АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

НАПИСАО

ДИМИТРИЈЕ НЕШИЋ

ПРОФЕСОР МАТЕМАТИКЕ НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ.

БЕОГРАД
ШТАМПАНО У КРАЉЕВСКО-СРПСКОЈ ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1883

НАПОМЕНА.

Алгебарска анализа, коју сада предајем јавности, може се сматрати у неку руку као наставак и допуна ниже алгебре, а у исти мах и као припрема за више делове математике нарочито диференцијални и интегрални рачун.

Као наставак и допуна алгебре може се сматрати алгебарска анализа за то, што она многе теорије, које су у алгебри тек тако рећи наглашене или непотпуно разрађене, даље развија а од чести и са свим довршује. Тако на пример теорија извлачења корена, која је у алгебри непотпуно изведена, у алгебарској анализи потпуно се исцрпљује. То је исто случај и са теоријом логаритама, редова, уображених количина и т. д.

Као припрема за више делове математике сматра се и може се сматрати алгебарска анализа за то, што се у њој млади умови поступно и темељито упознају са истинама и појмовима, који се у диференцијалном и интегралном рачуну на тако рећи сваком кораку јављају и на којима се поменути рачуни и оснивају. Тако се у овој науци ученик упознаје први пут темељито са појмом бесконачно великих и малих количина, са појмом непрекидности функција, са појмом граница и т. д. А после и сам у правом смислу философски начин претресања појединих питања неисказано је удесан, да младе умове потпуно спреми и приуготови за свесно слушање и истинско разумевање највиших и најтежих делова математике.

Без те предходне спреме, коју нам даје алгебарска анализа, учење диференцијалног и интегралног рачуна постаје двојином теже и дуже, а да и ненапомињем то, да тек упоређивањем метода тих рачуна са одговарајућим методама алгебарске анализе ученик долази до савршено јасног и свесног разумевања и једних и других метода, и да тек пошто се он упознао са методама алгебарске анализе, може видети у њиној правој светлости и ценити као што треба, методе диференцијалног и интегралног рачуна.

У овоме што до сада рекох налази се оправдања и разлога томе, што је и алгебарској анализи остављено места у школској математичној настави не само код нас, него и у осталом свету.

Што се тиче самог материјала у овој књизи, он је осим увода, где се говори о променљивим и сталним количинама, функцијама и подели њиној, распоређен у седам делова са једним додатком.

У првом делу изложена је мислим доста опширно теорија бесконачно великих и малих количина, теорија граница и непрекидности функција. Овде чиним пажљивим читаоца на начин, како је дефинисан појам непрекидности функција. Кад се за појам непрекидности усвоји дефиниција у овој књизи, из које дефиниције остале познате потичу као последице, онда се на много бржи, лакши и

увиђавнији начин доказују многе истине, као што су на пример оне у № 32.

У другом делу изложена је опширно и темељито теорија бесконачних редова, теорија њихове збирљивости, као и сабирања и множења истих; даље теорија двојних редова као и теореме неодређених сачинилаца. Ја се надам, да ми се неће замерити због прилично великог броја теорема, које се тичу збирљивости редова, ако се само узме на ум то, да ни једна од њих није толико опширна, те те да би могла поднети за све могуће случајеве, и ако се даље узме у обзир и то, да нам неке од њих помажу баш у оним приликама, у којима нас друге издају. Науку о двојним редовима и њиној збирљивости узео сам за то, што се без помоћи двојних редова неке функције не могу развити у ред са свом математичном оштрином и ригорозношћу.

У трећем делу развијене су различите функције у бесконачне редове и бесконачне производе и изложена је теорија збирљивости бесконачних производа. Узгред чиним пажљивим читаоца на методе сазнавања збирљивости бесконачних производа, које су изложене у №-ма 107 и 108.

У четвртом делу изложена је теорија уображених количина у довољној опширности, а у петом теорија верижних разломака. У овом петом делу послужио сам се на неколико места детерминантама. То сам учинио због веће елеганције а и краткоће при извођењу неких образаца.

У шестом делу извео сам неколико циклометријских образаца и доказао основну теорему алгебре, да једначина m-г степена мора имати m корена ни више ни мање.

У седмом делу изложио сам главне основе теорије детерминаната, као и њену примену на решавање линеарних једначина са ма колико непознатих, на решавање хомогених линеарних једначина, на избацај — елиминацију — једне непознате из две једначине са две непознате ма ког степена и т. д. Нека ми је слободно свратити пажњу читаоца на то, како је просто, лако и разумљиво изведена и доказана теорема о множењу детерминаната, што код многих писаца није случај.

Ја се надам да ће нашим нарочито млађим математичарима овај део о детерминантама бити добро дошао, јер у нашој математичној литератури ово је први пут, да се о њима пише. У исто доба мислим, да су основи детерминаната у овој књизи изложени тако јасно и разговетно, да ће их сваки, који их с поле пажње буде пропратио, врло лако савладати и на тај начин спремљен моћи приступити проучавању опширнијих дела о тој ствари.

Писци, којима сам се служио, јесу на првом месту Schlömilch и Hattendorff а после Bertrand, Briot, Laurent, Stern, Dienger, Herr, Brioschi, Studnička и т. д

У Београду
29 Априла 1883.

Димитрије Нешић,
професор вел. школе.

САДРЖАЈ.

ПРВИ ДЕО.

Бесконачно велике и мале количине и непрекидност функција.

ДРУГИ ДЕО.

О редовима простим и двојним. Правило неодређених сачинилаца.

ТРЕЋИ ДЕО.

Развијање функција у редове.

ЧЕТВРТИ ДЕО.

О уображеним количинама.

ПЕТИ ДЕО.

О верижним разломцима.

ШЕСТИ ДЕО.

Неколико циклометријских образаца и Гаусова основна теорема алгебре.

СЕДМИ ДЕО.

Основи теорије детерминаната.

АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

УВОД.

Функције, променљиве и сталне количине.

1. Кад две количине зависе једна од друге тако, да кад се једна од њих мења и друга се мора мењати, да свакој произвољној вредности, коју смо једној од њих дали, одговара увек извесна вредност друге, онда се каже да су те две количине функције једна од друге. Тако н. пр. пут, који пролази тело, које се у празном простору и једнаком брзином креће, јесте функција времена, за које се оно — тело — креће; јер кад је познато време, за које се тело креће; онда је тиме тачно одређена и дужина пута. које оно прелази и кад се време, кроз које се тело креће, мења , онда се мора мењати и дужина пута који оно прелази. Обратно, време за које се тело креће јесте функција пута, који оно прелази. Исто тако полупречник и површина круга јесу функције једна од друге јер кад се једна од тих количина мења , онда се мора мењати и друга, и вредношћу једне од тих увек је одређена и вредност друге.

Кад се закон, по коме две количине једна од друге зависе, преведе на алгебарски језик, добија се једначина у којој је алгебарским језиком исказан исти закон. Тако н. пр. кад се једно тело креће једнаком брзином онда закон, по коме време, за које се тело креће и пут, који оно при том прелази, једно од друго зависе, тај закон састоји се у томе, што је дужина пута, који тело прелази, сразмерна времену. Ако је t време, за које се тело креће а s пут, који оно прелази, онда закон по коме s и t једно од другог зависе, исказан је у једначини $s = ct$.

Кад смо добили једначину између двеју количина, које на горе поменути начин једна од друге зависе, онда помоћу исте једначине можемо свакој вредности, коју смо једној од тих двеју количина са свим произвољно дали израчунати одговарајућу вредност друге количине. Она од двеју количина, којој дајемо произвољне вредности или која се, — као што се то каже — произвољно мења, зове се независно или произвољно променљива, или прапроменљива или најзад просто: променљива количина. Она друга количина, која се мења и мора мењати, кад се прапроменљива количина мења, зове се зависно променљива количина или функција прапроменљиве. Ако н. пр. у горњој једначини $s=ct$, време t сматрамо као прапроменљиво, пут s биће зависно променљива количина или функција времена t. Кад је једначина између двеју променљивих количина решена односно зависно променљиве количине, онда се ова зове откривеном (*explicit*) функцијом прапроменљиве, ако ли једначина није решена односно зависно променљиве количине, онда се ова зове скривена (*implicit*) функција прапроменљиве количине. Тако једначином $s=ct$, s је дато као откривена функција прапроменљиве t. На против једначином $a^{x+y} = b$, y је дато као скривена функција прапроменљиве x, Кад се та једначина реши односно y добија се: $y = \frac{log\, b}{log\, a} - x$ и сада је y дато као откривена функција од x.

2. Са чисто рачунског гледишта са свим је све једно која ће се од две променљиве количине, са којима имамо посла, сматрати као прапроменљива т. ј. као таква, којој се моги давати са свим произвољне вредности. Али та неограничена слобода располагања у применама се у неколико, из различитих обзира, ограничава.

Тако н. пр. у рачуну је све једно или сматрао време за које се једно тело креће, као прапроменљиво, а пут, који тело прелази, као функцију времена или обратно, време као функцију пута. Али кад би време сматрао као функцију пута — што је као што казах са чисто рачунског гледишта допуштено — онда би се огрешио о наше свакидашње искуство, које нам јасно казује, да је време права и истинска прапроменљива количина, јер се оно мења и то још не зависно од нас и да се са временом мења и дужина пута, који тело прелази. Исто се тако може полупречник круга сматрати као функција његове површине, јер кад је ова позната и полупречник је одређен. Али таково узимање било би барем не природно, јер ми знамо да се непосредним мерењем лакше може наћи полупречник него ли површина круга и да с тога одредба полупречника иде увек пред одредбом површине, која се последња из већ познатог полупречника може израчунати, због чега се она и мора сматрати као функција полупречника и т. д.

3. У једначини између две променљиве количине налазе се још и друге количине, које остају увек исте при ма каквим вредностима променљивих количина. Тако н. пр. у једначини $y = \pi x^2$, која прегставља површину круга, коме је x полупречник, налази се и број π, који се при мењању од x не мења, дакле остаје сталан; у једначини $s = \frac{g\ t^2}{2}$ која претставља висину, са које је

једно тело за време t пало, налази се број $g = 9{\cdot}808^m$, који при ма каквој вредности од t остаје исти.

Такове количине, које при мењању променљивих количина остају сталне, дакле од променљивих никако и не зависе, зову се сталне (*constant*) количине или параметри. Оне се у рачунима означавају првим словима азбуке a, b, c, . . . док се међу тим променљиве количине означавају са последњим словима азбуке x, y, z. . . . .

4. Има случајева где више од две количине једна од друге зависе тако, да кад су вредности свију тих количина осим једне познате, онда је тиме и вредност те једне савршено одређена. У таквом случају каже се да су све те количине функције једна од друге. Тиме се ништа друго неће да каже до то, да се једна ма која од тих количина мора мењати, кад се све остале мењају и да је њена вредност тачно одређена вредностима које смо тим осталим количинама са свим произвољно дали. Тако н. пр. из Геометрије знамо, да запремина једног цилиндра, његова висина и полупречник основе зависе једно од другог тако, да је вредностима ма којих двеју од тих количина увек одређена и вредност треће. Тако је запремина цилиндра тачно одређена његовом висином и полупречником основе и кад се висина и полупречник основе буду мењали, мора се мењати и запремина цилиндра и то на известан начин и по известном закону. који је последица закона, по коме те три количине једна од друге зависе.

Кад се закон, по коме више количина једне од других зависе, преведе на алгебарски језик, добија се једначина између свију тих количина, у којој је алгебарским језиком исказан закон њихове узајамне зависности. Помоћу те једначине у стању смо онда увек одредити вредност

једне, ма које од тих количина, која одговара вредностима, које смо свима осталима са свим произвољно дали. Количине, којима дајемо са свим произвољне вредности, зову се опет независно или произвољно променљиве или прапроменљиве или најзад просто: променљиве количине, а она једна количина, чије су вредности увек одређене вредностима прапроменљивих количина и која се мора мењати, кад се оне буду мењале, зове се зависно променљива количина или функција прапроменљивих: Тако ако у горњем примеру висину цилиндра и полупречник његове основе сматрамо као прапроменљиве количине, запремина његова биће зависно променљива количина, она ће се онда звати функција висине цилиндра и полупречника основе.

У једначини, која се добија, кад се на алгебарски језик преведе закон, по коме више променљивих количина једне од других зависе, налазиће се осим променљивих количина у опште узевши и такве количине, које од променљивих не зависе и остају вазда исте. Такве количине зову се опет сталне количине или параметри.

Ако је добивена једначина решена односно зависно променљиве количине, онда се ова зове откривеном функцијом прапроменљивих, од који зависи; у противном пак случају скривеном, јер се тада не види, како се њена вредност добија из вредности прапроменљивих количина. Тако н. пр. јадначином $z = \pi x^2 y$, где z значи запремину, x полупречник основе а y висину цилиндра, z је дато као откривена функција од x и y. Напротив једначином $(x - a z)^2 + (y - b z)^2 - r^2 = o$ где су a, b, r, сталне, x и y прапроменљиве количине, z је дато као скривена функција прапроменљивих x и y.

5. Кад је једна једначина решена односно зависно променљиве количине или функције, тако да је она сама

на левој страни, а све остало на десној страни онда се цео израз на десној страни зове аналитични израз функције. Тако н. пр. у једначини $y = ax^2 + b$. Аналитични израз сваке функције, узет сам за се и одвојено од једначине, у којој је, и у опште сваки израз састављен из сталних и прапроменљивих количина може се назвати а и зове, и то с правом, функција прапроменљивих количина, које се у њему налазе. Тако н. пр. изрази:

$$a^x,\ 2x^2 + 3x - 5,\ \frac{2x + 3}{x^2 - 5} \text{ и т. д:}$$

јесу функције од x; Изрази:

$$e^{x+y},\ ax^2 + by^2 + c \text{ и т. д.}$$

јесу функције прапроменљивих x и y, израз $x^2 + y^2 + z^2$ јесте функција прапроменљивих x, y, и z.

6. Кад хоћемо да означимо само то, да имамо посла са једном функцијом, која зависи од једне или више прапроменљивих количина, а нетиче нас се, како она од њих зависи, онда мећемо у заграду прапроменљиве количине запетама одвојене, а пред заградом једно од слова f, F, φ, Φ, ψ, која се слова зову функцијони знаци. Тако дакле $f(x)$ значи буди какову функцију од x: $\varphi(x, y)$ буди какову функцију прапроменљивих x и y и т. д. Исто тако симболичким једначинама:

$$u = \varphi(x),\ u = F(x, y),\ u = \psi(x, y, z) \text{ и т. д:}$$

исказујемо, да је u функција — буди каква у првом случају од x, у другом од x и y, а у трећем од x, y, z.

7. Две функције зову се сличне, кад оне зависе од различних прапроменљивих али на истоветан начин. Такове су н. пр.

$$a - bx^2 + c.\,tgx \text{ и } a - by^2 + c.\,tgy.$$

Сличне функције означавају се истим функцијоним знаком. Тако $f(x)$ и $f(y)$ значе две ма какове функције које зависе, једна од x, а друга од y али на сасвим исти начин,

8. Симболи:

$$f(x + y),\ f(x - y),\ f(x^2 - y^2),\ f(xy),\ f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ и т. д:}$$

значе такође функције двеју прапроменљивих x и y; али они имају ту одлику, што се у њима изрази:

$$x + y,\ x - y,\ x^2 - y^2,\ xy,\ \frac{x}{y} \text{ и т. д.}$$

јављају, као једна прапроменљива; ако у таковим функцијама заменимо $x + y$, $x - y$, $x^2 - y^2$ и т. д. са z, оне се јављају у облику $f(z)$, т. ј. као функције једне само промењиве z.

У понеким приликама, нужно је назначити, да се у функцији осим прапроменљивих налазе и извесне сталне количине; зарад тога пишу се ове такође у загради н. пр. $F(x, \alpha)$. Најзад, кад хоћемо да означимо, да имамо посла са ма каквом скривеном функцијом једне или више прапроменљивих количина, служићемо се једном од ових симболичних једначина:

$$f(x, y) = 0,\ F(x, y, z) = 0$$

где место f и F као функцијоне знаке могу употребити и друге као, φ, ϕ, ψ и т. д.

9. Функција се зове једнозначна, кад она за сваку могућу особену вредност прапроменљиве добија само једну

јединцату вредност; у противном случају она се зове многозначна, а то посебице двозначна, трозначна и т. д. како кад за сваку особену вредност промењљиве функција добија увек по две или увек по три и т. д. вредности. Тако је једначином:

$$9x^2 + y^2 + 6xy - x + 2 = 0$$

y дато као двозначна скривена функција од x, јер кад се једначина реши, добија се

$$y = -3x \pm \sqrt{x-2}.$$

Функције:

$$arc\,sin\,x,\quad arc\,cos\,x,\quad arc\,tg\,x \text{ и т. д.}$$

јесу као што смо у тригонометрији видели, многозначне.

10. Кад је $u = f(y)$ а $y = \varphi(x)$, онда се u зове посредна функција или функција функције. Кад се у првој једначини y замени вредношћу из друге, онда се u јавља као непосредна функција од x, т. ј. $u = f\left[\varphi(x)\right]$. Исто тако ако је $u = F(x,y)$ а $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, n се зове сложена функција.

11. Функција се зове алгебарска, кад су радње, којима су подвргнуте прапромењљиве, од којих она зависи, тако зване алгебарске, дакле сабирање, одузимање, множење, дељење, подизање на степен са сталним иначе ма каквим изложиоцем. Тако су:

$$u = 2x - 3x^2 + \frac{5}{x} - \sqrt{x} \text{ и } u = ax^2 + bxy + cy^2 + d,$$

алгебарске функције, прва од x а друга од x и y.

Свака функција, која није алгебарска, зове се трансцендентна. Најважније су трансцендентне функције: изложилачна функција: a^x, логаритамска: $log\,x$, тригонометријске: $sin\,x$, $cos\,x$ и т. д. и изврнуте тригонометријске — циклометријске — $arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$ и т. д.

Од свију могућих функција одабрато је неколико најпростијих, које се не дају свести на простији облик и којих је вредност одмах позната, чим је позната вредност прапромењљиве. Оне се зову просте функције.

Ево тих функција:

$$a + x,\ ax,\ x^a,\ A^x,\ sin\,x$$

$$a - x,\ \frac{a}{x},\ x^{\frac{1}{a}}\ log\,x,\ arc\,sin\,x$$

којима могу још придоћи и функције:

$$cos\,x,\ tg\,x,\ cotg\,x, \text{ и } arc\,cos\,x,\ arc\,tg\,x,\ arc\,cotg\,x.$$

У овим изразима a значи буди какав број положан или одречан; A значи положан број иначе ма какав; код тригонометријских функција $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$ и $cotg\,x$, x значи дужину лука кад је полупречник, са којим је он описан, узет за јединицу и т. д.

12. Алгебарска функција зове се рационална, кад су у њојзи, пошто је она наравно по могућству сведена, прапромењљиве не налазе нигде под кореним знаком или што је све једно са разломљеним изложиоцем; у противном случају функција је ирационална. Н. пр.

$$y = ax + bx^3,\ u = \frac{ax^2 - by^2}{Ax + By + C},\ y = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$u = ax^2 - by + c\sqrt{x + y}.$$

Функција се зове цела, кад се прапроменљиве, од којих она зависи, не налазе нигде у имениоцу, или што је све једно са одречним изложиоцем, у противном случају функција је разломљена. Прва, трећа и четврта од горњих функција јесу целе а друга је разломљена.

По овоме у појединим члановима једне целе и рацијоналне функције од x могу се налазити као чиниоци степени од x само са целим и положним изложиоцима. Највећи изложилац од x у функцији одређује њен степен; она је m-ог степена, кад је највећи изложилац од x број m. Н. пр. $a + bx$, $a + bx + cx^2$,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ и } a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + kx^m$$

јесу целе и рацијоналне функције од x 1-ог, 2-ог, 3-ћег и т. д. m-ог степена. (линеарна, квадратна, кубна и т. д.).

Исто тако у појединим члановима целе и рацијоналне функције прапроменљивих x и y могу се налазити као чиниоци производи степена од x и y само са целим и положним изложиоцима; и функција је m-ог степена, кад се међу њеним члановима налази члан, у коме је збир изложилаца од x и y једнак броју m и тај је збир изложилаца већи, но у ма ком другом члану функције. Н. пр.: $ax + by + c$ јесте цела и рацијонална функција од x и y првог степена (линеарна) а $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ другог степена (квадратна) и т. д.

Општи облик разломљених рацијоналних функција од x јесте:

$$\frac{a + bx + cx^2 + \dots + kx^m}{A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^n}$$

Разломљена функција зове се чиста разломљена, кад је именилац вишег степена но бројилац; у противном случају функција је нечисто разломљена и т. д.

13. Једна функција, која зависи од више прапроменљивих $x, y, z, \dots$ зове се хомогена m-ог степена — кад је по умножају променљивих са t и она сама умножена са t^m, кад је дакле:

$$f(tx, ty, tz, \dots) = t^m f(x, y, z \dots)$$

Тако су:

$$x^2 + 3xy - y^2,\; y + \sqrt{x^2 + y^2},\; \sqrt{x - y},\; log x - log y$$

$$\frac{ax - by}{x^2 + y^2};\quad \frac{2x^3 - 3y\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}}{\sqrt[3]{x + y + z}}$$

хомогене функције редом 2-ог, 1-ог, $^1|_2$-ог, 0-ог — 1-ог, $\frac{2}{3}$ степена.

Из овога, што је већ речено, јасно сљедује:

1-во. Збир или разлика двеју хомогених функција m-ог степена јесте хомогена функција m-ог степена.

2-го. Производ од ма колико хомогених функција различнога степена јесте хомогена функција; изложилац њеног степена јесте број, који изађе, кад се саберу изложиоци степена умножених функција.

3-ће. Количник двеју хомогених функција јесте хомогена функција; изложилац њеног степена једнак је разлици између изложиоца дељениковог и изложиоца делиочевог степена.

4-то. m-ни степен једне хомогене функције јесте опет хомогена функција, изложилац њеног степена једнак је производу из степеног изложиоца m и изложиоца степена дате функције.

5-то. m-ни корен хомогене функције јесте хомогена функција; изложилац њеног степена јесте број, који излази, кад се изложилац степена дате функције подели са кореним изложиоцем m.

6-то. Трансцендентна функција, која зависи од две или више прапромењљивих, јесте хомогена функција 0-ог степена, кад је израз под трансцендентним знаком (*log*, *sin*, *cos*, и т. д.), хомогена функција 0-ог степена. Али ако израз под трансцендентним знаком није хомогена функција 0-ог степена, онда дата трансцендентна функција није хомогена. Н. пр. $tg\, \frac{x - y}{\sqrt{x + y}}$ и т. д.

14. Периодним функцијама зову се оне, које добијају периодно исте вредности за вредности прапромењљиве, које су једна од друге једнако удаљене, или којих је размак сталан. Од величине тога размака зависи и дужина периоде. Тако н. пр. знамо из тригонометрије, да при рашћењу лука у положном или одречном смислу синус и косинус добијају исте вредности, кад год првашњи лук буде прирастао или се смањио за 2π, 4π, 6π, и т. д. Дакле су $\sin x$ и $\cos x$ периодне функције а њина је периода 2π.

15. Функција, која зависи од две или више прапромењљивих, зове се симетрична или алтернирајућа, како се кад она после измене ма којих двеју прапромењљивих, или никако не мења или само свој знак мења.

Тако су:

$$x + y,\ x^2 + 2xy + y^2;\ (x - y)^2;\ \frac{f(x) - f(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)}$$

симетричне а:

$$x - y,\ x^y - y^x,\ \sin(x - y);\ (x - y)\,(x - z)\,(y - z).$$

алтернирајуће функције. Квадрат једне алтернирајуће функције јесте очевидно симетрична функција.

Односно склопа алгебарских целих и рационалних симетричних функција има се за сада ово рећи:

1-во. Ако је функција једночлана, онда сви чиниоци (основци), неузимајући при том у рачун сталне чиниоце, морају имати једнаке изложиоце н. пр. $ax^3y^3z^3$.

2-го. Ако је симетрична функција вишечлана и ако је u један члан њен, који се по измени ма којих двају основака претвара у v, онда очевидно међу члановима симетричне функције, мора се налазити и v.

3-ће Дакле морају сви чланови симетричне функције имати исти број основака и у свима се морају јављати исти изложиоци.

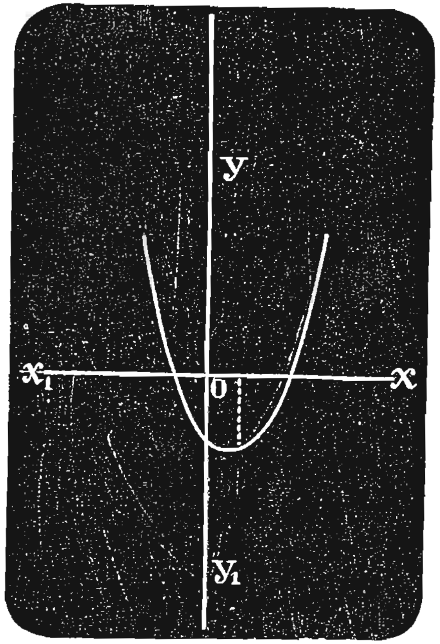
4-то. Симетрична функција може се сматрати по овоме као позната, кад је познат један ма који члан њен, а овај па дакле и цела функција може се сматрати као позната, кад су познати изложиоци његових основака.

16. Пошто прапромењљива x у буди каквој функцији $y = f(x)$ може добијати барем у извесним границама, сваку могућу вредност, то нам је слободно замислити је и као непрекидно промењљиву т. ј. као такву, која после вредности н. пр. α не може добити вредност β, а да не добије или не пређе редом и све остале бесконачно многе вредности, које леже између α и β. У таквом случају x ће се у истини непрекидно то ће рећи неосетно мењати, јер ће разлика између две и две узастопне вредности његове, бити прекомерно мала. Кад се сада x између вредности α и β непрекидно мења и при томе се функција $y = f(x)$ и сама непрекидно мења почев од прве па до последње вредности своје, онда се каже да је функција непрекидна између граница α и β.

17. Да би сазнали ток функције $y = f(x)$ т. ј. начин, како се она поступно мења при мењању од x узећемо за x произвољне вредности и помоћу једначине $y = f(x)$

израчунаћемо функцијине вредности; ако је размак вредности од x сталан, што је много боље, онда преглед функцијиних вредности даће нам довољно обавештења о току функције.

Али до много јаснијег и потпунијег сазнања у том погледу доћићемо помоћу геометријских конструкција. Ако т. ј. по упуствима аналитичне геометрије конструишемо једначину $y = f(x)$ добићемо једну криву линију. Апсцисе узастопних тачака њених јесу линеарни преставници вредности, које је x узастопце добијало, а ординате тих тачака јесу преставници одговарајућих вредности од y или $f(x)$; и према томе добивена линија јесте јасна слика функције и њеног тока, помоћу које често дознајемо на најлакши начин много што шта, што би тек после тешког алгебарског претреса функције $y = f(x)$ могли дознати.



Сл. 1.

Слика под 1.) добивена је конструкцијом једначине $y = x^2 - x - 2$.

Исто тако могу се и функције, које зависе од две прапромењиве, по упуствима просторне аналитичне геометрије конструјисати и онда се добија, као геометријска слика функције једна површина у простору. Али функције, које зависе од 3 или више прапромењивих количина, не могу се конструисати.

ПРВИ ДЕО.

БЕСКОНАЧНО ВЕЛИКЕ И МАЛЕ КОЛИЧИНЕ.

ГРАНИЦЕ И НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈА.

Бесконачно велике и мале количине.

18. Кад каква промењива количина добија све веће и веће бројне вредности, тако, да она поступно постаје већа од сваког па ма колико великог броја, онда се каже, да она расте бесконачно. Кад пак промењива количина добија све мање и мање вредности тако, да она поступно постаје мања од сваког па ма како малог броја. онда се каже, да она опада или да се умањава бесконачно. Краткоће ради зову се количине, које бесконачно расту, бесконачно велике количине, а оне, које се бесконачно умањавају, бесконачно мале количине.

Казати дакле да је та и та количина бесконачно велика или бесконачно мала, значи толико, колико казати, да она расте или се умањава бесконачно тако, да у првом случају она може постати и постаје већа од ма како великог а у другом мања од ма како малог броја.

Према томе не треба дакле сматрати бесконачно велике и мале количине као одређене и непромењиве, јер суштина истих, према ономе што мало час рекосмо, и састоји се баш у томе, да их можемо замислити и то прве веће од ма како великог а друге мање од ма како малог броја.

Апсолутне бесконачно велике величине као $\frac{5}{0}$ не значе ништа и зато не могу бити предмет математичних размaтрања. Али као резултати рачуна оне опет имају смисла у толико, у колико нам дају мига, да задатак у даној прилици није могућ т. ј. да тражене количине нема.

Тако н. пр. аналитичној геометрији, кад се тражи пресек двеју правих, координате тога пресека јављају се по некад у облику апсолутних бесконачно великих количина, а тај резултат онда значи, да нема траженога пресека, да су дакле праве паралелне.

Из онога што је горе речено сљедује:

1°. Збир неколико бесконачно великих количина истога знака јесте бесконачно велики; али разлика двеју бесконачно великих количина може бити бесконачно велика, коначна па и бесконачна мала.

2°. Збир једне бесконачно велике и једне коначне количине, јесте бесконачно велики.

3°. Збир више бесконачно малих количина истог или противног знака јесте бесконачно мали. Но ово вреди само за коначан број сабирака.

4°. Производ више бесконачно великих количина или једне бесконачно велике и једне коначне количине јесте бесконачно велики. Међу тим производ бесконачно малих количина или производ истих са једном коначном количином јесте бесконачно мали.

5°. Разломак са сталним бројиоцем јесте бесконачно велики или бесконачно мали, како му је кад именилац бесконачно мали или бесконачно велики, јер зна се, да је вредност разломка са сталним бројиоцем тим већа, што му је мањи именилац а тим мања, што му је већи именилац.

6°. Степена количина са сталним и положним изложиоцем јесте бесконачно велика или мала, како је кад корен бесконачно велики или мали. Противно овоме биће случај, ако је изложилац одречан, јер је $w^{-m} = \frac{1}{w^m}$.

7°. Ако је a^w степена количина са сталним корепом и промењљивим изложиоцем и $a > 1$, она ће бити бесконачно велика, ако је изложилац положан и бесконачно велики; на против степена количина биће бесконачно мала, ако је изложилац одречан и бесконачно велики.

Ако ли је $a < 1$ онда бива са свим противно т. ј. степена количина биће бесконачно мала или велика, како је кад изложилац положан и бесконачно велики или одречан и бесконачно велики. О истинитости овога уверавамо се овако:

Узимајући да је $a > 1$ и w цело и положно добијамо путем просте деобе:

$$\frac{a^w - 1}{a - 1} = a^{w-1} + a^{w-2} + \ldots + a^2 + a + 1$$

Сваки члан десно, осим последњега јесте већи од 1, дакле је:

$$\frac{a^w - 1}{a - 1} > w \text{ или } a^w > 1 + w(a - 1)$$

Кад w прелазећи целе вредности расте бесконачно, десни израз расте бесконачно, дакле тим пре: a^w.

Ако w није цело, онда нека је w^1 најближи мањи цео број и тада је $a^{w1} < a^w$. Пошто сад a^{w1} расте бесконачно, то ће то тим пре пре бити случај са a^w.

Ако је изложилац одречан, дакле ако имамо $a^{-w} = \frac{1}{a^w}$, онда је увиђавно, да ће a^{-w} бити бесконачно мало, кад w расте бесконачно.

Ако је $a < 1$ н. пр. $a = \frac{1}{b}$ где је $b > 1$, онда је $a^{\infty} = \frac{1}{b^{\infty}}$, одакле се јасно увиђа, да стоји и последња половина горњег тврђења.

Границе функција.

19. Има функција, које су такве, да кад промењиве, од којих оне зависе, расту или опадају бесконачно или до једне извесне границе, и оне непрестано расту или опадају, а опет зато не постају бесконачно велике или бесконачне мале, него напротив свака све више тежи једној одређеној или сталној граници и то тежи тако, да разлика између те границе и вредности функцијине постаје све мања и мања и најзад мања од ма каког малог броја.

Тако н. пр. кад x расте бесконачно, онда граница, којој без престанка тежи израз:

$$\frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

јесте 1, јер се тада $\frac{1}{x}$ бесконачно умањава. И граници 1 тежи тај израз умањавајући се све једнако.

Израз:

$$a + \cfrac{b}{\cfrac{c+d}{e-x}}$$

тежи граници a, кад x добија вредности, које се све мање и мање од e разликују, јер тада разломак иза a тежи 0.

Исто тако граница, којој тежи збир од све више и више узастопних чланова постепености:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$$

$S_{\infty} = \frac{\text{[illegible]}}{\frac{1}{2} - 1} = 2$ $n \rightarrow \infty$

јесте 2, јер разлика између 2 и збира првих n чланова те постепености јесте $1 : 2^{n-1}$, који се број при бесконачном рашћењу од n бесконачно умањава.

У Геометрији обим круга јесте граница, којој тежи обим уписаног правилног полигона, када број његових страна расте бесконачно и т. д.

Да би се означила граница, којој тежи каква количина, пише се пред њом први слог *lim* речи *limes* (граница) као н. пр:

$$lim\left(a \pm \frac{b}{x}\right) = a \text{ (кад } x \text{ расте бесконачно).}$$

Нула јесте граница количине, која се умањава бесконачно, зато се за такву количину и каже, да тежи нули. Међу тим количине, које расту бесконачно немају граница, али се опет зарад краткоће у говору узима, као да тобож и оне имају границе и та граница зове се бесконачно велика количина и означава се са ∞.

Тако н. пр. место да се каже: $\frac{1}{x}$ при бесконачном умањавању од x расте бесконачно, каже се и пише:

$$lim\, \frac{1}{x} = \infty \text{ (кад } x \text{ опада бесконачно).}$$

Примедба. Од сада ваља добро утубити разлику између непрестаног и бесконачног рашћења. У првом случају количина истина све једнако расти, али не преко сваких граница, као у другом случају.

20. Кад је каква функција сложена из више других функција, којих су границе познате, онда се лако може наћи и граница сложене функције помоћу теорема, које ће сљедовати; но пре но што приђемо излагању истих напоменућемо две следеће истине:

1-во. Кад каква функција при свом мењању остаје вазда истога знака, она не може тежити граници противнога знака, јер тада разлика између те границе и функције не би могла постати најзад мања од ма каквог малог броја.

2-го. Кад две количине или функције при свом мењању остају вазда једнаке, онда граници, којој једна тежи, мора тежити и друга зато, што је она вазда једнака првој.

Нека су сад $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ две ма какве функције и a и b њихове границе, дакле:

1) $\lim \varphi(x) = a, \; \lim \psi(x) = b.$

Пошто су a и b границе функција $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то је онда:

2) $\varphi(x) = a + \alpha$ и $\psi(x) = b + \beta$, где су α и β извесне функције од x, које морају бити такве, да теже нули, јер иначе $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не би могле тежити границама a и b,

a) Сабирањем једначина под 2) добијамо:

$\varphi(x) \pm \psi(x) = a \pm b + (\alpha \pm \beta)$ одакле се види, да је:

$\lim \left[\varphi(x) \pm \psi(x)\right] = a \pm b$ или с обзиром на 1)

$$\lim \left[\varphi(x) \pm \psi(x)\right] = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x).$$

Дакле је граница збира или разлике двеју функција једнака збиру или разлици њихових граница, што је у осталом по себи јасно.

Ова се теорема даје лако раширити и на ма колики, али коначан број сабирака. Али, ако је број сабирака бесконачно велики, онда теорема не вреди у опште, јер се тада лако може десити, да збир бесконачно умањавајућих се количина α, β и т. д. тежи граници различној од нуле.

Примедба. Свака стална количина, може се сматрати да је сама себи граница. Јер, ако узмемо, да се $\psi(x)$ своди на сталну количину A, онда на основу ове теореме имамо:

$\lim \left[\varphi(x) + A\right] = \lim \varphi(x) + \lim A$. Али како је

$\varphi(x) + A = a + \alpha + A$ то је такође:

$$\lim \left[\varphi(x) + A\right] = a + A = \lim \varphi(x) + A.$$

Из ове и прве једначине сљедује: $\lim A = A$ што је и по себи увиђавно.

b) Множењем једначина под 2) добијамо:

$$\varphi(x).\ \psi(x) = ab + \alpha\beta + b\alpha + a\beta$$

Пошто α и β теже нули, то је на основу № 18, 3° и 4°;

$\lim\, (a\beta + b\alpha + \alpha\beta) = 0$, дакле је:

$\lim \left[\varphi(x).\ \psi(x)\right] = ab$ или

$$\lim \left[\varphi(x).\ \psi(x)\right] = \lim \varphi(x).\ \lim \psi(x).$$

И тако смо нашли да је:

Граница производа двеју функција једнака производу њиних граница, што је такође и по себи јасно. И ова се теорема може лако раширити на ма колики, али само коначан број чинилаца.

c) Поделом једначина под 2) добијамо:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}$$

Бројилац другог разломка десно тежи нули а именилац тежи граници b^2 дакле и сам тај разломак тежи нули. Дакле је:

$$lim\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad lim\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{lim\,\varphi(x)}{lim\,\psi(x)}$$

И тако видимо да је:

Граница количника једнака количнику граница дељеникове и делиочеве.

d) Ако је a стално а x количина, која тежи нули, онда је:

$$1.) \qquad lim\, a^x = 1 + \alpha.$$

Јер ако је α један положан или одречан број, моћићемо увек ставити:

$$2.) \qquad a^x = 1 + \alpha.$$

где је за $a > 1$ и $x \gtrless 0 : \alpha \gtrless 0$; а за $a < 1$ и $x \gtrless 0$: $\alpha \lessgtr 0$.

Ако ставимо $x = \frac{1}{m}$ онда се ова једначина претвара у:

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + \alpha \text{ или } a = (1 + \alpha^{m}.$$

Када α тежи нули, m мора бесконачно расти, дакле онда у след последње једначине мора и α тежити нули; јер кад тога не би било, онда би $1 + \alpha$ било веће од јединице, дакле би онда и $(1 + \alpha)^m$ при бесконачном рашћењу m-а на основу № 18,7° расло бесконачно и тако не би могло бити равно сталном броју a. Пошто дакле α мора тежити нули, кад x тежи нули, то онда из 2) следује:

$$lim\, a^x = lim\,(1 + \alpha) = 1.$$

e) Да би нашли границу за:

$$log\,\varphi(x) = log\,(a + \alpha) = log\,a + log\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

ваља узети на ум, да $\alpha : a$ тежи нули, дакле $\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$ тежи јединици и по томе $log\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$ тежи нули. Дакле је:

$$lim\left[\,log\,\varphi(x)\right] = log\,a \text{ или}$$

$$lim\left\{log\,\varphi(x)\right\} = log\left\{lim\,\varphi(x)\right\}$$

f) Да би нашли границу, којој тежи израз:

$$\varphi(x)^m = (a + \alpha)^m,$$

узећемо логаритме количина на левој и десној страни у којој год хоћемо системи, па ћемо тада имати:

$$log\left[\varphi(x)^m\right] = m\,log\,(a + \alpha)$$

или

$$log\left[\varphi(x)^m\right] = m\,log\,a + m\,log\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

Одатле, кад се узме на ум мало час у *e)* доказано, сљедује:

$$log\left\{lim\left[\varphi(x)^m\right]\right\} = m\,log\,a = log\,a^m \text{ дакле}$$

$$lim\left[\varphi(x)^m\right] = a^m \text{ или најзад}$$

$$lim\left[\varphi(x)^m\right] = \left[lim\,\varphi(x)\right]^m.$$

g). Исто се тако лако налази граница и за:

$$A^{\varphi(x)} = A^{a+\alpha} = A^{a}\cdot A^{\alpha};$$

јер одавде, због $lim\ A^{\alpha} = 1$, сљедује:

$$lim\ A^{\varphi(x)} = A^{a} \text{ или } lim\ A^{\varphi(x)} = A^{lim\,\varphi(x)}$$

h). Да би најзад нашли границу израза:

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a+\alpha)^{b+\beta}.$$

ваља узети на ум, да одавде сљедује:

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a+\alpha)^{b}\,(a+\alpha)^{\beta}.$$

Други чинилац десно тежи јединици а први граници a^b дакле је:

$$lim\left[\varphi(x)^{\psi(x)}\right] = a^b \text{ или}$$

$$lim\left[\varphi(x)^{\psi(x)}\right] = \left[lim\,\varphi(x)\right]^{lim\,\psi(x)}.$$

i). При тражењу граница, често је користан и овај став: Ако при мењању т. ј. рашћењу или умаљавању од x

вредност $f(x)$ вазда лежи између вредности функција: $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дакле тако, да је н. пр. вазда:

$$\varphi(x) > f(x) > \psi(x) \text{ и}$$

ако $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ теже једној и истој граници a, онда тој граници мора тежити и $f(x)$. И доиста, пошто $f(x)$ при ма којој вредности од x мора бити једнака мањој количини $\psi(x)$ више неком известном делу разлике између веће количине $\varphi(x)$ и мање $\psi(x)$ то је онда:

$$f(x) = \psi(x) + \varrho\left[\varphi(x) - \psi(x)\right]$$

где је ϱ положан број и мањи од јединице. Одавде, пошто је $lim\,\varphi(x) = lim\,\psi(x) = a$ сљедује:

$$lim\,f(x) = lim\,\psi(x) = a.$$

21. У № 18-ој ми смо одредили, шта разумевамо под бесконачно великом и бесконачно малом количином. Сад нам остаје да још у неколико допунимо оно, што смо тамо о њима даље говорили.

Кад се у каквом рачуну јављају више бесконачно великих — малих — количина, онда је обично једна од њих она, од које зависе све остале и зато се она зове главна бесконачно велика — мала — количина.

Ако је н. пр. x главна бесконачно велика — мала — количина и m један цео или разломљен број, онда се свака друга количина u зове бесконачно велика — мала — m-ог реда, ако њена размера на спрам x^m тежи једној коначној и од нуле различној граници, дакле ако је на пример:

1. $\lim \frac{u}{x^m} = a$ где је a коначно и од нуле различно. Из 1). сљедује :

$$\frac{u}{x^m} = a + \alpha \text{ или } 2)\ u = x^m \cdot (a + \alpha)$$

где је α количина, која при бесконачном рашћењу — умаљавању — од x и u тежи нули или је равна нули, које ће последње бити случај, кад је увек : $u : x^m = a$. У једначини 2). показан је општи тип бесконачно велике — мале — количине m-ог реда.

Из онога што рекосмо сљедује, да је производ m-ог степена главне бесконачно велике — мале -- количине и ма какве коначне количине бесконачно велика — мала — количина m-ог реда. Ако је $m = 1$ онда је :

$$u = x \cdot (a + \alpha).$$

бесконачно велика — мала — количина првог реда, дакле истог реда са x. Кад се дакле главна бесконачно велика — мала — количина помножи са ма каквом коначном количином, производ је бесконачно велика — мала — количина првог реда.

Лако је увидети, да у опште две бесконачно велике — мале -- количине јесу истог реда, ако је њихова размера увек равна или пак тежи једној коначној граници. Одатле опет сљедује, да кад се каква бесконачно велика — мала — количина помножи са ма каквим коначним бројем, да је производ бесконачно велика — мала — количина истога реда.

22. Сад је лако доказати, и ове истине :

a). Збир алгебарски двеју или више бесконачно великих количина јесте бесконачно велика количина истога реда са чланом највишега реда. Тако н. пр. полином:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-2} x^2 + \ldots$$
$$+ A_{m-1} x + A_m.$$

где су сачиниоци A од x независни а x главна бесконачно велика количина, јесте бесконачно велика количина m-ог реда т. ј. истога реда са $A_0 x^m$, јер размера тога полинома наспрам његовога првог члана тежи коначној граници $+ 1$.

Пошто размера свију чланова, који су за првим, наспрам тога првог члана тежи нули, кад x расте бесконачно, то је јасно, да ће једном тај први члан бити и остати већи од збира тих доцнијих чланова; и вредност полинома, која ће и даље бесконачно расти, биће од тада истог знака са првим чланом $A_0 x^m$.

b). Збир алгебарски двеју или више бесконачно малих количина јесте бесконачно мала количина истога реда са чланом најнижега реда. Тако полином :

$$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_r x^{m+r}$$

где је сада x главна бесконачно мала количина, јесте бесконачно мала количина m-ог реда, јер размера тога полинома на спрам његовог првог члана $A_0 x^m$ тежи коначној граници $+ 1$, кад x тежи нули

Пошто размера збира свију чланова, који су за првим $A_0 x^m$, на спрам тога првог члана, тежи нули, то је јасно, да ће при бесконачном умаљавању од x једном први члан $A_0 x^m$ бити и остати већи од збира тих доцнијих чланова и вредност полинома умањавајући се и даље бесконачно биће и остаће истог знака са првим чланом $A_0 x^m$.

c). Производ двеју бесконачно великих — малих — количина m-ог и n-ог реда, јесте бесконачно велика — мала — количина $(m+n)$-ог реда, јер ако је:

$$u = x^m (a+\alpha),\ v = x^n (a_1+\alpha_1),\ \text{онда је}$$

$$uv = x^{m+n} (a+\alpha).\ (a_1+\alpha_1).$$

Ово се даје раширити на производ од три и више чинилаца,

d). Размера двеју бесконачно великих — малих — количина јесте бесконачно велика — мала — коначна или бесконачно мала — велика — како је кад бројилац бесконачно велики — мали — вишег, истог или нижег реда од имениоца. Тако, ако је x главна бесконачно велика — мала — количина, онда је:

$$\frac{u}{v} = \frac{x^{m+n}\ (a+\alpha)}{x^n\ (a_1+\alpha_1)} = x^m.\ \left(\frac{a+\alpha}{a_1+\alpha_1}\right).$$

бесконачно велика — мала — количина m-ог реда,

Даље је:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{x^m (a+\alpha)}{x^m (a_1+\alpha_1)} = \frac{a+\alpha}{a_1+\alpha_1}.$$

коначна количина; а најзад је:

$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{x^m\ (a+\alpha)}{x^{m+n}\ (a_1+\alpha_1)} = \frac{1}{x^n}\left(\frac{a+\alpha)}{a_1+\alpha_1)}\right).$$

бесконачно мала — велика — количина m-ог реда, ако $\frac{1}{x}$ сматрамо као бесконачно мало — велико — првог реда.

23. Често се у делима каже: коначне количине ишчезавају наспрам бесконачно великих и бесконачно велике количине нижих редова на спрам бесконачно великих виших редова; као и бесконачно мале количине ишчезавају на спрам коначних и бесконачно мале количине виших редова на спрам бесконачно малих нижих редова.

То ваља овако разумети;

Кад се тражи граница, којој тежи каква функција при бесконачном рашћењу променљиве — главне ∞ вел — од које она зависи, онда се могу просто изоставити коначни чланови на спрам бесконачно великих као и бесконачно велики чланови нижих редова наспрам оних, који су виших редова, а да се граница, којој ће функција после тога тежити, не промени. Исто тако граница, којој функција тежи, остаје иста и пошто се у њој изоставе бесконачно мали чланови на спрам коначних, као и бесконачно мали чланови виших редова на спрам бесконачно малих нижих редова. Тако н. пр. ако се тражи граница функције:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2}\ \text{за}\ x = \infty$$

онда пре свега можемо са x^2 поделити бројиоца и имениоца, па ће се она јавити у облику

$$\frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{2}$$

Одакле се види, да је $^1|_2$ граница функције за $x = \infty$. Но ту исту границу, нашли би такође, да смо у бројиоцу на спрам x^2 занемарили коначан број 3 и бесконачно велику количину првог реда $-2x$.

24. Ми смо горе видели, да цела и рационална функција уређена по падајућим степенима од x.

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

где су сачиниоци A од x независни, при бесконачном рашћењу од x расти бесконачно, и да при том њен први члан мора једном постати и остати већи од збира свију доцнијих, да дакле од тада функција мора бити увек истог знака са својим првим чланом. Узмимо сада да је M бројна вредност највећег сачиниоца функције и $x > 0$, онда ће за цело бити:

$$1.)\quad A_0 x^m > A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

ако је: $A_0 x^m \stackrel{=}{>} Mx^{m-1} + Mx^{m-2} + \ldots + Mx + M$

т. j. $A_0 x^m \stackrel{=}{>} M\left[x^{m-1} + x^{m-2} +, \ldots + x + 1\right]$

или $A_0 x^m \stackrel{=}{>} M \dfrac{x^m - 1}{x - 1}.$

Захтеву под 1.) биће одговорено тим пре, ако је:

$A_0 x^m \stackrel{=}{>} \dfrac{M.\ x^m}{x-1}$ дакле ако је:

$$2.)\qquad x \stackrel{=}{>} \frac{M}{A_0} + 1$$

Из самог начина умовања сљедује, да ће за сваку вредност $x_{-\text{а}}$, која је бројно равна овој или већа од ње, бројна вредност првог члана функције бити већа од збира

свију осталих, премда у извесним приликама, нарочито кад у функцији има и положних и одречних чланова и за мање вредности x-а може то исто бити случај.

Такође смо видели, да се цела и рационална функција уређена по растућим степенима $x_{-\text{а}}$

$$3.)\qquad A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m\mp 2} + \ldots + A_r x^{m\mp r}$$

при бесконачном умаљавању $x_{-\text{а}}$ бесконачно умаљава и да при том њен први члан мора једном постати и остати већи од збира свију доцнијих чланова тако, да од тада функција мора бити увек истог знака са првим чланом.

Ако је M опет бројна вредност највећег сачиниоца функције 3.) и $x > 0$ онда ће за цело бити:

4.) $A_0 x^m > A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_r x^{m+r}$ ако је

$A_0 x^m \stackrel{=}{>} M x^{m+1} + M x^{m+2} + \ldots + M x^{m+r}$ т. j.

$A_0 x^m \stackrel{=}{>} M x^{m+1} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{r+1})$ или

$$A_0 \stackrel{=}{>} Mx \frac{1 - x^r}{1 - x}$$

Ако узмемо, да је већ $x > 1$, онда ће захтеву под 4.) бити одговорено тим пре, ако је $A_0 \stackrel{=}{>} \dfrac{Mx}{1-x}$ или

$$x \stackrel{=}{<} \frac{A_0}{A_0 + M}$$

Као што се види за сваку вредност $x_{-\text{а}}$, која је — бројно — овој равна или од ње мања, биће први члан функције 4.) већи од збира свију доцнијих чланова њених.

Тражење граница за неколико функција, које се често јављају.

25. Нека су a и b два положна броја и $a > b$. Ако је n цео и положан број, онда из ниже алгебре знамо да је:

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

Десна страна постаће већа, кад свуда заменимо b са a, дакле је:

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} < (n + 1)\, a^n, \text{ а одатле:}$$

$$1.) \qquad \left[a - (n + 1)\,(a - b)\right] a^n < b^{n+1}$$

a). Стављајући овде $a = 1 + \frac{1}{n}$, $b = 1 + \frac{1}{n+1}$ добијамо:

$$2.) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Одакле дознајемо, да кад n расте, то исто бива и са изразом:

$$3.) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Стављајући пак у 1.) $a = 1 + \frac{1}{2m}$; $b = 1$, $n = m$ добијамо:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2m}\right)^m < 1 \text{ или } \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^m < 2$$

а одавде подижући на квадрат:

$$\left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{2m} < 4$$

Стављајући најзад у неједначини под 2.) $n = 2m - 1$ и узимајући у обзир ову последњу неједначину налазимо:

$$\left(1 + \frac{1}{2m - 1}\right)^{2m-1} < \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{2m} < 4$$

Као што се из овога види, било n парно или не, израз под 3). увек је < 4 а за $n > 1$ већи је од 2, јер је $= 2$ већ за $n = 1$. Дакле и ако израз под 3.) при бесконачном рашћењу n-а непрестано расти, опет зато он не расте бесконачно, јер је он увек < 4 а већи од 2, он дакле мора тежити извесној граници, која лежи између 2 и 4. Ако ту границу означимо са e, онда је:

$$4.) \qquad lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = e \text{ (за } n = \infty)$$

b). Ако ли је n положан али разломљен број, онда нека су m и $r = m + 1$ два узастопна цела броја, између којих је n.

Тада је:

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{r}$$

Дакле и

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{r}\right)^n$$

Ако узмемо, да је n за δ веће од m а за ε мање од r, дакле $n = m + \delta$ и $n = r - \varepsilon$. Онда се последње неједначине могу написати овако:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\delta} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{r}\right)^{r-\varepsilon}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\delta} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{r}\right)^{r} : \left(1+\frac{1}{r}\right)^{\varepsilon}$$

Кад n расти бесконачно, то исто бива и са m и r. Изрази:

$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ и $\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}$ теже услед обрасца 4). граници e, изрази:

$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\delta}$ и $\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\varepsilon}$ јединици, дакле онда на основу № 20, *i)* јесте и

$$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

c). Ако најзад узмемо да n расти бесконачно, али у одречном смислу, онда можемо ставити $n = -(\alpha+1)$, где је $\alpha > 0$ и расти бесконачно. Дакле је сад

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)^{-(\alpha+1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{-(\alpha+1)}$$

$$= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha+1} = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha+1}$$

или најзад:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

Одавде сљедује:

5.) $lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$, (за $n = \infty$)

И тако је доказано, да израз $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ тежи граници e, кад n расти бесконачно на ма који начин. Вредност за e може се по обрасцу под 5.) добити са сваком могућом приближношћу. Треба само за n узети довољно велику целу и положну вредност, па онда израз $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ помоћу биномног обрасца развити. Вредност за e, израчуната са 9 децимала, јесте:

$$e = 2{\cdot}718281828\ .\ .\ .\ .\ .$$

Број e, за који ћемо доцније доказати, да је ирационалан, узет је за основицу једне логаритамске системе, која се зове природна, или по њеном творцу — Неперу — неперова или још иперболна. Природни логаритми бројева означавају се са l, тако да н. пр. $l\,5$ претставља природни логаритам броја 5.

26. Ако ставимо $n = \frac{1}{\alpha}$, где је α сада број, који тежи нули, онда се образац под 5.) јавља у облику:

6.) $lim\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = e$ (за $lim\,\alpha = 0$)

Ако узмемо даље, да је δ број, који тежи нули, онда можемо ставити:

$$a^{\delta} = 1+\alpha$$

где α такође тежи нули. Из ове једначине, кад узмемо логаритме лево и десно у системи, којој је a основа добијамо:

$$\delta = log_a\,(1 + \alpha)$$

Из ове једначине и оне више ће сљедује:

$$\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{\alpha}{log_a\,(1 + \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}\,log_a\,(1 + \alpha)}$$

или

$$\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{log_a\left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]}$$

Кад δ и α теже нули, онда на основу обрасца 6.) израз десно под знаком логаритма тежи граници e, дакле логаритам тога израза тежи граници $log_a\,e$ и зато је:

$$7.)\qquad lim\,\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{log_a\,e}\ (\text{за}\ lim\ \delta = o)$$

Овом обрасцу даћемо мало другчији облик; зарад тога, нека је K ма какав број $> + 1$ и нека је:

$$log_a\,K = m \ \text{и}\ l\,K = n$$

Одавде сљедује:

$$K = a^m = e^n$$

а одавде, кад се узму природни логаритми лево и десно:

$$m.\,l\,a = n \ \text{т. ј.}\ 8.)\ log_a\,K.\,l\,a = lK$$

За $K = e$ ова се једначина претвара у

$$log_a\,e.\ l\,a = 1 \ \text{или}\ l\,a = \frac{1}{log_a\,e}$$

Дакле образац 7.) изгледа сад овако:

$$9.)\qquad lim\,\frac{a^\delta - 1}{\delta} = l\,a,\ (\text{за}\ lim\ \delta = o)$$

За $a = e$ је

$$10.)\qquad lim\,\frac{e^\delta - 1}{\delta} = 1$$

Из 8.) добијамо:

$$log_a\,K = \frac{1}{la}.\ l\,K$$

Одакле видимо, да је $\frac{1}{la}$ модуо или претварач логаритамској системи, којој је a основа. Са тим бројем ваља помножити природни логаритам каквог броја, те да би нашли његов логаритам у системи a. Обратно са $\frac{1}{log_a\,e}$ ваља помножити логаритам каквог броја узетог у системи a, те, да би му нашли природни логаритам.

Помоћу образаца 6.) и 9,) можемо лако наћи границу изразу:

$$\frac{(1 + \delta)^r - 1}{\delta}.$$

На основу јасног обрасца $a = e^{la}$ имамо:

$$(1 + \delta)^r = e^{l\,(1+\delta)^r}$$

где је r стално а δ тежи нули. Одавде сљедује:

$$\frac{(1 + \delta)^r - 1}{\delta} = \frac{e^{l(1+\delta)^r} - 1}{\delta}$$

или

$$\frac{(1+\delta)^r-1}{\delta}=r\,\frac{e^{l(1+\delta)^r}-1}{r.\,l(1+\delta)}\,\frac{l(1+\delta)}{\delta}$$

$$=r.\,\frac{e^{l(1+\delta)^r}-1}{l(1+\delta)^r}\,l(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

Ако сад ставимо десно $l(1+\delta)^r=\alpha$, где α мора заједно са δ тежити нули, онда се последња једначина претвара у:

$$\frac{(1+\delta)^r-1}{\delta}=r\,\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\,l(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

и одавде са обзиром на 6) и 10):

11.) $$lim\,\frac{(1+\delta)^r-1}{\delta}=r\ (\text{за } lim\,\delta=o)$$

За $\delta=\frac{1}{n}$ овај се образац претвара у:

12.) $$lim\,n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right]=r\ (\text{за } n=\infty).$$

Најзад ако у образац под 6.) ставимо: $\alpha=\beta x$ добијамо:

$$lim\left\{(1+\beta x)^{\frac{1}{\beta x}}\right\}=e$$

Одатле

13.) $$lim\left\{(1+\beta x)^{\frac{1}{\beta}}\right\}=e^x$$

кад β тежи нули. Одавде пак за $\beta=\frac{1}{m}$

14.) $$lim\left\{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right\}=e^x.\ (\text{за } m=\infty)$$

27. Помоћу досада нађених образаца тражићемо границе за још један низ образаца, који ће нам доцније требати.

a). Ако узмемо $n=-m-1$, онда је:

$$n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right]=(-m-1)\left[\left(\frac{m}{m+1}\right)^r-1\right]=$$

$$=m\left[1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^r\right]+\left[1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^r\right]$$

Кад n расти бесконачно, па дакле и m, онда лева страна тежи r (№ 26, 12) други члан десно тежи нули, дакле је:

$$lim\,m\left[1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^r\right]=r\ (\text{за } m=\infty).$$

b). Тражимо сада границу изразу:

$$f_1(m)=\left[1-\left(\frac{log\,m}{log\,(m+1)}\right)^r\right]m.\,log\,m.$$

Пошто је:

$$\frac{log\,(m+1)}{log\,m}=1+\frac{log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{log\,m}$$

и пошто други члан десно тежи нули, кад m расте ∞, то можемо ставити

$$\frac{log\,(m+1)}{log\,m}=1+\delta$$

па ћемо онда добити:

$$f_1\,(m)=\left[1-\frac{1}{(1+\delta)^r}\right].m.\,log\,m$$

$$=\frac{1}{(1+\delta)^r}.\ \frac{(1+\delta)^r-1}{\delta}.m.\,\delta\,log\,m$$

Али пошто је:

$$\delta=\frac{log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{log\,m},\ \text{дакле: } m.\,\delta.\,log\,m=log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]$$

то је онда:

$$f_1\,(m)=\frac{1}{(1+\delta)^r}\cdot\frac{(1+\delta)^r-1}{\delta}\ log\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}$$

Одавде пак с обзиром на обрасце: 5 и ~~12~~ 11, № 26 имамо:

$$lim\ f_1(m)=r.\ loge.$$

c). Тражимо даље границу изразу:

$$f_2\,(m)=\left[1-\left(\frac{log_2\,m}{log_2\,(m+1)}\right)^r\right].m.\,log\,m\,log_2\,m.$$

у коме $log_2\,m$ значи: $log\,(log\,m.)$ Пошто је: $log_2\,(m+1)$ $=log\left[log\,(m+1)\right]=log\left[log\,m+log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$ то онда ако као и у *b)* ставимо:

$$\delta.\,log\,m=log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

имамо:

$$log_2\,(m+1)=log\left[(1+\delta)\,log\,m\right]=log_2\,m+log\,(1+\delta)$$

Према томе је:

$$\frac{log_2\,(m+1)}{log_2\,m}=1+\frac{log\,(1+\delta)}{log_2\,m}=1+\varepsilon$$

ако т. ј. други члан, који тежи нули кад m расте ∞, означимо са ε. Сада је дакле:

$$f_2(m)=\left[1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^r}\right].\,m.\,log\,m.\,log_2\,m.$$

даље:

$$f_2(m)=\frac{1}{(1+\varepsilon)^r}\ \frac{(1+\varepsilon)^r-1}{\varepsilon}\ m\,log\,m.\ \varepsilon.\,log_2\,m.$$

Али пошто је:

$$\varepsilon=\frac{log\,(1+\delta)}{log_2\,m},\ \text{дакле: } \varepsilon.\ log_2\,m=log\,(1+\delta)$$

или:

$$\varepsilon.\,log_2\,m=\delta.\,log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

то је даље:

$$f_2(m)=\frac{1}{(1+\varepsilon)^r}.\frac{(1+\varepsilon)^r\ -1}{\varepsilon}.\,m.\,\delta.\,log\,m.$$

$$log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

или најзад због: $\delta . \log m = \log \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

$$f_2(m) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^r} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^r - 1}{\varepsilon} . \log \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right].$$

$$\log \left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

Кад m расте ∞ онда δ и ε теже нули, дакле је на основу образаца 5, 6 и 11 у № 26.

$$\lim f_2(m) = r . (\log e)^2$$

d) На сличан начин можемо наћи границу за:

$$f_3(m) = \left[1 - \left(\frac{\log_3 m}{\log_3 (m+1)}\right)^r\right] m . \log m . \log_2 m . \log_3 m.$$

Понајпре је:

$$\log_3 (m+1) = \log \left[\log_2 (m+1)\right]$$

Али је на основу једног обрасца у *c)*:

$$\log_2 (m+1) = (1+\varepsilon) . \log_2 m.$$

И зато је сада даље:

$$\log_3 (m+1) = \log \left[(1+\varepsilon) \log_2 m\right] = \log_3 m + \log (1+\varepsilon)$$

и по томе:

$$\frac{\log_3 (m+1)}{\log_3 m} = 1 + \frac{\log (1+\varepsilon)}{\log_3 m} = 1 + \alpha$$

ако т. ј. означимо са α последњи разломак, који тежи нули, кад m расте бесконачно. Према томе је дакле сад:

$$f_3(m) = \left[1 - \frac{1}{(1+\alpha)^r}\right] m . \log m . \log_2 m . \log_3 m.$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)^r} \frac{(1+\alpha)^r - 1}{\alpha} m . \log m . \log_2 m . \alpha . \log_3 m.$$

Али је: $\alpha \log_3 m = \log (1+\varepsilon)$, те зато:

$$f_3(m) = \frac{1}{(1+\alpha)^r} \frac{(1+\alpha)^r - 1}{\alpha} m . \log m . \varepsilon . \log_2 m.$$

$$\log \left[\left(1+\varepsilon\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$$

По једном обрасцу у *c)* имамо даље:

$$\varepsilon \log_2 m = \delta \log \left[\left(1+\delta\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

дакле је сада:

$$f_3(m) = \frac{1}{(1+\alpha)^r} \frac{(1+\alpha)^r - 1}{\alpha} m . \delta . \log m .$$

$$\log \left[\left(1+\delta\right)^{\frac{1}{\delta}}\right] \log \left[\left(1+\varepsilon\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$$

Но како је опет по једном обрасцу у *c)* такође:

$$\delta \log m = \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) \text{ дакле:}$$

$$m . \delta \log m = \log \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]$$

то је онда на послетку:

$$f_3(m) = \frac{1}{(1+\alpha)^r} \frac{(1+\alpha)^r - 1}{\alpha} \log \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right].$$

$$\log \left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right] \log \left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$$

Пошто кад m расте ∞, α, δ и ε теже нули, то је онда:

$$\lim f_3(m) = r\,(\log e)^3.$$

Продужавајући радити на овај начин и даље, наћићемо, да ако је k цео и положан број и

$$f_k(m) = \left[1 - \left(\frac{\log_k m}{\log_k (m+1)}\right)\right] m.\log m.\log_2 m \ldots . \log_k m.$$

да је онда:

$$\lim f_k(m) = r\,(\log e)^k \text{ (за } m = \infty).$$

28. Из тригонометрије познато је, да

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \text{ и } \frac{tg\,\alpha}{\alpha}$$

теже јединици, кад α тежи нули, да је дакле:

$$\text{I.} \qquad \lim \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \text{ и } \lim \frac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1 \text{ (за } \lim\alpha = 0).$$

Ако ставимо:
$\sin\alpha = \delta$, одакле је $\alpha = arc\sin\delta$, онда се први образац претвара у:

$$\lim \frac{arc\sin\delta}{\delta} = 1.$$

Радећи на сличан начин са другим налазимо:

$$\lim \frac{arc\,tg\,\delta}{\delta} = 1.$$

Ова 4 обрасца служе при тражењу граница сложеним тригонометријским и циклометријским изразима.

Непрекидност функција.

29. Ако је *$f(x)$ једнозначна* функција од x онда се каже, да је она непрекидна — континуирна — функција од x између граница $x = a$ и $x = b$, кад она за сваку вредност $x = c$, која лежи између тих граница, добија *само једну и то стварну и коначну вредност*, и та вредност јесте онда граница, којој мора тежити и $f(c - \delta)$ и $f(c + \delta)$, када δ тежи нули. Јер, кад ово последње не би било, када дакле $f(c - \delta)$ и $f(c + \delta)$ не би тежиле *једној и истој* стварној и коначној граници, онда $f(x)$ за $x = c$ не би имала *једну* стварну и коначну вредност, дакле она не би била непрекидна.

Кад се дата функција претстави геометријски, ствар постаје тако рећи очигледна. И доиста конструкцијом једначине $y = f(x)$ у равни двеју оса, добија се једна крива линија. Апсцисе њених узастопних тачака јесу линеарни претставници вредности, које су x-у при конструкцији даване, а ординате њених узастопних тачака јесу линеарни претставници вредности, које је при том y т. ј. $f(x)$ узастопце добијала. Ако је $f(x)$ непрекидна између граница $x = a$ и $x = b$, онда ће и линија бити непрекидна између тачака, које одговарају апсцисама a и b и свакој апсциси $x = c$ већој од a, а мањој од b, одговараће увек само једна тачка линије. Ординате $f(c-\delta)$ и $f(c+\delta)$ које одговарају апсцисама $(c-\delta)$ и $(c+\delta)$ тежиће при бесконачном умањавању од δ једној и истој стварној и коначној граници, а то је ордината, која одговара апсциси $x = c$. Ако се дакле на први мах не увиђа лако, да $f(x)$ за сваку вредност x-а, која лежи између a и b добија само *једну* стварну и коначну вредност, онда да би дознали, да ли је она непрекидна између граница $x = a$ и $x = b$, треба само испитати, да ли за сваку вредност $x = c$, која лежи између a и b

a). $f(c-\delta)$ и $f(c+\delta)$ теже једној стварној и коначној граници, када δ тежи нули или што је све једно да ли је

b).
$$\lim \left\{f(c) - f(c-\delta)\right\} = 0 \text{ и}$$
$$\lim \left\{f(c+\delta) - f(c)\right\} = 0$$

када δ тежи нули, или најзад, дали је:

c).
$$\lim \frac{f(c-\delta)}{f(c)} = 1 \text{ и } \lim \frac{f(c+\delta)}{f(c)} = 1$$

Ако у даној прилици ма које од овог трога стоји и то за сваку вредност од x, која је $> a$ а $< b$, онда је $f(x)$ извесно непрекидна између граница $x = a$ и $x = b$.

Из досада казанога увиђа се јасно, да кад је $f(x)$ непрекидна од $x = a$ до $x = b$, да ће се велим она у истини непрекидно мењати т. ј. непрескочив ни једну од својих вредности, што су између $f(a)$ и $f(b)$, кад се x буде непрекидно мењало почев од a па до b.

Помоћу мало час поменутих упустава не само да можемо увек сазнати, дали су функције непрекидне него и између којих граница. Тако x^m за m цело и положно, a^x за $a > 0$, $\sin x$ јесу непрекидне функције од x између граница $x = -\infty$ и $x = +\infty$.

Јер је н. пр.

$$a^x - a^{x-\delta} = a^x (1 - a^{-\delta}) \text{ и } a^{x+\delta} - a^x = a^x (a^\delta - 1)$$

$a^{-\delta}$ и a^δ теже јединици, кад δ тежи нули, дакле обе ове разлике теже нули и то при ма којој вредности од x.

30. Горња одредба непрекидности даје нам повода учинити неколико не безначајних примедаба.

1°. Има функција, чије се вредности, које одговарају извесним вредностима x-а, јављају у облицима без икаквог смисла, као што су $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, 1^∞ и т. д. Ако је $x = a$ вредност, при којој се вредност функције јавља у једном од ових тако званих неодређених облика онда се као вредност функције, која одговара вредности $x = a$ сматра граница, којој она тежи — а не може је достићи — када x тежи својој граници a. Тако н. пр. вредност функције $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ јавља се за $x = 0$ у облику ∞^0, који нема смисла. Но како по № 26 обр. 6. та функција тежи граници e кад x тежи нули, то се та граница e узима као вредност те функције за $x = 0$.

2°. Ако је функција многозначна, онда треба узети и проматрати одвојено њене поједине гране т. ј. поједине низове њених вредности, везаних једно за друго законом непрекидности.

3°. $f(x)$ каже се да је непрекидна за $x = c$, кад је она непрекидна између двеју вредности x-а између којих је c, па био у осталом размак тих вредности ма како мали.

4°. Према горњој одредби непрекидности, једна $f(x)$ престаје за извесну вредност x-а бити непрекидна или зато, што она за ту вредност x-а добија две различне коначне вредности, или зато што постаје — апсолутно — бесконачна, као tgx за $x = \frac{\pi}{2}$ или зато што је она за ту вредност x-а са свим не одређена као: $sin \frac{a}{x}$ за $x = 0$, или најзад зато што она код те вредности x-а престаје бити стварна као $\sqrt{(x-1)(x-4)}$, која је уображена за вредности x-а што су измеђ 1 и 4.

Ми ћемо у следећој нумери, али искључив случај, где је функција за један низ вредности x-а уображена и зато престаје бити непрекидна, као и онај где она постаје са свим неодређена, узети у разматрање прва два случаја.

31. Кад се између $x = a$ и $x = b$, налази једна или више вредности, при којима $f(x)$ неодговара једном од оних захтева, који су исказани под 1, 2, 3, у № 29, то се тада каже, да је $f(x)$ код тих вредности x-а прекидна — неконтинуирна — или да се прекида. Овде може бити више случајева:

1°. Вредност $f(x)$ за $x = c$ јесте бесконачно — апсолутно — велика, а $f(c-\delta)$ и $f(c+\delta)$ расту бесконачно, када δ тежи нули. Тако н. пр. ако су дате функције:

$$f(x) = \frac{1}{(x-c)^2} \text{ и } f(x) = \frac{1}{x-c}$$

Код прве је $f(c) = +\infty$, $f(c-\delta)$ и $f(c+\delta)$ јесу за коначно δ коначни и положни, а при бесконачном умањавању количине δ расту бесконачно, остајући положне; код друге је $f(c-\delta) < 0$, $f(c+\delta) > 0$ за коначно δ, а за $lim\ \delta = 0$, је $lim\ f(c-\delta) = -\infty$. $lim\ f(c+\delta) = +\infty$.

Дакле, кад x непрекидно расти код $x = c$, друга функција скаче од $-\infty$ на $+\infty$.

2°. $lim\ f(c-\delta)$ и $lim\ f(c+\delta)$ јесу коначни и различни; тада за $x = c$, $f(x)$ добија две различне коначне вредности, или као што се каже, она код $x = c$ скаче од једне коначне вредности на другу такође коначну и од прве различну.

Тако је за

$$f(x) = a\,\frac{e^{\frac{1}{x-c}} - 1}{e^{\frac{1}{x-c}} + 1}$$

$$lim\ f(c-\delta) = -a,\ lim\ f(c+\delta) = +a.$$

3°. Једна је од двеју количина $lim\ f(c-\delta)$ и $lim\ f(c+\delta)$ коначна а друга бесконачно велика. Тако је за

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-c}}$$

$$lim\ f(c-\delta) = 0,\ lim\ f(c+\delta) = +\infty.$$

32. Узмимо

1°. Нека је

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_m(x)$$

збир m функција непрекидних између граница $x = a$ и $x = b$, и нека је $x = c$ буди која вредност између тих граница, онда је:

$$f(c-\delta) = \varphi_1(c-\delta) + \varphi_2(c-\delta) + \dots + \varphi_m(c-\delta)$$

$$f(c+\delta) = \varphi_1(c+\delta) + \varphi_2(c+\delta) + \dots + \varphi_m(c+\delta)$$

Пошто су сад $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. , . $\varphi_m(x)$ непрекидне између граница $x = a$, $x = b$, то онда при бесконачном умањавању количине δ свака два и два одговарајућа члана десно морају тежити једној истој граници, одакле сљедује да $f(c-\delta)$ и $f(c+\delta)$ морају такође тежити једној и истој граници и тако имамо теорему:

Збир више непрекидних функција јесте непрекидна функција.

Али то не вреди у опште и онда, кад је број сабирака бесконачан.

Ако је један од сабирака прекидан код једне вредности x-а између поменутих граница, онда је то исто случај и са целим збиром и код исте вредности x-а. Али ако је више сабирака, који су прекидни за исту вредност x-а, онда може лако бити, да збир не буде прекидан, као што је то случај са функцијама

$$tg\,x \text{ и } x^3 - tg\,x$$

које су обе за $x = \frac{\pi}{2}$ прекидне а међу тим њихов збир x^3 не.

2°. Ако је сад:

$$f(x) = \varphi_1(x).\ \varphi_2(x).\ \varphi_3(x) \dots\ \varphi_m(x)$$

производ m функција непрекидних између граница $x = a$ и $x = b$, и ако је $x = c$ вредност која лежи између последњих двеју вредности x-а, онда је:

$$f(c-\delta) = \varphi_1(c-\delta).\ \varphi_2(c-\delta).\ \varphi_3(c-\delta) \dots \varphi_m(c-\delta)$$

$$f(c+\delta) = \varphi_1(c+\delta).\ \varphi_2(c+\delta).\ \varphi_3(c+\delta) \dots \varphi_m(c+\delta)$$

Пошто усљед непрекидности функција $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ $\varphi_3(x), \dots \varphi_m(x)$ два и два одговарајућа чиниоца десно теже истој граници, то ће и $f(c-\delta)$ и $f(c+\delta)$ морати такође тежити једној и истој граници, када δ тежи нули. И тако имамо сада теорему.

Производ више непрекидних функција јесте непрекидна функција.

Но ово не вреди у опште и онда, кад је број чинилаца бесконачан.

Ако међу чиниоцима има, који су прекидни, онда производ може бити прекидан а може случајно то и не бити као н. пр. код функција x^2, $tg\,x$, $cos\,x$ од којих је средња прекидна за $x = \frac{\pi}{2}$ док међу тим остале две, као и производ свију њих т. ј. $x^2\,sin\,x$ не.

3°. Количник двеју непрекидних функција прекидан је код сваке вредности x-а која поништава имениоца.

4°. Ако је $y = f(x)$ непрекидна функција x-а између граница $x = a$, $x = b$ и $u = \varphi(y)$ непрекидна функција y-а, између граница $y = f(a)$ и $y = f(b)$, онда је u такође непрекидна функција x-а између граница $x = a$ и $x = b$. Јер на основу претпоставке свакој вредности x-а од a до b одговара само једна стварна и коначна вредност y-а, а свакој такој вредности y-а, која мора лежати између граница $y = f(a)$ и $y = f(b)$ мора опет на основу претпоставке одговарати само једна стварна и коначна вредност u-а, дакле у последњој линији свакој вредности x-а од $x = a$ до $x = b$, одговара само једна стварна и коначна вредност u-а, дакле је u непрекидна функција између граница $x = a$ и $x = b$.

§ 33. Непрекидност функција, које зависе од две или више промењљивих количина, даје се на сличан начин дефинисати. Тако н. пр. *једнозначна* $f(x, y)$ каже се да је непрекидна функција x-а и y-а између граница $x = a$ и $x = b$, $y = \alpha$ и $y = \beta$, кад она за сваки спрег вредности промењљивих $x = c$ и $y = \gamma$, које вредности леже између речених граница, добија само једну и то стварну и коначну вредност, и та вредност јесте граница којој мора тежити израз:

$$1.) \qquad f(c \pm \delta, \gamma \pm \varepsilon)$$

при бесконачном умаљавању количина δ и ε, па имале у осталом δ и ε у том изразу ма какове знаке (+ или —) Јер, кад ово последње не би било, када т. ј. израз под 1.) не би при ма каквим знацима количина δ и ε тежио *једној* и истој стварној и коначној граници, онда $f(x, y)$ за $x = c$ и $y = \gamma$ не би имала *једну* стварну и коначну вредност, дакле не би била непрекидна.

Ако се не увиђа лако, да $f(x, y)$ за сваки спрег вредности x-а и y-а, које леже између поменутих граница $x = a$, $x = b$ и $y = \alpha$, $y = \beta$, добија само једну стварну и коначну вредност, онда, да би сазнали, да ли је она непрекидна између поменутих граница, треба само видети, да ли за сваки спрег вредности $x = c$, $y = \gamma$, које леже између тих граница

$$f(c \pm \delta, \gamma \pm \varepsilon)$$

тежи *једној и истој* стварној и коначној граници па узели ми δ и ε са ма каквим знаком или што је све једно, треба видети да ли је при ма каквим знацима количина δ и ε

$$2.) \qquad \lim \left\{ f(c \pm \delta, \gamma \pm \varepsilon) - f(c, \gamma) \right\} = 0$$

када δ и ε теже нули. И ако једно од тога двога стоји, онда је $f(x, y)$ извесно непрекидна између горњих граница.

Из обрасца 2.) види се уједно, да кад се x и y буду неосетно мењали између својих поменутих граница, да се онда и $f(x, y)$ мора такође неосетно мењати, ако је она између вредности x-а непрекидна.

2°. Ако $f(x, y)$ за један или више спрегова вредности x-а и y-а, које леже између $x = a$, $x = b$ и $y = \alpha$ $y = \beta$, неодговара ни једном од захтева исказаних горе под 1.) и 2.) онда се каже, да је $f(x, y)$ прекидна или да се прекида на месту, које одговара томе спрегу вредности x-а и y-а.

Што се тиче начина тог прекидања као и осталога, упућујемо на ово, што смо у том погледу рекли о функцијама једне промењљиве.

34. Ако је $f(x,y)$ непрекидна функција x-а и y-а између граница $x = a$, $x = b$, и $y = \alpha$, $y = \beta$ и ако узмемо, да у њој y задржава непромењено једну ма коју од оних вредности, што су између $y = \alpha$ и $y = \beta$, дакле ако на тај начин у $f(x,y)$ сматрамо само x као промењљиво, а y као стално, онда је $f(x,y)$ сматрана као функција само x-а, непрекидна функција x-а и то између граница $x = a$ и $x = b$. Исто тако ако у $f(x, y)$ узмемо, да x има непромењено ма коју од оних вредности, што су између $x = a$ и $x = b$, дакле ако у $f(x, y)$ сматрамо само y као промењљиво а x као стално, онда је $f(x, y)$ сматрана, као функција само y-а, непрекидна функција y-а између граница $y = \alpha$ и $y = \beta$. Јер пошто $f(x,y)$, као непрекидна функција обеју промењљивих, добија за сваки спрег њених вредности, што су између $x = a$ и $x = b$ и $y = \alpha$, $y = \beta$, само једну стварну и коначну вредност, то ће онда то исто морати бити случај и за

сваки спрег вредности x-а и y-а, који постаје увек из исте вредности н. пр. y-а што је између $y=\alpha$ и $y=\beta$ и ма које вредности x-а, која лежи између $x=a$ и $x=b$.

Дакле, кад је $f(x,y)$ непрекидна функција обеју променљивих, она мора бити непрекидна и онда, кад је сматрамо као функцију само једне променљиве. Али обратно из тога што је $f(x,y)$ непрекидна функција само x-а или само y-а, не може се поуздано закључити, да је она непрекидна функција и обеју променљивих. И зато није свеједно, кад се каже $f(x,y)$ јесте непрекидна функција обеју променљивих или само једне од њих; међутим, ако је $f(x.y)$ непрекидна функција, па сматрали је ми или само као функцију x-а, или пак само y а, онда је она извесно непрекидна функција обеју променљивих.

Резултати до којих у овој нумери дођосмо, нису баш без значаја, јер нам они дају могућности, да можемо у свакој прилици сазнати на простији начин непрекидност функција, које зависе од више променљивих, сводећи тај посао на испитивање непрекидности функција, које зависе од једне променљиве.

ДРУГИ ДЕО.

О БЕСКОНАЧНИМ РЕДОВИМА У ОПШТЕ.

35. Редом у математици зове се један низ количина, које постају по једном и истом закону. Поједине количине, које се у реду јављају, зову се чланови његови; а број, који показује на ком је месту који члан реда, кад се чланови броје с лева на десно, зове се казаљка места тога члана. Кад су чланови реда с лева на десно идући све већи и већи, онда се каже, да ред расти; у противном случају каже се, да ред опада. Чланови буди којег реда означавају се једним и истим словом, рецимо a, а разликују се међу собом казаљкама, које су томе слову с десна и то оздо придеиуте. На тај начин ред симбола

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ .\ .\ .\ .\ ,\ a_n,\ a_{n+1}\ .\ .\ .\ .$$

преставља ју први, други, трећи и т. д. члан буди којег реда. Такав један ред симбола може при доказивању општих теорема служити као заменик или преставник ма каквог реда.

Један ред зове се коначан, кад је број његових чланова коначан, т. ј. извесан и одређен, а бесконачан, кад је број његових чланова бесконачан, т. ј. кад теку без престанка. Ред може бити коначан прво зато, што је закон тога реда, т. ј. закон, по коме његови чланови постају, такав, да се тај ред мора једним извесним чланом прекинути, онда је ред у правом смислу коначан. Тако н. пр. ред:

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} + \dots,$$

чији се узастопни чланови, као што видимо, добијају на врло прост начин, прекида се, ако је m цео и положан број, нужно са $(m+1)$-им чланом, дакле је тај ред у строгом смислу коначан. Али врло често, и ако је ред бесконачан, задатак може бити такав, да има посла само са извесним, т. ј. коначним бројем његових чланова, и тада, као што видимо, имамо посла опет са једним коначним редом.

36. Сваки ред може се сматрати као познат, ако је само познат његов закон. Тај закон може бити двојак. Он или даје буди који члан реда н. пр. n-ти a_n као функцију његове казаљке места, или пак као функцију једног или више предњих чланова. У првом случају закон је независан (independent), а у другом повратан (recurrent). Када дакле закон једнога реда преведемо на алгебарски језик, онда ћемо, ако је тај закон независан, добити једначину облика

$$a_n = f(n),$$

у којој је, али на алгебарски начин исказан независан закон реда, а ако је закон повратан, онда ћемо, преводећи га на алгебарски језик, добити једначину облика

$$a_n = \varphi(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots),$$

у којој је на алгебарски начин исказат повратан закон реда. Аналитични израз за a_n, како у првом тако и у

другом случају, зове се општи (n-ти) члан реда, и то у првом случају независног, а у другом зависног облика. Тако је за геометријску постепеност

$$a,\ ax,\ ax^2,\ ax^3,\ \dots$$

$a_n = ax^{n-1}$ општи члан независног, а $a_n = a_{n-1}\,x$, или исто тако $a_n = \frac{a^2_{n-1}}{a_{n-2}}$ општи члан повратнога облика.

Помоћу општег члана независног облика изналази се сваки члан реда независно од осталих; међу тим да би помоћу општег члана повратног облика добили који члан реда, треба нам најзад знати и све чланове, који су лево од њега. Место претходећих чланова a_{n-1}, a_{n-2} и т. д., који се налазе у изразу за општи члан повратнога облика, налазе се у изразу за општи члан независног облика известне од n различне, сталне, количине. Међу тим из општег члана независног облика увек је лако наћи општи члан повратнога облика, треба само у првом заменити n са $n-1$, $n-2$ и т. д. и из тако добивених једначина избацити једну или више сталних количина. Тако је за горњу геометријску постепеност:

$$a_n = ax^{n-1},\ a_{n-1} = ax^{n-2},\ a_{n-2} = ax^{n-3}.$$

Избацимо ли a из прве и друге једначине, добићемо $a_n = a_{n-1}\,x$, а избацимо ли a и x из све три једначине добићемо: $a_n = \frac{a^2_{n-1}}{a_{n-2}}$, а то су горепоменути општи чланови повратног облика.

37. Кад у једном датом реду сабирамо идући с лева на десно два, три, четири, пет и т. д. чланова, онда се тако добивени збирови означавају редом са S_2, S_3, S_4, S_5

и т. д. Према томе S_1 значи први члан реда, S_n збир првих n чланова његових. S_n или боље његов аналитички израз, из којег се види, како S_n зависи од n, т. ј. како збир од ма колико првих чланова једнога реда зависи од броја истих, зове се збирни образац реда. Тако је за горњу геометријску постепеност збирни образац:

$$S_n = \frac{a(x^n-1)}{x-1},$$

а за аритметичну постепеност:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

збирни је образац

$$S_n = \left[2a + (n-1)\,d\right]\frac{n}{2}.$$

Кад је збирни образац каквог реда познат, онда се збир ма колико његових чланова, идући с лева на десно, може сматрати као познат, јер се може врло лако изнаћи. С тога се тражење збирног обрасца зове често и сумирање редова. Али је тај посао обично скопчан са врло великим тешкоћама; међу тим има се приметити, да, кад је збирни образац реда познат, може се и ред сматрати као познат, јер му се тада може врло лако наћи општи члан. И доиста ако је познато

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n,$$

онда је познато и

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Одузимањем ових двеју једначина налазимо, да је општи или n-ти члан реда

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Тако н. пр. ако тражимо ред, коме је

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

збирни образац, имамо:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} - \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$= \frac{n(n+1)}{1.\ 2}$$

и према томе тражени је ред:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots\ldots$$

Збирљивост бесконачних редова.

38. Кад у једном бесконачном реду сабирамо идући с лева на десно све више и више чланова. онда се могу десити ова три случаја

Прво, може се десити, да, што год је већи број сабраних чланова и добивени збир тежи све више једној извесној одређеној и коначној граници S, и то тежи тако, да је најзад разлика између збира сабраних чланова и поменуте границе мања од ма како малог броја Ако S_n значи збир првих n чланова датог реда, то онда при бесконачном рашћењу n-а мора бити

$$\lim S_n = S,$$

и бесконачан ред зове се тада збирљив (convergent), а поменута граница S његова вредност или његов збир.

Друго, може се десити, да, кад број сабраних чланова расте без престанка и преко сваке границе, и њихов збир расте непрестано и најзад постаје већи од ма како великог броја. У том случају при бесконачном рашћењу n-а и S_n расти бесконачно, дакле је

$$lim\, S_n = \infty.$$

Бесконачан ред у овом другом случају зове се незбирљив (divergent).

И треће, може се десити, да, кад број сабраних чланова расти, њихов збир нити тежи једној одређеној и коначној граници нити пак расти бесконачно, него је напротив или раван час једном час другом од два извесна броја, или пак тај збир тежи различним одређеним границама, према томе колики је број сабраних чланова. У том случају, где $lim\, S_n$ има више различних вредности, ред се зове неодређен. — Овде још можемо додати и то, да се сваки коначан ред може сматрати као бесконачан збирљив ред.

39. Из овога, што је мало више речено, излази, да се збир једног збирљивог бесконачног реда може са сваком могућом приближношћу добити; зарад тога треба само довољан број чланова, идући с лева на десно, сабрати. А кад је то, онда је јасно, да се једна непозната количина може сматрати као позната, ако нам је само испало за руком, да је преставимо у облику једног збирљивог бесконачног реда. Вредности многих функција, н. пр. трансцендентних, могу се згодно израчунати, ако смо их најпре развили у бесконачан ред. Ако је добивени ред збирљив, онда збир његов јесте вредност дотичне функције, и та се вредност поступним сабирањем чланова нађеног реда може са сваком могућом приближношћу израчунати. Али ако је ред, у који смо функцију развили, незбирљив или неодређен, он нема одређеног збира, и по томе се не може употребити за израчунавање функцијине вредности. Но и ако незбирљиви редови не могу користити при израчунавању вредности функција, опет за то они нису, као што неки мисле, са свим бескорисни, јер се баш помоћу њих, као што су то Leibnitz и Bernouilli показали, могу створити и сумирати многи збирљиви редови. Међу тим неодређени редови морају се са свим одбацити

Из овога, што смо мало час рекли, види се, колико је важно знати, да ли је ред какав збирљив или не. С тога ће нам сада прва брига бити, да пронађемо услове збирљивости бесконачних редова.

Услови збирљивости бесконачних редова и општа правила збирљивости.

40. Кад би у свакој прилици могли наћи збирни образац S_n задатога реда, онда би нам лако било дознати, да ли је он збирљив или не. Јер према горњему (№ 34) требало би тражити само границу, којој при бесконачном рашћењу n-а тежи S_n, и ако је та граница коначан број S, онда смо не само дознали, да је ред збирљив, него смо и његов збир тачно нашли.

Пример 1. Пита се, кад је геометријска постепеност

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$$

збирљива? Овде је

$$S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Ако је x бројно мање од 1, дакле $1 > x > -1$, онда је $\lim x^n = 0$, дакле је ред збирљив, и његов збир јесте:

$$S = \lim S_n = \frac{1}{1-x}.$$

Дакле свака падајућа геометријска постепеност јесте збирљив ред. — Ако је пак $x > +1$, ред је тај незбирљив, а ако је $x < -1$, ред је неодређен.

За $x = 1$ је $S_n = n$, $\lim S_n = \infty$, и према томе ред је незбирљив. — За $x = -1$ је $S_n = 0$ или $= 1$, како је кад n (број сабраних чланова) парно или непарно. Дакле за $x = -1$ ред је неодређен.

Пример 2. Пита се да ли је збирљив ред

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots ,.$$

овде је:

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1}$$

или

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + (n-1)\, x^{n-1}.$$

из чега излази:

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} + x\,(S_n - nx^{n-1}).$$

Одатле налазимо даље:

$$S_n = \frac{1-(n+1)\,x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

или најзад

$$S_n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{(1-x)}$$

Ако је $x > +1$ онда S_n расте бесконачно, дакле је ред незбирљив. Ако ли је пак $x \leqq -1$, онда је ред неодређен. Ако ли је пак $x < 1$ бројно, ми можемо изабрати m тако, да је

$$1 + \frac{1}{m} < \frac{1}{x}$$

и по томе $\left(1 + \frac{1}{m}\right)x$ чист разломак, који можемо означити са z. Ако још ставимо коначан број $mx^m = a$, то је

$$(m+1)\; x^{m+1} = m\left(1 + \frac{1}{m}\right)x^{m+1} = az.$$

$$(m+2)\, x^{m+2} = (m+1)\, x^{m+1}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)x, \text{ дакле} < az^2$$

$$(m+3)\, x^{m+3} = (m+2)\, x^{m+2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right)x, \text{ дакле} < az^3$$

. . . .

Одавде видимо, прво, да ред

$$mx^m,\ (m+1)\, x^{m+1},\ (m+2)\, x^{m+2},\ (m+3)\, x^{m+3} \ldots$$

наглије опада, но што то чини ред

$$az,\ az^2,\ az^3,\ az^4 \ldots\ldots$$

Пошто је $z < 1$ то је при бесконачном рашћењу n-a.

$$lim\, az^{n-m} = 0,$$

дакле тим пре

$$lim\, nx^n = 0.$$

Како је још и $lim\, x^n = 0$, то је онда и

$$lim\, S_n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Задати је ред дакле збирљив за $1 > x > -1$, и збир му је тада $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Пример 3. Пита се, да ли је збирљив ред

$$\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots.$$

Овде је:

$$S_n = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots +$$

$$+ \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n)}$$

Да би сабрали n чланова десно у овој једначини, ставићемо у идентичној једначини:

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1)} - \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m)} =$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m)}$$

редом $m = 1, 2, 3, \dots (n-1), n$ и затим ћемо n добивених једначина сабрати. На тај начин добићемо:

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left\{\frac{\beta}{\alpha+1} +\right.$$

$$\left. + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\right\}.$$

Одавде пак

$$\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots$$

$$+ \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n)} =$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\right\}.$$

И тако је сад

$$S_n = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\right\}$$

Као што се види, да би нашли границу, којој тежи S_n при бесконачном рашћењу n-а, треба само наћи границу израза:

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}$$

Зарад тога претпоставимо најпре, да је $\alpha > \beta$, и осем тога, да су α и β положни бројеви. Ако су h и k цели и положни бројеви, а x ма какав положни број онда је:

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^h > 1+x,\ (1+x)^k > 1+kx$$

па дакле и

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{h}\right)^h} < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{(1+kx)^{\frac{1}{k}}}$$

Ставимо у овим неједначинама

$$x = \frac{\alpha-\beta}{\beta+m}, \text{ где је } m > 0, \text{ па ћемо добити:}$$

$$\left\{\frac{\beta+m}{\beta+m+\frac{\alpha-\beta}{h}}\right\}^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left\{\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}\right\}^{\frac{1}{k}}$$

Ако узмемо

$$h > \alpha-\beta \text{ и } k > \frac{1}{\alpha-\beta}$$

онда је: $\frac{\alpha-\beta}{h} < 1$ и $k(\alpha-\beta) > 1$; ако сад у последњој неједначини заменимо $\frac{\alpha-\beta}{h}$ и $k(\alpha-\beta)$ са јединицом, тим ће пре вредети неједначина

$$\left\{\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right\}^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left\{\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right\}^{\frac{1}{k}}$$

Ако сад овде стављамо редом $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ и умножимо добивене неједначине, изаћиће:

$$\left(\frac{\beta}{\beta+n+1}\right)^h < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} < \left(\frac{\beta}{\beta+n+1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

При бесконачном рашћењу n-а количине $\left(\frac{\beta}{\beta+n+1}\right)^h$ и $\left(\frac{\beta}{\beta+n+1}\right)^{\frac{1}{k}}$ теже нули, дакле је и

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} = 0$$

Одавде с погледом на једначину 1.) следује, да је $\lim S_n = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$, дакле је задати ред збирљив и његов је збир $\frac{\beta}{\alpha-\beta}$.

Претпоставимо сад, да је $\alpha < \beta$. Пошто је:

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n)} = \frac{1}{\lim \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}}$$

и пошто је даље због $\beta > \alpha$:

$$\lim \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n)} = 0.$$

то је:

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)} = \infty.$$

Одавде следује, да је и $\lim S_n = \infty$, и по томе задати ред незбирљив. Дакле задати је ред збирљив и збир му је $= \frac{\beta}{\alpha - \beta}$, ако је $\alpha > \beta > 0$; а ако је $\beta > \alpha > 0$, он је незбирљив. Ако је $\alpha = \beta$ онда се S_n јавља у неодређеном облику $0.\infty$, одакле се не даје ништа закључити, али тада задати ред изгледа овако:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+2}+\frac{\alpha}{\alpha+3}+\frac{\alpha}{\alpha+4}+\frac{\alpha}{\alpha+5}+\dots$$

о коме ћемо доцније доказати, да је незбирљив (види пр. 1, у 50.)

Ако задатом реду додамо 1 и ставимо $\alpha = a - 1$, $\beta = b$, онда се он претвара у ред:

$$1+\frac{b}{a}+\frac{b(b+1)}{a(a+1)}+\frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)}+\dots\dots\,;$$

За $a - 1 > b > 0$, овај је ред збирљив и збир му је $\frac{a-1}{a-b-1}$; за $b > a - 1 > 0$ ред је незбирљив, а тако исто и за $a = b$.

Пример 4. Дат је ред:

$$\frac{b}{a+b}+\frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}+\frac{b(b+1)(b+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}+\dots$$

Начином, показатим у примеру 3. дознаје се да је овај ред збирљив за $a > 1$ а незбирљив за $a \leqq 1$.

41.) Пошто је у највише случајева врло тешко изнаћи збирни образац S_n задатог збира, то нам се ваља постарати да пронађемо друге знаке, по којима се може дознати, да ли је задати ред збирљив или не.

