - \tau_l)\varphi_x}{\mu}} \frac{\varphi_x}{\mu} dt \quad (3.14b)$$

za izlazno polje zračenja ($\tau_{l+1} > \tau_l$).

Integrali u (3.14) se mogu analitički izračunati korišćenjem linearne ili parabolične aproksimacije za modeliranje funkcije izvora $S(t)$ na uzastopnim intervalima optičkih dubina (τ_{l-1}, τ_l) u funkciji $S(\tau_{l-1})$ i $S(\tau_l)$ (moguće i prethodnih vrednosti $S(\tau < \tau_{l-1})$) za ulazne intenzitete i, respektivno, $S(t)$ na intervalu (τ_l, τ_{l+1}) kao funkcije $S(\tau_l)$ i $S(\tau_{l+1})$ (i eventualno $S(\tau > \tau_{l+1})$) za izlazne intenzitete. Sa izabranim modelom za $S(\tau)$

i grupisanjem članova, izraze (3.14) možemo konačno prepisati u obliku:

$$I_{x\mu}^{-}(\tau_l) = \left\{ I_{x\mu}^{-}(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + \sum_{\tau_k \neq \tau_l} \beta_{x\mu}^{-}(\tau_k)S(\tau_k) \right\} + \beta_{x\mu}^{-}(\tau_l)S(\tau_l) \quad (3.15a)$$

$$I_{x\mu}^{+}(\tau_l) = \left\{ I_{x\mu}^{+}(\tau_{l+1})e^{-\Delta\tau_{l+1}\varphi_x/\mu} + \sum_{\tau_k \neq \tau_l} \beta_{x\mu}^{+}(\tau_k)S(\tau_k) \right\} + \beta_{x\mu}^{+}(\tau_l)S(\tau_l) \quad (3.15b)$$

ili, kraće:

$$I_{x\mu}^{-}(\tau_l) = \alpha_{x\mu}^{-}(\tau_l) + \beta_{x\mu}^{-}(\tau_l)S(\tau_l) \quad (3.16a)$$

$$I_{x\mu}^{+}(\tau_l) = \alpha_{x\mu}^{+}(\tau_l) + \beta_{x\mu}^{+}(\tau_l)S(\tau_l). \quad (3.16b)$$

Polazeći od odgovarajućih graničnih uslova: $I_{x\mu}^{-}(\tau = 0)$ i $I_{x\mu}^{+}(\tau = \tau_N)$, koeficijenti $\alpha_{x\mu}^{-}(\tau_l)$ (tj. $\alpha_{x\mu}^{+}(\tau_l)$) na nekoj optičkoj dubini τ_l se određuju iz poznatog intenziteta zračenja u prethodnom sloju $I_{x\mu}^{-}(\tau_{l-1})$ (tj. $I_{x\mu}^{+}(\tau_{l+1})$) i funkcije izvora (poznate iz prethodne iteracije) u prethodnom i eventualno još nekom sloju $\tau_k \neq \tau_l$, zavisno od aproksimacije za $S(\tau)$.

Oblik koeficijenata $\beta_{x\mu}^{\pm}(\tau_l)$, koji su funkcije samo monohromatske optičke dubine u liniji, zavisi od izabranog matematičkog modela za funkciju izvora $S(\tau)$.

Integracijom (3.16) po pravcima i frekvencama u liniji dobijamo izraze za srednji intenzitet ulaznog (izlaznog) zračenja:

$$J^{\pm}(\tau) = \alpha^{\pm}(\tau) + \beta^{\pm}(\tau)S(\tau) \quad (3.17)$$

odnosno za ukupno polje zračenja izraz (3.10) čiji su koeficijenti dati sa:

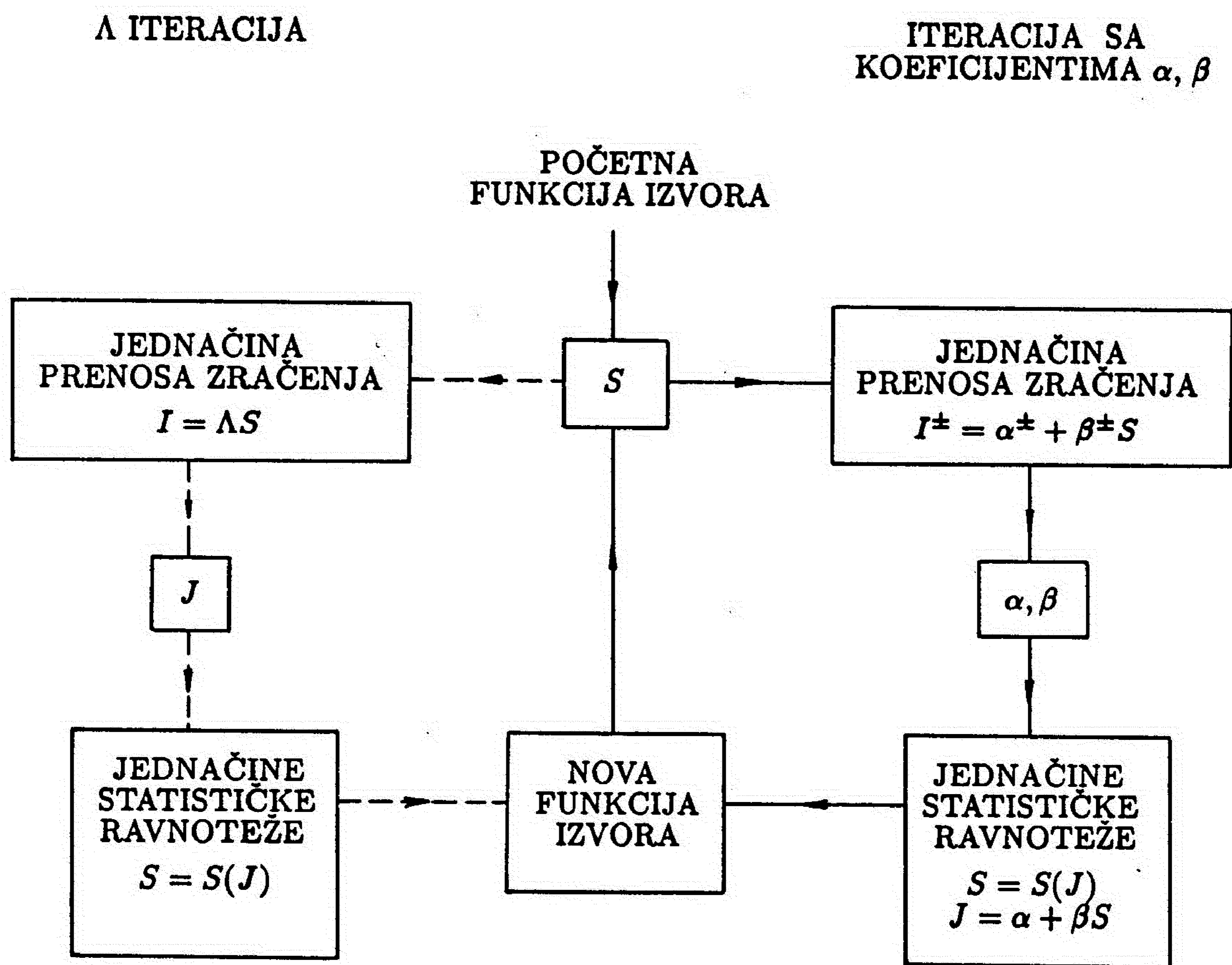
$$\alpha(\tau) = \frac{1}{2} \int \varphi_x dx \int d\mu [\alpha_{x\mu}^{+}(\tau) + \alpha_{x\mu}^{-}(\tau)]$$

$$\beta(\tau) = \frac{1}{2} \int \varphi_x dx \int d\mu [\beta_{x\mu}^{+}(\tau) + \beta_{x\mu}^{-}(\tau)] \quad (3.18)$$

Iterativna procedura koja koristi koeficijente definisane sa (3.18) prikazana je na sl.17. zajedno sa procedurom klasične Λ iteracije.

Radi uporedjenja, u tablici 6. su dati rezultati dobijeni korišćenjem oba ova algoritma. Test je vršen za poznati problem atoma sa dva nivoa. Za dve vrednosti parametra ε ($10^{-2}, 10^{-4}$) i dva uslova za

zaustavljanje iterativne procedure $\delta = 10^{-2}, 10^{-3}$, prikazane su greške u funkciji izvora na površini polu-beskonačne atmosfere u odnosu na poznatu tačnu vrednost $S(0) = \sqrt{\epsilon}$. Rezultati za manje vrednosti ϵ nisu prezentirani iz praktičnih razloga, s obzirom da se (a što se može zaključiti i na osnovu podataka u tablici) sa smanjenjem parametra ϵ , konvergencija za traženu vrednost δ ostvaruje u sve većem broju iteracija i sa neprimereno velikom greškom rešenja na površini. Rezultati dati u tablici ipak jasno ilustruju značajnu prednost u brzini i tačnosti rešenja dobijenih korišćenjem relacije (3.10) koja na implicitan način uvodi novu funkciju izvora u jednačine statističke ravnoteže.