Зарад тога узмимо, нека је задат ред:

1.) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots$ и ставимо

2.) $S_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_{n-1}+a_n$ и

3.) $R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\dots$

Као што се види R_n значи збир бесконачног реда, који настаје иза n-тог члана задатога реда. Ми ћемо R_n звати остатком задатог реда. Јасно је да остатак R_n мора имати једну извесну и коначну вредност, ако је ред збирљив, и да мора бити бесконачно велики, ако је ред незбирљив, или најзад да мора имати две или више вредности, ако је ред неодређен. И обратно ред је збирљив или незбирљив или неодређен, како је кад остатак одређен и коначан број или бесконачно велики, или пак има две или више различитих вредности.

Од особите је важности остатак код збирљивих редова. Ако је ред 1) збирљив, и S његов збир, онда је:

$$S = \lim S_n,$$

или што је све једно:

$$\lim (S - S_n) = 0.$$

а то ће рећи

4.) $\lim R_n = 0.$

Дакле: *ако је задати ред збирљив, онда граница, којој тежи остатак реда при бесконачном рашћењу n-а, мора бити равна нули.*

Према томе, кад би у сваком даном случају могли наћи остатак R_n задатога реда, могли би увек лако пресудити, да ли је задати ред збирљив или не. Али то у највише прилика није могуће, него је могуће наћи само две количине, између којих се остатак мора налазити. Ако сад при бесконачном рашћењу n-а те две количине не расту бесконачно, онда је исто то случај и са остатком, и за то ред не може бити незбирљив. Ако даље те исте количине при бесконачном рашћењу n-а теже *једној* и истој граници, онда ће тој граници морати тежити и остатак, и за то ред неможе бити неодређен. Дакле ред мора тада бити збирљив, и зато граница, којој при бесконачном рашћењу n-а теже горе поменуте две количине, као и остатак који се између њих налази, мора бити раван нули. Дакле:

Кад остатак реда за сваку коначну вредност n*-а остаје коначан, и при бесконачном рашћењу* n*-а тежи нули, онда је ред збирљив.*

Ако збир n првих чланова задатога реда т. ј. S_n узмемо у рачун место непознатог збира S бесконачног реда онда остатак R_n претставља погрешку, коју смо при томе учинили. Ако нисмо у стању наћи остатак реда R_n, него само две количине, између којих се он налази, онда су те количине две границе, између којих се учињена погрешка мора налазити.

Пример 1. Пита се, за које је положне вредности x-а збирљив ред

5.) $$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\ldots.$$

Ми дакле претпостављамо да је x положан број. Ако узмемо $n>x$ онда је $\frac{x}{n}<1$ и ми имамо:

$$S_n=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\ldots.\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$R_n=\frac{x^n}{n\,!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)\,!}+\ldots\ldots=$$

$$=\frac{x^n}{n\,!}\left\{1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots\ldots\right\}.$$

Чланови реда у загради као и чинилац пред заградом јесу положни, те с тога је $R_n>0$. Даље је:

$$R_n<\frac{x^n}{n\,!}\left\{1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\frac{x^3}{(n+1)^3}+\ .\ .\ .\right\}$$

или

6.) $$\frac{x^n}{1.\,2.\,3\,..\,n}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}>R_n>0.$$

Узмимо $k>x$, што смо увек у стању, па имало x ма колику — коначну — вредност, онда је:

$$\frac{x^n}{n\,!}=\frac{x^k}{k\,!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\cdot\ldots\ldots\frac{x}{n},$$

где је $\frac{x^k}{1.\,2.\,3\ldots k}$ коначан број, а

$\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\cdot\ldots\frac{x}{k+n}$, производ чистих разломака, који без престанка теже 0. Из овога се види, да је остатак за сваку коначну вредност n-а коначан, осим тога он при бесконачном рашћењу n-а мора тежити 0, јер је:

$$lim \frac{x^{n}}{n!} = \frac{x^{k}}{k!} lim \left\{ \frac{x}{k+1} \cdot \frac{x}{k+2} \cdots \frac{x}{n} \right\} = 0.$$

и тако сад видимо, да остатак увек лежи између нуле и количине, која при бесконачном рашћењу n-а тежи 0, из чега сљедује, да и остатак мора тежити 0. Према томе задати је ред збирљив за сваку коначну и положну вредност x-а. Неједначина 6) даје границе за погрешку, коју чинимо, кад место збира бесконачног реда 5) узмемо у рачун само збир првих n чланова његових.

42). Као што се из последњег примера види, било би врло заметно, кад би у свакој прилици морали помоћу остатка на горе показани начин сазнавати збирљивост редова, за то морамо тражити лакше и згодније начине за тај посао.

Пре свега напоменућемо, да један ред са положним само члановима може бити збирљив или незбирљив, али никад неодређен, јер при непрестаном сабирању чланова такога реда добијаће се све већи и већи збир. И тај збир или ће тежити једној одређеној и коначној граници, у ком ће случају бити ред збирљив, или ће расти бесконачно и тада ће ред бити незбирљив. Али он — збир — не може на изменце расти или опадати, као што је то случај у неодређених редова. Према томе, да један ред буде неодређен, мора у њему бити и положних и одречних чланова и осим тога положни чланови реда за себе узети, а тако исто и одречни чланови за себе узети, морају дати по један незбирљив ред; јер нека је

1.) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots\ldots$

један неодређени ред, у коме се дакле мора налазити и положних и одречних чланова и нека је: $S_n = a_1 + a_2$

$+ a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$. Ако сад између n првих чланова реда 1) имаде p положних и q одречних, због чега је $p + q = n$, и ако је $S'p$, збир поменутих p положних, и Σq, збир — без обзира на знак — поменутих q одречних чланова, онда је

$$S_n = S'p - \Sigma q, \text{ дакле и}$$

$$lim\, S_n = lim\, S'p - \Sigma q.$$

Кад би сад ред, састављен из положних чланова реда 1), и ред, састављен из одречних чланова његових, били збирљиви онда би при бесконачном рашћењу n-а, па дакле и p-а и q-а, морали $S'p$ и Σq тежити одређеним и коначним границама s и σ; то ће рећи, било би тада:

$lim\, S'p = s$, $lim\, \Sigma q = \sigma$, дакле и $lim\, S_n = s - \sigma$ дакле би онда ред 1) био збирљив, а не неодређен, као што смо претпоставили. Ако би пак једна од количина $S'p$ и Σq тежила једној одређеној и коначној граници, а друга би бесконачно растила, онда би и њихна разлика S_n — без обзира на знак — бесконачно растила, и ред 1) био би незбирљив, а не неодређен. Али ако су редови, састављени из положних и одречних чланова реда 1), оба незбирљиви, дакле, ако при бесконачном рашћењу n-а и $S'p$ и Σq буду растили бесконачно, онда њихна разлика $S'p - \Sigma q = S_n$ може, према томе, какво је кад n, тежити различним границама и тада је ред 1) неодређен.

Још ћемо приметити, да то, какав је дати бесконачни ред, т. ј. да ли је он збирљив, незбирљив, или неодређен, не зависи ни у колико од његових првих чланова. Он ће бити збирљив, незбирљив или неодређен, како је кад збирљив незбирљив или неодређен бесконачан ред, који настаје за н. пр. k-тим чланом његовим. И обратно, какав је кад дати ред, онакав ће бити и ред, који за k-тим чланом датог реда настаје. Јер ваља добро узети на ум, да се збир датог бесконачног реда такође добија, кад се збиру k првих чланова његових, збиру, који је извесан и коначан број, дода збир бесконачног реда, који за k-тим чланом датог бесконачног реда долази. Најзад ћемо приметити, да кад један дати ред помножимо са ма каквим коначним бројем A, нови ред мора бити са даним у исти мах збирљив, незбирљив или неодређен. Јер ако је S_n збир првих n чланова датог реда, онда је AS_n збир првих n чланова новог реда и како се S_n буде владало при бесконачном рашћењу n-а, исто ће се тако владати и AS_n.

43. Један од неизоставних услова збирљивости редова јесте тај, да његови чланови идући с лева на десно морају тежити нули тако, да се најзад може наићи на чланове, који су мањи од ма како малог броја. И доиста, ако су S_{n-1} и S_n збирови од $n-1$ и n првих чланова, а S збир целог бесконачног реда, који узимамо да је збирљив, онда је $S_n - S_{n-1} = a_n$, дакле:

$$lim\, a_n = lim\, S_n - lim\, S_{n-1}$$

Но како је дати ред збирљив, то је:

$$lim\, S_n = lim\, S_{n-1} = S$$

дакле:

$$lim\, a_n = 0.$$

Према томе јасно је одмах, да не могу бити збирљиви:

1°, редови са једнаким и једнако означеним члановима, као год ни растући редови са једнако означеним члановима; они су као што се увиђа незбирљиви;

2°, редови са бројно једнаким члановима, код којих се знаци правилно т. ј. у једнаким размацима мењају. Ти су редови очевидно неодређени;

3°, растући редови са неједнако означеним члановима, који могу бити незбирљиви или неодређени.

Дакле, збирљиви могу — али не морају — бити редови, у којима се, с десна на лево идући, чланови бесконачно умаљавају, јер је код таквих редова горњи услов испуњен. Тако исто могу бити збирљиви и редови, код којих су чланови, с лева на десно идући час већи а час мањи, ако је код истих само горњи услов збирљивости — $lim\, a_n = 0$ — испуњен. Тако је н. пр. збирљив следећи ред:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \;.\;.\;.\;.\;.$$

и збир му је $= 2$.

Но са оваковим редовима нећемо се од сад бавити, прво за то, што се они врло ретко или никако не јављају, а друго, што се о збирљивости таквих редова не могу општа правила поставити због грдне множине особених случајева, који су овде могући.

Но не треба мислити, да је горе поменути неизоставни услов збирљивости и довољан, јер има редова, чији чланови теже нули, па ипак нису збирљиви. Такав је случај са овим бесконачним редом:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \;.\;.\;.\;.\;.$$

Код њега је горњи услов збирљивости испуњен, а он је опет за то незбирљив, као што се то увиђа из овога, што следује:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + - - + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$$

и т. д. и. т. д.

Сабирањем ових неједначина, добијамо неједначину:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots >$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots .$$

Као што се види, збир од ма колико чланова овога левог, дакле датога реда, већи је но збир од толико исто чланова деснога реда.

Из тога закључујемо, да, пошто је десни ред незбирљив, то исто у толико пре мора бити и са левим датим редом.

44. Кад су чланови једнога реда сви положни и кад су они, или одмах с почетка или тек од неког извесног н. пр. $(k + 1)$ — вога места па на даље, мањи но одговарајући чланови другог неког, али збирљивог реда, чији су чланови такође сви положни, онда и дани ред мора бити збирљив.

Јер ако је један ред:

1.) $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots\ldots,$$

а други, за који већ знамо да је збирљив

2) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots\ \ldots,$$

онда је на основу горње претпоставке:

$$a_{k+1} < \alpha_{k+1},\ a_{k+2} < \alpha_{k+2},\ a_{k+3} < \alpha_{k+3} \ldots$$

$$\ldots\ldots a_{k+r} < \alpha_{k+r}.$$

Сабирањем добија се одавде:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots. + a_{k+r} <$$

$$\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3} + \ldots. + \alpha_{k+r}.$$

Из овога видимо, да је збир од ма колико чланова левога реда увек мањи но збир од толико исто чланова деснога реда, па дакле и мањи но збир бесконачног реда 3) $\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3} + \ldots$, чији је збир одређен и коначан број, јер је ред 3) збирљив. Према томе, при непрестаном сабирању чланова бесконачног реда 4) $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots.$, добијаћемо истина све већи и већи збир, за то, што су чланови реда 4.) положни, али тај збир неће и не може расти преко сваке границе и према томе ред 4) не може бити незбирљив. Но како на основу № 42 ред 4) може бити само збирљив или незбирљив а никако неодређен, то следује, да он мора бити збирљив. Али онда на основу претпоследње тачке у № 42 мора бити збирљив и ред 1).

На сличан начин доказује се, да, ако је ред 2) незбирљив, и ако су или одмах с почетка или тек од $(k+1)$-ог места па на даље чланови реда 1) већи или равни одго- 2.

варајућим члановима реда 2) да, велим, онда и ред 1) мора бити незбирљив.

Примедба 1). Ред 1) биће очевидно збирљив, и то тим пре и онда, кад он има и положних и одречних чланова, али су ови бројно мањи но одговарајући чланови реда 2).

Примедба 2). Лако је увидети, да кад се редови 1) и 2) прекину са n-тим чланом, остатак реда 1) мора бити мањи од остатка реда 2.)

Примедба 3). Ако су почев од извесног једног места па на даље чланови реда 1) једнаки члановима реда 2), ред 1) биће збирљив или незбирљив, како је кад ред 2) збирљив или незбирљив.

45.) Узмимо нека је

1.) $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots .$$

дати ред са положним само члановима, и да се пита, да ли је он збирљив или не, а

2.) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots\ldots$$

нека је други неки ред такође са положним само члановима, за који већ знамо, да је збирљив.

Узмимо сад нека је почев од једне доста велике вредности n-а, н. пр. $n = k$, па на даље увек

3.) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

Тада имамо:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < \frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1}}$$

. . . . ,

$$\frac{a_{k+r+1}}{a_{k+r}} < \frac{\alpha_{k+r+1}}{\alpha_{k+r}}$$

Множењем добијамо одавде:

4.) $$\frac{a_{k+r+1}}{a_k} < \frac{\alpha_{k+r+1}}{\alpha_k}$$

и ово вреди за сваку ма колику велику целу и положну вредност r-а. Ако дакле ставимо у 4) редом $r = 1, 2, 3, \ldots (s-1)$, резултате саберемо и за тим помножимо лево и десно са a_k добићемо:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_{k+s} < \frac{a_k}{\alpha_k}\left[\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \ldots \ldots + \alpha_{k+s}\right].$$

Одавде видимо, да је збир од ма колико чланова бесконачног реда

5.) $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots$ мањи од производа из $\frac{a_k}{\alpha_k}$ и збира од толико исто чланова бесконачног реда

6.) $$\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3} + \ldots\ldots$$

Пошто су сад сви чланови реда 6) положни, то је јасно, да ће збир од ма колико чланова реда 5) бити такође мањи од производа из $\frac{a_k}{\alpha_k}$ и збира бесконачног реда 6). Но ред 6) јесте збирљив, јер је ред 2) збирљив (№ 42), и према томе је и негов збир одређен и коначан број; $\frac{a_k}{\alpha_k}$ такође је одређен и коначан број, па дакле и њихов производ. Из свега овога сљедује, да ће се при поступном сабирању чланова реда 5) добијати истина све већи и већи збир, али ће тај збир вазда бити мањи од једног одређеног и коначног броја, и за то ред 5) не може бити незбирљив, дакле он мора бити збирљив. Но онда на основу № 42 мора бити збирљив и ред 1).

На сличан се начин доказује, да ред 1) мора бити незбирљив, ако је незбирљив ред 2), и ако је, од $n = k$ почевши, па на даље увек:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

На тај начин доказали смо ове две теореме:

I). *Ред 1) јесте збирљив, ако је збирљив ред 2) и ако је осим тога почев од једног извесног места па на даље количник* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *увек мањи но одговарајући количник* $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ *реда 2).*

II). *Ред 1) јесте незбирљив, ако је незбирљив ред 2), и ако је осим тога, почев од извесног места па на даље, количник* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *увек већи но одговарајући количник* $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ *реда 2).*

Ове теореме, као и оне у № 44 доказане, служе, као што ћемо то доцније видети, као врло згодно средство при изучавању редова односно њихове збирљивости.

Примедба 1. Ако су R_n и R'_n остаци редова 1) и 2) и ако стоје у почетку № 45 напоменути услови, лако је увидети да је

$$R_n < \frac{a_n}{\alpha_n} R'_n$$

Примедба 2. Ако је, почев од једног извесног места па на даље

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

то је ред 1) збирљив или незбирљив, како је кад ред 2) збирљив или незбирљив.

46. Кад је један ред збирљив, онда је збирљив и опај ред, који из њега постаје, кад се идући с лева на десно саберу увек по један исти или и различан број његових узастопних чланова, јер је очевидно са свим све једно или се сабирали чланови датога реда један по један, или се сабирале поједине узастопне групе, на које је дани ред с лева на десно разложен. Али се обратно из збирљивости новога реда не може увек закључити и на збирљивост данога.

Тако н. пр. из реда

$$1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{7}{4} + 3 - \frac{23}{8} + \ldots + n - \frac{n2^n - 1}{2^n} + \ldots$$

који није збирљив, јер му чланови не теже нули при бесконачном рашћењу n-а, већ неодређен, као што ће се то доцније видети, добија се, кад се по два и два члана идући с лева на десно саберу, ред

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots,$$

који је збирљив, јер је он падајућа геометријска постепеност. — Али ако нови ред није збирљив, онда не може бити ни дани, јер кад би то било, онда би, по ономе што горе рекосмо, и нови ред морао бити збирљив, а он то није.

Међу тим, ако су чланови данога, па дакле и новога реда, сви положни, онда се из збирљивости новога реда поуздано закључује на збирљивост даног реда, јер су чланови данога реда мањи, него ли чланови новога реда.

47. Кад је један ред збирљив и сви су му чланови положни, или кад он истина има и положних и одречних чланова, али је такав, да остаје збирљив и онда, кад му се узму сви чланови са положним знаком, онда вредност или збир тога реда не мења се, па ма како се испреметали његови чланови. Да узмемо нека је

$$1.)\qquad S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

дани ред, а

$$2.)\qquad S' = a_p + a_q + a_r + \ldots\ldots$$

исти ред, у коме су само чланови друкче распоређени. Даље нека је S_n збир првих n чланова реда 1), дакле

$$3.)\qquad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$

и нека је

$$4.)\qquad S'_m = a_p + a_q + a_r + \ldots. + a_t$$

збир првих m чланова реда 2) и m толико велико, да се у гомили тих m чланова под 4) налазе сви чланови од S_n. Ако сада скуп оних чланова, који ће се у S'_m осим чланова збира S_n можда још налазити, и чије су казаљке веће од n, означимо са R'_m, онда је

$$S'_m - S_n = R'_m\,;\ lim\, S'_m - lim\, S_n = lim\, R'_m$$

Сад и кад би сви чланови у R'_m били једнако означени, опет је R'_m бројно мање од R_n, где под R_n разумемо остатак реда, који из даног реда 1) постаје, кад се сви чланови овога реда узму са положним знаком. Пошто је сад на основу претпоставке збирљив не само дани ред, него и онај, који из њега постаје, кад му се сви чланови узму са положним знаком, то је $lim\, R_n = 0$, дакле тим пре $lim\, R'_m = 0$. Одатле сљедује

$$lim\, S'_m = lim\, S_n \text{ или } S' = S.$$

48. Ако су чланови датога реда

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots.$$

сви положни и ред је збирљив, и ако су даље $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots.$ положни бројеви и мањи од произвољног, али коначног броја A, онда је збирљив и ред

$$2.)\qquad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 + \ldots\ldots.$$

јер чланови овога реда јесу мањи од одговарајућих чланова реда:

$$Aa_1 + Aa_2 + Aa_3 + Aa_4 + \ldots..,$$

који је на основу последње алинеје у № 42 збирљив, јер је ред 1) збирљив.

Ова теорема, може се доказати, да вреди и за ма какав збирљив ред, ако су само бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots$ идући с лева на десно све мањи и мањи. Јер ако је дати ред збирљив то ће

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots.. + a_n$$

при бесконачном рашћењу n-а, остајући све једнако коначан број, тежити једној извесној и коначној граници. Дакле ће тада бити један број, рецимо A, од кога ће S_n бити вазда мање. Ако сад означимо са S'_n збир од n првих чланова реда 2), то је: $S'_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n$, или: $S'_n = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 (S_2 - S_1) + \alpha_3 (S_3 - S_2) + \dots + \alpha_n (S_n - S_{n-1})$, или најзад

$$3.)\ S'_n = (\alpha_1 - \alpha_2) S_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) S_2 + (\alpha_3 - \alpha_4) S_3 + \dots$$
$$\dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) S_{n-1} + \alpha_n S_n.$$

Дакле је

$$S'_n < A(\alpha_1 - \alpha_2) + A(\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + A(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + A\alpha_n$$

то ће рећи

$$S'_n < A\alpha_1,$$

јер су A а и сви сачиниоци положни. Дакле S'_n при бесконачном рашћењу n-а остаје вазда мање од одређеног и коначног броја $A\alpha_1$ и за то ред 2) не може бити незбирљив, али он не може бити ни неодређен, као што се то види из 3), где су $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots\dots$ а тако исто и њихни сачиниоци сви положни, за то што је, на основу претпоставке, $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 \dots\dots$ Овде смо, што је очевидно допуштено, претпоставили да је $a_1 > 0$.

49. Кад су чланови једног збирљивога реда границе, којима теже одговарајући чланови другог неког реда, онда збир првог реда јесте граница, којој при том тежи променљиви збир другог реда. Јер нека су

$$1.)\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots\dots$$

$$2.)\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots\dots$$

дани редови, и нека је даље:

$$a_1 = lim\, \alpha_1,\ a_2 = lim\, \alpha_2,\ a_3 = lim\, \alpha_3 \dots$$

дакле

$$\alpha_1 = a_1 + \delta_1,\ \alpha_2 = a_2 + \delta_2,\ \alpha_3 = a_3 + \delta_3,\ \dots$$

где су $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ бројеви, који без престанка теже 0. — Ред 1) према томе изгледа овако:

$$3).\ (\alpha_1 - \delta_1) + (\alpha_2 - \delta_2) + (\alpha_3 - \delta_3) + \dots$$

и може се узети, јер је збирљив, да је постао (№ 47.) одузимањем реда

$$4.)\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \dots$$

од реда 2.) Према томе дакле сада је

$$5.)\qquad S = S' - S''$$

ако т. ј. означимо са S, S' и S'' збирове редова 1), 2) и 4). И сад треба само доказати да је $S'' = 0$. Зарад тога означимо са S''_n збир првих n чланова реда 4) па је: $lim\, S''_n = S''$. — Пошто $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots$ теже нули, то ће оне зацело једном постати тако мале, да је свака од њих мања од $\frac{1}{n^2}$, дакле и $S''_n < \frac{1}{n}$. Сад ако претпоставимо да n, т. ј. број количина $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$, и даље без престанка расти, а оне саме да се и даље без престанка умаљавају, то је јасно да ће се S''_n такође бесконачно умањавати. Дакле је $\lim S_n'' = S'' = 0$. А одатле, кад се једначина 5) узме у обзир:

$$S' = S$$

за $\lim \delta_1 = 0$, $\lim \delta_2 = 0$, $\lim \delta_3 = 0$ и т. д.

Редови са положним члановима.

50. Сад ћемо приступити проучавању редова — падајућих —, у којих су сви чланови једног и истог знака. При томе се можемо ограничити на редове са положним само члановима, јер збир једног реда, у коме су сви чланови одречни, бројно је једнак збиру реда, који постаје, кад се сви чланови његови узму са противним т. ј. положним знаком.

Пре него што приступимо излагању правила о збирљивости редова са положним члановима, приметићемо, да је број правила о збирљивости редова у опште ограничен, и да има још много редова, за које се незна да ли су збирљиви или не.

До правила, помоћу којих се дознаје, да ли је какав ред збирљив или не, доћићемо махом упоређујући редове, које испитујемо, са редовима о чијој смо збирљивости или незбирљивости уверени. Пошто је падајућа геометријска постепеност за сада једини ред, за који знамо да је збирљив, то ћемо понајпре са њом и упоређивати редове.

51. Дани ред

1.) $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots$$

упоредићемо са геометријском постепености:

2.) $$1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + \dots\dots$$

о којој већ у напред знамо, да је збирљива, ако је њен количник $h < 1$, а незбирљива, ако јој је количник $h \geqq 1$. Овде је (види № 45) количник $\frac{a_{n+1}}{a_n} = h$, за сваку могућу целу и положну вредност n-а. Према томе ред ће 1) бити збирљив, ако је постепеност 2) збирљива, дакле ако је $h < 1$ и ако је осем тога почев од једног извесног места па на даље и све једнако

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < h \text{ т. ј. } < 1.$$

Ред 1) биће пак незбирљив, ако је ред 2) незбирљив, дакле $h \geqq 1$, и осем тога, ако је, почев од извесног места па на даље

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > h \text{ т. ј. } > 1.$$

Према томе доказалисмо ове две теореме:

1°. *Ред 1) збирљив је, ако је почев од једног извесног места па на даље количник између сваког члана и онога, који је пред њим, мањи од јединице.*

2°. *Ред 2) јесте незбирљив, ако је тај количник, почев од извесног места па на даље, увек већи од јединице.*

Обично количник између сваког члана и онога, који је лево од њега, тежи извесној граници g, кад n бесконачно расти и тада је

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Узмимо, нека је $g < 1$, а l такав број да је $g < l < 1$. Пошто количник

3.) $$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

при непрестаном рашћењу n-а тежи граници g, која је мања од l, то ће он, почев од извесног места па на даље бити и остати мањи од броја l, који је мањи од јединице. Ред 1) тада је дакле збирљив.

Ако ли је пак $g > 1$ а l сада такав број, да је $g > l > 1$, то ће количник 3) приближавајући се без преставка граници g једном бити и остати већи од броја l, који је опет већи од јединице. Ред 1) тада је дакле незбирљив.

Према томе имамо сад ову згоднију теорему:

Ред 1) биће збирљив или незбирљив, како је кад при бесконачном рашћењу n-а.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \lessgtr 1.$$

Но ваља приметити, да су горње две теореме општије, пошто се може десити, да количник 3) нема границе, као што је то н. пр. случај са редом:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1+h\cos^2\alpha} + h\,\frac{\sin^2\alpha.\,\sin^2 2\alpha}{(1+h\cos^2\alpha)\,(1+h\cos^2 2\alpha)} + \dots\dots$$

$$+ h^{n-1}\,\frac{\sin^2\alpha.\,\sin^2 2\alpha\,\dots\,\sin^2 n\alpha}{(1+h\cos^2\alpha)\,(1+h\cos^2 2\alpha)\,\dots\,(1+h\cos^2 n\alpha)} + \dots$$

где се претпоставља да је

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Овај је ред збирљив, јер је за сваку целу и положну вредност n-а количник:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = h\,\frac{\sin^2(n+1)\,\alpha}{1+h\cos^2(n+1)\,\alpha}$$

мањи од h, које је опет мање од јединице.

Ако је $g = 1$. онда ваља видети, да ли се тој граници количник 3) приближује умаљавајући се или растући све једнако. У првом случају ред 1) на основу теореме 2) у овој №-и јесте незбирљив; а у другом случају остаје ствар нерешена.

Примедба. Ако су услови, у почетку ове №-е напоменути, испуњени, дакле ред 1.) збирљив, онда је (види примедбу № 45).

$$R_n < \frac{a_n\,h}{1-h} \text{ а тим пре } R_n < \frac{a_n}{1-h}$$

Примери. $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \dots\dots$ и

$$1 + \frac{1}{2}.\,\frac{1}{3.2} + \frac{1.3}{2.4}.\,\frac{1}{5.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\,\frac{1}{7.2^3} + \dots$$

Оба ова реда јесу збирљиви.

52. Ред

1.) $\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots$

и из њега изведени ред

2.) $\qquad a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$

јесу у исти мах збирљиви или незбирљиви. Очевидно је:

$$a_1 < 2a_1$$

$$2a_2 = 2a_2$$

$$4a_4 < 2a_3 + 2a_4$$

$$8a_8 < 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8$$

$$16a_{16} < 2a_9 + 2a_{10} + \dots + 2a_{16}$$

. . . .

Одавде добијамо сабирањем

3.) $$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \dots < 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots)$$

Као што се види, збир од ма колико чланова реда 2) јесте мањи но са два помножен збир од толико исто чланова реда 1), дакле тим пре мањи но са 2 помножени збир целог бесконачног реда 1), који је — збир — одређен и коначан број, ако је само ред 1) збирљив. Одатле начином у № 45 показаним изводи се, да ред 2) мора бити збирљив, ако је збирљив дани ред 1).

Али неједначина 3) може се написати и овако

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots > \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots),$$

одакле се опет види, да је збир од ма колико чланова датог реда 1) већи, но половина збира од толико исто чланова реда 2). Одатле јасно сљедује, да ако је ред 2) незбирљив, то исто мора бити и са даним редом.

Даље вреде ови односи:

$$a_1 = a_1$$

$$2a_2 > a_2 + a_3$$

$$4a_4 > a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$8a_8 > a_8 + a_9 + \dots + a_{15}$$

. . . .

Из овога добијамо сабирањем:

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

Из ове неједначине на сличан начин као и мало час закључујемо, да ако је ред 2) збирљив и ред 1) мора бити збирљив, и да, ако је ред 1) незбирљив, ред 2) тим пре мора бити незбирљив.

Да би дакле сазнали, какав је дани ред 1), да ли је т. ј. збирљив или не, ваља најпре сазнати какав је из њега изведени ред 2).

Пример 1. Хармониски ред

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

јест незбирљив, јер је из њега изведени ред

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$ незбирљив. —

На основу последње алинеје у № 42 незбирљив је и ред:

1.) $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots$, где је k ма какав цео и положан број. Такође је незбирљив и ред:

2.) $\frac{1}{h} + \frac{1}{h+1} + \frac{1}{h+2} + \dots$, где је h ма какав разломљен или ирационалан положан број. Јер било h ма колико ми можемо у реду 1) избрати k толико, да је $k > h$ и онда су чланови реда 2) већи но одговарајући чланови реда 1), који је незбирљив.

Стављајући $h = \frac{\alpha}{\beta}$, прелази ред 2) у ред:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+2\beta} + \frac{\beta}{\alpha+3\beta} + \dots\dots,$$

дакле је и ред:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+2\beta} + \dots\dots \text{ незбирљив.}$$

Такође је незбирљив и ред: 3.) $\frac{1}{1-h} + \frac{1}{2-h} + \frac{1}{3-h} + \dots\dots$ где h има горње значење. Јер је тај ред, од k-тог члана па на даље рачунат:

$$\frac{1}{k+1-h} + \frac{1}{k+2-h} + \frac{1}{k+3-h} + \dots\dots$$

где је $k > h$.

Али ако ставимо $k - h = g$, он се претвара у ред $\frac{1}{1+g} + \frac{1}{2+g} + \frac{1}{3+g} + \dots\dots$, који је истог облика са редом 2), дакле је незбирљив, па по томе и ред 3). Ако у ред 3) ставимо $h = \frac{\alpha}{\beta}$, добијамо незбирљиви ред:

$$\frac{\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{\alpha}{2\beta-\alpha} + \frac{\alpha}{3\beta-\alpha} + \dots\dots$$

дакле је незбирљив и ред:

$$\frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\beta-\alpha} + \frac{1}{3\beta-\alpha} + \dots\dots$$

Сад је врло лако доказати, да израз:

$$4.)\quad \frac{b(b+1)(b+2)(b+3)\dots(b+n-1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+n-1)}$$

са којим смо имали посла у № 40, тежи нули при бесконачном рашћењу n-а, или, што је све једно, да изврнути разломак:

$$5.)\quad \frac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)\dots\dots(a+b+n-1)}{b(b+1)(b+2)(b+3)\dots\dots(b+n-1)}$$

при том расти бесконачно.

Разломак 5) може се и овако написати:

$$6.)\quad \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b+1}\right)\dots\left(1+\frac{a}{b+n-1}\right).$$

Сад очевидно је:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b+1}\right) > 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b+1}$$

дакле и

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b+1}\right)\left(1+\frac{a}{b+2}\right) >$$

$$\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{b+1}\right)\left(1+\frac{a}{b+2}\right)$$

а тим пре:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b+1}\right)\left(1+\frac{a}{b+2}\right)>$$

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{b+1}+\frac{a}{b+2}$$

и т. д. и т. д., и најзад

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b+1}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{b+n-1}\right)>$$

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{b+1}+\frac{a}{b+2}+\cdots+\frac{a}{b+n-1}$$

Десни ред при бесконачном рашћењу n-а прелази у незбирљив бесконачан ред, дакле леви израз 6) при том расти бесконачно; то исто вреди и за разломак 5); разломак 4) тежи дакле при бесконачном рашћењу n-а нули.

Пример 2. Проучимо сад ред:

$$1.)\qquad 1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\frac{1}{5^r}+\ldots..$$

За одречне вредности r-а ред је растући, дакле незбирљив, као год и за $r=0$, у ком су случају сви чланови реда $=1$. За вредности r-а положне а мање од јединице сваки је члан реда већи од одговарајућег члана у хармониском реду, дакле на основу № 44 ред је незбирљив, као и за $r=1$, јер се он тада претвара у хармониски ред.

По № 52 изведени ред јесте:

$$1+\frac{1}{2^{r-1}}+\frac{1}{4^{r-1}}+\frac{1}{8^{r-1}}+\frac{1}{16^{r-1}}+\ldots..$$

или

$$1+\frac{1}{2^{r-1}}+\frac{1}{2^{2(r-1)}}+\frac{1}{2^{3(r-1)}}+\frac{1}{2^{4(r-1)}}+\ldots.,$$

а то је геометријска постепеност, којој је $\frac{1}{2^{r-1}}$ количник. Ако је овај — количник — мањи од 1, а то ће бити ако је $r>1$, онда је геометријска постепеност падајућа, дакле је она збирљив ред, а због тога и ред 1). Дакле дани је ред збирљив за $r>1$.

Пример 3). Нека је дати ред:

$$1.)\qquad 1+\frac{1}{2\,(log\,2)^r}+\frac{1}{3\,(log\,3)^r}+\frac{1}{4\,(log\,4)^r}+\ldots$$

Из њега изведени ред јесте:

$$2.)\qquad 1+\frac{1}{(log\,2)^r}+\frac{1}{(log\,4)^r}+\frac{1}{(log\,8)^r}+\ldots$$

који се може и овако написати:

$$3.)\qquad 1+\frac{1}{log\,2^r}\left\{1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\ldots.\right\}$$

Ред у загради збирљив је за $r>1$, а незбирљив за $r\leq 1$; исто је то случај и са редом 2.) па дакле (№ 52) и са редом 1).

53. Упоредимо дани ред

$$1.)\qquad a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots$$ са редом

$$2.)\qquad 1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\ldots\ldots,$$ који је збирљив за $r>1$, а незбирљив за $r\overline{\overline{<}}1$. Овде је (№ 45)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^r = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r}.$$

Ред 1) биће дакле збирљив, ако је почев од једног извесног места па на даље

3.) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r}, \text{ и } r > 1.$$

Но овај знак збирљивости даје се другојаче преставити. Из 3) добијамо после просте измене и узимајући лево и десно природне логаритме:

4.) $$n\,l\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \geqq r\,l\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right],$$

и ово је сада услов збирљивости реда 1). За коначне вредности n-а јесте (№ 25):

5.) $$l\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] < 1.$$

Дакле услов 4) биће тим пре испуњен, ако је

$$n\,l\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \geqq r > 1.$$

На тај начин долазимо до ове теореме:

1°. *Ред 1) јесте збирљив, ако је почев од једног извесног места па на даље и све једнако:*

$$n\,l\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > 1.$$

Такође се лако доказује, да је ред 1) незбирљив ако је:

6.) $$n\,l\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \leqq l\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right],$$

јер ако у реду 2) узмемо $r = 1$, дакле ред 1) упоредимо са хармонијским, онда, радећи на сличан начин као и горе, долазимо до услова незбирљивости под 6).

Пошто је при бесконачном рашћењу n-а

$$\lim l\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = 1$$

то за сваку коначну вредност n-а можемо написати:

$$l\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = 1 - \delta.$$

где је δ положан разломак, коме је при бесконачном рашћењу n-а граница нула. Дакле сад можемо казати:

2°. *Ред 1) јесте незбирљив, ако је, почев од једног извесног места па на даље вазда*

$$n\,l\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 1$$

па и за $n = \infty$ *мање или равно 1.*

Место те две теореме може се очевидно узети ова простија:

3°. *Ред 1) јесте збирљив или незбирљив, како је кад при бесконачном рашћењу n-а*

$$\lim \left\{ n\, l \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) \right\} \gtrless 1.$$

Ако ли је пак граница израза

$$n\, l \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$$

равна јединици, онда треба видети, да ли тај израз тежи јединици растући или умањавајући се. У првом случају ред 1) јесте незбирљив на основу теореме 2), у другом питање остаје не решено.

Пример. $\frac{b}{a+b} + \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{b(b+1)(b+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)} + \ldots .$

Ред је збирљив или не, како је кад $a \gtrless 1$. За $a = 1$ он је незбирљив.

54. Упоредимо дани ред:

$$1.)\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots \ldots$$ са редом

$$2.)\quad \frac{b}{a+b} + \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{b(b+1)(b+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)} + \ldots \ldots$$

за који смо дознали, да је збирљив за $a > 1$ а незбирљив за $a \overset{=}{<}$. Овде је (№ 45):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b+n}{a+b+n}$$

Дакле ред 1) биће збирљив, ако је $a > 1$, и ако је, почев од извесног места па на даље, све једнако:

$$3.)\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{1}{1 + \frac{a}{b+n}}$$

Из овога знака збирљивости сљедује врло просто овај

$$4.)\qquad n \left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right\} \geqq \frac{a}{1 + \frac{b}{n}}$$

Десна страна у 4) мања је од a, и при бесконачном рашћењу n-а приближава се растући броју a, као својој граници. Ако је дакле почев од извесног места па на даље лева страна у 4) већа од a, а $a > 1$, то ће ред 1) бити тим пре збирљив.

И на тај начин имамо теорему:

1°. *Ред 1) јесте збирљив, кад је, почев од једног извесног места па на даље увек*

$$\underline{n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1.}$$

Ако ред 1) упоредимо са редом 2), узимајући у овоме да је $a = 1$, усљед чега он постаје незбирљив, онда на сличан начин, као и мало час, налазимо, да је ред 1) незбирљив, ако је почев од једног извесног места па на даље

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqq \frac{1}{1 + \frac{b}{n}}$$

Овде је десна страна < 1, и при бесконачном рашћењу n-а приближује се растући јединици. Ако је дакле лева страна увек $\leqq 1$, то ће ред 1) тим пре бити незбирљив.

И тако имамо сад теорему:

2°. *Ред 1) јесте незбирљив, ако је, почев од извесног места па на даље вазда*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1,$$

па и за $n = \infty$, мање или највише $= 1$.

Место теорема 1° и 2° можемо ове простије узети.

Ред 1) биће збирљив или незбирљив, како је кад при бесконачном рашћењу n-а

$$lim\left\{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right\} \gtrless 1.$$

Ако је ова граница равна јединици, онда треба видети да ли се израз

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

приближава граници 1 растући или опадајући. У првом случају на основу теореме 2° ред 1) јесте незбирљив, а у другом ствар остаје нерешена.

Примери. $\frac{x}{1^r} + \frac{x^2}{2^r} + \frac{x^3}{3^r} + \frac{x^4}{4^r} + \ldots\ldots$

Ред је за $x < 1$ збирљив, а за $x > 1$ незбирљив. А за $x = 1$, он је збирљив или не, како је кад $r \gtrless 1$ (обр. 12 у № 26).

55. Може се десити, да се количник између $(n+1)$-вог и n-тог члана јави у облику

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots\ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots\ldots + a_h}$$

тада је

$$n\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right\} =$$

$$= \frac{(a_1 - A_1) + (a_2 - A_2)\frac{1}{n} + \ldots + (a_h - A_h)\frac{1}{n^{h-1}}}{1 + A_1\frac{1}{n} + A_2\frac{1}{n_2} + \ldots + A_h\frac{1}{n^h}}$$

одакле:

$$lim\left\{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right\} = a_1 - A_1$$

Дакле је дани ред збирљив или незбирљив, како је кад:

$$a_1 - A_1 \gtrless + 1.$$

Као што се види, ова је теорема од помоћи у оном случају, где теорема у 51) издаје.

Примери. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots\ldots$

$$1+m+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\binom{m}{4}+\ldots\ldots$$

$$1-m+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\binom{m}{4}-\ldots\ldots$$

56. Од особите су важности редови, уређени по растућим целим и положним степенима какве променљиве количине, н. пр. x, дакле редови оваког облика:

1.) $t_1x^m+t_2x^{m+\alpha}+t_3x^{m+2\alpha}+t_4x^{m+3\alpha}+\ldots\ldots$

где t_1, t_2, t_3, ... не зависе од x.

Пошто је x променљива количина, то се може овде питати, за које је вредности x-а ред збирљив, или друкче, између којих двеју граница леже оне вредности x-а, за које је тај ред збирљив. Те границе зову се границе збирљивости реда 1). Помоћу до сад нађених метода ми смо увек у стању наћи границе збирљивости таквог једног реда. Тако н. пр. претпостављајући најпре да су сви чиниоци положни, по методи № 51 имамо:

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=lim\frac{t_{n+1}}{t_n}x^\alpha=x^\alpha\, lim\frac{t_{n+1}}{t_n}=x^\alpha g,$$ ако је т. ј.

$$lim\frac{t_{n+1}}{t_n}=g$$

Дакле на основу № 51 ред 1) биће збирљив ако је

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=x^\alpha g<1$$

или $x^\alpha<\frac{1}{g}$ или најпосле $x<\frac{1}{\sqrt[\alpha]{g}}$. Очевидно и за сваку одречну вредност x-а мању од $\frac{1}{\sqrt[\alpha]{g}}$ ред 1) мора и то тим пре бити збирљив. Дакле су границе збирљивости реда 1).

$$x=+\frac{1}{\sqrt[\alpha]{g}} \text{ и } x=-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{g}}.$$

До истог се резултата долази, ако се узме, да у реду 1) има и одречних и положних сачинилаца, али онда g значи границу, којој тежи бројна вредност количника $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Да ли је ред збирљив и за саме граничне вредности x-а, т. ј. за $x=\frac{1}{\sqrt[\alpha]{g}}$, треба у сваком особеном случају нарочито помоћу већ познатих метода испитати.

Ако је $m=0$, а $\alpha=1$, дакле ред

$$t_1+t_2x+t_3x^2+t_4x^3+\ldots$$

онда су границе збирљивости: $x=\frac{1}{g}$ и $x=-\frac{1}{g}$.

Примедба. Успут примећујемо, да ако је ред 1), коме су сви чланови положни, збирљив за н. пр. $x=+\alpha$, он мора бити збирљив и за $x<+\alpha$. То следује из № 44. Ако у реду 1) има и одречних сачинилаца, све ће ово вредети, ако вреди за ред, који постаје, кад се узму сви сачиниоци са положним знаком.

57). Ако је дани ред:

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots.$$

и ако је почев од једног извесног места па на даље увек $\sqrt[n]{a_n} < h$, онда је ред 1) збирљив ако је $h < 1$. И доиста, ако је почев н. пр. од $(k+1)$-га места па на даље $\sqrt[n]{a_n} < h$, то онда имамо:

$$2).\quad a_{k+1} < h^{k+1},\ a_{k+2} < h^{k+2},\ a_{k+3} < h^{k+3}, \ldots$$

Одатле следује да су чланови реда:

$$3.)\qquad a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + \ldots..$$

мањи но одговарајући чланови геометријске постепености:

$$h^{k+1} + h^{k+2} + h^{k+3} + h^{k+4} + \ldots.$$

која је падајућа, ако је, као што претпостављамо, $h < 1$; према томе ред 3) (44), па дакле и ред 1) (№ 42) мора бити збирљив.

На сличан начин доказује се, да, ако је почев од једног извесног места па па даље $\sqrt[n]{a_n}$ увек веће од јединице, да велим онда ред мора бити незбирљив. Ако је пак $h = 1$, ствар остаје нерешена.

Обично при бесконачном рашћењу n-а $\sqrt[n]{a_n}$ тежи такође извесној граници g тако, да је $lim \sqrt[n]{a_n} = g$.

Узмимо најпре нека је $g < 1$, а l такав број да је $g < l < 1$. Пошто $\sqrt[n]{a_n}$ тежи непрестано граници g, која је мања од l, то ће најзад $\sqrt[n]{a_n}$ бити и остати мање од броја l, који је опет мањи од јединице; дакле је ред 1) тада збирљив.

На исти начин доказује се и то, да је ред 1) незбирљив, ако је $lim \sqrt[n]{a_n} = g > 1$.

Ако је $lim \sqrt[n]{a_n} = g = 1$, питање остаје нерешено; али ако у овом последњем случају $\sqrt[n]{a_n}$ тежи јединици умањавајући се, ред је незбирљив.

Примедба 1. Ако се ред 1) закључи са n-тим чланом онда је погрешка

$$R_n < \frac{h^{k+1}}{1-h}$$

Примедба 2. Границе у теореми 51.) и у овој, од којих зависи збирљивост редова, јесу једнаке. Јер узмимо, нека је дат ред:

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots.$$

и нека је

$$lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,\ lim \sqrt[n]{a_n} = \lambda' \text{ и}$$

$\lambda < \lambda'$. Узмимо сад ред

$$2.)\quad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + \ldots$$

коме су сачиниоци чланови реда 1). Количник између $(n+1)$-вог и n-тог члана реда 2) јесте $\frac{a_{n+1}}{a_n}x$, а граница тога количника јесте λx. Ред 2) биће дакле збирљив, ако је $\lambda x < 1$ или $x < \frac{1}{\lambda}$, а незбирљив, ако је $x > \frac{1}{\lambda}$. n-ни корен из n-ог члана реда 2) јесте $\sqrt[n]{a_n}\, x$, а граница тога израза $\lambda' x$. Дакле ред 2) биће такође збирљив, ако је $\lambda' x < 1$ или $x < \frac{1}{\lambda'}$, а незбирљив, ако је $x > \frac{1}{\lambda'}$. Кад би дакле λ било различно од λ', онда би ред 2) за вредности x-а, које су између $\frac{1}{\lambda'}$ и $\frac{1}{\lambda}$ морао бити у исти мах збирљив и незбирљив. Дакле границе λ и λ' морају бити једнаке.

Пример: $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots\cdots$

58. Ако је дати ред:

1.) $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots\cdots$$

и ако је почев од извесног, рецимо $(k+1)$-ог места па на даље:

2.) $$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} > h$$

и $h > 1$, ред 1) јесте збирљив, ако ли је пак количник под 2) увек мањи од јединице, ред је незбирљив.

У првом случају имамо

$$\log \frac{1}{a_{k+1}} > h \log (k+1) \text{ или}$$

$$\log \frac{1}{a_{k+1}} > \log (k+1)^h ,$$

$$\log \frac{1}{a_{k+2}} > h \log (k+2) \text{ или } \log \frac{1}{a_{k+2}} > \log (k+2)^h ,$$

$$\log \frac{1}{a_{k+3}} > h \log (k+3) \text{ или } \log \frac{1}{a_{k+3}} > \log (k+3)^h$$

. . . .

Из ових неједначина следује:

$$a_{k+1} < \frac{1}{(k+1)^h},\ a_{k+2} < \frac{1}{(k+2)^h},\ a_{k+3} > \frac{1}{(k+3)^h} \cdot \cdot$$

Дакле чланови реда:

3.) $$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + \cdots\cdots$$

мањи су од одговарајућих чланова реда:

4.) $$\frac{1}{(k+1)^h} + \frac{1}{(k+2)^h} + \frac{1}{(k+3)^h} + \cdots\cdots$$

Ред 4) јесте ред, који настаје за k-тим чланом реда:

$$1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots\cdot$$

Но овај ред јесте збирљив, почем је $h > 1$ (види № 52, пример 2.), дакле то је исто случај и са редом 4), па дакле и са редом 3) (№ 44), па дакле најзад и са редом 1) (№ 42).

2

У другом случају, кад је количник под 2) вазда мањи од јединице, почев на пример од $(k+1)$га члана, имамо:

$$\log\frac{1}{a_{k+1}} < \log(k+1) \text{ или } \frac{1}{a_{k+1}} < (k+1) \text{ или: } a_{k+1} > \frac{1}{k+1};$$

$$\log\frac{1}{a_{k+2}} < \log(k+2) \text{ или } \frac{1}{a_{k+2}} < k+2 \text{ или:}$$

$$a_{k+2} > \frac{1}{k+2};$$

. . . .

Из овога сљедује да су чланови реда 3) већи но одговарајући чланови реда:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \ldots,$$

који је незбирљив. Дакле је незбирљив и ред 3), а због тога и ред 1) у овом другом случају.

Обично се дешава, да је при бесконачном рашћењу n-а

$$\lim \left\{ \frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n} \right\} = g$$

где је g извесан и одређен број. Тада се доказује на начин сличан ономе, који је употребљен у № 51 и 57, да је ред 1) збирљив или незбирљив, како је кад $g \gtrless 1$, и да питање остаје нерешено, ако је $g = 1$. Међу тим ако се у овом последњем случају количник под 2) приближава јединици растући, дакле, ако је он вазда мањи од јединице, ред је незбирљив.

Пример. Ред: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$ јесте незбирљив за $x = \pm 1$.

59 Ако је:

1.) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$

дати ред, и ако $\lim na_n$ није равно нули онда ред 1) мора бити незбирљив. — Јер узмимо да је $\lim na_n = g$ и h један број, који лежи између нуле и g. Пошто na_n при бесконачном рашћењу n-а тежи својој граници g, која је већа од h, то ће, почев од једне доста велике вредности n-а н. пр. од $(k+1)$ па на даље, na_n бити и остати непрестано веће од h. На тај начин дакле имаћемо тада

$$(k+1)\, a_{k+1} > h \text{ или } a_{k+1} > \frac{h}{k+1}$$

$$(k+2)\, a_{k+2} > h \text{ или } a_{k+2} > \frac{h}{k+2}$$

. . . .

Као што се види чланови реда 1), почев од a_{k+1} па на даље, већи су од одговарајућих чланова реда

$$\frac{h}{k+1} + \frac{h}{k+2} + \frac{h}{k+3} + \ldots$$

за који већ знамо да је незбирљив. Дакле и ред 1) јесте незбирљив.

Ако ли је пак $lim\, n^r a_n$ раван једном коначном броју (који дакле може и нули бити раван) и $r > 1$, дани ред мора бити збирљив. Јер ако је $lim\, n^r a_n = g$ и $h > g$, онда ће, почев од једне довољне велике вредности n-а, н. пр. од $(k + 1)$ па на даље и за све следеће $n^r a_n$ бити $< h$. и тако ћемо имати

$$(k + 1)^r a_{k+1} < h \text{ или } a_{k+1} < \frac{h}{(k+1)^r},$$

$$(k + 2)^r a_{k+2} < h \text{ или } a_{k+2} < \frac{h}{(k+2)^r}$$

. . . .

Као што се дакле види у овом другом случају чланови реда 1), рачунатог тек од његовог $(k + 1)$-ог места па на даље, јесу мањи од одговарајућих чланова реда:

$$2.) \quad \frac{h}{(k+1)^r} + \frac{h}{(k+2)^r} + \frac{h}{(k+3)^r} + \ldots\ldots$$

Овај ред 2) постаје, кад се сви чланови збирљивог реда:

$$\frac{1}{(k+1)^r} + \frac{1}{(k+2)^r} + \frac{1}{(k+3)^r} + \ldots\ldots$$

помноже са извесним и коначним бројем h. Дакле је ред 2) збирљив, па по томе и ред 1).

60. У № 51 видели смо, да је један ред са положним само члановима збирљив или незбирљив, како је кад почев од једног извесног места па на даље, вазда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \lessgtr 1$$

Пошто је:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)}$$

то, ако ставимо

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \alpha,$$

услед чега је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \alpha},$$

можемо такође рећи:

1°. *Ако се количник* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *може преставити у облику* $\frac{1}{1 + \alpha}$, *ред ће бити збирљив или незбирљив, како је кад почев од једне извесне вредности* n-а *па на даље вазда* $\alpha \gtrless 0$.

Ова се теорема за оне случајеве, где се $lim\, \alpha$ може наћи, може заменити овом:

2°. *Дани ред биће збирљив или незбирљив, како је кад* $lim\, \alpha \gtrless 0$. —

Ако је пак $lim\, \alpha = 0$ не може се ништа казати, осем у случају, где α умањавајући се бесконачно остаје вазда одречно, јер тада, пошто је $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \alpha}$ и α одречно, увек је, почев од једне извесне вредности n-а па на даље, $a_{n+1} > a_n$, и по томе је дани ред почев од те вредности

n-а растући, дакле незбирљив, јер су му сви чланови положни.

61. Испитајмо сад из ближе онај сумњиви случај у № 60, т. ј. кад α почев од једне извесне вредности n-а без престанка тежи нули, али остајући вазда положно, због чега ред почев од једног извесног места па на даље мора падати.

У № 53 видели смо, да ред мора бити збирљив, ако је почев од извесне вредности n-а па на даље вазда

2.) $$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r} \text{ и } r>1$$

или ако је

$$(1+\alpha) \geqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \text{ и } r>1$$

или најзад ако је

3.) $$n\alpha \geqq n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^r - 1\right] \text{ и } r>1.$$

Све једно је дакле или био испуњен онај услов под 2) или овај под 3). Граница, којој тежи десни израз при бесконачном рашћењу n-а јесте $r>1$ (обр. 12 у № 26). Ако је дакле $lim\, n\alpha > r$, т. ј. од јединице, то ће онда за једну довољно велику вредност n-а и за све веће услов под 3) бити испуњен и ред 1 биће збирљив. И тако сад имамо теорему:

1°. *Кад се количник* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *може претставити у облику* $\frac{1}{1+\alpha}$ *и кад* α, *остајући вазда положно, тежи нули, кад* *n бесконачно расти, онда је ред збирљив, ако притом $n\alpha$ тежи граници већој од јединице.*

Али ако $n\alpha$ тежи граници мањој од јединице, онда ће почев од извесне вредности n-а бити $n\alpha < 1$, дакле $\alpha < \frac{1}{n}$, дакле ће, почев од исте вредности n-а бити вазда

$$\frac{1}{1+\alpha} \text{ т. ј. } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

то ће рећи, тада ће, почев од поменуте вредности n-а, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ бити вазда већи од количника између $(n+1)$-вог и n-тог члана хармонијског реда, који је незбирљив. И тако имамо сад ову теорему:

2°. *Кад је* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\alpha}$ *и* α *почев од извесне вредности* n-а *па на даље тежи нули, али остајући вазда положно, дати је ред незбирљив, ако при том* $n\alpha$ *тежи граници мањој од јединице.*

Ако ли је $lim\, n\alpha = 1$ онда се не може ништа рећи осем у случају, где $n\alpha$ тежећи без престанка јединици остаје увек мање од ње. Јер тада, почев од извесне вредности n-а па на даље, биће увек:

$$\alpha < \frac{1}{n}, \text{ дакле } \frac{1}{1+\alpha} \text{ т. ј. } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

и дакле ред 1) је незбирљив. Остаје дакле као сумњиви случај онај, кад је $lim\, n\alpha = 1$, и кад је почев од извесне вредности па на даље $n\alpha$ увек веће од јединице. За тај изузетни случај могло би се наћи упуство, како ваља радити, али би и то имало опет свога изузетног случаја, за који би опет могли наћи ново упутство, али би и оно имало својих изузетака и т. д. Ми се у извођење тих правила нећемо упуштати.

Општа правила о збирљивости и незбирљивости редова са положним члановима.

62. 1°. Узмимо најпре нека је дани ред

$$1.)\quad 1 + \frac{1}{2\,(L2)^r} + \frac{1}{3\,(L3)^r} + \frac{1}{4\,(L4)^r} + \cdots$$

где ћемо за време претпоставити, да су логаритми узети у системи, којој је основа број 2. — По упуству № 52 из реда 1) изведени ред јесте, кад се први члан изостави:

$$2.)\quad 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \cdots\cdots$$

јер је $L2 = 1$, $L4 = 2$, $L8 = 3$ и т. д.

На основу № 52 редови 1) и 2) збирљиви су или незбирљиви у исти мах. Они су збирљиви за $r > 1$, а не збирљиви за $r < 1$.

2°. Узмимо сад нека је дани ред

$$3).\quad \frac{1}{4L4(LL4)^r} + \frac{1}{5L5(LL5)^r} + \frac{1}{6L6\,(LL6)^r} + \cdots$$

Ако овде сматрамо први члан као четврти, дакле као прва три нуле, онда је по № 52 одатле изведени ред:

$$4.)\quad \frac{1}{2(L2)^r} + \frac{1}{3(L3)^r} + \frac{1}{4(L4)^r} + \cdots\cdots$$

а то је ред 1). Дакле редови 1), 2) и 3), јесу у исти мах збирљиви или незбирљиви.

3°. Узмимо даље као дани ред

$$5.)\quad \frac{1}{8L8LL8(LLL8)^r} + \frac{1}{9L9LL9(LLL9)^r} + \frac{1}{10L10LL10(LLL10)^r} + \cdots\cdots$$

Ако први члан сматрамо као осми, дакле као првих седам нуле, онда је из 5) изведени ред (№ 52) истоветан са 3). Дакле редови 1), 2), 3) и 5) јесу у исти мах збирљиви или незбирљиви. Настављајући тако, долазимо до закључка, да су редови

$$6\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2^{1+k}} + \frac{1}{3^{1+k}} + \frac{1}{4^{1+k}} + \frac{1}{5^{1+k}} + \cdots\cdots \\[2ex] \frac{1}{2(L2)^{1+k}} + \frac{1}{3(L3)^{1+k}} + \frac{1}{4(L4)^{1+k}} + \cdots\cdots \\[2ex] \frac{1}{4L4\,(LL4)^{1+k}} + \frac{1}{5L5\,(LL5)^{1+k}} + \frac{1}{6L6\,(LL6)^{1+k}} + \cdots \end{array}\right.$$

. . . .

збирљиви, ако је k положно, а ако је k одречно или равно нули незбирљиви.

Примедба. Може се доказати, али мало обилазније, да закључци ове № вреде, па били узети логаритми ма у којој логаритамској системи. При том ваља узети у обзир оно што је речено у № 52 и 54.

Из онога, што смо у № 62 дознали, непосредно следује, да је један ред:

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots\dots$$

збирљив, ако је почев од једне извесне вредности n-а па на више вазда

$$a_n < \frac{\delta}{n^{1+k}} \text{ или } a_n < \frac{\delta}{n(Ln)^{1+k}} \text{ или } a_n < \frac{\delta}{n\,Ln\,(LLn)^{1+k}}$$

и т. д. и т. д., а незбирљив ако је

$$a_n > \frac{\delta}{n} \text{ или } a_n > \frac{\delta}{n\,Ln} \text{ или } a_n > \frac{\delta}{n\,Ln\,(LLn)}$$

и т. д. и т. д. где су δ и k буди какви стални и положни бројеви.

У исти мах увиђа се лако да су од ниже набројаних услова збирљивости, где је $k > 0$, они с леве стране нужни, а они с десне довољни.

Ти су услови

Нужни :	Довољни :
$lim\ n\,a_n = 0$	$lim\ n\,a_n\,n^k = A,$
$lim\ n\,Ln\,a_n = 0$	$lim\ n\,Ln\,a_n\,(Ln)^k = B,$
$lim\ n\,Ln\,(LLn)\,a_n = 0$	$lim\ n\,Ln\,(LLn)\,a_n\,(LLn)^k = C,$

. . . .

Што се тиче левих услова, они, с погледом на резултате последње №-е, не потребују даљег објашњења. Што се пак десних услова тиче, ваља само напоменути, да из н. пр.

$$lim\ n\,a_n\,n^k = A \text{ сљедује: } a_n < \frac{A+\alpha}{n^{1+k}};$$

дакле је дани ред на основу онога, што је мало час речено, збирљив и т. д,

Примедба. Помоћу услова у горњој таблици исказатих увек је можно дознати најзад, да ли је један ред збирљив или незбирљив; јер не може без престанка бити:

$$\frac{1}{n} > a_n > \frac{1}{n^{1+k}},\ \frac{1}{n\,Ln} > a_n > \frac{1}{n\,(Ln)^{1+k}},$$

$$\frac{1}{n\,Ln\,(LLn)} > a_n > \frac{1}{n\,Ln\,(LLn)^{1+k}}\dots\dots$$

пошто, ма колико n било, једна од количина: Ln, LLn, $LLLn$ .... мора нужно бити уображена. Овде зарад простијег посла замишљамо све чланове реда умножене са таквим бројем, да бројиоци разломака, који су облика:

$$\frac{\delta}{n},\ \frac{\delta}{nln},\ \frac{\delta}{nln\,lln}\dots\dots$$

после тога умножаја постају равни јединици.

Примери. Ред

$$1.)\quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} + \dots\dots$$

јесте незбирљив, јер је $lim\,na_n = lim\,\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$

$$2.)\quad \frac{1}{2^{a+\alpha}} + \frac{2^a}{3^{a+\alpha}} + \frac{3^a}{4^{a+\alpha}} + \dots + \frac{n^a}{(n+1)^{a+\alpha}} + \dots\dots$$

јесте збирљив или незбирљив, како је кад α веће од јединице или не. Јер је прво:

$$\lim n\, a_n = \lim \frac{n^{a+1}}{(n+1)^{a+\alpha}} = \lim \left\{ \left(\frac{n}{n+1}\right)^{a+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right\} =$$

$$\lim \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

Да ова последња граница буде равна нули треба да је $\alpha > 1$.

Даље је:

$$\lim n a_n n^k = \lim \frac{1}{n^{\alpha-1-k}} = 0.$$

ако, претпостављајући $\alpha > 1$, узмемо $k < \alpha - 1$. Два прва услова под 1) у овој № испуњена су, дакле је ред збирљив.

64. Горња правила нису згодна, кад је a_n производ чинилаца, чији број при бесконачном рашћењу n-а бесконачно расти. Нека је опет дати ред

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots\ldots$$

1°. У № 62 видели смо, да су редови:

$$2.)\qquad \frac{1}{2\,(L2)^{1+k}} + \frac{1}{3\,(L3)^{1+k}} + \frac{1}{4\,(L4)^{1+k}} + \ldots$$

$$3.)\qquad \frac{1}{4\,L4\,(LL4)^{1+k}} + \frac{1}{5\,L5\,(LL5)^{1+k}} + $$
$$+ \frac{1}{6\,L6\,(LL6)^{1+k}} + \ldots\ldots$$

$$4).\qquad \frac{1}{8\,L8\,(LL8)\,(LLL8)^{1+k}} +$$
$$+ \frac{1}{9\,L9\,(LL9)\,(LLL9)^{1+k}} + \ldots\ldots$$

. . . .

у исти мах збирљиви или незбирљиви, како је кад $k > 0$ или $k \leqq 0$.

Посматрајмо најпре израз:

$$\varphi(n) = n\,Ln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\,L(n+1),$$

и претпоставимо, да је $\lim \varphi(n) = \alpha$. Ако је $\alpha > 0$, то ћемо изабрати број k који је такав, да је

$$0 < k < \frac{\alpha}{Le} \text{ или } 0 < k\,Le < \alpha$$

Ако сад узмемо израз:

$$\psi(n) = \left\{ 1 - \left[\frac{Ln}{L(n+1)}\right]^k \right\} nLn$$

то је на основу № 27) $\lim \psi(n) = k\,Le$.

Пошто је $kLe < \alpha$, то ће рећи:

$$\lim \psi(n) < \lim \varphi(n),$$

то ће почев од једне довољно велике вредности n-а, па на више бити вазда $\psi(n) < \varphi(n)$ или по замени ових функција њиним вредностима

$$5.) \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+1}\left[\frac{Ln}{L\,(n+1)}\right]^{1+k}$$

Али је десна страна ове неједначине количник између $(n+1)$-вог и n-тог члана реда 2) у овој № — и, који је ред збирљив за $k > 0$. Дакле је и ред 1) збирљив (№ 45).

Ако ли је $\alpha < 0$, то нека је k такав број, да је $0 > k\,Le > \alpha$, па је онда $lim\,\varphi\,(n) < lim\,\psi\,(n)$, дакле почев од извесног места па на даље вазда $\varphi\,(n) < \psi\,(n)$ или по замени ових функција њиховим вредностима:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1}\left[\frac{Ln}{L\,(n+1)}\right]^{1+k}$$

Због $k < 0$ ред 2) јесте незбирљив, па дакле услед ове неједначине и ред 1) (№ 45).

Обрасци 2), 3) и 4) вреде рекосмо горе за ма какве логаритме, па дакле и ови закључци. У осталом могли би се у место логаритама L увести сада на крају после логаритми ма које системе. Ако хоћемо да уведемо природне логаритме (l), ваља се сетити обрасца

$$LA = MlA, \text{ где је } M = \frac{1}{l2}.$$

И тако сад имамо ову теорему.

1°. Ред: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots\ldots$ *са положним само члановима биће збирљив или незбирљив, како је кад*

$$6.) \qquad lim\left\{n\,ln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\,l\,(n+1)\right\}$$

положан или одречан.

Ако је граница овог израза у загради равна нули, ствар остаје у сумњи; за то ћемо сада да посматрамо израз:

$$\varphi_1\,(n) = nLn\,(LLn) - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\,L(n+1)\,LL\,(n+1).$$

Нека је $lim\,\varphi_1\,(n) = \alpha_1$ и најпре $\alpha_1 > 0$, онда можемо избрати k тако, да је

$$0 < k < \frac{\alpha_1}{(Le)^2} \text{ или } 0 < k\,(Le)^2 < \alpha_1.$$

Ако сад узмемо израз:

$$\varphi_1'\,(n) = \left\{1 - \left[\frac{LLn}{LL\,(n+1)}\right]^k\right\} n\,Ln\,(LLn)$$

то је на основу № 27) $lim\,\psi_1\,(n) = k\,(Le)^2$.

Пошто је $k\,(Le)^2 < \alpha_1$, т. ј. $lim\,\psi_1\,(n) < lim\,\varphi_1\,(n)$, то ће почев од извесне вредности n-а па на више бити увек $\psi_1\,(n) < \varphi_1\,(n)$, или ако се $\psi_1\,(n)$ и $\varphi_1\,(n)$ замене горњим вредностима:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n\,Ln}{(n+1)\,L\,(n+1)}\left[\frac{LLn}{LL\,(n+1)}\right]^{1+k}$$

Десна страна јесте количник између $(n+1)$-ог и n-тога члана реда 3), који је збирљив за $k > 0$, дакле је (№ 45) збирљив и ред 1). На сличан начин уверавамо се, да ће ред 1) бити незбирљив, ако је $\alpha_1 < 0$.

Ако се логаритми L смене природнима, биће:

$$\varphi_1(n) = M^2 \left\{ n\, ln\, lln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1)\, ll(n+1) \right\} -$$

$$- MlM \left\{ nln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1) \right\},$$

где је израз у последњој загради услед горње претпоставке 6) раван нули. Дакле је:

$$\alpha_1 = M^2\, lim \left\{ nln\, lln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1)\, ll(n+1) \right\}$$

Као што видимо знак од α_1 не зависи од M^2, које је положно, и према томе ред 1) биће збирљив или незбирљив, како је кад

$$lim \left\{ nln\, lln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1)\, ll(n+1) \right\}$$

положан или одречан

Како ваља даље радити, ако би н. пр. и $\alpha_1 = 0$ било, увиђавно је. Резултат целог овог претреса јесте теорема:

2°. *Дати ред 1) јесте збирљив или незбирљив, како је кад први од следећих израза, који је различан од нуле, положан или одречан:*

$$A = 1 - lim \frac{a_{n+1}}{a_n},\ B = lim \left\{ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right\} - 1$$

$$C = lim \left\{ n\, ln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1) \right\}$$

$$D = lim \left\{ n\, ln\, lln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1)\, ll(n+1) \right\}$$

$$E = lim \left\{ n\, ln\, lln\, llln - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1)\, l(n+1)\, ll(n+1). \right.$$

$$\left. lll(n+1) \right\}$$

. . . .

Редови са положним и одречним члановима.

65. Нека је:

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots\ldots$$

дани ред у коме има и положних и одречних чланова, а

$$2.)\qquad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \ldots\ldots$$

ред који из данога постаје кад му се сви чланови узму са положним знаком. Нека је даље

$$3.)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots\ldots$$

ред, који постаје из положних чланова данога реда, а

$$4.)\qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \ldots\ldots$$

ред, који постаје из његових одречних чланова, кад се они узму са знаком положним.

Ако у збиру S_n првих n чланова реда 1) има p положних и q одречних, то ће рећи ако у њему има p првих чланова реда 3) и q првих чланова реда 4) али узетих са одречним знаком, и ако збир првих p чланова реда 3) означимо са s_p и збир првих q чланова реда 4) означимо са s'_q онда је:

$$S_n = s_p - s'_q$$

Одавде, кад n, па дакле и p и q, бесконачно расти, сљедује:

$$5.) \qquad \lim S_n = \lim s_p - \lim s'_q.$$

Овде сад може бити више случајева:

1°. Редови 3) и 4) јесу збирљиви дакле $\lim s_p$ и $\lim s'_q$ одређене и коначне количине. Онда усљед 5) и $\lim S_n$ јесте одређена и коначна количина, дакле је ред 1) збирљив, и његов је збир разлика збирова редова 3) и 4). Дакле имамо теорему:

Дани ред са положним и одречним члановима јесте збирљив, ако је збирљив ред, који је састављен из његових положних чланова, а тако исто и ред, који је састављен из његових одречних чланова. Збир деснога реда јесте разлика збирова тих редова.

Ако је S'_n збир првих n чланова реда 2) то је:

$$S'_n = s_p + s'_q \quad \text{и} \quad \lim S'_n = \lim s_p + \lim s'_q$$

одакле се види, да су редови 3) и 4) збирљиви, ако је ред 2) збирљив и обратно. И за то можемо сада такође рећи:

Дани ред 1) јесте збирљив, ако је збирљив ред 2), који из даног постаје, кад се сви чланови овога узму са знаком положним. На основу № 47 збир реда 1) тада је независан од тога, како су му чланови распоређени.

2°. Кад је један ма који од два реда под 3) и 4) збирљив, а други незбирљив, онда је незбирљив и дани ред 1), и то ако је ред 3) незбирљив, а ред 4) збирљив, онда је $\lim S = +\infty$, а ако је ред 3) збирљив, а ред 4) незбирљив, $\lim S = -\infty$.

3°. Ако су редови 3) и 4) незбирљиви и падајући, дакле $\lim \alpha_n = 0$ и $\lim \beta_n = 0$, онда се чланови реда 1) могу распоредити тако, да као збир реда изађе какав хоћемо број A.

Зарад тога треба чланове реда 1) распоредити тако, да најпре једно за другим дође онолико и само онолико чланова реда 3), колико је управ потребно, па да њихов збир не буде мањи од A, али да тај збир, кад се изостави последњи у рачун узети члан реда 3), испадне мањи од A. За тим треба да дође још само онолико са знаком одречним узетих чланова реда 4), колико је управ потребно, па да збир свију већ написаних положних и одречних чланова не буде више већи од A, али да тај збир, кад се изостави последњи у рачун узети одречни члан, буде већи од A. Ако се сада по томе закону буду узастопце ређали чланови редова 3) и 4), онда ће у новодобивеном реду код сваког места, где се мења знак, разлика између A и збира донде већ сабраних чланова изнети мање, но вредност последњег у рачун узетог члана. Па пошто је $\lim \alpha_n = 0$ и $\lim \beta_n = 0$, то је јасно, да ће се збир чланова новога реда најзад разликовати од A у мање од ма како малог броја.

4°. Ако чланови редова 3) и 4) при бесконачном рашћењу n-а остану коначни или пак расту бесконачно, усљед чега су ти редови незбирљиви, онда и ред 1) на основу № 43 не може бити збирљив. Он тада може бити незбирљив или неодређен.

66. Ми ћемо сада претпоставити, да се знаци чланова правилно мењају, т. ј. у једнаким размацима.

1°. Узмимо најпре да за сваким положним чланом долази одречан и за сваким одречним положан. Ако означимо са R_n остатак данога реда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \dots\dots\dots, \tag{1.)}$$

кад се овај заврши са n-тим чланом, онда је:

$$R_n = \pm \left[a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots \right],$$

или

$$R_n = \pm \left[(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots\right],$$

или пак

$$R_n = \pm \left[a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) \dots\right].$$

Ако се сад чланови датога реда бесконачно умаљавају (ред падајући), онда су и разлике у заградама (округлим) положне, и за то, без обзира на знак:

$$a_{n+1} > R_n > a_{n+1} - a_{n+2}. \tag{2.)}$$

Количине, између којих лежи R_n јесу за сваку могућу вредност n-а коначне, и граница, којој оне теже, јесте нула; дакле је то исто случај и са R_n и за то је ред збирљив.

Дакле доказали смо теорему:

Ред, у коме су два и два узастопна члана увек противног знака, јесте збирљив, кад се његови чланови идући с лева на десно бесконачно умаљавају.

Но ваља приметити, да ће ред бити збирљив и онда, ако он није баш одмах с почетка такав, као што смо претпоставили, него а мало доцније.

Из 2) види се, да је погрешка, кад се ред прекине са буди којим чланом, мања од првог занемареног члана, и истога је знака с њиме.

2°. Ако ли се пак знаци чланова тек у извесним једнаким или неједнаким размацима мењају, ред ће опет бити збирљив, ако се само узастопне групе, састављене из чланова једног и истог знака, бесконачно умаљавају. Ово ће последње увек бити случај, кад су ти размаци једнаки и чланови се реда бесконачно умаљавају. И доиста, нека је:

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \dots\dots \tag{3.)}$$

ред, коме су чланови узастопне положне и одречне групе данога реда. Ред 3) јесте збирљив, јер му се чланови бесконачно умаљавају и јер су два и два узастопна члана противно означена. Нека је сад R'_p остататак тога реда, кад се он заврши својим $(p-1)$-им чланом. Нека је даље R_n остатак даног реда, кад се овај заврши са n-им чланом и n такво, да је

$$S'_{p-1} < S_n < S'_p\,, \tag{4.)}$$

где је S_n збир првих n чланова датог реда, а S'_p и S'_{p-1} збирови од p и $(p-1)$ првих чланова реда 3). Из 4) сљедује

$$R'_{p-1} > R_n > R'_p\,. \tag{5)}$$

Пошто су R'_p и R'_{p-1} коначне количине и теже нули, јер је ред 3) збирљив, то је онда због 5) исто случај и са R_n, дакле је дани ред збирљив. То исто следује и из 4), одакле се још види, да је збир реда 3) једнак са збиром данога реда.

Погрешка коју чинимо, кад ред завршимо са p-ом групом, мања је од вредности прве занемарене, т. ј. $(p+1)$-ве групе и истога је знака с њоме.

Примедба 1. Знак збирљивости у овој нумери општији је од онога у № 65, јер знак збирљивости у овој нумери не води бригу о томе, да ли је ред, који из даног постаје, кад му се сви чланови узму са положним знаком, збирљив или не.

Примедба 2. Ако чланови реда 1) час расту час опадају бројно, он је збирљив очевидно, ако само стоје све остале претпоставке, учињене у почетку 2°.

67. Нека је дани ред:

$$1.)\qquad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$$

1°. Ако чланови овога реда истина непрестано опадају, али при том теже не нули, већ једној одређеној и коначној граници g, тако, да је

$$lim\, a_n = g \quad \text{и} \quad lim\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

онда је ред неодређен. Јер прво због:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

и због $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_{2n-1} > a_{2n}$;

разлике у заградама јесу положне и за то:

$$a_1 > S_{2n} > a_1 - a_2$$

Исто тако због

$$S_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots$$
$$+ (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

јесте $a_1 > S_{2n-1} > a_1 - a_2$

Дакле S_{2n} и S_{2n-1} налазе се између две коначне границе, и због тога они не могу при бесконачном рашћењу n-а бесконачно расти а тако исто *сваки* од њих, као што се види из њихових израза, не може тежити различним већ једној одређеној и коначној граници. Пошто је сад

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \quad \text{и}$$

$$lim\, S_{2n} - lim\, S_{2n-1} = lim\, a_{2n} = g,$$

то, ако је:

$$lim\, S_{2n-1} = h, \text{ онда је } lim\, S_{2n} = g + h$$

Као што се види, збир реда 1) тежи непрестано час g, а час $g+h$ као својој граници, како је кад број у рачун узетих чланова паран или не. Дакле је ред 1) неодређен.

2°. То је исто случај, т. ј. ред је неодређен и онда, кад чланови реда 1) истина непрестано расту, али при том теже не нули, већ једној одређеној и коначној граници g, тако, да је:

$$lim\, a_n = g, \quad \text{и} \quad lim\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

Јер из :

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \ldots\ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$= - \left[(a_{2n} - a_1) - (a_3 - a_2) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n-2})\right]$$

и

$$S_{2n-1} = a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \ldots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1})$$

$$= a_{2n-1} - (a_2 - a_1) - (a_4 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-3})$$

следује, да је S_{2n} одречно, а S_{2n-1} положно, и даље :

$$a_1 - a_{2n} < S_{2n} < a_1 - a_2 \text{ и } a_{2n-1} > S_{2n-1} > a_1$$

Дакле S_{2n} и S_{2n-1} не могу расти бесконачно и после с обзиром на њихове горње изразе сваки од њих мора тежити једној одређеној и коначној граници. Пошто је сад

$$\lim S_{2n} - \lim S_{2n-1} = \lim a_{2n} = g,$$

то, ако је : $\lim S_{2n-1} = h$, онда је

$$\lim S_{2n} = g + h,$$

и ред је 1) неодређен.

3°. Ако чланови реда 1) расту, али је :

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 \text{ и } \lim a_n = \infty,$$

онда је или :

$$\lim S_{2n-1} = \lim \left\{a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \ldots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1})\right\} = \infty$$

дакле ред :

2.) $a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + (-a_6 + a_7) + \ldots$

незбирљив, или је пак :

$$\lim S_{2n} = \lim \left\{(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})\right\} = - \infty,$$

дакле ред :

3. $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots$

незбирљив, или је пак у исти мах :

$$\lim S_{2n-1} = \infty, \ \lim S_{2n} = - \infty.$$

Које је када од тога двога случај, ваља испитати по №-ама 51, 52, 53, 54 и т. д., те ћемо тада знати, да ли је ред 1) незбирљив или неодређен.

4°. Ако је ред час растући час падајући, дакле на пример:

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > a_6 < \ldots a_{2n-1} > a_{2n} < a_{2n+1},$$

онда редови 2) и 3) у 3°, који из данога постају, имају све чланове положне. Узимајући сад да $\lim a_n$ није раван нули, можемо рећи, да ће, ако су редови 2) и 3) незбирљиви, и ред 1) бити незбирљив; ако ли је ред 2) збирљив, а ред 3) незбирљив, ред 1) биће неодређен, и збир ће му тежити час ∞, а час једном коначном броју; ако ли су најзад оба реда 2) и 3) збирљиви, онда је ред 1) неодређен, и збир му тежи час једном час другом од два коначна броја.

Примери:

$$1-\frac{3}{2}+2-\frac{11}{4}+3-\frac{31}{8}+4-\frac{79}{16}+\dots$$

$$1-\frac{3}{2}+2-\frac{5}{2}+3-\frac{7}{2}+4-\frac{9}{2}+\dots$$

$$1-1+2-1+3-1+\dots$$

$$1-\frac{1}{2}+2-\frac{7}{4}+3-\frac{23}{8}+\dots$$

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+\dots$$

Примена незбирљивих редова при сабирању збирљивих редова.

68. Нека је:

1.) $$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots$$

ма какав ред са положним члановима, и

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

$$S'=a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_{n+k},$$

где је S_n збир првих n чланова реда 1) а S' збир његових n чланова, почев од $(k+1)$-ог па на даље до $(n+k)$-ог члана. Одузимањем излази

2) $$S_n-S'=a_1+a_2+\dots+a_k-(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots a_{n+k})$$

Али ако се при одузимању редова S_n и S' буду одузимали одговарајући чланови, дакле први од првог, други од другог и т. д., и добивене разлике буду се означиле са:

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, онда ће се добити:

3.) $$S_n-S'=b_1+b_2+b_3+b_4+\dots+b_n$$

Из 2) и 3) следује:

$$b_1+b_2+b_3+\dots+b_n=(a_1+a_2+\dots+a_k)-$$
$$-(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+k})$$

Лева страна јесте збир првих n чланова бесконачног реда:

4.) $$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\dots$$

Ако тај збир означимо са s_n, онда је

5.) $$s_n=(a_1+a_2+\dots+a_k)-(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots a_{n+k})$$

Ако је даље $\lim a_n=\alpha$ и α различно од нуле, онда је ред 1) зацело незбирљив, док је међу тим ред 4) збирљив, јер из 5) следује

$$\lim s_n=(a_1+a_2+\dots+a_k)-k\alpha,$$

дакле је збир реда 4) одређен и коначан број. Ако је α у даном случају $= 0$, онда је збир реда 4) просто: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$. И тако смо доказали теорему:

Ако од датог збирљивог или незбирљивог реда: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$ одузмемо члан по члан исти ред пошто смо га пре одузимања лишили његових k првих чланова, онда нови ред мора бити збирљив, и збир му је $= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) - k\alpha$, а ако је $\lim a_n = \alpha = 0$, онда му је збир $= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$.

Пример 1. Кад од незбирљивог реда:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

одузмемо ред:

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

онда је нови ред

$$s = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

и збир му је $= 1$

Ако од данога реда одузмемо ред

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

а то је дани ред, али лишен своја прва два члана, онда добијамо:

$$S - S_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \dots = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Дакле је збир реда

$$s_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots$$

у кога су имениоци са јединицом смањени квадрати бројева 2, 3, 4, 5 . . ., раван броју $\frac{3}{4}$.

Ако ли од даног реда одузмемо ред

$$S_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots$$

а то је дани ред лишен својих првих 7 чланова, онда је:

$$S - S_3 = \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \dots$$

Збир тога реда је

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{363}{140}$$

Одатле налазимо да је збир реда:

$$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \dots = \frac{2}{7}(S - S_3) = \frac{363}{490}$$

Имениоци чланова тога реда јесу са 6 смањени троугони бројеви 10, 15, 21, 28, 36, . . . $\frac{n(n+1)}{1.2}$.

Пример 2. Кад од реда:

$$1.)\quad S = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{5} + \frac{11}{9} + \dots.$$

одузмемо ред

$$S_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{5} + \dots..$$

добијамо

$$2.)\quad S - S_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{20} - \frac{1}{30} \dots.$$

Пошто је за дани ред $\lim a_n = 2$, то је збир под 2) $= 1 - 2 = -1$ дакле је збир реда:

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots.$$

раван *јединици*, као год и горе.

Сабирање и множење редова.

69. Нека су:

$$1.)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots.$$

$$2.)\qquad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots\dots.$$

два дана реда а

$$3.)\quad (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) + (\alpha a_3 + \beta b_3) + \dots.$$

ред, који постаје, кад се дани редови саберу члан по члан, пошто су ти редови најпре помножени са коначним

и од n-а независним бројевима α и β. Ако је S_n збир првих n чланова реда 1), и ако S'_n и S''_n имају исто значење за редове 2) и 3) онда је:

$$S''_n = \alpha S_n + \beta S'_n \text{ и } 4.)\ \lim S''_n = \alpha \lim S_n + \beta \lim S'_n.$$

Ако су сад редови 1) и 2) збирљиви, дакле

$$\lim S_n = S \text{ и } \lim S'_n = S',$$

где су S и S' одређени и коначни бројеви, онда из 4) сљедује:

$$\lim S''_n = \alpha S + \beta S'.$$

Дакле је и ред 3) збирљив, и његов збир једнак суми производа, који се добијају, кад се збир сваког даног реда помножи са оним бројем, са којим је тај ред био помножен. И тако имамо теорему:

1°. *Кад се два дана реда саберу члан по члан, пошто се сваки од њих најпре помножи са ма каквим коначним и од n-а независним бројем, онда је и нови ред збирљив, и његов збир јесте једнак збиру производа, који постају, кад се збир сваког даног реда помножи са оним бројем, са којим је тај ред био помножен.*

Ова теорема може се лако раширити на ма колики али само коначан број збирљивих редова.

На основу ове теореме збир реда, који постаје, кад се два дана реда саберу — одузму — члан по члан, раван је суми — разлици — њиних збирова.

Примедба. Ова теорема остаје у важности, ако се чланови даних редова, пошто смо их помножили са α и β, сабирају и на ма који други, од горњег различан начин.

70. Пређимо сада на множење редова, о којима ћемо, зарад бољег прегледа делимичних производа, претпоставити, да су уређени по степенима једне променљиве н. пр. x-а. Помножимо по обичним правилима множења редове:

$$1.)\qquad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots\dots$$

$$2.)\qquad b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 + \dots\dots$$

па ћемо добити као резултат ред:

$$3.)\quad a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,x + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)\,x^2 + \\ + (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)\,x^3 + \dots\dots$$

Ако означимо са S_{2n}, S'_{2n} и S''_{2n} збирове првих $2n$ чланова ових редова, биће:

$$4.)\quad S_{2n} = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots\dots + a_{2n}x^{2n-1}$$

$$5.)\quad S'_{2n} = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots\dots + b_{2n}x^{2n-1}$$

$$6.)\quad S''_{2n} = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,x + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)\,x^2 + \\ \dots + (a_1b_{2n} + a_2b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1}b_2 + a_{2n}b_1)\,x^{2n-1}.$$

Множењем једначина 4) и 5) добијамо:

$$7.)\quad S_{2n}\,S'_{2n} = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)\,x^2 + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + (a_1b_{2n} + a_2b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1}b_2 + a_{2n}b_1)\,x^{2n-1} + \\ + (a_2b_{2n} + a_3b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1}b_3 + a_{2n}b_2)\,x^{2n} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + (a_{2n-1}b_{2n} + a_{2n}b_{2n-1})\,x^{4n-3} + a_{2n}b_{2n}\,x^{4n-2}.$$

Претпостављајући сад да x има положну вредност, а тако исто да су положни и сви сачиниоци редова 1) и 2), дознајемо из упоређења једначина под 6) и 7), да је

$$S''_{2n} < S_{2n}.\, S'_{2n}.$$

Ако сад даље означимо са S_n, S'_n и S''_n збирове првих n чланова редова 1), 2) и 3), биће:

$$S_n = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$$
$$S'_n = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots + b_nx^{n-1}$$

дакле:

$$8.)\quad S_n\,S' = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)x^2 + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + (a_{n-1}\,b_n + a_nb_{n-1})\,x^{2n-3} + a_nb_n\,x^{2n-2}.$$

Из упоређаја једначина 6) и 8) дознајемо, да је

$$S''_{2n} > S_n\,S'_n$$

дакле је:

$$9.)\qquad S_{2n}\,S'_{2n} > S''_{2n} > S_n\,S'_n.$$

Ако су сад дани редови 1) и 2) збирљиви, онда су:

$$lim\,S_{2n} = lim\,S_n = S \text{ и } lim\,S'_{2n} = lim\,S'_n = S'$$

одређени и коначни бројеви; но онда из 9) сљедује:

$$10.)\qquad lim\,S''_{2n} = SS';$$

дакле је и ред 3) збирљив и његов збир $= SS'$.

До истог резултата 10) дошли би смо, да смо у 4), 5) и 6) претпоставили непарни број чланова, дакле да смо тамо узели изразе за S_{2n+1}, S'_{2n+1} и S''_{2n+1}.

И тако имамо теорему:

1°. *Кад се два збирљива реда са положним члановима по обичним правилима множења помноже и резултат по растућим степенима променљиве уреди, — што баш не мора бити — онда је тако добивени ред збирљив и његов збир једнак је производу збирова помножених редова.*

Но ово се не може однети на редове, у којима има и положних и одречних чланова просто за то, што се сада они разлози, помоћу којих смо дошли до неједначине 9) не могу употребити. Јер сада у једначини 7) међу члановима, који за $2n$-им чланом долазе, може бити и одречних, и збир ових може бити толики, да је $S_{2n} S'_{2n} < S''_{2n}$. Дакле тада ред 3) може бити незбирљив, и његов бесконачно велики збир не може бити једнак одређеној и коначној количини SS'.

71. Случај где дани редови имају и положних и одречних чланова претрешћемо за себе. Нека су

1.) $\qquad a_1 - a_2x + a_3x^2 - a_4x^3 + \ldots\ldots$

2.) $\qquad b_1 - b_2x + b_3x^2 - b_4x^3 + \ldots\ldots$

два збирљива реда и S и Σ њихови збирови. Следећи редови, који постају из положних и одречних чланова редова 1) и 2):

$$s_1 = a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6 + \ldots\ldots$$

$$s_2 = a_2x + a_4x^3 + a_6x^5 + a_8x^7 + \ldots\ldots$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_3x^2 + b_5x^4 + b_7x^6 + \ldots\ldots$$

$$\sigma_2 = b_2x + b_4x^3 + b_6x^5 + b_8x^7 + \ldots\ldots$$

могу бити збирљиви или незбирљиви. Ако претпоставимо, да су они сви збирљиви, у ком су случају s_1, s_2, σ_1 и σ_2 коначне и одређене количине, онда је на основу № 69 или и № 65, 1°:

$$S = s_1 - s_2,\ \Sigma = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Даље је по мало час доказаној теореми о множењу редова са положним члановима:

$$s_1\sigma_1 = a_1b_1 + (a_1b_3 + a_3b_1)x^2 + (a_1b_5 + a_3b_3 + a_5b_1)x^4 + \ldots$$

$$s_1\sigma_2 = a_1b_2x + (a_1b_4 + a_3b_2)x^3 + \ldots\ldots$$

$$s_2\sigma_1 = a_2b_1x + (a_2b_3 + a_4b_1)x^3 + \ldots.$$

$$s_2\sigma_2 = a_2b_2x^2 + (a_2b_4 + a_4b_2)x^6 + \ldots\ldots$$

дакле по № 69):

3.) $$s_1\sigma_1 - s_1\sigma_2 - s_2\sigma_1 + s_2\sigma_2 =$$
$$= a_1b_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)x + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)x^2 -$$
$$- (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_2b_1)x^3 + \ldots.$$

Али је:

$$s_1\sigma_1 - s_1\sigma_2 - s_2\sigma_1 + s_2\sigma_2 = (s_1 - s_2)(\sigma_1 - \sigma_2) = S\Sigma,$$

и зато ред на десној страни под 3), који постаје обичним множењем редова 1) и 2), јесте збирљив и његов збир $= S\Sigma$.

Као што се види, горња теорема о множењу редова вреди и код редова, у којима има и положних и одречних чланова, ако су само редови састављени из положних као и они, који су састављени из одречних чланова даних редова, сви збирљиви. А ово ће последње бити увек случај, кад дани редови остају збирљиви и онда, пошто им се сви чланови узму са положним знаком (№ 65). И тако имамо теорему:

2°. *Кад два дана реда остају збирљиви и онда, пошто им се сви чланови узму са положним знаком, онда и њин производ, уређен или не по растућим степенима x-а, јесте збирљив ред, и збир тога реда јесте раван производу збирова даних редова.*

Двојни редови.

72. Претпоставимо, да нам је дат један коначан број редова, и сваки од њих са коначним бројем чланова, с тим да се сви ти чланови имају сабрати. Те редове напишимо тако, да чланови једног и истог реда иду хоризонатно један за другим и да одговарајући чланови свију тих редова стоје вертикално један испод другога, дакле овако:

$$
1.)\qquad
\begin{array}{l}
\,a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots\ldots+a_{1n}\\
+\,a_{21}+a_{22}+a_{23}+\ldots\ldots+a_{2n}\\
+\,a_{31}+a_{32}+a_{33}+\ldots\ldots+a_{3n}\\
+\,a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+\ldots\ldots+a_{mn}
\end{array}
$$

Такав један скуп чланова, који се сви имају сабрати, зове се коначан двојни ред, и збир свију његових чланова зове се збир двојнога реда, који збир јесте одређен и коначан број, ако су само сви чланови, као што ћемо и

претпоставити, одређени и коначни бројеви. Збир двојнога реда не зависи очевидно од тога, како ћемо и којим редом сабирати његове чланове, дакле независи од распореда појединих чланова. Тако н. пр. могли би смо најпре сабрати чланове узастопних хоризонатних редова па онда тако добивене збирове, или најпре чланове узастопних вертикалних редова па онда добивене збирове. У оба случаја мора изаћи исти резултат.

Али кад су узастопни редови бесконачни а тако исто и број тих редова, онда се добија тако звани бесконачни двојни ред.

$$
2.)\qquad
\begin{array}{l}
\,a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{1n}+a_{1\,\overline{n+1}}+\ldots\\
+\,a_{21}+a_{22}+a_{23}+\ldots+a_{2n}+a_{2\,\overline{n+1}}+\ldots\\
+\,a_{31}+a_{32}+a_{33}+\ldots+a_{3n}+a_{3\,\overline{n+1}}+\ldots\\
+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\,a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+\ldots+a_{mn}+a_{m\,\overline{n+1}}+\ldots\\
+\,a_{\overline{m+1}\,1}+a_{\overline{m+1}\,2}+\ldots\ldots\ldots+a_{\overline{m+1},\,\overline{n+1}}+\ldots\\
+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Ако у овом бесконачном двојном реду узмемо првих m хоризонатних редова и у сваком од њих по n првих чланова, онда збир свију mn чланова тако добивеног коначног двојног реда мора очевидно бити извесна функција m-а и n-а и зато тај збир и означавамо са S_{mn}. Сад ако замислимо, да m и n расту бесконачно, дакле да како број у рачун узетих редова, тако и број у рачун узетих чланова њихових расти бесконачно, онда при томе може једно од овога трога бити:

Прво. S_{mn} тежи све више и више једној одређеној и коначној граници S тако, да најзад разлика између S и S_{mn} може постати мања од ма како малог броја. Тада се бесконачни двојни ред зове збирљив и S његов збир, који као што ћемо мало после видети независи од распореда појединих чланова.

Друго. S_{mn} расти бесконачно и тада се двојни ред зове незбирљив и

Треће. S_{mn} остаје неодређено и тада се ред зове неодређен.

Као што се види, лако би било у сваком случају дознати, да ли је дати двојни ред збирљив или не, кад би смо само могли увек наћи аналитични израз за S_{mn}. Но како то обично није могуће, ваља нам потражити друге знаке збирљивости двојних редова.

За рад тога издвојмо из бесконачног двојног реда 2) коначни ред 1), којег смо збир означили са S_{mn}, па ће остати.

$$3.)\qquad \begin{array}{lllll} & & & + a_{1\overline{n+1}} & + \ldots\ldots \\ & & & + a_{2\overline{n+1}} & + \ldots\ldots \\ + a_{\overline{m+1}\,1} & + a_{\overline{m+1}\,2} & + \ldots\ldots & + a_{\overline{m+1}\,\overline{n+1}} & + \ldots,. \\ + a_{\overline{m+2}\,1} & + a_{\overline{m+2}\,2} & + \ldots\ldots & + a_{\overline{m+2}\,\overline{n+1}} & + \ldots. \end{array}$$

Збир овог бесконачног двојног реда, који збир означавамо са R_{mn}, зове се остатак бесконачног реда 2) и збир овог последњег добија се кад се збиру коначног реда 1) дода остатак, јер је:

$$4.)\qquad R_{mn} = S - S_{mn}.$$

Као што се одавде види, остатак бесконачног двојног реда биће коначан, бесконачан или неодређен, како је кад дани двојни ред 2) збирљив, незбирљив или неодређен, и обратно какав је кад остатак, онакав биће и сам бесконачни двојни ред 2. За нас је важан случај, кад је ред 2) збирљив; тада остатак R_{mn} за коначне вредности m-а и n-а остаје коначан и при бесконачном рашћењу истих тежи нули, јер из 5) следује:

$$lim\, R_{mn} = 0.$$

Дакле кад би се у сваком даном случају могао наћи остатак R_{mn} или бар две границе, између којих се он налази, лако би онда било дознати, да ли је ред збирљив или не. Али пошто то обично није могуће, ваља нам тражити друге знаке збирљивости.

73. Претпоставимо сада, нека су сви чланови бесконачног двојног реда 2) положни. Тада он не може очевидно бити неодређен, јер при непрестаном сабирању његових чланова излазиће све већи и већи збир. Ред тада може бити само збирљив или незбирљив, т. ј. S_{mn} тада ће при бесконачном рашћењу m-а и n-а или тежити *једној* одређеној и коначној граници, или ће пак бесконачно расти. Узмимо да је ред 2) збирљив дакле

$$lim\, S_{mn} = S.$$

где је S одређен и коначан број. Па сад замислимо, да су чланови реда 2) другачије распоређени но у први мах, и означимо бесконачни двојни ред при овом новом распореду његових чланова са 2′, а са $\Sigma_{\mu\nu}$ збир чланова реда 2′, кад се у њему задрже првих μ хоризонтних редова и у сваком од њих по ν првих чланова. Ми ћемо претпоставити μ и ν тако велико, да се у $\Sigma_{\mu\nu}$ налазе сви чланови од S_{mn}. Означимо сада са $R'_{\mu\nu}$ скуп оних чланова, који ће се у $\Sigma_{\mu\nu}$, осим чланова од S_{mn}, још можда налазити. У неких чланова од $R'_{\mu\nu}$ биће прве сказаљке веће од m, у неких биће друге веће од n, а опет у неких биће можда обоје случај.

После свега овога увиђамо, да је:

1.) $$\Sigma_{\mu\nu} - S_{mn} = R'_{\mu\nu}$$

Али је очевидно:

2.) $$R_{mn} > R'_{\mu\nu} > 0.$$

Одавде узимајући на ум, да је ред 2) збирљив, закључујемо, да је при бесконачном рашћењу μ-а и ν-а па дакле и m-а и n-а

$$\mathit{lim}\, R'_{\mu\nu} = \mathit{lim}\, R_{mn} = 0.$$

Но онда из 1) следује:

$$\mathit{lim}\, \Sigma_{\mu\nu} = \mathit{lim}\, S_{mn} = S.$$

И тако смо доказали ову истину:

1°. *Кад је један бесконачни двојни ред са положним само члановима и при извесном распореду истих збирљив и S његов збир, онда је исти ред збирљив и при ма ком другом распореду његових чланова, и његов је збир тада исти број S.*

Према овоме ако су сви хоризонатни редови збирљиви, и ако је осим тога збирљив и ред, који постаје из збирова тих хоризонатних редова, онда је збирљив и сам дани двојни ред, и онда је свеједно или се сабирали најпре чланови појединих хоризонатних редова, па затим тако добивени збирови, или најпре чланови појединих вертикалних редова па онда добивени збирови, или се најзад сабирали чланови двојног реда и ма којим другим редом.

Узмимо сад да дани ред 2) у № 72 има и положних и одречних чланова и означимо са 1' ред, који из даног постаје, кад му се сви чланови узму са положним знаком. Ако је нови ред 1') збирљив, његов ће остатак R'_{mn} за коначне вредности m-а и n-а бити коначан и при бесконачном рашћењу истих тежиће нули, и то ће на основу ове №-е бити случај, па били чланови реда 1' ма како распоређени. Ако дакле при ма каквом распореду чланова данога реда 2) замислимо такав исти распоред и у збирљивом реду 1', онда је, узимајући да је R_{mn} остатак реда 2).

$$R'_{mn} > R_{mn} > - R'_{mn}$$

јер су у R_{mn} исти чланови као и у R'_{mn}, само што су неки од њих положни а неки одречни, док су међутим сви чланови у R'_{mn} положни.

Из последње неједначине следује:

$$\mathit{lim}\, R_{mn} = 0,$$

што ће рећи, да је ред 2) збирљив. И тако смо доказали теорему:

2°. *Један бесконачни двојни ред јесте збирљив, ако је он збирљив и онда, пошто му се сви чланови узму са положним знаком, и његов збир остаје исти при ма каквом распореду његових чланова.*

74. У № 69 видели смо, да кад се ма колики али коначан број збирљивих редова саберу члан по члан или и ма којим другим редом, да је онда нови ред такође збирљив, и да је његов збир једнак суми збирова даних редова. Али то не вреди увек и онда, кад је број и самих редова бесконачан.

У овом последњем случају *треба да је бесконачан двојни ред, који постаје из даних бесконачних редова збирљив*, и тада је са свим свеједно, или ми сабирали најпре чланове појединих бесконачних редова, па онда бесконачни ред, који постаје из њихових збирова, или пак сабирали чланове узастопних вертикалних редова, који постају из њихових првих, других и т. д. чланова па онда тек ред, који постаје из тако добивених збирова, или најзад и на ма који други начин.

Узмимо сад, да су нам дата два збирљива бесконачна реда са положним члановима

$$1.)\qquad S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

$$2.)\qquad S' = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots\ldots$$

Кад их по обичним правилима множења помножимо и узастопне делимичне производе напишемо једно испод друго, имаћемо двојни ред:

$$\begin{array}{rl} & a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_4b_1 + \ldots\ldots \\ & + a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_2 + a_4b_2 + \ldots\ldots \\ 3.) & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + a_1b_n + a_2b_n + a_3b_n + a_4b_n + \ldots\ldots, \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

Овај двојни ред, чији се сви чланови имају сабрати, јесте збирљив, прво што су збирљиви узастопни хоризонатни редови, а друго што је збирљив и ред, који постаје из збирова узастопних хоризонатних редова (№ 73). И доиста ред, који постаје из тих збирова, јесте:

$$b_1 S + b_2 S + b_3 S + b_4 S + \ldots.$$

$$= S\,(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots.) = S.S'$$

Дакле, као што се види, његов је збир па дакле и збир двојног реда 3) при горњем распореду $= SS'$. Двојни ред 3) остаје збирљив и збир ће му бити увек $= SS'$ и при ма ком другом распореду његових чланова, (№ 73 1°.) дакле и онда кад се при сабирању учини такав распоред, да се најпре узму заједно они чланови двојног реда 3), у којих је збир сказаљака једнак једном и истом броју. На тај начин добијамо:

$$\begin{aligned} 4.)\qquad SS' &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \\ &+ (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots, \end{aligned}$$

дакле исту теорему о множењу као и у № 70.

Ако у редовима 1) и 2) има и положних и одречних чланова, због чега ће то исто бити и код реда 3), ми ћемо све чланове тих трију редова узети са положним знаком и тако добивене редове означићемо са 1', 2' и 3'. Ако су сад редови 1' и 2' збирљиви онда ће бити збирљив и двојни ред 3' [№70 1° или обр. 4) горе], а кад је то, онда ће по № 73 бити збирљив и двојни ред 3, у коме су исти чланови као и у 3', само што су неки положни а неки одречни. Но тада је слободно чланове двојног реда 3), састављати ма како па дакле и по обрасцу 4). И тако смо поново доказали теорему о множењу бесконачних редова у № 71.

75. Овде на завршетку науке о збирљивости редова биће најзгодније да докажемо једну теорему, која је од честе употребе и која гласи:

Кад је у бесконачном реду:

$$1.)\qquad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots\dots$$

количник $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *увек мањи од једног коначног у осталом произвољног броја* k, *онда се може за* x *наћи увек таква вредност, да је за њу* **a** *и за* **сваку** *од ње мању први члан реда већи од збира бесконачног реда, који за њим остаје.*

Јер ако стоји поменута претпоставка, онда је:

$$\begin{array}{lll} a_2 < ka_1 \text{ или } & a_2 < ka_1 \text{ или } & a_2x < ka_1x \\ a_3 < ka_2 & a_3 < k^2a_1 & a_3x^2 < k^2a_1x^2 \\ a_4 < ka_3 & a_4 < k^3a_1 & a_4x^3 < k^3a_1x^3 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Одавде се добија:

$$2.)\ a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots < ka_1x\,(1 + kx + k^2x^2 + \dots)$$

Ред у загради јесте геометријска постепеност. Узмимо да јој је количник $kx < 1$ или $x < \frac{1}{k}$, па ће она бити падајућа, дакле збирљива. Кад је саберемо, имамо даље:

$$a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots < \frac{ka_1x}{1 - kx}$$

Први члан датога реда биће зацело већи од збира бесконачног реда, који је иза њега, ако је

$$a_1 \geqq \frac{ka_1x}{1 - kx} \text{ т. ј. } x \leqq \frac{1}{2k}$$

На са свим сличан начин доказује се, да се за x може наћи таква вредност, да је за њу а и за сваку мању и ма који други члан реда већи од збира бесконачног реда, који иза њега остаје.

Овде се у исти мах увиђа сад и то, да кад горња претпоставка стоји и x тежи нули, да онда тежи нули и збир бесконачног реда, који остаје за првим чланом његовим. Јер из 2) увиђавно је, да се тај збир налази између нуле и количине:

$$\frac{ka_1x}{1 - kx},$$

која тежи нули, кад x тежи нули.

Примедба. Претпоставка у почетку ове нумере учињена испуњена је код сваког збирљивог реда.

Неколико речи у опште о сабирању редова и развијању функција у бесконачне редове. Непрекидност бесконачних редова

76. Ми смо се упознали са знацима, по којима се познаје, да ли је какав ред збирљив или не. Кад је какав ред збирљив, онда се може тражити његов збир, али тај је посао, већ смо једном рекли, скопчан обично са великим теш-

коћама. У математици су особито важни редови, који су уређени по растућим степенима једне променљиве н. пр. x-а. Такви редови у опште узев нису збирљиви за сваку могућу вредност x-а, већ само за један извесан низ истих, које леже између извесних граница. За сваку другу од оних вредности x-а, за које је ред збирљив, и његов ће збир добијати другу вредност. Дакле вредност збира бесконачног реда зависи од вредности x-а или јесте функција x-а.

Радња противна сабирању редова, јесте развијање функција у редове. У овој радњи дата је једна функција x-а, па се тражи ред уређен по растућим степенима x-а, чији би збир био раван датој функцији. Помоћу тога реда можемо дакле израчунати вредност дате функције, која одговара ма којој вредности x-а, за коју је само ред збирљив, и то можемо је израчунати са коликом год хоћемо приближношћу, јер зато треба само сабрати идући с лева на десно довољан број чланова нађенога реда. За вредности x-а, које леже изван граница збирљивости реда, он и функција не могу се очевидно сматрати као једнаки.

77. Ако је m цео и положан број, онда x^m добија за сваку — стварну — вредност x-а само *једну* стварну и коначну вредност, и зато је x^m непрекидна функција између граница $x = -\infty$ и $x = +\infty$. То исто вреди и за ax^m, где је a ма какав сталан број, па дакле и за сваку целу и рационалну функцију x-а са сталним сачиноцима, јер се у њој јављају само чланови облика ax^m.

Исто тако и један ред уређен по растућим степенима x-а јесте непрекидна функција x-а између граница његове збирљивости $x = a$ и $x = b$, јер за сваку вредност x-а, која лежи између тих граница, збир реда има само једну стварну и коначну вредност.

Ако су m и n цели и положни бројеви и a буди какав сталан број, онда ax^my^n јесте непрекидна функција

x-а и y-а, јер она за сваки спрег вредности између граница $-\infty$ и $+\infty$, добија само *једну* стварну и коначну вредност. Дакле и свака цела и рационална функција x-а и y-а јесте непрекидна функција, јер се у њој налазе само чланови облика ax^my^n.

Један бесконачан ред, којег су чланови облика ax^my^n, јесте непрекидна функција између граница његове збирљивости $x = a$, и $x = b$, $y = \alpha$, и $y = \beta$, јер за сваки спрег вредности x-а и y-а, који леже између тих граница, збир бесконачног реда има само *једну* стварну и коначну вредност.

Слично се томе може рећи и за двојне редове, којих су чланови облика ax^my^n.

Пример. Нека је дат ред:

$$1.)\quad 1 + \frac{y}{1}x + \frac{y(y+1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{y(y+1)(y+2)}{1\,.\,2.\,3}x^3 + \ldots\ldots$$

Овај је ред, ако се ограничимо на положне вредности x-а и y-а, збирљив за

$$1 > x > 0 \text{ и } \infty > y > 0,$$

дакле је он непрекидна функција x-а и y-а између тих граница. Ако множења означена у појединим члановима тога реда свршимо, онда постаје двојни ред облика:

$$2)\quad \begin{array}{l} a_{11} \\ + a_{21}x + a_{22}yx \\ + a_{31}x^2 + a_{32}yx^2 + a_{33}y^2x^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ако у овом реду, чији су сви чланови положни, саберемо чланове узастопних хоризонатних редова, па добивене збирове, рачунате одозго на доле, сматрамо као чланове простога реда, изаћиће збирљиви ред 1).

Дакле по науци о двојним редовима биће збирљив и двојни ред 2, па дакле и прости ред, који постаје, кад се чланови узастопних вертикалних редова у реду 2) саберу, и добивени збирови идући с лева на десно сматрају као чланови простога реда. Тај нови ред, који ће бити облика

$$3.)\quad \varphi_1(x) + y\varphi_2(x) + y^2\varphi_3(x) + y^3\varphi_4(x) + \ldots\ldots,$$

јесте дакле такође непрекидна функција x-а и y-а између горњих граница, и његов је збир исти са збиром реда 1) и реда 2).

Теореме неодређених сачинилаца са применама.

78. За једну дату $f(x)$ добија се увек исти ред, уређен по растућим степенима x-а, па развијали је ми по ма којој методи. Јер ако смо развијајући је у ред по једној методи нашли:

$$1.)\quad f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots\ldots$$

где сачиниоци a од x независе, а развијајући је опет по другој од прве различној методи:

$$2.)\quad f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \ldots\ldots$$

где су сачиниоци такође од x независни, то би онда за сваку вредност x-а, која лежи у исти мах између граница збирљивости и једног и другог реда, морало бити:

$$3.)\quad a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots\ldots = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots\ldots$$

или

$$4.)\quad (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2)x + (a_3 - \alpha_3)x^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Али ова једначина може само тако вредити, ако су узастопни сачиниоци левог реда сваки за се равни нули, а тако исто и остатак његов. Јер кад не би било $a_1 - \alpha_1 = 0$, онда би могли (№ 75) за x наћи такву вредност, да је за њу а и за сваку мању први члан у 4) већи од збира свију доцнијих. Но онда за те вредности x-а, које се могу увек узети између граница збирљивости редова 1) и 2), једначина 4) не би вредила. Дакле је $a_1 - \alpha_1 = 0$.

Сад једначина 4) овако изгледа:

$$4^1)\quad (a_2 - \alpha_2)x + (a_3 - \alpha_3)x^2 + (a_4 - \alpha_4)x^3 + \ldots\ldots$$

Кад сад не би било и $a_2 - \alpha_2 = 0$, онда би опет за x могли наћи такве вредности, да је први члан у 4^1) већи од збира свију доцнијих, но онда за те вредности x-а, које се опет могу замислити између граница збирљивости редова 1) и 2), не би вредила једначина 4^1). Дакле је $a_2 - \alpha_2 = 0$. На тај исти начин доказује се, да и сви доцнији сачиниоци реда 4) морају бити равни нули, а тако исто и његов остатак, који је раван разлици остатака редова 1) и 2).

Дакле смо тиме доказали, да одговарајући сачиниоци редова 1) и 2) а тако исто и њихови остатци морају бити међу собом једнаки, дакле да су ти редови истоветни. Ми можемо дакле узети, да су доказане следеће две теореме, од којих је свака последица друге:

1°. *Кад је ред*

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots\ldots = 0$$

за сваку вредност x-а, која лежи између граница збирљивости, онда његови сачиниоци морају сваки за се, а тако исто и његов остатак, бити равни нули.

2°. *Кад су два реда уређена по растућим степенима x-а једнаки за сваку вредност x-а, која лежи у исти мах између граница збирљивости оба реда, онда њихови одговарајући сачиниоци, као и њихови остатци морају бити једнаки.*

Свака од ових теорема позната је под именом теореме или правила неодређених сачинилаца, и обе вреде и онда очевидно, кад су редови коначни.

79. Теореме неодређених сачинилаца могу се раширити и на — коначне или бесконачне — редове са ма колико променљивих количина. Зарад тога узмимо, нека нам је дат ред са $(n+1)$ променљивих $x, y, z, \ldots . u, v$ а уређен по степенима једне од променљивих н. пр. x-а:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots \ldots .$$

У овом реду сачиниоци a независе од x и јесу функције осталих n променљивих $y, z, \ldots u, v$. Ако је сад ред збирљив и његов збир раван нули за сваку вредност x-а, која лежи између две извесне границе, као и за ма какву вредност сваке од осталих променљивих, које вредности леже такође између извесних граница, онда на основу теореме 1° № 78 морају вредити једначине:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0 \ldots \ldots ,$$

у којима се налазе само променљиве $y, z, \ldots u, v$, којих је n на броју. На сваку од ових једначина, кад их уредимо по степенима н. пр. y-а, можемо опет применити исту теорему, па ћемо добити нов низ једначина само са променљивим $z, \ldots . u, v$. Радећи са овим новим једначинама тако исто, као и са свима доцнијима, наћићемо најзад да сви остали т. ј. од променљивих $x, y, z \ldots . u, v$ независни сачиниоци првашњега реда морају сваки за се бити равни нули.

Друга теорема № 78 јесте нужна последица прве, дакле и она вреди у опште за редове са ма колико променљивих.

Примене правила неодређених сачинилаца на развијање функција у редове.

80. Дата је чиста разломљена функција:

$$1.) \qquad \frac{A_1}{a_1 + a_2 x}$$

и тражи се, да се она развије у бесконачни ред. Ми ћемо претпоставити, да је тражени ред познат, дакле ћемо ставити:

$$\frac{A_1}{a_1 + a_2 x} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots . + \alpha_{n-1} x^{n-2} + \alpha_n x^{n-1} + R_n$$

где R_n значи остатак реда, кад се овај заврши са n-им чланом. Одавде добијамо множењем:

$$A_1 = a_1\alpha_1 + \begin{matrix} a_1\alpha_2 \\ a_2\alpha_1 \end{matrix} \left\{ x + \begin{matrix} a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_2 \end{matrix} \right\} x^2 + \ldots + \left. \begin{matrix} a_1\alpha_n \\ a_2\alpha_{n-1} \end{matrix} \right\} x^{n-1} +$$

$$+ a_2\alpha_n x^n + R_n (a_1 + a_2 x).$$

Одавде по правилу неодређених сачинилаца добијамо:

$$A_1 = a_1\alpha_1,\ a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 = 0,\ a_1\alpha_3 + a_3\alpha_1 = 0 \text{ и т. д.}$$

и у опште:

$$a_1\alpha_n + a_2\alpha_{n-1} = 0 \quad \text{и}$$

$$a_2\alpha_n x^n + R_n(a_1 + a_2 x) = 0$$

Из ових једначина добијамо даље:

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{a_1},\ \alpha_2 = -\frac{a_2}{a_1}\alpha_1,\ \alpha_3 = -\frac{a_3}{a_1}\alpha_2 \text{ и т. д.}$$

и у опште:

$$\alpha_n = -\frac{a_2}{a_1}\alpha_{n-1} \quad \text{и} \quad R_n = \frac{a_2\alpha_n x^n}{a_1 + a_2 x}$$

Као што се види сваки сачинилац реда почев од другога добија се, кад се онај пред њим помножи са $-\frac{a_2}{a_1}$. Пошто α_n при бесконачном рашћењу n-а остаје вазда коначно, о чему се уверавамо кад $A_1 : (a_1 + a_2 x)$ и путем просте деобе покушамо развити у ред, то остатак реда тежи нули, ако је x бројно мање од 1. Дакле је тражени ред збирљив за $-1 < x < +1$.

Један ред, који је облика:

2.) $$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_n x^{n-1} + \dots.$$

зове се повратан (recurrent), кад је почев од једног извесног места па на даље сачинилац α_n функција линеарна, т. ј. првог степена, једног или више предњих сачинилаца, дакле кад је:

$$\alpha_n = p_1\alpha_{n-1} + p_2\alpha_{n-2} + \dots + p_m\alpha_{n-m};$$

Сачиниоци p у овом изразу, у коме је исказан закон сачинилаца реда 2), јесу у свакој даној прилици извесни положни или одречни бројеви, који скупа чине тако звану скалу реда. Према броју тих сачинилаца или чланова скале управља се и степен повратнога реда. Ако је какав ред повратан m-а степена, дакле m број чланова његове скале, онда у обрасцу за α_n мора бити m чланова, урачунавајући ту и оне, којих би p-можда било $= 0$. Закон сачинилаца траженога реда, исказан у обрасцу за α_n важиће дакле почев од $(m + 1)$-а места па на даље, а m првих сачинилаца морају се тражити помоћу правила неодређених сачинилаца из једначине, која постаје, кад се дата функција стави равна реду:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots.$$

Према томе ред, који смо добили развијањем горње разломљене функције, јесте повратан првога степена, јер скала тога реда има само један члан $-\frac{a_2}{a_1}$,

Развимо још и функцију:

4.) $$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$$

у ред. Зарад тога претпоставимо опет, да нам је познат тражени ред и зато ставимо:

$$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{n-2} x^{n-3} +$$
$$+ \alpha_{n-1} x^{n-2} + \alpha_n x^{n-1} + R_n,$$

где R_n опет значи остатак реда; кад га завршимо са n-им чланом. Одавде добијамо множењем:

$$A_1 + A_2x = a_1\alpha_1 + \left.\begin{matrix}a_1\alpha_2\\ a_2\alpha_1\end{matrix}\right\} x + \ldots + \left.\begin{matrix}a_1\alpha_n\\ a_2\alpha_{n-1}\\ a_3\alpha_{n-2}\end{matrix}\right\} x^{n-1} +$$

$$+ \left.\begin{matrix}a_2\alpha_n\\ a_3\alpha_{n-1}\end{matrix}\right\} x^n + R_n (a_1 + a_2x + a_3x^2),$$

и одавде

$$A_1 = a_1\alpha_1,\ A_2 = a_1a_2 + a_2\alpha_1, \ldots a_1\alpha_n + a_2\alpha_{n-1} + a_3\alpha_{n-2} = 0$$

и

$$(a_2\alpha_n + a_3\alpha_{n-1})\, x^n + R_n (a_1 + a_2x + a_3x^2) = 0.$$

Из ових једначина добијамо најзад:

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{a_1},\ \alpha_2 = \frac{A_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\alpha_1, \ldots .$$

$$\alpha_n = -\frac{a_2}{a_1}\alpha_{n-1} - \frac{a_3}{a_1}\alpha_{n-1} \quad \text{и}$$

$$R_n = \frac{(a_2\alpha_n + a_3\alpha_{n-1})\, x^n}{a_1 + a_2x + a_3x^2}.$$

Из израза за α_n видимо, да је ред, који се добија развијањем функције 4), повратан 2-а степена, јер његова скала има два члана:

$$-\frac{a_2}{a_1}, \text{ и } -\frac{a_3}{a_1}.$$

Закон сачинилаца исказан у обрасцу за α_n почиње важити тек од 3-г места па на даље. Пошто α_n при бесконачном рашћењу n-а остаје вазда коначно, то остатак R_n тежи нули, кад је $x < 1$ бројно. Границе збирљивости траженога реда јесу дакле: $x = -1$ и $x = +1$.

У опште даје се доказати, да је ред добивен развијањем чистог разломка:

$$\frac{A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_n\, x^{n-1}}{a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_{n+1}x^n}$$

повратан m-а степена, да су даље чланови његове скале:

$$-\frac{a_2}{a_1}, -\frac{a_3}{a_1}, -\frac{a_4}{a_1}, \ldots\ldots -\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

и да је он збирљив за $-1 < x < +1$, као и обратно да је збир сваког повратног реда уређеног по растућим степенима x-а рационални разломак.

Приметићемо најзад, да при развијању чистих разломака треба у реду:

$$\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3 + \ldots\ldots$$

о коме претпостављамо, да је раван датом разломку, написати само онолико првих чланова, колико је чланова у у бројиоцу, и само онолико општих чланова, колико је чланова у имениоцу разломка, урачунавајући ту и оне, којих можда између крајних чланова не би било.

Приметићемо најзад, да смо у ова два случаја могли при самом развијању функције у ред наћи лако и његов остатак, и онда помоћу овога и границе збирљивости реда. Али пошто то тако увек не бива, онда се морају границе збирљивости тражити помоћу других познатих метода.

81. Тражи се количник бесконачних редова:

$$A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots\ldots$$

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots\ldots$$

Путем просте деобе уверавамо се, да ће количник бити истог облика са даним редовима, и с тога можемо ставити:

$$\frac{A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots\ldots}{a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots\ldots}=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\ldots.$$

где се још непознати сачиниоци α имају израчунати. Зарад тога помножимо са делиоцем лево и десно, па ћемо добити:

$$A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots.=a_1\alpha_1+\left.\begin{matrix}a_1\alpha_2\\ a_2\alpha_1\end{matrix}\right\}x+$$

$$+\left.\begin{matrix}a_1\alpha_3\\ a_2\alpha_2\\ a_3\alpha_1\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}a_1\alpha_4\\ a_2\alpha_3\\ a_3\alpha_2\\ a_4\alpha_1\end{matrix}\right\}x^3+\ldots.$$

и одавде по правилу неодређених сачинилаца:

$$A_1=a_1\alpha_1,$$

$$A_2=a_1\alpha_2+a_2\alpha_1,$$

$$A_3=a_1\alpha_3+a_2\alpha_2+a_3\alpha_1,$$

$$A_4=a_1\alpha_4+a_2\alpha_3+a_3\alpha_2+a_4\alpha_1$$

. . . .

На тај начин можемо добити онолико једначина, колико првих сачинилаца хоћемо да нађемо. Из тих једначина израчунавају се исти сачиниоци лако, пошто су оне првог степена. Тако добијамо:

$$\alpha_1=\frac{A_1}{a_1},\ \alpha_2=-\frac{a_2}{a_1}\alpha_1+\frac{A_2}{a_1},\ \alpha_3=-\frac{a_2}{a_1}\alpha_2-\frac{a_3}{a_1}\alpha_1+\frac{A_3}{a_1}\ldots.$$

и уопште:

$$\alpha_n=-\frac{a_2}{a_1}\alpha_{n-1}-\frac{a_3}{a_1}\alpha_{n-2}-\ldots.-\frac{a_n}{a_1}\alpha_1+\frac{A_n}{a_1}.$$

По овом повратном обрасцу могу се сачиниоци лако добити.

Кад је $a_1=0$ а не у исти мах и $A_1=0$, онда је задатак немогућ, јер се сачиниоци количника јављају у облику апсолутне бесконачно велике количине. Такав резултат даје нам на знање, да у овом случају количник неможе бити облика: $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\ldots\ldots$ И доиста путем просте деобе уверавамо се, да је за $a_1=0$ први члан количника $\frac{A_1}{a_2x}=\frac{A_1}{a_2}x^{-1}$.

Такав члан не јавља се у реду, о коме смо претпоставили, да је тражени количник, па с тога се није могао ни добити. Да тражени количник буде облика: $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\ldots.$ треба да у дељенику нема онолико исто првих чланова, колико их нема у делиоцу.

Међу тим ако хоћемо и у случају $a_1=0$ количник, треба узети на ум, да је:

$$\frac{A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots.}{a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\ldots.}=$$

$$\frac{1}{x}\left\{\frac{A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots}{a_2+a_3x+a_4x^2+\ldots}\right\}$$

Деоба означена у загради десно може се свршити на горе показани начин, после чега још остаје, да се добивени количник помножи са $\frac{1}{x}$.

Као што се из досада говоренога види, треба при развијању функције у ред помоћу правила неодређених сачинилаца најпре сазнати, каквог ће облика он бити, а то се претресом функције и њених особина обично лако дознаје. Да се добивени ред може сматрати као једнак функцији само за оне вредности x-а, за које је он збирљив, не треба ваљда ни помињати.

При самом израчунавању сачинилаца траженога реда дознаје се обично, да ли је тражени ред онаквог облика какав смо претпоставили или не. Али се по каткад то не дешава и онда помоћу методе неодређених сачинилаца долазимо до погрешних резултата. То је узрок, што се математичари том иначе простом и лаком методом при развијању функција у редове не служе.

82. Једначином

$$1.)\qquad y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

дато је y као функција x-а у облику бесконачног реда, па се тражи, да се обратно x престави као функција y-а опет у облику бесконачног реда.

Ми ћемо претпоставити, да је познат тражени ред и зато ћемо ставити

$$2.)\qquad x = \alpha_1y + \alpha_2y^2 + \alpha_3y^3 + \alpha_4y^4 + \ldots.$$

Пошто ова вредност x-а мора једначину 1) задовољити, то ћемо најпре развити узастопне степене од x, при чему ћемо у вредностима добивеним за те степене x-а ићи само до једног извесног степена од y. Тако ћемо добити:

$$x^2 = \alpha_1^2y^2 + 2\alpha_1\alpha_2y^3 + \left.\begin{matrix}\alpha_2^2\\ 2\alpha_1\alpha_3\end{matrix}\right\}y^4 + \left.\begin{matrix}2\alpha_1\alpha_4\\ 2\alpha_2\alpha_3\end{matrix}\right\}y^5 + \ldots.$$

$$x^3 = \alpha_1^3y^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2y^4 + \left.\begin{matrix}3\alpha_1\alpha_2^2\\ 3\alpha_1^2\alpha_3\end{matrix}\right\}y^5 + \ldots.$$

$$x^4 = \alpha_1^4y^4 + 4\,\alpha_1^3\alpha_2\,y^5 + \ldots.$$

$$x^5 = \alpha_1^5y^5 + \ldots.$$

. . . . , ...

Сад кад ове вредности заменимо у 1) добићемо:

$$y = a_1\alpha_1y + \left.\begin{matrix}a_1\alpha_2\\ a_2\alpha_1^2\end{matrix}\right\}y^2 + \left.\begin{matrix}a_1\alpha_3\\ 2a_2\alpha_1\alpha_2\\ a_3\alpha_1^3\end{matrix}\right\}y^3 + \left.\begin{matrix}a_1\alpha_4\\ a_2\alpha_2^2\\ 2a_2\alpha_1\alpha_3\\ 3a_3\alpha_1^2\alpha_2\\ a_4\alpha_1^4\end{matrix}\right\}y^4 +$$

$$+ \left.\begin{matrix}a_1\alpha_5\\ 2a_2\alpha_1\alpha_4\\ 2a_2\alpha_2\alpha_3\\ 3a_3\alpha_1\alpha_2^2\\ 3a_3\alpha_1^2\alpha_2\\ 4a_4\alpha_1^3\alpha_2\\ a_5\alpha_1^5\end{matrix}\right\}y^5 + \ldots$$

И одавде:

$$a_1\alpha_1 = 1$$

$$a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1^2 =$$

$$a_1\alpha_3 + 2a_2\alpha_1\alpha_2 + a_3\alpha_1^3 = 0$$

$$a_1\alpha_4 + a_2\alpha_2^2 + 2a_2\alpha_1\alpha_3 + 3a_3\alpha_1^2\alpha_2 + a_4\alpha_1^4 = 0.$$

$$a_1\alpha_5 + 2a_2\alpha_1\alpha_4 + 2a_2\alpha_2\alpha_3 + 3a_3\alpha_1\alpha_2^2 + 3a_3\alpha_1^2\alpha_2 + \\ + 4a_4\alpha_1^3\alpha_2 + a_5\alpha_1^5 = 0,$$

. . . .

из којих се једначина сачиниоци α лако налазе. Овај задатак јесте особени случај једног важног али и тешког задатка, који се зове: обртање (Reversion) редова.

Ако је:

$$y = x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \ldots\ldots$$

дати ред, онда је нови — обрнути — ред:

$$x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots\ldots$$

Пошто се из неколико првих чланова не може увек лако да сазна закон реда, то се и овај задатак решава помоћу других метода а не помоћу методе неодређених сачинилаца.

Ако је ред, који се има обрнути, облика:

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots\ldots$$

дакле ако у њему има члана без x, онда се тај члан баца лево, и онда, кад се стави $y — a_1 = z$, ред, који се има обрнути, јесте облика:

$$z = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Ако се у обрнутом реду, који се добија по горњем упутству и који ће бити облика:

$$x = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots\ldots$$

замени z његовом вредношћу $y - a_1$, добићемо:

$$x = \alpha_1 (y - a_1) + \alpha_2 (y - a_1)^2 + \alpha_3 (y - a_1)^3 + \ldots\ldots$$

Примедба. Ако су m, $m+n$, $m+2n$, $m+3n, \ldots$ изложиоци x-а у датом реду, онда се може доказати, да $\frac{1}{m}$, $\frac{1+n}{m}$, $\frac{1+2n}{m}$, $\frac{1+3n}{m}, \ldots\ldots$ морају бити изложиоци y-а у новом обрнутом реду. По овоме ако је $m = 1$, онда изложиоци у оба реда следују једном и истом закону. А ако је $m = 0$, дакле у даном реду има члана без x, онда се изложиоци обрнутог реда јављају у облику $\frac{a}{0}$, што значи, да се тада x не може изразити редом, који би био уређен по степенима y-а. Тада ваља, као што је горе казано, најпре бацити члан без x-а лево. Кад то не би најпре урадили, онда би леве стране једначина, из којих се сачиниоци обрнутог реда израчунавају, били бесконачни редови, и зато се из њих не би ништа могло наћи.

ТРЕЋИ ДЕО.

РАЗВИЈАЊЕ ФУНКЦИЈА У РЕДОВЕ.

БИНОМНИ ОБРАЗАЦ.

I. Биномни образац за целе и положне изложиоце.

83. Кад више бинома $(x + a_1)$, $(x + a_2)$, $(x + a_3)\dots$ поступно помножимо и производе по степенима од x уредимо, добићемо:

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + \left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} x + a_1\, a_2.$$

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) = x^3 + \left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} a_1\, a_2 \\ a_1\, a_3 \\ a_2\, a_3 \end{matrix}\right\} x$$
$$+ a_1\, a_2\, a_3.$$

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)(x + a_4) =$$
$$= x^4 + \left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} a_1\, a_2 + a_2\, a_3 \\ a_2\, a_3 + a_2\, a_4 \\ a_1\, a_4 + a_3\, a_4 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3 \\ a_1\, a_2\, a_4 \\ a_2\, a_3\, a_4 \end{matrix}\right\} x$$
$$+ a_1\, a_2\, a_3\, a_4.$$

и т. д.

где смо чланове узастопних сачинилаца написали једно под друго, да би на простору заштедили.

Кад пажљиво промотримо добивене производе, видећемо, да у њима владају ови закони:

a) Први члан сваког производа јесте степен x-а, којег је изложилац једнак броју помножених бинома. У доцнијим члановима опадају изложиоци x-а поступно са јединицом тако, да је изложилац x-а у последњем члану нула. Последњи члан производа независи дакле од x и број свију чланова у производу јесте за један већи од броја помножених бинома.

b) Сачинилац првог члана јесте вазда јединица; сачинилац другог члана јесте збир количина $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$, које се јављају као други чланови у помноженим биномима.

Сачинилац трећег члана јесте збир комбинација друге класе — без понављања — начињених из основака: a_1, a_2, a_3, a_4, ...

Сачинилац четвртог члана јесте збир комбинација треће класе из истих основака.

Сачинилац петог члана јесте збир комбинација четврте класе из истих основака и т. д.

Најзад последњи члан вазда је једнак производу количина a_1, a_2, a_3 . . . .

Но ваља приметити, да се овде комбинације количина a_1, a_2, a_3, a_4, ... имају сматрати као производи. Ми ћемо краткоће ради означавати збир комбинација r-не класе из основака a_1, a_2, a_3, a_4 . . . . . са C^r_m, где m значи број основака.

Да би сад доказали, да горњи закони вреде у опште па био број помножених бинома ма колики, треба најпре доказати, да ако ти закони вреде у производу од m бинома, да они онда морају вредити и у производу од $(m+1)$ бинома.

Претпоставимо дакле, да ти закони вреде у производу од m бинома:

$$(x+a_1).\ (x+a_2),\ (x+a_3),\ \ldots\ (x+a_m),$$

да је дакле:

$$1.)\ (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_m)=x^m+C'_m x^{m-1}+$$
$$+C^2_m x^{m-2}+C^3_m x^{m-3}+\ldots+C^r_m x^{m-r}+\ldots+C_m^{m-1}+C^m_m.$$

Кад помножимо овај производ са $(m+1)$-им биномом $(x+a_{m+1})$, добићемо:

$$2.)\quad (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_m)(x+a_{m+1})=$$
$$=x^{m+1}+(C'_m+a_{m+1})x^m+(C^2_m+a_{m+1}C'_m)x^{m-1}+$$
$$+(C^3_m+a_{m+1}C^2_m)x^{m-2}+\ldots+(C^r_m+a_{m+1}C_m^{r-1})x^{m-r+1}+\ldots$$
$$\ldots+(C^m_m+a_{m+1}C_m^{m-1})x+a^{m+1}C_m^m.$$

Овде је:

$$C'_m=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m,$$

дакле је у новом производу под 2) сачинилац од x:

$$C'_m+a_{m+1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m+a_{m+1}$$

или

$$C'_m+a_{m+1}=C'_{m+1}.$$

Даље је C^2_m збир комбинација друге класе без понављања из основака: $a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_m$ и $a_{m+1}\,C^1_m$ јесте збир комбинација исте класе, које се добијају, кад се $(m+1)$-ви основак a_{m+1} веже са $a_1,\ a_2,\ a_3\ldots,\ a_m$, дакле је:

$$C^2_m+a_{m+1}\,C^1_m$$

збир свију комбинација друге класе из основака: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m,\ a_{m+1}$ т. ј.

$$C^2_m+a_{m+1}\,C^1_m=C^2_{m+1}.$$

Исто је тако:

$$C^3_m+a_{m+1}\,C^2_m=C^3_{m+1},\ C^4_m+a_{m+1}\,C^3_m=C^4_{m+1}\ \text{и т. д.}$$

и у опште:

$$C^r_m+a_{m+1}\,C_m^{r-1}=C^r_{m+1}.$$

По овоме једначина 2) изгледа сада овако:

$$3.)\ (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_m)(x+a_{m+1})=$$
$$=x^{m+1}+C^1_{m+1}\,x^m+C^2_{m+1}\,x^{m-1}+\ldots+C^r_{m+1}\,x^{m-r+1}+\ldots$$
$$\ldots+C^m_{m+1}\,x+C^{m+1}_{m+1}.$$

Дакле је доказано, да ако горњи закони вреде у производу од m бинома, да они морају нужно вредити и у производу од $(m+1)$ бинома. Но ми смо горе непосредним множењем сазнали, да ти закони вреде у производима од 2, 3 и 4 бинома; дакле они морају вредити и у производу од 5 бинома, а због тога и у производу од 6 бинома, а због тога даље и у производу од 7 бинома и т. д., дакле и у производу од ма колико бинома.

Ако сад узмемо, да су сви други чланови у биномима обрасца 1) једнаки a, онда је:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_m)=(x+a)^m$$

даље је:

$$C^1_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = a + a \dots = \binom{m}{1} a$$

$$C^2_m = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_2 a_3 + \dots =$$

$$= a^2 + a^2 + \dots + a^2 = \binom{m}{2} a^2$$

$$C^3_m = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots + a_{m-2} a_{m-1} a_m =$$

$$= a^3 + a^3 + \dots + a^3 = \binom{m}{3} a^3.$$

и у опште:

$$C^r_m = \binom{m}{r} a^r = \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)r} a^r$$

По замени у једначину 1) она се претвара у:

$$4)\quad (x+a)^m = x^m + \binom{m}{1} a x^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 x^{m-2} + \binom{m}{3} a^3 x^{m-3} + \dots$$

$$\dots + \binom{m}{r} a^r x^{m-r} + \dots + \binom{m}{m-1} a^{m-1} x + \binom{m}{m} a^m.$$

Овај образац, који је Newton први пронашао, зове се биномни образац. Помоћу тога обрасца, у коме m засада значи цео и положан број, ми смо у стању наћи ма колики цео и положан степен бинома $x+a$ или $a+x$. Сачиниоци:

$$1 = \binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \dots \binom{m}{m}$$

зову се биномни сачиниоци. Члан $(r+1)$-ви

$$\binom{m}{r} a^r x^{m-r}$$

зове се општи члан биномног обрасца. У њему је исказан закон биномног реда, којег поједине чланове налазимо редом стављајући у $(r+1)$-ом члану $r = 0, 1, 2, 3, \dots (m-1), m$.

Ако у биномном обрасцу заменимо a са $-a$, добићемо:

$$(x-a)^m = x^m - \binom{m}{1} a x^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 x^{m-2} - \binom{m}{3} a^3 x^{m-3} +$$

$$\dots + (-1)^r \binom{m}{r} a^r x^{m-r} + \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} a^{m-1} x + (-1)^m a^m.$$

О биномном обрасцу 4) имамо приметити ово, што сљедује:

a). Број чланова у биномном реду јесте $(m+1)$.

b). Изложиоци од x опадају све са јединицом почев од m па до 0, а изложиоци од a расту почев од 0 па до m тако, да је збир изложилаца од a и x у сваком члану $= m$. Даље изложилац од a у сваком члану једнак је броју, који је испод m у биномном сачиниоцу тога члана, дакле је тај изложилац за јединицу мањи од казаљке места дотичнога члана.

c). Биномни сачиниоци чланова једнако удаљених од обадва краја јесу једнаки. И доиста $(r+1)$-ви биномни сачинилац идући с лева на десно јесте $\binom{m}{r}$ а $(r+1)$-ви биномни сачинилац идући с десна на лево јесте $\binom{m}{m-r}$. Али је познато из науке о комбинацијама, да је:

$$\binom{m}{r} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-r+1)}{r!}\cdot\frac{m-r}{r+1}\cdot\frac{m-r+1}{r+2}\cdots\cdots\frac{r+2}{m-r+1}\cdot\frac{r+1}{m-r} = \frac{m\ldots\ldots(r+1)}{(m-r)!} =$$

$$= \frac{m\ldots\ldots[m-(m-r)+1]}{(m-r)!} = \binom{m}{m-r}$$

$$\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}.$$

d). Ако је m паран број, онда је $(m+1)$ т. ј. број чланова у биномном реду непаран и средњи је члан тога реда:

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} a^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}}$$

А ако је m непаран број, онда је број чланова у биномном реду паран и онда има у том реду два средња члана, а ти су:

$$\binom{m}{\frac{m-1}{2}} a^{\frac{m-1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} \quad \text{и} \quad \binom{m}{\frac{m+1}{2}} a^{\frac{m+1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}}$$

где је:

$$\binom{m}{\frac{m-1}{2}} = \binom{m}{\frac{m+1}{2}}.$$

e). Ако у биномном обрасцу 4) ставимо: $x = 1$ и $a = x$, добијамо:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots$$

$$+ \binom{m}{m} x^m.$$

II. Биномни образац за ма какве изложиоце.

84. Узмимо нека нам је дат ред

$$1.)\quad 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \binom{m}{4}x^4 + \ldots.$$

где под m разумевамо стваран број. Ако је m цео и положан број, ред се прекида са $(m+1)$-им чланом x^m, и његов је збир, као што већ знамо $(1+x)^m$. Али ако је m стваран број али не цео и положан, онда је ред 1) бесконачан, и збирљив је за сваку коначну вредност m-а, ако је $1 > x > -1$. Дакле је он између поменутих граница x-а непрекидна функција x-а а тако исто и m-а између граница $m = -\infty$ и $m = +\infty$. Наш је задатак сада да тражимо збир реда 1). Но како о његовом збиру може бити говора само тако, ако је он збирљив, то ћемо од сада претпоставити: $1 > x > -1$.

Означимо збир реда 1), у колико га сматрамо као функцију m-а са $f(m)$, онда је:

$$2.)\quad f(m) = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots.$$

Ако је m цело и положно, онда је:

$$3.)\qquad f(m) = (1+x)^m.$$

Ако у 2) узмемо место m стварне бројеве α и β, онда добијамо:

$$4.)\quad f(\alpha) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots.$$

$$5.)\quad f(\beta) = 1 + \binom{\beta}{1}x + \binom{\beta}{2}x^2 + \binom{\beta}{3}x^3 + \ldots.$$

Ови редови збирљиви су и онда, кад све чланове десно учинимо положним, дакле кад узмемо $1 > x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и свуда заменимо

$$\binom{\alpha}{k} \text{ са } \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+k-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots..\ k} \quad \text{и}$$

$$\binom{\beta}{k} \text{ са } \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+k-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots..\ k}$$

Дакле на основу теореме 2°) у № 71 смемо помножити редове у 4) и 5) и збир реда, који се добије, биће раван производу њихових збирова. Множењем тих редова добијамо:

$$f(\alpha) f(\beta) = 1 + \left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{1}\\ \binom{\beta}{1}\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{2}\\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}\\ \binom{\beta}{2}\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{3}\\ \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{1}\\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{2}\\ \binom{\beta}{3}\end{matrix}\right\} x^3 + \ldots,$$

узимајући на ум образац познат из науке о комбинацијама:

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots. +$$

$$+ \binom{m}{1}\binom{n}{-} + \binom{n}{} = \binom{m+n}{r},$$

добијамо још простије:

$$f(\alpha) f(\beta) = 1 + \binom{\alpha+\beta}{1}x + \binom{\alpha+\beta}{2}x^2 + \binom{\alpha+\beta}{3}x^3 + \ldots$$

Ред десно зависи од $(\alpha + \beta)$ онако исто као ред 2) од m; дакле збир тога десног реда морамо означити са $f(\alpha+\beta)$, и тако сад имамо:

$$6.) \qquad f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Замењујући овде β са $\beta + \gamma$ добијамо:

$$f(\alpha) f(\beta + \gamma) = f(\alpha + \beta + \gamma).$$

Но како је по обр. 6). $f(\beta + \gamma) = f(\beta)\, f(\gamma)$, то је даље:

$$f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) = f(\alpha + \beta + \gamma).$$

Замењујући овде γ са $\gamma + \delta$, добијамо узимајући у обзир опет образац 6):

$$f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) f(\delta) = f(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \text{ и т. д.}$$

и настављајући радити тако и даље, долазимо до овог општег резултата:

$$7.) \quad f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) \ldots f(\mu) = f(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu)$$

У овом обрасцу исказана је карактерна особина функције $f(m)$, помоћу које се — особине — као и обрасца $f(m) = (1+x)^m$, који вреди, кад је m цело и положно, лако изналази $f(m)$ за сваку стварну вредност изложиоца.

Ставимо у обрасцу 7) $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\mu=\frac{p}{q}$ где су p и q цели, положни и односно прости бројеви, број истих нека је $= q$. Једначина 7) онда прелази у:

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^{q} = f(p),$$

или

8.) $$[f(p)]^{\frac{1}{q}} = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Пошто је p цео и положан број, то је на основу обрасца 3): $f(p) = (1+x)^{p}$, дакле је сад $[f(p)]^{\frac{1}{q}} = (1+x)^{\frac{p}{q}}$.

Даље $f\left(\frac{p}{q}\right)$ значи ред 1), кад се у њему стави $m = \frac{p}{q}$. Дакле једначина 8) сад изгледа овако:

9.) $$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \binom{\frac{p}{q}}{1} x + \binom{\frac{p}{q}}{2} x^{2} + \binom{\frac{p}{q}}{3} x^{3} + \ldots$$

Но лево стоји q-ти корен једнозначне функције и то положне, јер смо претпоставили $1 > x > -1$. Ако је дакле q непарно, онда тај q-ти корен има само једну положну вредност, као год и десна страна, и те вредности јесу једнаке. Али ако је q парно, онда лево у обр. 9) стоји парни корен из једног положног броја, и зато тај корен тада има две једнаке али противно означене вредности, док међутим десна страна има само једну вредност, и према томе може бити равна једној или другој вредности левога корена.

Да би ову тешкоћу уклонили, узмимо на ум, да је за $x = 0$ вредност десног реда $= 1$, дакле равна положној вредности левога корена. Кад би сад вредност десног реда за једну од нуле различну вредност $x = a$, бројно мању од 1, могла бити равна одречној вредности левога корена, то би онда између 0 и a морала бити таква једна вредност $x = c$, да је вредност реда за $x = c - \delta$ равна положној а за $x = c + \delta$ равна одречној вредности левога корена. Дакле би онда за $x = c$ десни ред морао имати две вредности једну положну а другу одречну, дакле ред не би био непрекидна функција између граница $x = -1$ и $x = +1$, а то не може бити, пошто је он збирљив између тих граница. Дакле је збир десног реда и за парно q раван положној и стварној вредности левога корена.

Према свему томе треба дакле образац 9) разумети тако, да се за $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ има узети увек његова стварна и положна вредност.

Сад може пасти и горње ограничење, да су p и q односно прости бројеви. Јер је прво

$$f\left(\frac{kp}{kq}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

то ће рећи збирови редова, који постају, кад се у реду 1) m замени најпре са $\frac{kp}{kq}$ а затим са $\frac{p}{q}$, јесу једнаки, и друго положне вредности израза $(1+x)^{\frac{kp}{kq}}$ и $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ јесу такође једнаке.

Ако је m ирационалан број, онда се он може са сваком могућом приближношћу изразити рационалним — десетним — разломцима μ тако, да разлика $m - \mu$ може постати ма како мала. Из једначине 6) кад тамо ставимо $\alpha = \mu$, $\beta = m - \mu$, следује:

$$f(\mu)\, f(m - \mu) = f(m)$$

или пошто је μ рационалан број:

$$f(m) = (1+x)^{\mu}\left[1 + \binom{m-\mu}{1} x + \binom{m-\mu}{2} x^2 + \dots\right]$$

или још краће:

$$f(m) = (1 + x)^{\mu} + \left[+ (1\ m-\mu)\, x.\, S\right],$$

где је S збир збирљивог реда дакле коначна количина. Пошто разлика $m-\mu$ може постати мања од ма како малог броја, то μ тежи граници m, израз $1 + (m-\mu)\, x.\, S$ граници 1, и зато цела десна страна граници $(1 + x)^m$. Дакле је и за ирационално m

$$f(m) = (1 + x)^m$$

или

$$10.)\ (1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots\dots$$

Ако у једначини 6) ставимо $\alpha = m$ и $\beta = -m$, где је сада m ма какав стваран број, добијамо:

$$f(m)\, f(-m) = f(0)$$

Али из 2) за $m = 0$ следује $f(0) = 1$, дакле је

$$f(m)\, f(-m) = 1$$

или:

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m}$$

или ако $f(-m)$ заменимо са редом, који он претставља:

$$11.)\ (1 + x)^{-m} = 1 + \binom{-m}{1} x + \binom{-m}{2} x^2 + \binom{-m}{3} x^3 + \dots$$

Узимајући на ум оно, што смо одмах у почетку ове №-е рекли, као и обрасце 9), 10) и 11) можемо дакле рећи:

Ако је m цело и положно, онда образац

$$12.)\ (1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots\dots$$

вреди за свако стварно x; али ако m није цело и положно, мора x бити бројно мање од 1. Но како је ред десно збирљив и непрекидан и за $x = \pm 1$, то образац 12) вреди за $x = 1$, ако је $m > -1$, а за $x = -1$, ако је $m > 0$.

Образац 12) зове се општи биномни образац. Кад у њему ставимо $\frac{x}{a} < 1$ место x и затим помножимо са a^m, добијамо још општији биномни образац:

$$(a + x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} x + \binom{m}{2} a^{m-2} x^2 + \dots\dots$$

Израчунавање броја е.

85. У № 25) ми смо нашли, да је

$$\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e \text{ за } m = \infty$$

Ми смо тамо видели, да се иста граница e добија па растило m на ма који начин. Ми ћемо узети, да m растући бесконачо прелази само целе вредности. Тада је по биномном обрасцу:

$$1.)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+\frac{m}{1}\,\frac{1}{m}+\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{m^{2}}+$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\;\;2.\;\;\;\;3}\,\frac{1}{m^{3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{m^{m}}.$$

Овај је ред коначан, докле је m коначно.

Ако је n положан цео број мањи од m, онда је:

$$2.)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+$$

$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots n}+R_{n}$$

Остатак је пак:

$$3.)\quad R_{n}=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{m}\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;(n+1)}\,.\,S \quad \text{и}$$

$$4.)\quad S=1+\frac{\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{n+2}+\frac{\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\left(1-\frac{n+2}{m}\right)}{(n+2)\quad(n+3)}+$$

$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\left(1-\frac{n+2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(n+2)\quad(n+3)\ldots\ldots\ldots m}.$$

У сваком члану израза S јављају се само положни чиниоци. Дакле је S веће од нуле а мање од броја, који

постаје, кад се бројиоци повећају а имениоци смање; дакле је на тај начин:

$$1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}>S>0$$

Леви ред јесте коначна геометријска постепеност. Ако место ње узмемо бесконачну геометријску постепеност, чији је количник исти, дакле збир њен $=\frac{n+2}{n+1}$, то ће тим пре бити:

$$5.)\qquad \frac{n+2}{n+1}>S>0$$

Чинилац, са којим је у 3.) S помножено, јесте положан и мањи од

$$\frac{1}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;(n+1)}$$

Дакле множећи у 5) са овим последњим бројем добијамо:

$$6.)\qquad \frac{1}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots n}\cdot\frac{n+2}{n+1}>R_{n}>0$$

Као што се види границе, између којих лежи остатак R_{n}, независе од m и ми можемо у 2) ставити $m=\infty$, после чега добијамо:

$$7.)\quad e=1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots+\frac{1}{n\,!}+R'_{n}$$

где R'_{n} лежи између истих граница, као и R_{n}, јер те границе независе од m.

Из 6) сљедује $\lim R'_n = 0$ за $n = \infty$, дакле на тај начин имамо за e бесконачни ред :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} + \cdot\ \ldots$$

Овај је ред нагло збирљив, то ће рећи довољно је, да се односно мали број чланова саберу, па да остатак реда или погрешка буде врло мала. Јер кад се ред заврши са чланом $\frac{1}{n\,!}$ погрешка је

$$R_n < \frac{1}{n\,!}\cdot\frac{1}{n}$$

Још се може доказати, да је e ирационалан број. Јер кад би узели да је e рационалан број и н. пр. раван сведеном разломку $\frac{p}{q}$, онда би вредила једначина :

$$\frac{p}{q} - 1 - 1 - \frac{1}{2\,!} - \ldots\ldots - \frac{1}{q\,!} =$$

$$= \frac{1}{q\,!}\left\{\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)} + \ldots\ldots\right\}$$

Десна је страна положна, дакле кад би једначина била истинита, морала би бити положна и лева страна. Кад лево и десно помножимо са $q\,!$ сви ће чланови лево бити цели бројеви, и ми ћемо добити :

$$8.)\quad K = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)\,(q+3)} + \ldots$$

где би k имао бити цео и положан број. Али збир десног реда у 8) јесте положан и мањи од збира геометријске постепености :

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots\ldots$$

дакле мањи од $\frac{1}{q}$. Дакле би цео и положан број K морао бити мањи од положног чистог разломка $\frac{1}{q}$, што је немогуће. Дакле e није рационалан број. —

Изложилачни редови.

86. У № 25 нашли смо да је:

$$1.)\qquad \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

кад m расти бесконачно на ма који начин. Сад ћемо да тражимо границу, којој при бесконачном рашћењу m-а тежи израз :

$$2.)\qquad \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

Зарад тога напишимо:

$$3.)\qquad \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left\{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right\}^x$$

па ћемо добити:

$$4.)\qquad \lim\left\{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right\} = e^x \text{ за } m = \infty.$$

У овој једначини исказана је једна од дефиниција изложилачке функције. Било x парно или не, ми ћемо под e^x увек разумевати јединцату положну вредност исте. Са овим ограничењем ми можемо функцију 3) помоћу биномног обрасца развити, при чему можемо m узети као цело, а то зато што тада имамо ту корист, да ће ред имати коначан број чланова, ако је m коначно. Ми добијамо:

$$5.)\qquad \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2\,!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+$$

$$\frac{x^3}{3\,!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots+\frac{x^n}{n\,!}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)+R_n.$$

Под n разумевамо цео број мањи од m а већи од x. Најпре ћемо сматрати x као положно. Остатак можемо овако претставити:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{m}\right).\,S$$

$$S = 1+\frac{x}{n+2}\left(1-\frac{n+1}{m}\right)+\frac{x^2}{(n+2)(n+3)}$$

$$\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\left(1-\frac{n+2}{m}\right)+\ldots+\frac{x^{m-n-1}}{(n+2)(n+3)\ldots.m}$$

$$\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\left(1-\frac{n+2}{m}\right)\ldots.\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

За остатак налазе се лако ове две границе:

$$6.)\qquad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{n+2}} > R_n > 0.$$

Ако пустимо у 5) да m расти бесконачно, добијамо изложилачни ред:

$$7.)\quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\ldots.+\frac{x^n}{n\,!}+R'_n$$

где R'_n лежи између истих граница као и R_n, јер те границе не зависе од m. Пошто је

$$lim\ R'_n = 0,$$

то је ред:

$$8.)\ e^x = 1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\ldots..$$

збирљив за сваку коначну вредност x-а.

Ако овде узмемо $-x$ место x, добијамо:

$$9.)\ e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2\,!}-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}-\ldots+\frac{(-x)^n}{n\,!}+\ldots$$

Кад се ред десно заврши са н. пр. $(n+1)$-м чланом, погрешка је бројно мања од следећег члана.

Ако у 6, 7 и 8 ставимо $x = 1$, добићемо резултате у последњој нумери.

Узмимо нека је a коначан и положан број и ставимо у 8):

$$x = y.\ la,$$

па ћемо, узимајући на ум, да је:

$$e^{yla} = (e^{la})^y = a^y$$

добити:

$$10.)\quad a^y = 1 + \frac{yla}{1} + \frac{(yla)^2}{2\,!} + \frac{(yla)^3}{3\,!} + \dots$$

Овај образац, у коме је $a > 0$, вреди за сваку коначну вредност y-а.

До истог обрасца 8) можемо доћи и сабирањем изложилачног реда

$$11.)\qquad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Јер ако ставимо:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

$$\text{и}\quad f(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots.$$

добијамо множењем ових једначина:

$$f(x).\, f(y) = 1 + \frac{(x+y)}{1} + \frac{(x+y)^2}{2\,!} + \frac{(x+y)^3}{3\,!} + \dots.$$

или

$$f(x)\, f(y) = f(x+y).$$

Одавде на начин у № 84 показани налазимо:

$$\left[f(x)\right]^m = f(mx).$$

а одавде, кад x са m и обратно сменимо:

$$\left[f(m)\right]^x = f(mx).$$

Из ове једначине и оне пред њом следује:

$$\left[f(x)\right]^m = \left[f(m)\right]^x,$$

одакле за $m = 1$:

$$f(x) = \left[f(1)\right]^x.$$

Но $f(1)$ значи збир реда 11) за $x = 1$ а тај је

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\dots\dots$$

Збир овога реда по № 85 јесте e, дакле је сад:

$$f(x) = e^x$$

или:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

Логаритамски редови.

87. Функција $(1 + x)^y$, у којој је y буди какав број и $1 > x > -1$, може се на двојаки начин развити у ред, помоћу биномног обрасца 12. № 84 и обр. 10. № 86:

$$1.)\quad (1 + x)^y = 1 + \frac{y}{1}x + \frac{y(y-1)}{1\ .\ 2}x^2 + \frac{y(y-1)\,(y-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3 + \dots.$$

$$2.)\ (1+x)^y = 1 + \frac{[yl(1+x)]}{1} + \frac{[yl(1+x)]^2}{2\,!} +$$
$$+ \frac{[yl(1+x)]^3}{3\,!} + \dots.$$

Кад у заградама обрасца 1) означена множења свршимо, добићемо збирљив двојни ред облика 2) у примеру 1 № 77. Из тога двојног реда добићемо, сабирајући чланове узастопних вертикалних редова и сматрајући добивене збирове рачунате с лева на десно као чланове простога реда, један збирљив ред облика 3) у № 77 пр. 1, тако да је:

$$3.)\ (1+x)^y = \varphi_1(x) + y\varphi_2(x) + y^2\varphi_3(x) + \dots.$$

Из упоређења овог реда и оног под 2) следује:

$$l(1+x) = \varphi_2(x).$$

Израз $\varphi_2(x)$ лако је склопити, јер зато треба само у 1) означена множења свршити и сачинилац 1-ог степена од y јесте вредност за $\varphi_2(x)$. На тај начин добићемо, да је:

$$5.)\ l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots,$$

који образац, као и онај под 1) из којег је изведен, вреди за $1 > x > -1$. Но он вреди још и за $x = 1$, јер је ред десно збирљив и непрекидан и за $x = 1$.

Овај образац употребљив је само за вредности x-а од 0 до 2 закључно и при том није згодан за израчунавање логаритама, кад је x близу 1, јер је он тада врло споро збирљив. С тога ћемо да тражимо друге обрасце, који немају тих мана.

Кад у једначини 5) заменимо x са $-x$, добијамо:

$$6.)\ l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots.$$

који образац такође вреди за $1 > x > -1$. Из 5) и 6) добијамо одузимањем:

$$7.)\ l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots.\right\}$$

Пошто се сваки положан број може претставити у облику $\frac{1+x}{1-x}$, то се помоћу обрасца 7) може наћи логаритам сваког положног броја; само што је тај образац за вредности x-а, које су близу 1, још споро збирљив.

Ставимо у 7):

$$\frac{1+x}{1-x} = z, \text{ одакле } x = \frac{z-1}{z+1}$$

па добијамо образац:

$$8.)\ lz = 2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \dots\right\}$$

који вреди за сваку положну вредност z-а. Кад у 8) ставимо $z = \frac{a}{b}$, добијамо даље:

$$9.)\ l\frac{a}{b} = 2\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \dots\right\}$$

који је ред тим наглије збирљив, што је $(a - b)$ мање наспрам $(a + b)$.

За $a = x + k$, $b = x$ добијамо из 9):

$$10.)\quad l(x+k) = l\,x + 2\left\{\left(\frac{k}{2x+k}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2x+k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2x+k}\right)^5 + \dots\right\},$$

и одавде за $k = 1$:

$$11.)\quad l(x+1) = lx + 2\left\{\left(\frac{1}{2x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^5 + \dots\right\}$$

За $x > 93$ већ други члан нема никаква утицаја на 7-о десетно место. Још збирљивији ред добијамо, кад у 9) ставимо $a = x^2$, $b = x^2 - 1$. Тада је

$$l\,\frac{a}{b} = lx^2 - l(x^2-1) = 2lx - l(x-1) - l(x+1)$$

и
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{2x^2-1},$$

и потоме:

$$12.)\quad l(x+1) = 2lx - l(x-1) - 2\left\{\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2x^2-1)^5} + \dots\right\}$$

Лако се налази, да за вредности $x \overset{=}{>} 11$ други члан реда нема никаква утицаја на 7-о десетно место логаритама. Дакле при израчунавању логаритама бројева већих од 11, кад рачунамо логаритме са 7 десетних места, можемо просто ставити:

$$l(x+1) = 2lx - l(x-1) - \frac{2}{2x^2-1}$$

а за $x > 3163$:

$$l(x+1) = 2lx - l(x-1).$$

На сличан начин како смо из 9) извели обрасце 10) и 11) можемо извести још колико хоћемо згодних образаца, јер зато треба само за a и b узимати функције x-а, које се могу лако на чиниоце расправити и којих је разлика мали број.

88. 1°. У пређашњој №-и нађени обрасци дају природне логаритме, којој је основа $e = 2{\cdot}7182\dots$. Ако се траже логаритми за основицу $a > 0$, то ваља имати ово на уму. Нека је $la = \alpha$ дакле $a = e^{\alpha}$ и нека је $\beta = lz$ дакле $z = e^{\beta}$, онда је $e = a^{\frac{1}{\alpha}}$ и $z = a^{\frac{\beta}{\alpha}}$, дакле:

$$log_a z = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{lz}{la}.$$

Дакле да би логаритам броја z у системи, где је $a > 0$ основица, нашли, треба природни логаритам z-а поделити са природним логаритмом нове основице.

Чинилац $\frac{1}{la}$ зове се модуо логаритамске системе, којој је a основа. За обичне или бригове логаритме основа је $a = 10$ и модуо те системе јесте:

$$\frac{1}{l10} = 0{\cdot}434294481903\ldots..$$

Са тим модулом треба множити природне логаритме бројева, те да би им нашли обичне логаритме.

2°. Кад се траже логаритми даних бројева и бројеви, који одговарају даним логаритмима помоћу таблица логаритамских, узима се, да су почев од једног извесног броја па навише разлике бројева сразмерне разликама њиних логаритама. Да се то тако приближно може узети, видећемо из овога што сљедује:

Ако ставимо модуо бригове логаритамске системе $1 : l10 = M$ и с њим помножимо једначину 10) № 87) добићемо образац:

$$log\,(x+k) = log\,x + 2M \left\{ \left(\frac{k}{2x+k}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2x+k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2x+k}\right)^5 + \ldots \right\}$$

Ако овде узмемо само први члан реда у рачун, добићемо:

$$log\,(x+k) - log\,x = 2M\,\frac{k}{2x+k}$$

а одавде за $k = 1$:

$$log\,(x+1) - log\,x = 2M\,\frac{1}{2x+1}$$

Деобом ових двеју једначина излази:

$$\frac{log\,(x+k) - log\,x}{log\,(x+1) - log\,x} = k.\ \frac{2x+1}{2x+k}$$

Ако узмемо, да је x наспрам 1 велико, онда је $\frac{2x+1}{2x+k}$ скоро једнако јединици, дакле је тада приближно тачно:

$$1.)\qquad \frac{log\,(x+k) - log\,x}{log\,(x+1) - log\,x} = k$$

Ако је x цео број, што ћемо и претпоставити, онда је именилац тако звана таблична разлика, коју кад означимо са $\triangle$ добијамо:

$$2.)\qquad log\,(x+k) = log\,x + k\,\triangle,$$

образац, по коме се тражи $log\,(x+k)$ кад $(x+k)$ лежи између два узастопна таблична броја. Ако у 1) означимо бројиоца са δ, онда имамо приближно тачно:

$$\frac{\delta}{\triangle} = k \text{ дакле } 3)\ x+k = x + \frac{\delta}{\triangle}$$

образац, помоћу којег се тражи број $x+k$ из познатог логаритма, кад се овај у таблицама тачно неналази.

3°. Тражимо границу погрешке, која се чини, кад се по обрасцу 2) тражи $log\,(x+k)$. Зарад краткоће ставимо

$$k\,\triangle = \delta_1 \text{ и } \varepsilon = \delta - \delta_1$$

где ε значи погрешку, која се чини, кад се помоћу обрасца 2) тражи $log\,(x+k)$.

Кад у обрасцу 5) № 87 помножимо са модулом бригове логаритамске системе добијамо:

$$4.)\quad \log(1+x) = M\left\{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \dots\right\}$$

Ако сад узмемо на ум, да је:

$$\delta = \log(x+k) - \log x = \log\left(1+\frac{k}{x}\right)$$

и

$$\delta_1 = k\triangle = k\left\{\log(x+1) - \log x\right\} = k\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

онда је по обрасцу 4) даље:

$$\delta = M\left\{\frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} + \frac{k^3}{3x^3} - \dots\right\}$$

$$\delta_1 = M\left\{\frac{k}{x} - \frac{k}{2x^2} + \frac{k}{3x^3} - \dots\right\}$$

Дакле је:

$$5.)\quad \varepsilon = \delta - \delta_1 = M\left\{\frac{k-k^2}{2x^2} - \frac{k-k^3}{2x^3} + \dots\right\}$$

Чланови реда у загради опадају и јесу наизменце положни и одречни, дакле је (№ 66):

$$6.)\qquad 0 < \varepsilon < \frac{Mk(1-k)}{2x^2}$$

α). Прва неједначина значи толико, колико да је $\delta > \delta_1$ или

$$\log(x+k) > \log x + \delta_1,$$

дакле је *тачна вредност логаритма $x+k$ већа од оне, која се добија помоћу обрасца 2).*

β). Из алгебре познато је, да је вредност производа двају промењивих чинилаца, којих је збир раван сталном броју, највећа, кад су ти чиниоци једнаки, и та највећа вредност производа једнака је квадрату половине сталнога броја. Пошто је сад збир чинилаца k и $1-k$ раван 1, то је највећа вредност њиног производа $\frac{1}{4}$, дакле је сад

$$7.)\qquad \varepsilon < \frac{1}{16x^2};$$

и ако је $x > 10000$ онда је

$$\varepsilon < \frac{1}{1\,600,000.000}$$

Дакле кад се по обрасцу 2) тражи логаритам броја $x+k$, *онда је погрешка мања од једне јединице 9-га десетног места.*

4°. Ако се тражи број који одговара даном логаритму по обрасцу 3), опет се чини једна погрешка ε_1, којој је лако наћи границе. Узмимо на ум, да се непознати број $x+k$ тражи помоћу приближно тачног обрасца 3), да се то јест тражени број сматра као једнак $x+\frac{\delta}{\triangle}$; дакле је:

$$\varepsilon_1 = k - \frac{\delta}{\triangle} = \frac{k\triangle - \delta}{\triangle} = \frac{\delta_1 - \delta}{\triangle} = -\frac{\varepsilon}{\triangle}$$

Усљед прве неједначине под 6) јесте $\varepsilon_1 < 0$ дакле *тачна вредност броја, који одговара* $log\,(x+k)$, *мања је од оне, коју даје образац 3).*

Пошто је даље:

$$\triangle = log\left(1+\frac{1}{x}\right) = M\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\ldots\right\}$$

то одатле сљедује, да је:

$$\triangle > M\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right\} \text{ или } \triangle > M\left\{\frac{2x-1}{2x^2}\right\}$$

или, пошто је $0{\cdot}4 < M$, тим пре

$$\triangle > \frac{2x-1}{5x^2}.$$

Узимајући сад у обзир неједначину 7) налазимо, да је бројно:

$$\varepsilon_1 < \frac{5}{16(2x-1)}$$

Дакле кад се узме да је $k=\frac{\delta}{\triangle}$ или тражени број $x+k= x+\frac{\delta}{\triangle}$, онда је погрешка ε_1 мања од јединице 4-г десетног места.

Извођење неколико образаца потребних при развијању тригонометријских функција у редове.

89. Полазећи од познатог обрасца:

$$1.)\ \binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{n-1}+\ldots\ldots$$

$$+\binom{\alpha}{n-1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}=\binom{a+\beta}{n},$$

ми ћемо тражити.

1°. Збир реда:

$$2.)\ \binom{\mu}{0}\binom{\frac{\mu}{2}}{n}+\binom{\mu}{2}\binom{\frac{\mu-2}{2}}{n-1}+\binom{\mu}{4}\binom{\frac{\mu-4}{2}}{n-2}+\ldots\ldots$$

$$+\binom{\mu}{2n-2}\binom{\frac{\mu-2n+2}{2}}{1}+\binom{\mu}{2n}\binom{\frac{\mu-2n}{2}}{0},$$

где је μ ма какав а n цео и положан број. Сабирак $(r+1)$-и овога реда јесте:

$$3.)\qquad \binom{\mu}{2r}\binom{\frac{\mu-2r}{2}}{n-r},$$

из којег постаје ред 2), кад се стави редом $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n$. Ако у 3) развијемо сваког чиниоца, добићемо:

$$4.)\qquad \binom{\mu}{2r}\binom{\frac{\mu-2r}{2}}{n-r} =$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-2r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots 2r}.$$

$$\frac{\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)\left(\frac{\mu-2r}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{\mu-2r}{2}-n+r+1\right)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots(n-r)} =$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-2r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots 2r}.$$

$$\frac{(\mu-2r)(\mu-2r-2)\ldots(\mu-2n+2)}{2.\ 4\ \ldots\ldots(2n-2r)}$$

Ако у бројиоцу издвојимо све чиниоце, у којима су од μ одузети парни бројеви, и који чиниоци састављају аритметичну постепеност:

$$\mu, \mu-2, \mu-4, \ldots\ldots \mu-2r+2, \mu-2r,$$
$$\mu-2r-2\ldots\mu-2n+2$$

онда се последњи производ десно може претставити овако:

$$\frac{\mu(\mu-2)\ \ldots\ (\mu-2n+2)}{1.\ 3\ \ldots\ldots\ (2r-1)}.$$

$$\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ \ldots\ (\mu-2r+1)}{2.\ 4.\ \ldots\ldots\ 2r}.$$

$$\frac{1}{2.4.6\ldots(2n-2r)}$$

Ако овде бројиоца и имениоца помножимо са:

$$(2r+1)(2r+3)\ldots(2n-3)(2n-1)$$

то ће се у имениоцу првог чиниоца јавити као чиниоци сви непарни бројеви почев од 1 па до $2n-1$, и тада ће једначина 4) изгледати овако:

$$5.)\qquad \binom{\mu}{2r}\binom{\frac{\mu-2r}{2}}{n-r} =$$

$$= \frac{\mu(\mu-2)\ldots(\mu-2n+2)}{1.\ 3.\ldots\ldots(2n-1)}.\ \frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2r+1)}{2.\ 4.\ldots\ldots 2r}.$$

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2r+1)}{2.\ 4.\ldots\ldots(2n-2r)}$$

Ако сад првог чиниоца десно, који не зависи од r означимо са N и узмемо на ум, да су остала два чиниоца и то

$$\text{други} = \binom{\frac{\mu-1}{2}}{r}\ \text{а трећи} = \binom{\frac{2n-1}{2}}{n-r}$$

онда једначину 5) можемо написати овако:

$$\binom{\mu}{2r}\binom{\frac{\mu-2r}{2}}{n-r} = N\binom{\frac{\mu-1}{2}}{r}\binom{\frac{2n-1}{2}}{n-r}.$$

Ако сад овде ставимо редом $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$ и саберемо добивене једначине, наћићемо да је збир реда 2) једнак:

$$N\left\{\binom{\frac{\mu-1}{2}}{0}\binom{\frac{2n-1}{2}}{n}+\binom{\frac{\mu-1}{2}}{1}\binom{\frac{2n-1}{2}}{n-1}+\dots\right.$$

$$\left.+\binom{\frac{\mu-1}{2}}{n}\binom{\frac{2n-1}{2}}{0}\right\}$$

Збир реда у загради добија се, кад се у обрасцу 1) стави

$\alpha=\frac{\mu-1}{2}$, $\beta=\frac{2n-1}{2}$, и тај је збир:

$$\binom{\frac{\mu+2n-2}{2}}{n}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\mu+2n-2}{2}\right)\left(\frac{\mu+2n-2}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\mu+2n-2}{2}-n+1\right)}{1\,.\quad 2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad n}=$$

$$=\frac{(\mu+2n-2)\,\mu+2n-4)\dots(\mu+2)\,\mu}{2\,.\;4\,.\;6\,.\,.\,.\,.\,.\,(2n-2)\,2n}$$

Ако сад овај производ помножимо са вредношћу од:

$$N=\frac{\mu(\mu-2)\dots(\mu-2n+2)}{1\,.\;3\,.\,.\,.\,.\,.\,(2n-1)}$$

налазимо, да је збир реда 2):

$$6.)\quad\binom{\mu}{0}\binom{\frac{\mu}{2}}{n}+\binom{\mu}{2}\binom{\frac{\mu-2}{2}}{n-1}+\binom{\mu}{4}\binom{\frac{\mu-4}{2}}{n-2}+\dots$$

$$+\binom{\mu}{2n-2}\binom{\frac{\mu-2n+2}{2}}{1}\quad\binom{\mu}{2n}\binom{\frac{\mu-2n}{2}}{0}=$$

$$=\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mu^2-\overline{2n-2}^2)}{1\,.\quad 2\,.\;3\,.\quad 4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,2n}$$

2°. Тражимо сада збир реда:

$$7.)\quad\binom{\mu}{1}\binom{\frac{\mu-1}{2}}{n}+\binom{\mu}{3}\binom{\frac{\mu-3}{2}}{n-1}+\dots\binom{\mu}{2n-1}\binom{\frac{\mu-2n+1}{2}}{1}+$$

$$+\binom{\mu}{2n+1}\binom{\frac{\mu-2n-1}{2}}{0}$$

Сабирак $(r+1)$-и овога реда јесте:

$$8.)\qquad\binom{\mu}{2r+1}\binom{\frac{\mu-2r-1}{2}}{n-r}=$$

$$=\frac{\mu(\mu-1)\,.\,.\,.\,(\mu-2r)}{1\,.\;2\,.\,.\,.\,.\,.(2r+1)}\,.$$

$$\frac{\left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)\left(\frac{\mu-2r-1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\mu-2r-1}{2}-n+r+1\right)}{1\,.\;2\,.\;3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-r)}$$

$$=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-2r)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(2r+1)}\,.$$

$$\frac{(\mu-2r-1)(\mu-2r-3)\dots(\mu-2n+1)}{2\,.\quad 4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2n-2r)}$$

Ако у бројиоцу издвојимо оне чиниоце, у којима су од μ одузети непарни бројеви, и који чиниоци састављају аритметичну постепеност:

$$\mu-1,\ \mu-3, \ldots \ \mu \quad 2r+1,\ \mu-2r-1,\ \mu-2r-3, \ldots$$
$$\mu-2n+1,$$

онда се производ десно у 8) може написати овако:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.\quad 3.\quad 5.\ldots\ldots(2r+1)} \cdot \frac{(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2r)}{2.\quad 4\ \ldots\ldots .2r} \cdot$$
$$\frac{1}{2.\ 4\ \ldots(2n-2r)}$$

Ако сад овде помножимо бројиоца и имениоца са

$$(2r+3)(2r+5)\ldots(2n-1)(2n+1)$$

то ће се у имениоцу јавити као чиниоци сви непарни бројеви почев од 1 па до $2n+1$, и онда ће једначина 8) изгледати овако:

$$\binom{\mu}{2r+1}\binom{\frac{\mu-2r-1}{2}}{n-r} =$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.\quad 3.\quad 5.\ \ldots\ldots\ (2n+1)} \cdot$$
$$\frac{(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2r)}{2.\qquad 4\ \ldots\ldots\ 2r} + \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(2r+3)}{2.\qquad 4.\ \ldots\ldots\ (2n-2r)}$$

Ако првог чиниоца, који не зависи од r, означимо са N и узмемо на ум, да су остала два и то

$$\text{други} = \binom{\frac{\mu-2}{2}}{r} \text{ а трећи } = \binom{\frac{2n+1}{2}}{n-r}$$

онда последња једначина изгледа овако:

$$\binom{\mu}{2r+1}\binom{\frac{\mu-2r-1}{2}}{n-r} = N\binom{\frac{\mu-2}{2}}{r}\binom{\frac{2n+1}{2}}{n-r}$$

Стављајући овде $r = 0, 1, 2, \ldots n$, и сабирајући тако добивене једначине налазимо, да је збир реда 7) једнак:

$$N\left\{\binom{\frac{\mu-2}{2}}{0}\binom{\frac{2n+1}{2}}{n} + \binom{\frac{\mu-2}{2}}{1}\binom{\frac{2n+1}{2}}{n-1} + \ldots\right.$$
$$\left. + \binom{\frac{\mu-2}{2}}{n}\binom{\frac{2n+1}{2}}{0}\right\}$$

Помоћу обрасца 1) налазимо, да је збир реда у загради:

$$\binom{\frac{\mu-2+2n+1}{2}}{n} = \binom{\frac{\mu+2n-1}{2}}{n} =$$
$$= \frac{\left(\frac{\mu+2n-1}{2}\right)\left(\frac{\mu+2n-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{\mu+2n-1}{2}-n+1\right)}{1.\qquad 2.\ \ldots\ldots\ldots\ n} =$$
$$= \frac{(\mu+2n-1)(\mu+2n-3)\ldots(\mu+1)}{2.\qquad 4.\ \ldots\ldots\ 2n}$$

Ако сад ово помножимо са вредношћу од

$$N = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ .(2n+1)},$$

налазимо, да је збир реда 7).

$$9.)\qquad \binom{\mu}{1}\binom{\frac{\mu-1}{2}}{n}+\binom{\mu}{3}\binom{\frac{\mu-3}{2}}{n-1}+\ldots\ldots$$

$$\binom{\mu}{2n-1}\binom{\frac{\mu-2n+1}{2}}{1}+\binom{\mu}{2n+1}\binom{\frac{\mu-2n-1}{2}}{0}=$$

$$=\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ .(2n+1)}.$$

3°. На сличан начин налазимо, да је:

$$10.)\qquad \binom{\mu}{0}\binom{\frac{\mu-1}{2}}{n}+\binom{\mu}{2}\binom{\frac{\mu-3}{2}}{n-1}+$$

$$+\binom{\mu}{4}\binom{\frac{\mu-5}{2}}{n-2}+\ldots+\binom{\mu}{2n}\binom{\frac{\mu-2n-1}{2}}{0}=$$

$$=\frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1.\ 2.\ \ldots\ldots\ 2n}$$

Сабирак $(r+1)$-ви левога реда јесте:

$$\binom{\mu}{2r}\binom{\frac{\mu-2r-1}{2}}{n-r}=$$

$$=\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.\ 3.\ \ldots\ .(2n-1)}.\binom{\frac{\mu}{2}}{r}\binom{\frac{2n-1}{2}}{n-r}$$

Такође налазимо, да је:

$$11.)\ \binom{\mu}{1}\binom{\frac{\mu-2}{2}}{n}+\binom{\mu}{3}\binom{\frac{\mu-4}{2}}{n-1}+\binom{\mu}{5}\binom{\frac{\mu-6}{2}}{n-2}+\ldots$$

$$+\binom{\mu}{2n+1}\binom{\frac{\mu-2n-2}{2}}{0}=$$

$$=\frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ .(2n+1)}.$$

Сабирак $(r+1)$-и левога реда јесте:

$$\binom{\mu}{2r+1}\binom{\frac{\mu-2r-2}{2}}{n-r}=$$

$$=\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n)}{1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ .(2n+1)}+\binom{\frac{\mu-1}{2}}{r}\binom{\frac{2n+1}{2}}{n-r}.$$

Редови за синус и косинус умноженог лука.

90. Ставимо краткоће ради:

$$1.)\qquad P_n=\frac{\cos nx}{\cos^n x},\ Q_n=\frac{\sin nx}{\cos^n x}$$

па је тада:

$$P_{n+1}=\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos nx\cos x-\sin nx\sin x}{\cos^{n+1}x}$$

или кад десно означену деобу свршимо и горњим се скраћеним означењма послужимо:

$= \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - Tg^2 x$

$$2.) \qquad P_{n+1} = P_n - Q_n tgx.$$

На сличан начин добијамо:

$$3.) \qquad Q_{n+1} = Q_n + P_n tgx.$$

Ако, узимајући на ум да је $P_0 = 1$ и $Q_0 = 0$, ставимо у 2) и 3) редом $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$, добијамо:

$$4.) \quad \begin{array}{ll} P_1 = 1 & Q_1 = tg\,x \\ P_2 = 1 - tg^2 x & Q_2 = 2tg\,x \\ P_3 = 1 - 3tg^2 x & Q_3 = 3tgx - tg^3 x \\ P_4 = 1 - 6tg^2 x + tg^4 x & Q_4 = 4tgx - 4tg^3 x \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

У обрасцима за поједина P јављају се, као што се види, само парни степени tgx, а као сачиниоци биномни сачиниоци узастопних степена једнога бинома и то они, који стоје на непарним местима. Исто тако у обрасцима за Q јављају се непарни степени tgx а као сачиниоци биномни сачиниоци узастопних степена једнога бинома, и то они, који стоје на парним местима. Одатле изводимо, да ће бити у опште:

$$5.) \quad P_m = \binom{m}{0} - \binom{m}{2} tg^2 x + \binom{m}{4} tg^4 x - \binom{m}{6} tg^6 x + \ldots.$$

$$6.) \quad Q_m = \binom{m}{1} tgx - \binom{m}{3} tg^3 x + \binom{m}{5} tg^5 x - \ldots\ldots$$

m је овде цело и положно, а редови се имају дотле продужити, док се сами собом непрекину.

Да би доказали, да ови обрасци вреде за ма какво цело и положно m, послужићемо се познатим начином доказивања од n на $n+1$ (више индукција). Зарад тога ставићемо у једначинама:

$$P_{m+1} = P_m - Q_m tgx, \text{ и } Q_{m+1} = Q_m + P_m tgx$$

за P_m и Q_m горње редове, и онда сводећи два и два члана са истим степеном tgx, добијамо:

$$7.) \quad P_{m+1} = \binom{m}{0} - \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{2}\right] tg^2 x + \left[\binom{m}{3} + \binom{m}{4}\right] tg^4 x - \left[\binom{m}{5} + \binom{m}{6}\right] tg^6 x + \ldots.$$

$$8.) \quad Q_{m+1} = \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}\right] tg\,x - \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{3}\right] tg^3 x + \left[\binom{m}{4} + \binom{m}{5}\right] tg^5 x - \ldots.$$

Ако узмемо на ум из науке о комбинацијама познати образац:

$$\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} = \binom{m+1}{r}, \text{ као и то, да је } \binom{m}{0} = \binom{m+1}{0},$$

онда из образаца 7) и 8) следују ови:

$$P_{m+1} = \binom{m+1}{0} - \binom{m+1}{2} tg^2x + \binom{m+1}{4} tg^4x -$$

$$- \binom{m+1}{6} tg^6x + \ldots\ldots$$

$$Q_{m+1} = \binom{m+1}{1} tgx - \binom{m+1}{3} tg^3x + \binom{m+1}{5} tg^5x - \ldots\ldots$$

Ови обрасци следују просто из оних у 5) и 6), кад се тамо m замени са $m+1$; ако дакле обрасци 5) и 6) вреде за једну вредност m-а, они онда морају нужно вредити, кад m и за јединицу порасти. За $m=1$, 2, 3 и 4 обрасци 5) и 6) вреде, јер дају резултате исте са онима под 4), дакле ти обрасци морају вредити и за $m = 5$, па због тога и за $m = 6$ и т. д. дакле вреде у опште за свако цело и положно m.

Ако у обрасцима 5) и 6) заменимо P_m и Q_m са изразима, које они претстављају, и за тим помножимо лево и десно са $cos^m x$, добићемо тражене обрасце за синус и косинус умноженог лука:

$$9.)\quad cos\, m\, x = \binom{m}{0} cos^m x - \binom{m}{2} cos^{m-2} x\, sin^2 x +$$

$$\binom{m}{4} cos^{m-4} x\, sin^4 x - \ldots$$

$$10.)\quad sin\, m\, x = \binom{m}{1} cos^{m-1} x\, sin\, x - \binom{m}{3} cos^{m-3} x\, sin^3 x + \ldots\ldots$$

91. Обрасци 9) и 10) у № 90 дају се претворити у такве, у којима се десно налазе само степени синуса или само косинуса.

Зарад тога ставимо у 9)

$$sin\, x = z \text{ дакле } cos\, x = \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

па ћемо добити:

$$11.)\quad cos\, m\, x = \binom{m}{0}\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}m} - \binom{m}{2}\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}(m-2)} z^2 +$$

$$+ \binom{m}{4}\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}(m-4)} z^4 - \ldots$$

где узастопне степене од $(1 - z^2)$ десно треба још по биномном обрасцу развити. Ако је m парно, онда су узастопни степени од $1 - z^2$ цели и положни и биномни образац даје за њи коначне редове, а бесконачне, кад је m непарно, јер су тада поменути изложиоци разломљени. Да не би имали посла са бесконачним редовима, узмимо најпре: 1⁰) да је m парно, па је онда:

$$cos\, m\, x = \binom{m}{0}\left\{\binom{\frac{m}{2}}{0} - \binom{\frac{m}{2}}{1} z^2 + \binom{\frac{m}{2}}{2} z^4 - \binom{\frac{m}{2}}{3} z^6 + \ldots\ldots\right\} -$$

$$- \binom{m}{2}\left\{\binom{\frac{m-2}{2}}{0} z^2 - \binom{\frac{m-2}{2}}{1} z^4 + \binom{\frac{m-2}{2}}{2} z^6 - \ldots\ldots\right\} +$$

$$+ \binom{m}{4}\left\{\binom{\frac{m-4}{2}}{0} z^4 - \binom{\frac{m-4}{2}}{1} z^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\} -$$

. . . .

Одавде добијамо једначину облика:

$$12.)\quad cos\, m\, x = A_0 - A_2 z^2 + A_4 z^4 - A_6 z^6 + \ldots\ldots$$

где је

$$A_0 = \binom{m}{0}\binom{\frac{m}{2}}{0} = 1$$

а сачинилац од z^{2k}:

$$A_{2k} = \binom{m}{0}\binom{\frac{m}{2}}{k} + \binom{m}{2}\binom{\frac{m-2}{2}}{k-1} + \binom{m}{4}\binom{\frac{m-4}{2}}{k-2} + \dots\dots$$

$$+ \binom{m}{2k-2}\binom{\frac{m-2k+2}{2}}{1} + \binom{m}{2k}\binom{\frac{m-2k}{2}}{0}$$

По обрасцу 6) у № 89 добија се збир деснога реда и тада је:

$$A_{2k} = \frac{m^2(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)\,(m^2-6^2)\,\dots(m^2-[2k-2]^2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad 2k}$$

Ако сад помоћу овог обрасца добивене вредности за A_2, A_4, $A_6 \dots$ заменимо у 12), и z заменимо са $sin\,x$, добијамо образац:

$$13)\quad cos\,mx = 1 - \frac{m^2}{1.2} sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} sin^4 x -$$

$$- \frac{m^2(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} sin^6 x + \dots$$

Овде је m паран број, а ред се има дотле продужити, док се сам собом не прекине.

Узмимо сад:

2°. Да је m непарно па поделимо једначину 11) са $cos\,x = \sqrt{1-z^2}$, па ћемо добити:

$$\frac{cos\,mx}{cos\,x} = \binom{m}{0}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} - \binom{m}{2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-3)} z^2 +$$

$$+ \binom{m}{4}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-5)} z^4 - \dots$$

Овде су сад изложиоци узастопних степена од $(1-z^2)$ цели и положни, дакле ће биномни образац дати за исте степене коначне редове. Ако те степене доиста развијемо и после уредимо по степенима од z, добићемо једначину облика:

$$14.)\quad \frac{cos\,mx}{cos\,x} = 1 - a_2 z^2 + a_4 z^4 - a_6 z^6 + \dots,$$

сачинилац од z^{2k} овде је:

$$a_{2k} = \frac{(m^2-1^2)\,(m^2-3^2)\,(m^2-5^2)\,\dots(m^2-[2k-1]^2)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad 2k}$$

Ако a_2, a_4, $a_6 \dots$ заменимо њиним вредностима, израчунатим помоћу овог обрасца, у 14) и ставимо $z = sin\,x$, па затим помножимо лево и десно са $cos\,x$, добијамо образац.

$$15.)\quad cos\,mx = cos\,x \left\{ 1 - \frac{m^2-1^2}{1.2} sin^2 x + \right.$$

$$\left. + \frac{(m^2-1^2)\,(m^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} sin^4 x - \dots\dots \right\}$$

где је m непарно; ред се пак има дотле продужити, док се сам собом не прекине.

91. На сличан начин као у № 91 може се образац 10) у № 90 претворити у други, у коме се десно налазе

такође само степени синуса: кад у том обрасцу ставимо $\sin x = z$, добијамо:

$$16.)\qquad \sin mx = \binom{m}{1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} z - \binom{m}{3}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-3)} z^3 + \ldots.$$

1°. Изложиоци узастопних степена од $(1-z^2)$, кад је m непарно, јесу цели и положни, дакле се ти степени дају развити у коначне редове, које кад се учини добија се из 16) једначина облика:

$$\sin mx = B_1 z - B_3 z^3 + B_5 z^5 - \ldots\ldots$$

где је:

$$B_{2k+1} = \binom{m}{1}\binom{\frac{m-1}{2}}{k} + \binom{m}{3}\binom{\frac{m-3}{2}}{k-1} + \binom{m}{5}\binom{\frac{m-5}{2}}{k-2} + \ldots..$$

или краће по обрасцу 9) у № 89:

$$B_{2k+1} = \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots.(m^2-[2k-1]^2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots.(2k+1)}$$

дакле је:

$$17.)\quad \sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3.}\sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\sin^5 x - \ldots.$$

где је m непарно.

2.° Ако је m паран број, поделићемо најпре једначину 16) са $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, па ћемо онда у добивеној новој једначини:

$$\frac{\sin mx}{\cos x} = \binom{m}{1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-2)} z - \binom{m}{3}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m-4)} z^2 + \ldots.$$

развити узастопне степене од $(1-z^2)$; на тај начин добићемо једначину облика:

$$\frac{\sin mx}{\cos x} = b_1 z - b_3 z^3 + b_5 z^3 - \ldots$$

где је:

$$b_{2k+1} = \binom{m}{1}\binom{\frac{m-2}{2}}{k} + \binom{m}{3}\binom{\frac{m-4}{2}}{k-1} + \binom{m}{5}\binom{\frac{m-6}{2}}{k-2} + \ldots..$$

или краће по обрасцу 11) у № 89:

$$b_{2k+1} = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)\ldots.(m^2-[2k]^2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ldots\ldots(2k+1)}$$

и тако је сад:

$$18).\quad \sin mx = \cos x \left\{ \binom{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.}\sin^3 x + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\sin^5 x - \ldots \right\}$$

где је m парно.

93. На сличан начин могли би смо из образаца 9) и 10) у № 90 истиснути $sin\,x$, тако да остану само степени од $cos\,x$. Међу тим брже се долази до истих резултата, кад се у обрасцима 13) до 18) x замени са $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$. Тако из 13), где је m парно, добијамо:

$$\left(-1\right)^{\frac{1}{2}m} cos\,m\,x =$$

$$= 1 - \frac{m^2}{1.\,2} cos^2 x + \frac{m^2\,(m^2-2^2)}{1.\;2.\;3.\;4} cos^4 x -$$

$$- \frac{m^2\,(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6} cos^6 x + \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m^2\,(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)\ldots(m^2-[m-2|^2)}{1.\quad 2.\quad 3.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;m} cos^m x$$

и кад лево и десно помножимо са $(-1)^{\frac{1}{2}m}$, па после ред десно преокренемо:

$$19.)\; cos\,mx = A_m cos^m x - A_{m-2} cos^{m-2} x + A_{m-4} cos^{m-4} x - \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \; A_2\, cos^2 x + (-1)^{\frac{1}{2}m}$$

Буди који сачинилац н. пр. A_{m-2k} има као вредност:

$$A_{m-2k} = \frac{m^2\,(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)\ldots(m^2-[m-2k-2]^2)}{1\quad 2.\quad 3.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(m-2k)}$$

који се може на следећи начин преобразити

$$m^2 = 2.\,m.\,\frac{m}{2}$$

$$m^2 - 2^2 = 2^2 \left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

$$m^2 - 4^2 = 2^2 \left(\frac{m}{2}+2\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)$$

. . . .

$$m^2 - (m-2k-2)^2 = 2^2\,(m-k-1)\,(k+1)$$

дакле је сада:

$$A_{m-2k} =$$

$$= \frac{(m-k-1)\,(m-k-2)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}m-1\right)\ldots(k+2)\,(k+1)}{1.\qquad 2.\qquad 3.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(m-2k)}\, m.2^{m-2k-1}$$

У бројиоцу стоје као чиниоци сви цели бројеви од $k+1$ до $m-k-1$: ако дакле помножимо бројиоца и имениоца са $k! = 1.\,2.\,3\ldots k$, то ћемо имати:

$$A_{m-2k} = \frac{(m \quad k-1)\,(m-k-2)\ldots.\,3.\,2.\,1}{1.\;2.\;3\ldots(m-2k)\,1.\,2.\,3\ldots k}\, m.2^{m-2k-1}$$

$$= \frac{(m-k-1)\,(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;k}\, m2^{m-2k-1}$$

Само за $k = 0$ не вреди овај образац, али нам онда онај пред њим даје:

$$A_m = 2^{m-1}$$

После свега овога добијамо из 19) образац, који вреди за парно m:

$$\cos mx = 2^{m-1} \cos^m x - m.2^{m-3} \cos^{m-2} x +$$

$$+ m.2^{m-5} \frac{m-3}{2} \cos^{m-4} x - \ldots$$

или:

$$20.) \quad 2 \cos mx = (2 \cos x)^m - \binom{m}{1} (2 \cos x)^{m-2} +$$

$$+ \frac{m\,(m-3)}{1.\quad 2} (2 \cos x)^{m-4} - \frac{m\,(m-4)\,(m-5)}{1.\quad 2.\quad 3} (2 \cos x)^{m-6} + \ldots$$

У обрасцу 17) № 92) заменимо такође x са $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$, напишимо чланове у обрнутом реду, па ћемо, узимајући на ум да је m непарно, добити једначину облика:

$$\cos mx = A_m \cos^m x - A_{m-2} \cos^{m-2} x + A_{m-4} \cos^{m-4} x - \ldots .$$

где је:

$$A_{m-2k} = \frac{m\,(m^2-1^2)\,(m^2-3^2) \ldots . (m^2 - [m-2k-2]^2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ldots\ldots\ (m-2k)}$$

Овај образац даје се упростити овако:

$$m^2 - 1^2 = 2^2 \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)$$

$$m^2 - 3^2 = 2^2 \left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}\right)$$

. . . .

$$m^2 - (m-2k-2)^2 = 2^2\,(m-k-1)\,(k+1)$$

Одавде следује:

$$A_{m-2k} = \frac{(m-k-1)\,(m-k-2) \ldots \frac{1}{2}(m+1)\,\frac{1}{2}(m-1) \ldots . (k+2)\,(k+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ldots\ (m-2k)}\, m\, 2^{m-2k-1}$$

У бројиоцу јављају се као чиниоци сви цели бројеви од $k+1$ до $m-k-1$. Ако најпре помножимо бројиоца и имениоца са $k! = 1.\ 2.\ 3 \ldots k$, а затим скратимо са $(m-2k)! = 1.\ 2.\ 3 \ldots (m-2k)$, онда је:

$$A_{m-2k} = \frac{(m-k-1)\,(m-k-2) \ldots (m-2k+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ \ldots\ldots\ k}\, m 2^{m-2k-1}$$

Једначина пред овом даје за $k = 0$ $A_m = 2^{m-1}$, дакле су сада сачиниоци исти као и горе при извођењу обрасца 20), који дакле вреди за m парно или непарно.