Sl.17. Dijagram iterativne procedure sa koeficijentima α i β

Tablica 6. Greška rešenja na površini polu-beskonačne sredine za dato ε i broj iteracija potreban da se zadovolji kriterijum δ za konvergenciju

ε	Λ iteracija		Iteracija sa α i β	
	$\delta = 10^{-2}$	$\delta = 10^{-3}$	$\delta = 10^{-2}$	$\delta = 10^{-3}$
10^{-2}	28% (33)	4% (114)	7% (26)	1% (46)
10^{-4}	7777% (53)	268% (486)	25% (85)	2% (138)

Prodiskutujemo sada pitanje definisanja koeficijenata α i β linearne relacije.

Jednačinama (3.15)-(3.18) izveli smo koeficijent β u kome je sadržan doprinos lokalne funkcije izvora polju zračenja, polazeći direktno od formalnog rešenja jednačine prenosa. Ovo je ekvivalentno formiranju glavne dijagonale potpune Λ matrice:

$$J(\tau) = \Lambda(\tau, \tau')S(\tau') ,$$

tj., na ovaj način definisani koeficijent β je ekvivalentan aproksimativnom Λ^* operatoru Olson-a i dr. (1986), tj. Olson-a i Kunasz-a (1987) (videti odeljak 1.3.4. ovog rada). Koeficijent α , koji opisuje nelokalni deo polja zračenja, odgovara malom korektivnom članu $(\Lambda - \Lambda^*)S$.

Prednost koeficijenata α i β (odnosno OAB operatora Λ^*), izvedenih matematičkim aproksimacijama, u odnosu na izvesne fizičke modele (Rybicki-jeva aproksimacija saturacije u jezgru, napr.) je što sa manje proizvoljnosti slede iz opisa prenosa zračenja. Izvestan stepen proizvoljnosti ovog načina ubrzavanja iterativne procedure sadržan je u činjenici da konstrukcija glavne dijagonale, tj. oblik koeficijenata $\beta_{x\mu}^{\pm}(\tau_l)$ zavisi od polaznog matematičkog modela za funkciju izvora, pa samim tim i brzina konvergencije zavisiće od početnih aproksimacija za $S(\tau)$.

Na primeru atoma sa dva nivoa, gde se nova funkcija izvora određuje pomoću izraza (dobijenog zamenom (3.10) u (1.31)):

$$S(\tau) = \frac{\varepsilon B(\tau) + (1 - \varepsilon)\alpha(\tau)}{1 - (1 - \varepsilon)\beta(\tau)} \quad (3.19)$$

najbolje možemo ilustrovati činjenicu da se, s jedne strane, konvergencija obične Λ iteracije može ubrzati za faktor $(1-(1-\epsilon)\beta)$ odnosno $(1-(1-\epsilon)\Lambda^*)$, ako se pritom obezbedi da je korekcionni član $(1-\epsilon)\alpha$, tj. $(1-\epsilon)(\Lambda-\Lambda^*)S^i$ dovoljno mali, međutim da, sa druge strane, neodredjenosti u pravilnom izboru Λ^* i numeričke nestabilnosti reda većeg od ϵ mogu dovesti i do divergencije.

Problemi vezani za izbor aproksimativnog operatora i za pojavu divergencije u iterativnoj šemi koja ga koristi, a kada fizika problema ne pokazuje razlog (bar ne očigledan) za to, diskutovani su i u radu Allena i Winga (1978). Jedan od zaključaka tog rada, da do sada ne postoje nikakvi zadovoljavajući analitički ili semi-analitički metodi za optimalni izbor parametra kojim se fituje stepen aproksimacije operatora Λ^* , direktno navodi na neophodnost drugačijeg pristupa u definisanju samog operatora, tj. cele iterativne procedure.

Zato ćemo u narednim odeljcima pokušati da koristeći pozitivno iskustvo prethodnog poglavlja u kombinovanju fizičkog i matematičkog opisa prenosa zračenja, definišemo najpouzdanije koeficijente relacije (3.10) vraćajući se postepeno od perturbacione šeme izvornoj definiciji faktora iteracije koji vode stabilnom i brzom rešenju. Prvi korak je definitivni povratak modelu dva fluida i korišćenje njegovih osobina za ubrzavanje konvergencije. Zbog jednostavnosti, predložene iterativne procedure ćemo najpre izučavati i testirati na problemu prenosa zračenja atomima sa dva nivoa, a zatim ih ilustrovati jednim realnijim primerom rešavanja problema formiranja vodonikovih linija u datom modelu Sunčeve atmosfere.

3.3.2. Upotreba modela dva fluida za ubrzavanje iterativne procedure

Kao što smo videli u prethodnom odeljku kada smo iz formalnog rešenja jednačine prenosa (3.14) izveli koeficijente α i β , granična priroda problema (poznavanje upadnog zračenja na gornjoj granici atmosfere i izlaznog zračenja sa velikih dubina, tj., uslovno rečeno, na donjoj granici - zbog konačnog numeričkog opisa sistema), omogućava nam odvojeni tretman ulaznog (-) i izlaznog (+) polja zračenja.

Ovu činjenicu ćemo sada upotrebiti za ubrzavanje iterativne procedure. To ćemo prvo demonstrirati na primeru ubrzavanja obične Λ iteracije čiju smo sporu konvergenciju već ilustrovali (odeljci 1.3.2 i 2.2.1).

3.3.2.1. Λ^- iteracija

Λ iteraciju možemo ubrzati tako što ćemo Λ operator primeniti na poznatu funkciju izvora samo za dobijanje ulaznog polja zračenja $I_{x\mu}^-(\tau)$, tj. $J^-(\tau)$ na svim dubinama, koristeći formalno rešenje (1.16a), odnosno (3.14a), dok ćemo već u toku određivanja izlaznog polja zračenja vršiti korigovanje (određivanje nove) funkcije izvora.

Prvi deo iterativne procedure se simbolički može predstaviti u obliku:

$$J^-(\tau) = \Lambda^-(\tau, \tau')S(\tau') \quad (3.20)$$

Za određivanje izlaznog polja zračenja, polazimo od donjeg graničnog uslova (na $\tau = \tau_N$) koji možemo napisati u obliku identičnom (3.16b):

$$I_{x\mu}^+(\tau) = \alpha_{x\mu}^+(\tau) + \beta_{x\mu}^+(\tau)S(\tau) \quad (3.21)$$

a u koji je nova funkcija izvora već uneta implicitno. Koeficijenti $\alpha_{x\mu}^+(\tau_N)$ i $\beta_{x\mu}^+(\tau_N)$ ovog graničnog uslova su dati (napr.: $\alpha_{x\mu}^+(\tau_N) = 0$, $\beta_{x\mu}^+(\tau_N) = 1$). Integracijom (3.21) po pravcima i frekvencama u liniji imamo:

$$J^+(\tau) = \alpha^+(\tau) + \beta^+(\tau)S(\tau) \quad (3.22)$$

Sa $J^-(\tau)$ određenim na početku iteracije (3.20) i sa (3.22) definišu se koeficijenti relacije (3.10) na dubini $\tau = \tau_N$:

$$\alpha(\tau) = \frac{\alpha^+(\tau) + J^-(\tau)}{2}$$

$$\beta(\tau) = \frac{\beta^+(\tau)}{2} \quad (3.23)$$

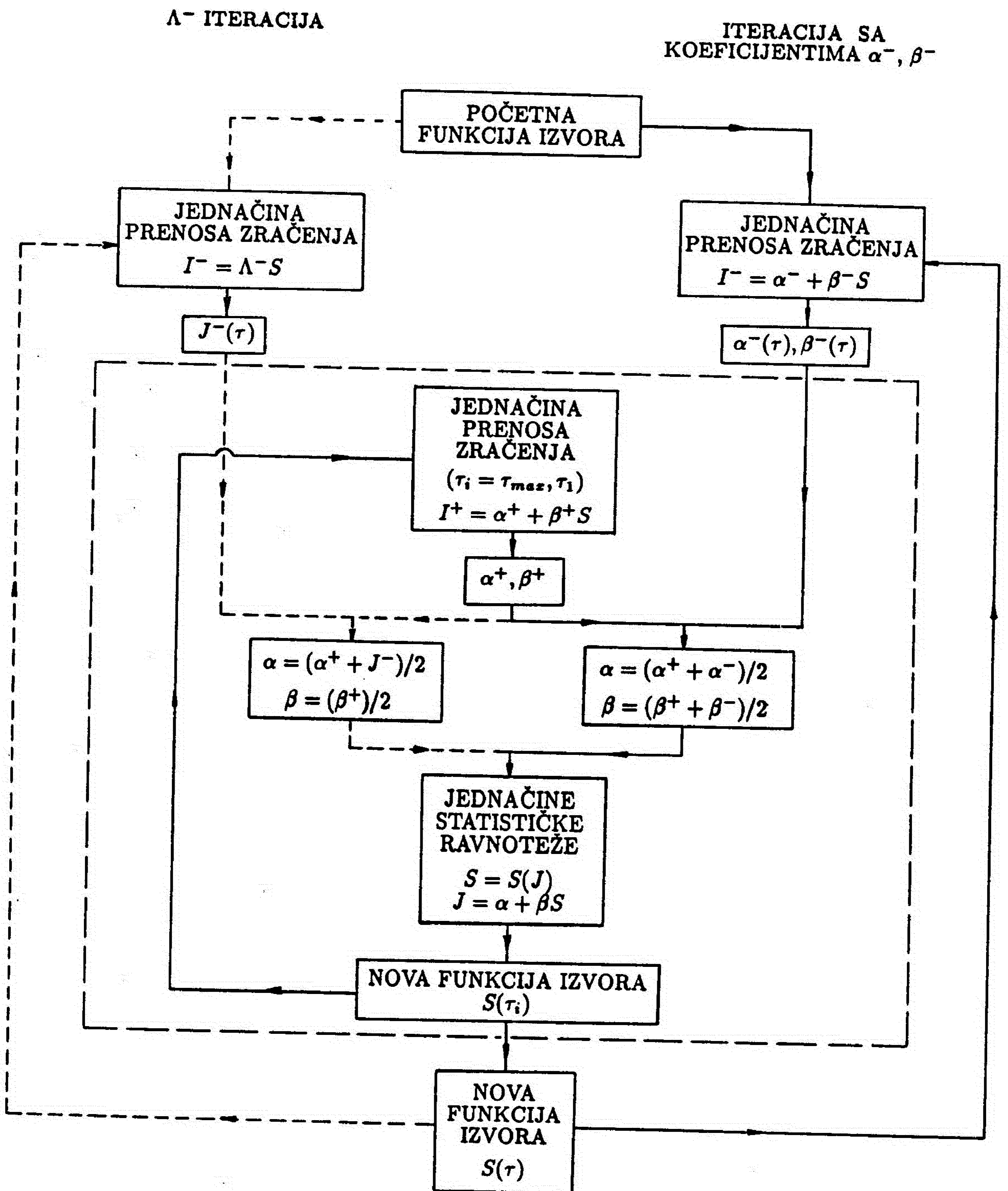
Relacija (3.10) se sa gornjim koeficijentima i funkcijom izvora u obliku (3.5) zamenjuje u jednačine statističke ravnoteže (3.6) na dubini τ_N , kako bi se njihovim rešavanjem (ili, u slučaju atoma sa dva nivoa iz (3.19))

dobila nova funkcija izvora na toj dubini. Sa tako dobijenom $S(\tau_N)$ i datim koeficijentima $\alpha_{x\mu}^+(\tau_N)$ i $\beta_{x\mu}^+(\tau_N)$, iz relacije (3.21) određuje se izlazni intenzitet zračenja $I_{x\mu}^+(\tau_N)$. Vidimo da se implicitnim uvođenjem nove funkcije izvora u granični uslov, tj. relaciju (3.22) i rešavanjem jednačina statističke ravnoteže dobijaju istovremeno i nova funkcija izvora $S(\tau)$ i odgovarajući izlazni intenzitet zračenja $I_{x\mu}^+(\tau)$. Za nastavak procedure neophodno je poznavati koeficijente $\alpha_{x\mu}^+(\tau_{N-1})$ i $\beta_{x\mu}^+(\tau_{N-1})$ graničnog uslova za naredni, viši sloj. Sa poznatim $I_{x\mu}^+(\tau_N)$ i $S(\tau_N)$, ovi koeficijenti se formiraju korišćenjem relacije (3.14b), odnosno (3.15b) u kojoj je primenom nekog matematičkog modela za $S(\tau)$ već izvršeno pregrupisanje članova formalnog rešenja (3.14b) za sloj (τ_{N-1}, τ_N) . Prema tome, koeficijent $\beta_{x\mu}^+(\tau_{N-1})$ će biti direktna funkcija monohromatske optičke dubine, dok je $\alpha_{x\mu}^+(\tau_{N-1})$ određeno i upravo dobijenim $I_{x\mu}^+(\tau_N)$ i $S(\tau_N)$. Sa tako određenim koeficijentima $\alpha_{x\mu}^+(\tau_{N-1})$ i $\beta_{x\mu}^+(\tau_{N-1})$ graničnog uslova (3.21), formiraju se koeficijenti $\alpha(\tau_{N-1})$ i $\beta(\tau_{N-1})$ prema (3.23), da bi se ponavljanjem cele procedure iz sloja u sloj stiglo do površine atmosfere. Rezultat je nova funkcija izvora u celoj atmosferi $S(\tau)$, sa kojom se počinje naredna iteracija. Procedura naizmeničnog određivanja ulaznog polja zračenja sa poznatom funkcijom izvora i određivanja izlaznog polja zračenja istovremeno sa novom funkcijom izvora (implicitno uvedenoj u jednačine statističke ravnoteže pomoću donjeg graničnog uslova), ponavlja se do ispunjenja zahtevanog kriterijuma za konvergenciju. Opisana procedura ove tzv. Λ^- iteracije prikazana je na sl.18.

Tablica 7. Greške rešenja i broj iteracija potrebnih da se zadovolji uslov δ za konvergenciju pri korišćenju Λ^- iteracije

ε	$\delta=10^{-2}$	$\delta=10^{-3}$
10^{-2}	14% (27)	2% (77)
10^{-4}	545% (53)	200% (460)

Poredjenjem rezultata u tablicama 6 i 7, vidimo da primena Λ^- iterativne procedure ubrzava rešavanje problema u odnosu na klasičnu Λ iteraciju. Ubrzavanje se manifestuje time što je uslov za konvergenciju δ zadovoljen sa znatno tačnijim rešenjem. Korekcije su brže, ali ne dovoljno da bi bile korisne za praktične namene.



Sl.18. Dijagram procedure Λ^- iteracije i iteracije koja koristi koeficijente α^- i β^-

3.3.2.2. Iteracija sa koeficijentima α^- i β^-

Način ubrzavanja konvergencije predložen u odeljku 3.3.2.1. je od značaja ako se primeni na proceduru koja već vodi tačnom rešenju u razumnom broju iteracija. Takav je slučaj sa, na primer, iterativnom šemom koja koristi koeficijente α i β (3.18), a koju možemo ubrzati na sledeći način. Prvi deo procedure je isti, tj. sa datom funkcijom izvora $S(\tau)$, polazeći od graničnog uslova na površini, prema relaciji (3.15a) formiramo koeficijente $\alpha_{x\mu}^-(\tau)$ i $\beta_{x\mu}^-(\tau)$ na svim dubinama. Integracijom po pravcima i frekvencama u liniji dobijamo koeficijente $\alpha^-(\tau)$ i $\beta^-(\tau)$ izraza (3.17), tj. izraza:

$$J^-(\tau) = \alpha^-(\tau) + \beta^-(\tau)S(\tau) \quad (3.24)$$

za ulazno polje zračenja, u kome je nova funkcija izvora sadržana implicitno. Sada, umesto da na isti način formiramo i sve koeficijente $\alpha_{x\mu}^+(\tau)$ i $\beta_{x\mu}^+(\tau)$, odnosno $\alpha^+(\tau)$ i $\beta^+(\tau)$ za izlazno polje zračenja, a potom da ukupne koeficijente (3.18) sa linearnom relacijom (3.10) zamenimo u jednačine statističke ravnoteže kako bismo odredili novu funkciju izvora, koristićemo odgovarajuće relacije (3.21), tj. (3.22), za izlazno polje zračenja kako bismo sloj po sloj odredjivali istovremeno novu funkciju izvora i izlazni intenzitet zračenja.

Tako, za svaki sloj, počev od "dna" i idući ka površini atmosfere formiramo koeficijente:

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \frac{\alpha^+(\tau) + \alpha^-(\tau)}{2} \\ \beta(\tau) &= \frac{\beta^+(\tau) + \beta^-(\tau)}{2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

relacije (3.10) čijom zamenom u jednačine statističke ravnoteže dobijamo novu funkciju izvora za taj sloj sa kojom odredjujemo izlazno zračenje.