На скоро исти начин добијамо из обрасца 15 № 91 и обр. 18 № 92 за парно или непарно m:

$$21.) \quad \sin mx = \sin x \left\{ (2 \cos x)^{m-1} - \frac{m-2}{1} (2 \cos x)^{m-3} + \right.$$

$$+ \frac{(m-3)\,(m-4)}{1.\quad 2.} (2 \cos x)^{m-5} -$$

$$\left. \frac{(m-4)\,(m-5)\,(m-6)}{1.\quad 2.\quad 3.} (2 \cos x)^{m-7} + \ldots \right\}$$

Обрасце 20) и 21) треба дотле продужити, док се сами од себе не прекину.

Редови за косинус и синус.

94. Обрасци 5) и 6) у № 90, кад се P_m и Q_m замене вредностима из 1) исте №-е јесу :

$$1.)\quad \frac{\cos mx}{\cos^m x} = 1 - \binom{m}{2} tg^2 x + \binom{m}{4} tg^4 x - \binom{m}{6} tg^6 x + \ldots.$$

и

$$2.)\quad \frac{\sin mx}{\cos^m x} = \binom{m}{1} tgx - \binom{m}{3} tg^3 x + \binom{m}{5} tg^5 x - \ldots.$$

Први образац, кад се у њему x замени са $\frac{x}{m}$ и под k разуме ма какав паран број $< \boldsymbol{m}$, даје се написати овако :

$$3.)\quad \frac{\cos x}{\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m} = 1 - \binom{m}{2}\left(tg\frac{x}{m}\right)^2 + \binom{m}{4}\left(tg\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots.$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}k-1}\binom{m}{k-2}\left(tg\frac{x}{m}\right)^{k-2} +$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}k}\binom{m}{k}\left(tg\frac{x}{m}\right)^k.\ S,$$

где је :

$$S = 1 - \frac{(m-k)\,(m-k-1}{(k+1)\,(k+2)}\left(tg\frac{x}{m}\right)^2 +$$

$$+ \frac{(m-k)\ldots(m-k-3)}{(k+1)\ldots(k+4)}\left(tg\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots.$$

Кад се стави :

$$4.)\quad \frac{m-k}{k+1} tg\frac{x}{m} = q_1,\ \frac{m-k-1}{k+2} tg\frac{x}{m} = q_2,$$

$$\frac{m-k-2}{k+3} tg\frac{x}{m} = q_3$$

и т. д. онда је краће :

$$5.)\quad S = 1 - q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3 q_4 - q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 + \ldots$$

Пошто m и k независе од x и пошто је $\boldsymbol{m} > k$, то кад је x дато, можемо k и $\boldsymbol{m}$ произвољно узети, али опет тако да је :

$$\boldsymbol{m} > k > x \quad \text{и} \quad \boldsymbol{m}tg\frac{x}{\boldsymbol{m}} < k$$

Последњи захтев може се свагда испунити, јер пошто је, као што ћемо одмах видети, $lim\ \boldsymbol{m}tg\frac{x}{m} = x$ за $m = \infty$ и $x < k$, то ће за цело почев од једне довољно велике вредности m-а па на даље $mtg\frac{x}{m}$ постати и остати мање од k.

Да је међу тим $lim\ mtg\frac{x}{m} = x$ за $m = \infty$ увиђа се из овога. Очевидно је

$$mtg\frac{x}{m} = x\frac{tg\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} = x\frac{tg\,\alpha}{\alpha} \text{ где } \alpha = \frac{x}{m}$$

Кад m расте бесконачно, α тежи нули, дакле је :

$$lim\, mtg\, \frac{x}{m} = x.\, lim\, \frac{tg\, \alpha}{\alpha} = x$$

После свега овога, што смо горе утврдили, имамо:

$$\frac{m-k}{k+1}\, tg\, \frac{x}{m} = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \frac{mtg\, \frac{x}{m}}{k+1} <$$

$$< \left(1 - \frac{k}{m}\right) \frac{k}{k+1} < 1$$

то ће рећи: $q_1 < 1$.

На исти је начин

$$\frac{m-k-1}{k+2}\, tg\, \frac{x}{m} =$$

$$= \left(1 - \frac{k+1}{m}\right) \frac{mtg\, \frac{x}{m}}{k+2} < \left(1 - \frac{k+1}{m}\right) \frac{k}{k+2} < 1$$

т. ј. $q_2 < 1$.

На сличан начин доказује се, да су и q_3, q_4, q_5, и т. д. мањи од 1. Дакле је с тога и

6.) $1 > q_1 q_2 > q_1 q_2 q_3 q_4 > q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 > \dots$

На основу № 66 збир S реда под 5) јесте < 1 а $> 1 - q_1 q_2$, дакле је $S < +1$ а > 0.

Сад ћемо тек да се вратимо на једначину 1), коју ћемо сада овако написати:

$$7.)\quad \frac{cos\, x}{\left(cos\, \frac{x}{m}\right)^m} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{m}}{1.\ 2.} \left(mtg\, \frac{x}{m}\right)^2 +$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.} \left(mtg\, \frac{x}{m}\right)^4 - - \dots$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}k-1} \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k-3}{m}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \dots\dots\ (k-2)} \left(mtg\, \frac{x}{m}\right)^{k-2}$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}k} \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \dots\dots\ k} \left(mtg\, \frac{x}{m}\right)^k .\ S$$

Пошто је за $\frac{x}{m} = \alpha$:

$$\left(cos\, \frac{x}{m}\right)^m = (cos\, \alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = (1 - sin^2\alpha)^{\frac{x}{2\alpha}} =$$

$$= \left\{(1 - sin^2\alpha)^{\frac{1}{stn^2\alpha}}\right\}^{\frac{sin\alpha}{\alpha} \cdot\, sin\alpha \cdot \frac{1}{2}\, x}$$

и пошто је даље по обр. 13 у № 26 кад тамо ставимо $x = 1$ и $\beta = sin^2\alpha$

$$lim \left\{(1 - sin^2\alpha)^{\frac{1}{sin^2\alpha}}\right\} = e^{-1}$$

и даље $lim\, \frac{sin\, \alpha}{\alpha} = 1$, то је онда:

$$lim \left(cos \frac{x}{m} \right)^{m} = 1 \text{ за } m = \infty.$$

Према томе, кад у једначини 7) пустимо, да m расти бесконачно остављајући међутим k на миру, разломци $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}, \ldots \frac{k-1}{m}$ тежиће нули, а као што смо мало час видели, $mtg\frac{x}{m}$ тежиће граници x и $\left(cos\frac{x}{m}\right)^{m}$ граници 1, дакле ће се једначина 7) претворити у:

$$\text{S.)} \quad cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}k-1} \frac{x^{k-2}}{(k-2)\,!} +$$

$$+ (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{Sx^k}{k!}$$

На сасвим сличан начин може се из обрасца 2) извести образац за $sin\, x$. Ако т. ј. ставимо тамо $\frac{x}{m}$ место x, и ако узмемо, да је k непаран број и $< m$, то је:

$$9.) \quad \frac{sin\, x}{\left(cos\frac{x}{m}\right)^{m}} = \binom{m}{1} tg\frac{x}{m} - \binom{m}{3}\left(tg\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(k-3)} \binom{m}{k-2} \left(tg\frac{x}{m}\right)^{k-2} +$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \binom{m}{k} \left(tg\frac{x}{m}\right)^{k} .\ S.$$

$$S = 1 - \frac{(m-k)\,(m-k-1)}{(k+1)\,(k+2)} \left(tg\frac{x}{m}\right)^2 +$$

$$+ \frac{(m-k)\ldots(m-k-3)}{(k+1)\ldots(k+4)} \left(tg\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots.$$

За S вреди и овде све горе речено; његова је вредност положна и < 1, ако је $k > x$ и m тако велико, да је:

$$m > k > x \text{ и } mtg\frac{x}{m} < k.$$

Једначина 9) може се овако написати:

$$\frac{sin\, x}{\left(cos\frac{x}{m}\right)^{m}} = mtg\frac{x}{m} - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.} \left(mtg\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$+(-1)^{\frac{1}{2}(k-3)} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-3}{m}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ldots (k-2)} \left(mtg\frac{x}{m}\right)^{k-2} +$$

$$+(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ldots\ k} \left(mtg\frac{x}{m}\right)^{k} .\ S$$

и одавде, кад узмемо, да m расти бесконачно а да се k не мења:

$$10.) \qquad sin\, x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(k-3)} \frac{x^{k-2}}{(k-2)\,!} + (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{Sx^k}{k!}$$

Ако сад у једначинама 8.) и 10.) пустимо, да k расти бесконачно, онда добијамо десно због:

$$lim \frac{x^k}{k!} = 0.$$

два за сваку коначну вредност x-а збирљива бесконачна реда:

$$11.) \qquad cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\text{и} \quad 12.) \qquad sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdot$$

Представљај синуса и косинуса у облику производа.

95. Пре него што приступимо самоме послу, треба нам најпре доказати, да се свака цела и рационална функција x-а m-ног степена

$$1.) \; f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m$$

може представити као производ:

$$2.) \quad A_0 \, (x - x_1)\,(x - x_2)\,(x -- x_3) \, \ldots\ldots\ldots (x - x_m)$$

ако су x_1, x_2, x_3, ... x_m m вредности за x, које поништавају $f(x)$. Јер пошто x_1 поништава $f(x)$, мора вредити ова једначина:

$$3.) \; 0 = A_0 \, x_1^{\,m} + A_1 \, x_1^{\,m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} \, x + A_m$$

Одузимањем једначине 3) од једначине 1) излази:

$$4.) \quad f(x) = A_0 \, (x^m - x_1^{\,m}) + A_1 \, (x^{m-1} - x_1^{\,m-1}) + \ldots$$
$$+ A_{m-1} \, (x - x_1).$$

Но из алгебре знамо, да кад је n цео и положан број, да је онда разлика $(x^n - x_1^{\,n})$ дељива без остатка са $x - x_1$; ако означимо количник са $f_1(x)$, биће:

$$f(x) = (x - x_1) \, f_1(x).$$

На исти начин доказује се, да је $f(x)$ дељиво са $x - x_2$, са $x - x_3$, ... са $x - x_m$ без остатка. Дакле се $f(x)$ због овога може представити овако:

$$5.) \quad f(x) = (x - x_1) \, x - x_2) \, , \ldots\ldots (x - x_m) \, X_m.$$

Овде X_m мора бити од x независна количина. Јер кад у 5) десно извршимо множење првих m бинома, добијамо већ као резултат целу и рационалну функцију m-ног степена, као што је и лева страна. Да X_m мора бити баш $= A_0$, увиђа се, кад се у 5) означена множења сврше и по правилу неодређених сачинилаца даље поступи.

А сад приступимо правоме послу.

96. Обрасци 13) у № 91 и 18), 15) и 17) у № 92, од којих прва два вреде за парно а друга два за непарно m, могу се написати и овако:

За парно m:

$$1.) \; cos\, mx = 1 - \frac{m^2}{1.\,2} sin^2 x + \frac{m^2\,(m^2 - 2^2)}{1.\;2.\;3.\;4.} sin^4 x - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m^2\,(m^2 - 2^2) \ldots\ldots [m^2 - (m-2)^2]}{1.\quad 2.\quad 3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; m.} sin^m x$$

$$2.)\quad \frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = m - \frac{m\,(m^2-2^2)}{1.\ 2.\ \ 3}\sin^2 x + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{m\,(m^2-2^2)\dots[m^2-(m-2)^2]}{1.\ 2\ \ 3\ \dots\ (m-1)}\sin^{m-2} x.$$

За непарно m:

$$3.)\quad \frac{\cos mx}{\cos x} = 1 - \frac{m^2-1^2}{1.\ 2}\sin^2 x + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots[m^2-(m-2)^2]}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \dots\ (m-1)}\sin^{m-1} x$$

$$4.)\quad \frac{\sin mx}{\sin x} = m - \frac{m\,(m^2-1^2)}{1.\ \ 2.\ 3}\sin^2 x + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m\,(m^2-1^2)\,(m^2-3^2)\dots[m^2-(m-2)^2]}{1.\ \ 2.\ \ \ 3\ \dots\dots\ m}\sin^{m-1} x$$

Леве стране ових једначина, кад у њима ставимо $\sin x = z$, постају целе и рационалне функције z-а, и према горе казаноме дају се представити као производи облика 2) у № 95. Узмимо најпре једначину 1). Ако у њој ставимо за време $\sin x = z$ и узмемо да су z_1, z_2, z_3, … z_m, m вредности z-а, за које је десна страна једначине 1) равна нули, онда је:

$$5.)\quad \cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}}\, C\,(z-z_1)\,(z-z_2)\dots(z-z_m).$$

Овде дакле z значи $\sin x$, а z_1, z_2, z_3, … z_m синусе $(m-1)$ лукова или синусе $(m-1)$ вредности x-а, које поништавају десну страну једначине 1). Краткоће ради стављено је овде:

$$C = \frac{m^2\,(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)\dots[m^2-(m-2)^2]}{1.\ \ \ 2.\ \ \ 3.\ \dots\dots\ (m-1).\ m.}$$

На начин у № 93 показани дознаје се у осталом, да је ова вредност од $C = 2^{m-1}$. Сад нам ваља још изнаћи z_1, z_2, z_3, … z_m, то ће рећи синусе m лукова, који поништавају десну страну једначине 1), или што је свеједно треба нам изнаћи саме те луке, дакле оне вредности x-а, за које је десна страна једначине 1) $= 0$. Пошто за те вредности x-а мора и лева страна једначине 1) т. ј. $\cos mx$ бити раван нули, то се те вредности добијају решењем једначине $\cos mx = 0$.

Разрешења ове једначине јесу:

$$mx = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \dots\dots\ \frac{(m-1)\,\pi}{2},$$

$$= -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2},\ \dots\ -\frac{(m-1)\pi}{2}$$

Из њих добијамо тражене вредности x-а:

$$x = \frac{\pi}{2m},\ \frac{3\pi}{2m},\ \frac{5\pi}{2m},\ \dots\ \frac{(m-1)\,\pi}{2m},$$

$$= -\frac{\pi}{2m},\ -\frac{3\pi}{2m},\ -\frac{5\pi}{2m},\ \dots\ -\frac{(m-1)\,\pi}{2m}$$

Синуси ових m лукова јесу они, које смо горе означили са z_1, z_2, z_3, …. z_m. Сад кад у 5) заменимо z опет са $\sin x$ а z_1, z_2, z_3, … z_m са њиним вредностима добијамо:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \times$$

$$\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x - \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)$$

$$\left(\sin x + \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x + \sin\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x + \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)$$

Ако у овој једначини помножимо два и два бинома, који се само знаком другог члана разликују, и ако затим сваког од $\frac{m}{2}$ добивених квадратних чинилаца помножимо с једном од оних $\frac{m}{2}$ одречних јединица, што су у $(-1)^{\frac{m}{2}}$ наћићемо следећи образац, који вреди за парно m:

$$6.)\ \cos mx = 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \sin^2 x\right).$$

На исти начин из једначине 2) добијамо:

$$7.)\ \frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} C(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots(z-z_{m-2}).$$

где је опет $z = \sin x$, а z_1, z_2, z_3, ...z_{m-2} синуси оних $(m-2)$ лукова или вредности x-а, које поништавају обе стране једначине 2). Ти луци морају се дакле добити разрешењем једначине $\sin mx = 0$, и јесу:

$$x = \frac{2\pi}{2m},\ \frac{4\pi}{2m},\ \frac{6\pi}{2m},\ldots\frac{(m-2)\pi}{2m},$$

$$= -\frac{2\pi}{2m},\ -\frac{4\pi}{2m},\ -\frac{6\pi}{2m}\ \ldots\ldots -\frac{(m-2)\pi}{2m}$$

Даље је:

$$C = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ldots\ (m-1)} = 2^{m-1}.$$

Ако сад у 7) заменимо z са $\sin x$ а z_1, z_2, $z_3 \ldots z_{m-2}$ са синусима ових $(m-2)$ нађених лукова као и C са 2^{m-1}, ако затим два и два бинома, који се буду разликовали само знаком другога члана, помножимо, и ако најзад сваки од тако добивених $\frac{m-2}{2}$ квадратних чинилаца помножимо са једном од оних одречних јединица, што су у $(-1)^{\frac{m-2}{2}}$, добићемо овај образац, који важи за парно m:

$$8.)\ \sin mx = 2^{m-1}\sin x\cos x\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\times$$

$$\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right).$$

На са свим сличан начин лако добијамо из једначина 3) и 4) два обрасца, који важе за непарно m:

$$9.)\ \cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

$$\ldots\left(\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

$$10.)\quad \sin mx = 2^{m-1} \sin x \left(\sin^2 \frac{2\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2 \frac{4\pi}{2m} - \sin^2 x\right) \dots \left(\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m} - \sin^2 x\right).$$

Из једначина 6), 8), 9) и 10), кад најпре 8) поделимо са $\sin x \cos x$, 9) са $\cos x$ и 10.) са $\sin x$, следује за $x = 0$:

$$11.)\quad 1 = 2^{m-1} \sin^2 \frac{\pi}{2m} \sin^2 \frac{3\pi}{2m} \sin^2 \frac{5\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

$$12.)\quad m = 2^{m-1} \sin^2 \frac{2\pi}{2m} \sin^2 \frac{4\pi}{2m} \sin^2 \frac{6\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m},$$

$$13.)\quad 1 = 2^{m-1} \sin^2 \frac{\pi}{2m} \sin^2 \frac{3\pi}{2m} \sin^2 \frac{5\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m},$$

$$14.)\quad m = 2^{m-1} \sin^2 \frac{2\pi}{2m} \sin^2 \frac{4\pi}{2m} \sin^2 \frac{6\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}.$$

Прве две од ових једначина, при чијем извођењу треба имати на уму, да је $\lim \cos mx = 1$, $\lim \frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = m$, $\lim \frac{\cos mx}{\cos x} = 1$, вреде за парно а последње две за непарно m.

Деобом једначина 6) и 11), 8) и 12), 9) и 13), и 10) и 14) добијамо:

$$15.)\quad \cos mx = \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

$$16.)\quad \sin mx = m \sin x \cos x \times \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

$$17.)\quad \cos mx = \cos x \times \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

$$18.)\quad \sin mx = m \sin x \times \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

Обрасци 15) и 16) вреде за парно а остала два за непарно m.

97. Кад једначину 21) №-е 93 поделимо са $\sin x$ и затим метемо десно за време $\cos x = z$, десна страна биће цела и рационална функција z-а $(m-1)$-ог степена. Ако сад претпоставимо да су $z_1, z_2, z_3, \dots z_{m-1}$, $(m-1)$ вредности z-а, за које је лева страна једначине 21) № 93 равна нули, онда је

$$1.)\quad \frac{\sin mx}{\sin x} = 2^{m-1} (z - z_1)(z - z_2)\ z - z_3) \dots (z - z_{m-1}).$$

Овде z значи $\cos x$ а $z_1, z_2, z_3, \dots z_{m-1}$ косинусе $(m-1)$ вредности x-а за које је десна страна једначине 21) № 93 равна нули. За те вредности x-а мора бити равна нули и лева страна и по томе и $sin\, mx$. Дакле нам те вредности даје једначина $sin\, mx = 0$ и оне су:

$$2.)\qquad x = \frac{\pi}{m},\ \frac{2m}{m},\ \frac{3\pi}{m},\ldots \frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Косинуси ових лукова означени су горе са z_1, z_2, z_3, ... z_{m-1}. Ако дакле у 1) заменимо z са $cos x$ а z_1, z_2, z_3 ... z_{m-1} са њиховим вредностима т. ј. косинусима лукова под 2), добићемо:

$$\frac{sin\, mx}{sin\, x} = 2^{m-1}\left(cos x - cos\frac{\pi}{m}\right)\left(cos x - cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots$$
$$\left(cos x - cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right).$$

Али ако узмемо на ум, да су косинуси лукова, којих је збир $= \pi$, једнаки а противно означени, добијамо даље:

$$\frac{sin\, mx}{sin\, x} = 2^{m-1}\left(cos x + cos\frac{\pi}{m}\right)\left(cos x + cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(cos x + cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

Множењем последњих двеју једначина добијамо једначину:

$$\left(\frac{sin\, mx}{sin\, x}\right)^2 = 2^{2m-2}\left(cos^2 x - cos^2\frac{\pi}{m}\right)\left(cos^2 x - cos^2\frac{2\pi}{m}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(cos^2 x - cos^2\frac{(m-1)\pi}{m}\right),$$

и из ове, с обзиром на образац:

$$cos^2 a - cos^2 b = sin\,(a + b)\, sin\,(b - a),$$

једначину:

$$\left(\frac{sin\, mx}{sin\, x}\right)^2 =$$
$$= 2^{m-1}\, sin\left(\frac{\pi}{m} + x\right) sin\left(\frac{2\pi}{m} + x\right) sin\left(\frac{3\pi}{m} + x\right)\ldots$$
$$\ldots . sin\left[\frac{(m-1)\pi}{m} + x\right] \times$$
$$2^{m-1}\, sin\left(\frac{\pi}{m} - x\right) sin\left(\frac{2\pi}{m} - x\right) sin\left(\frac{3\pi}{m} - x\right)\ldots$$
$$\ldots . sin\left[\frac{(m-1)\pi}{m} - x\right].$$

Пошто су синуси двају лукова, којих је збир раван $= \pi$, једнаки, то су чиниоци у првој и другој врсти једнаки са онима у трећој и четвртој, кад се ови читају у обрнутом реду. Дакле, кад лево и десно извучемо корен квадратни, добијамо:

$$3.)\quad \frac{sin\, mx}{sin\, x} = \pm\, 2^{m-1} sin\left(\frac{\pi}{m} + x\right) sin\left(\frac{2\pi}{m} + x\right)\ldots$$
$$\ldots . sin\left[\frac{(m-1)\pi}{m} + x\right].$$

Што се тиче тога, који ћемо од два знака узети, ставимо у 3) $x = 0$, па ћемо добити:

$$4.)\quad m = \pm\, 2^{m-1} sin\frac{\pi}{m}\, sin\frac{2\pi}{m}\ldots . sin\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Пошто је m положно, то и десна страна мора бити положна. Пошто су даље сви луци десно > 0 а $< \pi$, то су њихови синуси положни, дакле и производ њихов је положан, и с тога ваља десно у 4) па дакле и у 3) узети знак $+$.

Ако се дакле у једначини 3) узме горњи знак и она помножи са $sin\, x$, добићемо:

$$5.)\quad sin\, mx = 2^{m-1} sinx\, sin\left(\frac{\pi}{m} + x\right) sin\left(\frac{2\pi}{m} + x\right) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots sin\left[\frac{(m-1)\pi}{m} + x\right].$$

Бесконачни производи за синус и косинус.

98. Помоћу образаца нађених у № 96 у стању смо сад представити $sin\, x$ и $cos\, x$ у облику бесконачних производа. Узмимо н. пр. образац 18) №-е 96, где је m ма какав непаран број и ставимо у њему, краткоће ради, $\frac{1}{2}(m-1) = n$ а x заменимо са $\frac{x}{m}$, па ћемо добити:

$$sin\, x = m\, sin\frac{x}{m}\left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{\pi}{m}}\right]^2\right\}\left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{2\pi}{m}}\right]^2\right\}\cdots\cdots$$

$$\left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{n\pi}{m}}\right]^2\right\}$$

Узимајући да је k ма какав цео и положан број $< n$, разложимо десни производ овако:

$$1.)\quad sin\, x = m\, sin\frac{x}{m}\left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{\pi}{m}}\right]^2\right\}\cdots\cdots$$

$$\left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{k\pi}{m}}\right]^2\right\}. P$$

$$2.)\quad P = \left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{(k+1)\pi}{m}}\right]^2\right\}\cdots\cdots\left\{1 - \left[\frac{sin\frac{x}{m}}{sin\frac{n\pi}{m}}\right]^2\right\},$$

Производ P претставићемо у краћем облику:

$$3.)\qquad P = (1-Q_1)(1-Q_2)\cdots\cdots(1-Q_{n-k}).$$

У имениоцима разломака означених са Q јављају се луци:

$$\frac{k+1}{m}\pi,\ \frac{k+2}{m}\pi, \ldots \frac{n}{m}\pi = \frac{n}{2n+1}\pi,$$

који су појединце $< \frac{1}{2}\pi$. У бројиоцима стоји свуда лук $\frac{x}{m}$, који ће бити мањи од свију оних лукова под условом, да је:

4.) $$n = \frac{1}{2}(m-1) > k > \frac{x}{\pi}$$

јер из ове неједначине сљедује :

$$\frac{n}{m}\pi = \frac{m-1}{2m}\pi > \frac{k}{m}\pi > \frac{x}{m}$$

Ако услов у 4) стоји онда, пошто у првој четврти већи лук има и већи синус,

$$\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{m}},\ \frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{(k+2)\pi}{m}}, \ldots\ldots \frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{n\pi}{m}}$$

јесу мањи од 1 па дакле и поједина Q. То исто дакле мора бити и са разликама $1-Q_1$, $1-Q_2$, ... дакле је и

5.) $$P = (1-Q_1)(1-Q_2)\ldots\ldots(1-Q_{n-k}) < 1,$$

Ако даље узмемо на ум, да је:

$$(1-Q_1)(1-Q_2)(1-Q_3)\ldots > 1-(Q_1+Q_2+Q_3+\ldots)$$

онда је :

6.) $$P > 1-(Q_1+Q_2+Q_3+\ldots\ldots)$$

која се неједначина може још простије претставити. Из тригонометрије т. ј. знамо, да кад лук α расте почев од 0 па до $\frac{\pi}{2}$, вредност количника $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$, која је за $\alpha=0$ била равна нули, мора расти, јер лук расте много брже

него ли синус. Вредност тога количника мора дакле бити мања од $\frac{\pi}{2}$ дакле је $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$, јер је та вредност $=\frac{\pi}{2}$ тек онда, кад је α при свом рашћењу постало $=\frac{\pi}{2}$. Ако дакле у неједначини

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{\pi}{2} \text{ или боље у } \frac{1}{\sin\alpha} < \frac{\pi}{2\alpha}$$

која вреди докле је $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$, ставимо $\alpha = \frac{h\pi}{m}$, добићемо :

$$\frac{1}{\sin^2\frac{h\pi}{m}} < \frac{m^2}{4h^2}.$$

Ако ову једначину помножимо са следећом

$$\sin^2\frac{x}{m} < \frac{x^2}{m}$$

добићемо :

$$\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{h\pi}{m}}\right)^2 < \frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{h^2}.$$

Израз десно јесте буди која са Q означена количина; кад дакле у овој неједначини ставимо редом $h = k+1$, $k+2$,... n и тако добивене неједначине саберемо, наћићемо:

7.) $$Q_1+Q_2+Q_3+\ldots+Q_{n-k}$$
$$<\frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+3)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right].$$

Пошто сад из неједначина:

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \frac{1}{(k+2)^2} < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \text{ и т. д}$$

следује:

$$\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k}$$

то је јасно, да ће сад много пре бити

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots\dots + Q_{n-1} < \frac{x^2}{4k}.$$

Ако обе стране одузмемо од 1, онда с обзиром на неједначину 6) имамо:

$$8.) \qquad P > 1 - \frac{x^2}{4k}.$$

Из 5) и 8) следује да је:

$$P = 1 - \frac{\varrho x^2}{4k},$$

где је ϱ положан број и < 1.

Сад пак замислимо, да у једначини 1) m расте бесконачно, док међутим k остаје непромењено. Ако узмемо на ум да се при том границе, између којих се налази P, не мењају и да је:

$$lim\left(m sin\frac{x}{m}\right) = x, \quad lim\ \frac{sin\dfrac{x}{m}}{sin\dfrac{h\pi}{m}} = \frac{x}{h\pi}$$

наћићемо, да се једначина 1) претвара у ову:

$$9.) \quad sin\, x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots$$

$$\dots\dots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varrho'^2 x^2}{4k}\right).$$

где је ϱ' положан број и < 1.

Исто тако могли бисмо из обрасца 15) №-ре 95) наћи образац и за $cos\, x$. Но он се краће може добити овако. Заменимо у 9) најпре k са $2k$ а затим x са $\frac{1}{2}x$ и помножимо затим једначину са 2, па ћемо добити:

$$sin\, x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots$$

$$\dots\dots\left(1 - \frac{x^2}{(2k)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varrho_1 x^2}{8k}\right).$$

$$2\, sin\, \frac{1}{2}x = x\left(1 - \frac{x^2}{(2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6^2\pi^2}\right) \dots\dots$$

$$\dots\dots\left(1 - \frac{x^2}{(2k)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varrho_2 x^2}{16\, k}\right),$$

где су ϱ_1 и ϱ_2 мањи од 1. Деобом ових једначина налазимо:

$$10.)\quad cos\frac{1}{2}x = cos\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)\frac{1-\frac{\varrho_1 x^2}{8k}}{1-\frac{\varrho_2 x^2}{16k}}$$

једначину, у којој ваља само заменити x са $2x$, те да би смо добили образац за $cos\,x$.

Ако једначину 9) поделимо са

$$1-\frac{\varrho' x^2}{4k}$$

и затим пустимо, да k бесконачно расте, лева страна постаје $= sin\,x$ а десна претвара се у бесконачан производ тако, да сад имамо:

$$11.\quad sin\,x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

Кад у једначини 10) заменимо x са $2x$, затим је помножимо са:

$$\frac{1-\frac{\varrho_2 x^2}{4k}}{1-\frac{\varrho_1{}^2 x^2}{2k}}$$

и пустимо да k бесконачно расте, добиће мо:

$$12.)\quad cos\,x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

Обрасци 11) и 12) вреде за свако могуће x. Помоћу њих могу се и све остале тригонометријске функције представити у облику бесконачних производа.

Ако у 11) и 12) ставимо $x = k\pi$ где је k буди какав број, добићемо обрасце:

$$13.)\quad sin\,k\pi = k\pi\left(1-\frac{k^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{3^2}\right)\cdots$$

$$14.)\quad cos\,k\pi = \left(1-\frac{4k^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{4k^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{4k^2}{5^2}\right)\cdots$$

Ако образац 13) напишемо овако:

$$sin\,k\pi = k\pi\left(1-\frac{k}{1}\right)\left(1+\frac{k}{1}\right)\left(1-\frac{k}{2}\right)\left(1+\frac{k}{2}\right).$$
$$\left(1-\frac{k}{3}\right)\left(1+\frac{k}{3}\right)\cdots$$

па онда ставимо $k = \frac{1}{2}$ налазимо:

$$1 = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{8}\cdots$$

или:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}\cdots$$

Редови за tgx, cotg x, sec x и cosec x.

99. У једначини 11) № 98 узмимо лево и десно логаритме, али да не би имали посла с логаритмима одречних чинилаца, ми ћемо претпоставити у 11) $\pi > x > 0$.

На тај начин добићемо једначину:

$$1.)\quad l\,sin\,x = lx + l\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) +$$

$$+\,l\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\dots\dots$$

$$\pi > x > 0.$$

Заменимо сад овде x са $x+\varepsilon$, где је ε тако мало, да и $x+\varepsilon$ лежи измеђ 0 и π, и од тако добивене једначине одузмимо једначину 1), па ће изаћи:

$$2.)\quad l\left(\frac{sin\,(x+\varepsilon)}{sin\,x}\right) = l\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right) + l\left(1-\frac{2x\varepsilon+\varepsilon^2}{\pi^2-x^2}\right) +$$

$$+\,l\left(1-\frac{2x\,\varepsilon+\varepsilon^2}{2^2\pi^2-x^2}\right) + l\left(1-\frac{2x\,\varepsilon+\varepsilon^2}{3^2\pi^2-x^2}\right) + \dots$$

За $\varepsilon < x$ биће:

$$l\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right) = \frac{\varepsilon}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^3 -- \dots$$

и одавде за $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\varepsilon}{x} > l\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right) > \frac{\varepsilon}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2,$$

дакле:

$$3.)\quad l\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right) = \frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2,$$

где је $+1 > \varrho > 0$.

Пошто је даље:

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots$$

то је;

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right) > z \quad \text{и}$$

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right) < z + \frac{1}{2}(z^2+z^3+z^4+\dots)$$

или

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right) < z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{1-z}.$$

Према томе можемо дакле ставити:

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right) = z + \frac{\varrho_n}{2}\cdot\frac{z^2}{1-z}$$

$$\text{или } l\,(1-z) = -z - \frac{\varrho_n}{2}\cdot\frac{z^2}{1-z},$$

где је $\varrho_n < +1$ и положно. За

$$z = \frac{2x\,\varepsilon+\varepsilon^2}{n^2\pi^2-x^2}$$

добијамо из последње једначине:

$$4.)\qquad l\left(1-\frac{2x\,\varepsilon+\varepsilon^2}{n^2\pi^2-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{2x\,\varepsilon+\varepsilon^2}{n^2\pi^2-x^2} - \frac{\varrho_n}{2}\cdot\frac{(2x\,\varepsilon+\varepsilon^2)^2}{[n^2\pi^2-x^2]\,[n^2\pi^2-(x+\varepsilon)^2]}$$

Помоћу образаца 3) и 4) можемо сада једначину 2) другачије представити. Ми ћемо у њој први члан десно заменити вредношћу из 3) а све остале чланове вредностима њиним, које се добијају, кад се у 4) буде ставило $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ На тај начин, добијамо из 2), кад још лево и десно са ε поделимо:

$$
5.)\qquad \frac{1}{\varepsilon}\, l\left(\frac{\sin(x+\varepsilon)}{\sin x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\varrho\varepsilon}{2x^2}
$$

$$
- \frac{2x+\varepsilon}{\pi^2 - x^2} - \frac{\varrho_1}{2} \cdot \frac{(2x+\varepsilon)^3\,\varepsilon}{[\pi^2 - x^2]\,[\pi^2 - (x+\varepsilon)^2]}
$$

$$
- \frac{2x+\varepsilon}{2^2\pi^2 - x^2} - \frac{\varrho_2}{2} \cdot \frac{(2x+\varepsilon)^2\,\varepsilon}{[2^2\pi^2 - x^2]\,[2^2\pi^2 - (x+\varepsilon)^2]}
$$

$$
- \frac{2x+\varepsilon}{3^2\pi^2 - x^2} - \frac{\varrho_3}{2} \cdot \frac{(2x+\varepsilon)^2\,\varepsilon}{[3^2\pi^2 - x^2]\,[3^2\pi^2 - (x+\varepsilon)^2]}
$$

$$
- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.
$$

У првом стубу јавља се као сачинилац од ε, збирљив ред:

$$
\frac{\varrho}{2x^2} + \frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{2^2\pi^2 - x^2} + \frac{1}{3^2\pi^2 - x^2} + \ldots\ldots
$$

Његов збир нека је P. У другом стубу јавља се као сачинилац израза $\frac{1}{2}(2x+\varepsilon)^2\,\varepsilon$ ред:

$$
\frac{\varrho_1}{[\pi^2 - x^2]\,[\pi^2 - (x+\varepsilon)^2]} + \frac{\varrho_2}{[2^2\pi^2 - x^2]\,[2^2\pi^2 - (x+\varepsilon)^2]} +
$$

$$
+ \frac{\varrho_3}{[3^2\pi^2 - x^2]\,[3^2\pi^2 - (x+\varepsilon)^2]} + \ldots.
$$

Овај је ред збирљив, јер је он збирљив и онда, кад се сва ϱ замене већом јединицом; збир његов нека је Q. Једначина 5) може се према овоме и овако написати:

$$
6.)\qquad \frac{1}{\varepsilon}\, l\left(\frac{\sin(x+\varepsilon)}{\sin x}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{2^2\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{3^2\pi^2 - x^2} -
$$

$$
\ldots\ldots - P\varepsilon - \frac{1}{2}\,Q\,(2x+\varepsilon)^2\,\varepsilon.
$$

Почем, кад се ε умаљава,

$$
\frac{\sin(x+\varepsilon)}{\sin x}
$$

тежи јединици, то се може ставити:

$$
7.)\qquad \frac{\sin(x+\varepsilon)}{\sin x} = 1 + \delta,
$$

и онда лева страна у (6 може се другачије представити:

$$
\frac{1}{\varepsilon}\, l\left(\frac{\sin(x+\varepsilon)}{\sin x}\right) = \frac{l(1+\delta)}{\varepsilon} = \frac{l(1+\delta)}{\delta}\,\frac{\delta}{\varepsilon}
$$

$$
= l\left\{(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right\} \frac{\sin(x+\varepsilon) - \sin x}{\varepsilon \sin x}
$$

$$
= l\left\{(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right\} \frac{2\cos\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\varepsilon \sin x}
$$

И тако ће сада једначина 6) изгледати овако:

$$l\left\{(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right\}\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\sin x}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{2^2\pi^2-x^2} - \frac{2x}{3^2\pi^2-x^2} - \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots - P\varepsilon - \frac{1}{2}Q\,(2x+\varepsilon)^2\,\varepsilon.$$

Сад кад пустимо да ε тежи нули, онда због 7) мора и δ тежити нули и последња једначина претвара се у:

$$8.)\quad \underline{\cot g\, x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{2^2\pi^2-x^2} - \frac{2x}{3^2\pi^2-x^2} - \cdots\cdots$$

Ова једначина, усљед претпоставке, коју смо у почетку морали учинити, вреди за $\pi > x > 0$. Но пошто је десни ред увек збирљив само не за $x = n\,\pi$, где је n ма какав цео и положан број, то је се надати, да ће и једначина 8) вредити за све вредности x-а осим оних, које даје образац $x = n\,\pi$. Зарад тога означимо са $f\,(x)$ збир деснога реда, па га разложимо овако:

$$f\,(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{\pi-x} - \frac{1}{\pi+x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi-x} - \frac{1}{2\pi+x}\right) - \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots - \left(\frac{1}{n\pi-x} - \frac{1}{n\pi+x}\right)$$

$$- 2x\left\{\frac{1}{(n+1)^2\,\pi^2\quad x^2} + \frac{1}{(n+2)^2\,\pi^2-x^2} + \cdots\cdots\right\}$$

За $\pi > x > 0$ по обрасцу 8) јесте $f(x) = \cot g x$. Али ако је $2\pi > x > \pi$, онда можемо ставити $x = \pi+z$, где је $\pi > z > 0$, и тада је:

$$f(\pi+z) = \frac{1}{\pi+z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi+z} - \frac{1}{\pi-z} + \frac{1}{3\pi+z} - \frac{1}{2\pi-z} +$$

$$\cdots\cdots - \frac{1}{(n-1)\,\pi-z} + \frac{1}{(n+1)\,\pi+z} -$$

$$- 2\,(\pi+z)\left\{\frac{1}{(n+1)^2\,\pi^2-(\pi+z)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+2)^2\,\pi^2-(\pi+z)^2} + \cdot\ \cdot\right\}$$

или мало другачије:

$$f\,(\pi+z) - \frac{1}{n\pi+z} - \frac{1}{(n+1)\,\pi+z} +$$

$$+ 2\,(\pi+z)\left\{\frac{1}{(n+1)^2\,\pi^2-(\pi+z^2)} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+2)^2\,\pi^2-(\pi+z)^2} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2-z^2} - \frac{2z}{2^2\,\pi^2-z^2} - \cdots - \frac{2z}{(n-1^2\,\pi^2-z^2}.$$

Кад n расте бесконачно, онда збир реда у загради лево од знака равности тежи нули и онда излази да је:

$$f\,(\pi+z) = f\,(z)$$

или пошто је $\pi > z > 0$

$$f\,(\pi+z) = \cot g\, z = \cot g\,(\pi+z).$$

Дакле једначина 8) вреди, кад је $2\pi > x > \pi$, или кад лук x порасте за π, дакле она вреди за све вредности x-а, које леже између 0 и π, π и 2π, 2π и 3π, и т. д. За одречне вредности x-а обе стране у 8) постају одречне и дају исте резултате, који се добијају и за једнаке положне вредности x-а. И тако образац 8) вреди у опште, само не за вредности, које даје образац $x = n\pi$, где је n ма какав цео број.

100. Полазећи од једначине, која из 12) № 98 постаје, кад се тамо x замени са $\frac{1}{2}x$, нашли бисмо радећи на сличан начин и ред за tgx. Међу тим ово је краћи и лакши пут. Кад у 8) заменимо x са $\frac{1}{2}x$, налазимо:

$$\frac{1}{2}\, cotg\, x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{2^2\,\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4^2\,\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{6^2\,\pi^2 - x^2} - \cdots$$

Ако од ове једначине одузмемо једначину 8), онда с обзиром на познати образац

$$\frac{1}{2}\, cotg\, \frac{1}{2}\, x - cotg\, x = \frac{1}{2}\, tg\, \frac{1}{2}\, x$$

добијамо:

$$9.)\quad tg\, \frac{1}{2}\, x = \frac{4x}{\pi^2 - x^2} + \frac{4x}{3^2\pi^2 - x^2} + \frac{4x}{5^2\pi^2 - x^2} + \cdots$$

или:

$$10.)\quad tgx = \frac{2x}{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)^2 - x^2} + \cdots$$

Из једначина 8) и 9) добијамо, узимајући на ум познати образац:

$$cosecx = cotg\, x + tg\, \frac{1}{2}\, x,$$

$$11.)\quad cosecx = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{2^2\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{3^2\pi^2 - x^2} + \cdots$$

Напишимо ову једначину овако:

$$cosecx = \frac{1}{x} + \left\{\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right\} + \left\{\frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x}\right\} - \cdots$$

па сад заменимо у њој x са $\frac{1}{2}\,\pi - x$, и сведимо два и два члана десно, па ће изаћи:

$$12.)\quad secx = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{\left(\frac{5}{2}\,\pi\right)^2 - x^2} - \cdots$$

Извођење нових образаца.

101. Образац 1) у № 99 може се написати овако:

$$l\left(\frac{sin\, x}{x}\right) = l\left(1 - \frac{x^2}{1^2\,\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{2^2\,\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{3^2\,\pi^2}\right) + \cdots$$

где, да би избегли логаритме одречних бројева, претпостављамо $\pi > x > -\pi$. Бројеви $\frac{x}{\pi}, \frac{x}{2\pi}, \frac{x}{3\pi}, \dots$ тада су < 1 и по томе се логаритми десно могу по обрасцу:

$$l\,(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$$

где је $1 > x > -1$, развити у редове. Кад то учинимо, добићемо:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = & -\frac{x^2}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{1^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{1^6\pi^6} - \dots \\ & -\frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{2^6\pi^6} - \dots \\ & -\frac{x^2}{3^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{3^6\pi^6} - \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Пошто је двојни ред десно збирљив, то нам је слободно његове чланове сабирати тако, да збирови узастопних вертикалних редова, идући с лева на десно буду чланови једног простог реда. Радећи тако добијамо:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = & -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)\frac{x^2}{\pi^2} \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right)\frac{x^4}{\pi^4} \\ & -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots\right)\frac{x^6}{\pi^6} \\ & - \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ако ставимо:

$$1.)\qquad S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \dots$$

који је ред збирљив за $m > 1$, онда горња једначина изгледа простије овако:

$$2.)\ l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{S_2}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{S_4}{\pi^4}x^4 - \frac{1}{3}\frac{S_6}{\pi^6}x^6 - \dots$$

Радећи на исти начин с једначином:

$$\begin{aligned} l\cos x = & \; l\left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right) + \\ & + l\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right) + \dots \end{aligned}$$

у којој је $+\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$, добијамо стављајући краткоће ради:

$$3.)\qquad T_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \dots$$

једначину:

$$4)\ l\cos x = \frac{-2^2T_2}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{2}\,\frac{2^4T_4}{\pi^4}x^4 - \frac{1}{3}\,\frac{2^6T_6}{\pi^6}x^6 - \dots$$

У осталом збирови T дају се изразити збировима S, јер из обрасца 1) сљедује:

$$\frac{1}{2^m}S_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \dots$$

Кад се ова једначина од горње 1) одузме, излази :

$$\frac{2^m-1}{2^m}S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\dots\dots = T_m.$$

Помоћу овог обрасца претвара се једначина 4) у :

$$5.)\quad l\cos x = -\frac{(2^2-1)S_2}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{2}\,\frac{(2^4-1)S_4}{\pi^4}x^4 - $$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{(2^6-1)S_6}{\pi^6}x^6 - \dots\dots$$

која као и 4) вреди за $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}\cdot$ Једначина 5) могла би се извести и из 2) помоћу обрасца :

$$l\cos x = l\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) - l\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Помоћу образаца 2) и 5) израчунавају се логаритми тригонометријских функција непосредно из самога лука.

102. Да би изнашли редове уређене по растућим степенима x-а за $cotg\,x$, $tg\,x$, $cosec\,x$ и $sec\,x$, поћићемо од обрасца 8) № 99, који ћемо овако написати :

$$cotg\,x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{(1.\pi)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{1.\pi}\right)^2} - $$

$$\frac{2x}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} - \dots\dots$$

Ако узмемо, да је $\pi > x > -\pi$, онда су $\frac{x}{\pi}$, $\frac{x}{2\pi}$, $\frac{x}{3\pi}$, ... мањи од 1, и с тога се поједини чланови реда могу развити по обрасцу :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots$$

који вреди за $1 > x > -1$. Кад се то учини, добија се један збирљив двојни ред, који се сме по степенима x-а, уредити. На тај начин добија се онда :

$$6.)\quad cotg\,x = \frac{1}{x} - \frac{2S_2}{\pi^2}x - \frac{2S_4}{\pi^4}x^3 - \frac{2S_6}{\pi^6}x^5 - \dots\dots$$

где треба да је $\pi > x > -\pi$

На сличан начин могли бисмо радити и са једначином 10) № 100, где би само требало узети

$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi.$$

Но брже се долази до резултата помоћу обрасца :

$$cotg\,x - 2cotg\,2x = tgx,$$

и тај је резултат :

$$7.)\quad tgx = \frac{2\,(2^2-1)\,S_2}{\pi^2}x + \frac{2\,(2^4-1)\,S_4}{\pi^4}x^3 + $$

$$+\frac{2\,(2^6-1)\,S_6}{\pi^6}x^5 + \dots\dots$$

где треба да је $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$. Ако у 7) заменимо x са $\frac{1}{2}x$ и нову једначину саберемо са 6), добићемо:

$$8.)\quad cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{(2^1-1)\,S_2}{\pi^2}\,x + \frac{(2^3-1)\,S_4}{2^2\pi^4}\,x^3 + \frac{(2^5-1)\,S_6}{2^4\,\pi^6}\,x^5 + \ldots .$$

где је сад $\pi > x > -\pi$.

Ред за $secx$ постаје из једначине 12) № 100. Ту једначину написаћемо овако:

$$secx = \frac{4}{1.\pi}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2x}{1.\pi}\right)^2} - \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2x}{3.\pi}\right)^2} + \ldots ..$$

Ако претпоставимо $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$, онда можемо поједине разломке десно развити у ред по степенима x-а, после чега ћемо добити један збирљив двојни ред, који ће се смети уредити по степенима од x. Ако то учинимо и ставимо краткоће ради:

$$9)\quad U_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \ldots .$$

наћићемо:

$$10.)\quad secx = \frac{2^2\,U_1}{\pi} + \frac{2^4\,U_3}{\pi^3}\,x^2 + \frac{2^6\,U_5}{\pi^5}\,x^4 + \ldots .$$

где треба да је $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$.

103. Обрасци 6), 7), 8) и 10) могу се оверити помоћу познатих образаца:

$$cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x},\quad tg\,x = \frac{sinx}{cos\,x},\ \text{и т. д.}$$

Тако н. пр. ако помножимо једначину 7) са

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots .$$

то резултат мора бити:

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots .$$

и у томе налазимо начина, да можемо сачиниоце реда 7) на други начин претставити. Зарад тога напишимо једначину 7.) краће овако:

$$11.)\quad tg\,x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots .$$

па је онда помножимо са једначином 7) изаћиће:

$$sin\,x = a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1}{2\,!}\right)x^3 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2\,!} + \frac{a_1}{4\,!}\right)x^5 + \ldots$$

Упоређујући ову једначину са горњом за $sin\,x$, добијамо по правилу неодређених сачинилаца:

$$a_1 = 1$$

$$a_3 - \frac{a_1}{2\,!} = -\frac{1}{3\,!}$$

$$a_5 - \frac{a_3}{2\,!} + \frac{a_1}{4\,!} = \frac{1}{5\,!}$$

. . . .

и у опште за непарно n:

$$12.)\qquad a_n - \frac{a_{n-2}}{2!} + \frac{a_{n-4}}{4!} - \frac{a_{n-6}}{6!} + \dots\dots$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{1}{n!}.$$

Из ових једначина изводимо редом:

$$a_1 = 1,\ a_3 = \frac{2}{3!},\ a_5 = \frac{16}{5!}, \dots\dots$$

Ако бројиоце у овим вредностима означимо са t тако да је:

$$a_n = \frac{t_n}{n!}.$$

и онда у 11) сачиниоце a заменимо њиховим вредностима, наћиђемо:

$$13.)\qquad tg\, x = t_1\, x + \frac{t_3}{3!} x^3 + \frac{t_5}{5!} x^5 + \dots\dots$$

где је $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$. Кад образац 12) помножимо са $n! = 1.\ 2.\ 3.\ \dots\ n$, добијамо:

$$t_n - \binom{n}{2} t_{n-2} + \binom{n}{4} t_{n-4} - \binom{n}{6} t_{n-6} + \dots\dots = (-2)^{\frac{n-1}{2}}$$

или пошто је n непарно:

$$14.)\ t_n - \binom{n}{2} t_{n-2} + \binom{n}{4} t_{n-4} - \dots = sin\, \frac{1}{2} n\pi,$$

одакле за $n = 1,\ 3,\ 5,\ 7, \dots$ и т. д. добијамо већ познате вредности: $t_1 = 1,\ t_3 = 2,\ t_5 = 16,$ и т. д., које вредности, лако је увидети, јесу цели и положни бројеви. Упоређајем једначина 7) и 13) добијамо једначине:

$$\frac{2(2^2-1)S_2}{\pi^2} = t_1,\ \frac{2(2^4-1)S_4}{\pi^4} = \frac{t_3}{3!}, \dots$$

из којих се могу израчунати S_2, S_4, и т д. Тако је:

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6},\ S_4 = \frac{\pi^4}{90},\ S_6 = \frac{\pi^6}{945}, \dots\dots$$

и у опште за свако цело и положно k:

$$15.)\ S_{2k} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \dots = \frac{t_{2k-1}\,\pi^{2k}}{2(2^{2k}-1).(2k-1)!}$$

Исто тако ако једначину 10) напишемо краће овако:

$$16.)\qquad sec\, x = 1 + \frac{t_2}{2!} x^2 + \frac{t_4}{4!} x^4 + \dots\dots$$

па је онда помножимо са

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots$$

добиђемо:

$$1 = 1 + \left(\frac{t_2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{t_4}{4!} - \frac{t_2}{2!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \dots\dots$$

где на основу правила о неодређеним сачиниоцима сачиниоци од x^2, x^4, x^6, ... морају бити $= 0$. У опште за свако парно n налазимо да је:

$$\frac{t_n}{n!} - \frac{t_{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{t_{n-4}}{(n-4)!} \cdot \frac{1}{4!} - \ldots = 0$$

или ако помножимо са $n!$ и узмемо на ум, да је

$$\sin \frac{1}{2} n\pi = 0:$$

$$17.) \quad t_n - \binom{n}{2} t_{n-2} + \binom{n}{4} t_{n-4} - \ldots\ldots = \sin \frac{1}{2} n\pi.$$

Као што се види, сачиниоци реда за $\sec x$ подлеже истоветном закону као и они за $tg\, x$. Упоређењем једначина 10) и 16) добијамо даље:

$$U_1 = \frac{\pi}{2^2},\ U_3 = -\frac{t_2 \pi^3}{2^4.2!} = \frac{\pi^3}{32},\ U_5 = \frac{t_4 \pi^5}{2^6.4!} = \frac{5\pi^5}{1536}, \ldots$$

и у опште:

$$18.) \quad U_{2k+1} = 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \ldots = \frac{t_{2k}\, \pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}.$$

Због многоструčних примена збирова $S_2, S_4, S_6, \ldots\ldots,$ количници:

$$\frac{S_2}{2\pi^2},\ \frac{S_4}{2^3\pi^4},\ \frac{S_6}{2^5.\pi^6}, \ldots$$

означавају се овако:

$$19.) \qquad \frac{S_{2k}}{2^{2k-1}.\pi^{2k}} = \frac{B_{2k-1}}{(2k)!}$$

и вредности за $B_1,\ B_3,\ B_5, \ldots\ldots$ које из овог обрасца следују, зову се Bernouilli-јеви бројеви. Они се дају из сачинилаца t израчунати; јер кад у 19) заменимо S_{2k} његовом вредношћу из 15) добијамо:

$$B_{2k-1} = \frac{k t_{2k-1}}{2^{2k-1}(2^{2k}-1)},$$

и одавде за $k = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots$

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30} \text{ и т. д.}$$

Обрасци за $cotg\, x$, $tg\, x$ и $\sec x$, кад у исте увучемо Bernouilli-јеве бројеве изгледају овако:

$$20.) \quad cotg\, x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{2!} x - \frac{2^4 B_3}{4!} x^3 - \frac{2^6 B_5}{5!} x^5 - \ldots\ldots$$

где треба да је $\pi > x > -\pi$.

$$21.) \quad tg\, x = \frac{2^2(2^2-1)\, B_1}{2!} x + \frac{2^4(2^4-1)\, B_3}{4!} x^3 + \\ + \frac{2^6(2^6-1)\, B_5}{6!} x^5 + \ldots\ldots$$

где је $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$.

$$22.) \quad cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{2\,(2^1-1)\, B_1}{2!} x + \frac{2\,(2^3-1)\, B_3}{4!} x^3 + \\ + \frac{2\,(2^5-1)\, B_5}{6!} x^5 + \ldots\ldots$$

где је $\pi > x > -\pi$.

Ред за arc sin x.

104. При извођењу образаца за *arc sin x* требаће нам да знамо границе за неколико израза и с тога ћемо се најпре са истраживањем истих морати бавити.

1°. Из једначине:

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}=a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m,$$

која вреди за свако цело и положно m, налазимо за $a>b>0$:

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}<(m+1)\,a^m \quad \text{и} \quad \frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}>(m+1)\,b^m.$$

Из ових неједначина, кад у првој ставимо $a=x$ и $b=x-1$, а у другој $b=x$ и $a=x+1$, добијамо:

$$x^m>\frac{x^{m+1}-(x-1)^{m+1}}{m+1} \quad \text{и} \quad x^m<\frac{(x+1)^{m+1}-x^{m+1}}{m+1},$$

или:

$$\frac{(x+1)^{m+1}-x^{m+1}}{m+1}>x^m>\frac{x^{m+1}-(x-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Кад овде редом ставимо $x=1,\ 2,\ 3,\ldots(n-1)$, и добивене неједначине саберемо, наћићемо:

$$\frac{n^{m+1}-1}{m+1}>1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m>\frac{(n-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Одавде видимо, да је тим пре:

$$\frac{1}{m+1}>\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}>\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}}{m+1}$$

Из ове неједначине следује:

$$1.)\quad lim\left\{\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}\right\}=\frac{1}{m+1}$$

кад n расте бесконачно а m остаје стално.

2°. Ако у образац:

$$\frac{sin\,(\alpha+\beta)-sin\,\alpha}{\alpha}=cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\frac{sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta},$$

који је лако доказати, заменимо десно први чинилац са већом количином $cos\,\alpha$, а други са већом јединицом, добићемо:

$$\frac{sin\,(\alpha+\beta)-sin\,\alpha}{\beta}<cos\,\alpha \quad \text{или } 2)\quad \frac{sin\,(\alpha+\beta)-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}<\beta.$$

Ако узмемо да су луци α и $\alpha+\beta$ мањи од $\frac{\pi}{2}$ па ставимо:

$$sin\,\alpha=x \quad \text{и} \quad sin\,(\alpha+\beta)=x+\delta$$

онда је:

$$\alpha=arc\,sin\,x,\ \alpha+\beta=arc\,sin\,(x+\delta),$$

дакле:

$$\beta = arc\sin(x+\delta) - arc\sin x, \text{ и } \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}.$$

Према овоме неједначина 2) сада изгледа овако:

3.) $$\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}} < arc\sin(x+\delta) - arc\sin x.$$

Узмимо сада образац:

4.) $$\frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)}{\beta} = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta}$$

Пре свега је:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta) > 2\cos\alpha$$

или:

$$2\cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)\cos\frac{1}{2}\beta > 2\cos\alpha,$$

дакле:

5.) $$\cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) > \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Пошто је даље тангента лука прве четврти већа од лука, то је:

6.) $$\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta} > \cos\frac{1}{2}\beta.$$

Множењем неједначина 5) и 6) излази:

$$\cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta} > \cos\alpha.$$

Из упоређаја ове неједначине с једначином 4) следује:

$$\frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)}{\beta} > \cos\alpha \text{ т. ј. } 7)\ \frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha} > \beta.$$

Ако сад узмемо да су α и $\alpha-\beta$ мањи од $\frac{\pi}{2}$ и ставимо:

$$\sin\alpha = x,\ \sin(\alpha-\beta) = x-\delta,$$

онда је:

$$\alpha = arc\sin x,\ \alpha-\beta = arc\sin(x-\delta)$$

и $$\beta = arc\sin x - arc\sin(x-\delta).$$

Помоћу овога неједначина 7) претвара се у:

8.) $$\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}} > arc\sin x - arc\sin(x-\delta).$$

Из 3) и 8) следује сад:

$$arc\sin(x+\delta) - arc\sin x > \frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}} > arc\sin x - arc\sin(x-\delta).$$

Кад у овој неједначини ставимо редом $x = \delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \ldots (n-1)\delta$ и за тим новодобивене неједначине саберемо, изаћиће:

$$arc\,sin\,(n\delta) - (arc\,sin\,\delta - \delta)$$

$$> \delta \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2\delta)^2}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1-[(n-1)\,\delta]^2}} \right\} > arc\,sin\left[(n-1)\delta\right] - \delta,$$

где је свуда по још једно δ додато. Ова неједначина вредиће тим пре, кад се у њој изостави положна разлика $arc\,sin\,\delta - \delta$. Ако се то учини, па се онда стави $n\delta = x$, дакле $\delta = \frac{x}{n}$, излази:

$$arc\,sin\,x > \frac{x}{n}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}} \right\} > arc\,sin\left(x - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}.$$

Из ове неједначине видимо, да је, кад n расте бесконачно:

$$9.)\ arc\,sin\,x = lim\,\frac{x}{n}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}} \right\}.$$

105. Сад приступимо изналажењу реда за $arc\,sin\,x$. Из обр. 9) № 104 сљедује, да се може ставити:

$$1.)\ arc\,sin\,x + \varepsilon = \frac{x}{n}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{n}\right)^2}} + \ldots\ldots$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}} \right\},$$

где је ε количина, која тежи нули, кад n расте бесконачно. Сад нам треба најпре десну страну помоћу биномног обрасци развити. На основу истог обрасца јесте за $z < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^6 + \ldots.$$

$$+ \frac{1.3.5.\ldots(2k-3)}{2.4.6.\ldots(2k-2)}z^{2k-2} +$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)}z^{2k}\left\{1 + \frac{2k+1}{2k+2}z^2 + \frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)(2k+4)}z^4 + \ldots\right\}$$

Збир реда у загради јесте положан и мањи од:

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots = \frac{1}{1-z^2},$$

и према томе може се тај збир ставити

$$= \frac{\varrho}{1-z^2}$$

где је ϱ положно и < 1. Горња једначина изгледа сада краће овако:

$$2.)\ \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1.3}{2.4} z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} z^6 + \ldots.$$

$$+ \frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k-2)} z^{2k-2} + \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \frac{\varrho z^{2k}}{1-z^2}$$

Помоћу овог обрасца развићемо сада поједине чланове у десној загради једначине 1). Зато треба само у обрасцу 2) узимати редом:

$$z = \frac{x}{n},\ \frac{2x}{n},\ \frac{3x}{n}, \ldots \frac{(n-1)x}{n},$$

$$\text{а} \quad \varrho = \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3, \ldots\ldots \varrho_{n-1},$$

па ће изаћи:

$$arc\,sin\,x + \varepsilon =$$

$$= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} x^3$$

$$+ \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5} x^5$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6}{n^7} x^7$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k-2)} \cdot \frac{1^{2k-2}+2^{2k-2}+\ldots+(n-1)^{2k-2}}{n^{2k-1}} x^{2k-1}$$

$$+ \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \left\{ \frac{\varrho_1 1^{2k}}{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{\varrho_2 2^{2k}}{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho_{n-1}(n-1)^{2k}}{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2} \right\} \cdot \frac{x^{2k+1}}{n^{2k+1}}.$$

Пошто је x као синус мање од 1, то су имениоци у последњој загради сви положни и већи од $1-x^2$. Ако дакле све те имениоце заменимо са мањом количином $1-x^2$ и у бројиоцима поједина ϱ заменимо с већом јединицом, то ће сви разломци у загради постати већи. Како су сви ти разломци положни, то њихов збир лежи измеђ нуле и

$$\frac{1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\ldots+(n-1)^{2k}}{1-x^2}$$

и према томе, ако је $0 < \varrho < +1$, биће:

$$arc\,sin\,x + \varepsilon =$$

$$= x + \frac{1}{2} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} x^3$$

$$+ \frac{1.\ 3}{2.\ 4} \cdot \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5} x^5$$

$$+ \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6} \cdot \frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6}{n^7} x^7$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.\,3\ldots(2k-3)}{2.\,4\ldots(2k-2)}\cdot\frac{1^{2k-2}+2^{2k-2}+\ldots+(n-1)^{2k-2}}{n^{2k-1}}x^{2k-1}$$

$$+\frac{1.\,3\ldots(2k-1)}{2.\,4\ldots(2k)}\cdot\frac{1^{2k}+2^{2k}+\ldots(n-1)^{2k}}{n^{2k+1}}\cdot\frac{\varrho x^{2k+1}}{1-x^2}.$$

Одавде, кад пустимо да n расте бесконачно и узмемо у обзир образац 1) у № 104. 1°, као и то да ε тежи нули, добијамо:

$$3.)\quad arc\sin x=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5.}+\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.}+\ldots$$

$$+\frac{1.3\ldots(2k-3)x^{2k-1}}{2.4.(2k-2)\,(2k-1)}+\frac{1.3\ldots(2k-1)x^{2k-1}}{2.4\ldots(2k)\,(2k+1)}\cdot\frac{\varrho}{1-x^2},$$

где је последњи члан остатак реда.

Ако у последњој једначини, у којој је цео и положан број k био досада произвољан, пустимо да број k расте бесконачно, остатак реда тежи очевидно нули и ми добијамо за $arc\sin x$ следећи бесконачан ред:

$$4.)\quad arc\sin x=x+\frac{1.x^3}{2.4}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5.}+\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.}+\ldots$$

Овај образац вреди за $1>x>-1$. Но пошто је и за $x=\pm1$ ред збарљив и по томе непрекидан, то ће образац важити и за те две граничне вредности x-а.

Пошто је:

$$arc\cos x=\frac{\pi}{2}-arc\sin x$$

то је:

$$5.)\quad arc\cos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1.x^3}{2.4}-\frac{1.3.x^5}{2.4.5.}-\ldots$$

Ред за arc tg x и arc cotg x.

106. Кад у једначини:

$$1.)\quad\frac{tg(\alpha+\beta)-tg\,\alpha}{\beta}=\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}$$

где су α и $\alpha+\beta$ два лука сваки мањи од $\frac{\pi}{2}$, заменимо $\sin\beta:\beta$ мањом количином $\cos\beta$ и $\cos(\alpha+\beta)$ већом количином $\cos\alpha\cos\beta$, добићемо:

$$\frac{tg(\alpha+\beta)-tg\,\alpha}{\beta}>\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

или:

$$2.)\quad\Big\{tg(\alpha+\beta)-tg\alpha\Big\}\cos^2\alpha>\beta.$$

Ако сад ставимо:

$$tg\,\alpha=x,\ \ tg(\alpha+\beta)=x+\delta$$

одакле:

$$\alpha=arc\,tg\,x,\ \ \alpha+\beta=arc\,tg(x+\delta)$$

и

$$\beta=arc\,tg(x+\delta)-arc\,tg\,x,\ \ \cos^2\alpha=\frac{1}{1+x^2}$$

наћићемо:

$$3.)\quad\frac{\delta}{1+x^2}>arc\,tg(x+\delta)-arc\,tg\,x.$$

Да би добили још један овоме сличан однос, узмимо једначину:

$$\frac{tg\,\alpha - tg\,(\alpha - \beta)}{\beta} = \frac{\sin\beta}{\beta} \cdot \frac{1}{\cos\alpha\,\cos\,(\alpha-\beta)},$$

која се такође даје лако оверити и у којој су α и $\alpha - \beta$ луци мањи од $\frac{\pi}{2}$. Кад десно у тој једначини заменимо $\sin\beta : \beta$ већом јединицом и $\cos\,(\alpha-\beta)$ мањим $\cos\alpha$ изаћиће:

$$\frac{tg\,\alpha - tg\,(\alpha-\beta)}{\beta} < \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

или

$$4.)\qquad \left\{tg\,\alpha - tg\,(\alpha-\beta)\right\}\cos^2\alpha < \beta.$$

Ако сад ставимо:

$$tg\,\alpha = x \text{ и } tg\,(\alpha-\beta) = x - \delta$$

одакле

$$\alpha = arc\,tg\,x,\ \alpha-\beta = arc\,tg\,(x-\delta)$$

и

$$\beta = arc\,tg\,x - arc\,tg\,(x-\delta).$$

то ће се неједначина 4) претворити у:

$$5.)\qquad \frac{\delta}{1+x^2} < arc\,tg\,x - arc\,tg\,(x-\delta).$$

Из 3) и 5) следује сад:

$$arctg\,x - arctg\,(x-\delta) > \frac{\delta}{1+x^2} > arctg\,(x+\delta) - arctg\,x.$$

Ако сад у овој неједначини ставимо редом: $x = \delta$, 2δ, $3\delta, \ldots (n-1)\,\delta$, и тако добивене неједначине саберемо и свуда додамо по једно δ, изаћиће:

$$arc\,tg\left[(n-1)\,\delta\right] + \delta >$$

$$> \delta\left\{1 + \frac{1}{1+\delta^2} + \frac{1}{1+(2\delta)^2} + \frac{1}{1+(3\delta)^2} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+[(n-1)\delta]^2}\right\} > arc\,tg\,(n\delta) + \delta - arc\,tg\,\delta$$

Неједначина, која постаје, кад се у овој изостави $\delta - arc\,tg\,\delta$, очевидно ће тим пре вредити. Ако дакле ту разлику изоставимо и онда ставимо $n\delta = x$, дакле $\delta = \frac{x}{n}$, наћиђемо:

$$6.)\qquad arc\,tg\left(x - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n} >$$

$$> \frac{x}{n}\left\{1 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left[\frac{(n-1)x}{n}\right]^2}\right\}$$

$$> arc\,tg\,x.$$

Ако сад у обрасцу:

$$\frac{1-a^m}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{m-1}$$

ставимо $a = -b$, излази

$$7.)\qquad \frac{1 + (-1)^{m+1} b^m}{1+b} + 1 - b + b^2 - b^3 + \ldots + (-1)^{m-1} b^{m-1}$$

Ако је $b > 0$ и ако ставимо $m = 2k$, то се образац у 7) претвара у $1 - b^{2k} < 1$, дакле је:

$$8.)\qquad \frac{1}{1+b} > 1 - b + b^2 - b^3 + \ldots . - b^{2k-1}$$

Ако ли ставимо $m = 2k + 1$, то се бројилац претвара у $1 + b^{2k+1} > 1$ и зато је сад:

$$9.)\qquad \frac{1}{1+b} < 1 - b + b^2 - b^3 + \ldots - b^{2k-1} + b^{2k}$$

Ове две неједначине 8) и 9) примениhемо сада на неједначине 6) како би их добили у другом облику. Ако разломке у загради под 6) заменимо мањим вредностима, које се из 8) добијају, кад се тамо стави редом:

$$b = \left(\frac{x}{n}\right)^2, \left(\frac{2x}{n}\right)^2, \left(\frac{3x}{n}\right)^2, \ldots \left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2$$

вредиhе тим пре ова неједначина:

$$arc\,tg\left(x - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{x} >$$

$$> \left\{ \begin{aligned} & x - \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\,x^3 \\ & + \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5}\,x^5 \\ & - \frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6}{n^7}\,x^7 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \frac{1^{4k-2}+2^{4k-2}+3^{4k-2}+\ldots+(n-1)^{4k-2}}{n^{4k-1}}\,x^{4k-1} \end{aligned} \right\}$$

одакле за $n = \infty$ и с обзиром на образац 1) у № 104:

$$10.\quad arc\,tg\,x > x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots - \frac{1}{4k-1}\,x^{4k-1}$$

Ако ли пак разломке у загради под 6) заменимо веhим вредностима, које се добијају из 9) замењујуhи тамо b са истим горњим вредностима, вредиhе још пре ова нова једначина:

$$\begin{aligned} arc\,tg\,x < x & - \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\,x^3 \\ & + \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5}\,x^5 \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1^{4k}+2^{4k}+3^{4k}+\ldots+(n-1)^{4k}}{n^{4k+1}}\,x^{4k+1} \end{aligned}$$

одакле опет за $n = \infty$ и с обзиром на образац 1) № 104

$$\begin{aligned} 11.)\qquad arc\,tg\,x < x & - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots \\ & - \frac{1}{4k-1}x^{4k-1} + \frac{1}{4k+1}x^{4k+1} \end{aligned}$$

Из неједначина 10) и 11) следује:

$$\begin{aligned} 12.)\qquad arc\,tg\,x = x & - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots . \\ & - \frac{1}{4k-1}\,x^{4k-1} + \frac{\varrho}{4k+1}\,x^{4k+1} \end{aligned}$$

где је: $0 < \varrho < 1$.

Ако сад у овој једначини пустимо да цео и положан број k, који је био произвољан, расте бесконачно, онда узимајући да x није бројно веће од 1, остатак реда у 12) тежи нули и ми на тај начин добијамо за $arc\, tg\, x$ следећи бесконачан ред:

$$13.\quad arc\, tg\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

који образац вреди за $1 \overline{\geqq} x \overline{\geqq} -1$.

За $x > 1$ образац 13) невреди, али пошто је

$$arc\, tg\, x = \frac{1}{2}\pi - arc\, tg \frac{1}{x}$$

и сада $\frac{1}{x} < 1$, то се $arc\, tg \frac{1}{x}$ даје развити по обр. 13) и ми добијамо:

$$14)\quad arc\, tg\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^5} + \ldots.$$

који образац вреди за $1 \overline{\geqq} \frac{1}{x} \overline{\geqq} -1$.

Из нађених образаца могли би се наћи и редови за $arc\, cotg\, x$, јер је

$$arc\, cotg\, x = arc\, tg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - arc\, tg\, x.$$

Редови за израчунавање броја π.

107. Помоћу образаца за $arc\, sin\, x$ и $arc\, tg\, x$ можемо лако наћи редове за израчунавање броја π. Ако н. пр. у обрасцу 13) ставимо $x = 1$, добијамо:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

тако звани Лајбницов образац. Но тај образац није згодан за израчунавање броја π, јер је врло споро збирљив.

Згоднији ред добија се, кад се узме $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ дакле $arc\, sin\, x = \frac{\pi}{6}$, јер тада се налази:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots.\right)$$

Но најзгодније се могу добити нагло збирљиви редови за израчунавање броја π, кад се један извесан део од π разложи у два или више лукова, којих су тангенте чисти разломци.

Тако ако ставимо $\frac{\pi}{4} = p + q$ и

$$tg\, p = \frac{1}{2} \text{ биће } tg\, q = tg\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

дакле и:

$$\frac{\pi}{4} = arc\, tg \frac{1}{2} + arc\, tg \frac{1}{3},$$

и сад по обрасцу 13) № 106:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \cdots\cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \cdots\cdots\right).$$

Ако се сад тражи π са десет десетних места, онда је довољно узети у првом реду 15 а у другом 10 чланова у рачун, и онда ће изаћи:

$$\pi = 3{\cdot}1415926532,$$

где су 9 првих десетних места тачна.

Ако ставимо $\frac{\pi}{4} = 2p + q$ и $tg\, p = \frac{1}{3}$ то је онда:

$$tg\, 2p = \frac{2\, tg\, p}{1 - tg^2 p} = \frac{3}{4} \quad \text{и}$$

$$tg\, q = tg\left(\frac{\pi}{4} - 2p\right) = \frac{1}{7} \quad \text{и по томе:}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\, arc\, tg\, \frac{1}{3} + arc\, tg\, \frac{1}{7},$$

дакле најзад по обрасцу 13) № 106:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left\{\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \cdots\right\} +$$

$$+ \left\{\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \cdots\right\}.$$

Збирљивост бесконачних производа.

108. Нека је дат бесконачан производ:

1.) $$P = u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5 \cdots$$

и нека је:

2.) $$P_n = u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_{n-1}\, u_n$$

производ n првих чинилаца његових. Кад пустимо, да n расте бесконачно, онда може наступити један од ова три случаја:

α). P_n тежи све више и више једној одређеној и коначној граници P, тако да је:

$$lim\, P_n = P.$$

У том случају бесконачни производ зове се збирљив и P његова вредност.

β). P_n расте без престанка и преко сваких граница. У том случају ред се зове незбирљив. И

γ). P_n тежи различним одређеним границама и тада се бесконачни производ зове неодређен.

Ми ћемо од сада претпостављати да су сви чиниоци положни јер бројна вредност производа остаје иста, па били сви чиниоци његови истог знака или не. А сада приступимо истраживању услова збирљивости бесконачног производа.

Пошто се свака количина u може представити у облику $(1+\alpha)$, где је $\alpha \gtrless 0$, то и дани бесконачни производ можемо замислити у облику:

$$3.)\quad P = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\ldots\ldots$$

Ако је сада бесконачни производ збирљив и P његова вредност, онда је:

$$4.)\qquad \lim P_n = P \quad \text{и} \quad \lim P_{n-1} = P.$$

Но како је:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \alpha_n,$$

то је онда с обзиром на обрасце под 4):

$$\lim(1+\alpha_n) = 1 \quad \text{или} \quad \lim \alpha_n = 0.$$

Овај последњи нуждан али не и довољан услов збирљивости бесконачних производа биће увек испуњен онда, кад је бесконачан ред:

$$5.)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots$$

падајући. Кад је поменути услов збирљивости производа 3) испуњен, онда се у реду количина α мора наћи једна, од које почињући па на даље свака је мања од ма како мале количине. Па како збирљивост једног бесконачног производа не зависи од његових првих чинилаца онако исто, као што и збирљивост бесконачног реда не зависи од његових првих чланова, то можемо од сада претпоставити, да је већ од првог чиниоца у производу па на даље свако $\alpha < 1$ а по потреби мање и од ма каквог другог броја, н. пр. $\frac{2}{3}$. Јер у противном случају ми би могли прве чиниоце, који том захтеву не би одговарали, изоставити, и онда остављи бесконачни производ постаје из новога, кад се овај помножи са изостављеним чиниоцима, којих је број па дакле и производ коначан.

109. Ако су све количине α у бесконачном производу положне, онда је:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2$$

и пошто је $\alpha_1\alpha_2 > 0$, то је:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) > 1 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

Одавде следује:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) > (1+\alpha_2+\alpha_3)(1+\alpha_3)$$

или:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) > 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$$

и пошто је $\alpha_1\alpha_3 > 0$ и $\alpha_2\alpha_3 > 0$:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) > 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Продужавајући тако и даље наћићемо најзад, да је у опште:

$$P_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) > 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Одавде следује да је и $\lim P_n$ т. ј.

$$6.)\qquad P > 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots.$$

Из обрасца:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

следује:

$$e^x > 1 + x.$$

По овоме је дакле:

$$e^{\alpha_1} > 1 + \alpha_1, \; e^{\alpha_2} > 1 + \alpha_2, \; e^{\alpha_3} > 1 + \alpha_3, \ldots\ldots$$

одакле:

$$e^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdot} > (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots\ldots$$

то јест:

$$7.) \qquad P < e^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdot}$$

Из неједначина 6) и 7) следује, да ће бесконачни производ 3) бити збирљив или незбирљив. како је кад збирљив или незбирљив бесконачни ред 5). Кад је бесконачан производ збирљив, његова је вредност очевидно различна од нуле.

Узмимо сад, да су у бесконачном производу сва α одречна, да је дакле тај производ сада:

$$8) \qquad P_1 = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots\ldots$$

Из обрасца:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots$$

где ћемо узети $x < 1$, следује:

$$e^{-x} > 1 - x.$$

По овоме је:

$$e^{-\alpha_1} > 1 - \alpha_1, \; e^{-\alpha_2} > 1 - \alpha_2, \; e^{-\alpha_3} > 1 - \alpha_3, \ldots\ldots$$

дакле:

$$e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)} > (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots\ldots$$

то јест:

$$9.) \qquad P_1 < e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)}$$

Даље из обрасца:

$$-\,l\,(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

који вреди за $x < 1$, следује:

$$-\,l\,(1-x) < x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = x\left(1 + x + x^2\right. = x \cdot \frac{1}{1-x}$$

или

$$-\,l\,(1-x) < \frac{x}{1-x}.$$

По овоме је:

$$-\,l\,(1-\alpha_1) < \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}, \; -\,l\,(1-\alpha_2) < \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2},$$

$$-\,l\,(1-\alpha_3) < \frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}, \text{ и т. д.}$$

одакле:

$$-\left\{l\,(1-\alpha_1) + l\,(1-\alpha_2) + l\,(1-\alpha_3) + \ldots\right\} <$$

$$< \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{1-\alpha_3} + \ldots\ldots$$

или:

$$-lP_1 < \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{1-\alpha_3} + \ldots.$$

Ако је сада $\varrho < 1$ а веће од највећег α, онда је много пре:

$$-lP_1 < \frac{1}{1-\varrho}\left\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.\right\},$$

и по томе:

$$10.) \qquad P_1 > e^{-\frac{1}{1-\varrho}\left\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\right\}}.$$

Из неједначина 9) и 10) следује, да је бесконачан производ 8) збирљив, ако је збирљив бесконачан ред 5) и вредност тога производа јесте тада положна и од нуле различна. Ако је бесконачан ред 5) незбирљив, онда је на основу истих неједначина 9) и 10) бесконачан производ 8) опет збирљив, али је његова вредност равна нули.—

Ако су количине α у бесконачном производу од части одречне, дакле ако су чиниоци тога производа од части већи а од части мањи од 1, онда такав случај потребује нарочитог претреса само онда, кад је број чинилаца и једне и друге врсте ∞ велики. Јер случај, где је број чинилаца једне врсте коначан а друге врсте бесконачан, своди се на један од пређашња два случаја. Узмимо дакле нека је дани бесконачни производ:

$$11.) \quad P_2 = (1+\alpha_1)(1-\alpha_2)(1+\alpha_3)(1-\alpha_4)\ldots.$$

где је број чинилаца и већих и мањих од јединице бесконачно велики. Помоћу неједначина:

$$e^x > 1 + x \text{ и } e^{-x} > 1 - x$$

доказује се лако неједначина:

$$12.) \qquad P_2 < e^{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots.}$$

Пошто је даље:

$$P_2 > (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots. = P_1$$

то онда с погледом на неједначину 10) налазимо, да је тим пре:

$$13.) \qquad P_2 > e^{-\frac{1}{1-\varrho}\left\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.\right\}}$$

Из неједначина 12) и 13) видимо, да кад су редови:

$$14.) \qquad \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots.$$

$$15.) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots.$$

оба збирљиви, у ком ће случају бити збирљиви и редови, који постају један из положних а други из одречних чланова реда 14), да онда, велим, и бесконачан производ 11) мора бити збирљив.

Ако је ред, који постаје из положних чланова реда 14) збирљив, а овај који постаје из његових одречних чланова незбирљив, усљед чега ће и ред 15) морати бити незбирљив, онда је бесконачан производ 11) на основу неједначина 12) и 13) збирљив и његова је вредност равна нули.

Ако ли је ред из положних чланова реда 14) незбирљив а онај из одречних збирљив, онда се из неједначина 12) и 13) ништа не сазнаје. Међутим лако је увидети, да ће у том случају бесконачан производ 11) бити незбирљив, јер се он у том случају може сматрати да је постао множењем двају бесконачних производа, од којих је један збирљив и од нуле различан а други незбирљив.

Ако ли су најзад незбирљива оба реда, и онај, који постаје из положних као и онај, који постаје из одречних чланова реда 14), онда је ред 15) извесно незбирљив; међутим ред 14) може бити збирљив или незбирљив. Тада се дакле не може сазнати какав је бесконачан производ осим у случају кад је ред 14) незбирљив и његов збир $= -\infty$ јер је тада вредност бесконачног производа равна нули.

Примери.

1°. Производ:

$$\left(1+\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$

јесте збирљив и од нуле различан за све вредности x-а.

2°. Производ:

$$\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{4}\right)\cdots$$

јесте збирљив и његова је вредност $= 0$.

3°. Производ:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdots$$

јесте збирљив и од нуле различан.

4°. Производ:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot$$
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots$$

јесте збирљив и раван нули.

5°. Производ:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot$$
$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots$$

јесте незбирљив.

6°. О производу:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot$$
$$\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots$$

неможе се помоћу показаних метода сазнати, да ли је збирљив или не.

Међутим ако ставимо:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\cdot$$

$$\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right):$$

онда видимо, да граница којој тежи вредност десног ∞ производа, када n расте бесконачно, јесте положан и коначан број, јер ред:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdot$$

јесте збирљив. Одатле следује, да ће при бесконачном рашћењу n-а и граница производа:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\cdot$$

$$\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

бити положан и коначан број, јер је:

$$lim\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1.$$

110. Помоћу науке о логаритмима може се испитивање, да ли је дани бесконачан производ збирљив или не, свести на испитивање збирљивости двају редова, помоћу којих се дознаје какав је бесконачни производ и онда, кад нас методе у № 109 издају. Нека је:

$$1.)\quad P=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\ldots.$$

дани бесконачни производ, где су количине α положне или одречне све или од чести. Ако је e основица природне логаритамске системе, онда је:

$$(1+\alpha_1)=e^{l(1+\alpha_1)},\ (1+\alpha_2)=e^{l(1+\alpha_2)},\ \text{и т. д.}$$

дакле је:

$$2.)\qquad P=e^{\{l(1+\alpha_1)+l(1+\alpha_2)+l(1+\alpha_3)+\cdots\cdot\}}$$

Као што се види, да ли ће бесконачни производ бити збирљив или не, зависи једино од тога, какав је бесконачни ред:

$$3.)\quad l(1+\alpha_1)+l(1+\alpha_2)+l(1+\alpha_3)+\ldots$$

Ако је ред 3) збирљив и s његов збир, онда ће услед обрасца 2) бити збирљив и бесконачни производ и његова вредност биће e^s. А ако је ред 3) незбирљив и његов збир $=-\infty$, онда је бесконачни производ збирљив и његова вредност тада је због $P=e^{-\infty}$ равна нули. Ако ли је најзад ред 3) незбирљив и његов збир $=+\infty$ или неодређен, онда је због $P=e^{+\infty}=\infty$ и бесконачан производ незбирљив или је неодређен.

У место да испитујемо, да ли је ред 3) збирљив или не по досада познатим методама, што би у доста прилика било заметно, ми ћемо то радити по другој једној методи, коју ћемо сада показати.

Услов збирљивости реда 3) на дакле и бесконачног производа 1) јесте:

$$lim\,l(1+\alpha_n)=0,\ \text{или}\ lim\,(1+\alpha_n)=1\ \text{или}\ lim\,\alpha_n=0,$$

дакле исти као и пре, а тако и треба да буде. Узмимо сада образац:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots.$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + x^3\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots\right\}$$

који вреди за $x < 1$. Пошто је:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 + \dots\dots$$

$$< \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots.$$

и пошто је $x < 1$, то је сада:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Збир овог левог реда биће < 1, ако је:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} < 1, \text{ т. ј. ако је } x < \frac{2}{3}.$$

Према томе, ако је ϱ један положан број и мањи од јединице, можемо ставити:

4.) $$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varrho x^3,$$

где x мора бити мање од $\frac{2}{3}$. До истог резултата долазимо полазећи од $l(1-x)$ тако, да образац 4) вреди за

$$\frac{2}{3} > x > -\frac{2}{3}.$$

Ако је сада услов збирљивости реда 3) т. ј. $lim\,\alpha_n = 0$ испуњен, онда ћемо у реду 3), кад идемо с лева на десно, морати наићи на један члан, чије је $\alpha < \frac{2}{3}$, и онда ће α и сваког доцнијег члана бити такође $< \frac{2}{3}$. Но ми можемо узети, да тај случај наступа већ од првог члана реда 3), јер кад то не би било, ми би могли све прве чланове, којих α нису бројно $< \frac{2}{3}$ изоставити, и онда оставши бесконачан ред, у коме су сва $\alpha < \frac{2}{3}$ биће онакав исти као и првашњи 3).

С погледом на образац 4) сада је:

$$l(1+\alpha_1) + l(1+\alpha_2) + l(1+\alpha_3) + \dots.$$

$$= \left\{\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \varrho_1\alpha_1^3\right\} + \left\{\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \varrho_2\alpha_2^3\right\} +$$

$$+ \left\{\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + \varrho_3\alpha_3^3\right\} + \left\{\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 + \varrho_4\alpha_4^3\right\} + \dots$$

где су $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \dots\dots$ бројеви положни и < 1. Ако краткоће ради ставимо:

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots.$$

$$S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots.$$

$$S_3 = \varrho_1\alpha_1^3 + \varrho_2\alpha_2^3 + \varrho_3\alpha_3^3 + \varrho_4\alpha_4^3 + \ldots.$$

онда је:

$$l(1+\alpha_1) + l(1+\alpha_2) + l(1+\alpha_3) + l(1+\alpha_4) + \ldots.$$

$$= S_1 - \frac{1}{2} S_2 + S_3.$$

дакле да ли је збирљив или незбирљив ред 3) зависи од редова S_1, S_2, и S_3. Ако је ред S_1 збирљив онда је збирљив и ред S_3, јер су чланови овога последњег истога знака са одговарајућим члановима реда S_1 и мањи од њих. Међутим из збирљивости реда S_1 може се поуздано рачунати на збирљивост реда S_2 само онда, кад су сви чланови у S_1 једног и истог знака. Али ако сви чланови реда S_1 нису сви истог знака, онда и ако је ред S_1 збирљив, може S_2 бити незбирљив услед тога, што су му сви чланови истог знака.

Узимајући на ум ово, као и оно, што смо у почетку ове №-ре рекли: можемо дакле казати:

α). Бесконачан производ:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\ldots.$$

јесте збирљив и његова је вредност различна од нуле, кад су редови S_1 и S_2 оба збирљиви.

β). Бесконачан производ јесте збирљив а његова је вредност $= 0$, кад је ред S_1 збирљив а S_2 незбирљив.

γ). Безконачан производ јесте збирљив и његова је вредност опет равна нули, кад је ред S_1 незбирљив и његов збир $= -\infty$, а ред S_2 збирљив или незбирљив.

δ). Бесконачан производ јесте незбирљив и $= +\infty$, ако је ред S_1 незбирљив и његов збир $= +\infty$ а ред S_2 збирљив.

ε). Ако су S_1 и S_2 незбирљиви и $= +\infty$ онда се збир реда 3) јавља у облику $\infty - \infty$, вредност бесконачног производа у облику $e^{\infty-\infty}$ и зато се тада не може ништа казати о томе производу,

Примери:

1°. Производ:

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{4}}\right)\ldots.$$

јесте збирљив и његова је вредност $= 0$.

2°. Производ:

$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right)\ldots..$$

јесте збирљив и његова је вредност различна од нуле.

3°. Кад производ:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\ldots.$$

код којег су нас методе у № 108 и 109 издале, испитамо по методи ове №-е, наћићемо да је он збирљив и његова вредност коначна и од нуле различна. Јер сада је:

$$S_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \ldots = 0$$

и

$$S_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots =$$

$$= 2\left\{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right\}.$$

Дакле су S_1 и S_2 збирљиви а према томе и горњи производ.

4°. Кад се производ:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \ldots$$

испитује по методама №-е 109 оне нас издају; међу тим по методама ове №-е налазимо, да је тај производ збирљив и његова вредност $= 0$.

5°. Код производа:

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{4}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{5}}\right) \ldots$$

издаје нас међу тим метода ове №-е, а по методама №-е 108 и 109 налазимо, да је тај производ незбирљив и $= +\infty$.

111. Сваки производ може се претворити у један ред. Тако је:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 1+\alpha_1+(1+\alpha_1)\alpha_2.$$

Дакле:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) = 1+\alpha_1+(1+\alpha_1)\alpha_2 + (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\alpha_3$$

и на тај начин продужавајући и даље, налазимо, да је у опште:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) \ldots (1+\alpha_n) =$$

$$= (1+\alpha_1) + (1+\alpha_1)\alpha_2 + (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\alpha_3 + \ldots + (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \ldots (1+\alpha_{n-1})\alpha_n.$$

Помоћу овог обрасца можемо дакле један коначан производ развити у један коначан ред и тај образац вреди за свако коначно n. За $n = \infty$ постаје леви производ бесконачан, као и десни ред:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4) \ldots$$

$$= (1+\alpha_1) + (1+\alpha_1)\alpha_2 + (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\alpha_3 + \ldots + (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \ldots (1+\alpha_{n-1})\alpha_n + \ldots$$

Испитивање, да ли је бесконачан производ збирљив или не, може се свести на испитивање збирљивости бесконачног реда, у који смо га развили. Ако означимо са a_n и a_{n+1} n-ви и $(n+1)$-ви члан реда, онда је:

$$a_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \ldots (1+\alpha_{n-1})\alpha_n$$

$$a_{n+1} = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \ldots (1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_n)\alpha_{n+1},$$

и дакле:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\alpha_n)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

Ако је граница, којој при бесконачном рашћењу n-а тежи овај последњи израз, мања од 1, онда је ред па дакле и производ збирљив; а ако је та граница већа од 1, онда је ред па дакле и производ незбирљив. Ако је пак та граница = 1, онда ваља у том сумњивом случају употребити правила збирљивости, која су за тај случај згодна.

Обратно може се један збирљив бесконачан ред претворити у бесконачан производ. Очевидно је:

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

и у опште:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n=$$

$$=\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\ldots\ldots\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}$$

Ако је за $n=\infty$ леви ред збирљив, онда смемо пустити, да n расте бесконачно и лево и десно и ми добијамо:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n+\ldots=$$

$$=\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}\ldots\ldots$$

ЧЕТВРТИ ДЕО.

О алгебарским радњама са уображеним количинама.

112. У нижој математици наилазимо на изразе облика $\sqrt[2m]{-a}$. Такав један израз имао би да представља број, који је такав, да подигнут на $2m$-и дакле парни степен даје одречан број $-a$ као резултат. Али таквог броја нема ни међу положним ни међу одречним бројевима, јер сваки положан или одречан број подигнут на парни степен даје положан резултат. С тога се изрази таквога облика зову уображени изрази или уображене количине, за разлику од стварних израза или количина, којих се вредност може помоћу положних или одречних количина исказати или са свим тачно или са колико се хоће приближношћу.

Ми ћемо видети, да се свака уображена количина може представити у облику $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, где α и β значе ма какве стварне бројеве. Такав један израз сам по себи нема никаква смисла и не значи ништа; али се опет такви изрази могу врло корисно употребити у рачунима и са њима рачунати онако исто као и са стварним. Само нам треба понајпре и једном за свагда утврдити односно рачунања с уображеним количинама ово што следује:

1°. Две уображене количине казаћемо да су једнаке, кад су њихови стварни делови једнаки а тако исто и сачиниоци од $\sqrt{-1}$. На тај начин једначина између двеју уображених количина:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$$

не значи ништа друго до то, да је

$$\alpha=\alpha_1 \quad \text{и} \quad \beta=\beta_1.$$

Дакле једна уображена једначина јесте символички представник двеју стварних једначина.

2°. Кад је у изразу $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ $\beta=0$, ми ћемо казати, да се тај израз своди на стварну количину α. На тај начин стварне количине јављају се као специјалности уображених,

Ако је $\alpha=0$, онда се израз $\beta\sqrt{-1}$ зове чиста уображена количина, док се међутим $\alpha+\beta\sqrt{--1}$ зове и нечиста уображена или обичније комплексна количина.

Кад је $\alpha=0$ и $\beta=0$ онда се каже да је уображени израз раван нули и обратно.

3°. Сабирање, одузимање и множење уображених количина врши се по истим правилима као и код стварних количина, при чему се $\sqrt{-1}$ сматра увек као количина чији је квадрат $=-1$. Према овоме је, ако још, као што се то обично чини, $\sqrt{-1}$ означимо са i:

$$(\alpha+\beta\, i)+(\alpha_1+\beta_1\, i)=(\alpha+\alpha_1)+(\beta+\beta_1)\, i,$$

$$(\alpha+\beta\, i)-(\alpha_1+\beta_1\, i)=(\alpha-\alpha_1)+(\beta-\beta_1)\, i,$$

$$(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)=(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)\, i$$

$\sqrt{-1}=i$ зове се и уображена јединица.

4°. Делити уображену количину $\alpha+\beta i$ другом $\alpha_1+\beta_1 i$ значи тражити трећу $x+yi$, која је таква, да кад је помножимо с делиоцем, добијамо као производ дељеник. Према томе мора бити:

$$\alpha+\beta\, i=(\alpha_1+\beta_1 i)\,(x+y\, i),$$

или

$$\alpha+\beta i=(\alpha_1 x-\beta_1 y)+(\beta_1 x+\alpha_1 y)\, i,$$

Одавде на основу погодбе у 1°:

$$\alpha_1\, x-\beta_1\, y=\alpha,\ \beta_1\, x+\alpha_1\, y=\beta$$

и одавде опет:

$$x=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2},\ y=\frac{\beta\alpha_1-\alpha\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2},$$

дакле је најзад:

$$\frac{\alpha+\beta\, i}{\alpha_1+\beta_1 i}=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1}{\alpha_1^2+\alpha_1^2}+\frac{\beta\alpha_1-\alpha\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\, i$$

Вредност једног разломка $\frac{A}{B}$, где A и B значе два уображена израза, не мења се, кад се бројилац и именилац умноже трећом неком уображеном количином C. Јер ако означимо количник са Q, онда је:

$$A=B.\,Q$$

Ако помножимо ове две једнаке количине са C добићемо:

$$AC=B.Q.C=BC.Q$$

одакле:

$$\frac{AC}{BC}=Q=\frac{A}{B}$$

Одавде следује један прост начин тражења количника; јер ако помножимо бројиоца и имениоца разломка

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha_1+\beta_1 i}$$

са $\alpha_1-\beta_1 i$, наћићемо:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha_1+\beta_1 i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\alpha_1-\beta_1 i)}{\alpha_1^2+\beta_1^2}=\frac{(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+(\beta\alpha_1-\alpha\beta_1)i}{\alpha_1^2+\beta_1^2}$$

дакле исти резултат као и горе.

5°. Подизање на степене целе, разломљене, одречне одређује се онако исто као и код стварних количина. Тако $(\alpha+\beta i)^m$, где је m цело и положно, представља производ m чинилаца једнаких са $\alpha+\beta i$; $(\alpha+\beta i)^{-m}$ значи количник из јединице и тога производа и т. д.

Ми ћемо $(\alpha+\beta i)^m$, где је m цело и положно, да развијемо по биномном обрасцу, који вреди, као што то из његовог извођења следује, па били чланови бинома стварни или не. Али пре тога хоћемо да изнађемо узастопне степене за $\sqrt{-1}=i$. Пре свега је:

$$i^2=-1,\ \text{затим};\ i^3=i^2.i=-i,\ i^4=i^2.i^2=+1,$$

$$i^5=i^4\,i=+i,\ i^6=i^4.\,i^2=-1;\ i^7=i^6,i=-i,$$

и т. д. Одавде видимо да је у опште:

$$i^{4r}=+1,\ i^{4r+1}=+i,\ i^{4r+2}=-1,\ i^{4r+3}=-i,$$

дакле су парни степени од i стварни а непарни уображени. По биномном обрасцу добијамо сад:

$$(a+bi)^m=a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}bi+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2i^2+$$

$$+\binom{m}{3}a^{m-3}b^3i^3+\binom{m}{4}a^{m-4}b^4i^4+\dots.$$

Одавде замењујући узастопне степене од i са вредностима, добијамо даље:

$$(a+bi)^m=a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}bi-\binom{m}{2}a^{m-2}b^2-$$

$$-\binom{m}{3}a^{m-8}b^3i+\binom{m}{4}v^{m-4}b^4+\dots$$

и одавде узимајући заједно стварне а тако исто и уображене чланове:

$$(a+bi)^m=\left\{a^m-\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\binom{m}{4}a^{m-4}b^4-\dots.\right\}+$$

$$+\left\{\binom{m}{1}a^{m-1}b-\binom{m}{3}a^{m-3}b^3+\binom{m}{5}a^{m-5}b^5+\dots.\right\}.\,i$$

Израз за $(a-b\,i)^m$ разликоваће се од овог само знаком од i.

Из досадањег могли смо увидети, да су збир, разлика, производ, количник а тако исто и степени уображених количина опет уображене количине, дакле облика $A+B\,i$.

6°. Две уображене количине зову се спрегнуте, кад се оне разликују само знаком од $i = \sqrt{-1}$. Такве су н. пр:

$$\alpha + \beta i \quad \text{и} \quad \alpha - \beta i.$$

Њихов је збир 2α а производ $\alpha^2 + \beta^2$, дакле су стварни.

113. Помоћу уображених количина долазимо врло често лако и брзо до односа између са̂мих стварних количина. И сад се порађа питање, а шта нам јемчи, да су ти резултати доиста истинити. Истинитост тих резултата оснива се на овоме: Ако уображене количине или једначине будемо сабирали, одузимали, множили и т. д. онако исто, као што радимо код стварних количина, држећи се притом онога, што смо горе о рачунању с уображеним количинама утврдили, онда једначине, до којих најзад долазимо, морају бити истините, то ће рећи стварни делови десно и лево морају бити међу собом једнаки а тако исто и сачиниоци од i.

И доиста ако у једначинама, са којима имамо посла, заменимо свуда $i = \sqrt{-1}$ са неодређеном количином λ и свршимо све прописане радње, крајње једначине, које добијемо, морају вредити за ма какво λ и зато, на основу правила неодређених сачинилаца, сачиниоци једнаких степена од λ лево и десно од знака равности морају бити једнаки, и ти одговарајући сачиниоци остаће једнаки, ако затим будемо λ заменили ма чиме, дакле н. пр. ако будемо заменили:

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \lambda^4,\ \lambda^5,\ \lambda^6,\ \lambda^7,\ \lambda^8, \ldots.$$

са

$$i,\ -1,\ -i,\ +1.\ +i,\ -1,\ -i,\ +1, \ldots.$$

али на тај начин налазимо исти резултат, који би нашли да смо кроз цео рачун оставили i, и да смо с њим поступали као с количином, чији је квадрат $= -1$. Дакле у једначинама добивеним овим путем *морају* стварни делови лево и десно од знака равности бити међу собом једнаки а тако исто и сачиниоци од $i = \sqrt{-1}$.

Из овога умовања следује у исти мах, да главна својства основних радња вреде и код уображених количина; као н. пр. да је збир независан од тога, којим ће се редом сабирци сабирати; да је тако исто производ независан од тога, којим ће се редом чиниоци множити, и т. д.

Тригонометријски преображај уображених израза.

114. Свака уображена количина $\alpha + \beta i$ може се представити у облику $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је r положан број а φ један стваран лук. Јер да буде:

1.) $$\alpha + \beta i = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

треба да је на основу № 110

2.) $$\alpha = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad \beta = r\sin\varphi.$$

Из 2) могу се увек наћи такве вредности за r и φ, те да једначина 1) буде задовољена. Из 2) подижући на квадрат и сабирајући добијамо:

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \text{или} \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

која је количина увек стварна. Даље сљедује из 2):

$$\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\,\varphi = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\,\varphi = \frac{\beta}{r} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Како су ове вредности за $sin\,\varphi$ и $cos\,\varphi$ бројно мање од јединице а осим тога задовољавају једначину:

$$sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1,$$

то се увек може наћи лук φ, који у свези са вредношћу од r задовољава једначину 1). Шта више таквих лукова има бесконачно много, јер $sin\,\varphi$ и $cos\,\varphi$ не мењају се, кад лук φ порасте или се смањи за ма колико целих периферија. Положан број r зове се модуо, његов квадрат норма, а φ аргуменат уображене количине $\alpha + \beta i$. Лако је увидети да два спрегнута уображена израза имају исти модуо. Бином $cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$ зове се сведени израз.

Из горњих једначина следује:

1°. Кад су две уображене количине једнаке, онда су једнаки и њихови модули.

2°. Кад је модуо уображене количине раван нули, онда је и она равна нули и обратно.

3°. Модуо стварне количине јесте њена бројна вредност, а аргуменат јој износи паран или непаран број од π, како је кад она положна или одречна. Јер кад је $\beta = 0$, онда је:

$$r = \sqrt{\alpha^2} \text{ а } cos\,\varphi = \pm 1,$$

како је кад $\alpha > 0$ или < 0.

Као што ћемо одмах видети, рачунање с уображеним количинама постаје знатно простије, кад се оне на горњи начин изразе модулом и аргументом.

115. Претпоставимо најпре, да се тражи производ двеју уображених количина $\alpha + \beta i$ и $\alpha_1 + \beta_1 i$. Ми ћемо их најпре тригонометријски преобразити тако, да је:

$$\alpha + \beta i = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$

$$\alpha_1 + \beta_1 i = r_1\,(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1),$$

и онда је:

$$r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\,r_1(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1) =$$
$$= rr_1\left[cos\,(\varphi+\varphi_1) + i\,sin\,(\varphi+\varphi_1)\right].$$

Ако ову једначину помножимо са трећим чиниоцем $r_2\,(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)$ добићемо:

$$r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi).\,r_1\,(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1).\,r_2\,(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2) =$$
$$= rr_1r_2\left\{cos\,(\varphi+\varphi_1+\varphi_2) + i\,sin\,(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)\right\},$$

и продужавајући овако и даље, добићемо овај општи образац:

$$1.)\quad r_1\,(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1).\,r_2\,(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)\,\ldots\,.$$
$$r_m\,(cos\,\varphi_m + i\,sin\,\varphi_m) =$$
$$= r_1r_2\,\ldots\,.\,r_m\left\{cos\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\,. + \varphi_m)\right.$$
$$\left. + i\,sin\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m)\right\},$$

где је m ма какав цео и положан број.

Дакле је у опште модуо производа ма колико уображених количина раван производу њихових модула, а аргуменат производа раван збиру њихових аргумената.

Такође је лако наћи и количник двеју уображених количина, ако само узмемо на ум, да је производ двају спрегнутих сводних израза $= 1$, дакле да је:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1.$$

Јер кад израз:

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}$$

помножимо у бројиоцу и у имениоцу са

$$\frac{1}{r_1}(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

именилац ће се претворити у јединицу и ми ћемо имати:

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}\left[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)\right].$$

Дакле модуо количника двеју уображених количина раван је количнику њиних модула и аргуменат количника раван је разлици њихових аргумената.

На крају ове №-е још ћемо доказати, да је модуо збира двеју уображених количина мањи од збира а већи од разлике њихових модула. Јер ако је:

$$\alpha + \beta i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \beta_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

онда је:

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha_1 + \beta_1 i) = (r\cos\varphi + r_1\cos\varphi_1) + i(r\sin\varphi + r_1\sin\varphi_1)$$

Ако је сада ϱ модуо збира, онда је:

$$\varrho = \sqrt{(r\cos\varphi + r_1\cos\varphi_1)^2 + (r\sin\varphi + r_1\sin\varphi_1)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + r_1^2 + 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Пошто је сада $\cos(\varphi - \varphi_1) < 1$, докле је год φ различно од φ_1, то је онда:

$$r^2 + r_1^2 + 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1) < r^2 + r_1^2 + 2rr_1$$

т. ј. $$\varrho < r_1 + r.$$

Из овога је сад лако увидети да је и

$$\varrho > r - r_1.$$

Такође је сад лако увидети, да је модуо збира и од ма колико уображених количина мањи од збира њихових модула. Исто се тако лако доказује, да је модуо разлике двеју уображених количина мањи од збира а већи од разлике њихових модула.

116. Да би нашли m-и степен уображене количине $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где под m разумемо цео и положан број, треба само у обрасцу 1) № 115 претпоставити, да су сви чиниоци производа једнаки са $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, па ћемо добити:

$$1.)\quad \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^m = r^m\left[\cos m\varphi + i\sin m\varphi\right],$$

образац, који се зове Moivre-ов. Дакле:

Кад је изложилац m цео и положан, добија се m-и степен израза $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ кад се његов модуо r подигне на m-и степен а аргуменат умножи с m.

Но пошто, као што смо већ једном рекли, биномни образац вреди, па били чланови бинома стварни или уображени, то по истом обрасцу добијамо такође:

$$\left[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\right]^{m} =$$

$$= \left[\left\{cos^{m}\varphi - \binom{m}{2} cos^{m-2}\varphi\, sin^{2}\varphi + \binom{m}{4} cos^{m-4}\varphi\, sin^{4}\varphi - \ldots\ldots\right\}\right.$$

$$\left. + i \left\{\binom{m}{1} cos^{m-1}\varphi\, sin\,\varphi - \binom{m}{3} cos^{m-3}\varphi\, sin^{3}\varphi + \ldots\ldots\right\}\right] 2^{m}$$

И упоређујући овај резултат с горњим 1) налазимо:

$$cos\, m\varphi = cos^{m}\varphi - \binom{m}{2} cos^{m-2}\varphi\, sin^{2}\varphi +$$

$$\binom{m}{4} cos^{m-4}\varphi\, sin^{4}\varphi - \ldots\ldots$$

$$sin\, m\varphi = \binom{m}{1} cos^{m-1}\varphi\, sin\,\varphi - \binom{m}{3} cos^{m-3}\varphi\, sin^{3}\varphi + \ldots.$$

и то су обрасци 9) и 10) у № 90, које смо тамо на други начин нашли.

Проматрајмо сада разломљене степене. Подићи $r\,(cos\varphi + i\,sin\,\varphi)$ на степен $\frac{m}{n}$ значи наћи једну уображену количину $\varrho\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$, која је таква, да подигнута на n-и степен даје као резултат m-и степен количине $r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$. Из

$$2.)\quad \left[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\right]^{\frac{m}{n}} = \varrho\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$$

следује дакле:

$$\left[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\right]^{m} = \left[\varrho\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)\right]^{n},$$

и пошто сада под m и n разумемо целе, положне и односно просте бројеве, то по обрасцу 1) налазимо једначину:

$$r^{m}(cos\, m\varphi + i\,sin\, m\varphi) = \varrho^{n}(cos\, n\theta + i\,sin\, n\theta)$$

која се распада у ове две:

$$\varrho^{n}\, cos\, n\theta = r^{m}\, cos\, m\varphi,\quad \varrho^{n}\, sin\, n\theta = r^{m}\, sin\, m\varphi.$$

Квадрирањем и сабирањем ових једначина добијамо даље:

$$\varrho^{2n} = r^{2m} \quad \text{или} \quad \varrho = r^{\frac{m}{n}}.$$

По замени ϱ-а његовом вредношћу претварају се горње једначине у ове:

$$cos\, n\theta = cos\, m\varphi,\quad sin\, n\theta = sin\, m\varphi,$$

из којих следује, да се луци $n\theta$ и $m\,\varphi$ морају разликовати за неколико целих периферија. Ако је дакле k цео положан или одречан број, онда је:

$$n\theta = m\varphi + 2k\pi, \quad \text{и} \quad \theta = \frac{m\varphi + 2k\pi}{n},$$

и сад кад ϱ и θ са њиховим вредностима заменимо у 2), добићемо:

3.) $$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\right\}$$

Пошто луци који постају из израза

$$\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{m}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n},$$

кад се броју k буду давале различне целе вредности, имају у опште различне синусе и косинусе, то из 3) закључујемо да степена количина :

4.) $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}}$$

мора имати више различних вредности, да је дакле она многозначна. И ми ћемо сад да докажемо, да количина под 4), где су m и n односно прости бројеви, има свега n вредности ни више ни мање, и да се те вредности добијају кад у десној страни једначине 3) будемо ставили $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$.

Узмимо, да смо у 4) k доиста заменили редом са ових n вредности. Онда :

1°. Резултати замене, n на броју, јесу сви међу собом различни. Јер кад би ма која два била једнака, н. пр. она два, који се добијају за $k = g$ и $k = h$, где су g и h ма која два од бројева $0, 1, 2 \ldots (n - 1)$, онда би морала вредити једначина ;

$g \neq h$

$$\frac{m\varphi + 2g\pi}{n} = \frac{m\varphi + 2h\pi}{n} + 2r\pi,$$

где је r ма какав цео број, јер само луци, који се разликују за неколико целих периферија, могу имати једнаке синусе и косинусе. Из последње једначине следује : $nr = g - h$; лева страна њена дељива је без остатка са n, дакле морала би бити дељива и десна страна а то није могуће, јер је n веће и од g и од h па дакле и од њихове разлике $g - h$. Овим је доказано то, да степена количина под 4) има n различитих вредности, које се добијају замењујући у једначини 3) k са $0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$.

2°. Осим тих n вредности не може количина 4) добити ни једну од њих различну вредност. Јер такву једну вредност могли бисмо добити за количину 4), кад бисмо у 3) заменили k једним бројем који је различан од бројева :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (n-1),$$

али сваки такав број, па био он положан или одречан, може се представити у облику: $k = \lambda n + \mu$, где је λ буди какав положан или одречан цео број различан од нуле а μ ма који од бројева горњега реда. За ту вредност од k лук $\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}$ у једначини 3) претвара се у:

$$\frac{m\varphi + 2\mu\pi}{n} + 2\lambda\pi;$$

али тај лук има исти синус и косинус са луком $\frac{m\varphi + 2\mu\pi}{n}$, који је већ једном добивен, т. ј. кад смо ставили $k = \mu$.

Према свему овоме број свију али међу собом различитих вредности количине:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}}$$

јесте $= n$, дакле имениоцу по могућству скраћенога разломка $\frac{m}{n}$, и по томе тај број не зависи од бројиоца m. Вредност коју добијамо за степену количину 4), кад у обрасцу 3) ставимо $k = 0$, зове се *најпростија* њена вредност.

Образац 3) може се и овим заменити:

$$5.) \quad [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = $$
$$= r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi)\right\}$$

и даје исте вредности n на броју за леву количину као и образац 3). Јер пре свега доказује се и овде као и код обрасца 3), да десни израз у 5) има свега n различних вредности, које се добијају за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$. Луци који се помоћу тих замена добијају из обрасца 5) јесу редом:

$$6.) \quad \frac{m}{n}\varphi,\ \frac{m}{n}\varphi + \frac{m}{n}2\pi,\ \frac{m}{n}\varphi + \frac{2m}{n}2\pi,\ \frac{m}{n}\varphi + \frac{3m}{n}2\pi, \ldots$$
$$\ldots\frac{m}{n}\varphi + \frac{(n-1)\,m}{n}2\pi.$$

Од ових лукова имају се услед обрасца 5) узети синуси и косинуси. Но ако деобе означене у другим члановима тих лукова извршимо, онда се при том добивени цели количници могу очевидно одбацити, зато што луци, који се разликују за једну или више целих периферија, имају једнак синус и једнак косинус. Дакле се у бројоцима других чланова тих лукова могу оставити само остаци при деоби нађени; те остатке, коју су мањи од делиоца n, означићемо са $r_1, r_2, r_3 \ldots r_{n-1}$. Но како су m и n односно прости бројеви, то морају сви ти остаци бити међу собом различни. И доиста ако су g и h ма која два од бројева $1, 2, 3, \ldots (n-1)$, и ако би при деоби $\frac{gm}{n}$ и $\frac{hm}{n}$ дали исти остатак, онда би $(g-h)\,m$ морало бити дељиво с n, а то очевидно није могуће. По томе су сви остаци $r_1\ r_2, r_3 \ldots r_{n-1}$, међу собом различни и мањи од n, и зато сваки од тих остатака мора бити једнак са једним од бројева $1, 2, 3, \ldots (n-1)$. Према томе, кад се у бројиоцима других чланова лукова под 6) оставе само остаци, изаћиће исти луци који се из обрасца 3) добијају за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$. Дакле оба обрасца 3) и 5) дају истих n вредности за степену количину 4).

$\frac{gm}{n} = q_1 + \frac{s_1}{n}$

$\frac{hm}{n} = q_2 + \frac{s_2}{n}$

[illegible] $s_1 = s_2$

[illegible] $(g-h)m = (q_1-q_2)n$

Образац 1) у овој №-и може се написати и овако:

$\frac{hm}{n}$

$\frac{gm}{n}$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{m} = r^{m}\left\{\cos m(\varphi + 2k\pi) + \right.$$
$$\left. + i\sin m(\varphi + 2k\pi)\right\}$$

Дакле овај образац вреди за ма какву положну целу или разломљену вредност изложиоца.

117. Ми ћемо сада предпоставити, да је изложилац степена, на који подижемо израз $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ирационалан број μ. Да би дакле добили μ-и степен тога израза, претпоставимо, да у обрасцу 5) № 116) m и n расту бесконачно и то на тај начин, да је $\lim\frac{m}{n} = \mu$, па ћемо онда добити:

$$\left[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\mu} = r^{\mu}\left\{\cos\mu\,(\varphi+2k\pi) + \right.$$

$$\left. + \, i\sin\mu\,(\varphi+2k\pi)\right\}.$$

Ако је пак изложилац степена $-m$, дакле одречан и m ма какав положан број, онда је:

$$\left[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{-m} = \frac{1}{\left[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{m}} =$$

$$= \frac{1}{r^{m}\left\{\cos m\,(\varphi+2k\pi) + i\sin m\,(\varphi+2k\pi)\right\}}.$$

Ако овде означену деобу свршимо, сматрајући при том 1 као количину, чији је модуо $= 1$ а аргуменат $= 0$, добијамо:

$$\left[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{-m} =$$

$$= r^{-m}\left[\cos\left\{-\,m\,(\varphi+2k\pi)\right\} + i\sin\left\{-\,m\,(\varphi+2k\pi)\right\}\right]$$

Ако упоредимо резултате, до којих смо дошли у № 116 и у овој, увиђамо, да образац:

$$\left[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{m} =$$

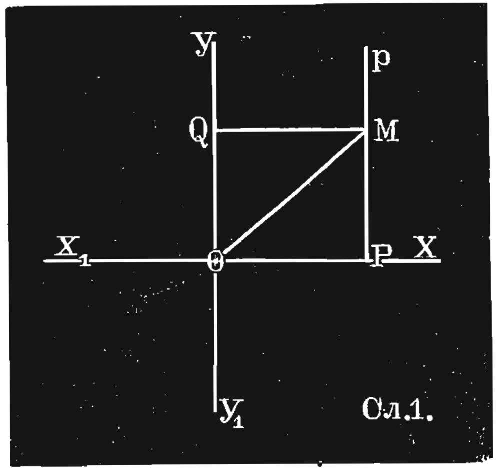
$$= r^{m}\left[\cos m\,(\varphi+2k\pi) + i\sin m\,(\varphi+2k\pi)\right]$$

вреди за сваку стварну вредност изложиоца m. Ако је m цео број, то овај образац даје за степену количину лево само једну вредност. Ако је m рационалан разломак, онда образац даје за степену количину онолико различних вредности, колико јединица има именилац по могућству скраћеног разломка m. Ако је изложилац m ирационалан број, онда степена количина има бесконачно много вредности.

Само ваља приметити, да се у последњем обрасцу под r^m има увек разумети јединцата стварна и положна вредност m-ог степена модула r.

Геометријски представљај уображених количина и операција са истима.

118. Повуцимо у равни две координатне осе X_1X и YY_1, које стоје управно једна на другој и узмимо, да нам је дата уображена количина $\alpha+\beta i$. Одмеримо на оси X_1X почев од почетка O дужину OP равну бројно, вредности од α и то на десно или на лево, како је кад α положно или одречно. Одмеримо такође и на оси YY' дужину OQ равну бројној вредности од β и то на горе или на доле, како је кад β положно или одречно. Ако кроз P и Q повучемо паралелне са осама оне ће се сећи у јединцатој тачци M, којој су α и β апсциса и ордината. Као што се види, количинама α и β или што је све једно рећи уображеном количином $\alpha+\beta i$ одређен је положај једне тачке у равни. Исто тако свакој могућој уображеној количини $x+yi$ одговара једна тачка у равни, којој је апсциса стварни део уображене количине, а ордината сачинилац од i. Обратно свакој мо-



Сл.1.

гућој тачци у равни одговара једна уображена количина, чији је стварни део раван апсциси а сачинилац од i раван ординати тачке.

Тачка M, може се у неку руку сматрати као геометријски представник уображене количине $\alpha+\beta i$. Да би полазећи од O дошли тачци M треба најпре прећи пут $OP=\alpha$, па онда скренути за угао $\frac{\pi}{2}$ и на управној Pp прећи пут $MP=\beta$. Према томе $i=\sqrt{-1}$, које стоји у $\alpha+\beta i$, можемо, ако хоћемо, узети као знак, да нам ваља, пошто смо на оси X_1X прешли пут $OP=\alpha$, скренути за $\frac{\pi}{2}$, после чега остаје, да у новом правцу, који стоји управно на пређашњем X_1X пређемо пут $MP=\beta$.

Ако је $\beta=0$ онда је тачка M на оси X_1X десно или лево од O, како је кад α положно или одречно; а ако је $\alpha=0$ онда је тачка M на оси YY_1, изнад или испод O, како је кад β положно или одречно.

Ако повучемо потег $OM=r$ и угао MOP означимо са φ, онда су r и φ полне координате тачке M. Из троугла MOP следује:

$$OP=\alpha=r\cos\varphi,\quad MP=\beta=r\sin\varphi,$$

где је

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \cos\varphi=\frac{\alpha}{r},\ \sin\varphi=\frac{\beta}{r}.$$

Као што се види потег тачке M раван је модулу а полни угао тачке M раван је аргументу и то најмањем уображене количине $\alpha+\beta i$. Дакле можемо казати, да је модулом и аргументом једне уображене количине такође одређен положај једне јединцате тачке у равни. Обратно свакој тачци у равни одговара једна уображена количина,

---

чији је модуо раван потегу а аргуменат — најмањи — раван полном углу.

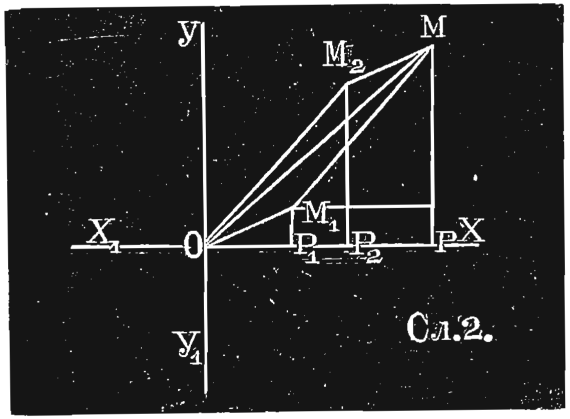
Заменити уображену количину $\alpha+\beta i$ са $r\cos\varphi+i\sin\varphi$) значи толико колико сменити преломљени пут OPM правим путем OM, који гради угао φ са X_1X.

Још ћемо додати, да се од двеју уображених количина зове већа она, чији је модуо већи. Кад модуо расте или опада, онда се каже да и уображена количина расте или опада. Кад је модуо раван 0 или $=\infty$, онда је и уображена количина $=0$ или $=\infty$.

Узмимо нека су M_1 и M_2 (сл, 2.) тачке, које одговарају уображеним количинама $\alpha_1+\beta_1 i$ и $\alpha_2+\beta_2 i$, и нека се тражи тачка M, која одговара њиховом збиру:

$$(\alpha_1+\alpha_2)+i(\beta_1+\beta_2).$$

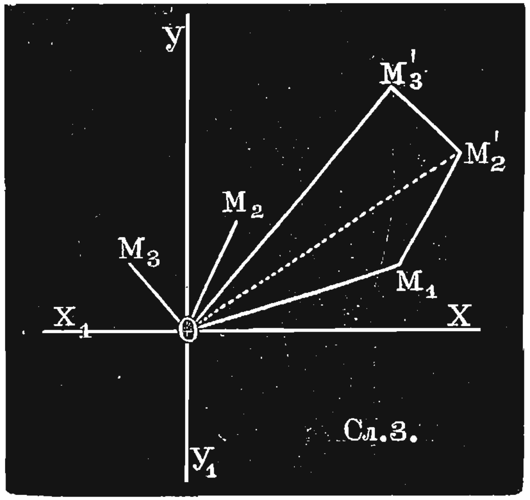
Лако је увидети, кад се само погледа на слику, да је



Сл.2.

тачка M четврто теме паралелограма начињеног из страна OM_1 и OM_2, које представљају модуле даних сабирака. Дијагонала OM тога паралелограма представља модуо збира а угао MOX аргуменат збира. Пошто је у једном троуглу једна страна мања од збира а већа од разлике осталих двеју страна, то гледајући на сл. 2 видимо, да је модуо збира двеју уображених количина мањи од збира а већи од разлике њиних модула.

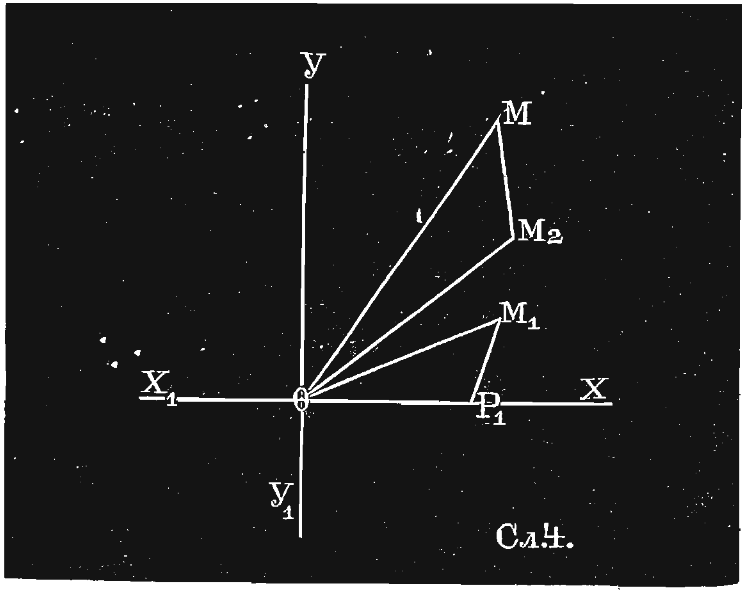
Ако се узме на ум, да се тачка M збира простије налази, кад се кроз тачку M_1 повуче паралелна са OM_2, и на њој одсече комад $M_1M = OM_2$, онда је лако увидети, како се просто може наћи тачка, која одговара збиру од ма колико уображених количина. Узмимо (сл. 3.) да се има наћи тачка, која одговара збиру уображених количина представљених тачкама M_1, M_2 и M_3. Зарад тога треба само померити н. пр. праву OM_2 паралелно до у положај $M_1M'_2$, а затим праву OM_3 опет паралелно до у положај $M'_2M'_3$. Тачка M'_3 одговара збиру уображених количина, које су представљене тачкама M_1, M_2 и M_3, и OM'_3 јесте модуо збира, који је модуо, као што се види из слике, мањи од збира модула појединих сабирака (види № 115).



Сл.3.

Исто је тако лако наћи геометријски и тачку, која одговара разлици двеју уображених количина. Ако узмемо у сл. 2., да тачка M одговара умаљенику а тачка M_1 умалиоцу, онда је тачка M_2, која одговара њиној разлици, четврто теме паралелограма, коме је OM_1 једна страна а OM дијагонала.

Да би нашли тачку, која одговара производу двеју уображених количина, ми ћемо их најпре представити тригонометријски:



Сл.4.

$$\alpha_1 + \beta_1 i = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$\alpha_2 + \beta_2 i = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Нека су у слици 4. M_1 и M_2 представници уображених чинилаца и $OM_1 = r_1$, $OM_2 = r_2$, $M_1OX = \varphi_1$, $M_2OX = \varphi_2$.

Пошто је производ:

$$(\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \right.$$
$$\left. + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

то је тачки, која том производу одговара, модуо $r_1 r_2$ а $\varphi_1 + \varphi_2$ аргуменат. Да би најпре конструисали $r_1 r_2$, одмерићемо на оси X_1X комад $OP_1 = 1$ и повући M_1P_1. Затим ћемо над OM_2 описати троугао OM_2M сличан троуглу OM_1P_1, тако да су OP_1 и OM_2 одговарајуће стране и угли M_1OP_1 и MOM_2 једнаки. Из сразмере:

$$OP_1 : OM_1 = OM_2 : OM$$

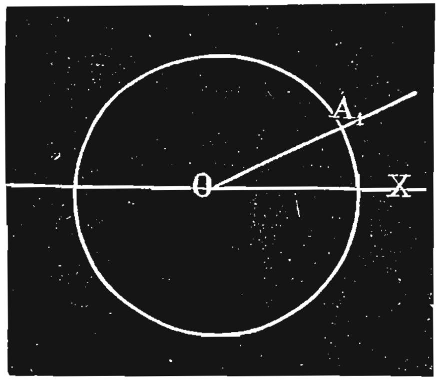
следује: $OM = OM_1 . OM_2 = r_1r_2$, дакле потег OM представља по величини модуо производа или потег тачке, која производу одговара. Из слике увиђа се, да је угао $MOX = \varphi_1 + \varphi_2$; дакле тај угао јесте аргуменат производа или полни угао тачке, која производу одговара. Дакле је M та тачка.

Као што се дакле види, да би добили тачку производа, треба потег OM_2 обрнути за угао $MOM_2 = M_1OP_1$ и после на њему одмерити комад $OM = r_1r_2$, т. ј. комад раван производу модула уображених количина.

Сад је лако из овога извести и начин, како се налази тачка количника, кад су дате тачке дељеника и делиоца.

Још нам остаје, да учинимо једну примедбу о обрасцу 3) у № 116. Тај образац даје свих n вредности за степену количину:

$$\left[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\right]^{\frac{m}{n}}.$$



Опишимо из почетка O круг, коме је полупречник $r^{\frac{m}{n}}$ и узмимо нека је угао $XOA_1 = \frac{m}{n}\varphi$. Ако полазећи од A_1, поделимо кружни обим на n једнаких делова, онда ће очевидно свака од n добивених тачака одговарати једној од n вредности степене количине.

Примене образаца №-е 116.

120. 1°. У једначини:

$$x^m y^m = (xy)^m$$

исказано је једно главно својство степених количина. Питање је сад, да ли то својство важи и онда, кад су x и y уображене количине, кад је дакле:

$$x = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi),\ \ y = r_1\,(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1).$$

Лако је доказати, да важи, јер је:

$$x^m y^m = \left[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\right]^m . \left[r_1\,(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)\right]^m =$$

$$= r^m\left[cos\,m\,(\varphi + 2k\pi) + i\,sin\,m\,(\varphi + 2k\pi)\right].$$

$$. r_1^m\left[cos\,m\,(\varphi_1 + 2k_1\pi) + i\,sin\,m\,(\varphi_1 + 2k_1\pi)\right] =$$

$$= (rr_1)^m\left[cos\,\{m\,(\varphi + \varphi_1) + (k+k_1)\,2\pi\} + \right.$$

$$\left. + i\,sin\,\{m\,(\varphi + \varphi_1) + (k+k_1)\,2\pi\}\right].$$

Ако сад овде ставимо $k+k_1 = h$, где је h онако исто произвољан цео број као k у последњем обрасцу № 117, добијамо:

$$x^m y^m = (rr_1)^m\left[cos\,m\,\{(\varphi + \varphi_1) + h2\pi\} + \right.$$

$$\left. + i\,sin\,m\,\{(\varphi + \varphi_1) + h2\pi\}\right] = \left[rr_1\,\{cos\,(\varphi + \varphi_1) + \right.$$

$$\left. + i\,sin\,(\varphi + \varphi_1)\}\right]^m = (xy)^m.$$

Дакле вреди горњи образац и за уображене количине, само што га ваља сада мало општије исказати: буди која

$= h\pi$, $k = \frac{}{n}$, $k=0$, $h=0$

2° $k \neq 0$ $h < 2 - \frac{2}{n}$

$< n-1$, $k = \frac{nh}{2}$

$\frac{nh}{2} < n-1$, $nh < 2n-2$

$h < \frac{2n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n}$ Одавде се закључује да пошто h мора бити цео број то једино [illegible]

вредност од x^m, помножена с буди којом вредношћу од y^m, даје једну од вредности израза $(xy)^m$.

[illegible] h, јер [illegible]

2°. Вредности за $\sqrt[n]{+1}$ и $\sqrt[n]{-1}$. Кад у једначини 3) или 5) у № 116 ставимо $r = 1$ а $m = 1$ и $\varphi = 0$, добијамо:

[illegible] $h < 2 - \frac{2}{n}$

$$1.) \quad (+1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Кад је $h = 1$ онда из једначине $\frac{2k}{n} = h$, следи

Одавде видимо, да n-и корен из положне јединице има n различних вредности, које се добијају, кад у 1) ставимо редом $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ Да једна од тих вредности

$\frac{2k}{n} = 1$, $k = \frac{n}{2}$

буде стварна, треба да је $\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$, дакле $\frac{2k\pi}{n} = h\pi$ или $k = \frac{hn}{2}$, где h значи буди какав цео број ни нулу не изузимајући. Али како k може бити највише $(n-1)$, то овде може само бити $h = 0$ и $h = 1$, дакле само $k = 0$ или $\frac{n}{2}$. Ако је n непарно, онда друга вредност за k отпада. јер је k цео број. Одатле дакле следује, да кад је n непарно, онда између n вредности количине $\sqrt[n]{+1}$ има само једна стварна и то она, која се добија из 1) за $k = 0$ т. ј. $+1$; све су остале уображене. Ако ли је n парно, тада $\sqrt[n]{+1}$ има две вредности стварне, $+1$ и -1, које се из 1) добијају за $k = 0$ и $k = \frac{n}{2}$.

Ако је r буди који од бројева: $1, 2, 3, \ldots (n-1)$, онда је $(n-r)$ такође један од тих бројева. Ако сад заменимо у 1) k са r и $(n-r)$ наћиђемо за $\sqrt[n]{+1}$ вредности:

$$\cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n} \qquad \text{и}$$

$$\cos\frac{2(n-r)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-r)\pi}{n} = \cos\frac{2r\pi}{n} - i\sin\frac{2r\pi}{n},$$

које су, као што се види, спрегнуте. Према томе, може се једначина 1) написати у овом за употребу згоднијем облику:

$$2.) \quad (+1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2r\pi}{n} \pm i\sin\frac{2r\pi}{n}$$

одакле се узимајући увек оба знака у рачун, добијају свих n вредности, кад се стави редом:

$$r = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots \frac{n}{2},$$

или

$$r = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots \frac{n-1}{2},$$

како је кад n парно или не. На тај начин налазимо следеће вредности за

$$\sqrt[n]{+1}$$

n парно.

$$\left.\begin{array}{l} +1, \\ \cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n} \\ \cos\frac{4\pi}{n} \pm i\sin\frac{4\pi}{n} \\ \cos\frac{6\pi}{n} \pm i\sin\frac{6\pi}{n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-2)\pi}{n} \\ -1. \end{array}\right| \; 3.)$$

n непарно.

$$\left.\begin{array}{l} +1 \\ \cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n} \\ \cos\frac{4\pi}{n} \pm i\sin\frac{4\pi}{n} \\ \cos\frac{6\pi}{n} \pm i\sin\frac{6\pi}{n} \\ \dots\dots\dots \\ \cos\frac{(n-3)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-3)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \end{array}\right\} \quad 4.)$$

3°. Ставимо сад у једначини 3) или 5) №-е 116 $r = 1$, $m = 1$ и $\varphi = \pi$, па ћемо наћи:

$$5\,)\quad (-1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \\ + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Одавде налазимо n вредности за $\sqrt[n]{-1}$ и то кад ставимо редом $k = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$. Да би једна од тих вредности била стварна, треба да је $\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} = 0$ дакле $\frac{(2k+1)\pi}{n} = h\pi$ или $k = \frac{nh-1}{2}$, где је h цео број. Али како је k цео број, који је највише $= (n-1)$, то h може бити највише $= 1$, и по томе једина вредност за k, за коју ће десна страна у 5) бити стварна

$k = \frac{nh-1}{2} \leq n-1$, $h \leq \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$.

[illegible] Пошто k мора бити цео

За $n = 1$ [illegible] $k = \frac{\quad}{2}$ [illegible]

Дакле k не би [illegible]

$k =$ [illegible] а како у k требало да буде цео број

[illegible] мора бити непарно.

јесте $k = \frac{n-1}{2}$, па и та је вредност можна само онда, кад је n непарно. Дакле кад је n непарно има само једна стварна вредност за $\sqrt[n]{-1}$, и та се добија из 5) за $k = \frac{n-1}{2}$; та је вредност $= -1$. А ако је n парно, онда су све вредности за $\sqrt[n]{-1}$ уображене.

Ако је r један од бројева: $0, 1, 2 \dots (n-1)$ онда је и $n-1-r$ један од тих бројева. За такве две вредности од k, којих збир износи $n-1$, добијају се из 5) за $\sqrt[n]{-1}$ две спрегнуте вредности, т. ј. такве, које се само знаком од i разликују. Према томе може се и једначина 5) написати у овом за употребу згоднијем облику:

$$6.)\quad (-1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2r+1)\pi}{n} \pm \\ i\sin\frac{(2r+1)\pi}{n}$$

Одавде се, узимајући опет оба знака у рачун, добијају све вредности за $\sqrt[n]{-1}$, кад се стави редом:

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \left(\frac{n}{2} - 1\right), \quad \text{или}$$

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ \dots \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

како је кад n парно или не. На тај начин налазимо ове вредности за

$$\sqrt[n]{-1}$$

n парно.

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n} \\[1ex]
\cos\frac{3\pi}{n} \pm i\sin\frac{3\pi}{n} \\[1ex]
\cos\frac{5\pi}{n} \pm i\sin\frac{5\pi}{n} \\[1ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[1ex]
\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}
\end{array}\right\} 7.)$$

n непарно.

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n} \\[1ex]
\cos\frac{3\pi}{n} \pm i\sin\frac{3\pi}{n} \\[1ex]
\cos\frac{5\pi}{n} \pm i\sin\frac{5\pi}{n} \\[1ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[1ex]
\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}
\end{array}\right\} 8.)$$

$$-1.$$

У свима случајевима, где се подела круга на $2n$ једнаких делова може геометријски извршити, могу се и вредности синуса и косинуса, који се јављају у обрасцима 3), 4), 7) и 8) алгебарски изразити. Тако налазимо за $n = 2$ из 3):

$$\sqrt{+1} = +1, \text{ и } = -1.$$

За $n = 3$ из 4):

$$\sqrt[3]{+1} = 1, = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ, = \cos 120^\circ - \\ - i\sin 120^\circ.$$

Како је $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ и

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ то је:}$$

$$\sqrt[3]{+1} = 1, \; \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \; \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Свака од последњих двеју вредности јесте квадрат друге. Ако се дакле друга од ове три вредности означи са α, онда су 1, α и α^2 три кубна корена положне јединице.

За $n = 4$ налазимо из 3):

$$\sqrt[4]{+1} = 1, \; +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \; -1.$$

Примедба. Пошто је:

$$\pm A = A.(\pm 1), \text{ дакле и } \sqrt[n]{\pm A} = \sqrt[n]{A}.\,\sqrt[n]{\pm 1},$$

и $\sqrt[n]{\pm 1}$ многозначна количина, то дакле n-и корен из сваког положног или одречног броја $\pm A$ има n различних вредности, које се добијају, кад се буди која вредност $\sqrt[n]{A}$ н. пр. обична тако звана аритметична помножи са свима вредностима $\sqrt[n]{\pm 1}$, где ваља узети горњи или доњи знак, како се кад тражи $\sqrt[n]{+A}$ или $\sqrt[n]{-A}$.

Изложилачне функције са уображеним изложиоцем.

121. У № 86 ми смо изложилачну функцију e^x схватили као јединцату стварну и положну вредност, којој при бесконачном рашћењу m-а тежи израз :

$$1.)\qquad \left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

и тамо је x био стваран број. Ако у овом изразу место x узмемо уображени број $(x+yi)$ онда ће израз :

$$2.)\qquad \left(1+\frac{x+yi}{m}\right)^m$$

бити једнозначан то јест имаће једну вредност само у оном случају, кад је m цео број. До сада т. ј. док је изложилац x био стваран, изложилачна функција била је једнозначна. Ако хоћемо, да јој та особина остане и у оном случају, где је изложилац уображен, то треба при проширењу дефиниције, које ће сад бити нужно, узимати у рачун увек само најпростију вредност функције 2). Сад, кад је изложилац изложилачне функције уображен, ми је дефинишемо овако :

Изложилачна функција e^{x+yi} јесте граница, којој при бесконачном рашћењу m-а тежи најпростија вредност израза :

$$\left(1+\frac{x+yi}{m}\right)^m,$$

Сада остаје, да се нађе граница последњег израза. Зарад тога ставимо :

$$3.)\quad \left(1+\frac{x}{m}\right)=r.\cos\varphi \quad \text{и} \quad 4)\ \frac{y}{m}=r.\sin\varphi.$$

Пошто m расте бесконачно, услед чега лук φ тежи нули, то ми можемо одмах замислити, да је m постало већ толико велико да је $r.\cos\varphi$ положно, да дакле φ лежи између : $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Пошто даље при израчунавању најпростије вредности израза 2.) не треба аргументу основе додавати $2k\pi$, то помоћу 3) и 4) добијамо као најпростију вредност тог израза :

$$5.)\quad \left(1+\frac{x+yi}{m}\right)^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

и сада треба сазнати границу, којој тежи десни израз, или што на једно излази, границе, којима теже r^m и $m\varphi$, када m расте бесконачно.

Из 3) и 4) налазимо :

$$6.)\qquad r^m=\left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}m}$$

где је у загради трином положан.

Пошто r^m треба да је положан број, то се и десно мора узети само јединцата стварна и положна вредност степене количине.

Ако краткоће ради ставимо:

7.) $$\frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2} = \frac{1}{n}$$

где n расти бесконачно заједно са m, онда једначина 6) може се и овако написати:

$$r^m = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{m}{2n}}$$

За $m = \infty$ и $n = \infty$ налазимо из 7):

$$lim\,\frac{m}{2n} = x \text{ дакле: } 8)\ lim\,r^m = e^x.$$

Из 3) и 4) сљедује даље:

9.) $$mtg\,\varphi = m\,\varphi.\,\frac{sin\,\varphi}{\varphi}\cdot\frac{1}{cos\,\varphi} = \frac{y}{1+\frac{x}{m}}$$

Пошто, као што горе приметисмо, при бесконачном рашћењу m-а лук φ тежи нули, то је:

$$lim\,\frac{sin\,\varphi}{\varphi} = 1;\ lim\,cos\,\varphi = 1.$$

Дакле онда из 9) сљедује:

10.) $$lim\,m\varphi = y$$

Сада, кад у 5) пустимо да m расте бесконачно, онда граница леве стране јесте e^{x+yi} а граница десне стране јесте израз, који постаје, кад се r^m и $m\varphi$ замене вредностима из 8) и 10) т. ј. са e^x и y. На тај начин добијамо:

11.) $$e^{x+yi} = e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y).$$

И у овој једначини исказана је дефиниција изложилачне функције са уображеним изложиоцем.

На сличан начин може се радити и са општијом изложилачном функцијом a^x. Јер за стварно x вреди једначина:

$$a^x = e^{xla} = lim\left(1+\frac{xla}{m}\right)^m$$

и кад овај образац сматрамо као дефиницију количине a^x и онда, кад је изложилац уображен, добијамо:

12.) $$a^{x+yi} = a^x\left[cos\,(yla) + i\,sin\,(yla)\right].$$

Помоћу овог обрасца лако је доказати да образац:

$$a^x.\,a^y = a^{x+y},$$

који вреди за стварно x и y, остаје у важности, кад су они и уображени.

И доиста, кад помножимо једначину 12) са једначином:

$$a^{x_1+y_1i} = a^{x_1}\left[cos\,(y_1la) + i\,sin\,(y_1la)\right],$$

добијамо:

$$a^{x+yi} . a^{x_1+y_1 i} = a^{x+x_1} \left\{ cos\,[(y+y_1)\, la] + i\, sin\,[(y+y_1)\, la] \right\}$$

$$= a^{(x+x_1)+i(y+y_1)}$$

Примедба: — Из 11) сљедује, да се једна уображена количина, којој је r модуо а φ аргуменат, може представити са $r . e^{\varphi i}$.

Степени синуса и косинуса изражени синусима и косинусима умножених лукова.

122. Кад у обрасцу 11.) № 121 ставимо $x = 0$ и онда ставимо место y најпре $+x$ а затим $-x$, добијамо:

$$1.) \quad e^{xi} = cos\, x + i\, sin\, x. \quad e^{-xi} = cos\, x - i\, sin\, x.$$

Сабирањем и одузимањем ових једначина добија се даље:

$$2.)\ 2cos\, x = e^{xi} + e^{-xi};\ 3.)\ 2i\, sin\, x = e^{xi} - e^{-xi}.$$

Подигнимо сад ове две једначине на m-ни степен, где под m разумевамо цео и положан број, па ћемо добити:

$$4.) \qquad 2^m\, cos^m x =$$

$$= e^{mxi} + \binom{m}{1} e^{(m-2)xi} + \binom{m}{2} e^{(m-4)xi} + \binom{m}{3} e^{(m-6)xi} + \ldots$$

$$+ \binom{m}{3} e^{-(m-6)xi} + \binom{m}{2} e^{-(m-4)xi} + \binom{m}{1} e^{-(m-2)xi} +$$

$$+ e^{-mxi}$$

$$5.) \qquad 2^m\, i^m\, sin^m\, x =$$

$$= e^{mxi} - \binom{m}{1} e^{(m-2)xi} + \binom{m}{2} e^{(m-4)xi} - \binom{m}{3} e^{(m\ \ 6)xi} + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-3} \binom{m}{3} e^{-(m-6)xi} + (-1)^{m-2} \binom{m}{2} e^{-(m-4)xi} +$$

$$+ (-1)^{m-1} \binom{m}{1} e^{-(m-2)xi} + (-1)^m e^{-mxi}.$$

Из једначине 4), кад десно два и два члана, који су од обадва краја једнако далеко, саберемо, добијамо кад је m парно:

$$6.) \qquad 2^m\, cos^m\, x =$$

$$= (e^{mxi} + e^{-mxi}) + \binom{m}{1} (e^{(m-2)xi} + e^{-(m-2)xi}) +$$

$$+ \binom{m}{2} (e^{(m-4)xi} + e^{-(m-4)xi}) + \ldots + \binom{m}{\frac{m}{2}}$$

јер је по обрасцу 1.) $e^{(m-m)i} = 1$.

Кад једначину 1) подигнемо на k-ти степен, где је k ма какав цео број, добијамо:

$$7.)\ e^{kxi} = cos\, kx + i\, sin\, kx. \quad e^{-kxi} = cos\, kx - i\, sin\, kx$$

одакле сабирањем:

$$8.) \qquad e^{kxi} + e^{-kxi} = 2\ cos\, kx.$$

Кад се помоћу овог обрасца биноми у заградама једначине 6) замене њиховим вредностима и по том једначина скрати са 2, добијамо образац:

$$9.)\qquad 2^{m-1} \cos^m x =$$

$$= \cos mx + \binom{m}{1} \cos (m-2) x + \binom{m}{2} \cos (m-4) x + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \binom{m}{\frac{m}{2}}.$$

који вреди за парно *m*.

Ако је пак *m* непарно, онда из једначине под 4) сљедује:

$$10.)\qquad 2^m . \cos^m x =$$

$$= (e^{mxi} + e^{-mxi}) + \binom{m}{1} (e^{(m-2)xi} + e^{-(m-2)xi}) +$$

$$+ (e^{(m-4)xi} + e^{-(m-4)xi}) + \dots + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} (e^{xi} + e^{-xi}).$$

Замењујући овде биноме у заградама њиховим вредностима, које се по обрасцу 8) лако добијају, и делећи по том са 2, налазимо:

$$11.)\qquad 2^{m-1} \cos^m x =$$

$$= \cos mx + \binom{m}{1} \cos (m-2) x + \binom{m}{2} \cos (m-4) x + \dots.$$

$$+ \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos x$$

Узмимо сада једначину 5), у којој ћемо најпре сматрати *m* као паран број, и саберимо десно два и два члана, који су од оба краја једнако далеко, па ћемо добити

$$2^m i^m \sin^m x =$$

$$= (e^{mxi} + e^{-mxi}) - \binom{m}{1} (e^{(m-2)xi} + e^{-(m-2)xi}) +$$

$$+ \binom{m}{2} (e^{(m-4)xi} + e^{-(m-4)xi}) - \dots . + (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{\frac{m}{2}}.$$

Кад на биноме у заградама применимо образац 8), затим поделимо једначину са 2 и i^m заменимо са $(-1)^{\frac{m}{2}}$ наћићемо:

$$12.)\qquad \left(-1\right)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \sin^m x =$$

$$= \cos mx - \binom{m}{1} \cos (m-2) x + \binom{m}{2} \cos (m-4) x - \dots$$

$$+ \left(-1\right)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2} \binom{m}{\frac{m}{2}}$$

образац, који вреди за *m* парно.

Ако најзад у једначини 5) сматрамо *m* као непаран број, и саберемо опет два и два члана једнако удаљена од обадва краја, наћићемо:

13.) $$2^m i^m \sin^m x =$$

$$= (e^{mxi} - e^{-mxi}) - \binom{m}{1} (e^{(m-2)xi} - e^{-(m-2)xi}) +$$

$$+ \binom{m}{2} (e^{(m-4)xi} - e^{-(m-4)xi}) - \dots$$

$$+ \left(-1\right)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{\frac{m-1}{2}} (e^{xi} - e^{-xi})$$

Одузимањем једначина 7) добијамо:

$$e^{kxi} - e^{-kxi} = 2i \sin kx.$$

Кад овај образац применимо на једначину 13), затим поделимо обе стране са $2i$ и најзад лево i^{m-1} заменимо са $\left(-1\right)^{\frac{m-1}{2}}$ наћићемо образац:

14.) $$\left(-1\right)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \sin^m x =$$

$$= \sin mx - \binom{m}{1} \sin (m-2) x + \binom{2}{m} \sin (m-4) x - .$$

$$\dots \left(-1\right)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \sin x$$

који вреди за m непарно Обрасци: 9), 11), 12) и 14) јесу тражени обрасци.

Логаритми уображених бројева.

123. Ако су u и v стварни бројеви и $e^u = v$, где је e основица природне логаритамске системе, онда се као што је познато, u зове логаритам броја v.

Ми ћемо ту исту дефиницију задржати и за случај, кад је u, па дакле и v уображено. Ако је дакле:

$$e^{p+qi} = x + yi$$

ми ћемо казати, да је:

1.) $$l\,(x + yi) = p + qi$$

Прва једначина, може се написати (11 № 121) и овако:

$$e^p (\cos q + i \sin q) = x + yi$$

одакле следује:

2.) $$e^p \cos q = x \text{ и } e^p \sin q = y.$$

Из ових једначина дају се израчунати p и q. Из њих добијамо:

$$e^{2p} = x^2 + y^2 \text{ и } e^p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и $$p = \frac{1}{2}\, l\,(x^2 + y^2)$$

где корен треба узети са знаком $+$, јер за стварна p не може e^p никад бити одречно.

Из 2.) следује, кад се e^p замени вредношћу:

3.) $$\cos q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ и } \sin q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и $$tg\, q = \frac{y}{x},\ q = arc\, tg \frac{y}{x} \pm m\pi$$

где је m ма какав цео и положан број. Да би m изближе одредили, ставићемо: $y = 0$, па ћемо добити:

$$q = \pm m\pi, \quad \cos q = \frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

и пошто се корен мора узети са знаком $+$, то је онда:

$$\cos q = \cos m\pi = +1 \text{ за } x \text{ положно}$$

$$\cos q = \cos m\pi = -1 \text{ за } x \text{ одречно.}$$

У првом случају мора дакле m бити парно а у другом непарно. Ако је дакле k ма какав цео и положан број, добијамо из једначине 1.):

4.) $$l\,(x+yi) = \frac{1}{2}\,l\,(x^2+y^2) + i\left\{arc\,tg\,\frac{y}{x} \pm 2k\pi\right\}$$

5.) $$l\,(x+yi) = \frac{1}{2}\,l\,(x^2+y^2) + i\left\{arc\,tg\,\frac{y}{x} \pm (2k+1)\,\pi\right\}$$

од којих једначина прва вреди за $x > 0$ а друга за $x < 0$. Логаритам једног уображеног броја има дакле бесконачно много вредности.

За $k = 0$ добија се тако звана најпростија вредност логаритма од $x + yi$.

Из 4.) добијамо: за $x = +1$ и $y = 0$

$$l\,(+1) = \pm\, 2k\pi i$$

а из 5.) за $x = -1$ и $y = 0$

$$l\,(-1) = \pm\,(2k+1)\,\pi i.$$

Према томе могу се обрасци 4) и 5), заменити овима:

6.) $$l\,(x+yi) = \frac{1}{2}\,l\,(x^2+y^2) + i\,arc\,tg\,\frac{y}{x} + l(+1)$$

7.) $$l\,(x+yi) = \frac{1}{2}\,l\,(x^2+y^2) + i\,arc\,tg\,\frac{y}{x} + l(-1).$$

Једначина:

8.) $$e^x\,e^y = e^{x+y}$$

вреди, као што то из № 121 следује и за уображене вредности x-а и y-а. Ако дакле узмемо, да су x и y уображени и

$$e^x = \xi\,, \quad e^y = \eta$$

Онда из 8) добијамо:

$$l\,(\xi\eta) = l\xi + l\eta.$$

дакле правило: да је логаритам производа раван збиру логаритама чинилаца вреди и код уображених бројева.

Тригонометријске функције уображених лукова.

124 Једначине 2) и 3) у № 122 могу се и овако написати:

1.) $$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$$

и оне вреде за сваку стварну вредност лука x. Ми ћемо те једначине сматрати, као дефиниције за $\sin x$ и $\cos x$ и у оном случају, кад је x уображено. Према томе дакле биће:

$$2.)\quad \cos xi = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2};\ \sin xi = i.\frac{e^{x} -- e^{-x}}{2}$$

Ако заменимо у 1) x са $x + yi$ добијамо:

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{xi-y} + e^{-xi+y}}{2}$$

или кад овде заменимо e^{xi} и e^{-xi} вредностима 1) у № 120.

$$3.)\quad \cos(x+yi) = \cos x.\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i \sin x.\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

На сличан начин налазимо и:

$$4.)\quad \sin(x+yi) = \sin x\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i \cos x\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

Једначине 3) и 4) могу се с обзиром на обрасце под 2) и овако представити:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos(yi) - \sin x \sin(yi)$$

$$\sin(x+yi) = \sin x \cos(yi) + \cos x \sin(yi)$$

Дакле обрасци тригонометријски за $\sin(a + b)$ и $\cos(a + b)$ вреде и онда, кад је b уображено.

Кад једначине 3) и 4) помножимо са једначинама, које из њих постају, кад се x и y замене са x_1 и y_1, добијамо:

$$\cos[(x+yi) + (x_1+y_1 i)] = \cos(x+yi)\cos(x_1+y_1 i) -$$
$$- \sin(x+yi)\sin(x_1+y_1 i).$$

и $$\sin[(x+yi) + (x_1+y_1 i)] = \sin(x+yi)\cos(x_1+y_1 i) +$$
$$\cos(x + yi)\sin(x_1 + y_1 i).$$

Дакле вреде обрасци за $\sin(a + b)$ и $\cos(a + b)$ и онда кад су и a и b уображени и с тога и сви остали тригонометријски обрасци, у којима се јављају само синус и косинус.

Једначине:

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x};\ cosec\, x = \frac{1}{\sin x}$$

сматрају се као дефиниције за $tg\, x$, $cotg\, x$, $\sec x$ и $cosec\, x$ и у оном случају где је лук x уображен.

Изврнуте тригонометријске или циклометријске функције.

125. Под $arc \sin(u+vi)$ ми ћемо од сада разумевати лук, коме је $u+vi$ синус, и који лук постаје у исти мах раван нули кад и $x + vi$.

Узмимо нека је:

$$1.)\quad arc \sin(u + vi) = x + yi,$$

Одатле сљедује:

$$2.)\quad \sin(x + yi) = u + vi.$$

Кад овде заменимо $\sin(x + yi)$ вредношћу 4) у № 124 добијамо:

$$\sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = u + vi,$$

Одакле:

$$\sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} = u\,; \quad \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = v$$

или:

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{u}{\sin x}\,; \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{v}{\cos x}.$$

Одавде добијамо даље лако:

3.) $$e^y = \frac{u}{\sin x} + \frac{v}{\cos x}\,; \quad e^{-y} = \frac{u}{\sin x} - \frac{v}{\cos x}$$

или кад обе једначине помножимо:

4.) $$1 = \frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x}$$

или што је све једно:

$$\sin^2 x \cos^2 x = u^2 \cos^2 x - v^2 \sin^2 x$$

Кад овде *sin x* изразимо са *cos x* и добивену једначину — биквадратну — решимо, налазимо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left\{1 - u^2 - v^2 \pm \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4v^2}\right\}$$

где важи само горњи знак, јер је $\cos^2 x > 0$.

Дакле је:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left\{1 - u^2 - v^2 + \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4v^2}\right\}$$

а одатле:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left\{1 + u^2 + v^2 - \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4v^2}\right.$$

или такође:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left\{1 + u^2 + v^2 - \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4v^2}\right\}$$

Ако краткоће ради ставимо:

$$U = \sqrt{\frac{1 + u^2 + v^2 - \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4v^2}}{2}}$$

$$V = \sqrt{\frac{1 - u^2 - v^2 + \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4v^2}}{2}}$$

и узмемо корене положно, добијамо:

5.) $$\sin x = \pm U, \quad \cos x = \pm V$$

и одатле:

6.) $$x = \arcsin(\pm U) = \pm \text{arc. sin. } U$$

Који од два знака треба узети, лако је одредити, ако претпоставимо један особени случај.

Узмимо $v = 0$, и $1 > u > 0$; онда из једначине 6) сљедује:

$$x = \pm \arcsin \sqrt{u^2}$$

Но ми већ знамо да је $x = \arcsin u$ и да лежи између 0 и $\frac{1}{2}\pi$, дакле онда вреди знак $+$. Ако је пак

$-1 < u < 0$, онда x лежи између 0 и $-\frac{\pi}{2}$, дакле тада, пошто се $\sqrt{u^2}$ узима са знаком $+$, мора се од два знака узети онај доњи т. ј. —. У оба случаја пак $\cos x$ мора се узети са знаком $+$. Дакле је на тај начин:

за $u > 0$, $\sin x = + U$, $\cos x = V$, $x = \operatorname{arc\,sin}(+U)$

за $u < 0$, $\sin x = - U$ $\cos x = V$, $x = \operatorname{arc\,sin}(-U)$

Из обрасца 3) добијамо даље:

$$y = l\left(\frac{u}{\sin x} + \frac{v}{\cos x}\right) = l\left(\pm\frac{u}{U} + \frac{v}{V}\right)$$

И кад у једначини 1.) заменимо x и y вредностима налазимо:

$$7.)\quad \operatorname{arc\,sin}(u+vi) = \operatorname{arc\,sin}(\pm U) + i\,l\left(\pm\frac{u}{U} + \frac{v}{V}\right),$$

где горњи или доњи знаци вреде, како је кад $u \gtrless 0$.

На сличан начин могли бисмо радити и са $\operatorname{arc\,cos}(u+vi)$; али је боље и лакше поћи од обрасца:

$$\operatorname{arc\,cos}(u+vi) = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,sin}(u+vi)$$

која се може сматрати као дефиниција за $\operatorname{arc\,cos}$. Ако у тој једначини заменимо $\operatorname{arc\,sin}(u+vi)$ вредношћу под 7), наћићемо.

$$8.)\quad \operatorname{arc\,cos}(u+vi) = \operatorname{arc\,cos}(\pm U) - \frac{1}{2}\,l\left(\pm\frac{u}{U} + \frac{v}{V}\right).$$

Даље је на основу 4) и 5)

$$\frac{u^2}{U^2} - \frac{v^2}{V^2} = 1 \quad \text{и} \quad \pm\frac{u}{U} + \frac{v}{V} = \frac{1}{\pm\frac{u}{U} - \frac{v}{V}}$$

и зато једначина 8) изгледа сада овако:

$$9.)\quad \operatorname{arc\,cos}(u+vi) = \operatorname{arc\,cos}(\pm U) + i l\left(\pm\frac{u}{U} - \frac{v}{V}\right)$$

где односно знакова вреди оно, што смо горе рекли.

Још ћемо у овој №-и да узмемо у разматрање два особена случаја. Ставимо у 7) $v = 0$, и претпоставимо $u > 1$ бројно онда је:

$$\sqrt{(1-u^2)^2} = u^2-1,\ U = 1,\ \operatorname{arc\,sin} U = \frac{1}{2}\pi,$$

тада је још $V = 0$, и $\frac{v}{V} = \frac{0}{0}$.

Да би нашли праву вредност последњег разломка, узмимо на ум, да је:

$$\frac{v^2}{V^2} = \frac{2v^2}{\sqrt{(1-u^2-v^2)^2 + 4v^2} + 1 - u^2 - v^2}$$

Ако урационалимо имениоца, добићемо:

$$\frac{v^2}{V^2} = \frac{\sqrt{(1-u^2-v^2)^2+4v^2}-(1-u^2-v^2)}{2}$$

а одатле за $v = 0$ и $u^2 > 1$:

$$\frac{v^2}{V^2} = u^2 - 1 \quad \text{и} \quad \frac{v}{V} = \sqrt{u^2-1}$$

За $v = 0$ и $u^2 > 1$ добијамо сад из 7):

10. $$arc\,sin\,u = \pm\frac{1}{2}\pi + il(\pm u + \sqrt{u^2-1}),$$

где важи знак + или —, како је кад $u \gtrless 0$.

Кад је дакле $u > 1$ бројно т. ј. не гледећи на знак, *arc sin u* јесте уображен, а тако и треба да је.

Ако у 7) ставимо $u = 0$, онда је $U = 0$, $V = 1$ и $\frac{u}{U} = \frac{0}{0}$. Да би нашли праву вредност последњег разломка, напишимо:

$$\frac{u^2}{U^2} = \frac{2u^2}{1+u^2+v^2-\sqrt{(1+u^2+v^2)^2-4v^2}}$$

Кад овде имениоца урационалимо, добијамо:

$$\frac{u^2}{U^2} = \frac{1+u^2+v^2+\sqrt{(1+u^2+v^2)^2-4u^2}}{2}$$

Одакле за $u = 0$:

$$\frac{u^2}{U^2} = 1 + v^2 \quad \text{и} \quad \frac{u}{U} = \sqrt{1+v^2}$$

Дакле за $u = 0$, једначина 7) претвара се у:

11). $$arc\,sin\,vi = il(\sqrt{1+v^2}+v).$$

126. Под *arc tg (u+vi)* ми разумевамо лук, коме је $u + vi$ тангента, и који лук постаје у исти мах раван нули, кад и $u + vi$. Сад узмимо нека је:

1.) $$arc\,tg\,(u+vi) = x + yi$$

дакле:

2.) $$tg\,(x+yi) = u + vi$$

Ако узмемо на ум, да је:

$$tg\,(x+yi) = \frac{sin\,(x+yi)}{cos\,(x+yi)}$$

па заменимо *sin (x+yi)* и *cos (x+yi)* вредностима 4) и 3) у № 124 добијамо:

$$\frac{sin\,x\,(e^y+e^{-y}) + i\,cos\,x\,(e^y-e^{-y})}{cos\,x\,(e^y+e^{-y}) - i\,sin\,(e^y-e^{-y})} = \frac{tg\,x+iP}{1-iP\,tgx}$$

где је:

3.) $$P = \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}.$$

Сада једначина 2) изгледа овако:

$$\frac{tg\,x + i\,P}{1 - i\,P.\,tg\,x} = u + vi$$

Из ње сљедује даље:

$$tg\,x = u + v.\,P\,tg\,x,\quad P = v - u\,P\,tg\,x.$$

Из прве добијамо:

$$4.)\qquad tg\,x = \frac{u}{1 - vP}$$

и кад се то у другу замени:

$$v^2\,P^2 - (1 + u^2 + v^2)\,P = -v$$

одакле:

$$5.)\quad P = \frac{1 + u^2 + v^2 \pm \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4v^2}}{2v}$$

Што се тиче тога, који од два знака треба узети, треба имати на уму, да за $v = 0$, једначина 4.) прелази у $tg\,x = u$, да дакле мора бити $v\,P = 0$, а за то се изискује, да у 5.) стоји доњи знак. Ако зарад краткоће ставимо:

$$Q = \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4\,v^2}$$

где корен ваља узети положно, онда имамо:

$$6.)\qquad P = \frac{1 + u^2 + v^2 - Q}{2v^2}$$

Из 4) добијамо:

$$x = arc\,tg\,\frac{u}{1 - vP} \pm k\pi,$$

где је k ма какав цео број; али како је за $u = 0$ и $x = 0$, то онда ваља узети $k = 0$.

Из једначине 3) следује најзад:

$$y = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+P}{1-P}\right),$$

где за P ваља ставити вредност из 6). Ако у 1) заменимо x и y са нађеним вредностима, добиђемо:

$$7.)\qquad arc\,tg\,(u+vi) =$$

$$= arc\,tg\,\frac{2u}{1 - u^2 - v^2 + Q} + i\,\frac{1}{2}\,l\left\{\frac{u^2 + (1+v)^2 - Q}{Q - u^2 - (1-v)^2}\right\}$$

Ако је $u = 0$, онда је $Q = 1 - v^2$ или $= v^2 - 1$ како је кад $v^2 \lessgtr 1$, дакле је:

$$\text{за } v^2 < 1,\ arc\,tg\,(vi) = i\,\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

$$\text{за } v^2 > 1,\ arc\,tg\,(vi) = i\,\frac{1}{2}\,l\left(\frac{v+1}{v-1}\right)$$

Помоћу обрасца:

$$arc\,cotg\,(u+vi) = \frac{1}{2}\,\pi - arc\,tg\,(u+vi)$$

у коме је исказана дефиниција израза: $arc\,cotg\,(u+vi)$, добија се вредност овога, кад се други члан десно замени својом вредношћу из 7).

Уображени или комплексни редови.

127. 1°. Кад су чланови једног бесконачног реда

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\dots\dots$$

комплексни бројеви, дакле кад је ред облика:

$$1.)\quad (a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)+(a_3+b_3 i)+\dots\dots$$

онда се он зове уображен или комплексан бесконачни ред. Такав један ред можемо очевидно сматрати као збир од два стварна реда, од којих је један помножен са уображеном јединицом i, дакле:

$$2.)\ u_1+u_2+u_3+\dots=(a_1+a_2+a_3+\dots)$$
$$+\,i\,(b_1+b_2+b_3+\dots)$$

Ако означимо са S_n збир првих n чланова уображеног реда 1) а са A_n и B_n збирове првих n чланова редова:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots\dots$$
$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\dots\dots$$

биће:

$$S_n=A_n+i\,B_n.$$

Кад S_n при бесконачном рашћењу n-а тежи једној одређеној и коначној граници, а за то се изискује, да A_n и B_n такође теже одређеним и коначним границама, онда се уображени ред 1) зове збирљив.

Кад S_n при бесконачном рашћењу n-а бесконачно расти, а то ће бити, ако A_n или B_n, или обоје расту бесконачно, онда се ред 1) зове незбирљив.

Кад најзад једна од количина A_n и B_n тежи једној одређеној и коначној граници, а друга различним одређеним границама, или је ово последње случај са обема, онда се ред 1) зове неодређен.

Као што се дакле види:

Уображен ред 1) биће збирљив, ако су збирљива оба реда:

$$3.)\quad \begin{array}{l} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots\dots \\ b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\dots\dots \end{array}$$

Ред 1) биће незбирљив, ако је један од редова под 3) или ако су оба незбирљиви.

И најзад, ред 1) биће неодређен, ако је један од редова под 3) збирљив, а други неодређен, или ако су оба неодређена.

Ако су ρ_1, ρ_2, ρ_3,... модули чланова реда 1), онда је:

$$\rho_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2},\ \rho_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2},\dots\dots\ \rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\dots\dots$$

одакле сљедује, да је:

$$\rho_1>a_1 \text{ и } \rho_1>b_1;\ \rho_2>a_2 \text{ и } \rho_2>b_2\dots\dots$$
$$\rho_n>a_n \text{ и } \rho_n>b_n$$

Дакле видимо да су чланови редова под 1) мањи од одговарајућих чланова у реду модула:

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4\ \dots\dots$$

Ако је дакле ред модула збирљив, онда су збирљиви и редови под 3) и ми можемо дакле казати:

Уображени ред 1) јесте збирљив, кад је ред, састављен из модула његових чланова збирљив.

2°. Кад је ред, који постаје из модула чланова уображеног реда 1) збирљив, услед чега је збирљив и сам ред 1), онда се чланови реда 1) могу распоредити и на ма који други начин, а да се збир уображеног реда не промени.

И доиста пошто је ред 1) збирљив, онда су збирљиви и редови под 3) и то независно од знакова њихових чланова, јер су чланови редова под 3) мањи од одговарајућих чланова у реду модула, којег су реда чланови положни. Према томе могу се чланови редова под 3) распоређивати ма како а да се вредност тих редова не промени. Одатле следује, да се могу и чланови уображеног реда без промене његове вредности ма како распоредити.

3°. Ако је у бесконачном реду:

$$4.)\qquad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots\ldots$$

x уображен број дакле $x = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и ако је тај ред збирљив за вредност x-овог модула $z = r$, он је онда збирљив и за сваку мању вредност тога модула. Ако ли је ред 4) незбирљив за поменуту вредност x-овог модула z, он је незбирљив и за сваку већу вредност тога модула.

Јер ако означимо са α_n и α_{n+1} модуле n-ог и $(n+1)$-ог сачиниоца реда 4), онда је:

$$5.)\qquad \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z$$

количник између $(n+1)$-ог и n-ог члана онога реда, који постаје из модула чланова реда 4). Ако је сад за

$z = r$ ред модула па дакле и ред 4) збирљив, онда израз под 5) може бити највише $= 1$. Дакле за сваку вредност x-овог модула z, која је мања од r, биће:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z < 1$$

и због тога биће онда ред, који постаје из модула чланова реда 4) па дакле и сам ред 4) збирљив за сваку вредност x-овог модула z мању од r. Исто се тако доказује и други део онога, што смо горе тврдили.

Као што се види има увек једна вредност за x-ов модуо $z = r$, која је таква, да је за сваку вредност тога модула мању од r ред 4) збирљив а за сваку већу незбирљив. Таква вредност x-овог модула, као што је поменута r, зове се *полупречник збирљивости* реда 4).

Ако уображене бројеве представимо на познати начин тачкама у равни, онда ћемо увидети, да је ред 4) збирљив за све вредности уображене променљиве x, којима одговарају тачке у унутрашњости круга описаног из почетка као средишта а са полупречником, који је једнак полупречнику збирљивости реда. Тај круг зове се *круг збирливости* реда.

4°. Уображени редови налазе у рачунима врло честих примена. Ми ћемо овде на једном примеру показати примену истих при сумирању стварних редова Ставимо у геометријској постепености:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

$$x = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

па ћемо добити:

$$1.)\ 1+z(\cos\varphi+i\sin\varphi)+z^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots$$

$$+z^{n-1}\left[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi\right]=$$

$$=\frac{1-z^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}{1-z(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$=\frac{1-z\cos\varphi-z^n\cos n\varphi+z^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}+$$

$$+i\,\frac{z\sin\varphi-z^n\sin n\varphi+z^{n+1}\sin(n-1)\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2},$$

ако т. ј. бројиоца и имениоца помножимо са $1-z\cos\varphi+iz\sin\varphi$ па затим сведемо.

Једначина 1) распада се (№ 112) на ове две

$$2.)\ 1+z\cos\varphi+z^2\cos 2\varphi+\ldots+z^{n-1}(\cos(n-1)\varphi$$

$$=\frac{1-z\cos\varphi-z^n\cos n\varphi+z^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}$$

$$3.)\ z\sin\varphi+z^2\sin 2\varphi+z^3\sin 3\varphi+\ldots+z^{n-1}\sin(n-1)\varphi$$

$$=\frac{z\sin\varphi-z^n\sin n\varphi+z^{n+1}\sin(n-1)\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}.$$

Редови под 2) и 3) постају бесконачним, кад пустимо да n расти бесконачно и они су збирљиви, ако је z бројно мање од 1, као што из њиховог извођења из горње геометријске постепености слѣдује. Ако дакле претпоставимо, да је $z<1$ бројно, онда је за $n=\infty$ $\lim z^n=0$ и ми добијамо из 2) и 3):

$$4.)\ 1+z\cos\varphi+z^2\cos 2\varphi+z^3\cos 3\varphi+\ldots.$$

$$=\frac{1-z\cos\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}$$

$$5.)\ z\sin\varphi+z^2\sin 2\varphi+z^2\sin 3\varphi+\ldots.$$

$$=\frac{z\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}.$$

Ако у 2) и 3) ставимо $z=1$, онда због

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{1}{2}\alpha \quad \text{и}$$

$$\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

претвара се десна страна једначине 2) у:

$$\frac{1-\cos\varphi-\cos n\varphi+\cos(n-1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}$$

На сличан начин може се свести и десна страна једначине 3), при чему се имају узети у обзир обрасци:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \quad \text{и}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

На тај начин добијамо онда обрасце:

6.) $1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\dots+\cos(n-1)\varphi$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

7.) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\dots+\sin(n-1)\varphi$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi-\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

$$=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\sin\frac{(n-1)}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

Помоћу ових образаца налазимо даље:

8.) $\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\dots$

$$+\cos\left[\varphi+(n-1)\alpha\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cos\left[\varphi+\frac{(n-1)}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

9.) $\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+2\alpha)+\dots$

$$+\sin\left[\varphi+(n-1)\alpha\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\left[\varphi+\frac{(n-1)}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Ако у 8) и 9) ставимо $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ дакле $\frac{n}{2}\alpha=\pi$ и $\sin\frac{n}{2}\alpha=\sin\pi=0$, добићемо:

10.) $\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2.\frac{2\pi}{n}\right)+\dots$

$$+\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]=0$$

11.) $\sin\varphi+\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\varphi+2.\frac{2\pi}{n}\right)+\dots$

$$+\sin\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]=0.$$

Ако даље узмемо на ум, да је:

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},\ \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2},$$

то онда добијамо из 6) и 7) врло лако и ове обрасце:

13.) $$1+\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi+\cos^2 3\varphi+\dots+\cos^2(n-1)\varphi$$
$$=\frac{n}{2}+\frac{\sin n\varphi\cos(n-1)\varphi}{2\sin\varphi}$$

14.) $$\sin^2\varphi+\sin^2 2\varphi+\sin^2 3\varphi+\dots+\sin^2(n-1)\varphi$$
$$=\frac{n}{2}-\frac{\sin n\varphi\cos(n-1)\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Уображени или комплексни двојни редови.

128. И за комплексне двојне редове, т ј. оне, којих су чланови облика $a_1+b_1 i$, стоји то, да су они збирљиви, ако је збирљив двојни ред, који постаје, кад се његови поједини комплексни чланови замене својим модулима. Јер ако је збирљив ред модула, онда је његов остатак независан од распореда његових чланова и граница је остатка равна 0. Но то ће тим пре бити случај, кад се сваки члан тога остатка замени или са стварним делом или са сачиниоцем од i одговарајућег члана у комплексном двојном реду. Одатле следује, да је стварни део а тако исто и уображени део комплексног двојног реда сваки за себе збирљив, дакле је збирљив, и комплексни двојни ред.

У № 69 доказана теорема о сабирању збирљивих бесконачних редова, којих је број коначан, остаје у важности и онда, кад су редови комплексни; а да важи, доказује се онако исто као и тамо. Али ако је број комплексних бесконачних редова бесконачан, онда треба да је бесконачни двојни ред, који постаје из њихових чланова, збирљив.

Ако претпоставимо, да су редови 1) и 2) у № 74) комплексни, онда, ако је тамошњи двојни ред 3) збирљив, важи и сада правило, да је производ редова 1) и 2) раван реду 4), јер тамошњи разлози независни су од тога, да ли су чланови редова стварни или уображени.

Двојни ред 3) у № 74) сада је уображен и он је збирљив, ако је збирљив двојни ред модула. Али у овом реду модула јављају се модули чланова редова 1) и 2) онако исто, као што се чланови тих редова јављају у двојном реду 3). Ми ћемо редове, који постају из модула чланова редова 1), 2), и 3) означити са 1^1), 2^1) и 3^1). Чланови редова 1^1) и 2^1) јесу положни. и двојни ред 3^1 састављен је из њихових чланова онако исто, као што је у № 74 састављен ред 3) из чланова редова 1) и 2). Дакле онако исто, као што се у № 74 из збирљивости редова 1) и 2) закључило на збирљивост двојног реда 3), закључује се и овде из збирљивости редова 1^1) и 2^1) на збирљивост двојнога реда 3^1). Дакле стоји правило:

Кад су редови 1) и 2) у № 74 комалексни и одговарајући редови модула збирљиви, онда је производ редова 1) и 2) дат обрасцем 4) у № 74.

О функцијама комплексних промењљивих.

129. Цео низ стварних бројева, почев од $-\infty$ до $+\infty$ можемо геометријски представити једном правом, која се од једне непокретне тачке 0 — почетка — пружа у бесконачност и на лево и на десно. Свака тачка те праве јесте представник једног јединцатог броја и то оног, који показује њено одстојање од 0 и по величини и по

правцу. Тачке десно од 0 сматрају се као представници положних, а тачке лево од 0 као представници одречних бројева Цели бројеви представљени су тачкама, којих је размак сталан, а разломци су представљени тачкама уметнутим између две и две од пређашњих тачака, чији је размак сталан. Најзад тачке, које одговарају ирационалним бројевима, испуњавају још заостале празнине, и са пређашњим тачкама састављају једну непрекидну линију, коју можемо назвати бројном линијом.

Непрекидни прелаз од једног стварног броја a к другом такође стварном броју b, дакле прелаз такав, да ни један од свију могућих бројева, што су између a и b не буде прескочен, геометријски је представљен кретањем једне покретне тачке на бројној правој почев од тачке a, па до тачке b.

Да би геометријски представили комплексне бројеве, ми ћемо кроз пређашњу бројну праву XX_1 провући једну раван, и у истој а кроз O повући управну YY_1 на праву XX_1. Онда, као што смо пре видели, сваком комплексном броју $\alpha + \beta i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ одговара једна јединцата тачка те равни и обратно. Ако је $\alpha = 0$, онда чисто уображеном броју βi одговара једна тачка на YY_1 и она је више или ниже почетка O, како је кад $\beta \gtrless 0$. YY_1 зове се уображена оса, док се XX_1 зове стварна оса, јер су њезине тачке представници стварних бројева.

Скуп свију тачака поменуте равни представља дакле скуп свију могућих комплексних бројева, и зато се та раван може назвати бројном равни. Непрекидни прелаз од једног уображеног броја $a + bi$ ка другом $c + di$ геометријски је представљен кретањем једне покретне тачке у поменутој равни, почев од тачке $a + bi$ па до тачке $c + di$. И тај прелаз може се извршити на небројено много начина, јер има небројено много путова од тачке $a + bi$ па до $c + di$. Кад се покретна тачка креће једним извесним од тих путова, онда је и прелаз од броја $a + bi$ па до $c + di$ одређен и непрекидан.

130. Узмимо сада нека је дата комплексна количина:

$$z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ми ћемо о њој претпоставити, да може добити ма коју од оних вредности, које су представљене тачкама једног извесног комада бројне равни, као и то, да је прелаз од једне вредности ка ма којој другој непрекидан.

Уображена количина z зове се независно променљива, а сваки други израз w, који је састављен из независно променљиве z и других сталних количина, зове се функција уображене количине z. Функција w такође је уображена, дакле облика

$$w = u + vi,$$

где су u и v стварне количине. Оне морају бити стварне функције x-а и y-а или ако хоћемо од r и φ.

Функција w зове се једнозначна, кад свакој вредности z-а одговара само једна вредност функције w, а многозначна, кад свакој вредности z-а одговарају више вредности функције w.

Свака алгебарска рационална функција z-а јесте једнозначна и z може имати ма коју од бесконачно многих вредности, представљених тачкама бесконачне бројне равни. Исто је тако и сваки бесконачни ред, уређен по целим степенима z-а, у границама збирљивости једнозначна функција z-а.

Међу тим свака ирационална функција z-а јесте многозначна. Узмимо н. пр.

$$w = z^{\frac{m}{n}},$$

где су m и n цели, положни и односно прости бројеви. Овде z може имати ма коју од бесконачно многих вредности, представљених тачкама бесконачне бројне равни, а сама функција јесте n-значна. Ми ћемо тих n њених вредности означити са w_0, w_1, w_2, . . . w_{n-1}, тако да је

$$w_k = r^{\frac{m}{n}} \left\{ \cos\frac{m}{n}(\varphi+2k\pi) + i \sin\frac{m}{n}(\varphi+2k\pi) \right\}$$

Ако овде место k узмемо ма коју од вредности 0, 1, 2, 3, . . . (n—1) и ту вредност задржимо кроз цео рачун, онда имамо посла само са једнозначном функцијом или као што се такође каже са једном *граном* многозначне функције. Грана w_0 јесте пређашња најпростија вредност степене количине.

Изложилачна функција:

$$w = e^z = e^{x+yi}$$

јесте на основу саме дефиниције њене једнозначна функција. Променљива z може имати ма коју вредност у бесконачној бројној равни.

Логаритам:

$$w = lz = l(x+yi) = \frac{1}{2} l(x^2+y^2) + i \, arc\, tg \frac{y}{x} \pm 2k\pi i =$$

$$lr + \varphi i \pm 2k\pi i$$

има бесконачно много вредности Ако узмемо $k = 0$, а за φ допустимо само вредности од $- \pi$ до $+ \pi$, онда имамо опет посла само са једном граном функције т. ј. са

$$w_0 = \frac{1}{2} l(x^2+y^2) + i\, arc\, tg\frac{y}{x} = lr + \varphi i.$$

Непрекидност једнозначних функција.

131. Нека је:

$$w = f(z)$$

једнозначна функција комплексне променљиве z. Функција w зове се непрекидна на једном извесном пољу вредности z-а — вредности представљених тачкама једног извесног комада бројне равни —, кад она за сваку вредност $z = a$ на том пољу добија јединцату и коначну вредност $f(a)$ и онда та вредност јесте граница, којој мора тежити w, када z тежи граници a са ма које стране.

Да би дакле сазнали, да ли је w непрекидна функција на дотичном пољу вредности z-а, ваља испитати, да ли је граница разлике

$$f(z) - f(a),$$

где је a ма која од вредности z-а на дотичном пољу, равна нули, кад тачка z тежи тачци a у равни z-а са ма које стране.

Ако узмемо:

$$a = x_0 + y_0 i = r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$$

$$z = x + yi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

онда кад z тежи граници a, мораће очевидно x и y тежити границама x_0 и y_0, а r и φ границама r_0 и φ_0. Пошто је:

$$z = x + yi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

то се функција w може представити и у облику:

$$w = u + vi,$$

где су u и v стварне и једнозначне функције од x и y, или, ако хоћемо, од r и φ. Претпоставимо сада, нека је:

$$u = \chi\,(x,y) = \chi_1\,(r,\varphi), \qquad \text{а}$$

$$v = \psi\,(x,y) = \psi_1\,(r,\varphi)$$

па ћемо имати:

$$f(z) - f(a) =$$

$$= \left\{\chi\,(x,y) + i\,\psi\,(x,y)\right\} - \left\{\chi\,(x_0,y_0) + i\,\psi\,(x_0,y_0)\right\}$$

$$= \left\{\chi\,(x,y) - \chi\,(x,y_0)\right\} + i\left\{\psi\,(x,y) - \psi\,(x,y_0)\right\}$$

$$+ \left\{\chi\,(x,y_0) - \chi\,(x_0,y_0)\right\} + i\left\{\psi\,(x,y_0) - \psi\,(x_0,y_0)\right\}$$

Ако су u и v непрекидне функције од x и y, онда границе разлика у заградама десно јесу равне нули за $\lim\,(z-a) = 0$. Дакле је једнозначна функција $w = u + vi$ комплексне променљиве $z = x + yi$ непрекидна функција на дотичном пољу вредности z-а, ако су u и v непрекидне функције од x и y.

Такође је:

$$f(z) = f(a) =$$

$$= \left\{\chi_1(r,\varphi) + i\,\psi_1(r,\varphi)\right\} - \left\{\chi_1\,(r_0,\varphi_0) + i\,\psi_1\,(r_0,\varphi_0)\right\}$$

$$= \left\{\chi_1\,(r,\varphi) - \chi_1(r,\varphi_0)\right\} + i\left\{\psi_1(r,\varphi) - \psi_1\,(r,\varphi_0)\right\}$$

$$+ \left\{\chi_1\,(r,\varphi_0) - \chi_1\,(r_0,\varphi_0)\right\} + i\left\{\psi_1(r,\varphi_0) - \psi_1\,(r_0,\varphi_0)\right\}$$

Ако су сада u и v непрекидне функције од r и φ, онда су границе разлика у заградама десно равне нули за $\lim\,(z-a) = 0$. Дакле је једнозначна функција $w = u + vi$ комплексне променљиве $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ непрекидна функција на дотичном пољу вредности z-а, ако су u и v непрекидне функције од r и φ.

132. Ако је:

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и m стваран и коначан број, онда све вредности израза z^m дати су обрасцем:

$$z^m = r^m\left\{\cos m\,(\varphi + 2k\pi) + i\sin m\,(\varphi + 2k\pi)\right\}$$

Овде под r разумемо положан број, а под r^m јединцату стварну и положну вредност те количине. Међутим k може бити ма какав цео број. Ако за k узмемо једну одређену вредност, онда имамо посла само са једном граном функције. Пошто за сваки могући спрег вредности од r и φ

$$u = r^m \cos m(\varphi + 2k\pi) \quad \text{и}$$

$$v = r^m \sin m(\varphi + 2k\pi)$$

добијају само једну стварну и коначну вредност, то су (№ 33) u и v непрекидне функције од r и φ, па дакле је (№ 131) и z^m непрекидна функција z-а.

Дакле једна и иста грана функције z^m јесте непрекидна функција z-а.

Али прелаз са једне гране функцијине ка другој није непрекидан, но је скопчан са скоком. Јер разлика

$$(r \pm \delta)^m . \left\{\cos m(\varphi \pm \varepsilon + 2k_2\pi) + i \sin m(\varphi \pm \varepsilon + 2k_2\pi)\right\}$$

$$- r^m \left\{\cos m(\varphi + 2k_1\pi) + i \sin m(\varphi + 2k_1\pi)\right\}$$

тежи нули, кад δ и ε теже нули, само онда, кад је $m(k_2 - k_1)$ цео број, дакле кад вредности функцијине припадају једној и истој грани. У опште је дакле за једно и исто z прелаз од једне гране другој скопчан са скоком, дакле није непрекидан. Само онда, кад је z на одречној поли стварне осе, дакле $z < 0$ прелаз од једне гране ка следећој јесте непрекидан. И доиста, ако ставимо:

$$z_1 = r \left\{\cos(\varphi_1 + 2k\pi) + i \sin(\varphi_1 + 2k\pi)\right.$$

$$r_2 = r \left\{\cos\left[\varphi_2 + 2(k+1)\pi\right] + i \sin\left[\varphi_2 + 2(k+1)\pi\right]\right\}$$

где је $\varphi_1 = \pi - \varepsilon_1$ и $\varphi_2 = -\pi + \varepsilon_2$, онда, кад ε_1 и ε_2 теже нули, тачке z_1 и z_2 бројне равни теже једна другој са противних страна одречне поле стварне осе. Простим рачуном налазимо даље:

$$z_1^m = r^m \left\{\cos m\left[(2k+1)\pi - \varepsilon_1\right] + i \sin m\left[(2k+1)\pi - \varepsilon_1\right]\right\}$$

$$z_2^m = r^m \left\{\cos m\left[(2k+1)\pi + \varepsilon_2\right] + i \sin m\left[(2k+1)\pi + \varepsilon_2\right]\right\},$$

одакле за $\lim \varepsilon_1 = 0$ и $\lim \varepsilon_2 = 0$ сљедује:

$$\lim(z_2^m - z_1^m) = 0.$$

Дакле прелаз са последњих вредности једне гране функцијине на почетне вредности следеће гране њене јесте непрекидан.

Ако је изложилац рационалан разломак $\frac{m}{n}$, где су m и n односно прости бројеви, онда је прелаз са последњих вредности последње гране w_{n-1} на почетне вредности прве или *најпростије* гране непрекидан.

Ако је сад дат бесконачни ред:

$$a_1 + a_2 z + a_3 z_2 + a_4 z^3 + \dots .$$

где је z комплексан број, онда је тај ред непрекидна функција на једном извесном пољу вредности z-а, ако је он за те вредности z-а збирљив. Јер за сваку могућу вредност z-а на том пољу вредност реда јесте јединцата и коначна.

Биномни образац.

133. Узмимо нека је m стваран и коначан број и ставимо:

$$1)\ f(z) = 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \binom{m}{3} z^3 + \dots .$$

у којем бесконачном реду претпостављамо, да је z комплексан број:

$$2.)\qquad z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Ред 1) збирљив је за сваку вредност m-а, ако је $1 > r \geqq 0$. Но онда је на основу № 132 ред $f(z)$ једнозначна и непрекидна функција z-а и њени састојци u и v јесу једнозначне и непрекидне функције од r и φ.

$$3.)\quad u = 1 + \binom{m}{1} r\cos\varphi + \binom{m}{2} r^2\cos 2\varphi + $$

$$+ \binom{m}{3} r^3\cos 3\varphi + \ldots .$$

$$4.)\quad v = \binom{m}{1} r\sin\varphi + \binom{m}{2} r^2\sin 2\varphi + \binom{m}{3} r^3\sin 3\varphi + \ldots$$

Пошто су u и v збирљиви за сваку вредност m-а, то су они, па дакле и $f(z)$ непрекидне функције m-а. Ми ћемо ред $f(z)$, у колико га сматрамо као функцију m-а, означити са $F(m)$ и онда за $m = \alpha$ и $m = \beta$ имамо:

$$5.)\quad F(\alpha) = 1 + \binom{\alpha}{1} z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \binom{\alpha}{3} z^3 + \ldots .$$

$$6.)\quad F(\beta) = 1 + \binom{\beta}{1} z + \binom{\beta}{2} z^2 + \binom{\beta}{3} z^3 + \ldots .$$

Редови 5) и 6) смеју се на основу № 126 помножити, и пошто је даљи рад онакав исти као и у № 84, то долазимо и овде као и тамо до резултата:

$$7.)\qquad F(\alpha).\,F(\beta) = F(\alpha + \beta).$$

Помоћу овог обрасца доказујемо овде као и у № 84, да је $F(m)$ т. ј. да је једнозначна и непрекидна функција z-а $f(z)$ равна једној од вредности степене количине $(1+z)^m$. Али како је последња количина многозначна у оном случају, кад m није цело, то онда ваља знати, која је од вредности количине $(1+z)^m$ равна $F(m)$.

Ставимо:

$$8.)\qquad 1 + r\cos\varphi = R\cos\theta$$

$$9.)\qquad r\sin\varphi = R\sin\theta$$

где је θ лук између $-\pi$ и $+\pi$, који ове једначине задовољава. Али како претпостављамо $1 > r \geqq 0$, за које је вредности r-а ред 1) збирљив, то је лева страна у 8) положна, одакле следује: да $\cos\theta$ мора такође бити положан, то ће рећи, да θ мора лежати између $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$, и на тај начин лук θ стешњен је у уже границе.

Али смо ми у № 132 доказали, да је свака поједина грана функције

$$10.)\quad (1+z)^m = R^m \left\{\cos m(\theta + 2k\pi) + i\sin m(\theta + 2k\pi)\right\}$$

једнозначна и непрекидна функција од $(1+z)$, дакле и од z. Прелаз са једне гране те функције на следећу непрекидан је за све стварне вредности z-а, које леже између -1 и $-\infty$ (№ 132) и то само за њих; и те вредности леже ван граница збирљивости реда 1). Дакле за вредности z-а, које леже у границама збирљивости тога реда, прелаз са једне гране функције $(1+z)^m$ на другу није непрекидан.

Овим је доказано, да $F(m)$ т. ј. да збир реда 1) може бити раван само једној-грани функције $(1+z)^m$, да дакле k у обрасцу 10) може имати само *једну* одређену вредност. Ту ћемо вредност наћи, ако у 10) ставимо $z = 0$; но онда мора бити и $r = 0$, дакле на основу образаца 8) и 9) мора бити $R = 1$, $\theta = 0$, и тако из 10) добијамо:

$$11.)\qquad 1^m = \cos 2mk\pi + i \sin 2mk\pi.$$

Но за $z = 0$ збир реда 1) јесте:

$$12.)\qquad f(0) = 1$$

Да десне стране једначина 11) и 12) буду једнаке, треба да је $k = 0$.

Збир реда 1), који се зове биномни, јесте дакле раван најпростијој вредности степене количине $(1+z)^m$. Дакле је:

$$13.)\qquad (1+z)^m = R^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)$$

$$= 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \binom{m}{3} z^3 + \ldots .$$

ако су само услови у 2), 8) и 9) испуњени. Образац 13) вреди за сваку стварну вредност m-а, ако је $1 > r \geqq 0$. Ако је $r = 1$, онда мора бити $m \geqq 0$. Образац 13), као што се лако може увидети, вреди и кад се z замени са $-z$. Но образац 13) може се написати на још један начин, при чему су услови 2), 8) и 9) већ узети у обзир. Из 8) и 9) следује:

$$14.)\qquad R = (1 + 2r \cos\varphi + r^2)^{\frac{1}{2}}$$

где десно ваља узети једину положну вредност степене количине. Пошто θ мора лежати између $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$, то је:

$$\theta = arc\,tg \frac{r \sin\varphi}{1 + r\cos\varphi}.$$

И тако сада имамо:

$$15.)\qquad (1+2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{m}{2}} e^{im\, arc\,tg \frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}}$$

$$= 1 + \binom{m}{1} re^{\varphi i} + \binom{m}{2} r^2 e^{2\varphi i} + \binom{m}{3} r^3 e^{3\varphi i} + \ldots .$$

Овај образац вреди за

$$+\infty > m > -\infty, \text{ ако је } 1 > r \geqq 0$$

и за

$$+\infty > m \geqq 0, \text{ ако је } r = 1.$$

Пошто образац 13) вреди, кад се $+z$ замени са $-z$, то и образац 15) вреди кад се r замени са $-r$. Ако је m цело и положно, онда образац 15) вреди за сваку вредност од r

134. Кад у обрасцу 15) № 133 десно и лево одвојимо стварно од уображенога, добијамо два обрасца:

$$1.)\qquad (1+2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{m}{2}} \cos\left(m\, arc\,tg \frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}\right) =$$

$$= 1 + \binom{m}{1} r\cos\varphi + \binom{m}{2} r^2 \cos 2\varphi + \binom{m}{3} r^3 \cos 3\varphi + \ldots$$

$$2.)\quad (1+2r\cos\varphi+r^2)^{\frac{m}{2}}\sin\left(m\,arc\,tg\,\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}\right)$$

$$=\binom{m}{1}r\sin\varphi+\binom{m}{2}r^2\sin 2\varphi+\binom{m}{3}r^3\sin 3\varphi+\ldots.$$

Ако је m цело и положно, ови се редови прекидају и онда обрасци 1) и 2) вреде за свако r; у сваком другом случају мора r бити мање од 1. Ако је $r = 1$ бројно, мора бити $m \geqq 0$.