Razlika ove iterativne procedure u odnosu na onu koja odmah formira ukupne koeficijente α i β sa datom funkcijom izvora, analogna je razlici koja postoji izmedju Λ i Λ^- iteracije. Na slici 18. prikazane su procedure Λ^- iteracije i upravo opisane iteracije sa koeficijentima α^- i β^- sa jasno uočljivom razlikom u prvom delu iterativne procedure. Iteracijom sa koeficijentima α^- i β^- ostvaruje se brza konvergencija upravo

zbog implicitnog uvodjenja nove funkcije izvora relacijom (3.24) i, kao i u Λ^- iteraciji, njenog odredjivanja istovremenim rešavanjem jednačina statističke ravnoteže i jednačine prenosa za izlazno polje zračenja.

Tablica 8. Greške rešenja i broj iteracija potrebnih da se zadovolji uslov δ za konvergenciju pri korišćenju iteracije sa koeficijentima α^- i β^-

ϵ	$\delta=10^{-2}$	$\delta=10^{-3}$
10^{-2}	2% (16)	0.2% (25)
10^{-4}	7% (44)	0.6% (63)

Rezultati prikazani u tablici 8. ilustruju ovu veću efikasnost u korekciji rešenja. Medjutim, sa uobičajenim kriterijumom za konvergenciju, $\delta = 1\%$, greška na površini je još uvek znatna, dok je za dobijanje rešenja tačnijeg od 1% potreban priličan broj iteracija.

3.3.3.3. Iteracija sa faktorom f^-

Pošto smo odvojenim tretmanom ulaznog i izlaznog polja zračenja, obezbedili pravilan opis prenosa i pozitivne rezultate u prethodnim primerima, vratimo se prvobitnoj ideji sadržanoj u izrazu (3.7) za koju smo rekli da, kao odnos dve homologne veličine, predstavlja jedini pravi iteracioni faktor. Definišimo sada faktor f^- kao odnos ulaznog polja zračenja i odgovarajuće funkcije izvora:

$$f^-(\tau) = \frac{J^-(\tau)}{S(\tau)} \quad (3.26)$$

Izračunat sa vrednošću funkcije izvora dobijene u prethodnoj iteraciji i odgovarajućeg ulaznog polja zračenja, ovaj faktor se uvodi u iterativnu proceduru na sledeći način:

$$J^-(\tau) = f^-(\tau)S(\tau) = \left(\frac{J^-(\tau)}{S(\tau)} \right)^o S(\tau) \quad (3.27)$$

Sa (o) su označene vrednosti koje odgovaraju prethodnoj iteraciji. Poređenjem sa relacijom (3.24) možemo primetiti da je, sada, ovakvom definicijom faktora iteracije koeficijent $\alpha^-(\tau) = 0$, a $\beta^-(\tau) = f^-(\tau)$. Sa tako

definisanim koeficijentima, procedura odredjivanja nove funkcije izvora je identična opisanoj u prethodnim odeljcima 3.3.2.1. i 3.3.2.2, odnosno prikazanoj na sl.18.

Medjutim, kao što se može videti iz tablice 9., ova neznatna razlika u definiciji koeficijenata α^- i β^- linearne relacije (3.24) vodi vrlo brzoj i stabilnoj konvergenciji ka tačnom rešenju. Sa kriterijumom $\delta = 1\%$ za prekid iterativne procedure, rešenja za sve (pa i ekstremno male vrednosti ε) tačna su do na 0.6% i dobijaju se u vrlo malom broju iteracija.

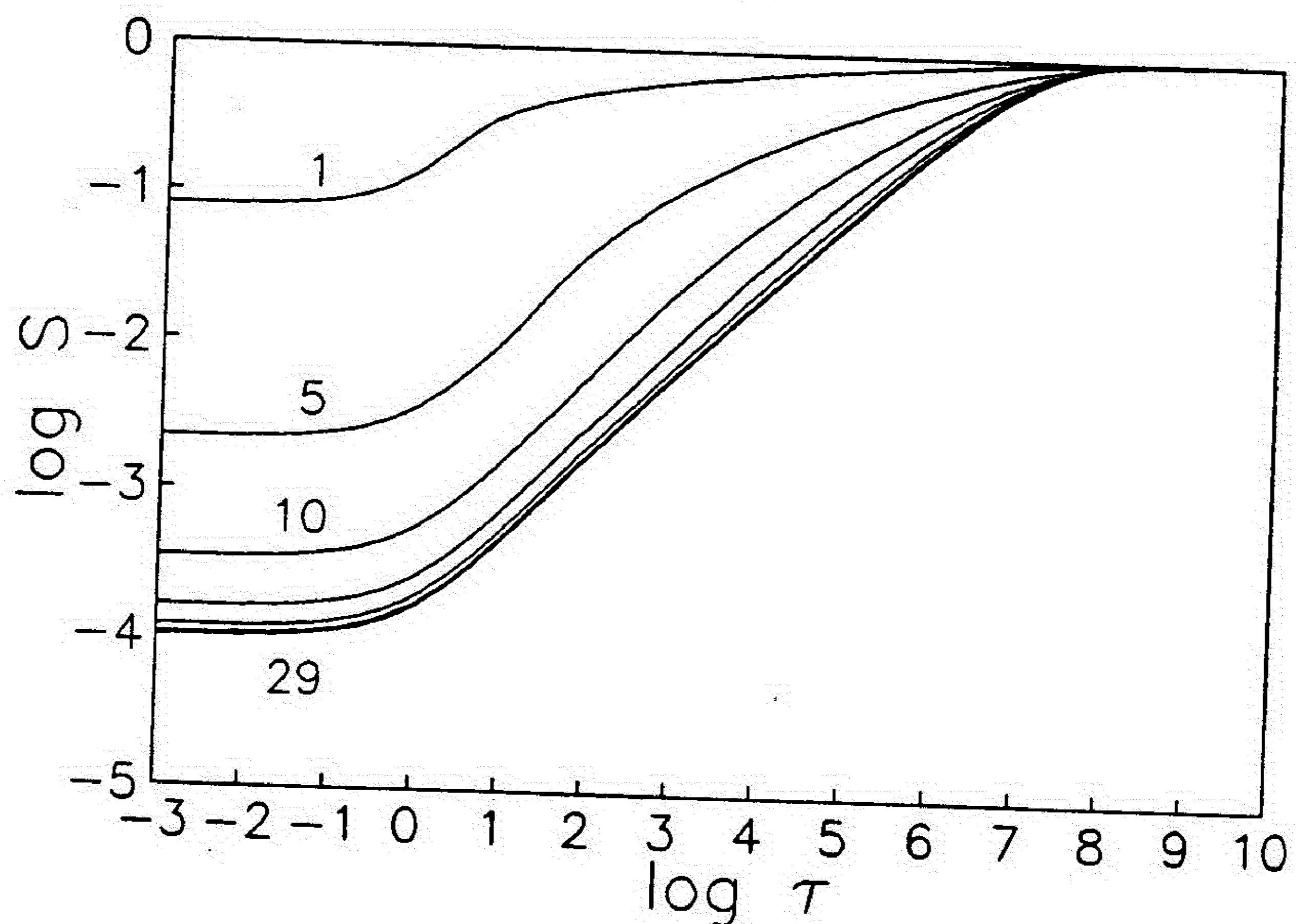
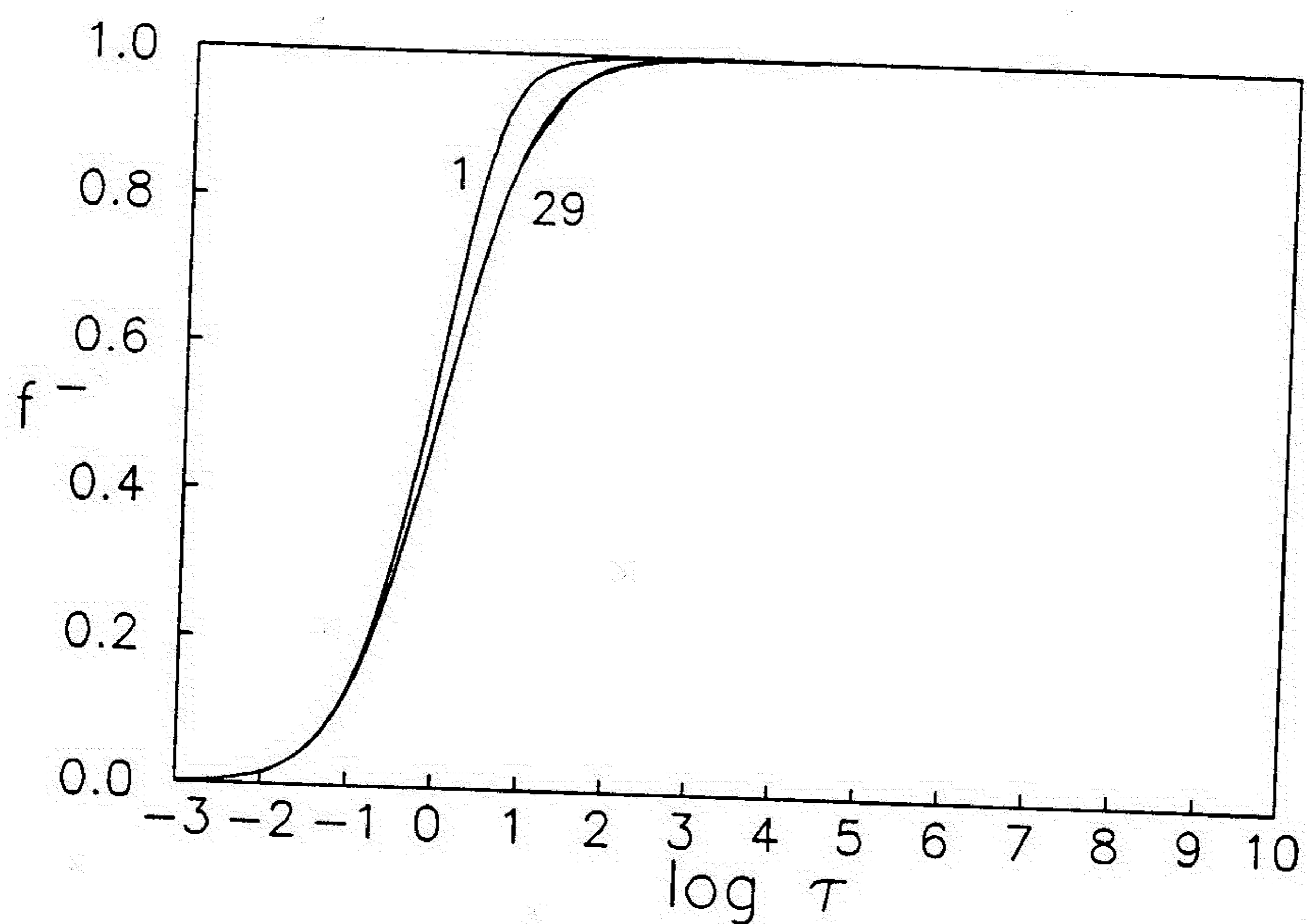
Tablica 9. Rešenja na površini polu-beskonačne sredine za razne vrednosti ε i broj iteracija potreban da se zadovolji uslov $\delta = 10^{-2}$ za konvergenciju korišćenjem faktora f^-