Из 1) и 2) можемо извести неколико особених образаца. Ако је m цело и положно и $r = 1$, онда је:

$$arc\,tg\,\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}=arc\,tg\left(tg\,\frac{1}{2}\,\varphi\right)$$

т. ј. $=\frac{1}{2}\varphi$, ако узмемо, да $\frac{1}{2}\varphi$ лежи између $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$, дакле φ између $-\pi$ и $+\pi$. При овој претпоставци вреде обрасци:

$$3.)\qquad \left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right)^m\cos\frac{1}{2}\,m\varphi=$$

$$=1+\binom{m}{1}\cos\varphi+\binom{m}{2}\cos 2\varphi+\binom{m}{3}\cos 3\varphi+\ldots$$

$$+\binom{m}{m}\cos m\varphi,$$

$$4.)\qquad \left(2\cos\frac{1}{2}\,\varphi\right)^m\sin\frac{1}{2}\,m\varphi=$$

$$=\binom{m}{1}\sin\varphi+\binom{m}{2}\sin 2\varphi+\binom{m}{3}\sin 3\varphi+\ldots+\binom{m}{m}\sin m\varphi.$$

Пошто се обе стране ових једначина не мењају, кад се φ замени са $2n\pi \pm \varphi$, где је n ма какав цео број, то обрасци 3) и 4) вреде за свако φ.

Кад даље ставимо у 1) и 2) $r = -\cos\varphi$, где узимљемо $0 < \varphi < \pi$, како би r текло непрекидно од -1 до $+1$, добијамо:

$$5.)\qquad \sin^m\varphi\cos m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=1-\binom{m}{1}\cos\varphi.\cos\varphi+$$

$$+\binom{m}{2}\cos^2\varphi\cos 2\varphi-\binom{m}{3}\cos^3\varphi\cos 3\varphi+\ldots\ldots$$

$$6.)\qquad \sin^m\varphi\sin m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\binom{m}{1}\cos\varphi\sin\varphi-$$

$$\binom{m}{2}\cos^2\varphi\sin 2\varphi+\binom{m}{3}\cos^3\varphi\sin 3\varphi-\ldots\ldots$$

$$0<\varphi<\pi.$$

Ако је m цео и положан број, онда вреде обрасци 5) и 6) за свако φ.

Ако у 1) и 2) ставимо $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, добијамо:

$$(1+r^2)^{\frac{1}{2}m}\cos(m\,arc\,tgr)=1-\binom{m}{2}r^2+\binom{m}{4}r^4-$$

$$-\binom{m}{6}r^6+\ldots.$$

$$(1+r^2)^{\frac{1}{2}m}\sin(m\,arc\,tgr)=\binom{m}{1}r-\binom{m}{3}r^3+\binom{m}{5}r^5-\ldots.$$

$$-1\leq r\leqq+1$$

Ако ставимо $arc\,tgr = x$, дакле $r = tg\,x$ добијамо из ових једначина:

$$7.)\quad \frac{\cos mx}{\cos^m x} = 1 - \binom{m}{2} tg^2\, x + \binom{m}{4} tg^4\, x - \binom{m}{6} tg^6\, x + \ldots..$$

$$8.)\quad \frac{\sin mx}{\cos^m x} = \binom{m}{1} tg\, x - \binom{m}{3} tg^3\, x + \binom{m}{5} tg^5\, x - \ldots..$$

где треба да је:

$$-\frac{1}{4}\pi \leqq x \leqq +\frac{1}{4}\pi$$

Ако овде помножимо лево и десно са $\cos^m x$, добијамо обрасце истог облика са обрасцима 9) и 10) у №-и 90), само што сада они вреде за ма какво m под условом да је $-\frac{1}{4}\pi \leqq x \leqq +\frac{1}{4}\pi$ Кад са обрасцима 7) и 8) радимо онако исто као са обрасцима 9) и 10) у № 90, добићемо обрасце истог облика са обрасцима 13) и 15) у № 91, и са обрасцима 17) и 18) у № 92) т. ј.

$$9.)\quad \cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.\ 2} \sin^2 x + \frac{m^2\,(m^2 - 2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \sin^4 x - \frac{m^2\,(m^2 - 2^2)\,(m^2 - 4^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 6} \sin^6 x + \ldots$$

$$10.)\quad \cos mx = \cos x \left\{ 1 - \frac{m^2 - 1^2}{1.\ 2} \sin^2 x + \frac{(m^2 - 1^2)\,(m^2 - 3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \sin^4 x - \ldots\ldots \right\}$$

$$11.)\quad \sin mx = \frac{m}{1} \sin x - \frac{m\,(m^2 - 1^2)}{1.\ 2.\ 3} \sin^3 x + \frac{m\,(m^2 - 1^2)\,(m^2 - 3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \sin^5 x - \ldots\ldots.$$

$$12.)\quad \sin mx = \cos x \left\{ \frac{m}{1} \sin x - \frac{m\,(m^2 - 2^2)}{1.\ 2.\ 3} \sin^3 x + \frac{m\,(m^2 - 2^2)\,(m^2 - 4^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \sin^5 x - \ldots\ldots \right\}$$

Ови обрасци вреде за $-\frac{1}{4}\pi \leqq x \leqq +\frac{1}{4}\pi$. Но те границе дају се у неколико проширити. Ако у 9) ставимо: $m = 2r$ и $x = \frac{1}{2}y$, добијамо:

$$13.)\quad \cos ry = 1 - \frac{(2r)^2}{1.\ 2} \sin^2 \frac{y}{2} + \frac{(2r)^2\,[(2r)^2 - 2^2]}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \sin^4 \frac{y}{2} - \ldots$$

$$= 1 - \frac{r^2}{1.\ 2}\left(2 \sin \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{r^2\,(r^2 - 1^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\left(2 \sin \frac{y}{2}\right)^4 - \frac{r^2\,(r^2 - 1^2)\,(r^2 - 2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ 5.\ 6}\left(2 \sin \frac{y}{2}\right)^6 + \ldots\ldots$$

Ова једначина вреди за $-\frac{1}{4}\pi \leqq \frac{1}{2}y \leqq +\frac{1}{4}\pi$ или

за $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq +\pi$.

Даље је:

$$2\, sin^2 \frac{y}{2} = 1 - cos\, y = 1 - \sqrt{1 - sin^2 y},$$

где се корен $\sqrt{1 - sin^2 y}$ има узети положно због $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq +\frac{1}{2}\pi$. Ако сад развијемо $\sqrt{1 - sin^2 y}$ по биномном обрасцу, добиђемо:

$$2\, sin^2 \frac{y}{2} = \frac{sin^2 y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{sin^4 y}{4} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{sin^6 y}{6} + \ldots$$

или:

$$\left(2\, sin \frac{y}{2}\right)^2 = sin^2 y + \frac{1}{2} \cdot \frac{sin^4 y}{2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{sin^6 y}{3} + \ldots.$$

Кад ову једначину подигнемо на 2-и, 3-и, и т. д. степен и резултате заменимо у 13), добиђемо:

$$\begin{aligned} cos\, ry = 1 & - \frac{r^2}{1.2}\left\{sin^2 y + \frac{1}{4} sin^4 y + \frac{1}{8} sin^6 y + \ldots\right\} \\ & + \frac{r^2(r^2 - 1^2)}{1.\,2.\;3.\,4.}\left\{\qquad\qquad sin^4 y + \frac{1}{2} sin^6 y + \ldots\right\} \\ & - \frac{r^2(r^2 - 1^2)\,(r^2 - 2^2)}{1.\;2\;\;3.\;\;4.\;5.\;6.}\left\{\qquad\qquad\qquad sin^6 y + \ldots\right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Овај двојни ред јесте збирљив и према томе можемо сабирати његове чланове ма којим редом. Ми ђемо чланове сабирати вертикално и добиђемо:

$$14.)\quad cos\, ry = 1 - \frac{r^2}{1.2} sin^2 y + \frac{r^2(r^2 - 2^2)}{1.\,2.\,3.\;4.} sin^4 y - \ldots.$$

који образац вреди за $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq +\frac{1}{2}\pi$. Но ово није ништа друго до образац 9), који дакле сад вреди за шире границе $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq +\frac{1}{2}\pi$.

Исто се тако може доказати, да и обрасци 10), 11) и 12) вреде између поменутих ширих граница.

Изложилачни редови.

135 Ми смо пређе у № 121 e^{x+yi} дефинисали као границу, којој тежи најпростија вредност степене количине:

$$\left(1 + \frac{x + yi}{m}\right)^m$$

при бесконачном рашђењу m-а. Ми ђемо ставити:

$$1.)\qquad z = x + yi = r\,(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi),$$

а под m разумеваћемо цео број, који расте бесконачно. По обрасцу 13) у № 133 добијамо:

$$2.)\qquad \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m =$$

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{z^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{z^n}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) + R$$

Под n разумевамо цео број, који је мањи од m а већи од r. Ако модуо остатка R означимо са $mod.\, R$, добијамо:

$$3.)\quad mod.\, R = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{m}\right).\ S$$

где је:

$$4.)\qquad S = 1 + \frac{r}{(n+2)}\left(1-\frac{n+1}{m}\right) +$$

$$\frac{r^2}{(n+2)(n+3)}\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\left(1-\frac{n+2}{m}\right)+\ldots$$

$$+\frac{r^{m-n-1}}{(n+2)(n+3)\ldots m}\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\left(1-\frac{n+2}{m}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Као границе, између којих модуо R-а лежи, налазимо:

$$5.)\qquad \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{r}{n+2}} > mod.\, R > 0$$

А за $m = \infty$ добијамо изложилачни ред:

$$6.)\quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + R_1$$

Модуо од R_1 лежи између истих граница, као и модуо од R, што се из 3), 4) и 5) може лако сазнати, кад се узме $m = \infty$.

Ако сад пустимо, да n расти бесконачно, наћићемо, да је $lim\,(mod.\, R_1) = 0$ дакле и $lim\, R_1 = 0$, и на тај начин добијамо за e^z збирљив бесконачни ред:

$z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$7.)\qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

који вреди за сваку коначну вредност модула од z.

Још ћемо приметити, да кад редови за синус и косинус неби познати били, ми би их лако сада могли наћи. Јер ако узмемо сада, да је $x = 0$ дакле $z = yi$, и обазремо се на образац 11) у № 121, добићемо:

$$8.)\qquad cos\, y + i\, sin\, y$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + i\left(\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right)$$

Кад стварне делове лево и десно, а тако исто и сачиниоце од i ставимо једне другима равне, добијамо редове за $sin\, y$ и $cos\, y$

136. Ако у једначини 7) № 135 ставимо

$$z = r\,(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi).$$

добијамо:

$$1.)\quad e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = 1 + \frac{r\cos\varphi}{1} + \frac{r^2\cos 2\varphi}{2!} + \frac{r^3\cos 3\varphi}{3!} +$$

$$\ldots + i\left(\frac{r\sin\varphi}{1} + \frac{r^2\sin 2\varphi}{2!} + \frac{r^3\sin 3\varphi}{3!} + \ldots\right)$$

одакле, узимајући у обзир образац:

$$cos\, x + i\, sin\, x = e^{xi}$$

добијамо:

$$2.)\quad e^x\cos y = 1 + \frac{r\cos\varphi}{1} + \frac{r^2\cos 2\varphi}{2!} + \frac{r^3\cos 3\varphi}{3!} + \ldots$$

3.) $$e^x \sin y = 1 + \frac{r \sin \varphi}{1} + \frac{r^2 \sin 2\varphi}{2!} + \frac{r^3 \sin 3\varphi}{3!} + \dots$$

где је: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

137. Нека је:

1.) $$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где је $1 > r \geqq 0$, и

2.) $$(1 + z) = R (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Под θ разумевамо најмањи лук, који ову једначину задовољава, и који према томе лежи између $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Ако узмемо, да је m буди какав стваран изложилац, то онда имамо:

3.) $$e^{m(lR + \theta i)} = e^{mlR} (\cos m\theta + i \sin m\theta)$$
$$= R^m (\cos m\theta + i \sin m\theta).$$

Ако развијемо леву страну по №-и 133 обр. 13) добијамо:

4.) $$R^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)$$
$$= 1 + \frac{m(lR + \theta i)}{1} + \frac{m^2(lR + \theta i)^2}{2!} + \frac{m^3(lR + \theta i)^3}{3!} + \dots$$

Лева страна јесте најпростија вредност степене количине $(1 + z)^m$, а на десној је $lR + \theta i$ најпростија вредност $l(1 + z)$.

Логаритамски редови.

138. Узмимо као и у пређашњој нумери

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ и } 1 + z = R (\cos \theta + i \sin \theta)$$

где је: $1 > r \geqq 0$ и $+\frac{1}{2}\pi \geqq \theta \geqq -\frac{1}{2}\pi$

Образац 13) у № 133 гласи:

1.) $$R^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)$$
$$= 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \binom{m}{3} z^3 + \binom{m}{4} z^4 + \dots$$

Овај је ред збирљив, при претпоставци учињеној односно r, за свако стварно m.

Сад ако је $1 > r \geqq 0$ и $m > 0$, онда је ред:

2.) $$1 + \frac{m}{1} r + \frac{m(m+1)}{1.\ 2.} r^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3.} r^3 + \dots$$

збирљив. Ако сад тај ред напишемо тако, да сваки члан сам за себе чини један хоризонатан ред; ако затим отворимо заграде и уредимо сваки хоризонатан ред по степенима од m, онда ће ред 2) бити претворен у један збирљив двојни ред. Дакле ће по ономе, што знамо о двојним редовима, бити збирљив и двојни ред, који постаје из простог реда:

3.) $$1 + \binom{m}{1} r + \binom{m}{2} r^2 + \binom{m}{3} r^3 + \dots$$

где је m ма какав положан или одречан број. Јер двојни ред, који постаје из 3), разликује се од двојног реда, који постаје из 2) само у знацима по неких чланова. Али по № 128 онда је збирљив и овај двојни ред, који се истим путем из 1) добија. Па пошто се чланови тог трећег двојног реда могу сабирати ма којим редом, то ћемо их сабирати вертикално и онда ћемо добити један збирљив прост ред, али који је сада по степенима од m уређен. Пошто прелаз од реда 1) на тај нови прости ред бива преко једног збирљивог двојног реда, то је збир новог простог реда исти са збиром реда 1), и тако је:

$$4.)\qquad R^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$
$$= 1 + mf_1(z) + m^2f_2(z) + m^3f_3(z) + \ldots\ldots,$$

Помоћу обрасца 1) лако је наћи $f_1(z)$:

$$5.)\qquad f_1(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots\ldots$$

Из упоређења једначине 4) са једначином 4) у № 137 добијамо:

$$0 = m\left\{f_1(z) - \frac{(lR+\theta i)}{1}\right\} + m^2\left\{f_2(z) - \frac{(lR+\theta i)^2}{2\,!}\right\}$$
$$+ m^3\left\{f_3(z) - \frac{(lR+\theta i)^3}{3\,!}\right\} + \ldots\ldots$$

која једначина вреди за свако m. Ако дакле поделимо са m и после ставимо $m = 0$, онда је:

$$f_1(z) = lR + \theta i$$

или:

$$6.)\qquad l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots$$

ако под $l(1+z)$ разумемо најпростију вредност логаритма. Ред 6) збирљив је са претпоставком, да је:

$$1 > r \geqq 0.$$

139. Пошто је:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\varphi i}$$

то се једначина 6) у № 138 може и овако написати:

$$1.)\quad l(1+re^{\varphi i}) = r\cos\varphi - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi - \ldots\ldots$$
$$+ i\left(r\sin\varphi - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{r^3}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots\right)$$

где је

$$1 > r \geqq 0.$$

Ако у 1) заменимо φ са $-\varphi$ добијамо:

$$2.)\quad l(1+re^{-\varphi i}) = r\cos\varphi - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi - \ldots\ldots$$
$$- i\left(r\sin\varphi - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{r^3}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots\right)$$

Сабирањем и одузимањем једначина 1) и 2) добијамо:

3.) $$\frac{1}{2}\, l\,(1+2r\cos\varphi+r^2)=$$

$$= r\cos\varphi-\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi-\dots.$$

и 4.) $$\frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1+re^{\varphi i}}{1+re^{-\varphi i}}\right)=$$

$$= r\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi+\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi-\dots.$$

које једначине такође вреде за

$$1>r\geqq 0.$$

Десна страна једначине 4) јесте стварна функција од r и φ и по томе се и лева страна њена мора дати преобразити тако, како ће се јавити у стварном облику. И доиста је:

$$1+re^{\varphi i}=R\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$1+re^{-\varphi i}=R\,(\cos\theta-i\sin\theta)$$

одакле деобом:

$$\frac{1+re^{\varphi i}}{1-re^{-\varphi i}}=e^{2\theta i}$$

одавде сљедује:

$$\frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1+re^{\varphi i}}{1+re^{-\varphi i}}\right)=\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}$$

Једначина 4) претвара се дакле сада у:

5) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}=$$

$$r\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi+\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi-\dots\dots$$

где је

$$1>r\geqq 0.$$

Једначине 3) и 5) вреде још за $r=1$, ако је $\pi>\varphi>-\pi$. Јер су обе стране тих једначина за

$$1>r\geqq 0 \;\text{ и }\; \pi>\varphi>-\pi$$

непрекидне функције r-а. Пошто су редови збирљиви још и за $r=1$, $\pi>\varphi>-\pi$, то једначине 3) и 5) вреде још и за те вредности од r и φ. Дакле оне вреде у опште за:

$$1>r\geqq 0$$

као и за $r=1$, ако је само $\pi>\varphi>-\pi$. За $r=1$ следује из једначине 3):

6) $$\frac{1}{2}\, l\left[\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right)^2\right]=\cos\varphi-\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{\cos 3\varphi}{3}-\dots.$$

где је $$\pi>\varphi>-\pi.$$

За $r=1$ следује такође из 5):

7.) $$\frac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}-\dots.$$

Лако је увидети, да једначина 7) не вреди за $\varphi = \pm \pi$, јер је тада њена лева страна $= \pm \frac{1}{2} \pi$ а десна $= 0$. У једначини 6) обе су стране $= - \infty$ за $\varphi = \pm \pi$.

Ако узмемо у 5) $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ и заменимо r са x, наћићемо:

8.) $$arc\, tg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdot$$

образац, који смо пређе на други начин нашли.

Примедба о збирљивости бесконачног производа.

1.) $$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots\ldots$$

где су количине α комплексне.

Ако је бесконачни производ:

2.) $$(1+\rho_1)(1+\rho_2)(1+\rho_3)\ldots\ldots$$

где су ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... модули количина α_1, α_2, α_3, ... збирљив, може се доказати, да онда мора бити збирљив и сам бесконачни производ 1).

Узмимо дакле да је бесконачни производ 2) збирљив, услед чега, као што је познато, ред

3.) $$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \ldots\ldots$$

мора бити падајући и збирљив. Пошто, као што смо већ у № 108 рекли, збирљивост бесконачног производа независи од његових првих чинилаца, то ми можемо са разлога тамо напоменутих претпоставити, да је већ од првога чиниоца па на даље $\rho < \frac{1}{2}$.

Из обрасца:

$$l(1+\alpha_r) = \alpha_r - \frac{1}{2}\alpha_r^2 + \frac{1}{3}\alpha_r^3 - \frac{1}{4}\alpha_r^4 + \ldots\ldots$$

видимо, да је $l(1+\alpha_r)$ равно α_r више једној количини, чији је модуо мањи од

$$\frac{1}{2}(\rho_r^2 + \rho_r^3 + \rho_r^4 + \ldots\ldots) = \frac{1}{2}\frac{\rho_r^2}{1-\rho_r}.$$

Но како узимамо, да је $\rho_r < \frac{1}{2}$, то онда ако ставимо, да је $l(1+\alpha_r)$ једнако α_r, биће модуо занемарене количине мањи од ρ_r^2. Сама та количина моћиће се дакле представити са $\theta_r \rho_r^2$, где је θ_r количина, чији је модуо мањи од 1. Према томе моћићемо дакле ставити:

$$l(1+\alpha_r) = \alpha_r + \theta_r \rho_r^2.$$

Помоћу овог обрасца ред:

4.) $$l(1+\alpha_1) + l(1+\alpha_2) + l(1+\alpha_3) + \ldots\ldots,$$

од чије збирљивости зависи збирљивост производа 1), претвара се у ред:

5.) $$(\alpha_1 + \theta_1 \rho_1^2) + (\alpha_2 + \theta_2 \rho_2^2) + (\alpha_3 + \theta_3 \rho_3^2) + \ldots\ldots,$$

који ред може се узети, да је постао сабирањем редова:

6) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots$$

7.) $$\theta_1 \varrho_1^2 + \theta_2 \varrho_2^2 + \theta_3 \varrho_3^2 + \ldots\ldots$$

Пошто је на основу претпоставке ред модула под 3) збирљив, то је онда збирљив и ред 6) као и ред 7). Дакле је онда збирљив и ред 5) а због тога и сам бесконачни производ 1).

ПЕТИ ДЕО.

О ВЕРИЖНИМ РАЗЛОМЦИМА.

Неколико речи унапред.

138. Верижним разломком зове се израз следећег облика:

1.) $$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots \, a_{n-2} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

a_0 зове се први члан а разломци: $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\ldots \frac{b_n}{a_n}$ зову се редом први, други трећи . . . . n-ти члан верижног разломка. Као што се види свакоме a осим последњег додат је један разломак, коме је бројилац количина b следећег члана а именилац количина a тога истог члана више један разломак, који је склопљен по истом закону. Количине $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ зову се делимични бројиоци а количине $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ делимични имениоци верижнога разломка. Верижни разломак зове се коначан или бесконачан, како је кад n т. ј. број чланова верижног разломка коначан или бесконачан.

Сваки коначан верижни разломак може се лако претворити у обичан. Зарад тога треба најпре претворити у прост разломак двочлани верижни разломак:

$$\frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}$$

а то ће се постићи, ако се бројилац и именилац тога двочланог разломка помноже са a_n. На тај начин разломак, који ће се имати да дода ка a_{n-2}, изгледаће сада овако:

$$\frac{a_n b_{n-1}}{a_n a_{n-1} + b_n}$$

Последњи двочлани разломак у датом верижном разломку 1) биће дакле сада:

$$\frac{b_{n-2}}{a_{n-2} + \frac{a_n b_{n-1}}{a_n a_{n-1} + b_n}}.$$

Тај двочлани разломак може се на исти начин претворити у прост множећи његовог бројиоца и имениоца са

$$a_n a_{n-1} + b_n$$

И тај прост разломак стајаће тада у последњем имениоцу као сабирак уз a_{n-3}. Ако тако продужимо т. ј. ако увек будемо претворили последњи двочлани верижни разломак у прост, добићемо најзад као резултат један прост разломак, који је по вредности једнак датом верижном разломку.

При претварању верижног разломка у прост по овој методи ми смо отпочели посао са последним члановима верижног разломка. Али може се при томе поћи и сасвим противним путем. Ми ћемо ставити:

$$\frac{p_{00}}{q_{00}} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{p_{01}}{q_{01}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{p_{0k}}{q_{0k}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_k}{a_k}}}$$

Прости разломци:

$$\frac{p_{00}}{q_{00}}, \frac{p_{01}}{q_{01}}, \frac{p_{02}}{q_{02}}, \ldots \frac{p_{0k}}{q_{0k}}, \ldots \frac{p_{0n}}{q_{0n}}$$

зову се приближни разломци верижног разломка 1). Последњи n-ти приближни разломак по вредности је једнак верижном разломку.

По овој другој методи изналазе се најпре p_{00} и q_{00}, затим p_{01} и q_{01}, па онда редом p_{02} и q_{02}, p_{03} и q_{03} и т. д. При том лако је увидети, како се, кад су једном p_{0k} и q_{0k} нађени, из њих добијају $p_{0,k+1}$ и $q_{0,k+1}$. Зарад тога треба очевидно у изразима за p_{0k} и q_{0k} свуда место a_k метнути

$$a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$$ и затим помножити са a_{k+1}.

Ако је верижни разломак бесконачан, онда се може употребити само ова друга метода. Код бесконачних верижних разломака биће и број приближних разломака бесконачан и ту се могу разликовати ова три случаја:

Прво. Узастопни приближни разломци теже без престанка једној одређеној и коначној граници. У том случају бесконачни верижни разломак зове се збирљив а поменута граница зове се његова вредност.

Друго. Узастопни приближни разломци расту бесконачно. Тада се верижни разломак зове незбирљив.

Треће. Узастопни приближни разломци теже наизменце различним границама. Тада се верижни разломак зове неодређен.

Повратни и независни начин израчунавања приближних разломака.

139. Непосредним рачуном налазимо лако:

$$p_{00} = a_0 \qquad q_{00} = 1$$

$$p_{01} = a_1 p_{00} + b_1 \qquad q_{01} = a_1$$

$$p_{02} = a_2 p_{01} + b_2 p_{00} \qquad q_{02} = a_2 q_{01} + b_2 q_{00}$$

$$p_{03} = a_3 p_{02} + b_3 p_{01} \qquad q_{03} = a_3 q_{02} + b_3 q_{01}$$

Лако је доказати, да закони, који у овим обрасцима владају а ти су:

1.) $$p_{0m} = a_m p_{0,m-1} + b_m p_{0,m-2}$$

$$q_{0m} = a_m q_{0,m-1} + b_m q_{0,m-2}$$

вреде у опште. Да би то доказали, претпоставимо, да једначине 1) вреде за $m = k$.

Тада је:

$$\frac{p_{0,k+1}}{q_{0,k+1}} = \frac{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) p_{0,k-1} + b_k p_{0,k-2}}{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) q_{0,k-1} + b_k q_{0,k-1}}$$

$$= \frac{(a_k p_{0,k-1} + b_k p_{0,k-2}) + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} p_{0,k-1}}{(a_k q_{0,k-1} + b_k q_{0,k-2}) + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} q_{0,k-1}}$$

$$= \frac{p_{0k} + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} p_{0,k-1}}{q_{0k} + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} q_{0,k-1}} = \frac{a_{k+1} p_{0k} + b_{k+1} p_{0,k-1}}{a_{k+1} q_{0k} + b_{k+1} q_{0,k-1}}$$

Дакле је:

$$p_{0,k+1} = a_{k+1} p_{0k} + b_{k+1} p_{0,k-1}$$

$$q_{0,k+1} = a_{k+1} q_{0k} + b_{k+1} q_{0,k-1}$$

Дакле ако обрасци 1) вреде за $m = k$, они морају вредити и за $m = k + 1$. Но ми смо непосредним рачуном нашли, да они вреде за $m = 2, 3$, дакле они вреде у опште.

У обрасцима 1) исказан је повратни начин израчунавања приближних разломака. Али бројиоци и имениоци узастопних приближних разломака могу се и независно од свију осталих наћи. Зарад тога ставимо:

$$p_{0m} = a_0 q_{0m} + b_1 r_1$$

$$q_{0m} = a_1 r_1 + b_2 r_2$$

2.) $$r_1 = a_2 r_2 + b_3 r_3$$

. . . .

$$r_{m-2} = a_{m-1} r_{m-1} + b_m$$

$$r_{m-1} = a_m.$$

У овим једначинама, којих је на броју $m + 1$, могу се количине $a_0, a_1, a_2 \dots a_m$ и $b_1, b_2\ b_3, \dots b_m$ сматрати као познате а количине $p_{0m}, q_{0m}, r_1, r_2 \dots r_{m-1}$, којих је на броју $m + 1$, као непознате. Ако прву једначину поделимо са q_{0m}, другу са r_1, трећу са r_2 и т. д. и избацимо — елиминишемо — количине: $r_1, r_2, r_3 \dots r_{m-1}$, добићемо:

$$3.) \qquad \frac{p_{0m}}{q_{0m}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdot \atop \ddots + \cfrac{b_m}{a_m}}}$$

одакле се види, да p_{0m} и q_{0m} у једначинама под 2) значе бројиоца и имениоца m-ог приближног разломка. Кад једначине 2) сведемо на нулу, добићемо:

$$p_{0m} - a_0\, q_{0m} - b_1 r_1 \;\dots\dots\dots = 0$$

$$q_{0m} - a_1 r_1 - b_2 r_2 \;\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r_{m-2} - a_{m-1}\, r_{m-1} = b_m$$

$$r_{m-1} = a_m$$

Детерминанта из сачинилаца на левој страни јесте $= 1$. Дакле је:

$$p_{0m} = \begin{vmatrix} 0 & -a_0 & -b_1 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -b_2 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_2 & \dots\dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ b_m & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 & -a_{m-1} \\ a_m & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вредност ове детерминанте неће се променити, кад основке свију стубова осим првог помножимо са -1 и затим први стуб пребацимо на последње место. На тај начин добијамо:

$$4.) \; p_{0m} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_m \end{vmatrix}$$

Прва једначина под 2) није нужна при израчунавању количине q_{0m}; зато су довољне оне остале на броју m. Према томе добија се q_{0m}, кад се на десној страни једначине 4) изоставе прва врста и први стуб. Дакле је:

$$5.) \qquad q_{0m} = p_{1m}$$

Помоћу образаца 4) и 5) израчунавају се на независан начин приближни разломци.

Детерминанта 4) немења се, кад је преокренемо најпре у вертикалном смислу тако, да прва, друга, трећа и т. д. врста постану последња, предпоследња пред-предпоследња и т. д, а затим у хоризоватном смислу тако, да први, други, трећи и т. д. стуб постану последњи, предпоследњи, пред-предпоследњи и т. д. На тај начин добијамо онда:

6.) $$p_{0m} = p_{m0},$$

а то ће рећи: бројилац простог разломка, који је једнак верижном разломку 3), једнак је бројиоцу простог разломка, који је последњи једнак верижном разломку:

7.) $$a_m + \cfrac{b_m}{a_{m-1} + \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-2} + \cdots + \cfrac{b_1}{a_0}}}$$

У верижном разломку 3) иду количине a и b овим редом:

$$a_0,\ b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \dots\ b_m,\ a_m$$

а у верижном разломку 7) оне иду обрнутим редом. Према томе је вредност верижног разломка 3) $p_{0m} : p_{1m}$ а вредност верижног разломка 7) јесте $p_{0m} : p_{0,m-1}$.

Разлике приближних разломака.

140. Нека је дат верижни разломак:

1.) $$\frac{p_{0m}}{q_{0m}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

Приближне разломке:

$$\frac{p_{00}}{q_{00}},\ \frac{p_{01}}{q_{01}},\ \frac{p_{02}}{q_{02}},\ \dots\ \frac{p_{0m}}{q_{0m}},\ \dots\ \frac{p_{0n}}{q_{0n}}$$

зваћемо редом нултим, првим, другим, ... m-им, ... n-им.

Ако означимо са Δ_m разлику између m-ог и $(m-1)$-ог приближног разломка, биће:

2.) $$\Delta_m = \frac{p_{0m}}{q_{0m}} - \frac{p_{0,m-1}}{q_{0,m-1}}$$

Помоћу обрасца 1) у № 139 добијамо из 2):

$$\Delta_m = \frac{a_m p_{0,m-1} + b_m p_{0,m-2}}{a_m q_{0,m-1} + b_m q_{0,m-2}} - \frac{p_{0,m-1}}{q_{0,m-1}}$$

или пошто сведемо:

$$\Delta_m = -\frac{b_m (p_{0,m-1} q_{0,m-2} - p_{0,m-2} q_{0,m-1})}{q_{0m} q_{0,m-1}}$$

Ако помножимо бројиоца и имениоца са $q_{0,m-2}$ и затим поделимо у загради са $q_{0,m-1}\,q_{0,m-2}$, добићемо:

$$3.)\qquad \triangle_m = -\,b_m \frac{q_{0,m-2}}{q_{0m}} \triangle_{m-1}.$$

Кад овде заменимо m са 2, 3, 4 . . . $(m-1), m$ и добивене једначине помножимо, добићемо:

$$\triangle_m = (-1)^{m-1} b_2\, b_3 \ldots b_{m-1}\, b_m \frac{q_{00}\, q_{01}}{q_{0m}\, q_{0,m-1}} \triangle_1$$

Али је:

$$\triangle_1 = a_0 \frac{a_1 + b_1}{a_1} - \frac{a_0}{1} = \frac{b_1}{a_1}$$

и

$$q_{01} = a_1,\ \ q_{00} = 1.$$

Дакле је:

$$4.)\qquad \triangle_m = (-1)^{m-1} \frac{b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_m}{q_{0,m-1}\, q_{0m}}.$$

Овај образац вреди, као што то из његовог извођења сљедује и онда, кад је m коначан а n бесконачан број.

Још ћемо да тражимо разлику између m-ог приближног разломка и ма ког доцнијег. Узимајући да је:

$$n \geqq k > m + 1$$

ми ћемо означавати са:

$$\frac{p_{,m+1k}}{q_{m+1\,k}}$$

прост разломак, који је по вредности једнак верижном разломку:

$$a_{m+1} + \cfrac{b_{m+2}}{a_{m+2} + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{b_k}{a_k}}}$$

Сад је лако израчунати $\frac{p_{0k}}{q_{0k}}$ из $\frac{p_{0,m+1}}{q_{0,m+1}}$, јер зарад тога треба само свуда у овом последњем приближном разломку заменити a_{m+1} са

$$\frac{p_{m+1,k}}{q_{m+1,k}}$$

и тако ћемо добити:

$$\frac{p_{0k}}{q_{0k}} = \frac{\frac{p_{m+1,k}}{q_{m+1,k}} p_{0k} + b_{m+1}\, p_{0,m-1}}{\frac{p_{m+1,k}}{q_{m+1,k}} q_{0k} + b_{m+1}\, q_{0,m-1}}$$

Дакле је:

$$p_{0k} = p_{m+1,k}\, p_{0m} + b_{m+1}\, q_{m+1,k}\, p_{0,m-1}$$

$$q_{0k} = p_{m+1,k}\, q_{0m} + b_{m+1}\, q_{m+1,k}\, q_{0,m-1}$$

и с тога је:

$$\frac{p_{0k}}{q_{0k}} - \frac{p_{0m}}{q_{0m}} = b_{m+1}\, q_{m+1,k} \frac{p_{0,m-1}\, q_{0m} - p_{0m}\, q_{0,m-1}}{q_{0m}\, q_{0k}}$$

$$= -\,b_{m+1}\, q_{m+1,k} \frac{q_{0,m-1}}{q_{0}} \triangle_m$$

С обзиром на образац 4) добијамо одавде за $k > m$:

$$5.)\quad \frac{p_{0k}}{q_{0k}} - \frac{p_{0m}}{q_{0m}} = (-1)^m \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{m+1} q_{m+1,k}}{q_{0m} q_{0k}}$$

Овај образац вреди и за $k = n$ т. ј. кад је умањеник сведен верижни разломак.

Бесконачни верижни разломци.

141. Вредност једног коначног верижног разломка једнака је његовом последњем приближном разломку. Његова је вредност:

$$1.)\quad \frac{p_{0n}}{q_{0n}} = a_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \dots + \triangle_n$$

Ако узмемо, да n расти бесконачно, онда верижни разломак постаје бесконачан и његова је вредност, ако је означимо са $\frac{p}{q}$:

$$2.)\quad \frac{p}{q} = a_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \dots$$

Овим смо верижни разломак претворили у бесконачни ред, и како је кад тај ред збирљив, незбирљив или неодређен, биће и бесконачни верижни разломак:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

збирљив, незбирљив или неодређен. Но ваља приметити, да је обично врло тешко сазнати закон реда 2) као и то, да ли је он збирљив или не. Са свим поуздани знаци збирљивости могу се пронаћи само онда, кад су сви делимични бројиоци и имениоци верижног разломка положни. Но већ су много тежа испитивања у том погледу онда, кад су сви делимични бројиоци одречни а сви делимични имениоци положни бројеви. Ми ћемо сваки од ова два случаја за себе проматрати Но пре тога приметићемо, да се бесконачни верижни разломак може представити у облику:

$$3.)\quad \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_m}{a_m + R}}}$$

где је:

$$4.)\quad R = \cfrac{b_{m+1}}{a_{m+1} + \cfrac{b_{m+2}}{a_{m+2} + \cfrac{b_{m+3}}{a_{m+3} + \dots}}}$$

бесконачан верижан разломак.

Ако је верижни разломак 4) збирљив, биће збирљив и верижни разломак 3).

Ако је верижни разломак 4) неодређен, биће неодређен и верижни разломак 3).

Ако ли је најзад верижни разломак 4) незбирљив, онда ће верижни разломак 3) бити ипак збирљив, јер тада је $b_m : (a_m + R) = 0$, дакле је $\frac{p}{q}$ равно вредности једног коначног верижног разломка.

Верижни разломци са положним делимичним бројиоцима иململениоцима. Приближни разломци и њихове разлике.

142. Ми ћемо претпоставити, да су први члан верижног разломка и сви његови делимични бројиоци и имениоци стварни и положни. Онда како за коначан тако и за бесконачан верижан разломак вреди ово, што сљедује:

1°. Из образаца 1) у № 139 сљедује, да су бројиоци и имениоци свију приближних разломака положни.

2°. Из обрасца 5) у № 140 видимо, да је сваки приближни разломак на парном месту мањи а сваки приближни разломак на непарном месту већи од сваког доцнијег приближног разломка. Дакле приближни разломци на парним местима расту а они на непарном опадају свеједнако.

3°. Разлике између два и два узастопна приближна разломка јесу наизменце положне и одречне.

4°. Бројне вредности тих разлика на основу онога, што је овде под 2) казато, немогу расти бесконачно

5°. Према томе не може ред 2) у № 141 па дакле ни бесконачни верижни разломак бити незбирљив. Помеђути ред и верижни разломак јесу збирљиви, ако је $im\, \triangle_m = 0$; они су неодређени, ако је $lim\, \triangle_m$ различно од нуле за $m = \infty$.

На завршетку ове нумере приметићемо, да се један ерижан разломак може претворити у други, у којег су ви делимични бројиоци равни јединици. Ми можемо дани ерижни разломак написати овако:

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}}$$

$$a_{m-1}+\cfrac{b_m}{a_m+\cfrac{b_{m+1}}{R_{m+1}}}$$

Но ми можемо помножити са једним и истим бројем бројиоца и имениоца разломка:

$$\cfrac{b_m}{a_m+\cfrac{b_{m+1}}{R_{m+1}}}$$

а да се вредност разломка непромени. Ако помножимо са $1 : b_m$, то ће се разломак јавити у облику:

$$\cfrac{1}{\left(\frac{a_m}{b_m}\right)+\cfrac{b_{m+1} : b_m}{R_{m+1}}}\,.$$

Притом је R_{m+1} остало на свом месту непромењено. Ако овако отпочнемо радити са $m = 1$ и продужимо даље, претворићемо лако све бројиоце у јединицу.

Примедба. Да се докаже, да је у новом верижном разломку делимични именилац са казаљком $2m$:

$$1.)\qquad \alpha_{2m} = a_{2m}\frac{b_1\, b_3 \ldots . b_{2m-1}}{b_2\, b_4 \ldots . b_{2m}}$$

а следећи са казаљком $(2m+1)$

$$2.)\qquad \alpha_{2m+1} = \frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}}\,\frac{b_2\, b_4 \ldots . b_{2m}}{b_1\, b_3 \ldots . b_{2m-1}}\,.$$

Бесконачни верижни разломци са положним делимичним бројиоцима и имениоцима. Знаци неодређености.

143. Ми претпостављамо, да смо бесконачни верижни разломак претворили у:

$$1.)\quad \alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_m+\cdots}}}}$$

Ако у опште означимо бројиоца и имениоца m-ог приближног разломка са Z_{0m} и N_{0m}, имаћемо:

$$Z_{00}=\alpha_0 \qquad N_{00}=1$$

$$2.)\quad Z_{01}=\alpha_1 Z_{00}+1 \qquad N_{01}=\alpha_1$$

$$Z_{02}=\alpha Z_{01}+Z_{00} \quad N_{02}=\alpha_2 N_{01}+N_{00}$$

Повратни обрасци 1) у № 139 сада изгледају овако:

$$3,)\quad \begin{aligned} Z_{0m}&=\alpha_m Z_{0,m-1}+Z_{0,m-2}\\ N_{0m}&=\alpha_m N_{0,m-1}+N_{0,m-2}\end{aligned}$$

А једначина 4) у № 140 изгледа сада овако:

$$4.)\quad \triangle_m=\frac{Z_{0m}}{N_{0m}}-\frac{Z_{0,m-1}}{N_{0,m-1}}=\frac{(-1)^{m-1}}{N_{0,m-1}\,N_{0m}}$$

Да бисмо дакле по ставу 5) у № 142 испитали верижни разломак, треба видети, како стоји са имениоцима $N_{0,m-1}$ и N_{0m}.

Из образаца 2) и 3) следује, да је N_{0m} збир из самих положних чланова. Ако је m парно, онда међу тима члановима налазиће се и јединица, а ако је m непарно, онда не. У осталом поједини чланови јесу извесни производи, у којима се јављају или сви или понеки од чинилаца α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_m$; али у једном и истом производу не може се ниједан чинилац јавити више од једанпут.

У N_{00} и N_{01} број чинилаца јесте $=1$. У доцнијим имениоцима број чинилаца расти тако, да је он у N_{0m} толики, колики је у $N_{0,m-1}$ и $N_{0,m-2}$ заједно. На сваки је начин дакле тај број у N_{0m} мањи од двогубог броја чланова у $N_{0,m-1}$.

Посматрајмо сада редове, који постају из ових производа:

$$P_2=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$$

$$P_3=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_m=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots\ldots(1+\alpha_m).$$

Као што се види P_2 равно је реду, у коме има 4 члана; P_3 равно је реду, у коме има 8 чланова и т. д. и уопште сваки производ раван је једном реду, у коме има двапут онолико чланова, колико их је у оном, који је пред њим. У сваком реду, који постаје из тих производа, јавља се јединица као први члан а затим следују у реду за P_m као сабирци сви делимични производи, који се из чинилаца $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_m$ могу начинити. Сви сабирци у реду за P_m јесу положни.

Према томе у реду за P_m има више сабирака него ли у N_{0m}; међутим сваки сабирак N_{0m} јавља се и у P_m. Дакле је:

5.) $P_m = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \dots (1+\alpha_m) > N_{0m} > 0.$

Одавде следује, да ако је за $m = \infty$ $\lim P_m$ одређен и коначан број, да онда и $\lim N_{0m}$ мора бити положан и коначан број, због чега тада $\lim \Delta_m$ не може бити $= 0$. Дакле важи ова теорема

1°. *Бесконачни верижни разломак 1), чији су делимични имениоци положни а делимични бројиоци положне јединице, јесте неодређен, ако је бесконачни производ:*

6.) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) \dots$

збирљив. Но ми смо у № 109 доказали, да је бесконачни производ 6) збирљив, ако је збирљив бесконачни ред:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_k+\alpha_{k+1}+\dots$$

или што је свеједно, ако су збирљиви оба реда:

$$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\dots$$

$$\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\dots$$

Горњу теорему може дакле заменити ова:

2°. *Бесконачни верижни разломак 1) јесте неодређен, ако су редови:*

7.) $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\dots$

8.) $\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\dots$

оба збирљиви.

Знаци збирљивости.

144. Кад је m парно, онда ред за N_{0m} почиње са 1 и сви су остали чланови положни. Дакле је $N_{0m} > 1$. Но тада је $m-1$ непаран број и ми ћемо доказати, да је:

1.) $N_{0,m-1} > \alpha_1+\alpha_3+\dots+\alpha_{m-1}.$

Претпоставимо, да је за један извесни цео број k:

$$N_{0,2k-1} > \alpha_1+\alpha_3+\dots+\alpha_{2k-1}$$

Помоћу другог обрасца под 3) у № 143 налазимо тада, да је:

$$N_{0,2k-1} > \alpha_{2k+1} N_{0,2k} + (\alpha_1+\alpha_3+\dots+\alpha_{2k-1})$$

и одатле због $N_{0,2k} > 1$

$$N_{0,2k+1} > \alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+ \quad +\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k+1}.$$

Одавде видимо дакле, да ако образац 1) вреди за $m-1 = 2k-1$, да он онда мора вредити и за $m-1 = 2k+1$. Но лако је непосредним рачуном дознати, да је:

$$N_{03} = \alpha_3 N_{02} + N_{01} = \alpha_3 N_{02} + \alpha_1$$

и зато:

$$N_{03} > \alpha_1 + \alpha_3.$$

Образац 1) вреди дакле за $m-1=3$; он дакле мора вредити и за $m-1=5$ и т. д. за сваку већу непарну вредност од $(m-1)$.

Према томе је дакле:

$$2)\qquad N_{0,m-1}\,N_{0m} > \alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{m-1}$$

Ако је m непарно, дакле $(m-1)$ парно, онда радећи на исти начин налазимо, да је:

$$3.)\qquad N_{0,m-1}\,N_{0m} > \alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_m.$$

Ако је сад ред 7) №-е 143 незбирљив, то је услед последњих двеју теорема извесно:

$$\lim N_{0,m-1}\,N_{0m}=\infty$$

дакле $\lim \Delta_m = 0$ и зато верижни разломак 1) у № 143 збирљив.

Овај став можемо сада применити и на верижни разломак:

$$4.)\qquad \alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\ldots}}$$

Овај верижни разломак биће незбирљив, ако је ред 8) у № 143 незбирљив. Али кад је верижни разломак 4) збирљив, онда је то исто случај и са верижним разломком 1) у № 143. Према томе можемо дакле сада рећи:

1°. *Верижни разломак 1) у № 143 јесте збирљив, ако је збирљив бар један од редова 7) и 8) у № 143.*

Ова теорема и она друга у № 143 могу се саставити у ову једну:

2°. *Верижни разломак у № 143 јесте збирљив или неодређен, како је кад од следећа два реда:*

$$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots,$$

$$\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\ldots$$

барем један незбирљив или ниједан.

И тако смо за верижне разломке, у којих су делимични бројиоци положне јединице а делимични имениоци стварни и положни бројеви, нашли поуздане знаке, по којима можемо увек пресудити, да ли су они збирљиви, незбирљиви или неодређени. Али ако је верижан разломак општијег облика т. ј. оног под 1) у № 138 за $n=\infty$ и ако су осим тога сви делимични бројиоци и имениоци стварни и положни, онда треба само помоћу образаца 1) и 2) у № 142 претворити дани верижни разломак у други, где су сви делимични бројиоци положне јединице, па онда можемо применити на њега последњу теорему.

145. И за редове општега облика тражићемо сада знаке збирљивости. Образац 2) у № 141 може се и овако написати:

$$5.)\qquad \frac{p}{q}=a_0+\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_1b_2}{q_{01}q_{02}}+\frac{b_1b_2b_3}{q_{02}q_{03}}-\ldots$$

даље је (№ 139):

$$q_{0m}=p_{1m}.$$

Дакле кад у детерминанти 4) № 139 изоставимо први стуб и прву врсту:

$$6.)\quad q_{0m} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 & a_m \end{vmatrix}$$

Одавде видимо, да је:

$$q_{0m} > a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_m.$$

Ако су дакле у верижном разломку сва b једнака положној јединици; ако су даље a_1, a_2, $a_3 \ldots .$ положни бројеви и ако најзад производ $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_m$ при бесконачном рашћењу m-а расти бесконачно, онда је ред 5) падајући и знаци његових чланова мењају се наизменце. Према томе је тај ред тада збирљив, па дакле и верижни разломак:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 +}}}$$

Али детерминанта 4) може се написати и овако:

$$7.)\quad q_{0m} = b_1\, b_2 \ldots b_m \begin{vmatrix} \frac{a_1}{b_1} & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b_1} & \frac{a_2}{b_2} & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b_2} & \frac{a_3}{b_3} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -\frac{1}{b_{m-1}} & \frac{a_m}{b_m} \end{vmatrix}$$

Одавде претпостављајући сва a и b положна добијамо:

$$\frac{b_1\, b_2 \ldots b_{m+1}}{q_{0m}\, q_{0,m+1}} < \frac{b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_{m+1}}{(b_1\, b_2 \ldots b_m)^2 b_{m+1} \left(\frac{a_1}{b_1} \cdots \frac{a_m}{b_m}\right)^2 \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}}$$

или:

$$\frac{b_1\, b_2 \ldots b_{m+1}}{q_{0m}\, q_{0,m+1}} < \frac{b_1\, b_2 \ldots b_{m+1}}{a_1^2\, a_2^2 \ldots a_m^2\, a_{m+1}}$$

Дакле је овим доказана теорема:

Ако производ:

$$\frac{a_1}{b_1^2}\,\frac{a_2}{b_2^2}\,\frac{a_3}{b_3^2} \cdots\cdots \frac{a_m}{b_m^2}\,\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$$

тежи нули, кад m расти бесконачно, онда је верижни разломак:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

збирљив.

Прости верижни разломци.

146. Прост верижни разломак јесте такав, у којег су делимични бројиоци положне јединице а делимични имениоци стварни цели и положни бројеви.

Ако је прост верижни разломак бесконачан, он је збирљив, јер ред:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \; . \; . \; . \; . \; .$$

јесте зацело незбирљив, ако су све количине α положни цели бројеви.

Обрасци 2), 3), 4) у № 143 вреде и за просте верижне разломке с тим, да су бројиоци и имениоци свију приближних разломака цели и положни бројеви.

Из једначине 4) у № 143 сљедује:

$$1.) \qquad Z_{0m} N_{0,m-1} - Z_{0,m-1} N_{0m} = (-1)^{m-1}$$

Кад би сад Z_{0m} и N_{0m} били дељиви са једним целим бројем већим од 1, то би онда са тим бројем била дељива лева страна једначине 1), дакле би то исто морало бити случај и са десном страном а то није могуће. Дакле:

1°. *Сви приближни разломци простог верижног разломка јесу сведени разломци т. ј. такви, код којих бројилац и именилац немају заједничке мере.*

Вредност једног простог верижног разломка лежи по № 142 између свака два узастопна приближна разломка. Ми ћемо поменуту вредност означити са $\frac{p}{q}$ и ставити:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cdot \; \ddots \; + \cfrac{1}{\alpha_m + R}}}}$$

$$R = \cfrac{1}{\alpha_{m+1} + \cfrac{1}{\alpha_{m+2} + \cdot \; \ddots}}$$

где је R очевидно један положан чист разломак. По обрасцима 3) у № 143 налазимо:

$$\frac{p}{q} = \frac{(\alpha_m + R) Z_{0,m-1} + Z_{0,m-2}}{(\alpha_m + R) N_{0,m-1} + N_{0,m-2}} = \frac{Z_m + R Z_{0,m-1}}{N_m + R N_{0,m-1}}$$

а одатле:

$$\frac{p}{q} - \frac{Z_{0,m-1}}{N_{0,m-1}} = \frac{N_{0m} \cdot \Delta_m}{N_{0m} + R N_{0,m-1}}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{Z_{0m}}{N_{0m}} = - \frac{R N_{0,m-1} \Delta_m}{N_{0m} + R N_{0,m-1}}$$

Бројне вредности ових разлика имају се једна према другој као:

$$\frac{N_{0m}}{RN_{0,m-1}}$$

Пошто је $N_{0m} > N_{0,m-1}$ и R чист разломак, то је јасно, да је друга разлика бројно мања од прве. Дакле:

2°. *Сваки приближни разломак једног простог верижног разломка разликује се од вредности овога мање но сваки ранији приближни разломак*

Узмимо да је цео број $s \leqq N_{0m}$. Онда се може доказати, да нема ниједног целог броја r, за који би се разломак $\frac{r}{s}$ разликовао од вредности простог верижног разломка у мање но приближни разломак $\frac{Z_{0m}}{N_{0m}}$. Јер кад бисмо претпоставили, да је то ипак случај, онда би се $\frac{r}{s}$ морало налазити између $\frac{Z_{0m}}{N_{0m}}$ и $\frac{Z_{0,m-1}}{N_{0,m-1}}$, дакле би онда морало бити:

$$(-1)^{m-1}\triangle^{m} > (-1)^{m-1}\left(\frac{r}{s}-\frac{Z_{0,m-1}}{N_{0,m-1}}\right).$$

Одавде после свођаја добијамо:

$$1 > \frac{N_{0m}}{q}(-1)^{m-1}(r\,N_{0,m-1}-s\,Z_{0,m-1}).$$

Али то неможе бити, јер је како разломак $N_{0m} : s$ тако и разлика:

$$(-1)^{m-1}(r\,N_{0,m-1}-s\,Z_{0,m-1})$$

барем равна јединици.

3°. *Један разломак, чији именилац није већи од N_{0m}, и чији бројилац и именилац јесу цели бројеви, не може бити ближи правој вредности простог верижног разломка од приближног разломка* $\frac{Z_{0m}}{N_{0m}}$.

Периодни верижни разломци.

147. Код периодног верижног разломка понављају се чланови периодно. Ако претпоставимо, да је $a_0 = 0$ и да је за сваки цео број k као и дани цео и положан број m:

$$1.)\qquad b_{k+m} = b_{k},\quad a_{k+m} = a_{k},$$

онда је верижни разломак периодан и његова периода има m чланова. Ако означимо са x вредност даног периодног разломка, онда је:

$$2.)\qquad x = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_m}{a_m + x}}}}$$

Узастопне приближне разломке верижног разломка означићемо онако као у № 138. Тада се x налази из једначине:

$$3.)\qquad x = \frac{(a_m + x)\,p_{0,m-1} + b_m\,p_{0,m-2}}{(a_m + x)\,q_{0,m-1} + b_m\,q_{0,m-2}} = \frac{p_{0m} + x\,p_{0,m-1}}{q_{0m} + x\,q_{0,m-1}}$$

Из ове једначине, која је по x квадратна, налазимо:

$$4.)\qquad x = \frac{p_{0,m-1} - q_{0m}}{2\,q_{0,m-1}} \pm \sqrt{\left(\frac{p_{0,m-1} + q_{0m}}{2\,q_{0,m-1}}\right)^2 + \frac{p_{0m}}{q_{0,m-1}}}$$

Ми ћемо претпоставити, да су сви делимични бројиоци и имениоци стварни и положни, због чега то исто мора бити случај и са бројиоцима и имениоцима приближних разломака. Тада је периодни разломак положан и за непознату x може се у 4) узети само положни знак Дакле је:

$$5.)\qquad x = \frac{p_{0,m-1} - q_{0m}}{2\,q_{0,m-1}} + \sqrt{\left(\frac{p_{0,m-1} - q_{0m}}{2\,q_{0,m-1}}\right)^2 + \frac{p_{0m}}{q_{0,m-1}}}$$

Према томе периодни верижни разломак са положним делимичним бројиоцима и имениоцима увек је збирљив.

Резултат под 5) даје нам повода потражити, да ли се корен квадратни из једног целог броја може развити у облику једног периодног верижног разломка Број, из којег се има извући корен квадратни, може се увек представити у облику $a^2 + b$, где је b цео и положан број. Ако под x разумемо положни корен једначине:

$$x^2 + 2a\,x - b = 0,$$

онда је:

$$x = -a + \sqrt{a^2 + b}$$

а такође и:

$$x = \frac{b}{2a + x}$$

Из последње две једначине следује:

$$6.)\qquad \sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \;.}}}$$
$$\ddots$$

Десни верижни разломак збирљив је за положна a и b, као што смо то већ приметили.

Верижни разломци, у којих су делимични бројиоци стварни и одречни а делимични имениоци стварни и положни.

148. Верижни разломак:

$$1.)\qquad a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \;.}}}$$
$$\ddots$$
$$-\frac{b_n}{a_n}$$

у коме узимамо, да су сва a и b стварна и положна, постаје из оног у № 138, кад тамо претпоставимо сва a и b стварна и узмемо свако b са одречним знаком. С том изменом вреди онда за овај овде верижни разломак све оно, што је у №-ама 138, 139 и 140 нађено.

За бројиоце и имениоце приближних разломака имамо сада:

$$p_{00} = a_0 \qquad q_{00} = 1$$

$$p_{01} = a_1 p_{00} - b_1 \qquad q_{01} = a_1$$

$$p_{02} = a_2 p_{01} - b_2 p_{00} \qquad q_{02} = a_2 q_{01} - b_2 q_{00}$$

и за $m > 1$:

2.)
$$p_{0m} = a_m p_{0,m-1} - b_m p_{0,m-2}$$
$$q_{0m} = x_m q_{0,m-1} - b_m q_{0,m-2}$$

Ако у обрасцу 4) №-е 139 пред сваким b метнемо одречан знак, то онда можемо све стубове и врсте, у којима се налази једна од количина $a_1, a_2, a_3 \ldots$ помножити са -1, а да се вредност детерминанте непромени. Тако добијамо:

3.)
$$p_{0m} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_2 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & b_3 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & a_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 1 & a_m \end{vmatrix}$$

Даље је:

4.)
$$q_{0m} = p_{1m}$$

За разлику двају узастопних приближних разломака добијамо образац:

5.)
$$\Delta_m = -\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots\ldots b_m}{q_{0,m-1}\, q_{0m}}$$

Пошто су сва b положна, то знак количине Δ_m зависи једино од знакова количина $q_{0,m-1}$ и q_{0m}.

Бесконачни верижни разломци са одречним делимичним бројиоцима и положним делимичним имениоцима.

149. Да ли је бесконачни верижни разломак:

1.)
$$a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

збирљив, незбирљив или неодређен, дознаћемо помоћу реда 2) у № 141. Ми ћемо тај ред овде овако написати:

2.)
$$\frac{p}{q} = a_0 - \frac{b_1}{q_{00}\, q_{01}} - \frac{b_1 b_2}{q_{01}\, q_{02}} - \frac{b_1 b_2 b_3}{q_{02}\, q_{03}} - \ldots\ldots$$

а за m-ни приближни разломак имаћемо:

3.)
$$\frac{p_{0m}}{q_{0m}} = a_0 - \frac{b_1}{q_{00}\, q_{01}} - \frac{b_1 b_2}{q_{01}\, q_{02}} - \ldots\ldots$$
$$\ldots - \frac{b_1 b_2 \ldots\ldots b_m}{q_{0,m-1}\, q_{0m}}.$$

Опште упуство слично ономе у №-ма 143 и 144 не може се овде поставити и зато ћемо прећи овде један особито важан случај.

Кад су имениоци свију приближних разломака положни, онда ред 2) неможе бити неодређен, јер су тада осим a_0 сви чланови тога реда одречни. Ако је ред 2) незбирљив, онда је његова вредност $= -\infty$. Али ако су несамо имениоци него и бројиоци свију приближних разломака положни, онда неможе очевидно количник $p_{0m} : q_{0m}$ бити одречан а тако исто ни граница тога количника за $m = \infty$ неможе бити $= -\infty$. Тада је дакле верижни разломак збирљив.

Именилац q_{00} јесте положан. Ако претпоставимо $a_0 > 0$, онда је и p_{00} положно. Бројиоци и имениоци свију доцнијих приближних разломака испашће сви положни, ако узмемо, да је за свако цело $m \geqq 1$:

$$p_{0m} - p_{0,m-1} > 0,$$

$$q_{0m} = q_{0,m-1} > 0.$$

Но питање је сад, кад ће ово моћи бити. Понајпре је:

$$p_{01} - p_{00} = (a_1 - b_1 - 1)\, a_0 + b_1 (a_0 - 1)$$

$$q_{01} - q_{00} = a_1 - 1.$$

Прва од ових двеју разлика јесте положна, ако је:

4.) $a_0 > 1$

и у исти мах:

.) $a_1 - b_1 - 1 \geqq 0.$

Друга је разлика онда већ по себи положна. Даље је:

$$p_{02} - p_{01} = (a_2 - b_2 - 1)\, p_{01} + b_2 (p_{01} - p_{00})$$

$$q_{02} - q_{01} = (a_2 - b_2 - 1)\, q_{01} + b_2 (q_{01} - q_{00})$$

Обе су ове разлике положне, кад је осим услова 4) и 5) испуњен још и овај:

6.) $a_2 - b_2 - 1 \geqq 0$

У опште можемо ставити:

$$p_{0m} - p_{0,m-1} = (a_m - b_m - 1)\, p_{0,m-1} + b_m (p_{0,m-1} - p_{0,m-2}),$$

$$q_{0m} - q_{0,m-1} = (a_m - b_m - 1)\, q_{0,m-1} + b_m (q_{0,m-1} - q_{0,m-2}).$$

Овде су за свако цело $m \geqq 1$ леве разлике положне, ако је услов под 4) испуњен и ако је осим тога за свако цело $m \geqq 1$:

7.) $a_m - b_m - 1 \geqq 0.$

Тада је дакле верижни разломак збирљив. У осталом за саму збирљивост услов под 4) није потребан. Јер један збирљив верижни разломак остаје збирљив и онда, кад се од његовог првог члана одузме ма какав коначан број. Дакле имамо теорему:

Један бесконачни верижни разломак са одречним делимичним бројиоцима и положним делимичним имениоцима јесте збирљив, кад је свики делимични именилац бар за јединицу већи од бројне вредности одговарајућег делимичног бројиоца.

Ако у верижном разломку 1) узмемо, да је $a_0 = 1$, онда је приближни разломак:

$$\frac{p_{01}}{q_{01}} = 1 - \frac{b_1}{a_1}$$

положан и мањи од 1, ако је услов 5) испуњен. Ако је у опште услов 7) испуњен, онда су сви приближни разломци положни и опадају без престанка. Дакле је сваки приближни разломак положан и мањи од 1, а тако исто стоји и са вредношћу самог верижног разломка. Или другаче: Сваки приближни разломак а тако исто и вредност бесконачног верижног разломка:

$$8.)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}}}$$

лежи између 0 и 1, ако су сва a и b положна и ако стоји услов 7).

Али има један случај, кад је вредност бесконачног верижног разломка 8) $=1$, дакле вредност бесконачног верижног разломка:

$$9.)\qquad 1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}}}$$

равна нули. Тај случај наступа онда, кад су сва b цели и положни бројеви и кад је у опште:

$$a_m = b_m + 1.$$

Тада је код верижног разломка 9):

$$p_{0m} - p_{0,m-1} = b_m (p_{0,m-1} - p_{0,m-2})$$

$$q_{0m} - q_{0,m-1} = b_m (q_{0,m-1} - q_{0,m-2})$$

дакле:

$$p_{0m} - p_{0,m-1} = b_2\, b_3 \dots b_m (p_{01} - p_{00})$$

$$q_{0m} - q_{0,m-1} = b_2\, b_3 \dots b_m (q_{01} - q_{00}).$$

Али је тада:

$$p_{01} = a_1 - b_1 = 1, \quad p_{00} = 1$$

и зато:

$$p_{0m} = p_{0,m-1} = \dots = p_{01} = p_{00} = 1.$$

Даље је:

$$q_{01} - q_{00} = a_1 - 1 = b_1,$$

$$q_{0m} = 1 + b_1 + b_1\, b_2 + \dots + b_1\, b_2\, b_3 \dots b_m.$$

Одавде следује:

$$\frac{p}{q} = lim \frac{p_{0m}}{q_{0m}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

а то је требало доказати.

Посредни приближни разломци.

150. Кад је услов 7) у № 149 испуњен, онда приближни разломци верижног разломка:

$$1.)\quad \frac{p}{q} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}}}$$

опадају и приближавају се без престанка вредности верижног разломка. Али при том једностраном приближавању ми нисмо у стању оценити, за колико одступа који приближни разломак од праве вредности верижног разломка. Зато је потребно, да имамо још један низ бројева, који ће се али растући приближавати правој вредности верижног разломка. Такав један низ бројева лако је наћи. Зарад тога ставимо:

$$2.)\quad \frac{p}{q} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{b_m}{a_m - R}}}},$$

$$3.)\quad \frac{p_{0m}}{q_{0m}} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{b_m}{a_m}}}}$$

$$4.)\quad \frac{p'_{0m}}{q'_{0m}} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{b_m}{a_m - 1}}}}$$

Услед оног, што смо приметили о верижном разломку 8) № 149 вредност од R јесте положна и мања од јединице. Помоћу једначина 2) у №148 добијамо:

$$\frac{p}{q} = \frac{p_{0m} - R\, p_{0,m-1}}{q_{0m} - R\, q_{0,m-1}}$$

$$\frac{p'_{0m}}{q'_{0m}} = \frac{p_{0m} - p_{0,m-1}}{q_{0m} - q_{0,m-1}}$$

Одузимањем добијамо:

$$\frac{p}{q} - \frac{p'_{0m}}{q'_{0m}} = \frac{-(1-R)\, q_{0,m-1}\, q_{0m}\, \Delta_m}{(q_{0m} - q_{0,m-1})\,(q_{0m} - R\, q_{0m-1})}$$

Именилац десно јесте производ из два положна чиниоца. У бројиоцу положни су $(1-R)$, $q_{0,m-1}$, q_{0m} а Δ_m јесте одречно. Дакле је:

$$5.) \qquad \frac{p}{q} > \frac{p'_{0m}}{q'_{0m}}.$$

Сад да видимо, како стоји са разликом:

$$\frac{p'_{0m}}{q'_{0m}} - \frac{p'_{0,m-1}}{q'_{0,m-1}}.$$

Да би ову разлику представили у што згоднијем облику, приметићемо, да се умаљеник може и овако написати:

$$\frac{p'_{0m}}{q'_{0m}} = \frac{(a_m - 1)\, p_{0,m-1} - b_m\, p_{0,m-2}}{(a_m - 1)\, q_{0,m-1} - b_m\, q_{0,m-2}}.$$

Умалилац је:

$$\frac{p'_{0,m-1}}{q'_{0,m-1}} = \frac{p_{0,m-1} - p_{0,m-2}}{q_{0,m-1} - q_{0,m-2}}.$$

Одузимањем добијамо:

$$6.) \quad \frac{p'_{0m}}{q'_{0m}} - \frac{p'_{0,m-1}}{q'_{0,m-1}} = \frac{-\,(a_m - b_m - 1)\, q_{0,m-2}\, q_{0,m-1} \triangle_m}{(q_{0m} - q_{0,m-1})\,(q_{0,m-1} - q_{0,m-2})}$$

И ова је разлика положна; дакле су једначином 4) дефинисани посредни приближни разломци:

$$\frac{p'_{00}}{q'_{00}},\ \frac{p'_{01}}{q'_{01}}, \ldots\ \frac{p'_{0m}}{q'_{0m}}, \ldots$$

један низ бројева, који с лева на десно идући расту. Ти се бројеви приближавају без престанка вредности бесконачног верижног разломка, и остају вазда мањи од те

вредности. И тако смо сада пронашли начин за оцену одступања сваког приближног разломка од праве вредности верижног разломка, јер је:

$$7.) \qquad \frac{p_{0m}}{q_{0m}} > \frac{p}{q} > \frac{p'_{0m}}{q'_{0m}}.$$

Периодни верижни разломци.

151. Ми претпостављамо, да су у верижном разломку:

$$1.) \quad x = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ - \cfrac{b_m}{a_m - x}}}}$$

сва a и b положна и да је за свако цело и положно k:

$$2.) \qquad a_k - b_k - 1 \geqq 0.$$

Тада је:

$$3.) \qquad x = \frac{p_{0m} - x p_{0,m-1}}{q_{0m} - x q_{0,m-1}}.$$

Из ове једначине, која је по x квадратна, добијамо:

$$x = \frac{p_{0,m-1} + q_{0m}}{2q_{0,m-1}} \pm \sqrt{\left(\frac{p_{0,m-1} + q_{0m}}{2q_{0,m-1}}\right)^2 - \frac{p_{0m}}{q_{0,m-1}}}$$

или, кад под кореним знаком одузмемо и додамо:

$$\frac{4p_{0,m-1}\,q_{0m}}{4q_{0,m-1}}$$

$$4.)\quad x=\frac{p_{0,m-1}+q_{0m}}{2q_{0,m-1}}\pm\sqrt{\left(\frac{p_{0,m-1}-q_{0m}}{2q_{0,m-1}}\right)^2-\frac{q_{0m}\,\triangle_m}{q_{0,m-1}}}$$

Пошто је вредност x-а мања од приближног разломка $p_{0,m-1}:q_{0,m-1}$ и пошто је $\triangle_m$ одречно, то се у последњој једначини може узети само одречни знак. И тако је сад:

$$5.)\quad x=\frac{p_{0,m-1}+q_{0m}}{2q_{0,m-1}}-\sqrt{\left(\frac{p_{0,m-1}-q_{0m}}{2q_{0,m-1}}\right)^2-\frac{q_{0m}\,\triangle_m}{q_{0,m-1}}}$$

Овде сасвим онако исто као и у № 147 можемо корен квадратни из каквог броја представити у облику једног периодног разломка. Ако под x разумемо мањи корен једначине:

$$x^2-2ax+b=0,$$

у којој су a и b цели и положни бројеви и $2a\geqq b+1$, онда је:

$$x=a-\sqrt{a^2-b}$$

а тако исто и

$$x=\frac{b}{2a-x}$$

Дакле је:

$$6.)\quad \sqrt{a^2-b}=a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\;.}}}$$

где је $2a\geqq b+1$. Десни верижни разломак јесте дакле збирљив.

Претварање верижних разломака у редове.

152. Један верижни разломак може се претворити у ред помоћу образаца 1) и 2) у № 141. Једначина 1) вреди за сваку коначну целу и положну вредност n-а. Једначина 2) постаје, кад се у једначини 1) узме $n=\infty$, што је слободно учинити, ако је ред 2) збирљив.

Пример 1. Дат је верижни разломак:

$$1.)\qquad \frac{p}{q}=\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\;.}}}$$

Овде је $q_{00}=1$, $q_{01}=2\,!$, $q_{02}=3\,!$, $q_{03}=4\,!$ . . . . и у опште:

$$q_{0,m-1}=m\,!,\ q_{0m}=(m+1)\,!$$

По обрасцу 4) у № 140 добијамо :

$$\Delta_m = (-1)^{m-1} \frac{m!}{m!\,(m+1)!} = (-1)^{m+1} \frac{1}{(m+1)\,!},$$

а по обрасцу 2) у № 141 :

$$2.) \qquad \frac{p}{q} = \frac{1}{2\,!} - \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} - \dots .$$

Збир десног реда јесте $= e^{-1}$ и зато је сад :

$$3.) \qquad e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ddots}}}$$

Пример 2. Дат је верижни разломак :

$$4.) \qquad \frac{p}{q} = \cfrac{1^2}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 + \ddots}}}$$

Овде је $q_{00} = 1$, $q_{01} = 1$, $q_{02} = 2\,!$, $q_{03} = 3\,!$ . . . . .
и у опште :

$$q_{0,m-1} = (m-1)\,!, \quad q_{0m} = m\,!.$$

Дакле је :

$$\Delta_m = (-1)^{m-1} \frac{1^2\, 2^2\, 3^2 \dots (m-1)^2}{(m-1)\,!\ m\,!} = \frac{(-1)^{m-1}}{m}$$

и зато :

$$5.) \quad \frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = l2.$$

Пример 3. Дат је верижни разломак :

$$6.) \qquad \frac{p}{q} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}$$

Овде је :

$$q_{00} = 1, \ q_{01} = 1, \ q_{02} = 1\,.\,3, \ q_{03} = 1\,.\,3\,.\,5, \ \dots .$$

и у опште :

$$q_{0,m-1} = 1\,.\,3\,.\,5 \dots (2m-3), \quad q_{0m} = 1\,.\,3\,.\,5 \dots (2m-1)$$

Према томе је сад :

$$\Delta_m = (-1)^{m-1} \frac{1^2\, 3^2\, 5^2 \dots (2m-3)^2}{1.3.5 \dots (2m-3)\ 1.3.5 \dots (2m-1)} = \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}.$$

Дакле је:

5.) $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = arc\,tg\,1,$

и по томе:

$$\frac{p}{q} = \frac{\pi}{4}.$$

Претварање редова у верижне разломке.

153. Ми полазимо од реда:

1.) $$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \dots + \frac{1}{v_n}.$$

Ако у идентичној једначини:

2.) $$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_1}$$

заменимо $\frac{1}{v_1}$ са $\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$, онда се v_1 претвара у:

$$v_1^2 - \frac{v_1^2}{v_1 + v_2},$$

и ми добијамо из 2) нову идентичну једначину:

3.) $$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \cfrac{1}{v_1 - \cfrac{v_1^2}{v_1 + v_2}}$$

Ако овде заменимо $\frac{1}{v_2}$ са $\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$, онда се v_3 претвара у:

$$v_2 - \frac{v_2^2}{v_2 + v_3},$$

и ми добијамо из 3) нову идентичну једначину:

4.) $$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} = \cfrac{1}{v_1 - \cfrac{v_1^2}{v_1 + v_2 - \cfrac{v_2^2}{v_2 + v_3}}}$$

Продужавајући овако и даље налазимо, да за сваку целу и положну вредност n-а вреди једначина:

5.) $$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$= \cfrac{1}{v_1 - \cfrac{v_1^2}{v_1 + v_2 - \cfrac{v_2^2}{v_2 + v_3 - \cfrac{v_3^2}{v_3 + v_4 - \ddots}}}}$$

$$- \cfrac{v_{n-1}^2}{v_{n-1} + v_n}$$

Ако количине v_2, v_4, v_6, ... узмемо са противним знаком и затим делимичне бројиоце учинимо положним множећи са -1, добићемо:

$$6.)\qquad \frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{v_n}$$

$$=\cfrac{1}{v_1+\cfrac{v_1^2}{v_2-v_1+\cfrac{v_2^2}{v_3-v_2+\cfrac{v_3^2}{v_4-v_3+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\;\cdot\;+\cfrac{v_{n-1}^2}{v_n-v_{n-1}}}}}}}$$

Ако су редови на левим странама једначина 5) и 6) збирљиви, онда је слободно у тим једначинама узети $n=\infty$. Јер сваки приближни разломак верижних разломака у једначинама 5) и 6) представља очевидно збир од онолико исто чланова левога реда, колико чланова он сам има. Ако је дакле збирљив или не бесконачан ред лево, онда то исто мора бити случај и са десним верижним разломком.

За $n=\infty$ добијамо из 5) и 6):

$$7.)\qquad \frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\ldots$$

$$=\cfrac{1}{v_1-\cfrac{v_1^2}{v_1+v_2-\cfrac{v_2^2}{v_2+v_3-\cfrac{\cdot}{\cdot\;\;\cdot}}}}$$

и

$$8.)\qquad \frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}-\ldots$$

$$=\cfrac{1}{v_1+\cfrac{v_1^2}{v_2-v_1+\cfrac{v_2^2}{v_3-v_2+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\;\cdot}}}}$$

Пример 1. Ако узмемо, да је:

$$v_1=1,\ v_2=\frac{1}{x},\ v_3=\frac{2!}{x^2},\ldots v_m=\frac{(m-1)!}{x^{m-1}},$$

онда је ред на левој страни једначине 8) једнак e^{-x}. Дакле је:

$$e^{x}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-1+\cfrac{\left(\cfrac{1}{x}\right)^2}{\cfrac{2\,!}{x^2}-\cfrac{1}{x}+\cfrac{\left(\cfrac{2!}{x^2}\right)^2}{\cfrac{3!}{x^3}-\cfrac{2!}{x^2}+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\;\cdot}}}}$$

Одавде, пошто истиснемо разломке из делимичних бројилаца и именилаца добијамо:

$$9)\quad e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - x + \cfrac{x}{2 - x + \cfrac{2x}{3 - x + \cfrac{3x}{4 - x + \cdot}}}}$$

Пример 2. Ако у обрасцу 7) узмемо за поједина v исте вредности као мало час, леви ред постаје $= e^x$ и тако добијамо:

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x} - \cfrac{\left(\cfrac{1}{x}\right)^2}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{2!}{x^2} - \cfrac{\left(\cfrac{2!}{x^2}\right)^2}{\cfrac{2!}{x^2} + \cfrac{3!}{x^3} - \cdot}}}}$$

а одавде, пошто истиснемо разломке у делимичним бројиоцима и имениоцима:

$$10.)\quad e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x \quad \cfrac{1.x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - .}}}}$$

Пример 3. Ако у једначини 8) узмемо:

$$v_1 = \frac{1}{x},\ v_2 = \frac{2}{x^2},\ v_3 = \frac{3}{x^3}, \ldots\, v_m = \frac{m}{x^m},$$

онда ред на левој страни постаје $= l\,(1 + x)$, и тај је ред збирљив за $1 \geqq x > -1$. Дакле је за вредности x-а у тим границама:

$$l\,(1 + x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{\left(\cfrac{1}{x}\right)^2}{\cfrac{2}{x^2} - \cfrac{1}{x} + \cfrac{\left(\cfrac{2}{x^2}\right)^2}{\cfrac{3}{x^3} - \cfrac{2}{x^2} + \cfrac{\left(\cfrac{3}{x^3}\right)^2}{\cfrac{4}{x^4} - \cfrac{3}{x^3} +}}}}$$

или после простог свођаја:

$$11)\quad l\,(1 + x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 - x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x +}}}}$$

Пример 4. Ако у обрасцу 7) ставимо.:

$$v_1 = \frac{1}{x},\ v_2 = \frac{3}{x^3},\ v_3 = \frac{5}{x^5}, \ldots v_m = \frac{2m-1}{x^{2m-1}},$$

онда ред на левој страни тога обрасца постаје $= \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, и тај је ред збирљив за $1 > x > -1$. За вредности x-а у тим границама имамо дакле:

$$12.)\quad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{1^2 x^2}{1x^2 + 3 - \cfrac{3^2 x^2}{3x^2 + 5 - \cfrac{5^2 x^2}{5x^2 + 7 - \ddots}}}}$$

Пример 5. Узимајући у једначини 8) за појединa v исте вредности као мало час добијамо:

$$13)\quad arc\, tg\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

$$= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x^2}{3 - 1x^2 + \cfrac{3^2 x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{5^2 x^2}{7 - 5x^2 + \ddots}}}}$$

Овај образац вреди за $1 \geqq x \geqq -1$, јер је за вредности x-а у тим границама леви ред збирљив.

Претварање количника двају редова у верижни разломак.

Ако означимо са $F(x)$ и $F_1(x)$ два бесконачна реда, који су уређени по растућим целим и положним степенима од x, онда поступним делењем добијамо овај низ једначина:

$$1.)\quad \begin{aligned} F(x) &= a_0\, F_1(x) + b_1 x\, F_2(x), \\ F_1(x) &= a_1\, F_2(x) + b_2 x\, F_3(x), \\ F_2(x) &= a_2\, F_3(x) + b_3 x\, F_4(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(x) &= a_{n-1}\, F_n(x) + b_n x\, F_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Кад из ових једначина избацамо:

$$F_2(x),\ F_3(x),\ F_4(x),\ \ldots\ F_{n-1}(x),$$

добијамо овај верижни разломак:

$$2.)\quad \frac{F(x)}{F_1(x)} = a_0 + \cfrac{b_1 x}{a_1 + \cfrac{b_2 x}{a_2 + \cfrac{b_3 x}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_{n-1} x}{a_{n-1} + b_n x \cfrac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)}}}}}$$

Овде ћемо претпоставити, да x може имати само такве вредности, за које су збирљиви: редови означени са

$F(x)$ и $F_1(x)$. Ако смо сад у стању пронаћи закон, по коме постају поједина a и b, онда се можемо запитати, кад ће бити слободно продужити у бесконачност верижни разломак, који је десно од знака равности, Ставимо:

$$\frac{F_n(x)}{F_{n+1}(x)} = a_n Q_n$$

и

$$3.)\quad \frac{p_{0n}}{q_{0n}} = a_0 + \cfrac{b_1 x}{a_1 + \cfrac{b_2 x}{a_2 + \cfrac{b_3 x}{a_3 + \begin{matrix} \\ \ddots \\ \end{matrix} + \cfrac{b_n x}{a_n}}}}$$

Помоћу образаца 1) у № 139 добијамо:

$$4.)\quad \frac{p_{0n}}{q_{0n}} = a_0 + \frac{a_n p_{0,n-1} + b_n x p_{0,n-2}}{a_n q_{0,n-1} + b_n x q_{0,n-2}}$$

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{a_n Q_n p_{0,n-1} + b_n x p_{0,n-2}}{a_n Q_n q_{0,n-1} + b_n x q_{0,n-2}},$$

или краће:

$$5.)\quad \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{p_{0n} + a_n (Q_n - 1) p_{0,n-1}}{q_{0n} + a_n (Q_n - 1) q_{0,n-1}}$$

Одавде добијамо:

$$6.)\quad \frac{F(x)}{F'_1(x)} - \frac{p_{0n}}{q_{0n}} = \frac{a_n (1 - Q_n) q_{0,n-1} \triangle_n}{q_{0n} - a_n (1 - Q_n) q_{0,n-1}}$$

Ако је сад за $n = \infty$ бесконачни верижни разломак:

$$7.)\quad a_0 + \cfrac{b_1 x}{a_1 + \cfrac{b_2 x}{a_2 + \cfrac{b_3 x}{a_3 + \begin{matrix} \\ \ddots \end{matrix}}}}$$

збирљив и ако је за $n = \infty$ граница израза:

$$\frac{a_n (1 - Q_n) q_{0,n-1}}{q_{0n} - a_n (1 - Q_n) q_{0,n-1}}$$

одређена и коначна количина, онда је:

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} - \lim \frac{p_{0n}}{q_{0n}} = 0,$$

и количник $F(x) : F_1(x)$ може се тада изразити бесконачним верижним разломком 7).

155. Примери:

Пример 1.

$$1.)\quad f(j, x) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2} x\right)^2}{1 . j} + \frac{\left(\frac{1}{2} x\right)^2}{2!\, j (j+1)} + \ldots$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2} x\right)^2}{m!\, j (j+1)(j+2) \ldots (j+m-1)} + \ldots.$$

Десни ред збирљив је за сваку коначну вредност x-а. ако само j није цео и одречан број или нула.

Одузимањем добијамо:

$$f(j, x) - f(j+1, x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{j(j+1)} f(j+2, x)$$

дакле:

$$\frac{f(j, x)}{f(j+1, x)} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{j(j+1)} \, \frac{f(j+2, x)}{f(j+1, x)}$$

и

2.) $$\frac{f(j+1, x)}{f(j, x)} = \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{j(j+1)} \, \frac{f(j+2, x)}{f(j+1, x)}}$$

Помоћу овог обрасца добијамо лако:

3.) $$\frac{f(j+1, x)}{f(j, x)} =$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{\cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{j(j+1)}}{1 + \cfrac{\cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(j+1)(j+2)}}{1 + \cfrac{\cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(j+2)(j+3)}}{1 + \ddots + \cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(j+n-1)(j+n)} \, \cfrac{f(j+n+1 . x)}{f(j+n, x)}}}}}$$

Ред за $f(j+n, x)$ састоји се из самих положних чланова и зато је:

$$f(j+n, x) > 1.$$

Даље лако је увидети, да је:

$$f(j+n, x) < 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 : (j+n)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4 : (j+n)^2}{2!} + \dots\dots$$

или: $$f(j+n, x) < e^{\frac{x^2}{4(j+n)}}$$

Ако пустимо, да n расти бесконачно, онда је:

$$\lim f(j+n, x) = 1,$$

па дакле и:

4.) $$\lim \frac{f(j+n+1, x)}{f(j+n, x)} = 1.$$

Лако је дознати, да је бесконачни верижни разломак:

5.) $$\cfrac{1}{1 + \cfrac{\cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{j(j+1)}}{1 + \cfrac{\cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(j+1)(j+2)}}{1 + \cfrac{\cfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(j+2)(j+3)}}{1 + \ddots}}}}$$

збирљив. Пошто су сви делимични бројиоци и имениоци положни, то ми можемо најпре дати верижном разломку 5) овај облик:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{4j(j+1)}{x^2}+\cfrac{1}{\cfrac{j+2}{j}+\cfrac{1}{\cfrac{4j(j+3)}{x^2}+\cfrac{1}{\cfrac{j+4}{j}+\ddots}}}}}$$

Ред, од којега по № 144 зависи збирљивост верижног разломка сада је ово:

$$1+\frac{j+2}{j}+\frac{j+4}{j}+\ldots\ldots$$

и пошто је тај ред незбирљив, то је верижни разломак 5) збирљив. Пошто су сви делимични бројиоци и имениоци положни, то су бројиоци и имениоци приближних разломака положни. Из повратног обрасца 1) у № 139, где је сада $a_m = 1$, дознајемо, да је за верижни разломак 5)

$$q_{0m} > q_{0,m-1} > 0.$$

Ако сада узмемо на ум образац 6) у № 154, онда је за садањи случај $lim\ \triangle_n = 0$, $lim\ Q_n = 1$, $a_n = 1$ и $q_{0n} > q_{0,n-1} > 0$. Дакле је слободно количник $f(j+1, x) : f(j, x)$ развити у бесконачни верижни разломак 5).

Ако ставимо $j = \frac{1}{2}$, онда је:

$$f\left(\frac{1}{2}, x\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}, x\right) = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

Ако из делимичних бројилаца верижног разломка 5) истиснемо разломке, добићемо:

$$6.)\quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\ddots}}}}$$

Пример 2. Ставимо:

$$f(j, x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1.\ j} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2.2}}{2!\ j(j+1)} + \ldots.$$

$$+ (-1)^m \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m}}{m!\ j(j+1)\ldots(j+m-1)} + \ldots.$$

и радимо као мало час, па ћемо добити за $j = \frac{1}{2}$:

7.) $$tg\,x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdot}}}}$$

Ирационалност неких верижних разломака.

156. Пре но што приступимо самој ствари показаћемо, како се један дати разломак може претворити у верижни разломак прописаног облика. Тако н. пр. ако хоћемо да разломак $\frac{289}{761}$ претворимо у верижни разломак облика:

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{8 + \cdot}}}}$$

радићемо на следећи врло увиђавни начин:

$$\frac{289}{761} = \frac{1}{\frac{761}{289}} = \frac{1}{2 + \frac{183}{289}}$$

$$\frac{183}{289} = \frac{3.\,183}{867} = \frac{3}{\frac{867}{183}} = \frac{3}{4 + \frac{135}{183}}$$

$$\frac{135}{183} = \frac{5.\,135}{915} = \frac{5}{\frac{915}{135}} = \frac{5}{6 + \frac{105}{135}}$$

$$\frac{105}{135} = \frac{7.\,105}{945} = \frac{7}{\frac{945}{105}} = \frac{7}{8 + \frac{105}{105}} = \frac{7}{8 + 1}$$

Даље се не може ићи, пошто последњи остатак није разломак већ јединица.

Замењујући сваку од ових једначина у ону пред њом добијамо:

$$\frac{289}{761} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{8 + \cdot}}}}$$

Да би исти разломак претворили у верижни разломак облика:

$$\cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{6}{9 + \cfrac{8}{11 + \cdot}}}}$$

ваља радити овако:

$$\frac{289}{761}=\frac{2.\,289}{1522}=\frac{2}{\frac{1522}{289}}=\frac{2}{5+\frac{77}{289}},$$

$$\frac{77}{289}=\frac{4.\,77}{1156}=\frac{4}{\frac{1156}{77}}=\frac{4}{7+\frac{617}{77}},$$

$$\frac{617}{77}=\frac{6.\,617}{462}=\frac{6}{\frac{462}{617}}=\frac{6}{9-\frac{5091}{617}}.$$

Ако нећемо да имамо одречних чланова у верижном разломку, треба овде прекинути. Замењујући сваку једначину у ону пред њоме, добијамо:

$$\frac{289}{761}=\cfrac{2}{5+\cfrac{4}{7+\cfrac{6}{9-\cfrac{5091}{617}}}}$$

где се прописани облик задржао, докле је то могуће било. Одавде такође видимо да се један и исти разломак може претворити у небројено много верижних разломака.

157. При претварању обичних разломака у верижне прописаног облика ваља приметити, да се пре а после или никако више неће јавити разломљени члан, него ће се верижни разломак завршити целим бројем, или ће се пак јавити један одречан члан и ако га у напред прописаном облику нема. То ће се нарочито десити онда, кад су чланови верижног разломка, који служи као тип за онај, у који се дани прости разломак има претворити, разломци са целим бројиоцем и imениоцем. О томе се можемо лако уверити, ако покушамо претворити ма какав прост разломак $\frac{B}{A}$ у верижни разломак облика:

$$(4)\qquad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}}$$

где су сви чланови:

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ldots\ldots.$$

чисти разломци.

Претпоставимо најпре, да су сви чланови верижног разломка положни. Да би задати разломак $\frac{B}{A}$ претворили у верижни разломак облика под 1), треба најпре разломак $\frac{B}{A}$ претворити у други, коме је b_1 бројилац, и затим имениоца новог разломка разложити у два дела, од којих је један a_1.

То се постизава на овај начин:

$$\frac{B}{A}=\frac{b_1}{\frac{b_1A}{B}}$$

Ако хоћемо, да последњи разломак буде раван верижном под 1), треба да су им имениоци једнаки, дакле:

добићемо:

4.) $$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$$

5.) $$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

6.) $$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

7.) $$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \cdots}}$$

и т. д.

верижни разломак:

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

зацело је збирљив ако је вазда $a_n > b_n$ јер је тада извесно:

$$\lim \frac{a_1}{b_1^2} \frac{a_2}{b_2^2} \frac{a_3}{b_3^2} \cdots \frac{a^m}{b_m^2} \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} = 0$$

и вредност тога верижног разломка јесте чист разломак, јер је она очевидно мања од првог приближног разломка $\frac{b_1}{a_1}$ који је чист разломак.

Ако дакле желимо разломак $\frac{B}{A}$ претворити у верижни 4.) онда мора $\frac{B}{A}$ бити чист разломак. На исти начин дознаје се, да $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, и т. д. морају бити чисти разломци.

Одатле сљедује сад:

$$A > B,\ B > C,\ C > D,\ D > E \qquad \text{и т. д.}$$

или

$$A > B > C > D > E \qquad \text{и т. д.}$$

Бесконачни ред бројева A, B, C, D, ... јесте по томе падајући. Но сви ови бројеви јесу цели, као што се то из једначина 3'.) види. Али, кад један ред целих и положних бројева бесконачно опада, онда морају његови чланови постати једном одречни и то или пролазећи кроз 0 (нулу) као н. пр.:

$$\ldots 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6,\ \ldots$$

или прескачући нулу као:

$$\ldots 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ \ldots$$

У првом случају морао би један од бројева A, B, C, D, . . . па дакле и један од разломака:

$$\frac{B}{A},\ \frac{C}{B},\ \frac{D}{C},\ \frac{E}{D},\ \ldots$$

или што је све једно један од верижних разломака:

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots}}\ ; \qquad \cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}$$

$$\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\cdots}}\ ; \qquad \cfrac{b_4}{a_4+\cfrac{b_5}{a_5+\cdots}} \qquad \text{и т. д.}$$

бити раван нули, а то није могуће.

У другом случају мора у реду бројева A, B, C, D, . . . M, N, P, ... један н. пр. M бити последњи положан број, а онај за њим т. ј. N одречан, дакле разломак $\frac{M}{N}$ мора бити одречан. По томе би дакле морао одговарајући верижни разломак:

$$\cfrac{b_n}{a_n+\cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}+\cdots}}$$

имати одречну вредност, што опет није могуће.

Из ових разматрања следује, да није могуће један рационалан чист разломак претворити у бесконачан верижни разломак, којег би чланови били чисти разломци са целим бројиоцем и имениоцем, јер се пре или после мора јавити један члан, чији је бројилац нула или одречан број. И такав ће се члан јавити тим раније, што год су мањи бројеви: A и B.

Ако је обратно дат бесконачан верижни разломак облика:

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}}$$

где су $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, $\frac{b_3}{a_3}$, . . . сви чисти разломци а a_1, a_2, a_3.... . . . b_1, b_3, b_3 . . . цели и положни бројеви, онда вредност тога бесконачног верижног разломка не може бити рационалан чист разломак, јер би се тада, противно претпоставци, морао у њему јавити један бројилац, који је раван нули или је одречан. Али при свем том вредност тога верижног разломка јесте чист разломак, јер је она мања од првог приближног разломка $\frac{b_1}{a_1}$, који је мањи од јединице. Дакле вредност бесконачног верижног разломка мора бити ирационалан чист разломак, што се слаже са примедбом, да верижни разломак, који постаје из $\frac{B}{A}$, мора имати тим више положних чланова, што су већи бројеви A и B.

158. Проматрајмо сад верижне разломке, у којима су сви чланови осим првог одречни разломци са целим и бројиоцем и имениоцем. При томе ћемо још претпоставити, да су почев од једног извесног места па на даље, имениоци већи од својих бројилаца за више од једне јединице. Узмимо дакле, нека је дат бесконачни верижни разломак:

$$8.)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \begin{matrix}\cdot \\ \cdot \\ \cdot\end{matrix}}}}$$

у коме су:

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\ldots.$$

чисти разломци, а a_1, a_2, a_3 . . . b_1, b_2, b_3 . . . цели и положни бројеви, и покушајмо претворити у тај верижни разломак, прости разломак $\frac{B}{A}$.

Пре свега је:

$$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{\cfrac{b_1 A}{B}}$$

Да би десни разломак био раван верижном 8) треба да је:

$$\frac{b_1 A}{B} = a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \begin{matrix}\cdot \\ \cdot \\ \cdot\end{matrix}}}$$

одакле:

$$\frac{a_1 B - b_1 A}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \begin{matrix}\cdot \\ \cdot \\ \cdot\end{matrix}}}}$$

или за:

$$9.)\qquad \begin{cases} a_1 B - b_1 A = C \\ \dfrac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \begin{matrix}\cdot \\ \cdot\end{matrix}}}} \end{cases}$$

Даље је:

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{\cfrac{b_2 B}{C}};$$

да десни разломак буде раван верижном 9) треба да је:

$$\frac{b_2 B}{C} = a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ddots}}$$

или за:

$$a_2 C - b_2 B = D$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \ddots}}}$$

Исто је тако за:

$$a_3 D - b_3 C = E$$

$$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \cfrac{b_6}{a_6 - \ddots}}}$$

и т. д.

Ако сада претпоставимо, да су у свима верижним разломцима:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ddots}} \qquad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}} \qquad \text{и т. д.}$$

имениоци већи од својих бројилаца за више од једне јединице, онда су вредности свију тих верижних разломака, па дакле и простих разломака:

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \frac{E}{D}, \ldots\ldots$$

положне и мање од јединице и по томе

$$A > B,\ B > C,\ C > D,\ D > E \text{ и т. д.}$$

Овде сад можемо даље умовати онако исто, као и на дотичном месту № **143** и онда ћемо наћи да један од бројева A, B, C .... мора бити одречан или раван нули, што међу тим не може бити, јер су вредности верижних разломака:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ddots}} \quad ; \quad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 - \ddots}} \qquad \text{и т. д.}$$

положни и чисти разломци. Дакле претпоставка, да је вредност верижног разломка:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cdots}}}$$

рационалан разломак, није истинита, та вредност мора по томе бити ирационална.

Али ова разматрања само би од части вредила, кад би почев од једног извесног места па на даље имениоци верижног разломка своје бројиоце премашали само са једном јединицом. На пр. ако имамо верижни разломак облика:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \cdots}}}}$$

где само прва два имениоца премашују своје бројиоце са више од једне јединице, ставићемо га $= \frac{B}{A}$, па ћемо онда за:

$$a_1 B - b_1 A = C$$

добити:

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \cdots}}}$$

и за:

$$a_2 C - b_2 B = D$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \cfrac{b_5}{b_5 + 1 - \cdots}}}$$

Сада је: $\frac{B}{A} < 1$, $\frac{C}{B} < 1$ али није $\frac{D}{C} < 1$,

јер је вредност верижног разломка, која одговара разломку $\frac{D}{C}$ равна јединици. Према томе је:

$$A > B,\ B > C,\ C = D = E = \ldots\ldots$$

Овде дакле бројеви $A, B, C, D, \ldots\ldots$ неопадају без престанка, већ само до некле, дакле се даље не може умовати овако као пре.

Међу тим због $D = C$ сада је:

$$a_2 C - b_2 B = C$$

дакле је:

$$C = \frac{b_2 B}{a_2 - 1};$$

даље је:

$$a_1 B - b_1 A = \frac{b_2 B}{a_2 - 1}$$

дакле:

$$\frac{B}{A} = \frac{b_1 (a_2 - 1)}{a_1 (a_2 - 1) - b_2}$$

Но то би и непосредно добили, да смо узели на ум, да је верижни разломак, о коме је реч, раван овом:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - 1}}$$

јер кад ово уредимо, добијамо горњу вредност за $\frac{B}{A}$.

Из свега досадањега следује ова теорема:

Кад су у бесконачном верижном разломку

$$\cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 \pm \cfrac{b_3}{a_3 \pm}}} \\ \ddots$$

сви чланови чисти разломци са целим бројиоцима и имениоцима, кад даље почев од ма ког члана па на даље вредност верижног разломка, који преостаје, није равна јединици, онда је вредност горњег верижног разломка ирационалан чист разломак.

ПРИМЕНЕ ВЕРИЖНИХ РАЗЛОМАКА.

I. Решавање једначине $ax + by = c$ у целим бројевима.

159. Узмимо да се траже цела разрешења неодређене једначине:

1.) $$ax + by = c,$$

у којој претпостављамо, да су a, b и c цели бројеви. Претворимо $\frac{a}{b}$ у верижни разломак и зарад тога ставимо:

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Одатле сљедује:

$$x_1 = \frac{b}{a - b_0 b}.$$

Ставимо сад даље:

$$x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}$$

и тако даље. На тај начин радећи добићемо:

$$\frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$$

$$\ddots$$

$$+ \frac{1}{b_n}$$

Овај верижни разломак, који добијамо за $\frac{a}{b}$, мора бити коначан, јер иначе (№ 157 и 158) његова вредност неби могла бити једнака рационалном броју $\frac{a}{b}$.