ε	$S(\tau = 0)$	Br. iter.
10^{-2}	0.9986(-1)	8
10^{-4}	0.9935(-2)	14
10^{-6}	0.9997(-3)	21
10^{-8}	1.0019(-4)	29

Kada se tačnost i brzina procedure koja koristi faktor iteracije f^- uporedi sa odgovarajućim svojstvima prethodnih procedura (tablice 6-8), jasna je prednost definisanja koeficijenta linearne relacije kao odnosa sličnih fizičkih veličina. Podsetimo da je za razliku od faktora (3.7), uticaj izvoda funkcije izvora ovde pravilno tretiran primenom modela dva fluida.

Poredjenjem iterativnih procedura opisanih u poslednja tri odeljka, možemo primetiti evoluciju u definiciji koeficijenata α^- i β^- . U skladu sa diskusijom koju smo imali na primeru jednačine (3.19), vidimo da smanjenje korekcionog člana $(1 - \varepsilon)\alpha$, koje je u ovim procedurama obezbedjeno smanjenjem vrednosti α^- (od J^- u Λ^- iteraciji do 0 u iteraciji sa faktorom f^-), obezbedjuje bržu konvergenciju.

Dobra kvazi-invarijantna svojstva faktora f^- se jasno mogu videti na sl.19. Na slici je takodje prikazana funkcija izvora u sredini sa $\varepsilon = 10^{-8}$ u toku iteracija.



Sl.19 Faktor $f^-(\tau)$ i funkcija izvora $S(\tau)$ dobijena iterativnom procedurom koja koristi ovaj faktor u naznačenom broju iteracija ($\varepsilon = 10^{-8}$).

3.3.3. Primer

Iterativne procedure, predložene u prethodnim odeljcima, koje koriste koeficijente linearne relacije izmedju polja zračenja u liniji i funkcije izvora za ubrzavanje konvergencije, ilustrovaćemo sada na jednom ti-

pičnom realnom problemu prenosa zračenja. Izabrali smo tzv. prototip problem formiranja vodonikovih linija u zadatom modelu Sunčeve atmosfere, koji je postavljen u radu Athay et al. (1968) sa ciljem da omogući testiranje metoda i programa koji rešavaju prenos zračenja atomima sa više nivoa.

Problem se sastoji u tome da se za atom vodonika, sa 3 vezana i jednim slobodnim stanjem, u svakoj tački zadatog modela Sunčeve atmosfere, odrede naseljenosti nivoa, tj. funkcije izvora odgovarajućih linija $Ly\alpha$, $Ly\beta$ i $H\alpha$. Podaci za prelaze u linijama i kontinuumu dati su u tablicama 10 i 11, a atmosferski model prikazan je u tablici 12.

Tablica 10. Podaci za prelaze u liniji.

Prelaz	Frekvenca	g_j/g_i	A_{ji}	Sudarni parametar γ_{ij}
1-2	2.466(15)	8/2	4.68(8)	3.99(-8)
1-3	2.923(15)	18/2	5.54(7)	6.01(-9)
2-3	4.570(14)	18/8	4.39(7)	6.01(-7)

Tablica 11. Podaci za prelaze u kontinuumu.

Prelaz	Frekvenca	a_{ik}	Sudarni parametar γ_i
1-k	3.287(15)	6.30(-18)	9.83(-9)
2-k	0.821(15)	1.42(-17)	1.50(-7)
3-k	0.364(15)	2.05(-17)	8.19(-7)

U radu Athay et al. (1968) data su takodje rešenja četiri grupe autora (grafički ili tabelarno) koje su ovaj problem rešavale nezavisnim metodama. Jedan od tih rezultata (Beebe et al.) koji je jedini dat u vidu tablice (Tablica 2 u pomenutom radu), korišćemo radi poredjenja sa našim rešenjima.

Postavljeni problem smo rešavali koristeći 4 iterativne procedure (detaljno opisane u prethodnim odeljcima):

- (1) običnu Λ iteraciju
- (2) iteraciju sa koeficijentima α i β
- (3) iteraciju sa koeficijentima α^- i β^-
- (4) iteraciju sa faktorom f^-

Tablica 12. Model atmosfere (Athay et al., 1968; p.182)

$h(km)$	T	n_e	n_H	$k^c(1216)$	$k^c(1026)$	$k^c(6563)$
.7000D+04	.2000D+06	.2980D+10	.2490D+10	.1990D-14	.1990D-14	.1990D-14
.6500D+04	.1400D+06	.4260D+10	.3560D+10	.2840D-14	.2840D-14	.2840D-14
.6000D+04	.1000D+06	.5970D+10	.4980D+10	.3970D-14	.3970D-14	.3970D-14
.5500D+04	.7000D+05	.8530D+10	.7120D+10	.5670D-14	.5670D-14	.5670D-14
.5000D+04	.5000D+05	.1190D+11	.9960D+10	.7940D-14	.7940D-14	.7940D-14
.4500D+04	.4000D+05	.1490D+11	.1250D+11	.9930D-14	.9930D-14	.9930D-14
.4000D+04	.3500D+05	.1710D+11	.1420D+11	.1130D-13	.1130D-13	.1130D-13
.3800D+04	.3400D+05	.1760D+11	.1470D+11	.1170D-13	.1170D-13	.1170D-13
.3600D+04	.3350D+05	.1780D+11	.1490D+11	.1190D-13	.1190D-13	.1190D-13
.3400D+04	.3300D+05	.1810D+11	.1510D+11	.1200D-13	.1200D-13	.1200D-13
.3200D+04	.3150D+05	.1890D+11	.1580D+11	.1260D-13	.1260D-13	.1260D-13
.3000D+04	.3000D+05	.1990D+11	.1660D+11	.1320D-13	.1320D-13	.1320D-13
.2800D+04	.2600D+05	.2390D+11	.2010D+11	.1590D-13	.1590D-13	.1590D-13
.2600D+04	.2100D+05	.3110D+11	.2820D+11	.2070D-13	.2070D-13	.2070D-13
.2400D+04	.1600D+05	.4890D+11	.4410D+11	.3250D-13	.3250D-13	.3280D-13
.2200D+04	.1250D+05	.6490D+11	.8860D+11	.4330D-13	.4330D-13	.4430D-13
.2000D+04	.1000D+05	.8110D+11	.1960D+12	.5490D-13	.5450D-13	.5940D-13
.1800D+04	.9000D+04	.9010D+11	.4310D+12	.6400D-13	.6240D-13	.7790D-13
.1600D+04	.8000D+04	.1010D+12	.8960D+12	.8780D-13	.7940D-13	.1280D-12
.1400D+04	.7700D+04	.1050D+12	.2100D+13	.1350D-12	.1080D-12	.2340D-12
.1300D+04	.7600D+04	.1070D+12	.3540D+13	.1930D-12	.1410D-12	.3600D-12
.1200D+04	.7550D+04	.1070D+12	.6890D+13	.3200D-12	.2150D-12	.6430D-12
.1100D+04	.7400D+04	.1100D+12	.1430D+14	.6780D-12	.4190D-12	.1320D-11
.1000D+04	.7000D+04	.1160D+12	.1990D+14	.1310D-11	.7530D-12	.1770D-11
.9000D+03	.6600D+04	.1230D+12	.5980D+14	.5700D-11	.2880D-11	.3290D-11
.8000D+03	.6100D+04	.1330D+12	.1510D+15	.4040D-10	.1840D-10	.2570D-11
.7000D+03	.5600D+04	.1450D+12	.4240D+15	.5320D-09	.2370D-09	.3480D-11
.6500D+03	.5300D+04	.1530D+12	.6710D+15	.2480D-08	.1100D-08	.5790D-11
.6000D+03	.5000D+04	.1620D+12	.1000D+16	.1210D-07	.5380D-08	.1060D-10
.5460D+03	.4665D+04	.1740D+12	.1670D+16	.8540D-07	.3770D-07	.2360D-10
.4960D+03	.4630D+04	.1830D+12	.2650D+16	.1640D-06	.7240D-07	.4040D-10
.4510D+03	.4600D+04	.2570D+12	.4070D+16	.3800D-06	.1680D-06	.8890D-10
.4070D+03	.4600D+04	.3640D+12	.6090D+16	.7500D-06	.3310D-06	.1880D-09
.3510D+03	.4600D+04	.5590D+12	.1030D+17	.1720D-05	.7600D-06	.4850D-09
.2950D+03	.4600D+04	.8680D+12	.1720D+17	.3810D-05	.1680D-05	.1260D-08
.2530D+03	.4630D+04	.1170D+13	.2510D+17	.6060D-05	.2670D-05	.2410D-08
.1970D+03	.4800D+04	.2100D+13	.4050D+17	.8830D-05	.3910D-05	.6180D-08
.1530D+03	.4990D+04	.3310D+13	.5690D+17	.1000D-04	.4440D-05	.1200D-07
.9500D+02	.5370D+04	.7160D+13	.8600D+17	.9290D-05	.4140D-05	.3120D-07
.5400D+02	.5675D+04	.1420D+14	.1120D+18	.9170D-05	.4100D-05	.6770D-07
.0000D+00	.6440D+04	.7030D+14	.1440D+18	.7370D-05	.3330D-05	.3030D-06
-.3100D+02	.7180D+04	.2660D+15	.1580D+18	.6090D-05	.2800D-05	.9770D-06
-.5100D+02	.7790D+04	.6670D+15	.1620D+18	.5290D-05	.2510D-05	.2210D-05
-.7800D+02	.8460D+04	.1610D+16	.1710D+18	.5210D-05	.2590D-05	.5320D-05
-.9900D+02	.9120D+04	.3340D+16	.1730D+18	.5540D-05	.2960D-05	.1170D-04

Iteracije su u svim slučajevima započete sa naseljenostima atomskih nivoa u LTR, odnosno funkcijom izvora jednako odgovarajućoj u kontinuumu koja je problemom definisana na sledeći način:

$$S_{ij}^c(\tau) = \begin{cases} B_{ij}(T), & h < 2000 \text{ km;} \\ B_{ij}(T = 10.000), & h > 2000 \text{ km.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Za formalno rešenje jednačine prenosa korišćena je sledeća diskretizacija: 24 frekventnih tačaka u Voigtovom profilu na intervalu $[0, 100\Delta\nu_D]$, 4 pravca μ i svih 45 tačaka atmosferskog modela.

Pri korišćenju procedure Λ iteracije (1), rešenje jednačine prenosa $J_{ij}(\tau)$ je zamenjeno direktno u jednačine statističke ravnoteže (3.6), dok su u ostale tri procedure formirani odgovarajući koeficijenti $\alpha_{ij}(\tau)$ i $\beta_{ij}(\tau)$ čijom se zamenom u jednačine statističke ravnoteže, poslednje mogu prepisati u obliku:

$$n_i \sum_{j \neq i} (U_{ik} + D_{il}) = \sum_{j \neq i} n_j (U_{jk} + D_{jl}) \quad (3.29)$$

U (3.29), članovi U_{ik} i D_{il} označavaju prelaze naviše (upward) i naniže (downward) sa nivoa i na odgovarajući viši k i niži nivo l , respektivno. Oni imaju jednostavan opšti oblik:

$$U_{ij} = \frac{g_j}{g_i} \frac{A_{ji}}{\zeta_{ij}} \alpha_{ij} + C_{ij}$$

$$D_{ji} = A_{ji} \left(1 + \frac{\alpha_{ij}}{\zeta_{ij}} - \beta_{ij} \right) + C_{ji}$$

Ovde su: A_{ji} - Einstein-ov A koeficijent, $\zeta_{ij} = 2h\nu_{ij}^3/c^2$, a α_{ij} i β_{ij} poznati koeficijenti za svaki prelaz u liniji.

Za odredjivanje pojedinih radijativnih i sudarnih članova u jednačinama statističke ravnoteže korišćeni su izrazi dati u prvom poglavlju rada ((1.20) i (1.21) za vezano-vezane radijativne prelaze, (1.26) i (1.27) za sudarne deekscitacije i rekombinacije) kao i izrazi predloženi u samom radu Athay et al. (1968) za vezano-slobodne radijativne prelaze:

$$R_{ik} = \frac{8\pi\nu_{ki}^3 a_{ik}}{c^2} E_1\left(\frac{h\nu_{ki}}{kT_{ri}}\right)$$

$$R_{ki} = \frac{n_i^*}{n_k^*} \frac{8\pi\nu_{ki}^3 a_{ik}}{c^2} E_1\left(\frac{h\nu_{ki}}{kT_{ri}}\right)$$

(sa T_{ri} - temperaturom zračenja, datom funkcijom dubine prema tablici 13), i za sudarne ekscitacije i jonizacije:

$$C_{ij} = n_e \gamma_{ij} e^{-h\nu_{ij}/kT}$$

$$C_{ik} = n_e \gamma_i e^{-h\nu_{ij}/kT}$$

Table 13. Temperatura zračenja.

$$T_{r1} = \begin{cases} 6800K, & h \geq 1000 \text{ km;} \\ T, & h < 1000 \text{ km,} \end{cases}$$

$$T_{r2} = \begin{cases} 5400K, & h \geq 50 \text{ km;} \\ T, & h < 50 \text{ km,} \end{cases}$$

$$T_{r3} = \begin{cases} 4800K, & h \geq 200 \text{ km;} \\ T, & h < 200 \text{ km.} \end{cases}$$

Sistem (3.29) rešavan je zajedno sa jednačinom održanja broja čestica:

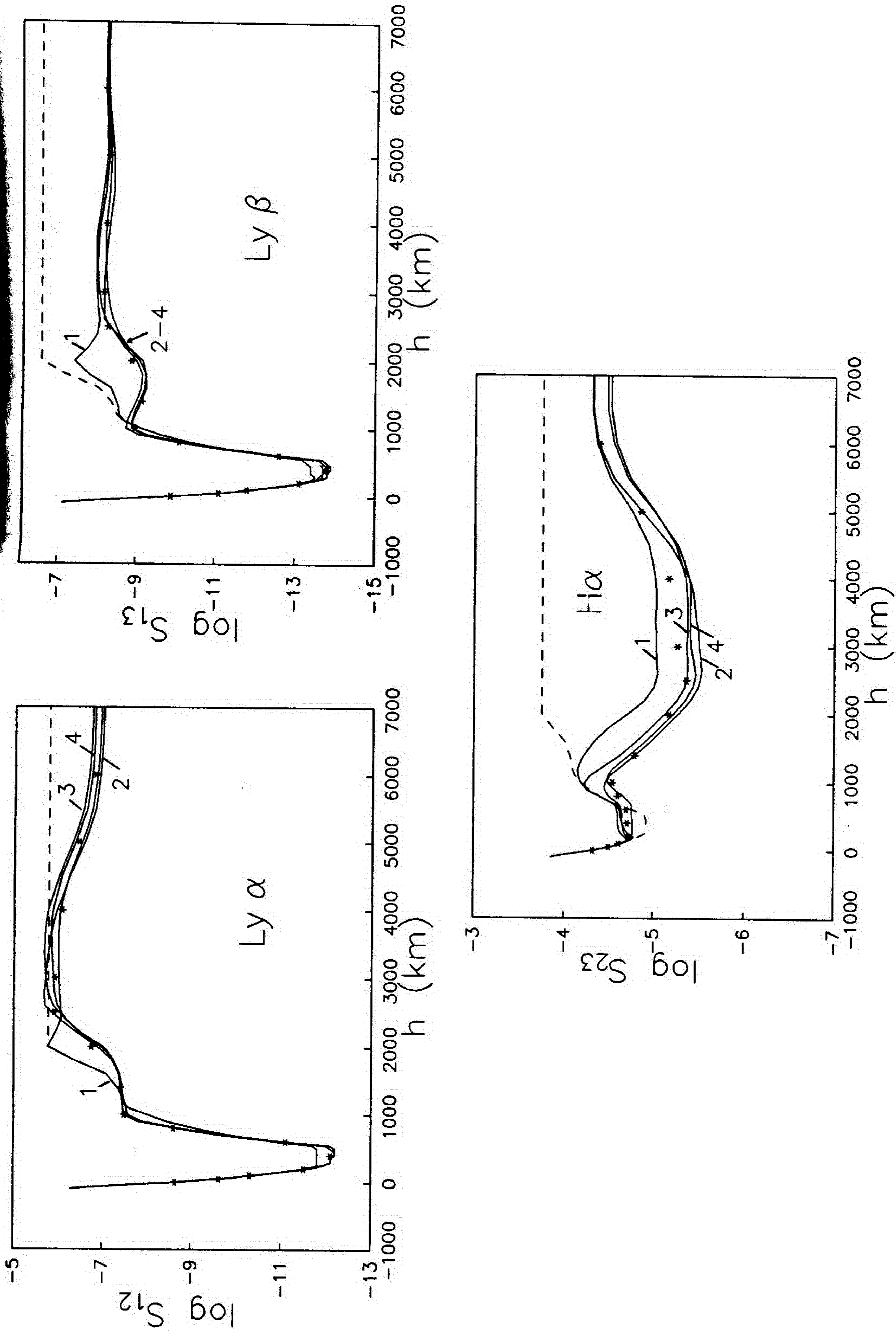
$$n_1 + n_2 + n_3 + n_k = n_H$$

(n_H je ukupna koncentracija H-atoma data modelom u tablici 12.), Gauss-Jordanovom šemom eliminacije (Carnahan et al., 1969). Sa tako dobijenim novim skupom naseljenosti, tj. novim funkcijama izvora

$$S_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\frac{g_j n_i}{g_i n_j} - 1}$$

iterativna procedura se ponavlja (zavisno od korišćenih faktora) do ispunjenja uslova za konvergenciju $\delta = 1\%$, na svim dubinama i za sva prelaze.

Sa ovim uslovom i korišćenjem četiri pomenute metode rešenja su dobijena u 59, 38, 25 i 10 iteracija, respektivno. Funkcije izvora za 3 vodonikove linije prikazane su na sl.20, zajedno sa rešenjem koje su dobili Beebe et al. (1968). Slaganje rezultata dobijenih pomoću poslednje tri



Sl.20 Funkcije izvora za tri vodonikove linije: $Ly\alpha$, $Ly\beta$ i $H\alpha$. Isprekidana linija odgovara početnom rešenju - funkciji izvora u kontinuumu, zvezdicom su označena rešenja Beebe et al. (1968), a od 1-4 iterativne procedure pobrojane u tekstu

metode (koje koriste linearnu relaciju (3.10)) i rezultata Beebe-a je zadovoljavajuće. Λ iteracija u odnosu na najbrže rešenje konvergira 6 puta sporije, ali kao što vidimo sa znatnim greškama na velikim optičkim dubinama. To i u ovoj relativno realističnoj primeni potvrđuje dosadašnju diskusiju da se rešenje na velikim dubinama primenom klasične Λ iteracije praktično ne koriguje.

Ovaj test primer nam je ilustrovaao vrlo pozitivna konvergentna svojstva metode. Vidimo da primena metode iteracionih faktora omogućava dobijanje brzog i tačnog rešenja u realnijim astrofizičkim primenama. Algoritam je izuzetno jednostavan za programiranje, a modifikacije koda radi primene na drugi problem ili model sa znatno većim brojem atomskih nivoa ne predstavljaju značajan dodatni napor.

Univerzitet u Beogradu
Priradno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ **Datum** _____

ZAKLJUČAK

U ovoj tezi je razvijen metod iteracionih faktora za rešavanje problema prenosa zračenja u spektralnim linijama zvezdanih atmosfera. Formiranje spektralnih linija u zadatom atmosferskom modelu je problem samo-usaglašenog odredjivanja polja zračenja u ovim linijama i naseljenosti atomskih nivoa koje ih generišu. S obzirom na jaku nelokalnu prirodu procesa prenosa zračenja, neophodna je iterativna procedura za rešavanje problema koji ovaj proces tretira.

Metod koji je ovde razvijen predstavlja generalizaciju ideje promenljivih Eddingtonovih faktora primenjenu u revidiranoj šemi Λ iteracije. Osnovna ideja metode je u nalaženju kvazi-invarijanti problema (faktora iteracije) čijim se uvodjenjem u iterativnu proceduru obezbedjuje brza korekcija ka "tačnom" rešenju. Tako se u ovoj iterativnoj šemi smenjuju formalno rešenje jednačine prenosa zračenja korišćeno za izračunavanje faktora iteracije i rešavanje jednačina momenata (integralnih jednačina prenosa) zatvorenih ovim faktorima.

Da bi obezbedili dobra konvergentna svojstva procedure, ovi faktori moraju biti praktično nezavisni od početnog skupa rešenja, dostižući gotovo tačnu vrednost već u prvih par iteracija. Brzina kojom oni postaju tačni koeficijenti relacija kojima se zatvaraju jednačine problema, odredjuje brzinu konvergencije ka "tačnom" rešenju. Da bi ovi zahtevi bili zadovoljeni, najoptimalniji način je da se iteracioni faktori definišu kao odnosi homolognih relevantnih veličina problema. U problemu formiranja linija koji ovde razmatramo, to su odnosi linearnih funkcionala intenziteta zračenja.

Sa druge strane, ovi faktori treba da budu povezani sa nepoznatim veličinama problema na takav način da njihovo odredjivanje u proceduri uzastopnih korekcija bude što je moguće jednostavnije. Sa ovako definisanim opštim zahtevima koje treba da ispunjavaju iteracioni faktori, rešavali smo posebno dve grupe problema formiranja linija u kojima se, zbog različitog oblika zavisnosti koeficijenata prenosa od polja zračenja, zahteva drugačiji pristup definisanju iterativne procedure i faktora iteracije.

Tako smo najpre metodu razvili za slučaj prenosa zračenja (formiranja linija) atomima sa dva nivoa u kome eksplicitni oblik funkcije izvora direktno vodi definiciji faktora. S obzirom da funkcija izvora sadrži različite momente intenziteta zračenja (integrale intenziteta po nezavisnim parametrima: frekvencama i pravcima), iteracioni faktori treba da budu definisani kao njihovi odnosi. Ovi faktori onda formiraju koeficijente relacije zatvaranja za sistem odgovarajućih momenata jednačine prenosa zračenja. Mali dodatni napor u odnosu na običnu Λ iteraciju koji predstavlja rešavanje jedne (skalarne) diferencijalne jednačine drugog reda sa iteracionim faktorima kao skoro tačnim koeficijentima, vodi izuzetno brzom konvergenciji ka "tačnom" rešenju.

Pokazali smo da u rešavanju problema formiranja linija postoji više načina da se generalizuje ideja promenljivih Eddingtonovih faktora, tj. da se zatvore momenti jednačine prenosa zračenja. Dobili smo da najopštija relacija zatvaranja iterativnoj proceduri obezbeđuje najstabilnija i najbrža konvergentna svojstva. Razlog je što se na taj način korekcije najpravnomernije preraspodeljuju medju svim momentima intenziteta koji su relevantni za problem. Takodje je značajno napomenuti da eksplicitno uvođenje svih značajnih fizičkih svojstava problema (anizotropnost polja zračenja uslovljena gradijentom funkcije izvora i postojanjem slobodne granice u atmosferi, kao i korektan tretman fotona u krilima linije kao aktivnim komponentama u prenosu zračenja na velikim optičkim dubinama) u definiciju faktora iteracije, vodi ka najboljim konvergentnim svojstvima. Otuda, dobra matematička simulacija fizičkih procesa, ostvarena definicijom iteracionih faktora kao koeficijenata najopštije relacije zatvaranja, omogućava da se tačno rešenje dobije u malom broju iteracija i za veoma veliko odstupanje od uslova LTR. Izučavanje ovog pojednostavljenog fizičkog problema je vrlo značajno jer služi da se analiziraju različite mogućnosti relacija zatvaranja, njihova uzajamna povezanost, tačnost, numerička stabilnost i konvergentna svojstva predloženog metoda.