Нека је сад $\frac{a'}{b'}$ претпоследњи а $\frac{a''}{b''}$ последњи приближни разломак. По обрасцу 1) у № 146 имамо:

$$a''b_1 - a_1b'' = \pm 1,$$

одакле се изводи као и у № 146, да бројилац и именилац сваког приближног разломка немају заједничке мере. Ако претпоставимо, да a и b немају такође заједничке мере, онда је:

$$a'' = a \quad \text{и} \quad b'' = b$$

и с тога:

$$ab' - ba' = \pm 1,$$

одакле сљедује:

$$a(b'c) + b(a'c) = \pm c.$$

Одавде се види, да ће једначина 1) бити задовољена, ако је:

$$x = \pm b'c \quad \text{и} \quad y = \mp a'c$$

Но кад је једно цело разрешење једначине 1) нађено, онда се лако могу наћи и сва остала небројена цела разрешења њена. Јер ако је $x = x'$ и $y = y'$ једно разрешење једначине 1) онда је:

$$ax' + by' = c.$$

Ако се ова вредност за c замени у даној једначини, добија се:

$$2.) \qquad a(x - x') + b(y - y') = 0$$

и ова једначина замењује сада дану. Из једначине 2) сљедује сад:

$$y = a\frac{x' - x}{b} + y'.$$

Како сад a и b немају заједничке мере, онда да би вредност од y била цела, треба да је $\frac{x' - x}{b}$ цео број, а то ће бити, ако је:

$$x = x' \pm b,\ x' \pm 2b,\ x' \pm 3b, \ldots\ldots$$

и онда ће одговарајуће вредности за y бити:

$$y = y' \mp a,\ y' \mp 2a,\ y' \mp 3a, \ldots\ldots$$

Ми смо претпоставили да a и b немају заједничке мере. Али ако би a и b имали заједничке мере, али иста неби била мера и за c, онда једначина 1) не би имала целих разрешења. Јер кад би то могло бити случај, онда би лева страна једначине 1) била дељива заједничком мером бројева a и b а лева не, а то не може бити. Ако би сва три броја a, b и c имали заједничке мере, онда бисмо могли њоме најпре скратити једначину 1) и тада бисмо имали случај, са којим смо се мало час бавили

II. Ирационалност корена $\sqrt{a^2 + 4}$.

160. На основу №-а 157 и 158 вредност бесконачног верижног разломка:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ddots}}}$$

где је a цео број, јесте ирационална.

Ако означимо са z вредност тога верижног разломка, онда је:

$$z = \frac{1}{a+z} \quad \text{или} \quad z^2 + az + 1 = 0$$

или најзад:

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Одатле сљедује, да је $\sqrt{a^2+4}$ увек ирационалан број, или што је свеједно да a^2+4, где је $a > 1$, није никад савршени квадрат.

III. Ирационалност природних логаритама и броја π.

161. Ако у једначини 6) № 155 заменимо x са рационалним бројем $\frac{m}{n}$, који може бити разломљен или не, и ако при том узмемо на ум, да је:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

наћићемо:

$$1 - \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1} = \cfrac{\frac{m}{n}}{1+\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3+\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5+\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7+,\ldots}}}}$$

Одавде добијамо даље по избацају разломака у појединим члановима верижног разломка:

$$1)\quad \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1} = 1 - \cfrac{m}{n+\cfrac{m^2}{3n+\cfrac{m^2}{5n+\cfrac{m^2}{7n+\ldots\ldots}}}}$$

Пошто су бројиоци чланова десног верижног разломка сви $= m^2$, док међу тим имениоци непрестано расту, то ће онда морати од једног члана па на даље у верижном разломку, који преостаје, сви чланови бити чисти разломци. Вредност једног бесконачног верижног разломка, као што је онај, који преостаје, јесте по № 157 и 158 ирационална; дакле онда мора бити ирационална и вредност верижног разломка горе под 1) Одатле следује да је и лева страна једначине 1) ирационална, па дакле и степена количина $e^{\frac{m}{n}}$ за свако рационално m и n. Ако претпоставимо $n = 1$, онда долазимо до интересног закључка, да су сви цели степени основице природних логаритама ирационални бројеви. Дакле у једначини $e^z = y$

јесте y ирационално, ако је z рационално; да y буде рационално, треба да је $z = ly$ ирационално. Значајна особина природне логаритамске системе јесте дакле та, да су логаритми свију рационалних бројева ирационални. Тиме се одликује ова логаритамска система од свију осталих, код којих су основе или рационални и цели бројеви или алгебарски корени из истих; јер у свакој од тих система има рационалних бројева, којима одговарају и рационални логаритми.

162. Ако ставимо у једначини 7) № 155 $x = \frac{m}{n}$, добијамо просто:

$$1.)\quad tg\,\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ldots\ldots}}}}$$

И овде се има приметити то, да ће једном морати доћи члан, од којега почињући сви су чланови верижног разломка, који следује, чисти разломци. Осим тога овде не може наступити случај, да је верижни разломак почев од једног извесног места па на даље облика:

$$\cfrac{m^2}{m^2 + 1 - \cfrac{m^2}{m^2 + 1 - \ldots\ldots}}$$

јер имениоци $n,\ 3n,\ 5n,\ 7n\ \ldots$ расту бесконачно. Ако су дакле m и n рационални бројеви, онда је по № 157 и 158 вредност једног верижног разломка ирационална па с тога и лева страна. Дакле: *Размера тангенте једног лука насирам полупречника јесте ирационална, кад је размера самог лука насирам полупречника рационална.*

И сад је лако доказати ирационалност и броја π. Јер помоћу обрасца 7) у № 155 добијамо за $x = \frac{\pi}{4}$:

$$1 = \cfrac{\frac{\pi}{4}}{1 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{3 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{5 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{7 - \ldots}}}}$$

Кад би сад $\frac{\pi}{4}$ било равно рационалном којем делу полупречника н. пр. $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ онда би одатле следовало:

$$1 = \cfrac{\frac{m}{n}}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7 - \ldots\ldots}}}} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ldots}}}}$$

Али је вредност овог верижног разломка ирационална и зато не може бити равна рационалној јединици. Одатле сљедује, да је претпоставка $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ лажна и по томе $\frac{\pi}{4}$ па дакле и само π ирационално наспрам полупречника.

На крају ћемо још да докажемо да је и π^2 ирационално. Из обрасца 7) у № 155 имамо због:

$$cotg\, x = \frac{1}{tg\, x}$$

$$x\, cotg\, x = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}$$

или:

$$1 - cotg\, x = \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots\ldots}}}$$

и одавде за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7 - \ldots\ldots}}}$$

Кад би $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ било рационално и $= \frac{p}{q}$, онда би одатле следовало:

$$1 = \cfrac{p}{3q - \cfrac{pq}{5q - \cfrac{pq}{7q - \ldots}}}$$

Но вредност је овог верижног разломка ирационална и за то не може бити $= 1$. Дакле претпоставка, да је $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ равно рационалном броју $\frac{p}{q}$ јесте лажна, дакле $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ па с тога и π^2 ирационално.

ШЕСТИ ДЕО.

Неколико циклометријских образаца и гаусова основна теорема једначина.

163. У овој нумери имамо да изведемо неколико главних циклометријских образаца.

1°. Ако је u лук прве четврти а x његов синус, онда важе једначине:

$$sin\,u = x,\ cos\,u = \sqrt{1-x^2}$$

$$tg\,u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\ \ cotg\,u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Одавде следује:

$$1.)\qquad arc\,sin\,x = arc\,cos\,\sqrt{1-x^2}$$

$$= arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,cotg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Ако је z тангента лука u, онда је:

$$tg\,u = z,\ cotg\,u = \frac{1}{z}$$

$$cos\,u = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\ sin\,u = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}};$$

$u+v=\frac{\pi}{2}$ $v=\frac{\pi}{2}-u$ $sin\,v = sin(\frac{\pi}{2}-u)=cos\,u$

$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = \frac{\pi}{2}$ $u = arc\,sin\,x$ $v = arc\,sin\,y$

$x = sin\,u$

$x = cos(\frac{\pi}{2}-u)$

$arc\,sin\,x = u$

$arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2}-u$

$\Sigma = \frac{\pi}{2}$

дакле је:

$$2.)\qquad arc\,tg\,z = arc\,cotg\,\frac{1}{z},$$

$$= arc\,cos\,\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

2°. Комплеменат лука $arc\,sin\,x$ има x за косинус; дакле је:

$$3.)\qquad arc\,sin\,x + arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2}.$$

Комплеменат лука $arc\,tg\,z$ има z за котангенту; дакле је:

$$arc\,tg\,z + arc\,cotg\,z = \frac{1}{2}\,\pi.$$

3°. Ако је u лук прве четврти, онда, као што је познато из тригонометрије, сви луци:

$$u,\ \pm\pi - u,\ \pm 2\pi + u,\ \pm 3\pi - u,\ \pm 4\pi + u,$$

$$\pm 5\pi - u, \ldots\ldots$$

имају један исти синус.

У опште је:

$$sin\,u = sin\left\{\frac{1}{2}\pi \mp \left(\frac{1}{2}\,\pi - u\right) + 2k\pi\right\}$$

где се редом има ставити $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ и при свакој замени броја k има узети најпре горњи па затим доњи знак. Ако је x заједнички синус свију горњих лукова, онда је $u = arc\,sin\,x$, јер је u лук прве четврти. Али

$arc\,u = \frac{\pi}{2} \pm$ [illegible] кад је дана у опште једначина $sin\, w = x$, а не каже се, у којој је четврти лук w, онда w може имати коју хоћемо од вредности u, $\pi - u$, $2\pi + u$, $3\pi - u$, ... Општи образац, који даје све вредности за w, јесте :

$$w = \frac{1}{2}\pi \mp \left(\frac{1}{2}\pi - u\right) \pm 2k\pi$$

Другачије све корене једначине :

$$sin\, w = x$$

даје образац :

$$w = \frac{1}{2}\pi \mp \left(\frac{1}{2}\pi - arc\, sin\, x\right) \pm 2k\pi$$

кад се у њему стави редом $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots.$

Ако су u и v два лука прве четврти и ако је :

$$sin\, u = x, \quad sin\, v = y,$$

одакле :

$$u = arc\, sin\, x, \quad v = arc\, sin\, y,$$

онда је :

$$sin\, (u + v) = sin\, u\, cos\, v + cos\, v\, sin\, u.$$

и дакле према горе казаноме :

$$(u + v) = \frac{1}{2}\pi \mp \left\{\frac{1}{2}\pi - arc\, sin\, (x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2})\right\} \pm 2k\pi$$

Овде још остаје, да се испита, да ли ваља узети горњи или доњи знак, као и то, која се вредност за k има узети. Збир два лука прве четврти јесте лук, који лежи или између 0 и $\frac{1}{2}\pi$ или између $\frac{1}{2}\pi$ и π. Дакле мора $k = 0$ бити и осим тога, ако је $u + v < \frac{1}{2}\pi$, има се узети горњи, а ако је $u + v > \frac{1}{2}\pi$ има се узети доњи знак. Но да бисмо сазнали, кад ће наступити први а кад други случај, ми ћемо да развијемо $cos\, (u + v)$, јер он мора бити положан или одречан, како је кад $u + v$ у првој или другој четврти. Кад то учинимо добијамо :

$$cos\, (u + v) = cos\, u\, cos\, v - sin\, u\, sin\, v =$$

$$= \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - xy = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} + xy}$$

Према свему, што је горе речено, имамо у првом случају:

$$5.)\left\{\begin{array}{c} arc\, sin\, x + arc\, sin\, y = arc\, sin\, (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) \\ x^2 + y^2 \leqq 1 \end{array}\right.$$

На против у другом је случају :

$$6.)\left\{\begin{array}{c} arc\, sin\, x + arc\, sin\, y = \pi - arc\, sin\, (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) \\ x^2 + y^2 \geqq 1. \end{array}\right.$$

На сличан начин добијамо образац :

7. $arc\,sin\,x - arc\,sin\,y = arc\,sin\,(x \sqrt{1 - y^2} - y \sqrt{1 - x^2})$

где нема места као горе никаквом разликовању, јер разлика двају лукова прве четврти лежи увек између $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$.

4°. Узмимо нека је опет u лук прве четврти; онда сви луци:

$$u, \ \pm\pi + u, \ \pm 2\pi + u, \ \pm 3\pi + u, \ \ldots .$$

имају исту тангенту, јер је увек:

$$tg\,u = tg\,(u \pm k\pi).$$

Из $tg\,u = x$ сљедује $u = arc\,tg\,x$.

Напротив из општије једначине

$$tg\,w = x$$

где се не зна, у коју четврт пада лук w, следује:

$$w = u \pm k\pi = arc\,tg\,x \pm k\pi.$$

Ако су даље u и v луци прве четврти, онда, ако је $tg\,u = x$ и $tg\,v = y$, имамо:

$$tg\,(u+v) = \frac{tg\,u + tg\,v}{1 - tg\,u\,tg\,v} = \frac{x+y}{1-xy},$$

одакле:

$$(u+v) = arc\,tg\,\frac{x+y}{1-xy} \pm k\pi,$$

или кад заменимо u и v вредностима:

$$8.) \quad arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = arc\,tg\,\frac{x+y}{1-xy} \pm k\pi.$$

Овде ваља опет разликовати два случаја. Прво ако:

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = v + u$$

лежи у првој четврти, онда је:

$$cos\,(u+v) = cos\,u\,.\,cos\,v - sin\,u\,.\,sin\,v$$

положан, дакле је онда

$$sin\,u\,.\,sin\,v < cos\,u\,.\,cos\,v,$$

или $tg\,u\,tg\,v < 1$ т. ј. $xy < 1$.

У овом првом случају мора дакле $k = 0$ бити, јер би иначе изашао лук $> \pi$ или пак < 0. Дакле је:

$$9.) \quad \left\{ arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = arc\,tg\,\frac{x+y}{1-xy} \right\}$$
$$xy \leqq 1.$$

Ако ли је $u + v > \frac{1}{2}\pi$, онда је $xy > 1$ и онда из једначине 8) добијамо:

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = -\,arc\,tg\,\frac{x+y}{xy-1} \pm k\pi.$$

Да би смо сад и десно имали лук друге четврти, мора $k = 1$ бити и горњи знак важити. Дакле је:

$$10)\quad \left\{ arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = \pi - arc\,tg\,\frac{x+y}{xy-1} \right\}$$

$$xy > 1.$$

На са свим сличан начин добијамо образац:

$$11)\quad arc\,tg\,x - arc\,tg\,y = arc\,tg\,\frac{x-y}{1+xy},$$

где не треба никаквог разликовања, јер разлика лукова прве четврти лежи увек између $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Логаритам производа m линеарних целих функција x-а.

164 Нека је дат производ:

$$1.)\quad F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m),$$

где је x уображена — комплексна — променљива количина а $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_m$ сталне и коначне количине. Тачке бројне равни, које одговарају тим количинама, налазе се дакле у коначној даљини од почетка. За коначне вредности x-а $F(x)$ јесте коначна количина а за $x = \infty$ она је бесконачно велика m-ог степена. $F(x)$ јесте равна нули за сваку од m вредности:

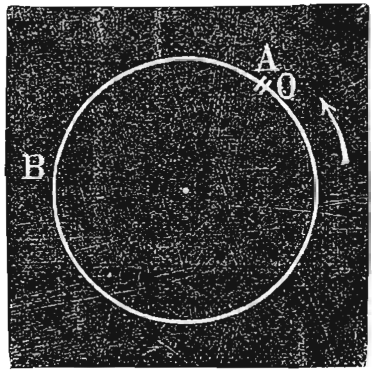
$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_m.$$

Ове вредности x-а m на броју јесу корени једначине $F(x) = 0$. Ми ћемо их од сада звати коренима

$F(x)$, а тачке бројне равни, које одговарају тим вредностима, зваћемо кореним тачкама $F(x)$. За сваку другу коначну вредност x-а, која је различна од поменутих m вредности и $F(x)$ јесте коначна и од нуле различна.

Повуцимо сада у бројној равни једну једноставну затворену криву линију, то ће рећи једну криву линију, која кроз сваку своју тачку непролази више од једанпут и чија последња тачка поклапа прву A (сл. 1).

Ако претпоставимо, да једна покретна тачка почев од A описује поменуту криву линију, ми ћемо казати, да је она описује у *положном* смислу, кад линијом затворени простор при том остаје вазда лево. Тај смисао кретања означен је на слици стрелицом. Ми претпостављамо, да се на поменутој линији не налази ни једна од m корених тачака $F(x)$. У слици смо тачке A и O одвојено забележили, да би смо тиме назначили, да је A прва а O последња тачка линије. Но како треба да је линија затворена, то се тачке A и O у истини поклапају.



Сл. 1.

Претпоставимо сада, нека променљива x описује непрекидно затворену линију 1) почев од A па до O, дакле у положном правцу. Тим хоћемо да кажемо, да променљива x добија непрекидно све могуће вредности представљене узастопним тачкама поменуте линије ABO. При том ће се и функција $x-x_1$ непрекидно мењати и међу вредностима, које ће она поступно добијати, нула и ∞ неће се налазити. Дакле ће се при том и функција $l\,(x-x_1)$ непрекидно мењати и остати вазда коначна, претпостављајући наравно да остајемо увек при једној и истој грани те функције. Ми ћемо да упоредимо прву и последњу вредност те функције.

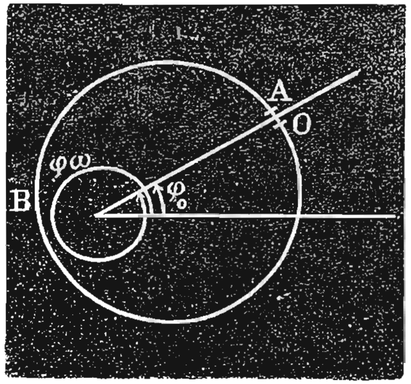
Ставимо зарад тога:

$$2.)\qquad x - x_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{\varphi i},$$

где је (№ 117) r одстојање тачке x од тачке x_1, а φ угао, који права xx_1 гради са положном полом апсцисне осе. Вредности за r и φ у тачци A означићемо са r_0 и φ_0 а у тачци O са r_ω и φ_ω. Увек је очевидно $r_\omega = r_0$. Међутим разлика $\varphi_\omega - \varphi_0$ или је равна нули или износи неколико целих периферија (2π).

Ми ћемо овде разликовати два случаја т. ј да ли се x_1 (т. ј. да ли се тачка, која представља број x_1) налази у унутрашњости линије ABO или пак споља.

У првом случају (сл. 2) је:



Сл. 2.

$$3.)\qquad \varphi_\omega = \varphi_0 + 2\pi,$$

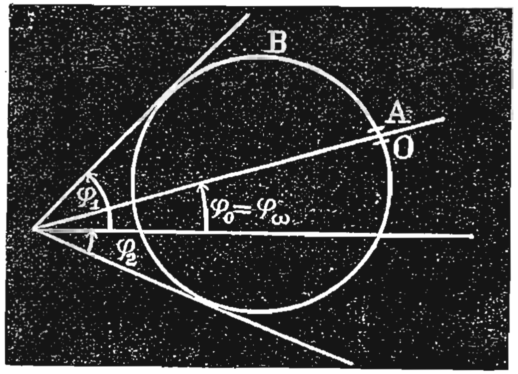
и тада је у тачци A:

$$l(x - x_1) = lr_0 + \varphi_0 i$$

а у тачци O:

$$l(x - x_1) = lr_0 + \varphi_0 i + 2\pi i.$$

Али ако је x_1 споља (сл. 3), онда све вредности за φ леже између једног maximum-а φ_1 и једног minimum-а



Сл. 3.

φ_2, којих је разлика мања од 2π. Дакле је сада

$$4.)\qquad \varphi_\omega = \varphi_0$$

и функција $l(x - x_1)$ има исту вредност у почетку и на крају пута т. ј. у A и O. И та је вредност:

$$l(x - x_1) = lr_0 + \varphi_0 i.$$

И тако имамо сада теорему:

1° *Кад једна променљива* x *описује од почетка па до краја и у положном смислу једну једноставну затворену криву линију, онда функција* $l(x - x_1)$ *има на крају исту вредност као и у почетку, или пак за* $2\pi i$ *већу вредност, како је кад* x_1 *споља или у унутрашњости криве линије.*

Ову теорему применићемо на ово, што следује. Нека је:

$$5.)\ \frac{1}{2\pi i}\, l\, F(x) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ l(x-x_1) + l(x-x_2) + \ldots + l(x-x_m)\right\}$$

Узмимо нека сад променљива x описује од почетка па до краја у положном смислу једну једноставну затворену криву линију. Тада разлика оних вредности, које функција $\frac{1}{2\pi i}\, lF(x)$ добија на крају и у почетку пута, или је равна нули, или је равна једном целом и положном броју, који број може највише бити $= m$. Поменута разлика показује, колико корена $F(x)$ има у унутрашњости криве линије.

До сад смо претпостављали, да су чиниоци у 1) сви међу собом различни. Међутим могу неки од њих бити међу собом и једнаки. Функција $l\,[(x-x_1)^k]$ добија на крају пута исту вредност као и у почетку, или пак за $2k\pi i$ већу, како је кад x_1 споља или у унутрашњости описане криве линије. Ако је k цео и положан број и ако је $F(x)$ дељива са $(x-x_1)^k$, али не и са вишим степеном разлике $x-x_1$, онда се каже, да је x_1 k-пута корен $F(x)$, или да $F(x)$ осим осталих корена, различних међу собом као и од x_1, има још k корена једнаких броју x_1. Горњу теорему можемо сада овако исказати:

2°. *Кад је $F(x)$ производ m целих и линеарних функција променљиве x, које неморају бити све међу собом различне, онда склопимо функцију $\frac{1}{2\pi i}\, lF(x)$ и затим пустимо, да променљива x описује у положном смислу и од почетка па до краја једну једноставну затворену криву линију. Разлика оних вредности, које функција $\frac{1}{2\pi i}\, l\, F(x)$ добија на крају и у почетку пута, показује, колико свега корена $F(x)$ има у унутрашњости криве линије.*

Узмимо сада једну разломљену функцију, којој је бројилац:

$$6.)\quad f(x) = (x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\,(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n),$$

а именилац сам производ $F(x)$, дакле:

$$7.)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\,(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n)}{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\ldots(x-x_m)}.$$

Ми ћемо претпоставити, да су корени функције $f(x)$ различни од корена $F(x)$, дакле да бројилац и именилац немају заједничких чинилаца. Јасно је, да разломак 7) може бити раван нули само за једну од оних n вредности x-а, које поништавају бројиоца а $= \infty$ само за једну од оних m вредности x-а, које поништавају имениоца. Очевидно је:

$$8.)\quad \frac{1}{2\pi i}\, l\, \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{2\pi i}\, l\, f(x) - \frac{1}{2\pi i}\, l\, F(x).$$

Повуцимо у коначној даљини од почетка једноставну затворену криву линију ABO, на којој не лежи ни једна корена тачка функција $f(x)$ и $F(x)$. Ако пустимо, да променљива x описује, у положном смислу и од почетка па до краја ту криву линију, онда на десну страну једначине 8) можемо применити теорему 2) и тако ћемо наћи:

3°. *Разлика вредности, које функција $\frac{1}{2\pi i}\, l\, \frac{f(x)}{F(x)}$ добија на крају и у почетку пута, равна је разлици између броја свију корена — једнаких и неједнаких —*

функције $f(x)$ *и броја свију корена* $F(x)$ *у унутрашњости линије* ABO, или другаче: *она је равна разлици између броја, који показује, колико пута разломак* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *постаје раван нули у унутрашњости криве линије и броја, који показује, колико пута тај разломак постаје* ∞ *на истом простору.*

Логаритам алгебарске рационалне функције.

165. Нека су $F(x)$ и $f(x)$ две алгебарске целе рационалне функције x-а обе m-ог степена:

$$1.)\quad F(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots a_{m-1}x + a_m$$

$$2.)\quad f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots b_{m-1}x + b_m$$

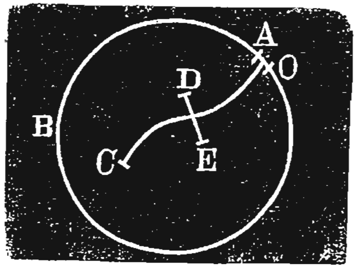
Ми претпостављамо, да су сачиниоци тих двеју функција коначни бројеви. **У** разломљеној функцији:

$$3.)\qquad w = \frac{f(x)}{F(x)},$$

са којом ћемо се сада бавити, ми ћемо претпоставити, да бројилац и именилац немају никакве заједничке мере, која би била функција x-а. За $x = \infty$ вредност разломљене функције јесте од нуле различна и $= b_0 : a_0$. Нули равна може бити вредност те функције само онда, кад је бројилац $= 0$, а бесконачно велика само онда, кад је именилац $= 0$. Из онога, што је у № 94 казано, сљедује, да једна цела и рационална функција x-а m-ог степена не може бити $= 0$ за више од m вредности x-а. Одатле сљедује, да ће у бројној равни морати бити коначних

ограничених простора, који су такви, да за вредности x-а, које одговарају тачкама у унутрашњости као и на границама тога простора, функција w није ни ∞ нити пак равна нули.

Нека је (сл. 4) такав један комад бројне равни ограничен једноставном затвореном кривом линијом ABO. Како функција w није ни ∞ велика ни равна нули у унутрашњости те линије, то је онда функција lw на целом том ограниченом простору непрекидна и коначна. Из једне тачке C у унутрашњости линије ABO повуцимо једну линију ка тачки A граничне линије ABO тако, да се те две линије секу у тачци A под правим углом. Лево и десно од линије CA узмимо две тачке D и E тако, да права DE сече линију CA под правим углом. Ако вредност функције lw у тачци D означимо са $(lw)_1$, а у тачци E са $(lw)_2$, онда зато, што је функција lw непрекидна, јесте:



Сл. 4.

$$4.)\qquad lim\left\{(lw)_1 - (lw)_2\right\} = 0$$

за $lim\ DE = 0$. И то стоји, па секла нормала DE линију CA ма у којој тачци њеној, па дакле и онда, кад је D у A а E у O. И тако смо сада добили теорему:

1°. *Кад* $F(x)$ *и* $f(x)$ *немају корених тачака у унутрашњости криве линије* ABO *као ни на њој самој, дакле кад функција* w *није ни* ∞ *велика ни равна нули на том простору, онда* lw *има на крају* O *линије* ABO *исту вредност као и у почетку* A.

Одатле можемо већ закључити, да на простору, који је ограничен линијом ABO, мора $F(x)$ или $f(x)$ или обе имати корених тачака, кад функција lw на крају O линије ABO добија вредност, која се за $\pm 2\pi i$ разликује од вредности, коју је она имала у почетку A.

Али неби било истина, кад би се из тога, што lw има на крају и у почетку линије ABO исту вредност, закључило, да функција w није ни бесконачно велика ни равна нули у унутрашњости те линије. Него ослањајући се на оно, што је речено у пређашњој №-и, можемо горњу теорему овако обрнути:

2°. *Кад x описује једну једноставну затворену криву линију ABO, и кад је притом функција lw вазда непрекидна и на крају O има исту вредност као и у почетку A, онда функција w или никако није равна нули ни бесконачно велика у унутрашњости линије ABO, или она постаје онолико исто пута равна нули, колико пута она постаје бесконачно велика.*

Гаусова основна теорема алгебре.

166. Пре свега напоменућемо познату истину, да је модуо збира уображених сабирака мањи од збира модула тих сабирака.

У функцији $f(x)$ пређашње №-е нека је $mod\,x = r$ а $mod\,b_k = B_k$. Тада је:

$$1.)\quad B_1 r^{m-1} + B_2 r^{m-2} + \dots + B_m = mod\,[b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m],$$

и

$$2.)\quad B_0 r^m + B_1 r^{m-1} + \dots + B_m > mod\,f(x).$$

Још ћемо приметити, да је модуо збира двају сабирака већи од апсолутне разлике модула истих сабирака. По томе је:

$$3.)\quad mod\,f(x) > B_0 r^m - mod\,[b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m]$$

претпостављајући да је вредност десне разлике у 3) положна. Но то ће бити зацело, ако вреди неједначина:

$$4.)\quad B_0 r^m > B_1 r^{m-1} + B_2 r^{m-2} + \dots + B_m$$

и тада је тим пре:

$$5.)\quad mod\,f(x) > B_0 r^m - (B_1 r^{m-1} + \dots + B_m)$$

Да се за r могу увек наћи вредности, које задовољавају неједначину 4), доказаћемо овако. Узмимо један коначни положни број R, који је такав, да је:

$$6.)\quad R > 1$$

и

$$7.)\quad B_0 R > B_1 + B_2 + \dots + B_m.$$

Ако сад узмемо:

$$8.)\quad r \geqq R,$$

онда вреди неједначина:

$$B_0 r^m > (B_1 + B_2 + \dots + B_m)\, r^{m-1}$$

и зато је сада:

$$9.)\quad B_0 r^m - (B_1 r^{m-1} + B_2 r^{m-2} + \dots + B_m)$$
$$> B_2 (r^{m-1} - r^{m-2}) + B_3 (r^{m-1} - r^{m-3}) + \dots + B_m (r^{m-1} + 1).$$

Десна је страна ове неједначине > 0. Кад r расти, растиће и вредност десне стране и може при том постати ма колико велика. То исто вреди дакле и о левој страни. Из неједначине 5), која сада вреди, види се, да за $r > R$ $f(x)$ не може постати равна нули.

Као функцију $F(x)$ у пређашњој №-и узећемо сада:

$$10.) \qquad F(x) = x^m$$

Та функција има m корена једнаких нули. За сваку другу вредност x-а она је различна од нуле, дакле свакојако за $r > R$. И тако сад имамо теорему:

1°. *На периферији једног круга, који је из почетка као средишта и са полупречником R описан, као и на простору, који је изван тога круга т. ј. споља, не може функција:*

$$11.) \quad w = \frac{f(x)}{F(x)} = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdot\cdot \; + \frac{b_m}{x^m}$$

бити ни равна нули ни бесконачно велика. Полупречник R подвргнут је условима под 6) и 7).

Ставимо сад $x = \frac{1}{z}$ или што је свеједно:

$$12.) \qquad x = re^{\varphi i}, \; z = \frac{1}{r}\, e^{-\varphi i}.$$

Тада свакој вредности x-а одговара јединцата вредност z-а и обратно. Из почетка x-ове бројне равни опишимо круг са полупречником r. Кад x прелази периферију тога круга непрекидно и у положном смислу, онда z описује непрекидно и у одречном смислу периферију једног круга, који је из почетка z-ове бројне равни као средишта а са полупречником $\frac{1}{r}$ описан. Кад је $r = R$ онда је $\frac{1}{r} = \frac{1}{R}$, а кад је $r > R$, онда је $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$. Дакле пољу x-ових вредности, за које је $r \geqq R$ одговара у z-овој бројној равни површина ограничена кружном линијом, којој је средиште у тачци $z = 0$ а полупречник $\frac{1}{R}$.

Ми можемо представити w и као функцију z-а:

$$13.) \quad w = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m.$$

У унутрашњости као и на периферији мало час поменутог круга, коме је $\frac{1}{R}$ полупречник, функција w није нигде на основу теореме 1°) равна нули нити ∞ велика. Дакле се може став 1) пређашње №-е овде применити. Кад промењива z прелази периферију круга у положном — или и у одречном смислу —, онда lw добија на крају пута исту вредност, коју је у почетку имао.

Али кад промењива z прелази у z-овој бројној равни периферију круга, коме је $\frac{1}{R}$ полупречник, у одречном смислу, онда x прелази у положном смислу и у x-овој бројној равни периферију одговарајућег круга, коме је R полупречник. И пошто на крају и у почетку пута функција lw добија исту вредност, то онда на основу теореме 2°) у пређашњој № и добијамо:

2°. *У унутрашњости круга описаног у x-овој бројној равни из почетка као средишта а са полупречником R функција*

$$w = \frac{f(x)}{F(x)} = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{b_m}{x^m}$$

постаје онолико исто пута равна нули, колико пута она постаје бесконачно велика.

Но ми знамо, где функција w постаје ∞ велика. То је случај само кад тачке $z = 0$, и ту функција постаје ∞ велика m-ог степена или другаче: она постаје бесконачно велика m-пута. Према томе сад се зна и колико пута функција w постаје равна нули т. ј.:

3°. *Једначином 11) дефинисана функција w постаје равна нули за свега m коначних вредности x-а; тачке у x-овој бројној равни, које одговарају тим вредностима x-а, леже у коначној даљини од почетка.*

Ово је Гаусова основна теорема алгебре.

Означимо вредности x-а, које поништавају функцију w или за које је $w = 0$, са $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$. Те су вредности наравно још непознате, али да оне доиста постоје, доказано је теоремом 3). За те је вредности $f(x)$ такође равна нули, и зато се она по № 94 може представити као производ:

$$14.)\quad f(x) = b_0\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

Методе помоћу којих се налазе вредности $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$, за које је $f(x) = 0$, излажу се у теорији једначина. Овде је доста што је доказано то, да кад је $f(x)$ алгебарска цела и рационална функција x-а m-ог степена, да онда мора имати m вредности за x ни више ни мање, за које је $f(x) = 0$.

СЕДМИ ДЕО.

ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ДЕТЕРМИНАНАТА.

167. Узмимо нека нам је дат један низ основака:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots .\ a_n.$$

Ако ове основке поређамо узастопце ма како, онда тако добивена гомила зове се *слог*.

Ако сад у таквом једном слогу упоредимо свака два и два основка, онда се каже, да таква два основка чине једну *инверзију*, кад је казаљка оног основка, који је у слогу на ранијем месту, већа од казаљке основка, који је на доцнијем месту.

Тако на пример у слогу:

$$a_5\, a_1\, a_4\, a_3\, a_6\, a_2$$

има осам инверзија

$$a_5\, a_1,\ a_5\, a_4,\ a_5\, a_3,\ a_5\, a_2,\ a_4\, a_3,\ a_4\, {}_2,\ a_3\, a_2,\ a_6\, a_2.$$

На основу обрасца, помоћу којег се налази број пермутација, које се могу начинити из n основака, број свију могућих слогова, који се могу добити из n основака ређајући их једно за другим на све могуће начине, јесте:

$$n\,! = 1.\ 2.\ 3.\ (n - 1).\ n.$$

Ми ћемо те слогове поделити на две групе: *прву*, у којој су слогови са парним бројем инверзија и *другу*, у којој су слогови са непарним бројем инверзија. Ми ћемо прву класу звати *парном* или *положном* а другу *непарном* или *одречном*.

168. Сад нам пре свега треба доказати ову важну теорему*:

Кад се два ма која основка у једном слогу смене (пермутују), онда се мења класа слога. Или другаче: *два слога, који један из другог постају узајамном сменом двају основака, припадају различним класама.*

Први доказ. Нека су a_α и a_β основци једног слога, који се имају међу собом сменити. Ми тај слог можемо представити овако:

$$A\, a_\alpha\, B\, a_\beta\, C,$$

где A значи скуп основака, који су пред a_α, B скуп основака, који су између a_α и a_β а C скуп основака, који долазе после a_β. Узајамном сменом основака a_α и a_β добија се слог:

$$A\, a_\beta\, B\, a_\alpha\, C.$$

Пре свега узмимо на ум, да кад у оба слога упоредимо основке, који су у A, и међу собом и са свима доцнијим, да велим добијамо у оба маха исти број инверзија. То је исто случај, кад основке, који су у C, упоредимо међу собом и са свима онима, који су лево од њих. Према томе ми можемо просто испустити из вида основке, који су у A и C и ограничити се на слогове:

$$a_\alpha\, B\, a_\beta \quad \text{и} \quad a_\beta\, B\, a_\alpha.$$

Пошто је број инверзија, које добијамо упоређујући међу собом основке, који су у B, у оба ова слога исти, то онда можемо и тај број инверзија из вида испустити.

Претпоставимо сада, да је казаљка α мања од казаљке β и да је m број основака, који су у B. Међу тима основцима нека има p основака, којих су казаљке мање од α а q основака, којих су казаљке веће од β.

Посматрајмо сада први слог. Кад упоредимо основке, који су у B, са основком a_α, добићемо p инверзија, а кад их упоредимо са основком a_β, добићемо q инверзија. Пошто међутим a_α и a_β не дају никакве инверзије, то је број инверзија у првом слогу $= p + q$, нерачунајући у то и број инверзија, које дају основци, што су у B.

Посматрајмо сада други слог. Пошто у B има $m-q$ основака, којих су казаљке мање од β, а $m-p$ основака, којих су казаљке веће од α, то онда кад основке, што су у B, сравнимо са a_β, добијамо $m-q$ инверзија, а кад их сравнимо са a_α, добијамо $m-p$ инверзија. Пошто у осталом a_β и a_α дају такође једну инверзију, то онда други слог има свега $2m-p-q+1$ инверзија, нерачунајући у то инверзије, које дају основци, што су у B. Разлика бројева инверзија, које дају оба слога, јесте $\pm(2m-2p-2q+1)$, дакле непаран број. Одатле следује, да поменута два слога припадају различним класама.

Други доказ. Нека су a, b, c, d, ... казаљке једног извесног слога написане оним редом, како основци тога слога један за другим теку, и нека је: 2.

$$P = (b-a)(c-a)\ldots\ldots(c-b)\ldots\ldots$$

производ разлика, које се добијају, кад се свака казаљка одузме од свију оних, које за њом у слогу долазе. Свакој инверзији одговараће очевидно одречна разлика и према томе биће P положно или одречно, како кад слог буде био парне или непарне класе.

Узмимо сад, нека су g и h казаљке двају основака, који се имају сменити. Производ P, који одговара првашњем слогу, моћиће се написати овако:

$$P = \varepsilon \underbrace{(b-a)\,(c-a)\,..}_{1)}\,\underbrace{(g-a)\,(g-b)}_{2)}\ldots\underbrace{(h-a)\,(h-b)}_{3)}\,..\,\underbrace{(h-g)}_{4)}$$

где је $\varepsilon = \pm 1$. Ако сменимо основке g и h једно другим, онда производ чинилаца 1) неће се променити; производи 2) и 3) претвориће се један у други а само ће чинилац 4) променити свој знак. Дакле ће и производ P променити свој знак а услед тога промениће се и класа слога.

Знак производа P, који одређује парност или непарност класе каквога слога, зове се знак тога слога. То је узрок, зашто се парна класа зове положном а непарна одречном.

169. Узмимо сада, да је дато n^2 количина или основака, поређаних у n врста свака са n основака, дакле поређаних у облику квадрата овако:

$$1.)\qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\ . & . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Доња казаљка сваког основка показује врсту а горња казаљка показује стуб којима припада основак. Помножимо сад оне основке, који су на дијагонали квадрата, која иде озго и с лева на десно, па ћемо добити производ:

$$2.)\qquad a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots a_n^n.$$

α,

Ако сад у овом производу пермутујемо на све могуће начине доње казаљке остављајући горње казаљке на миру и ако сваки од тако добивених производа узмемо са знаком + или са знаком —, како је кад слог састављен из доњих казаљака *прве* или *друге* класе, онда алгебарски збир свију тих производа зове се *детерминанта* n^2 датих количина и означава се онако, као што је показано под 1).

Кад детерминанта има n врста и n стубова, она се зове детерминанта n-га реда и производ 2) зове се њен *први* или *главни* члан.

Увиђавно је, да број чланова детерминанте мора бити једнак броју пермутација доњих казаљака, дакле једнак:

$$n\,! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n.$$

На пример:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2 - a_2^1\, a_1^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 - a_1^1\, a_3^2\, a_2^3 - a_2^1\, a_1^2\, a_3^3 + \\ + a_2^1\, a_3^2\, a_1^3 + a_3^1\, a_1^2\, a_2^3 - a_3^1\, a_2^2\, a_1^3$$

β,

Сви чланови детерминанте могу се очевидно добити и пермутовањем горњих казаљака, ако се притом оставе на миру доње казаљке и притом добивени производи узму са знаком $+$ или $-$, како је кад слог састављен из горњих казаљака *прве* или *друге* класе.

Из самог начина, како постаје детерминанта, сљедује, да у сваком члану детерминанте мора бити по један и то само један члан из сваке врсте и сваког стуба. Према томе чланови детерминанте јесу производи, који се добијају, кад се докле је то могуће буде узимао као чинилац по један основак из сваке врсте и сваког стуба тако, да у једном и истом производу два ма која чиниоца неприпадају никад истој врсти или истом стубу.

Зарад одредбе знакова појединим члановима детерминанте ми смо у сваком члану њеном претпоставили горње казаљке написане у природном реду тако, да је слог састављен из горњих казаљака у сваком члану детерминанте слог *прве* класе. Но међутим није тешко увидети, да кад се у ма ком члану детерминанте чиниоци другаче распореде, да ће велим тај члан морати имати знак $+$ или $-$, како су кад слогови састављени из горњих и доњих казаљака исте или различне класе. Јер пошто се узајамном сменом двају чинилаца мења класа како слога доњих тако и класа горњих казаљака, то онда оба та слога остају и после смене исте или различне класе, како су кад они пре те смене били исте или различне класе.

Сад је лако увидети истинитост ових двеју теорема:

1°. *Детерминанта се не мења, кад се врсте претворе у стубове а ови у врсте.*

Јер пошто при том основци дијагонале остају исти, то и први члан детерминанте остаје исти па дакле остају исти и сви остали чланови њени.

2°. *Кад се у једној детерминанти узајамно смене две врсте или два стуба, детерминанта мења само свој знак.*

Јер узмимо да смо н. пр. сменили α-ти и β-ти стуб један другим. Члановима првобитне детерминанте

$$\pm A\, a_p^\alpha\, B\, a_q^\beta C \quad \text{и} \quad \mp A\, a_p^\beta\, B\, a_q^\alpha\, C$$

одговарају у новој детерминанти чланови:

$$\pm A\, a_p^\beta\, B\, a_q^\alpha\, C \quad \text{и} \quad \mp A\, a_p^\alpha\, B\, a_q^\beta\, C.$$

Проста последица ове теореме јесте ова теорема:

3°. *Кад се један стуб или врста помери паралелно себи и дође на друго које место, док међу тим остали стубови или врсте остају на својим местима, онда детерминанта мења или не свој знак, како је кад број прескочених стубова или врста паран или не.* Или краће: *Ако је број прескочених стубова или врста* $= r$, *онда је детерминанта помножена са* $(-1)^r$.

Лако је доказати и ову теорему:

4°. *Кад су две врсте или два стуба у једној детерминанти једнаки, онда је вредност детерминанте равна нули.*

Јер узмимо да су н. пр. α-ти и β-ти стуб једнаки. Онда сваком члану $\pm A\, a_p^\alpha\, B\, a_q^\beta\, C$ детерминанте одговара други члан исте детерминанте: $\mp A\, a_p^\beta\, B\, a_q^\alpha\, C$ Пошто су таква два члана детерминанте једнаки а противно означени, то је детерминанта $= 0$.

17. Ми смо видели, да се у сваком члану детерминанте налази по један и то само један основак из сваке врсте и из сваког стуба. Према томе детерминанта је линеарна хомогена функција основака једне и исте врсте или једног и истог стуба. Ако сад из свију чланова детерминанте, у којима се налази основак a_1^1, извучемо исти

основак као заједничког чиниоца; ако тако исто извучемо основак a_1^2 као заједничког чиниоца из свију оних чланова детерминанте, у којима се он налази као основак и т. д., онда ће се детерминанта, коју означавамо са $\triangle$, јавити у облику:

$$\triangle = A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \;..+ A_1^n a_1^n,$$

где су $A_1^1, A_1^2, A_1^3, \ldots A_1^n$ количине, у којима нема ни једног основка прве врсте. Те количине, које се зову *субдетерминанте* основака прве врсте $a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^n$, лако је наћи. Означимо уопште са $\triangle_\alpha^\beta$ детерминанту, која се добија, кад се у даној детерминанти просто изоставе α-та врста и β-ти стуб. Лако је сад увидети, да је субдетерминанта A_1^1 равна детерминанти:

$$\triangle_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & . & . & . & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & . & . & . & a_3^n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n^2 & a_n^3 & . & . & . & a_n^n \end{vmatrix}$$

Јер да бисмо добили скуп слогова дане детерминанте $\triangle$, у којима се налази основак a_1^1, треба само узети први члан $a_1^1 a_2^2 a_3^3 . \; . a_n^n$ детерминанте, па изузев први основак a_1^1 пермутовати у оставшем слогу $a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n$ доње казаљке на све могуће начине и узети сваки добивени слог са одговарајућим знаком. Резултат је очевидно $A_1^1 = \triangle_1^1$

Сменимо сада први стуб другим и обратно, како би основак a_1^2 дошао на оно место, где је у даној детерминанти стајао основак a_1^1. Алгебарски збир чланова у новој детерминанти, у којима се налази основак a_1^2, биће $\triangle_1^2 a_1^2$.

Но пошто је детерминанта због узајамне смене првог и другог стуба променила знак, то је субдетерминанта $A_1^2 = - \triangle_1^2$

Исто тако ако преместимо трећи стуб дане детерминанте на прво место, детерминанта биће помножена (№ 169 теорема 3°) са $(-1)^2$, дакле неће променити свој знак и зато је субдетерминанта $A_1^3 = \triangle_1^3$, и т. д.

На тај начин радећи добијамо:

$$\triangle = \triangle_1^1 a_1^1 - \triangle_1^2 a_1^2 + \triangle_1^3 a_1^3 \;.\;.\;.+ (-1)^{n-1} \triangle_1^n a_1^n.$$

Ако хоћемо да уредимо детерминанту по члановима н. пр. α-те врсте, то посматрајмо члан a_α^β те врсте. Ако α-ту врсту доведемо на прво место идући одозго на доле, а затим β-ти стуб на прво место идући с лева на десно, онда ће основака a_α^β доћи на чело детерминанте т. ј. тамо, где је у даној детерминанти стајало a_1^1. Као резултат имамо дану детерминанту помножену са $(-1)^{\alpha+\beta-2}$, одакле закључујемо, да је скуп чланова дане детерминанте, у којима се налази основак a_α^β, раван:

$$(-1)^{\alpha+\beta} \triangle_\alpha^\beta a_\alpha^\beta.$$

Према томе дана детерминанта уређена по основцима α-те врсте изгледаће:

$$\triangle = (-1)^{\alpha-1} \left\{ \triangle_\alpha^1 a_\alpha^1 - \triangle_\alpha^2 a_\alpha^2 + \;.\; + (-1)^{n-1} \triangle_\alpha^n a_\alpha^n \right\}$$

Ако ли је пак уредимо по основцима β-ог стуба, наћићемо:

$$\triangle = (-1)^{\beta-1}\left\{\triangle_1^\beta a_1^\beta - \triangle_2^\beta a_2^\beta + \ldots + (-1)^{n\;\;1}\triangle_n^\beta a_n^\beta\right\}$$

Као што се из горњега види, субдетерминанта A_α^β, која одговара основку a_α^β, добија се кад се помножи са $(-1)^{\alpha+\beta}$ детерминанта, која остаје, кад се у даној детерминанти $\triangle$ изоставе α-та врста и β-ти стуб.

171. Помоћу образаца у пређашњој нумери лако је доказати, *да кад се сваки основак једне врсте или једног стуба помножи са ма каквим бројем, да је онда то толико, колико да је дана детерминанта помножена истим бројем.*

Исто тако није сада тешко доказати и ову теорему: *Кад су одговарајући основици двеју врста или двају стубова сразмерни, онда је вредност детерминанте = 0.*

Такође је лако доказати и то, *да кад су у једној врсти или у једном стубу сви основци осим једног равни нули, да је онда детерминанта равна производу из тога основка и субдетерминанте, која одговара томе основку.*

Јер ако су на пример сви основци β-ог стуба равни нули осим основка a_α^β, онда из последње једначине у № 170 сљедује:

$$\triangle = (-1)^{\alpha+\beta-2}\triangle_\alpha^\beta a_\alpha^\beta = A_\alpha^\beta a_\alpha^\beta$$

или:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots\ldots & a_1^{\beta-1} & 0 & a_1^{\beta+1} \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots\ldots & a_2^{\beta-1} & 0 & a_2^{\beta+1} \ldots\ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\alpha^1 & a_\alpha^2 \ldots\ldots & a_\alpha^{\beta-1} & a_\alpha^\beta & a_\alpha^{\beta+1} \ldots\ldots & a_\alpha^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots & a_n^{\beta-1} & 0 & a_n^{\beta+1} \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\alpha+\beta} a_\alpha^\beta \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots\ldots & a_1^{\beta-1} & a_1^{\beta+1} \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots\ldots & a_2^{\beta-1} & a_2^{\beta+1} \ldots\ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\alpha^1 & a_\alpha^2 \ldots\ldots & a_\alpha^{\beta-1} & a_\alpha^{\beta+1} \ldots\ldots & a_\alpha^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots\ldots & a_n^{\beta-1} & a_n^{\beta+1} \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

4.

Нека је сад дата детерминанта:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 + b_1, & a_1^2 & a_1^3 \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 + b_2, & a_2^2 & a_2^3 \ldots\ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 + b_n, & a_n^2 & a_n^3 \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

у којој се сваки основак првог стуба састоји из два сабирка. Кад ту детерминанту уредимо по основцима првога стуба, добићемо:

$$\triangle = A_1^1 (a_1^1 + b_1) + A_2^1 (a_2^1 + b_2) + \ldots . + A_n^1 (a_n^1 + b_n)$$

или:

$$\triangle = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + \ldots \quad + A_n^1 a_n^1$$

$$+ A_1^1 b_1 + A_2^1 b_2 + \ldots . + A_3^1 b_n$$

Дакле је, као што се види, дана детерминанта равна збиру двеју детерминанта то јест:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ b_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Одавде сљедује, *да кад у једној детерминанти основцима једне врсте или једног стуба додамо одговарајуће основке друге ма које врсте или стуба, да се велим онда детерминанта не мења.* Тако н. пр ако основцима првог стуба додамо одговарајуће основке другог стуба, имаћемо:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + a_1^2, & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 + a_2^2, & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 + a_n^2, & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^2 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Пошто је вредност друге детерминанте на десној страни равна нули, јер су у њој први и други стуб једнаки, то су остале две детерминанте међу собом једнаке. Али пре него што смо додали основке другога стуба основцима првога, ми смо могли све основке другог стуба помножити са једним и истим у осталом ма каквим бројем. Јер тада би само друга детерминанта на десној страни последње једначине добила тај исти број као сачиниоца; но како је та детерминанта равна нули па дакле и производ њен са ма каквим бројем, то су и у том случају остале две детерминанте једнаке.

172. Да бисмо дану детерминанту развили т. ј. да бисмо нашли чланове полинома, који јој одговара, можемо сада место по методи № 169 и овако радити:

Уредимо детерминанту по основцима једне н. пр. прве врсте — стуба —. Сачиниоци тих основака јесу такође детерминанте, које можемо уредити по основцима њине прве врсте — стуба —. Продужавајући тако и даље наићићемо на сачиниоце, који су детерминанте другог реда то јест у којима има само две врсте и два стуба, дакле у којима има по четири основка и које је дакле лако развити.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

Дакле чланови детерминанте другог реда добијају се, кад се основци дијагонално помноже и производ основака, који су у дијагонали, што иде одозго и с лева на десно узме са знаком + а производ основака дијагонале, која иде одозго с десна на лево узме са знаком —.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_2^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^1 (a_2^2 a_3^3 - a_3^2 a_2^3) - a_1^2 (a_2^1 a_3^3 - a_3^1 a_2^3) +$$

$$+ a_1^3 (a_2^1 a_3^2 - a_3^1 a_2^2)$$

$$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_3^1 a_2^3$$

$$+ a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_3^1 a_2^2.$$

Овде је место да напоменем једно практично правило, помоћу којег се увек лако може развити детерминанта трећег реда.

Узмимо да се има развити детерминанта :

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Ако испод треће врсте напишемо још једном најпре прву а затим другу врсту, добићемо :

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & & a_1^2 & & a_1^3 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ a_2^1 & & a_2^2 & & a_2^3 \\ & \times & & \times & \\ a_3^1 & & a_3^2 & & a_3^3 \\ & \times & & \times & \\ a_1^1 & & a_1^2 & & a_1^3 \\ & \diagup & & \diagdown & \\ a_2^1 & & a_2^2 & & a_2^3 \end{array}$$

Положне чланове детерминанте добијамо множећи основке на трима дијагоналама, које су нагнуте овако ╲, а одречне чланове детерминанте добијамо множећи основке на трима дијагоналама, које су нагнуте овако ╱.

Радећи по овом упуству добијамо :

$$\triangle = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 +$$

$$a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_2^3 a_3^2 a_1^1 - a_3^3 a_1^2 a_2^1.$$

На основу онога, што смо доказали на извесном месту у № 171, лако је увидети, да је :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

па били основци $a_2^1,\ a_3^1 \dots a_n^1$ ма какви. Исто је тако:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & a_3^4 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^3 & a_n^4 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

па били основци: $a_2^1,\ a_3^1 \dots a_n^1$ и $a_3^2,\ a_4^2 \dots a_n^2$ ма какви. Ако овако наставимо и даље, наћићемо, да кад су сви основци детерминанте, који се налазе на једној и истој страни дијагонале, равни нули, да велим онда детерминанта мора бити равна производу основака дијагонале, да је дакле:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \dots a_n^n.$$

Лако је после овога увидети, како се свака детерминанта може претворити у једну детерминанту вишег реда. Тако на пример:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ x_2 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ x_3 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & x_1 & y_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & x_2 & y_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где основци $x_1,\ x_2,\ x_3$; $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$, који се у задатој детерминанти не налазе, могу бити ма какви.

Разрешавање линеарних једначина са више непознатих.

173. Пре свега напоменућемо једну из ниже алгебре познату истину. Ако је дато n једначина:

1.) $$X_1 = 0,\ X_2 = 0 \dots\dots X_n = 0$$

са n непознатих, онда једначина:

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n = 0,$$

где су сачиниоци A стални бројеви, може заменити ма коју од даних једначина, то јест систем једначина састављен из последње једначине и $(n-1)$ осталих јесте равновредан систему n даних једначина, а тим хоћемо да кажемо, да оба система имају иста разрешења.

И доиста сваки спрег вредности за непознате, које задовољавају једначине 1), поништавају количине

$$X_1,\ X_2,\ X_3 \ldots\ldots X_n$$

дакле задовољавају једначине

$$2.)\quad X_2 = 0,\ X_3 = 0 \ldots X_n = 0,\ A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n = 0$$

И обратно сваки спрег вредности за непознате, које задовољавају једначине 2), поништавају X_2 X_3, . . . X_n као и збир

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n$$

и по томе поништавају и X_1, јер ми претпостављамо, да је стални сачинилац A_1 различан од нуле. Дакле поменуте вредности задовољавају и једначине 1).

Претпоставимо сад, нека је дато n једначина са n непознатих x_1, $x_2 \ldots, x_n$, дакле:

$$3.)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = u_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_n + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = u_n \end{array}\right.$$

Означимо са $\triangle$ детерминанту n^2 сачинилаца непознатих, дакле ставимо:

$$\triangle = \left|\begin{array}{cccc} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{array}\right|$$

Ако претпоставимо, да је ова детерминанта различна од нуле, то онда, пошто је она линеарна хомогена функција основака једне врсте или једног стуба, мора бар једна од одговарајућих субдетерминаната бити различна од нуле. Иста детерминанта уређена по основцима првог стуба изгледа овако:

$$\triangle = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + \ldots + A_n^1 a_n^1.$$

Саберимо једначине 3) члан по члан, пошто смо их пре тога помножили редом са A_1^1, $A_2^1, \ldots A_n^1$. У новој једначини сачинилац од x_1 биће раван детерминанти $\triangle$; сачинилац од x_2 биће:

$$A_1^1 a_1^2 + A_2^1 a_2^2 + \ldots + A_n^1 a_n^2,$$

а то је детерминанта, у којој је први стуб једнак другом; дакле је тај сачинилац раван нули. На сличан начин доказује се, да су сачиниоци и осталих непознатих у новој једачини равни нули. Дакле се према томе нова једначина своди на:

$$4.)\quad \triangle x_1 = A_1^1 u_1 + A_2^1 u_2 + \ldots + A_n^1 u_n.$$

1. Ако је детерминанта Δ различна од нуле, онда је:

$$5.)\qquad x_1 = \frac{A_1^1 u_1 + A_2^1 u_2 + \ldots + A_n^1 u_n}{\Delta}$$

На сличан начин налазимо:

$$6.)\qquad x_2 = \frac{A_1^2 u_1 + A_2^2 u_2 + \ldots + A_n^2 u_n}{\Delta}$$

и т. д. Као што се види, заједнички именилац у вредностима непознатих јесте детерминанта Δ, која постаје из n^2 сачинилаца непознатих у даним једначинама. Бројилац у вредности сваке непознате јесте, као што се види, детерминанта, која се добија, кад се у детерминанти Δ замене сачиниоци те непознате са члановима, који су десно од знака равности.

Врло је лако доказати, да вредности нађене за непознате x_1, x_2, . . . x_n задовољавају једначине 3). Јер ако тим вредностима заменимо непознате у једначинама 3), лева страна прве једначине претвориће се у:

$$\frac{1}{\Delta}\left|\begin{array}{l} (A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \ldots + A_1^n a_1^n)\, u_1 \\ + (A_2^1 a_1^1 + A_2^2 a_1^2 + \ldots + A_2^n a_1^n)\, u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (A_n^1 a_1^n + A_n^2 a_1^2 + \ldots + A_n^n a_1^n)\, u_n \end{array}\right|$$

У изразу под великим заградама сачинилац од u_1 јесте детерминанта Δ уређена по основцима прве врсте. Сачинилац од u_2 јесте детерминанта уређена по основцима друге врсте али у којој су основци друге врсте замењени одговарајућим основцима прве врсте. Сачинилац

од u_2 према томе јесте једнак нули. Исто су тако равни нули и сви доцнији сачиниоци, одакле следује, да се по замени непознатих њиним горњим вредностима лева страна прве једначине своди на u_1; дакле је прва једначина задовољена. Пошто се на сличан начин доказује лако, да су задовољене и све остале једначине, то онда закључимо, да кад је детерминанта сачинилаца непознатих у даним једначинама различна од нуле, исте једначине имају једно и то само једно разрешење.

Претпоставимо сада, да је детерминанта Δ равна нули, 2 а да је бар једна од n^2 субдетерминаната различна од нуле. Ако је н. пр. субдетерминанта A_1^1 различна од нуле, онда ћемо добити један систем од n једначина равновредан систему задатих једначина, ако прву једначину под 3) заменимо једначином 4). Ако је сад десна страна јед- α начине 4) различна од нуле, онда пошто та једначина не може имати разрешења, други систем једначина па дакле и први не може имати такође никаквог разрешења. Али ако је десна страна једначине 4) равна нули, дакле ако 3 је иста једначина идентична, онда n даних једначина своде се на $(n-1)$ различних једначина са n непознатих. Тада x_1 може имати сваку могућу вредност, и пошто је детерминанта A_1^1 различна од нуле, то онда из једначина под 3) следује, да свакој произвољној вредности за x_1 одговара један одређени систем вредности за x_2, x_3 . . . x_n.

174. Ако су сад у једначинама 3) №-е 173 све ко- 1. личина **u** осим u_n равне нули, онда из једначине:

$$x_\beta = \frac{A_1^\beta u_1 + A_2^\beta u_2 + \ldots + A_n^\beta u_n}{\Delta}$$

која даје вредност непознату x_β, сљедује:

$$x_\beta = \frac{A_n^\beta u_n}{\triangle} \quad \text{или} \quad \frac{x_\beta}{A_n^\beta} = \frac{u_n}{\triangle},$$

одакле се види, да су у том случају вредности непознатих $x_1, x_2 \ldots x_n$ сразмерне субдетерминантама :

$$A_n^1,\ A_n^2, \ldots A_n^n.$$

Тада су разрешења даних једначина дата једначинама:

$$\frac{x_1}{A_n^1} = \frac{x_2}{A_n^2} = \ldots = \frac{x_n}{A_n^n} = \frac{u_n}{\triangle}$$

Али ако је и $u_n = 0$, онда једначина, која даје вредност за непознату x_β, јесте :

$$\triangle x_\beta = 0 \quad \text{или} \quad x_\beta = \frac{0}{\triangle},$$

и ако је детерминанта $\triangle$ различна од нуле, онда су вредности непознатих $x_1, x_2 \ldots x_n$ равне нули.

Претпоставимо опет, да су у једначинама 3) № 173 сва u равна нули, да је дакле дат систем n линеарних хомогених једначина:

$$1.)\left\{\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = 0 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = 0 \end{array}\right.$$

β. Да би сад ове једначине могле вредити за вредности непознатих различне од нуле, треба као што се види из обрасца :

$$\triangle x_\beta = 0,$$

где β значи један ма који од бројева 1, 2, 3, ... n, да је детерминанта $\triangle = 0$, јер иначе једначине 1) неби могле заједно опстати осим за вредности непознатих равне нули. Ако је сад услов $\triangle = 0$ испуњен, онда су једначинама 1) одређене не саме вредности непознатих, него само количници — размере — истих. Јер ако су исте једначине задовољене вредностима непознатих : $x', x'' \ldots x^{(n)}$ оне ће очевидно бити задовољене и вредностима : lx', lx'', ... $lx^{(n)}$, па имало у осталом l ма какву вредност. Вредности тих количника — размера — у опште су одређене; јер ако узмемо од n датих једначина $(n-1)$ ма којих, онда се из истих дају израчунати $(n-1)$ непознатих количника :

$$\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n}, \ldots \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Пошто је детерминанта $\triangle = 0$, то је : γ.

$$\begin{array}{l} a_1^1 A_\alpha^1 + a_1^2 A_\alpha^2 + \ldots + a_1^n A_\alpha^n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_\alpha^1 A_\alpha^1 + a_\alpha^2 A_\alpha^2 + \ldots + a_\alpha^n A_\alpha^n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 A_\alpha^1 + a_n^2 A_\alpha^2 + \ldots + a_n^n A_\alpha^n = 0 \end{array}$$

Из ових једначина добијамо за количнике :

$$\frac{A_\alpha^1}{A_\alpha^n},\ \frac{A_\alpha^2}{A_\alpha^n}, \ldots \frac{A_\alpha^{n-1}}{A_\alpha^n}$$

исте вредности, које добијамо из једначина 1) за количнике:

$$\frac{x_1}{x_n}, \ \frac{x_2}{x_n}, \ \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Одатле сљедује, да су количине:

$$A^1_\alpha, \ A^2_\alpha, \ldots A^n_\alpha$$

сразмерне вредностима непознатих $x_1, x_2, \ldots x_n$ које задовољавају једначине 1), па имало α ма коју од вредности 1, 2, 3, . . . n. И тако вреде ове сразмере:

$$2.) \qquad x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A^1_1 : A^2_1 : \ldots : A^n_1$$

$$= A^1_2 : A^2_2 : \ldots : A^n_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$= A^1_n : A^2_n : \ldots : A^n_n.$$

Одавде видимо, да кад је детерминанта $\triangle$ равна нули, да су онда субдетерминанте, које одговарају основцима двеју паралелних врста или двају паралелних стубова, сразмерне

Ако претпоставимо $x_n = 1$, онда се једначине 1) претварају у n једначина са $(n-1)$ непознатих. Дакле *услов, да n једначина са $(n-1)$ непознатих могу заједно опстати,* т. ј. *да може бити вредности за $(n-1)$ непознатих, које их задовољавају, јесте: детерминанта свију сачинилаца рачунајући у исте и чланове, који од непознатих независе, мора бити равна нули.*

Услов $\triangle = 0$, који треба да је испуњен, па да n једначина са $(n-1)$ непознатих могу заједно опстати,

није ништа друго до резултат избацаја $(n-1)$ непознатих из n даних једначина. Према томе:

Да би из n линеарних једначина са $(n-1)$ непознатих избацили све те непознате, треба само ставити равну нули детерминанту n-ог реда, која постаје из n^2 сачинилаца тих једначина урачунавајући у исте и чланове, који од непознатих независе.

Из једначина 2) сљедује:

$$3.) \qquad x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A^1_n : A^2_n : \ldots : A^n_n.$$

Пошто се у субдетерминантама $A^1_n, A^2_n \ldots A^n_n$ не налази ниједан од сачинилаца последње једначине под 1):

$$a^1_n x_1 + a^2_n x_2 + \ldots + a^n_n x_n = 0$$

то онда одатле сљедује, да сразмере под 3) дају вредности за количнике непознатих $x_1, x_2, \ldots x_n$, које задовољавају једначине:

$$a^1_1 x_1 + a^2_1 x_2 + \ldots + a^n_1 x_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a^1_{n-1} x_1 + a^2_{n-1} x_2 + \ldots + a^n_{n-1} x_n = 0,$$

и то дају вредности исказане субдетерминантама, које постају из $n(n-1)$ сачинилаца ових једначина, кад се у њима изостави најпре само први стуб, затим само други стуб и т. д.

Према томе, ако је дато n хомогених линеарних једначина са $(n+1)$ непознатих:

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^{n+1} x_{n+1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^{n+1} x_{n+1} = 0$$

разрешења тих једначина добијају се помоћу сразмера:

$$x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1} = A_{n+1}^1 : A_{n+1}^2 : \dots : A_{n+1}^{n+1}$$

где је у опште:

$$A_{n+1}^{\beta} = (-1)^{\beta-1} \begin{vmatrix} a_1^1 \dots & a_1^{\beta-1} & a_1^{\beta+1} & \dots & a_1^{n+1} \\ a_2^1 \dots & a_2^{\beta-1} & a_2^{\beta+1} & \dots & a_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 \dots & a_n^{\beta-1} & a_u^{\beta+1} & \dots & a_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

Избацај једне непознате из двеју једначина са две непознате.

175. Узмимо нека су дате две једначине са две непознате x и y, које су једна m-ог а друга n-ог степена, и из којих има да се избаци x.

Кад се дане једначине уреде по падајућим степенима непознате x, добићемо:

$$1.)\ \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0 \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n = 0 \end{cases} \quad {}^{1)}$$

Кад у овим једначинама сменимо x са $\frac{x}{z}$, где је z сасвим произвољно, добићемо:

1) [illegible] од x_a јесу функције од y.

$$2.)\ \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} z + a_2 x^{m-2} z^2 + \dots + a_m z^m = 0 \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} z + b_2 x^{n-2} z^2 + \dots + b_n z^n = 0 \end{cases}$$

Ако сад прву од ових једначина помножимо редом са:

$$x^{n-1},\ x^{n-2} z,\ x^{n-3} z^2,\ \dots\ z^{n-1}$$

а другу са:

$$x^{m-1},\ x^{m-2} z,\ x^{m-3} z^2,\ \dots\ z^{m-1},$$

добићемо $(n+m)$ нових једначина:

$$3.)\ \left|\begin{array}{r} a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} z + a_2 x^{m+n-3} z^2 + \dots = 0 \\ a_0 x^{m+n-2} z + a_1 x^{m+n-3} z^2 + \dots = 0 \\ a_0 x^{m+n-3} z^2 + \dots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots + a_m z^{m+n-1} = 0 \\ b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} z + b_2 x^{m+n-3} z^2 + \dots = 0 \\ b_0 x^{m+n-2} z + b_1 x^{m+n-3} z^2 + \dots = 0 \\ b_0 x^{m+n-3} z^2 + \dots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots + b_n z^{m+n-1} = 0 \end{array}\right.$$

n једн

m једн

n + m једн

Ако сад један извесан спрег вредности за x и y задовољавају једначине 1), онда вредност y-а, која припада томе спрегу у свези са ма каквим вредностима xа-и z-а морају задовољити једначине 2), пошто је z са свим произвољно. Одатле следује, да једначине 3), које можемо сматрати као један систем од $(m+n)$ једначина са $(m+n)$ непознатих:

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2}z,\ x^{m+n-3}z^2,\ .\ .\ .\ z^{m+n-1}$$

морају имати бесконачно много разрешења. Према томе, мора за горепоменуту вредност y-а детерминанта једначина 3) бити равна нули, дакле:

$$4.)\quad Y = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \end{vmatrix} = 0$$

И ово је последак елиминације x-а из двеју даних једначина или тако звана решавајућа једначина. Та једначина даје вредности за непознату y, које припадају разрешењима једначина 1).

176. Лако је дознати степен решавајуће једначине. Зарад тога претпоставимо најпре, да су једначине 1) потпуне. Степени количина $a_0, a_1, \ldots a_m, b_0, b_1, \ldots b_n$,

које су целе и рационалне функције y-а, истоветни су са казаљкама тих количина. Систем једначина под 3) састоји се из једне групе од n једначина, које постају из прве задате једначине, и друге групе од m једначина, које постају из друге задате једначине под 1).

Један произвољни члан детерминанте под 4) јесте облика:

$$\pm\, a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}\, b_{\beta_1}\, b_{\beta_2} \ldots b_{\beta m}.$$

Овде је a_{α_1} један од сачинилаца прве, a_{α_2} један од сачинилаца друге . . . , a_{α_n} један од сачинилаца последње једначине у првој групи једначина под 3). Исто је тако b_{β_1} један од сачинилаца прве, b_{β_2} један од сачинилаца друге, . . . $b_{\beta m}$ један од сачинилаца последње једначине у другој групи једначина 3). Казаљке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1$ $\beta_2, \ldots \beta_m$ означавају у исти мах и стубове, у којима стоје поједини основци горњег члана детерминанте Одатле следује, да је основак a_{α_1} односно y степена $(\alpha_1 - 1)$, основак a_{α_2} степена $(\alpha_2 - 2)$ . . ., основак a_{α_n} степена $(\alpha_n - n)$. Исто тако увиђавно је, да је b_{β_1} односно y степена $(\beta_1 \ -1)$, основак b_{β_2} степена $(\beta_2 - 2)$ . . , основак $b_{\beta m}$ степена $(\beta_m - m)$. Степен производа свију тих основака јесте:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \ \ldots + \beta_m) -$$
$$- (1 + 2 + \ldots + n) - (1 + 2 + \ldots + m).$$

Али како се у сваком члану детерминанте налази по један и то само један основак из свакога стуба, то онда збир

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \beta_1 + \beta_2 + \ldots$$

није ништа друго до збир првих $(m+n)$ целих бројева. Према томе степен детерминанте 4) или степен решавајуће једначине јесте:

1+2+ +(m+n)

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}=mn.$$

Дакле имамо теорему:

Степен решавајуће једначине једнак је производу степена задатих — потпуних — једначина.

Узмимо сада нека су дате две непотпуне једначине са две непознате x и y; прва нека је степена $(m+p)$ а друга степена $(n+q)$. Даље прва једначина нека је односно x m-ог а друга n-ог степена. Ако обе једначине уредимо по падајућим степенима x-а, онда ће оне имати облик једначина под 1), и сачиниоци прве једначине a_0, a_1, ... a_m биће степена p, $(p+1)$, ... $(p+m)$, а сачиниоци b_0, b_1, ... b_n друге једначине под 1) биће степена q, $(q+1)$, . , $(q+n)$. Да бисмо дакле у овом случају дознали степен једног произвољног члана:

$$\pm\, a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}\, b_{\beta_1}\, b_{\beta_2} \ldots b_{\beta_m}$$

детерминанте 4) па дакле и степен решавајуће једначине, треба изложиоцу сваког од n чинилаца a у томе члану додати број p, а изложиоцу сваког од m чинилаца b додати број q. Према томе је дакле сада степен тога члана па дакле и детерминанте 4): [illegible]

$$mn+np+mq \text{ или } (m+p)(n+q)-pq.$$

Дакле смо добили теорему:

Степен решавајуће једначине јесте раван производу степена задатих једначина мање производ степена оних сачинилаца, који стоје уз највише степене x-а у задатим једначинама.

3.

Сад нам још остаје, да нађемо што простију једначину са непознатима x и y, помоћу које бисмо могли наћи вредности x-а које одговарају вредностима y-а нађеним помоћу једначине 4.) Ми ћемо претпоставити, да свакој вредности y-а одговара само једна вредност x-а, одакле следује, да ће тражена једначина бити првог степена односно x. Ако у једначинама 3) ставимо $z=1$, то онда пошто је детерминанта у 4) равна нули, једна од једначина 3) мора бити последица осталих. Ако дакле једну од тих једначина напустимо, н. пр. последњу и ако чланове последњег ступа бацимо десно, имаћемо $(m+n-1)$ једначина првог степена са $(m+n-1)$ непознатих.

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots,\ x,$$

из којих можемо израчунати вредност непознате x.

Вредност x-а јавиће се као количник двеју целих и рационалних функција y-а: Z и N. Именилац N тога разломка јесте очевидно субдетерминанта, која одговара последњем основку b_n последње врсте у детерминанти 4). Бројилац Z тога разломка добија се, кад се у имениоцу N основци преднпоследњег ступа замене основцима последњег ступа али узетим са противним знаком.

Једначина $x=\dfrac{Z}{N}$ у свези са једначином под 4) даје сва разрешења задатих једначина.

Множење детерминаната.

177. Да бисмо нашли производ двеју детерминаната и то на најлакши начин, ми ћемо претпоставити, да нам је дат следећи систем од n једначина са n непознатих: x_1, x_2, . . . x_n

$$1.)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + .. + a_1^n x_n = y_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + .. + a_2^n x_n = y_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = y_n, \end{array}\right.$$

где су поједина y количине, које задовољавају следећих n једначина:

$$2.)\quad \left\{\begin{array}{l} b_1^1 y_1 + b_2^1 y_2 + \ldots + b_n^1 y_n = \alpha_1 \\ b_1^2 y_1 + b_2^2 y_2 + \ldots + b_n^2 y_n = \alpha_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ b_1^n y_1 + b_2^n y_2 + .. + b_n^n y_n = \alpha_n. \end{array}\right.$$

Разрешењем једначина 1) добијамо за непознату x_h:

$$3.)\qquad x_h = \frac{y_1 A_1^h + y_2 A_2^h + \ldots + y_n A_n^h}{D}$$

где је именилац D детерминанта сачинилаца на левој страни једначина 1) а бројилац детерминанта, која постаје, кад се у детерминанти D, уређеној по основцима a_1^h, a_2^h, ... a_n^h, исти сачиниоци замене редом количинама $y_1, y_2, \ldots y_n$. Количине $A_1^h, A_2^h, \ldots A_n^h$ јесу субдетерминанте, које одговарају појединим основцима a_1^h, a_2^h, ... a_n^h у h-ом стубу детерминанте D

Разрешењем једначина под 2) добијамо:

$$4.)\qquad y_1 = \frac{X_1}{D^1},\ y_2 = \frac{X_2}{D^1},\ ..\ y_n = \frac{X_n}{D^1}.$$

где је D^1 детерминанта, која постаје из сачинилаца на левој страни једначина 2), а X_m детерминанта, која се добија, кад се у детерминанти D^1 основци m-ог стуба b_m^1, b_m^2, ... b_m^n замене количинама α_1, α_2, ... α_n.

Ако сад у једначини 3) заменимо поједина y њиним вредностима под 4), наћићемо:

$$5.)\qquad x_h = \frac{X_1 A_1^h + X_2 A_2^h + .. + X_n A_n^h}{DD^1}$$

Али ако у једначинама 2) заменимо поједина y њиним вредностима из једначина 1), добићемо:

$$6.)\quad \left\{\begin{array}{l} c_1^1 x_1 + c_2^1 x_2 + .. + c_n^1 x_n = \alpha_1 \\ c_1^2 x_1 + c_2^2 x_2 + \ldots + c_n^2 x_n = \alpha_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_1^n x_1 + c_2^n x_2 + \ldots + c_n^n x_n = \alpha_n \end{array}\right.$$

где је у опште:

$$7.)\quad \left\{\begin{array}{l} c_k^1 = a_1^k b_1^1 + a_2^k b_2^1 + \ldots. + a_n^k b_n^1 \\ c_k^2 = a_1^k b_1^2 + a_2^k b_2^2 + \ldots. + a_n^k b_n^2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_k^n = a_1^k b_1^n + a_2^k b_2^n + \ldots. + a_n^k b_n^n \end{array}\right.$$

$Y_1 = \frac{M}{D_2}$

[illegible]

$D_2 = \Lambda D_1$

Из ових образаца види се, како се лако добијају основци детерминанте, која постаје из сачинилаца на левој страни једначина 6). Да бисмо добили c_k^r, то јест k-ти члан у r-ој врсти поменуте детерминанте, треба нам само помножити члан по члан k-ти стуб детерминанте сачинилаца на левој страни једначина 1) са r-ом врстом детерминанте сачинилаца на левој страни једначина 2) и добивене производе сабрати.

Разрешењем једначина 6) добијамо:

$$8.) \qquad x_h = \frac{\alpha_1 C_h^1 + \alpha_2 C_h^2 + \ldots + \alpha_n C_h^n}{\triangle}$$

Овде је именилац $\triangle$ детерминанта сачинилаца на левој страни једначина 6), а бројилац је детерминанта, која постаје, кад се у детерминанти $\triangle$, уређеној по основцима њеног h-ог стуба: c_h^1, c_h^2 . . . c_h^n, исти основци замене количинама α_1, α_2, . . α_n, који су на десној страни једначина 6.) Количине C_h^1, C_h^2 . . . C_h^n јесу субдетерминанте, које одговарају основцима h-ог стуба c_h^1, c_h^2, ... c_h^n. Из једначина 5) и 8) сљедује:

$$\frac{X_1 A_1^h + X_2 A_2^h + \ldots + X_n A_n^h}{DD'} = \frac{\alpha_1 C_h^1 + \alpha_2 C_h^2 + \ldots + \alpha_n C_h^n}{\triangle}$$

одакле закључујемо да је:

$$\triangle = \lambda . DD^1,$$

где је λ један сталан број. Но пошто је:

$$a_1^1 \, b_1^1 \, a_2^2 \, b_2^2 \, a_3^3 \, b_3^3 \ldots a_n^n \, b_n^n$$

један члан како детерминанте $\triangle$, тако и производа DD^1, то мора бити $\lambda = 1$, и зато је:

$$\triangle = DD^1.$$

Дакле имамо теорему:

Производ двеју детерминаната D и D^1 јесте опет једна детерминанта истог реда и њени основци добијају се из основака умножених детерминаната помоћу образаца 7.)

Из образаца 7) види се, да први, други, ... n-ти основак у r-ној врсти детерминанте $\triangle$ добијамо, кад помножимо редом и члан по члан први, други, . . . n-ти стуб детерминанте D са r ом врстом детерминанте D^1 и при сваком од тих n множења добивене производе саберемо. Но како у свакој од двеју детерминаната D и D^1 можемо претворити врсте у стубове и обратно, то онда одатле сљедује, да има четири различна начина, помоћу којих се могу добити основци детерминанте $\triangle$:

Први други, ... n-ти основак у r-ној врсти детерминанте $\triangle$ добијају се:

1°. Кад се са r-ом врстом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан први други, ... n-ти стуб детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

2°. Кад се са r-ом врстом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан прва, друга, . . n-та врста детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

3°. Кад се са r-им стубом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан први, други . . . n-ти стуб детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

4°. Кад се са r-им стубом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан прва, друга, . . . n-та врста детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

Тако је на пример :

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ a^1_2 & a^2_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1_1 & b^2_1 \\ b^1_2 & b^2_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^2_1, & a^2_1 b^1_1 + a^2_2 b^2_1 \\ a^1_1 b^1_2 + a^1_2 b^2_2, & a^2_1 b^1_2 + a^2_2 b^2_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^2_1 b^2_1, & a^1_2 b^1_1 + a^2_2 b^2_1 \\ a^1_1 b^1_2 + a^2_1 b^2_2, & a^1_2 b^1_2 + a^2_2 b^2_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^1_2, & a^2_1 b^1_1 + a^2_2 b^1_2 \\ a^1_1 b^2_1 + a^1_2 b^2_2, & a^2_1 b^2_1 + a^2_2 b^2_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^2_1 b^1_2, & a^1_2 b^1_1 + a^2_2 b^1_2 \\ a^1_1 b^2_1 + a^2_1 b^2_2, & a^1_2 b^2_1 + a^2_2 b^2_2 \end{vmatrix}.$$

Ако претпоставимо, да су детерминанте D и D^1 једнаке, онда добијамо квадрат детерминанте D у облику детерминанте.

Тако је на пример :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2, & aa_1 + bb_1 \\ aa_1 + bb_1, & a_1^2 + b_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + ba_1, & ab + bb_1 \\ aa_1 + ab_1, & ba_1 + b_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2 + a_1^2, & ab + a_1 b_1 \\ ab + a_1 b_1, & b^2 + b_1^2 \end{vmatrix},$$

у овим једначинама горње казаљке значе изложиоце.

Ако детерминанте, које се имају помножити, нису истог реда, онда треба најпре (№ 172) претворити детерминанту нижег реда у детерминанту истога реда са другом, па онда радити по горњем правилу. Тако је на пример:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overset{\alpha}{\cancel{a}} & \beta & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta, & a_1\alpha + b_1\beta, & a_2\alpha + b_2\beta \\ a\alpha_1 + b\beta_1, & a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a\alpha_2 + b\beta_2, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_2, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2 \end{vmatrix}$$

где су α_2 и β_2 сасвим произвољне количине.

178 Нека је дата детерминанта :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ a_1 & a_2 & . & . & . & . & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & . & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & . & . & . & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

састављена из нулних, првих, других, ... $(n-1)$-вих степена количина :

$$a_1, \ a_2, \ a_3 \ . \ . \ . \ . \ a_n,$$

којих је n на броју. Сравнимо детерминанту $\triangle$, у којој су горње казаљке сада изложиоци, са производом:

$$P = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \ldots (a_n - a_1)$$
$$\times (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \ldots (a_n - a_2)$$
$$\times (a_4 - a_3) \ldots (a_n - a_3)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\times (a_n - a_{n-1}),$$

где су поједини чиниоци разлике, које постају, кад се свака од n количина $a_1, a_2 \ldots a_n$ одузме од свију доцнијих. Детерминанта $\triangle$ постаје равна нули, кад две ма које од n количина н. пр. a_h и a_k постану једнаке, јер тада њена два стуба постају једнаки. Одатле се види, да детерминанта мора бити дељива са разликом између двеју ма којих од n количина $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, па дакле и са производом P свију тих разлика.

Даље детерминанта $\triangle$ и производ P јесу истог степена:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$$

односно свију количина $a_1\ a_2, \ldots a_n$. Према томе количник количина $\triangle$ и P неможе зависити од количина $a_1, a_2, \ldots a_n$. Да бисмо нашли тај количник, треба нам само упоредити члан детерминанте $\triangle$ са чланом производа P, у коме се налазе исти степени количина $a_1, a_2, \ldots a_n$. Таква два члана јесу први члан детерминанте $\triangle$:

$$a_2\, a_3^2\, a_4^3 \ldots a_n^{n-1}$$

и после члан производа P, који се добија множењем првих чланова у појединим биномним чиниоцима тога производа. Пошто је сад тај први члан производа једнак првом члану детерминанте и истог знака с њиме, то одатле закључујемо, да је:

$$\triangle = P.$$

4.

Број чланова детерминанте јесте:

$$n! = 1\ 2.\ 3\ \ldots n,$$

а број чланова производа P пре свођаја јесте:

$$2^{\left[\text{[illegible]}\right]} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Одатле сљедује, да се детерминанта $\triangle$ јавља у много простијем облику него производ P. Тако за $n = 5$ детерминанта имаће 120 а производ 1024 чланова.

Из досадањега закључујемо, да је резултат елиминације непознатих $x_1, x_2, \ldots x_n$ из једначина:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0$$
$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + \ldots + a_n^2 x_n = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + a_3^{n-1} x_3 + \ldots + a_n^{n-1} x_n$$

где горње казаљке сачинилаца значе изложиоце, раван производу разлика, које постају, кад се свака од количина a_1, a_2, . . . a_n одузме од свију доцнијих. Ако су дакле све ове количине међу собом различне, детерминанта сачинилаца биће различна од нуле и једначине неће бити у опреци, оне ће то јест имати разрешења.

Више субдетерминанте.

179. Детерминанту:

$$1.)\qquad \triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdot & a_n^n \end{vmatrix}$$

означавају Cauchy и Jacobi краће овако:

$$2.)\qquad \triangle = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n,$$

то јест пред првим или главним чланом детерминанте они стављају знак ± а пред свим слово Σ. Знак Σ захтева, да се чланови детерминанте, који се добијају из главнога члана пермутовањем доњих — или горњих — казаљака, и који су чланови, као што већ знамо, пола положни а пола одречни, имају сабрати.

Ми ћемо се од сада служити и овим начином означавања детерминаната, а по каткад, кад буде потребно, означаваћемо детерминанте још и краће ограђујући само главни члан детерминанте, дакле овако:

$$3.)\qquad (a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n)$$

Кад дану детерминанту уредимо по основцима на пример првог стуба, добијамо:

$$\triangle = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \ldots + a_n^1 A_n^1,$$

где су:

$$A_1^1,\ A_2^1, \ldots A_n^1$$

субдетерминанте, које одговарају основцима првог стуба. Те субдетерминанте зову се *прве* субдетерминанте или субдетерминанте *првог реда*. Но свака од тих субдетерминаната јесте детерминанта $(n-1)$-ог реда, узета са знаком + или —, и према томе може се и она уредити по основцима буди којег стуба на пример првог. И кад се то учини, добија се:

$$A_1^1 = a_2^2(a_3^3 a_4^4 \ldots) - a_3^2(a_2^3 a_4^4 \ldots) + a_4^2(a_2^3 a_3^4 \ldots) - \ldots$$

$$A_2^1 = - a_1^2(a_3^3 a_4^4 \ldots) + a_3^2(a_1^3 a_4^4 \ldots) - a_4^2(a_1^3 a_3^4 \ldots) + \ldots$$

$$A_3^1 = a_1^2(a_2^3 a_4^4 \ldots) - a_2^2(a_1^3 a_4^4 \ldots) + a_4^2(a_1^3 a_2^4 \ldots) - \ldots$$

. . . .

$$A_n^1 = \pm a_1^2(a_2^3 a_3^4 \ldots) \mp a_2^2(a_1^3 a_3^4 \ldots) \pm a_3^2(a_1^3 a_2^4 \ldots) - \ldots$$

Кад ове једначине помножимо са

$$a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1, \ldots a_n^1$$

и затим саберемо, добићемо на левој страни нове једначине детерминанту $\triangle$, а на десној, кад два и два члана са једнаким сачиниоцима сведемо, и детерминанте, које се притом јаве, представимо у облику под 3), добићемо:

$$(a_1^1\, a_2^2)\,(a_3^3\, a_4^4 \ldots) - (a_1^1\, a_3^2)\,(a_2^3\, a_4^4 \ldots) + \,.\, \pm (a_1^1\, a_n^2)\,(a_2^3\, a_3^4 \ldots)$$

$$+ (a_2^1\, a_3^2)\,(a_1^3\, a_4^4 \ldots) - (a_2^1\, a_4^2)\,(a_1^3\, a_3^4 \ldots) + \ldots \mp (a_2^1\, a_n^2)\,(a_1^3\, a_3^4 \,.\,)$$

$$+ (a_3^1\, a_4^2)\,(a_1^3\, a_2^4 \ldots) - (a_3^1\, a_5^2)\,(a_1^3\, a_2^4 \ldots) + \ldots \pm (a_3^1\, a_n^2)\,(a_1^3\, a_2^4 \ldots)$$

. . . .

$$+ (a_{n-1}^1\, a_n^2)\,(a_1^3\, a_2^4 \,.\quad .).$$

Сад кад детерминанте, које се јављају као други чиниоци у појединим члановима, узете заједно са знаком, који је напред, означимо краткоће ради са:

$$A_{12},\ A_{13} \,.\ .\, A_{1n},\ A_{23},\ A_{24}, \qquad A_{2n}, \ldots A_{n-1,n}$$

добићемо:

$$4.)\ \triangle = (a_1^1\, a_2^2)\, A_{12} + (a_1^1\, a_3^2)\, A_{13} + (a_1^1\, a_4^2)\, A_{14} + \ldots + (a_1^1\, a_n^2)\, A_{1n}$$

$$+ (a_2^1\, a_3^2)\, A_{23} + (a_2^1\, a_4^2)\, A_{24} + \ldots + (a_2^1\, a_n^2)\, A_{2n}$$

$$+ (a_3^1\, a_4^2)\, A_{34} + \ldots + (a_3^1\, a_n^2)\, A_{3n}$$

. . . .

$$+ (a_{n-1}^1\, a_n^2)\, A_{n-1,n}.$$

Као што се види, дана детерминанта сада је представљена као збир производа, у којима је вазда први чинилац детерминанта другог а други чинилац са знаком + или — узета детерминанта $(n-2)$-ог реда. Основци сваке детерминанте другог реда узети су, као што се види, из прва два стуба, а основци одговарајуће детерминанте $(n-2)$-ог реда из осталих $(n-2)$ стубова. Детерминанте $(n-2)$-ог реда,

које се јављају са знаком + или — у поменутим производима као други чиниоци, зову се — узете са својим знаком — *друге* субдетерминанте или субдетерминанте *другог реда* Те субдетерминанте нису ништа друго но са одговарајућим знаком узете детерминанте, које остају, кад се у датој детерминанти изоставе прва два стуба и ове две врсте, у којима се налазе 4 основка детерминанте, која се јавља као први чинилац. Тако на пример A_{12} јесте са знаком + узета детерминанта, која остаје, кад се у задатој детерминанти изоставе прве две врсте и прва два стуба. A_{ik} где је $i < k$, јесте са одговарајућим знаком узета детерминанта, која остаје кад се у задатој детерминанти изоставе прва два стуба и i-та и k-та врста. Но питање је, са каквим знаком треба узети ту детерминанту $(n-2)$-ог реда, те да се добије A_{ik}. Зарад тога начинимо i-ту врсту првом а k-ту другом. Нова детерминанта биће, као што је познато, једнака задатој, али помноженој са k-ина [illegible] 1,

$$(-1)^{i-1+k-2} = (-1)^{i+k-3}.$$

Кад се у новој детерминанти изоставе прве две врсте и прва два стуба, остаје иста детерминанта $(n-2)$-ог реда, која се добија, кад се у задатој детерминанти изоставе прва два стуба и i-та и k-та врста. Дакле је субдетерминанта A_{ik} једнака, са

$$(-1)^{i+k-3}$$

помноженој, детерминанти $(n-2)$-ог реда, која остаје, пошто се у задатој детерминанти изоставе први и други стуб и i-та и k-та врста.

Да би смо нашли поједине производе десно од знака равности у једначини 4), треба с обзиром на оно, што смо 2, већ казали, умети само наћи прве чиниоце тих производа. Ти чиниоци, који су детерминанте другог реда, добијају се, као што се види из једначине 4), кад се само начине све комбинације друге класе а без понављања из основака:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n$$

и кад се први основак сваке такве комбинације узме као доња казаљка првог а други основак као доња казаљка другог чиниоца у изразу

$$(a^1\ a^2)$$

Број чланова на десној страни једначине 4) једнак је броју комбинација друге класе а без понављања, које се могу начинити из n основака:

$$1,\ 2,\ 3 \ldots n$$

дакле једнак броју:

$$\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{1\ .\ 2}$$

[[illegible] $(n-2)^{ог}$ реда]

180. Кад би се у једначини 4) други чиниоци, који су субдетерминанте другог реда, уредили по основцима њиховог првог стуба и тако добивени изрази заменили у једначину 4), дана детерминанта јавила би се као збир производа, у којима би вазда први чинилац био детерминанта трећег реда а други чинилац са знаком + или — узета детерминанта $(n-3)$-га реда. Основци сваке детерминанте трећег реда узети су из прва три стуба, а основци одговарајуће детерминанте $(n-3)$-га реда из осталих $(n-3)$ стубова. Детерминанте $(n-3)$-га реда, које се у

поменутим производима јављају са знаком + или — као други чиниоци, зову се — узете са својим знаком — *треће* субдетерминанте или субдетерминанте *трећег реда*. Оне постају, кад се у даној детерминанти изоставе прва три стуба и оне три врсте, у којима се налазе 6 основака детерминанте, која се јавља као први чинилац. Знак + 1. или —, са којим треба узети сваку поменуту детерминанту $(n-3)$-га реда, одређује се на начин горе (№ 179) показани. Ако је н. пр детерминанта трећег реда

$$\left(a_i^1\ a_k^2\ a_l^3\right)$$

први чинилац у једном од производа, на које је разложена дата детерминанта, онда да бисмо одредили знак субдетерминанте, која одговара овој детерминанти трећег реда, учинимо да i-та врста постане првом, k-та другом, а l-та трећом идући одозго на доле. Нова детерминанта једнака је задатој али помноженој са

$$(-1)^{i-1+k-2+l-3} = (-1)^{i+k+l-6}$$

Кад у новој детерминанти изоставимо прва три стуба и прве три врсте, остаје детерминанта $(n-3)$-га реда истоветна са оном, која се добија из задате детерминанте, кад се у овој изоставе прва три стуба и i-та, k-та и l-та врста. Дакле субдетерминанта трећег реда, која је помножена са детерминантом

$$\left(a_i^1\ a_k^2\ a_l^3\right)$$

постаје, кад се у задатој детерминанти изоставе прва три стуба и i-та, k-та и l-та врста и кад се оставша детерминанта $(n-3)$-га реда помножи са

$$(-1)^{i+k+l-6}$$

Да бисмо и у овом случају нашли поједине производе, на које је дана детерминанта разложена, треба начинити најпре све комбинације треће класе а без понављања из основака

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n$$

Затим треба први основак сваке такве комбинације узети као доњу казаљку првог, други основак као доњу казаљку другог а трећи основак као доњу казаљку трећег чиниоца у изразу

$$(a^1\ a^2\ a^3).$$

Тако добивени изрази, који представљају детерминанте трећег реда, јесу први чиниоци производа, на које је дана детерминанта разложена, а како се добијају други чиниоци сваког таквог производа, већ смо показали. Број чланова, из којих се у овом случају задата детерминанта састоји, једнак је броју комбинација треће класе а без понављања, које се могу начинити из n основака:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n,$$

дакле је једнак броју: $\binom{n}{3} = \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$.

Ако продужимо овако и даље, најзад ћемо видети, да се задата детерминанта може представити као збир производа, у којима је вазда први чинилац детерминанта k-ог, а други чинилац са знаком $+$ или $-$ узета детерминанта $(n-k)$-ог реда. Основци детерминанте k-ог реда узети су вазда из k првих стубова, а основци одговарајуће детерминанте $(n-k)$-ог реда узети су из осталих $(n-k)$ стубова. Таква једна детерминанта $(n-k)$-ог реда постаје, кад се у даној детерминанти изоставе оне врсте и стубови, у којима се налазе основци детерминанте k-ог реда, која је с њоме помножена. И кад се таква једна детерминанта $(n-k)$-ог реда узме са знаком, који јој припада, онда се она зове субдетерминанта k-ог реда. Знак, са којим треба узети једну детерминанту $(n-k)$-ог реда, одређује се, кад се она помножи са степеном од -1, коме је изложилац разлика између збира казаљака оних врста дате детерминанте, које су изостављене, мање збир чланова реда: $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ k$. 1.

Да бисмо добили поједине производе, којих је збир једнак датој детерминанти, треба најпре начинити све комбинације k-те класе из основака: 2.

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n.$$

За тим треба узастопне основке сваке такве комбинације узети као доње казаљке узастопних чинилаца у изразу:

$$(a^1\ a^2\ a^3\ \ldots\ a^k)$$

Тако добивени изрази, који представљају детерминанте k-ог реда, биће први чиниоци поменутих производа. А како се добијају други чиниоци, који су субдетерминанте k-ог реда, већ је казато.

Број чланова или производа, из којих се сада детерминанта састоји, јесте: 3

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ k}.$$

Помоћу онога што смо прешли у овој №-и и № 179, лако је увидети, да кад су основци, који стоје у k првих 4 стубова и у исти мах у $(n-k)$ последњих врста, једнаки нули, да велим онда дана детерминанта јесте равна производу двеју детерминаната k-ог и $(n-k)$-ог реда. Прва од тих детерминаната састављена је из k^2 основака, који стоје у првих k стубова и првих k врста, а друга из основака, који стоје у $(n-k)$ последњих стубова и $(n-k)$ последњих врста.