Metod iteracionih faktora je takodje predložen i za rešavanje problema prenosa zračenja atomima sa više nivoa. Kako u ovom slučaju nije moguće imati eksplicitnu relaciju izmedju funkcije izvora (koefici-

jenata prenosa) u liniji i njenog polja zračenja, neophodno je razviti nešto drugačiji pristup. Faktori sada moraju biti definisani tako da vode direktno (bez pomoćnih jednačina momenata) novoj funkciji izvora, ali na drugačiji način nego što je to činjeno u proceduri Λ iteracije. Naime, oblik jednačina statističke ravnoteže i funkcije izvora omogućava da se definiše linearna relacija između polja zračenja u liniji i njene funkcije izvora, kojom se nepoznata funkcija izvora uvodi implicitno u jednačine statističke ravnoteže koje time postaju linearne samo po nepoznatim naseljenostima atomskih nivoa. Koeficijenti ove relacije igraju ulogu iteracionih faktora. Sledeći zaključke izvedene u prethodnoj analizi, otkrili smo da upotreba dvo-fluidnog modela i direktni odnos između polja zračenja i funkcije izvora vodi stabilnom ubrzanju iterativne procedure. Opet smo dobili tačan rezultat u malom broju iteracija za ekstremno male vrednosti ne-LTR parametra ϵ .

Možemo rezimirati neke od značajnih prednosti ove metode. Prvo, ona predstavlja jednostavnu, brzo-konvergentnu iterativnu proceduru koja obezbedjuje tačna rešenja problema u celom modelu. S obzirom da ne zahteva nikakve matrične operacije (jedine su one koje se koriste pri rešavanju linearnog sistema jednačina statističke ravnoteže), za njenu primenu nisu neophodni ni veliki računski prostor ni vreme. Jednostavan algoritam je lako kontrolisati. Štaviše, izgleda da se može jednostavno primeniti na mnoge astrofizičke probleme različite kompleksnosti. Iterativna procedura, gotovo skoro isto toliko jednostavna kao šema Λ iteracije omogućava laku implementaciju metode u rešavanje problema u kome prenos zračenja treba istovremeno rešavati sa drugim fenomenima (modeliranje atmosfera u ne-LTR uslovima, problemi vremenski zavisne hidrodinamike, komplikovanije geometrije sa poljima brzina, itd.).

LITERATURA

- Abramowitz, M., Stegun, I.: 1964, *Handbook of Mathematical Functions*, Washington D.C., V.S. Dept. of Commerce
- Allen, R.C., Wing, G.M.: 1978, in *Solution Methods for Integral Equations (Theory and Applications)*, ed. by M.A. Goldberg, Plenum Press, New York, 59
- Athay, R.G.: 1972a, *Radiation Transport in Spectral Lines*, Dordrecht, Reidel.
- Athay, R.G.: 1972b, *Astrophys. J.* 176, 659.
- Athay, R.G., Avrett, E.H., Beebe, H.A., Johnson, H.R., Poland, A.I., Cuny, Y.: 1968, in *Resonance Lines in Astrophysics*, ed. R.G. Athay, J. Mathis and A. Skumanich (Boulder: National Center for Atmospheric Research), 171.
- Auer, L.H.: 1971, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 573.
- Auer, L.H., Heasley, J.: 1976, *Astrophys. J.* 205, 165.
- Auer, L.H., Mihalas, D.: 1969, *Astrophys. J.* 158, 641.
- Auer, L.H., Mihalas, D.: 1970, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 149, 65.
- Avrett, E.H.: 1965, *SAO Spec. Rep. No.* 174, 101.
- Avrett, E.H., Hummer, D.G.: 1965, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 130, 295.
- Borsenberger, J., Oxenius, J., Simonneau, E.: 1987, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 37, 331.
- Cannon, C.: 1973a, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 627.
- Cannon, C.: 1973b, *Astrophys. J.* 185, 621.
- Cannon, C.: 1985, *The Transfer of Spectral Line Radiation*, Cambridge Univ. Press
- Carlsson, M.: 1986, *Uppsala Astronomical Observatory Report*, 33.
- Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O.: 1969, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York
- Chandrasekhar, S.: 1950, *Radiative Transfer*, Oxford University Press, Dover edition, 1960.
- Crivellari, L., Simonneau, E.: 1991, *Astrophys. J.* 367, 612.
- Feautrier, P.: 1964a, *C. R. Acad. Sci. Paris* 258, 3189.

- Feautrier, P.: 1964b, in *Proceedings of the First Harvard-Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres*, SAO Spec. Rep. No. 167, Cambridge, Mass., p.108.
- Frisch, U., Frisch, H.: 1975, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 173, 167.
- Frisch, H.: 1988, in *Radiation in moving gaseous media*, 18th Advanced Course of the Swiss Soc. of Astrophys. and Astronomy, Y. Chmielewski and T. Lanz (Eds.), pp. 337-448.
- Hamann, W.-R.: 1985, *Astron. Astrophys.* 148, 364.
- Hamann, W.-R.: 1986, *Astron. Astrophys.* 160, 347.
- Hamann, W.-R., Wessolowski, U.: 1990, *Astron. Astrophys.* 227, 171.
- Hummer, D.G.: 1968, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 138, 73.
- Hummer, D.G., Rybicki, G.B.: 1967, *Methods in Comput. Phys.* 7, 53.
- Hummer, D.G., Rybicki, G.B.: 1971, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 9, 237.
- Hummer, D.G., Voels, S.A.: 1988, *Astron. Astrophys.* 192, 279.
- Jefferies, J.T.: 1968, *Spectral Line Formation*, Ginn Blaisdell, Waltham, Mass.
- Jefferies, J.T., Thomas, R.N.: 1958, *Astrophys. J.* 127, 667.
- Jefferies, J.T., Thomas, R.N.: 1959, *Astrophys. J.* 129, 401.
- Kalkofen, W. (Ed.): 1984, *Methods in Radiative Transfer*, Cambridge Univ. Press
- Kalkofen, W. (Ed.): 1987, *Numerical Radiative Transfer*, Cambridge Univ. Press
- King, J.I.F.: 1955, *Astrophys. J.* 121, 711.
- King, J.I.F.: 1956, *Astrophys. J.* 124, 272.
- Mihalas, D.: 1970, *Stellar Atmospheres*, 1st ed., Freeman, San Francisco.
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, 2nd ed., Freeman, San Francisco.
- Mihalas, D.: 1985, *J. Comput. Phys.* 57, 1.
- Olson, G.L., Auer, L.H., Buchler, J.R.: 1986, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 35, 431.
- Olson, G.L., Kunasz, P.B.: 1987, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 38, 325.
- Puls, J., Herrero, A.: 1988, *Astron. Astrophys.* 204, 219.
- Rybicki, G.B.: 1971, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 589.

- Rybicki, G.B.: 1972, in *Line Formation in the Presence of Magnetic Fields*, R.G. Athay, L.L. House and G. Newkirk, Jr. (Eds.), High Altitude Observatory, Boulder, CO p.145.
- Scharmer, G.B.: 1981, *Astrophys. J.* 249, 720.
- Scharmer, G.B.: 1984, in *Methods in Radiative Transfer*, W. Kalkofen ed., Cambridge Univ. Press, 173.
- Scharmer, G.B., Nordlund, A.: 1982, *Stockholm Obs. Report*, 19.
- Scharmer, G.B., Carlsson, M.: 1985, *J. Comput. Phys.* 59, 56.
- Simonneau, E.: 1979, *Transfert de rayonnement dans les atmospheres etendues*, Doktorska disertacija, Paris
- Simonneau, E.: 1980, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 23, 73.
- Simonneau, E., Crivellari, L.: 1988, *Astrophys. J.* 330, 415.
- Sobolev, V.V.: 1957, *Astron. Zhurn.* 34, 694.
- Tošić, D.Dj.: 1987, *Uvod u numeričku analizu*, Naučna knjiga, Beograd
- Werner, K.: 1986, *Astron. Astrophys.* 161, 177.
- Werner, K.: 1989, *Astron. Astrophys.* 226, 265.
- Werner, K., Husfeld, D.: 1985, *Astron. Astrophys.* 148, 417.

Univerzitet u Beogradu
 Prirodno-matematički fakultet
 MATEMATIČKI FAKULTET
 BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____