Јер ако дану детерминанту представимо као збир производа из детерминаната k-ог и $(n-k)$-ог реда тако, да су основци детерминаната k-ог реда узети из првих k стубова, а основци детерминаната $(n-k)$-ог реда из осталих $(n-k)$ стубова, то је онда од свију детерминаната k-ог реда само једна од нуле различна и то она, чији основци стоје у k првих врста и k првих стубова дате детерминанте. Дакле је доиста

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^n \\ a_2^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k^k & a_k^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_k^n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_n^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^n \end{vmatrix} .$$

Ако ли су равни нули основци, који стоје у k првих стубова и у исти мах у више од $(n-k)$ врста, онда је детерминанта очевидно равна нули.

Примедба. Детерминанте k-ог и $(n-k)$-ог реда зову се *комплементне*.

Детерминанте са празном дијагоналом.

181. Кад у детерминанти:

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^n \end{vmatrix}$$

претпоставимо, да су сви основци дијагонале равни нули, добијамо детерминанту са празном дијагоналом

$$\Delta_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^n \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

У овој детерминанти нема сад свију оних чланова детерминанте $\Delta^{(n)}$, у којима се налази бар један основак њеве дијагонале.

Ми ћемо те чланове замислити подељене у групе са

$$1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ n$$

основака дијагонале. Да бисмо сад детерминанту $\triangle_0^{(n)}$ допунили, те да изађе детерминанта $\triangle^{(n)}$, треба чланове детерминанте $\triangle^{(n)}$, који се у детерминанти $\triangle_0^{(n)}$ не налазе, овој последњој додати. Ако означимо са $\overset{m}{C}_n$ једну комбинацију m-не класе начињену из n основака дијагонало а са $\triangle_0^{(n-m)}$ одговарајућу детерминанту $(n-m)$-ог реда, или што је свеједно рећи субдетерминанту m-ог реда, са празном дијагоналом, то је онда :

$$1.)\quad \triangle^{(n)} = \triangle_0^{(n)} + \Sigma \overset{1}{C}_n \triangle_0^{(n-1)} + \Sigma \overset{2}{C}_n \triangle_0^{(n-2)} + \dots$$

$$+ \Sigma \overset{m}{C}_n \triangle_0^{(n-m)} + \dots + \Sigma \overset{n-2}{C}_n \triangle_0^{(2)} + \overset{n}{C}_n,$$

пошто је $\triangle_0^{(1)} = 0$.

Помоћу овог обрасца добијамо :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_1^1 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^2 & 0 & a_3^4 \\ a_4^2 & a_4^3 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} 0 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_3^1 & 0 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & 0 \end{vmatrix} + a_3^3 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_2^1 & 0 & a_2^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 \end{vmatrix} + a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} 0 & a_3^4 \\ a_4^3 & a \end{vmatrix} + a_1^1 a_3^3 \begin{vmatrix} 0 & a_2^4 \\ a_4^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_1^1 a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 \\ a_3^2 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 a_3^3 \begin{vmatrix} 0 & a_1^4 \\ a_4^1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_1^3 \\ a_3^1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3^3 a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 \\ a_2^1 & 0 \end{vmatrix} + a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4.$$

Ако у детерминанти $\triangle^{(n)}$ узмемо, да је : 2,

$$a_1^1 = a_2^2 = \dots\dots = a_n^n = x$$

онда се комбинације C претварају у степене x-а и тада је:

$$\overset{m}{C}_n = x^m,$$

дакле се онда образац 5) претвара у :

$$2.)\quad \triangle^{(n)} = x^n + x^{n-2}\, \Sigma \triangle_0^{(2)} + x^{n-3}\, \Sigma \triangle_0^{(3)} + \dots$$

$$+ x\, \Sigma \triangle_0^{(n-1)} + \triangle_0^{(n)}.$$

Помоћу обрасца 2) налазимо :

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix} = x^3 - x\,(ac + be + df) + ade + bcf$$

Спрегнуте детерминанте.

182. Кад сменимо сваки основак задате детерминанте са субдетерминантом, која му одговара, онда нова детерминанта, која на тај начин постаје, зове се спрегнута детерминанта (reciproque, adjungirt).

Кад задату детерминанту

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & . & . & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & . & . & . & a_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & . & . & . & a_n^n \end{vmatrix}$$

помножимо са спрегнутом:

$$\triangle^1 = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & . & . & . & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & . & . & . & A_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ A_n^1 & A_n^2 & . & . & . & A_n^n \end{vmatrix}$$

добијамо:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & . & . & . & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & . & . & . & a_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & . & . & . & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & . & . & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & . & . & . & A_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ A_n^1 & A_n^2 & . & . & . & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & . & . & . & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & . & . & . & c_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ c_n^1 & c_n^2 & . & . & . & c_n^n \end{vmatrix}$$

где је:

$$c_1^1 = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \ldots + a_n^1 A_n^1$$

$$c_1^2 = a_1^2 A_1^1 + a_2^2 A_2^1 + \ldots + a_n^2 A_n^1$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$c_1^n = a_1^n A_1^1 + a_2^n A_2^1 + \ldots + a_n^n A_n^1$$

$$c_2^1 = a_1^1 A_1^2 + a_2^1 A_2^2 + \ldots + a_n^1 A_n^2$$

$$c_2^2 = a_1^2 A_1^2 + a_2^2 A_2^2 + \ldots + a_n^2 A_n^2$$

и т. д.

Из овога увиђамо, да сва c, у којих су горња и доња казаљка различне, морају бити једнака нули, јер се та c добијају, кад се основци једног стуба детерминанте $\triangle$ помноже са субдетерминантама, које одговарају основцима другог једног стуба. Међутим сва она c, у којима су горња и доња казаљка једнаке, једнака су детерминанти $\triangle$, јер она постају, кад се основци једног стуба детерминанте $\triangle$ помноже са својим субдетерминантама.

На тај начин добијамо једначину:

$$\triangle \cdot \triangle' = \begin{vmatrix} \triangle & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \triangle & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \triangle & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \triangle \end{vmatrix}.$$

или:

$$\triangle \cdot \triangle' = \triangle^n$$

или најзад :

$$1)\qquad \triangle' = \triangle^{n-1}$$

Дакле имамо теорему :

Спрегнута детерминанта n-ог реда једнака је (n—1)-ом степену задате детерминанте.

183. Да би смо нашли везу субдетерминаната спрегнуте детерминанте са првобитном детерминантом и њеним субдетерминантама, радићемо као што иде.

Решимо следећих n једначина :

$$\begin{aligned}
&a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n = y_1\\
&a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n = y_2\\
1.)\qquad &a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + \dots + a_3^n x_n = y_3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^n x_n = y_n,
\end{aligned}$$

па ћемо добити, означавајући са △ детерминанту сачинилаца на левој страни,

$$\begin{aligned}
&\triangle x_1 = y_1 A_1^1 + y_2 A_2^1 + y_3 A_3^1 + \dots + y_n A_n^1\\
&\triangle x_2 = y_1 A_1^2 + y_2 A_2^2 + y_3 A_3^2 + \dots + y_n A_n^2\\
2.)\qquad &\triangle x_3 = y_1 A_1^3 + y_2 A_2^3 + y_3 A_3^3 + \dots + y_n A_n^3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\triangle x_n = y_1 A_1^n + y_2 A_2^n + y_3 A_3^n + \dots + y_n A_n^n
\end{aligned}$$

Ако означимо детерминанту сачинилаца појединих y-а у овим једначинама са $\triangle'$ и употребимо слово B за означавање субдетерминаната, које одговарају појединим основцима те детерминанте, тако да је:

$$\triangle' = A_k^1 B_k^1 + A_k^2 B_k^2 + \dots + A_k^n B_k^n$$

онда разрешењем једначина 2) добијамо :

$$\begin{aligned}
&\triangle' y_1 = \triangle \left\{x_1 B_1^1 + x_2 B_1^2 + x_3 B_1^3 + \dots + x_n B_1^n\right\}\\
&\triangle' y_2 = \triangle \left\{x_1 B_2^1 + x_2 B_2^2 + x_3 B_2^3 + \dots + x_n B_2^n\right\}\\
3.)\qquad &\triangle' y_3 = \triangle \left\{x_1 B_3^1 + x_2 B_3^2 + x_3 B_3^3 + \dots + x_n B_3^n\right\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\triangle' y_n = \triangle \left\{x_1 B_n^1 + x_2 B_n^2 + x_3 B_n^3 + \dots + x_n B_n^n\right\}
\end{aligned}$$

Ако поједина y у овим једначинама заменимо њиним вредностима из једначина 1) и затим одговарајуће сачиниоце лево и десно од знака једнакости ставимо једне другима једнаке, добићемо из прве једначине :

$$\begin{aligned}
&a_1^1 \triangle^{n-2} = B_1^1 = (A_2^2 A_3^3 \dots A_n^n)\\
&a_1^2 \triangle^{n-2} = B_1^2 = (A_2^1 A_3^3 \dots A_n^n)\\
4.)\qquad &\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_1^n \triangle^{n-2} = B_1^n = (A_2^1 A_3^2 \dots A_n^{n-1})
\end{aligned}$$

и уопште из k-те једначине:

$$
2)\quad
\begin{aligned}
a_k^1 \triangle^{n-2} &= B_k^1 = (A_{k+1}^2\, A_{k+2}^3 \quad .\, A_{k-1}^n)\\
a_k^2 \triangle^{n-2} &= B_k^2 = (A_{k+1}^1\, A_{k+2}^3 \ldots A_{k-1}^n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_k^n \triangle^{n-2} &= B_k^n = (A_{k+1}^1\, A_{k+2}^2 \ldots A_{k-1}^{n-1})
\end{aligned}
$$

Дакле *је субдетерминанта првог реда спрегнуте детерминанте једнака $(n-2)$-ом степену задате детерминанте, помноженом са комплементном детерминантом исте задате детерминанте.* Овде се та комплементна детерминанта јавља као основак, пошто је она првог реда.

Да бисмо тако исто нашли, како стоји са субдетерминантом другог реда спрегнуте детерминанте, ми ћемо помножити прву једначину под 3) са B_2^2 а другу са B_1^2, и затим одузети.

Тако ћемо добити:

$$\triangle'(y_1 B_2^2 - y_2 B_1^2) = \triangle\left\{x_1 (B_1^1 B_2^2) + x_3 (B_1^3 B_2^2) + \ldots\right\}$$

Ако сад даље из једначине 2), напуштајући другу једначину, избацимо количине

$$y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_n$$

и узмемо на ум значење количина: B_1^2 и B_2^2, добићемо:

$$y_1 B_2^2 - y_2 B_1^2 = \triangle\left\{x_1 (A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n) + \ldots\right\}$$

$-\Delta x_1 + y_1 A_1^1 + y_2 A_2^1 \quad A_3^1 A_4^1 \cdots A_n^1$

$-\Delta x_2 + y_1 A_1^3 + y_2 A_2^3 \quad A_3^3 A_4^3 \cdots$

$= -\Delta \begin{vmatrix} x_1 A_3^1 A_4^1 \cdots A_n^1 \\ x_3 A_3^3 A_4^3 \cdots A_n^3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} A_1^1 A_3^1 \cdots A_n^1 \\ A_1^3 A_3^3 \cdots A_n^3 \end{vmatrix} +$

Ако ово заменимо у једначину одмах више ове, добићемо стављајући сачиниоце од x_1 један другом равне:

$$(B_1^1 B_2^2) = \triangle'(A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n)$$

Али помоћу образаца 4) добијамо такође

$$(B_1^1 B_2^2) = (a_1^1 a_2^2) \triangle^{2n-4}$$

А из ове једначине узимајући у обзир једначину 1) у № 182 добијамо:

$$(a_1^1 a_2^2) \triangle^{n-3} = (A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n).$$

На сличан начин радећи нашли бисмо:

$$
6.)\quad
\begin{aligned}
(a_1^1 a_3^2) \triangle^{n-3} &= (A_3^2 A_4^4 \ldots A_n^n)\\
(a_1^1 a_4^2) \triangle^{n-3} &= (A_3^2 A_4^3 \ldots A_n^n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_1^{n-1} a_2^n) \triangle^{n-3} &= (A_3^1 A_4^2 \ldots A_n^{n-2})
\end{aligned}
$$

Овде је:

$$(A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n)$$

субдетерминанта другог реда спрегнуте детерминанте а $(a_1^1 a_2^2)$ јесте субдетерминанта другог реда првобитне детерминанте $\triangle$, то јест $(a_1^1 a_2^2)$ јесте комплементна детерминанта детерминанти:

$$(a_3^3 a_4^4 \ldots a_n^n).$$

Дакле је субдетерминанта другог реда спрегнуте детерминанте $\triangle'$ *једнака (n—3)-ем степену првобитне детерминанте* $\triangle$ *помноженом са одговарајућом комплементном детерминантом исте детерминанте* $\triangle$

Исто тако нашли бисмо ослањајући се на обрасце 1) у № 182 и 3), 4), 5) и 6) у овој №-и:

$$(a_1^1\, a_2^2\, a_3^3)\, \triangle^{n-4} = (A_4^4\, A_5^5 \ldots\ A_n^n).$$

Ако све добивене резултате скупимо, имаћемо овај низ образаца:

$$\triangle' = \triangle^{n-1} = (A_1^1\, A_2^2\, A_3^3 \ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n)$$

$$\triangle^{n-2}\, a_1^1 = (A_2^2\, A_3^3 \ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n)$$

$$\triangle^{n-3}\, (a_1^1\, a_2^2) = (A_3^3\, A_4^4 \ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n)$$

$$\triangle^{n-4}\, (a_1^1\, a_2^2\, a_3^3) = (A_4^4\ \ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n)$$

7.)

$$\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot$$

$$\triangle\, (a_1^1\, a_2^2 \ldots a_{n-2}^{n-2}) = (A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n)$$

$$\triangle^0\, (a_1^1\, a_2^2\ \ldots a_{n-2}^{n-2}\, a_{n-1}^{n-1}) = A_n^n$$

$$(a_1^1\, a_2^2 \ldots a_{n-1}^{n-1}\, a_n^n) = \triangle$$

Закључимо дакле из овога, *да субдетерминанта k-ог реда спрегнуте детерминанте јесте једнака (n—k—1)-ом степену првобитне детерминанте* $\triangle$ *помноженом са комплементном детерминантом исте детерминанте* $\triangle$. Та комплементна детерминанта јесте *k*-ог реда.

---

184 Ако је $\triangle = 1$, онда из обрасца 1) у № 182 следује, да је и $\triangle' = 1$. Но из образаца 7) у № 183 видимо, да су тада субдетерминанте спрегнуте детерминанте $\triangle'$ једнаке са комплементним детерминантама првобитне детерминанте $\triangle$. 1,

Ако је $\triangle = 0$, онда из истог обрасца 1) у № 182 следује, да је и $\triangle' = 0$. Тада из једначине, која је под 7) трећа одоздо, следује: 2,

$$(A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n) = A_{n-1}^{n-1}\, A_n^n - A_n^{n-1}\, A_{n-1}^n = 0$$

или:

$$A_{n-1}^{n-1} : A_{n-1}^n = A_n^{n-1} : A_n^n$$

Из ове једначине видимо, да је у овом случају размера одговарајућих основака у двема врстама т. ј. основака, који стоје у тим врстама на истим местима, стална. И обратно ако се ово последње претпостави, лако је доказати, да детерминанта $\triangle$ мора бити једнака нули.

Ако су 3

$$\triangle_1,\ \triangle_2,\ \triangle_3\ \ldots\ \triangle_n$$

задате детерминанте, а

$$\triangle_1',\ \triangle_2',\ \triangle_3',\ \ldots\ \triangle_n'$$

њима одговарајуће спрегнуте детерминанте, онда је на основу обрасца 1) у № 182:

$$\triangle_1' = \triangle_1^{n-1}$$

$$\triangle_2' = \triangle_2^{n-1}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\triangle_n' = \triangle_n^{n-1}$$

Одавде налазимо множењем:

$$\triangle_1' \triangle_2' \triangle_3' \dots \triangle_n' = (\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \dots \triangle_n)^{n-1}$$

Но како је производ детерминаната опет детерминанта и $(n-1)$-ви степен једне детерминанте њена спрегнута детерминанта, то из последње једначине добијамо:

$$8.) \quad \triangle_1' \triangle_2' \dots \triangle_n' = (\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \dots \triangle_n)'.$$

Производ спрегнутих детерминаната јесте дакле спрегнута детерминанта производа.

Ако је:

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \dots = \triangle_n = \triangle$$

онда из обрасца 8) следује:

$$9.) \qquad (\triangle')^n = (\triangle^n)'.$$

Дакле је n-ти степен спрегнуте детерминанте једнак спрегнутој детерминанти n-ог степена првобитне детерминанте $\triangle$.

Симетричне и симетралне детерминанте.

185. Свака два и два основка детерминанте:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

који су такви, да је казаљка врсте једног једнака казаљки стуба другог основка и обратно, звађемо *реципрочним*. Тако су основци a_1^2 ~~и~~ a_2^1, a_2^3 и a_3^2 и уопште $a_{\text{р}}^{\text{ч}}$ и $a_{\text{ч}}^{\text{р}}$ реципрочни основци.

Узмимо сада, да су у задатој детерминанти два и два реципрочна основка једнаки, да је дакле уопште:

$$a_{\text{р}}^{\text{ч}} = a_{\text{ч}}^{\text{р}}.$$

Тада се детерминанта зове *симетрична*, и то са *празном дијагоналом*, кад је уопште

$$a_{\text{р}}^{\text{р}} = 0,$$

а са *пуном дијагоналом*, кад је уопште:

$$a_{\text{р}}^{\text{р}} = c,$$

где је c или стално или зависно од p.

Тако је:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & c \\ b & c & x \end{vmatrix} = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,x + 2\,abc$$

симетрична детерминанта трећег реда са пуном дијагоналом. Међу тим је:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2\,abc$$

симетрична детерминанта трећег реда са празном дијагоналом.

Кад симетричну детерминанту $\triangle$ уредимо најпре по основцима k-те врсте, а затим по основцима k-ог стуба, добићемо у једном и у другом од та два случаја:

$$\triangle = a_k^1 A_k^1 + a_k^2 A_k^2 + \ldots + a_k^n A_k^n$$

$$\triangle = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k.$$

одакле с погледом на то, да су два и два у овим једначинама налазећа се реципрочна основка једнаки, следује:

$$A_p^q = A_q^p.$$

Дакле је спрегнута детерминанта једне симетричне детерминанте такође спрегнута.

186. Ако су у задатој детерминанти два и два реципрочна основка једнаки али противно означени, дакле ако је уопште:

$$a_p^q = -a_q^p,$$

онда се детерминанта зове *симетрална.* Ако је уопште:

$$a_p^p = 0$$

детерминанта се зове симетрална са *празном дијагоналом,* а ако је:

$$a_p^p = c,$$

где је c или стално или зависно од p, детерминанта се зове симетрална са *пуном дијагоналом.* Тако је:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\,x$$

симетрална детерминанта трећег реда са пуном дијагоналом. Међу тим

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

јесте симетрална детерминанта четвртог реда са празном дијагоналом

Кад код симетралних детерминаната (са празном дијагоналом) помножимо поједине врсте — или стубове — са -1, врсте ће се претворити у стубове и обратно, и тада ће детерминанта парнога реда добити знак $+$ а детерминанта непарнога реда знак $-$. Али како се детерминанта не мења, кад се врсте претворе у стубове и обратно, то детерминанта мора бити једнака нули у другом случају. Дакле:

Симетрална детерминанта ~~на~~ непарног реда *са празном дијагоналом вазда је једнака нули.*

Но пошто је она једнака нули, то је онда на основу №-е 184:

$$A_p^p : A_p^q = A_q^p : A_q^q$$

или пошто су сад спрегнуте детерминанте такође симетричне, дакле због тога:

$$A_p^q = A_q^p$$

$$\Delta_c = M \qquad -\Delta_c = M \qquad 2\Delta_c = 0$$

то је онда:

$$1.)\qquad A^{q}_{p} = \sqrt{A^{p}_{p}\, A^{q}_{q}}.$$

Према томе стоји теорема:

Сваки основак детерминанте, која је спрегнута једној симетралној детерминанти непарнога реда а са празном дијагоналом јесте геометријска средина двама основцима, који стоје у дијагонали тамо, где се ова сукобљава са врстом и стубом основка.

Узмимо на пример да је дата детерминанта:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & a^{2}_{1} & a^{3}_{1} \\ -a^{2}_{1} & 0 & a^{3}_{2} \\ -a^{3}_{1} & -a^{3}_{2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Њена спрегнута детерминанта јесте:

$$\triangle' = \begin{vmatrix} A^{1}_{1} & A^{2}_{1} & A^{3}_{1} \\ A^{1}_{2} & A^{2}_{2} & A^{3}_{2} \\ A^{1}_{3} & A^{2}_{3} & A^{3}_{3} \end{vmatrix}$$

Услед доказане теореме јесте:

$$A^{3}_{2} = \sqrt{A^{2}_{2}\, A^{3}_{3}}.$$

или кад заменимо вредности:

$$a^{2}_{1}\, a^{3}_{1} = \sqrt{(a^{2}_{1})^{2}\, (a^{3}_{1})^{2}}$$

На основу обрасца 19) имамо:

$$(A^{1}_{p})^{2} = A^{1}_{1}\, A^{p}_{p}$$

$$(A^{2}_{p})^{2} = A^{2}_{2}\, A^{p}_{p}$$

. . . .

$$(A^{n}_{p})^{2} = A^{n}_{n}\, A^{p}_{p}.$$

Одавде добијамо:

$$\frac{(A^{1}_{p})^{2}}{A^{1}_{1}} = \frac{(A^{2}_{p})^{2}}{A^{2}_{2}} = \dots = \frac{(A^{n}_{p})^{2}}{A^{n}_{n}} = A^{p}_{p}$$

или:

$$2.)\qquad (A^{1}_{p})^{2} : (A^{2}_{p})^{2} : \dots : (A^{n}_{p})^{2} = A^{1}_{1} : A^{2}_{2} : \dots : A^{n}_{n}.$$

187. Уредимо детерминанту:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^{1}_{1} & a^{2}_{1} \dots a^{n}_{1} \\ a^{1}_{2} & a^{2}_{2} \dots a^{n}_{2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a^{1}_{n} & a^{2}_{n} \dots a^{n}_{n} \end{vmatrix}$$

по основцима првог стуба, па ћемо добити:

$$\triangle = a^{1}_{1} A^{1}_{1} + a^{1}_{2} A^{1}_{2} + \dots + a^{1}_{n} A^{1}_{n}.$$

Кад тако исто уредимо поједине субдетерминанте:

$$A^{1}_{2},\ A^{1}_{3}, \dots A^{1}_{n},$$

по основцима њихових првих врста, добићемо:

$$3.)\qquad \triangle = a_1^1 A_1^1 - \Sigma\, a_p^1\, a_1^q\, \alpha_p^q$$

где знак Σ захтева, да се у изразу под њим има ставити редом, $p = 2, 3, \ldots n$ и при свакој од тих замена $q = 2, 3, \ldots n$ и да се тако добивени производи имају најзад сабрати. Поједине количине α, које се тада јављају, означавају извесне субдетерминанте другог реда.

Ако је $\triangle$ симетрална детерминанта парног реда а са празном дијагоналом, онда је A_1^1 таква иста детерминанта али непарног реда, дакле је онда због тога $A_1^1 = 0$ и на основу обрасца 1) у № 186:

$$\alpha_p^q = \sqrt{\alpha_p^p \alpha_q^q}.$$

Усљед тога и због $\alpha_p^q = -\alpha_q^p$ претвара се образац 3) у:

$$4)\qquad \triangle = \Sigma\, a_1^p \sqrt{\alpha_p^p}\, a_1^q \sqrt{\alpha_q^q},$$

где опет знак Σ захтева, да се у изразу под њим има ставити редом $p = 2, 3, \ldots n$ и при свакој од тих замена $q = 2, 3, \ldots n$ и да се најзад тако добивени резултати имају сабрати. Али се, као што се даје лако увидети, последња једначина може сад и овако написати:

$$5.)\qquad \triangle = \left\{ \Sigma\, a_1^p \sqrt{\alpha_p^p} \right\}^2$$

где знак Σ захтева, да се у изразу под њим има ставити редом:

$$p = 2, 3, \ldots n$$

и да се тако добивени производи имају сабрати. Дакле смо нашли теорему:

Симетралне детерминанте [redacted]парнога реда а са празном дијагоналом јесу потпуни квадрати.

Тако је на пример:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ -a_1^2 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & 0 & a_3^4 \\ -a_1^4 & -a_2^4 & a_3^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ a_1^2 \begin{vmatrix} 0 & a_3^4 \\ a_3^4 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_1^3 \begin{vmatrix} 0 & a_2^4 \\ a_2^4 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + a_1^4 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 \\ -a_2^3 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$= (a_1^2\, a_3^4 - a_1^3\, a_2^4 + a_1^4\, a_2^3)^2.$$

Ако је дијагонала симетралне детерминанте пуна и ако је:

$$a_p^p = x$$

то је онда по обрасцу 2) у № 181

$$\triangle = x^n + x^{n-2}\, \Sigma \triangle_0^{(2)} + x^{n-4}\, \Sigma \triangle_0^{(4)} + \ldots.$$

јер је сада (№ 186):

$$\triangle_0^{(3)} = \triangle_0^{(5)} = \ldots = \triangle_0^{(2k+1)} = 0.$$

Дакле:

Симетрална детерминанта са пуном дијагоналом јесте цела и рационална функција основка x, који је у *дијагонали; и у њој — функцији — налазе се само парни или само непарни степени x-а. Поједини сачиниоци јесу на основу обрасца 5) збирови потпуних квадрата.*

Примери:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3 + x\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} = x^4 + x^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + (af - be + cd)^2.$$

Непотпуне детерминанте.

188. Кад у једној детерминанти n-ог реда изоставимо последњу врсту, онда остаје један симбол, који по себи нема никаква значења и који се зове *непотпуна* детерминанта n-ог реда. Основцима изостављене врсте одговарају у непотпуној детерминанти одређене субдетерминанте.

Тако су на пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

две непотпуне детерминанте трећег реда. Основцима изостављених трећих врста одговарају субдетерминанте другог реда:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \; -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \; \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}; \; -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

1.

Израз:

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

који за сада нема још никаква значења, значиће од сада збир производа, који се добијају, кад се одговарајуће субдетерминанте тих двеју непотпуних детерминаната међу собом помноже. Дакле је;

$$1.)\quad P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 b_2)(\alpha_1 \beta_2) + (a_1 c_2)(\alpha_1 \gamma_2) + (b_1 c_2)(\beta_1 \gamma_2).$$

2.

За P можемо наћи још један израз, који је од овога по облику различан. Зарад тога проматрајмо детерминанту:

$$2.)\quad \Delta = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & -1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Кад ову детерминанту по методама изложеним у №-ма 179 и 180 представимо као збир производа из детерминаната другог и трећег реда, добићемо:

$$\Delta = - \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\}$$

или после врло простог свођаја:

$$3)\quad \Delta = (a_1\, b_2)\,(\alpha_1\, \beta_2) + (a_1\, c_2)\,(\alpha_1\, \gamma_2) + (b_1\, c_2)\,(\beta_1\, \gamma_2),$$

Из упоређаја образаца 1) и 3) сљедује:

$$P = \Delta$$

За P може се најзад добити израз у још једном облику. Зарад тога помножимо у детерминанти 2) основке трећег, четвртог и петог стуба редом са a_1, b_1, и c_1 и додајмо добивене производе одговарајућим основцима првог стуба. Затим помножимо исто тако основке трећег, четвртог и петог стуба са a_2, b_2, и c_2 и додајмо добивене производе одговарајућим основцима другог стуба. Тако ћемо добити:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1), & (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1), & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2), & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2), & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Одавде добијамо на основу онога, што смо доказали на крају №-е 180.

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1), & (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2), & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix}$$

Одавде узимајући на ум, да је прва детерминанта десно од знака једнакости $= -1$, добијамо:

$$\Delta = P = \begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1), & (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1) \\ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2), & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) \end{vmatrix}$$

Као што се види, вредност за P добија се из задатих непотпуних детерминаната исто онако како се добија производ двеју потпуних детерминаната.

Овај исти начин рада даје се употребити и код непотпуних детерминаната виших редова.

Заједнички корени виших једначина. Резултанте.

189. Пређе смо нашли, да услов који треба да је испуњен, па да $(n+1)$ једначина са n непознатих могу заједно опстати, јесте тај, да детерминанта свију сачинилаца у једначинама, урачунавајући ту и чланове од непознатих независне, мора бити једнака нули. Питање је сад, да ли се и код једначина виших степена са више непознатих могу наћи слични услови. Ми ћемо овде прећи само случај двеју виших једначина са једном непознатом.

Нека су на пример задате једначине:

$$1.)\quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0,$$

$$2.)\quad b_0 x^n + b_0 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0,$$

од којих је прва m-ог а друга n-ог степена. Пошто x у обема једначинама представља њин заједнички корен, то онда једнаки степени x-а у задатим и из њих изведеним једначинама морају се сматрати као једнаки бројеви. Сад кад помножимо прву једначину са:

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots\ x^2,\ x,\ 1$$

а другу са:

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ x^2,\ x,\ 1$$

добићемо ових $(m+n)$ једначина:

$$\begin{array}{rr}
a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + a_2 x^{m+n-3} + \ldots\ldots & = 0 \\
a_0 x^{m+n-2} + a_1 x^{m+n-3} + \ldots\ldots & = 0 \\
a_0 x^{m+n-3} + \ldots\ldots & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots + a_m & = 0 \\
b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + b_2 x^{m+n-3} + \ldots\ldots & = 0 \\
b_0 x^{m+n-2} + b_1 x^{m+n-3} + \ldots\ldots & = 0 \\
b_0 x^{m+n-3} + \ldots\ldots & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots + b_n & = 0
\end{array}$$

Степене од x у овим једначинама и којих је степена на броју $m+n-1$ смемо очевидно сматрати сваки као једну непознату. И пошто је $m+n$ једначина а само $m+n-1$ непознатих, то онда мора бити једнака нули детерминанта сачинилаца у тим једначинама. Дакле.

$$3.)\quad \triangle = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & a_0 & \cdot & a_m \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & b_0 & \cdot & b_n
\end{vmatrix}$$

У овој једначини исказан је услов, који треба да је испуњен, те да једначине 1) и 2) могу заједно опстати, то ће рећи да могу имати заједничка корена. Једначина 3) зове се и *резултанта* даних једначина.

Узмимо као први пример ове две једначине:

4.) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

5.) $$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Кад помножимо прву једначину са x и 1 а другу са x^2, x и 1, добијамо ових пет једначина:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \;.\;. &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \end{aligned}$$

6.) $$\begin{aligned} \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 \;.\;.\;.\;.\;. &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \;.\;. &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Резултанта једначина 4) и 5) јесте:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Да бисмо нашли и сам заједнички корен једначина 4) и 5), написаћемо другу, четврту и пету једначину под 6) овако:

$$\begin{aligned} (ax + b)\,x^2 + cx + d &= 0 \\ (\alpha x + \beta)\,x^2 + \gamma x \;. \quad &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Ове три једначине са две непознате x^2 и x могу заједно опстати само тако, ако је:

$$\begin{vmatrix} (ax + b) & c & d \\ (\alpha x + \beta) & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Ако ову детерминанту разложимо на два сабирка, добићемо:

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d \\ \beta & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

одакле се вредност непознате x лако налази.

Узмимо као други пример ове две једначине, обе истог степена:

7.) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

8.) $$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Одавде добијамо на горепоменути начин овај низ једначина:

$$
\begin{aligned}
ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 \; . \; . \; . \; . \; . &= 0 \\
ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \; . \quad &= 0 \\
ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\
\text{9.)} \qquad & \\
\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 \; . \; . \; . \quad . &= 0 \\
\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x \quad . &= 0 \\
\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta &= 0
\end{aligned}
$$

Дакле је резултанта даних једначина:

$$
\text{10.)} \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0
$$

Овој детерминанти можемо дати простији облик радећи на начин, који долази.

Узмимо детерминанту:

$$
\text{11.)} \qquad \triangle_1 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & -d & 0 & 0 & -1 \\ -c & -d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -d & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

Ова детерминанта на основу № 180 може се написати и овако:

$$
\triangle_1 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

Пошто је прва детерминанта десно $= -\delta^3$ а друга једнака $+1$, то је:

$$
\triangle_1 = -\delta^3.
$$

Ако сад узимајући овај образац на ум помножимо једначине 10) и 11), добићемо: ([illegible]

$$
-\delta^3 \triangle = \begin{vmatrix} (a\beta-\alpha b) & (a\gamma-\alpha c) & (a\delta-\alpha d), & 0 & 0 & -\alpha \\ (a\gamma-\alpha c), & (a\delta-\alpha d)+(b\gamma-\beta c), & (b\delta-\beta d), & 0 & -\alpha & -\beta \\ (a\delta-\alpha d) & (b\delta-\beta d) & (cd-\gamma d), & 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & -\gamma & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

На основу № 180 добијамо одавде:

$$-\delta^3\triangle = \begin{vmatrix} (a\beta) & (a\gamma) & (a\delta) \\ (a\gamma), & (a\delta)+(b\gamma), & (b\delta) \\ (a\delta) & (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -\beta & -\gamma & -\delta \\ -\gamma & -\delta & 0 \\ -\delta & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

где смо детерминанте другог реда, које се јављају као чланови у детерминанти десно од знака једнакости, означили на познати краћи начин. Пошто је сад у последњој једначини друга детерминанта десно од знака једнакости $= \delta^3$, то је онда:

$$\triangle = -\begin{vmatrix} (a\beta) & (a\gamma) & (a\delta) \\ (a\gamma), & (a\delta)+(b\gamma), & (b\delta) \\ (a\delta) & (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix}$$

Ако је дакле ова детерминанта једнака нули, онда ће једначине 7) и 8) имати заједничка корена. Претпостављајући сад да то стоји, наћићемо вредност за x из једначина 10) овако:

$$(ax+b)\,x^3 + cx^2 + dx \dots = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$(\alpha x+\beta)\,x^3 + \gamma x^2 + \delta x \dots = 0$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Ове четири једначине са три непознате x^3, x^2 и x могу заједно опстати само тако, ако је:

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} (ax+b) & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ (\alpha x+\beta) & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

Разлажући десну детерм[illegible] лазимо:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & b & c & d \\ \alpha & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}}_{\triangle_3} x + \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ \beta & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}}_{\triangle_4} = 0$$

Одакле се x даје лако израчунати. Но ова једначина може се још знатно упростити на овај начин.

Означимо прву и другу детерминанту у овој једначини са $\triangle_3$ и $\triangle_4$ и помножимо их са детерминантом:

[illegible]

$$\triangle_5 = \begin{vmatrix} \gamma & \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & -1 \\ -d & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \delta^2$$

па ћемо добити прво:

$$\triangle_3\triangle_5 = \begin{vmatrix} (a\gamma-\alpha c) & (a\delta-\alpha d) & 0 & -\alpha \\ (b\delta--\beta d) & (c\delta-\gamma d) & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \end{vmatrix}$$

и друго:

$$\triangle_4 = \begin{vmatrix} (a\delta-\alpha d)+(b\gamma-\beta c), & (b\delta-\beta d), & -\alpha & -\beta \\ (b\delta-\beta d) & (c\delta-\gamma d) & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \end{vmatrix}.$$

Из ових двеју једначина добијамо на основу № 180:

$$\triangle_3\triangle_5 = \begin{vmatrix} (a\gamma) & (a\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\gamma & -\delta \\ -\delta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_4\triangle_5 = \begin{vmatrix} (a\delta)+(b\gamma), & (b\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma & -\delta \\ -\delta & 0 \end{vmatrix}$$

Пошто је у обема овим једначинама друга детерминанта десно од знака једнакости $= -\delta^2$ а $\triangle_5 = \delta^2$, то је онда:

$$\triangle_3 = -\begin{vmatrix} (a\gamma) & (a\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix}$$

$$\triangle_4 = \begin{vmatrix} (a\delta)+(b\gamma) & (b\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix}$$

Ако најзад помножимо $\triangle_2$ и $\triangle_3$ и сведемо, наћићемо најзад:

$$\begin{vmatrix} (a\gamma).x+(a\delta)+(b\gamma), & (a\delta).x+(b\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} = 0$$

одакле се x може такође врло лако наћи.

ДОДАТак

Неколико речи о изводима [illegible] редова

190. Ако је $f(x)$ буди каква функција од x и пустимо, да x прирасте за δ, онда разлика

$$f(x+\delta)-f(x)$$

представља приращтај функције т. ј. оно, за колико се вредност функције $f(x)$ променила, кад је x прирасло за δ. Приращтај x-а може бити положан или одречан а тако исто и приращтај функције $f(x)$.

Израз:

$$lim \left\{\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\right\} \quad \text{за } \delta = 0.$$

то ће рећи граница, којој при бесконачном умаљавању од δ тежи количник између приращтаја функције $f(x)$ и приращтаја δ променљиве x, зове се *први извод* функције $f(x)$, и означава се, пошто је он у опште опет извесна функција x-а, са $f'(x)$.

Ако је $f(z)$ функција уображене промењиве

$$z = re^{\phi i},$$

онда израз:

$$\lim \left\{ \frac{f(z + \varepsilon . e^{\varphi i}) - f(z)}{\varepsilon . e^{\varphi i}} \right\} \quad \text{за } \varepsilon = 0$$

где ε значи бесконачно мали прираштај z-ог модула узет у произвољном правцу φ, зове се *први извод* функције [illegible] У инфинитезималном рачуну доказује се, да је тај [illegible] ε и φ. И пошто је он уопште [illegible] са $f'(z)$.

[illegible] је

$$f'(x) = \lim \left\{ \frac{(x + \delta)^m - x^m}{\delta} \right\} = x^{m-1} \lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^m - 1}{\frac{\delta}{x}} \right\}$$

Или пошто је по обрасцу 11) у № 26:

$$\lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^m - 1}{\frac{\delta}{x}} \right\} = m,$$

то је најзад:

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

2°. Ако је $f(x) = (1 + x)^m$, онда на сличан начин налазимо, да је:

$$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}.$$

3°. Ако је $f(x) = \sin mx$, онда је:

$$f'(x) = \lim \left\{ \frac{\sin m(x + \delta) - \sin mx}{\delta} \right\}$$

$$= \lim \left\{ \frac{2 \cos m\left(x + \frac{1}{2}\delta\right) \sin \frac{1}{2} m\delta}{\delta} \right\}$$

$$= m \lim \left\{ \cos m \left(x + \delta\right) \right\}$$

или најзад:

$$f'(x) = m \cos mx.$$

За $f(x) = \sin x$ јесте $f'(x) = \cos x$.

4°. Ако је $f(x) = \cos mx$, онда на сличан начин као мало час налазимо да је:

$$f'(x) = -m \sin mx.$$

За $f(x) = \cos x$ јесте $f'(x) = -\sin x$.

5°. Ако је $f(x) = a^x$, онда је:

$$f'(x) = \lim \left\{ \frac{a^{x+\delta} - a^x}{\delta} \right\} = a^x \lim \left\{ \frac{a^\delta - 1}{\delta} \right\}$$

Но како је по обрасцу 9) у № 26

$$lim \left\{ \frac{a^\delta - 1}{\delta} \right\} = la$$

то је најзад:

$$f'(x) = a^x \, la.$$

За $f(x) = e^x$ јесте $f'(x) = e^x$.

6°. Ако је $f(x) = log\, x$ онда је:

$$f'(x) = lim \left\{ \frac{log\,(x+\delta) - log\, x}{\delta} \right\}$$

[illegible]

$$= \frac{1}{x} \, lim \, \frac{log\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)}{\frac{\delta}{x}}$$

Али је

$$lim \, \frac{log\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)}{\frac{\delta}{x}} = log\, e$$

Дакле је напослетку:

$$f'(x) = \frac{log\, e}{x}$$

или ако је a основа логаритамске системе:

$$f'(x) = \frac{1}{x\, la}.$$

За $f(x) = lx$ јесте $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Бесконачни ред и његови узастопни изводи.

191. Првим изводом једног задатог бесконачног реда зове се бесконачни ред, где је сваки члан први извод одговарајућем члану задатога реда. Другим изводом задатога реда зове се први извод његовог првог извода. Трећим изводом задатога реда зове се први извод његовог другог извода и т. д.

Узмимо нека је

$$z = x + yi =$$ [illegible]

уображена променљива [illegible]

1.) $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \quad +$ [illegible]

бесконачни ред уређен по растућим целим и положним степенима z-а. Узимајући сад да је:

$$R = lim\, mod \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) \text{ за } n = \infty$$

ред 1) биће збирљив, ако је:

2.) $$R > r \geqq 0.$$

Поље оних вредности z-а, за које је ред 1) збирљив, јесте дакле унутрашњост круга, који је са полупречником R из почетка као средишта описан.

Бесконачни ред, који је k-ти извод задатом реду 1) нека је:

3.) $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \; \ldots + \alpha_{k-1} + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \ldots$

Сви чланови овог реда до $(k-1)$-ог закључно јесу равни нули, а за

$$m \geqq k$$

јесте:

$$\alpha_m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\,a_m\,z^{m-k}.$$

Поље збирљивости k-ог извода 3) одређено је условом:

[illegible] $\left\{\frac{n-k+1}{n+1}\,mod\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right\} > r \geqq 0$ за $n = \infty$.

[illegible] дотле је:

$$lim\left\{\frac{n-k+1}{n+1}\,mod\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right\} =$$

$$= lim\left\{\left(1-\frac{k}{n+1}\right)mod\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right\} = R.$$

Дакле услов збирљивости под 4) истоветан је са оним под 2). И тако имамо теорему:

Кад је задати ред уређен по растућим целим и положним степенима z-а, онда је за сваку вредност z-а, која је у унутрашњости његовог круга збирљивости, збирљив и k-ти извод тога реда, па било k ма колико велико али само коначно.

Да ли су пак задати ред и његов k-ти извод збирљиви и на периферији круга збирљивости, то зависи од редова модула, који им одговарају, за $r = R$. Ако је задати ред збирљив на периферији круга збирљивости, то

онда не мора то исто бити случај и са његовим узастопним изводима. Збирљивост свакога извода мора се посебице испитати.

Пример.

Ред:

$$z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3!} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \cdot\ \ldots$$

збирљив је у унутрашњости и на [illegible] је са полупречником $R = 1$ из [illegible] сан. Узастопни изводи [illegible] трашњости тога круга.

192 Узмимо сад, [illegible]

$$5.)\qquad a_0 + a_1 z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \frac{a_3}{3!}z^3 + \cdots$$

Услов збирљивости овога реда јесте:

$$6.)\qquad R > r \geqq 0,$$

где је:

$$R = lim\left\{(n+1)\,mod\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right\} \text{ за } n = \infty$$

Ред 3) у № 191 можемо узети, да је k-ти извод и овога реда 5). За $m < k$ јесте $\alpha_m = 0$, а за $m \geqq k$ јесте:

$$\alpha_m = \frac{a_m}{(m-k)!}\,z^{m-k}$$

Услов збирљивости за k-ти извод задатога реда јесте:

$$7)\quad lim \left\{ (n-k+1)\, mod \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) \right\} > r > 0 \quad \text{за } n = \infty$$

и он је истоветан са оним под 6) донде, докле је k коначно.

Ако све чланове k-ог извода реда 5) поделимо са [illegible] добићемо ред:

$$[illegible] + \frac{a_{k+2} : a_{k+1}}{2\,!} z^2 + \ldots .$$

[illegible] реда јесте онај под 7). [illegible] чно али тако, да колич- [illegible] k и n расту бесконачно.

$$lim\,(n-k+1) = lim\,(n+1) . lim \left(1 - \frac{k}{n+1} \right)$$

и пошто је:

$$lim \frac{k}{n+1} = 0$$

за $n = \infty$ и онда, кад и k расти бесконачно, то је јасно да је ред 8) збирљив за $k = \infty$ у унутрашњости круга збирљивости реда 5.) И тако сад имамо теорему:

Кад k-ти извод реда:

$$a_0 + a_1 z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \frac{a_3}{3!} z^3 + \ldots .$$

поделимо са првим чланом истога — извода —, онда је нови ред збирљив у унутрашњости круга збирљивости првобитног реда чак и за $k = \infty$.

Збир првог извода једног бесконачног реда.

193. Узмимо најпре један коначан ред и означимо његов збир са $f(z)$

$$1.)\quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

Одавде добијамо:

$$2.)\quad \frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = a_1 + a_2 \frac{(z+\delta)^2 - z^2}{\delta} [illegible]$$

Пошто је:

$$lim \frac{(z+\delta)^k - [illegible]}{\delta} [illegible]$$

то можемо ставити:

$$\frac{(z+\delta)^k - z^k}{\delta} = kz^{k-1} + \varepsilon_k$$

где је $lim\, \varepsilon_k = 0$ за $\delta = 0$. И једначина 2) онда изгледа овако:

$$3.)\quad \frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$$
$$+ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots . + \varepsilon_n .$$

Када δ тежи нули, онда је:

$$lim\,(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n) = 0,$$

јер је број сабирака коначан а међутим сваки од њих тежи нули. Дакле је:

$$4.)\quad f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1},$$

то ће рећи:

Збир бесконачног реда, који је први извод задатом коначном реду 1) једнак је првом изводу збира задатога реда.

После овог на неки начин увода у саму ствар узмимо, као задат, ред 1) у № 191, при чему се ограничавамо само на такве вредности z-а, за које је услов исказан под 2) у № 191 испуњен. За такве вредности z-а збирљиви су и ред 1) и његов први извод.

[illegible]

$$[illegible]\; z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

[illegible]

$$[illegible]\;\delta \;= a_1 [(z+\delta) - z] : \delta$$

$$+ a_2 [(z+\delta)^2 - z^2] : \delta$$

$$+ a_3 [(z+\delta)^3 - z^3] : \delta$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

По биномном обрасцу, који је изведен за целе и положне изложиоце добијамо одавде:

$$7.)\quad \frac{\varphi(z+\delta) - \varphi(z)}{\delta} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \ldots .$$

$$+ \delta \left\{ a_2 + \frac{3.2}{1.2} a_3 z + \frac{4.3}{1.2} a_4 z^2 + \;.\;. \right.$$

$$+ \delta^2 \left\{ a_3 + \frac{4.3.2}{1.2\;3} a_4 z + \ldots . \right.$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.$$

Докле збирљивост десног двојног реда није доказана, дотле на десној страни смемо сабирати само по стубовима и тако добивене збирове сматрати као чланове једног простог реда. На тај начин изаћиће на видик опет горњи ред 6.) У осталом збирљивост двојног реда, који је на десној страни, може се лако доказати.

Ако је:

$$mod\; a_n = b_n \quad \text{и} \quad mod\; \delta = \varrho,$$

онда двојни ред, који одговара оном под 7) јесте:

$$b_1 + 2b_2 r + 3b_3 r^2 + 4b_4 r^3 + \ldots$$

$$8.)\qquad + \varrho \left\{ b_2 + \frac{3\;2}{1.2} b_2 + \frac{4.3}{1.2} b_4 r^2 + \ldots . . \right.$$

$$+ \varrho^2 \left\{ b_3 + \frac{4.3.2}{1.2.3} b_4 r + \ldots . . \right.$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Ако овде сабирамо по стубовима и тако добивене збирове сматрамо као чланове простога реда, добићемо:

$$9.)\quad \frac{b_1 [(r+\varrho) - r]}{\varrho} + \frac{b_2 [(r+\varrho)^2 - r^2]}{\varrho} + \frac{b_3 [(r+\varrho)^3 - r^3]}{\varrho} + ,\ldots$$

Ако означимо са $\phi(r)$ збир реда:

$$10.)\qquad b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \ldots .$$

онда је збир реда 9) очевидно:

$$\frac{\phi(r+\varrho) - \phi(r)}{\varrho}$$

Пошто смо претпоставили, да стоји услов 2) у № 191, услед чега је ред 10) збирљив, то је онда на целом пољу збирљивости реда 1) у № 191 збир реда 9) коначан број. Али је тада по првој теореми у № 73 двојни ред 8) збирљив а по № 128 збирљив је тада и двојни ред на десној страни једначине 7). Но онда је допуштено сабити чланове тога двојног реда и по врстама и тако до- не збирове сматрати као чланове једног простог реда. радећи добијамо:

$$11.)\quad \frac{\varphi(z+\delta)-\varphi(z)}{\delta} = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + \ldots . + \delta\psi(z).$$

Овде је $\psi(z)$ функција, која је коначна на целом пољу збирљивости. Ако сад претпоставимо у 11) да δ тежи нули, добићемо:

$$12.)\quad \varphi'(z) + a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + \ldots .$$

Дакле имамо теорему:

У унутрашњости круга збирљивости бесконачног реда:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

који је уређен по растућим целим и положним степенима z-а, збир првог извода тога реда једнак је првом изводу збира истога реда.

* * *

АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

написао

ДИМИТРИЈЕ НЕШИЋ

ПРОФЕСОР МАТЕМАТИКЕ НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ.

КЊИГА ДРУГА.

ТЕОРИЈА ВИШИХ ЈЕДНАЧИНА, АРИТМЕТИЧНИХ РЕДОВА, РАЗЛАГАЊА
РАЗЛОМЉЕНИХ ФУНКЦИЈА И РАЗЛИКА ФУНКЦИЈА.

БЕОГРАД
ШТАМПАНО У КРАЉЕВСКО-СРПСКОЈ ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1883.

НАПОМЕНА.

Овај спис, који предајем јавности, обухвата теорију алгебарских и трансцендентних једначина, теорију аритметичних редова с интерполацијом, теорију разлагања разломљених функција на простије разломке и најзад теорију разлика функција. Исти спис заједно са оним, који је пре пола године угледао света, чини засебну целину под именом алгебарске анализе. То име служи као обележје оног дела анализе, у коме се питања и задатци претресају и решавају без помоћи инфинитезималних метода.

Теорија једначина, која је један од најважнијих а у исти мах и најинтереснијих делова математике, разрађена је у опширности, коју она потпуно заслужује, и ја мислим, да та опширност не може никако бити од штете, кад се као овде хоће читаоцу да изнесу не само резултати, до којих је дух човечији у току векова трудно дошао, него да му се још и *јасно* обележе путови, којима се до њих и најзгодније и најлакше може доћи. Остале горе поменуте теорије изложене су такође у довољној опширности и надам се онако, како доликује заводу, у коме се предају.

Што се тиче тога, шта је и колико је од поменутих теорија ушло у оквир овога списа, мислим да ће бити најбоље, ако упутим читаоца на садржај или на сам спис. Нека ми је само допуштено свратити његову пажњу на изванредно елегантне методе, помоћу којих се у облику детерминаната добијају различни обрасци у №-ма 35—40 и проналазе услови различности и једнакости корена, на теорију Штурмових функција, Штурмових верижних разломака, Силвестрових функција, на различне методе избацивања (елиминације) помоћу детерминаната и т. д.

При писању овог дела главна ми је брига била, да будем што јаснији, имајући вазда на уму то, да како при предавању науке, тако исто и при писању исте треба гледати на ствар што је могуће више очима почетника. Јер оно, што се писцу чини да је са свим јасно, може врло често и врло лако почетнику бити са свим тамно. Но међу тим не треба никако испустити из вида то, да се код списа овакве врсте и при најбољој вољи не може, са стране јасноће и разумљивости, достићи онај ступањ, који се достиже код других списа лакше врсте.

Ја знам да би, кад би се то само увек могло, најбољи начин излагања, начин који наш дух при изучавању математике као и сваке друге науке може потпунце задовољити, био онај, којим се са свим понајлак и поступно долази до општих истина и закона, и по коме радећи чини нам се, као да ми сами истопрв стварамо науку. И знам да би тек тада учење, праћено неизбежном радозналошћу, постало уживање у правом смислу, уживање благородно јер чисто духовно.

Али такав начин излагања не гледајући на многе друге тешкоће, које му стоје на путу, а које долазе од природе самог предмета, био би овде преко сваке мере спор и дуг, то је једно. Друго млади умови, који су савладали ниже делове математике, већ су толико спремљени а и на апстракције навикнути, да могу без великих тешкоћа корачати и бржим и пречим путем. А на послетку мислим, да и то има извесне дражи за наш нестрпљиви и немирни дух винути се у један мах на висину, са које се и цело поље и поједини делови његови могу лако прегледати. Има извесне дражи добити од један пут опште обрасце, који вам, као оно Питија са свога троношца, одговарају на сва ваша питања, па вам шта више још износе, и на њих одговарају, и таква питања, о којима ви можда никад ни сањали нисте; који ваше непотпуне претпоставке допуњују а погрешне мирно исправљају; који најзад са своје висине сипају јасну светлост на поједине делове теорије и показују вам везу, којом су они међу собом везани. Аналитична метода, која у математици превлађује, јесте она, која наше математичне радове заодева чаробном одећом, којој се ми толико дивимо, која при трудним истраживањима руководи наш дух, буди и снажи нашу уобразиљу и уздиже нашу мисао летом по каткад и до не догледних висина. Докле ослањајући се на друге методе по каткад лутате, докле се радећи по њима можете и са свим изгубити у појединостима, дотле вас аналитична метода одмах у почетку и поузданом руком упућује правој мети, до које вам ваља стићи.

Ја желим, да мој рад буде од користи онима, који се њиме буду служили. То је поред унутрашњег задовољства, које у нами порађа свест о испуњеној дужности, још најлепша награда у овоме — свету.

Већ скоро при крају молим читаоце, да буду добри исправити погрешке, које су на крају дела прибележене. Много их нема, највише их је у првих 20 табака, који су за време мога бављења на страни исправљани. Позиви на алгебарску анализу у овој књизи тичу се првог дела њеног, који је летос наштампан.

Писци, којима сам се при овоме раду помагао, јесу: Briot, Bertrand, Serret, Laurent, Léfebure de Fourçy, Montferrier, Navier, Bourdon, Schlömilch, Herr, Hattendorf, Burg и т. д.

Завршујући сматрам за своју најпријатнију дужност искрено благодарити Господину Стеви Рајичевићу управнику краљевско-српске државне штампарије, што се и сада као и увек до сада свесрдно постарао, те да и спољни облик књиге испадне што лепши.

31 Декембра 1883
у Београду.

Димитрије Нешић,
ПРОФЕСОР МАТЕМАТИКЕ У ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ.

Садржај.

ПРВИ ДЕО.

Теорија алгебарских једначина.

А. Једначине са једном непознатом.

I. Општа својства алгебарских једначина.

II. Преображавање једначина.

XIV. Тражење ирационалних корена.

XV. Методе за приближно израчунавање ирационалних корена.

В. Једначина са две и више непознатих.

С. Cauchy-јева теорема о раздвајању уображених корена.

ДРУГИ ДЕО.

Различни, збирни и аритметични редови. Интерполација.

I. Различни редови.

II. Аритметични редови.

III. Интерполација — уметање редова

ПРВИ ДЕО.

ТЕОРИЈА АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА.

А. Једначине са једном непознатом.

1. Кад је задата буди каква функција x-а $f(x)$, онда је врло лако наћи вредност њену, која одговара ма каквој вредности x-а. Зарад тога треба само заменити x у $f(x)$ његовом вредношћу, при чему ће често бити нужно или корисно, да се $f(x)$ развије у бесконачни ред.

Међу тим много је тежи обрнути задатак, т. ј. наћи вредност, или ако их је више, наћи вредности за x, које поништавају $f(x)$, то ће рећи, за које она добија вредности нули једнаке или најзад још друкче, које задовољавају једначину:

$$1.) \qquad f(x) = 0.$$

Ако се тражи вредност x-а, за коју $f(x)$ добија вредност $= a$, онда се тај задатак своди очевидно на онај, где се тражи вредност x-а, која поништава:

$$2.) \qquad \varphi(x) = f(x) - a.$$

Једначином 1) потпуно је одређена вредност x-а, која поништава $f(x)$, и такву вредност x-а наћи зове се *разрешити* једначину 1). Вредно је напоменути, да x у једначини 1) *губи карактер променљиве количине*, и јавља се као *непозната*.

Према томе, да ли је функција $f(x)$ алгебарска или трансцендентна, зове се и једначина 1) *алгебарска* или *трансцендентна*. У даљем току рада ми ћемо се бавити поглавито са теоријом алгебарских једначина, која је теорија један од најважнијих делова целе анализе.

Онако разрађене теорије трансцендентних једначина, као што је теорија алгебарских једначина, немамо. То се даје лако објаснити самом природом трансцендентних функција, као и бесконачном различношћу истих. Међу тим има појединих метода за разрешавање таквих једначина, које ћемо на своме месту изложити.

I. Општа својства алгебарских једначина.

2. Свака алгебарска једначина са једном непознатом x може се довести најзад на овакав облик:

$$1.)\qquad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Зарад тога треба само задату једначину ослободити разломака, у којих се имениоцу и корених израза, у којима се под кореним знаком налази непозната x.

Кад је једначина под 1) представљена у облику 1), она се зове *уређеном*. Изложилац m највишег степена од x јесте *цео* и *положан* број, он одређује степен једначине. Количине

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_{m-1},\ a_m,$$

које од непознате x не зависе, зову се *сачиниоци* једначине. Они могу бити ма какви стварни или уображени бројеви. Кад су сачиниоци особени бројеви, једначина се зове *бројном*.

Полином лево од знака једнакости у једначини 1) зове се *полином једначине*. Ми ћемо га у будуће краткоће ради означавати са $f(x)$ или са X. У потпуној једначини m-га степена може бити највише $(m+1)$ чланова. Ако неких чланова у једначини нема, то ће рећи, ако су неки од сачинилаца њених $= 0$, она се зове *непотпуном*.

Свака вредност x-а, која поништава полином једначине, дакле која задовољава задату једначину, зове се *корен* једначине. Разрешити задану једначину значи изнаћи јој корене. Разрешавање једначина оснива се на извесним својствима истих; али пре него што пређемо на излагање истих својстава, ми ћемо доказати, да свака једначина мора имати барем један корен, и ако то не би било потребно, јер смо већ у алгебарској анализи № 166 доказали, да свака једначина m-га степена мора имати m корена, ни више ни мање.

Примедба. Ако ставимо $y = f(x)$, онда је то једначина једне криве линије. Апсцисе тачака, у којима та линија сече апсцисну осу, јесу линеарни представници корена једначине $f(x) = 0$.

3. *Свака једначина m-ог степена мора имати бар један корен облика $p + qi$, где су p и q стварни бројеви и где q и нула може бити.*

Узмимо нека је задата једначина:

$$1.)\qquad f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Кад у полиному $f(x)$ заменимо x са $p + qi$, где су p и q неодређене стварне количине, добијамо:

$$2.)\quad f(p+qi) = (p+qi)^m + a_1(p+qi)^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(p+qi) + a_m$$

Ако сад десно по биномном обрасцу развијемо, добићемо:

$$3.)\qquad f(p+qi) = P + Qi,$$

где су P и Q стварне функције од p и q. Ако означимо са R модуо уображеног израза

$$P + Qi$$

онда је:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

такође стварна функција од p и q. Ако сад количинама p и q дамо све могуће вредности од $-\infty$ до $+\infty$ и те вредности комбинишемо све по две и две на све могуће начине, онда ће и модуо R добити бесконачно много различних вредности, од којих једна, пошто се модуо R узима увек положан, мора нужно бити најмања. Ако су p_0 и q_0 оне вредности за p и q, за које модуо R добија своју најмању вредност R_0, онда је:

$$4.)\qquad f(p_0+q_0i) = P_0 + Q_0i \quad \text{и}$$

$$5.)\qquad R_0 = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2}$$

Ми сада тврдимо, да је *најмањи модуо* $R_0 = 0$.

Ово што тврдимо биће доказано, ако докажемо, да је неумесна и не може вредити претпоставка, да је најмањи модуо R_0 од нуле различан, јер ћемо тада увек моћи за x наћи вредност $p_0 + q_0i + z$, где је z тако да је вредност модула R, која одговара тој вредности x-а, мања од R_0.

Нека је дакле модуо R_0, па дакле услед тога и израз

$$P_0 + Q_0i$$

од нуле различан. Ако у функцији $f(x)$ ставимо

$$x = p_0 + q_0i + z,$$

где је z у опште облика $\alpha + \beta i$, добићемо

$$f(p_0+q_0i+z) = (p_0+q_0i+z)^m + a_1(p_0+q_0i+z)^{m-1} + \dots$$
$$\dots + a_{m-1}(p_0+q_0i+z) + a_m,$$

или кад десно од знака једнакости назначене радње свршимо и по растућим степенима z-а уредимо:

$$6.)\qquad f(p_0+q_0i+z) = u_0 + u_1z + u_2z^2 + \dots$$
$$\dots + u_{m-1}z^{m-1} + z^m.$$

Одавде за $z = 0$ следује:

$$f(p_0+q_0i) = u_0$$

или услед једначине под 4):

$$u_0 = P_0 + Q_0i.$$

Остали сачиниоци у 6):

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots\ u_{m-2},\ u_{m-1}$$

зависе такође од p_0, q_0 и сачинилаца једначине 1) и јесу облика $\mu + \nu i$. Ми ћемо вредности тих сачинилаца у 6) означити са

$$P_1 + Q_1i,\ P_2 + Q_2i, \dots$$

и тада једначина 6) изгледа овако:

$$7.)\quad f(p_0+q_0i)=P_0+Q_0i+(P_1+Q_1i)z+(P_2+Q_2i)z^2+\;.\;.\;.\;.+z^m.$$

Одавде следује:

$$8.)\quad f(p_0+q_0i)=(P_0+Q_0i)\left[1+\frac{P_1+Q_1i}{P_0+Q_0i}z+\frac{P_2+Q_2i}{P_0+Q_0i}z^2+\dots+\frac{z^m}{P_0+Q_0i}\right]$$

Ако означимо са R' модуо израза на десној страни ове једначине а са ρ модуо израза:

$$9.)\quad \left[1+\frac{P_1+Q_1i}{P_0+Q_0i}z+\frac{P_2+Q_2i}{P_0+Q_0i}z^2+\dots\dots+\frac{z^m}{P_0+Q_0i}\right]$$

онда пошто је R_0 модуо израза

$$P_0+Q_0i$$

следује:

$$10.)\quad R'=R_0\cdot\rho$$

Пошто је z са свим произвољно, то га одредимо из једначине

$$\frac{P_1+Q_1i}{P_0+Q_0i}z=-\varepsilon$$

Из ње следује:

$$z=-\varepsilon\frac{P_0+Q_0i}{P_1+Q_1i},$$

где је ε мала, положна и стварна количина. Ако сад у 9) заменимо z са овом вредношћу, онда израз под 9), коме је ρ модуо, јавља се у облику

$$1-\varepsilon+\varepsilon^2k+\varepsilon^3k_1+\varepsilon^4k_2+\dots+\varepsilon^mk_{m-2}$$

Поједини сачиниоци k у овом изразу јесу облика $\alpha+\beta i$, у осталом до њиних вредности није нам стало. Ако су сад

$$\nu,\;\nu_1,\;\nu_2,\;\nu_3,\;.\;.\;.\;.\;\nu_{m-2}$$

модули сачинилаца k, онда су:

$$1-\varepsilon,\;\varepsilon^2\nu,\;\varepsilon^3\nu_1,\;\varepsilon^4\nu_2\;.\;.\;.\;.\;\varepsilon^m\nu_{m-2}$$

модули количина

$$1-\varepsilon,\;\varepsilon^2k,\;\varepsilon^3k_1,\;\varepsilon^4k_2,\;.\;.\;.\;.\;\varepsilon^mk_{m-2}$$

Пошто је сад модуо збира више количина мањи од збира њиних модула, то је:

$$\rho<1-\varepsilon+\varepsilon^2\nu+\varepsilon^3\nu_1+\varepsilon^4\nu_2+\;.\;.\;.\;.+\varepsilon^m\nu_{m-2},$$

или:

$$11.)\quad \rho<1-(\varepsilon-\varepsilon^2\nu-\varepsilon^3\nu_1-\varepsilon^4\nu_2-\dots-\varepsilon^m\nu_{m-2})$$

Али се ε може узети тако мало (алгебарска анализа № 24), да је

$$\varepsilon>\varepsilon^2\nu+\varepsilon^3\nu_1+\varepsilon^4\nu_2+\;.\;.\;.\;.+\varepsilon^m\nu_{m-2}.$$

Но тада је израз:

$$\varepsilon - \varepsilon^2 \nu - \varepsilon^3 \nu_1 - \varepsilon^4 \nu_2 - \; . \; . \; . \; . \; - \varepsilon^m \nu_{m-2}$$

положан и за то услед 11):

$$\rho < 1.$$

и онда услед обрасца 10) и

$$R' < R_0,$$

R' јесте модуо вредности, коју полином $f(x)$ добија кад у њему ставимо

$$x = p_0 + q_0 i + z.$$

Ми смо дакле доказали, да се, ако најмањи модуо R_0 није једнак нули, може за z увек наћи таква вредност, да је:

$$R' < R_0.$$

Али тада R_0 није најмањи модуо, као што смо претпоставили. Претпоставка, да је најмањи модуо R_0 од нуле различан, јесте дакле лажна; тај најмањи модуо мора бити дакле једнак нули.

Пошто је $R_0 = 0$, онда на основу једначине 5) морају и P_0 и Q_0 бити једнаки 0, одакле следује:

$$P_0 + Q_0 i = 0.$$

Али је лева страна ове једначине вредност полинома $f(x)$ за

$$x = p_0 + q_0 i;$$

дакле је ова вредност x-а корен једначини 1).

Може се десити, да су $P_1 + Q_1 i$, као и још неколико од следећих сачинилаца у једначини 7) једнаки нули. Ако узмемо на ум, да сви сачиниоци у 7) не могу бити једнаки 0, јер би тада

$$f(p_0 + q_0 i + z)$$

било једнако сталној количини

$$P_0 + Q_0 i$$

дакле би, услед неодређености z-а, полином $f(x)$ за сваку вредност x-а имао исту вредност, што не може бити, то онда нека је:

$$\frac{P_n + Q_n i}{P_0 + Q_0 i} z^n$$

први од чланова једначине 9), који није $= 0$. Ставимо сад,

$$\frac{P_n + Q_n i}{P_0 + Q_0 i} z^n = -\varepsilon^n$$

одакле:

$$z = \varepsilon \sqrt[n]{-\frac{P_0 + Q_0 i}{P_n + Q_n i}}$$

где је опет ε једна мала, стварна и положна количина. Ако сад заменимо у изразу под 9) z овом вредношћу, тај ће се израз јавити у облику;

$$1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} k_{n+1} + \varepsilon^{n+2} k_{n+2} + \ldots + \varepsilon^m k_m.$$

Ако као и горе означимо са ρ модуо овог збира, а са ν_{n+1}, ν_{n+2} . . . ν_m модуле сачинилаца:

$$k_{n+1},\ k_{n+2},\ k_{n+3}\ .\ .\ .\ .\ k_m,$$

наћићемо да је:

$$\varrho < 1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}\nu_{n+1} + \varepsilon^{n+2}\nu_{n+2} + \ldots + \varepsilon^m\nu_m,$$

где се опет ε може узети тако мало, да је $\varrho < 1$. Дакле се и сада може z изабрати тако мало, да је $R' < R_0$ и с тога остају у снази сви горњи закључци.

4. Из онога што је доказано у № 95 алгебарске анализе следује већ: *да је полином $f(x)$ задате једначине дељив без остатка сваким кореним чиниоцем једначине*, ако под кореним чиниоцем разумемо разлику између непознате x и ма којег корена једначине. Но ми ћемо то овде доказати на још један начин.

Узмимо нека је α један корен једначине:

$$1.)\quad fx) = x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

и замислимо, да је количник, који се добија, кад се полином $f(x)$ подели кореним чиниоцем $(x-\alpha)$:

$$f_1(x) = x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ldots + b_{m-2}x + b_{m-1},$$

јер тај количник мора бити $(m-1)$-ог степена. Ако је R остатак при тој деоби, онда се у том остатку не може налазити x, пошто је делилац $(x-\alpha)$ првог степена. Дакле вреди за сваку вредност x-а једначина:

$$f(x) = (x-\alpha)\,f_1(x) + R,$$

а одавде за $x = \alpha$ следује:

$$f(\alpha) = R;$$

али како је α корен једначине 1), то је:

$$2.)\qquad f(\alpha) = R = 0,$$

дакле је $R = 0$ и за то је функција $f(x)$ дељива без остатка кореним чиниоцем $(x-\alpha)$.

Из једначине 2) видимо, да остатак деобе у оном случају, кад α није корен једначине, није ништа друго, до вредност, коју полином једначине добија за $x = \alpha$.

Ми ћемо успут да покажемо један прост начин, како се долази до количника.

Узмимо нека је полином, који се има делити са $(x-\alpha)$:

$$3.)\qquad a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m.$$

где смо, ради веће општости, узели, да је први сачинилац различан од јединице. Ако сад претпоставимо да је тражени количник:

$$b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + b_{m-2}x + b_{m-1}$$

а b_m остатак, онда вреди једначина:

$$(x-\alpha)\,[b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + b_{m-1}) + b_m =$$

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + a_m.$$

Ако лево означено множење свршимо и за тим закључимо по правилу неодређених сачинилаца, добићемо овај низ једначина:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= b_0\alpha + a_1 \\ b_2 &= b_1\alpha + a_2 \\ b_3 &= b_2\alpha + a_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ b_{m-1} &= b_{m-2}\alpha + a_{m-1} \\ b_m &= b_{m-1}\alpha + a_m . \end{aligned}$$

Као што се види први сачинилац количника једнак је првом сачиниоцу дељенога полинома а сваки доцнији сачинилац количника нпр. ν-ни добија се, кад се $(\nu-1)$-ви сачинилац количника умножи са α, и производу се дода ν-ни сачинилац дељенога полинома.

При израчунавању сачинилаца количникових ради се најбоље на овај начин:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_0, & a_1, & a_2, & a_3 & \dots\dots a_m \\ \alpha & & & & & \\ & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 & \dots\dots b_m \end{array}$$

То јест напишу се сви сачиниоци дељенога полинома редом, не изузев ни оне, који су $=0$, у једну врсту. Испод a_0 долази $b_0 = a_0$, а сваки доцнији број друге врсте добија се, кад се онај лево од њега помножи са α и томе се производу дода број прве врсте, који је над њим (Хорнеров начин делења).

Пример.

Да се подели са $x-2$ полином

$$2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2, & 0, & -3, & 2, & 4, & -1 \\ 2 & 2, & 4, & 5, & 12, & 28, & \underline{55} \end{array}$$

Количник је дакле:

$$2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 12x + 28$$

а остатак је 55.

5. У № 95 алгебарске анализе доказано је, да ако су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_m$ корени једначине:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

да се онда полином једначине може представити као производ из a_0 и m корених чинилаца, дакле овако:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_m).$$

Али истинитост те теореме, коју смо на поменутом месту алгебарске анализе доказали, увиђа се и из доказа теореме:

Да једна једначина m-ог степена са једном непознатом мора имати m корена ни више ни мање.

Узмимо н. пр. нека је дата једначина:

$$X_m = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m = 0.$$

Ова једначина на основу № 3 мора имати бар један корен. Ако је α_1 тај корен, онда полином X_m једначине мора бити дељив са $(x-\alpha_1)$ и за то је:

1.) $$X_m = X_{m-1}(x-\alpha_1)$$

где је количник X_{m-1} степена $(m-1)$-га. Ако поменути количник ставимо једнак нули, добијамо

$$X_{m-1} = 0;$$

и та једначина мора имати барем један корен; ако је α_2 тај корен, онда је полином X_{m-1} дељив са $(x-\alpha_2)$ и за то је:

$$X_{m-1} = X_{m-2}(x-\alpha_2)$$

где је количник X_{m-2} степена $(m-2)$-ог. Замењујући ово у 1), добијамо:

2.) $$X_m = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)X_{m-2};$$

ако количник X_{m-2} ставимо $= 0$ добијамо:

$$X_{m-2} = 0.$$

Ова једначина опет мора имати бар један корен. Ако је тај корен α_3, онда је полином X_{m-2} дељив са $(x-\alpha_3)$ и за то је:

$$X_{m-2} = X_{m-3}(x-\alpha_3)$$

где је количник X_{m-3} степена $(m-3)$-ег. Кад ово заменимо у 2) добијамо:

3) $$X_m = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)X_{m-3}.$$

Ако наставимо овако радити и даље, видећемо, да ће израз за X_m добијати све по једног чиниоца више облика $(x-\alpha)$, док ће међу тим степен последњег чиниоца — количника — поступно све са једном јединицом опадати. На тај начин, кад смо, радећи тако и даље добили у изразу за X_m најзад и $(m-2)$-ог чиниоца облика $(x-\alpha)$, онда је последњи чинилац X_2 другог степена, који се с тога може представити и у облику производа:

4.) $$a_0(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)$$

Дакле ћемо најзад наћи да је:

5.) $$X_m = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)$$

Одавде видимо, да је полином дате једначине $= 0$ за сваку од ових m вредности x-а:

$$x = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots\ \alpha_{m-1},\ \alpha_m;$$

дакле те вредности m на броју, јесу корени задане једначине. Сем тих m, дана једначина:

$$X_m = 0$$

не може имати више корена, јер кад би она имала нпр. α_{m+1} као $(m+1)$-ви корен, он би морао поништити X_m, а то, као што се из једначине 5) види, није могуће.

И тако смо дакле доказали, не само да једначина m-ог степена мора имати m корена ни више ни мање, него смо успут, као што то показује једначина 5), доказали још и то, *да се полином сваке једначине може представити као производ из његовог првог сачиниоца a_0 и m корених чинилаца.*

Може се десити, да се међу коренима једначине 1) налази и таквих, који су једнаки међу собом. И у таквом случају каже се, да једначина 1) има m корена и ако она у ствари има мање од *m различних* корена. Међу кореним чиниоцима у обрасцу 2) биће их онда и једнаких.

У једначини 5) исказана је следећа важна теорема, коју треба запамтити:

Свака рационална и цела алгебарска функција може се представити као производ од m простих чинилаца, тј. *таквих, који су првог степена.*

Још треба запамтити да једначина $(m-1)$-ог степена

$$6.)\qquad f_1(x)=0,$$

која постаје, кад се количник између полинома $f(x)$ задате једначине и кореног чиниоца $(x-\alpha_1)$ стави једнак нули, има за корене све остале корене $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots\ \alpha_m$ задане једначине.

Исто тако са свим је сад јасно, како се може склопити једначина, кад су нам корени њени познати.

Тако н. пр. једначина, која има за корене: -1, $+2$, и -3 јесте:

$$(x+1)(x-2)(x+3)=0$$

или:

$$x^3+2x^2-5x-6=0.$$

6. Корени једначине морају очевидно зависити од њених сачинилаца, дакле и обратно сачиниоци једначине морају зависити на извесан начин од њених корена. Ми ћемо да докажемо, да су сачиниоци једначине симетричне функције њених корена.

Ако претпоставимо, да су:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \dots\ \alpha_m$$

корени једначине:

$$1.)\qquad x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m=0$$

онда је:

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m=$$
$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_m).$$

Ако узмемо на ум образац 1) у № 83 алгебарске анализе, онда се израз десно од знака једнакости може заменити изразом:

$$x^m-s_1x^{m-1}+s_2x^{m-2}-s_3x^{m-3}+\dots+(-1)^ms_m,$$

где s_1 значи збир корена једначине 1), s_2 збир комбинација друге класе а без понављања из истих корена; s_3 збир комбинација треће класе без понављања из истих корена и т. д.; s_m збир комбинација m-не класе из истих корена, дакле производ истих. Из једначине:

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_{m-1}x+a_m=$$
$$x^m-s_1x^{m-1}+s_2x^{m-2}-\dots+(-1)^{m-1}s_{m-1}x+(-1)^ms_m,$$

која вреди за сваку вредност x-а, следује на основу правила о неодређеним сачиниоцима:

$$2.)\quad\left\{\begin{aligned}
a_1&=-s_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_m)\\
a_2&=+s_2=+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_{m-1}\alpha_m)\\
a_3&=-s_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\dots+\alpha_1\alpha_{m-1}\alpha_m+\dots)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_m&=(-1)^ms_m=(-1)^m\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{m-1}\alpha_m.
\end{aligned}\right.$$

Дакле *у свакој једначини, у којој је сачинилац првог члана јединица:*

Сачинилац другог члана јесте збир корена узет са противним знаком.

Сачинилац трећег члана јесте збир комбинација друге класе без понављања, а начињених из корена једначине.

Сачинилац четвртог члана јесте са противним знаком узет збир комбинација треће класе без понављања начињених из корена једначине и т. д.

Последњи је члан једнак производу свију корена једначине, узетом са својим или противним знаком како је кад једначина парног или непарног степена, или другим речима: једнак је производу свију са противним знаком узетих корена.

Лако је сад увидети, да кад другог члана у једначини нема, да је онда збир корена = 0 и да кад последњег члана нема, да је тада један корен једначине = 0.

7. Помоћу теореме у предњој №-и налазимо m једначина — оне под 2) — између m непознатих корена дане једначине. С тога могли бисмо на први мах помислити, да би тражење корена задане једначине било олакшано, кад бисмо једначину 1) у № 6 сменили системом једначина под 2). Али то не стоји; јер како се сви корени једначине 1) јављају у једначинама 2) на са свим исти начин, т. ј. симетрично, то онда једначина са α_1, која се из једначина 2) добија елиминацијом осталих — непознатих — корена α_2, α_3, $\alpha_4 \ldots \alpha_m$, мора бити истоветна са једначином, која се добија из истих једначина 2), кад се из ових избаце сви непознати корени сем н. пр. корена α_2. Према томе једначина са α_1 мора дати све корене задате једначине и с тога она мора бити истоветна са једначином 1) у № 6, само што свуда место x стоји α_1.

И доиста, нека су $s_1, s_2, s_3 \ldots s_{m-1}$ збирови комбинација 1-ве, 2-ге, ... $(m-1)$-ве класе без понављања, начињених из корена $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$. Онда на основу науке о комбинацијама или №-е 83 алгеб. анализе вреде једначине:

$$a_1 = - \quad \alpha_1 - s_1$$

$$a_2 = \quad s_1\alpha_1 + s_2$$

$$a_3 = - s_2\alpha_1 - s_3$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$a_{m-1} = (-1^{m-1} s_{m-2}\alpha_1 + (-1)^{m-1} s_{m-1}$$

$$a_m = (-1)^m s_{m-1} . \alpha_1 .$$

Кад помножимо прву од ових једначина са α_1^{m-1}, другу са α_1^{m-2}, трећу са α_1^{m-3}... предпоследњу са α_1, а последњу са $\alpha_1^0 = 1$ и добивене резултате саберемо, наћићемо:

$$a_1\,\alpha_1^{m-1} + a_2\,\alpha_1^{m-2} + \ \ldots\ + a_{m-1}\,\alpha_1 + a_m = -\alpha_1^m$$

а то је једначина 1), само што место непознате x стоји α_1.

Но овим што смо сазнали није казано и то, да у изузетним приликама, нпр. кад су нам сем образаца под 2) у № 6 познати и други какви односи између корена, није могуће помоћу тих односа и образаца 2) изнаћи корене задате једначине.

Тражимо н. пр. корене једначине:

$$x^3 + px + q = 0,$$

знајући, да су два корена њена једнака.

(koje [illegible])

Ако означимо са α_1 њен прост корен, а са α_2 корен који се у њој два пут јавља, онда је:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \text{ одакле } \alpha_1 = -2\alpha_2$$

Сачинилац p јесте збир комбинација друге класе без понављања, начињених из корена једначине. Дакле је:

$$p = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = -4\alpha_2^2 + \alpha_2^2 = -3\alpha_2^2;$$

одатле:

$$\alpha_2 = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

где треба узети или само горње или само доње знаке.

8. Пре но што бисмо прешли на излагање даљих својстава алгебарских једначина, имали бисмо доказати, *да је полином сваке алгебарске једначине непрекидна функција* x-а. Но то је већ доказано у №-ама 77 и 132 алгеб. анализе, јер је полином једначине цела и рационална функција x-а.

У ономе, што сада долази, није нам дакле до тога стало, да докажемо непрекидност полинома једначине, колико да дођемо до других резултата, који ће нам доцније користити.

Узмимо, нека је задата једначина;

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Кад у њој ставимо $x + h$ место x, добићемо:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^m + a_1(x+h)^{m-1} + \ldots.$$
$$\ldots + a_{m-1}(x+h) + a_m.$$

Кад по биномном обрасцу развијемо и уредимо по растућим степенима од h добићемо:

$$2.)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} +$$
$$\ldots + f^{m-1}(x)\frac{h^{m-1}}{(m-1)!} + f^m(x)\frac{h^m}{m!}$$

где смо ради краткоће ставили:

$$3.)\quad \left\{\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m\\
f'(x) &= m\,a_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + (m-2)\,a_2x^{m-3} +\\
&\qquad + \ldots + a_{m-1}\\
f''(x) &= m(m-1)\,a_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)\,a_1x^{m-3} +\\
&\qquad (m-2)(m-3)\,a_2x^{m-4} + \ldots + a_{m-2}\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)\,a_0x^{m-3} +\\
&\qquad + (m-1)(m-2)(m-3)\,a_1x^{m-4} + \ldots + a_{m-3}\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
f^{m-1}(x) &= m(m-1)(m-2)\ldots4.3.2.a_0x + (m-1)(m-2)\\
&\qquad \ldots 4.3.2.1.a_1
\end{aligned}\right.$$

$$f^m(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots4.3.2.1.a_0.$$

Помоћу једначине 2) лако је доказати, да при ма којој коначној вредности x-а разлике:

$$f(x+h) - f(x),\ f(x) - f(x-h)$$

теже 0, кад h тежи нули, да је дакле полином $f(x)$ непрекидна функција x-а између граница $x = -\infty$ и $x = +\infty$.

Ако тражимо по упуствима №-е 190 алгеб. анализе први извод задатога полинома, па онда први извод тога извода и т. д. наћи ћемо, да је:

$f'(x)$	први	извод	функције	$f(x)$
$f''(x)$	„	„	„	$f'(x)$
$f'''(x)$	„	„	„	$f''(x)$
$f''''(x)$	„	„	„	$f'''(x)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$f^{m-2}(x)$	„	„	„	$f^{m-3}(x)$
$f^{m-1}(x)$	„	„	„	$f^{m-2}(x)$
$f^{m}(x)$	„	„	„	$f^{m-1}(x)$

Функције $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \ldots f^{m}(x)$ зову се редом: први, други, трећи . . . m-ни извод функције или полинома $f(x)$.

Као што се из горњих образаца 3) види, први извод $f'(x)$ добија се из $f(x)$, кад се у овој сваки члан помножи са изложиоцем x-а, а сам се изложилац за јединицу смањи. На исти прост начин добија се и сваки други извод из претходећег.

Овде је важно још приметити, да степени узастопних извода поступно опадају са јединицом: $f(x)$ је m-ног степена, $f'(x)$ $(m-1)$-ног, $f''(x)$ $(m-2)$-ог . . . $f^{m-1}(x)$ је првог, а $f^{m}(x)$ је 0-ог степена, дакле стална количина. Следећи изводи $(m+1)$-ви, $(m+2)$-ги . . . . јесу $= 0$. Сваки доцнији извод има по једног сачиниоца функције $f(x)$ мање. У последњем m-ном изводу налази се само a_0, први сачинилац функције $f(x)$.

Образац 2) зове се Taylor-ов образац. Ми ћемо га у овом делу често употребљавати и у овом облику:

$$4.)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,h^2 + \ldots + f^{m}(x)h^{m}.$$

где $f'(x)$ значи опет први извод функције $f(x)$, а

$$5.)\quad f''(x).\ f'''(x),\ f''''(x) \ldots f^{m-1}(x),\ f^{m}(x)$$

значе пређашњи други, трећи четврти . . . $(m-1)$-ви, m-ни извод функције $f(x)$, али подељен редом са $2!$, $3!$, $4!$ . . . $(m-1)!$ и $m!$ Ми ћемо функције под 5) које се јављају као сачиниоци у 4.) звати *алгебарским изводима* функције $f(x)$, и то посебице први, други, трећи, и т. д. Што алгебарске изводе означавамо онако исто као и обичне изводе, то неће давати повода никаквој забуни, јер ће се увек из самог рада видити, које изводе имамо на уму, да ли обичне или алгебарске.

Други алгебарски иввод постаје из првог онако исто, као што овај постаје из $f(x)$, али само што сваки члан ваља још поделити са 2; $f'''(x)$ постаје из $f''(x)$ онако исто као и $f'(x)$ из $f(x)$ само што сад још сваки члан треба поделити са 3 нт. д.

Пример. Изводи функција:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 7,$$

јесу:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x - 1,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 4,$$
$$f'''(x) = 24x - 30,$$
$$f''''(x) = 24$$

Алгебарски изводи њени јесу:

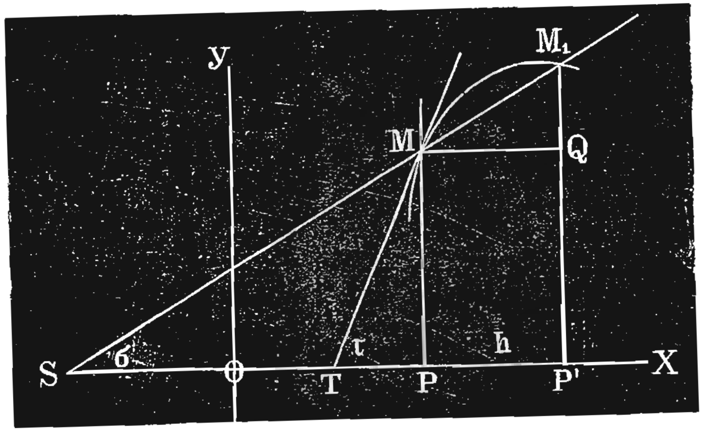
$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x - 1,$$
$$f''(x) = 6x^2 - 15x + 2,$$
$$f'''(x) = 4x - 5,$$
$$f''''(x) = 1.$$

9. Ако је $f(x) = 0$ задата једначина, и ако ставимо:

6.) $$y = f(x)$$

онда ми можемо по упуствима аналитичне геометрије конструјисати једначину 6) и тада ћемо добити једну криву линију. Рецимо да је та крива линија она у слици 1). Нека су M и M_1 две тачке те линије, и кроз M нека је

повучена дирка MT а кроз M и M_1 сечица M_1S; τ и σ нека су угли, које граде са x-ном осом дирка и сечица.



Сл. 1.

Ако је сад $PP_1 = h$, $OP = x$, апсциса тачке M_1 и $OP_1 = x + h$ апсциса тачке M_1, онда је:

$$MP = f(x);\quad M_1P_1 = f(x + h),\ \text{дакле:}$$

$$M'Q = f(x + h) - f(x) \quad \text{и}$$

$$\frac{M'Q}{MQ} = tg\sigma = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Из ове једначине кад пустимо да h тежи нули, следује:

7.) $$\lim tg\,\sigma = \lim \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Али кад h тежи нули, онда се сечица обрће око M и тежи да заузме положај дирке. Граница, којој тежи угао σ, јесте дакле угао τ, и по томе граница којој тежи $tg\sigma$ јесте $tg\tau$. У осталом граници, којој тежи израз:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

јесте [№ 190 алгеб. анал.] $f'(x)$ т. ј. први извод функције $f(x)$. Дакле из једначине 7) за $h = 0$ добијамо:

8.) $$tg\,\tau = f'(x)$$

И по томе *први извод функције $f(x)$ преставља угаоног сачиниоца дирке, која је повучена кроз ону тачку линије 6), чија је апсциса $= x$.*

И ово вреди, па била $f(x)$ алгебарска, цела и рационална функција или не била.

10. У № 8 показали смо лак начин, како се добија први извод једне целе и рационалне алгебарске функције, док смо међу тим у № 190 алгеб. анализе показали општу методу, помоћу које се долази до првог извода ма какве функције. Тамо смо изнашли прве изводе за неколико најважнијих функција и то:

$$x^m,\ (1+x)^m,\ \sin mx,\ \sin x,\ \cos mx,\ \cos x,$$

$$a^x,\ e^x,\ \log x,\ \text{и}\ l\,x.$$

Овде ћемо се упустити мало дубље у теорију извода, пошто ће нам то доцније требати.

1°. Функција $f(x)+c$ и функција $f(x)$ имају на основу, №-е 190 алгеб. анализе исти први извод $f'(x)$. Дакле, можемо казати:

Кад је разлика двеју функција стална, њихни изводи морају бити једнаки.

Одатле опет непосредно следује:

Први извод сталне количине је $= 0$.

Лако је досазати, да и обратно:

Кад је први извод једне функције једнак нули, да се онда функција своди на сталну количину, и

Кад су први изводи двеју функција једнаки, онда разлика тих двеју количина мора бити стална.

2°. Узмимо нека је:

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots\ldots$$

Кад заменимо x са $x+h$ добијамо:

$$F(x+h) = f(x+h) + \varphi(x+h) + \psi(x+h) + \ldots.$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

$$+ \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} + \ldots.$$

Одавде, кад пустимо, да h тежи 0 добијамо:

$$F'(x) = f'(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + \ldots\ldots$$

У овој једначини исказана је теорема:

Први извод збира — алгебарског — више функција једнак је збиру — алгебарском — првих извода тих функција.

3°. Узмимо нека је:

$$F'(x) = f(x).\ \varphi(x).$$

Кад заменимо x са $x+h$ имамо:

$$F'(x+h) = f(x+h).\ \varphi(x+h).$$

Одузимањем ових двеју једначина добијамо:

$$F(x+h) - F'(x) = f(x+h).\ \varphi(x+h) - f(x).\ \varphi(x)$$

$$= f(x+h)\left\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\right\} + \varphi(x)\ \ f(x+h) - f(x)$$

или:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= f(x+h)\ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \varphi(x)\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Кад сад замислимо, да h тежи нули, онда узимајући на ум да је:

$$lim\ f(x+h) = f(x)$$

добијамо:

$$F'(x) = f(x).\ \varphi'(x) + \varphi(x).\ f'(x).$$

у којој је једначини исказана теорема:

Први извод производа двеју функција једнак је збиру производа, које добијамо, кад сваку функцију помножимо са првим изводом друге.

Ова се теорема лако даје проширити и на производ од ма колико функција. И онда стоји да је први извод производа од m функција = збиру производа који се добијају, кад се први извод сваког чиниоца помножи са производом свију осталих чинилаца.

Из обрасца:

$$F'(x) = f(x).\ \varphi'(x) + \varphi(x).\ f'(x)$$

или и не посредно дознаје се, да је први извод функције $a.\,f(x)$ једнак првом изводу функције $f(x)$ умноженом са a.

4°. Нека је сад дата функција:

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Кад заменимо x са $x+h$ имамо:

$$F(x+h) = \frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)}.$$

Кад ове две једначине одузмемо, па лево и десно поделимо са h, имаћемо:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x).\,\varphi(x+h) - \varphi(x).\,f(x+h)}{h.\,f(x).\,f(x+h)},$$

или после мале измене десно од знака једнакости

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x).\left\{\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right\} - \varphi(x)\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}}{f(x).\,f(x+h)}.$$

Сад кад пустимо, да h тежи 0, добијамо:

$$F'(x) = \frac{f(x).\,\varphi'(x) - \varphi(x).\,f'(x)}{f(x)^2}$$

У овој једначини исказана је теорема:

Први извод разломка добија се, кад се именилац помножи са првим изводом бројиоца, и од нађеног производа одузме производ из бројиоца и првог извода имениоца, па се разлика подели са квадратом имениоца.

Одавде или непосредно из №-е 190 алгеб. анализе, лако је доказати, *да се први извод разломка, коме је бројилац сталан, добија, кад се бројилац помножи са првим изводом имениоца, производ подели са квадратом имениоца и резултат узме са знаком minus.*

5°. На основу теореме под 3°, ако је:

$$y = [f(x)]^{m}$$

и m цело и положно, онда први извод те функције, ако га означимо са y', биће:

$$y' = m\,[f(x)]^{m-1} f'(x)$$

То ће рећи: *први извод m-ог степена добија се, кад се први извод функције помножи са њеним изложибцем и још са $(m-1)$*-вим *степеном њеним.*

Ако је изложилац цео и одречан број, онда је на основу онога што је речено под 4°, као и ове последње теореме;

$$y' = -\frac{m\,[f(x)]^{m-1}\,f'(x)}{[f(x)]^{2m}} = -\,m\,[f(x)]^{-m-1} f'(x).$$

Дакле вреди последња теорема и за целе и одречне изложиоце.

Ако је изложилац разломљен, дакле:

$$y = [f(x)]^{\frac{m}{n}}$$

где су m и n цели бројеви, онда одатле следује:

$$y^{n} = [f(x)]^{m},$$

одакле

$$n\,y^{n-1} y' = m\,[f(x)]^{m-1}\,f'(x),$$

или

$$y' = \frac{m\,[f(x)]^{m-1} f'(x)}{n\,y^{n-1}}.$$

или кад се y замени горњом вредношћу, па скрати:

$$y' = \frac{m}{n}\,[f(x)]^{\frac{m}{n}-1}\,f'(x).$$

Дакле вреди теорема и за разломљене изложиоце.

Ако је: $y = \sqrt{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{2}}$,

онда је:

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Дакле први извод квадратног корена једнак је првом изводу функције под кореним знаком подељеном са двогубим квадратним кореном.

6°. Нека је сад:

$$y = \sin f x)$$

и y' први извод те функције, онда је:

$$y' = \lim \left\{\frac{\sin f(x+h) - \sin f(x)}{h}\right\}$$

или:

$$y' = \lim 2\cos\frac{1}{2}\left\{f(x+h) + f(x)\right\}\frac{\sin\frac{1}{2}\left\{f(x+h) - f(x)\right\}}{h}$$

или:

$$y' = \lim \cos\frac{1}{2}\left\{f(x+h) + f(x)\right\}\frac{\sin\frac{1}{2}\left\{f(x+h) - f(x)\right\}}{\frac{1}{2}\left\{f(x+h) - f(x)\right\}} \times$$

$$\times\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

а одавде најзад:

$$y' = f'(x) \cos f(x)$$

На сличан начин налазимо, кад је

$$y = \cos f(x)$$

да је:

$$y' = - f'(x) \sin f(x)$$

Исто тако ако је:

$$y = tg\, f(x),$$

први њен извод јесте:

$$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}.$$

Ако ли је:

$$y = tg\, x$$

онда је:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7°. Нека је

$$y = a^{f(x)}$$

тада је:

$$y' = \lim \left\{ \frac{a^{f(x+h)} - a^{f(x)}}{h} \right\} =$$

$$a^{f(x)} \lim \left\{ \frac{a^{f(x+h)-f(x)} - 1}{h} \right\}$$

или:

$$y' = a^{f(x)} \lim \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \frac{a^{f(x+h)-f(x)} - 1}{f(x+h) - f(x)} \right\}$$

или најзад:

$$y' = a^{f(x)}.\, la.\, f'(x).$$

Ако ли је $f(x)$ просто x, дакле.

$$y = a^x$$

онда је

$$y' = a^x.\, la.$$

Ако ли је:

$$y = e^{f(x)}$$

онда је:

$$y' = e^{f(x)}.\, f(x)$$

а ако је $f(x) = x$ просто, дакле

$$y = e^x$$

онда је:

$$y' = e^x.$$

8°. Нека је:

$$y = log_a f(x)$$

и y' први извод те функције. Из ове једначине следује:

$$f(x) = a^y$$

а из тога:

$$f'(x) = a^y\, la.\, y'$$

Решимо ову једначину односно y' и за тим заменимо a^y његовом вредношћу, па ћемо добити:

$$y' = \frac{1}{la} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Дакле је први извод логаритма функције једнак модулу логаритамске системе, помноженом са количником између првог извода функције и саме функције.

Ако је:

$$y = l\,f(x)$$

онда остаје $le = 1$, налазимо:

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

9°. Нека је:

$$y = arc\,sin\,f(x).$$

Одавде добијамо најпре:

$$f(x) = sin\,y$$

за тим:

$$f'(x) = y'\,cos\,y$$

Из тога:

$$y' = \frac{f'(x)}{cos\,y} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - sin^2 y}}$$

или најзад:

$$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \ f(x)\}^2}}$$

При кореним знаком треба да стоји знак од $cos\,y$. Ако се лук завршује у првој или четвртој четврти, метућемо знак $+$ пред корени знак; а ако се лук завршује у другој или трећој четврти, метућемо знак —.

Ако је:

$$y = arc\,sin\,x; \text{ онда је: } y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ако је:

$$y = arc\,cos\,f(x)$$

добијамо на сличан начин:

$$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \{f(x)\}^2}}$$

где пред кореним знаком треба да стоји знак од $sin\,y$.

Ако ли је пак $y = arc\,cos\,x$, онда је $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

10°. Ако је: $y = arc\,tg\,f(x)$

онда је:

$$y' = \frac{f'(x)}{1 + \{f(x)\}^2}$$

Ако ли је најзад

$$y = arc\,tg\,x$$

онда је просто

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Примедба. Кад једној функцији, која зависи од две или више промењивих количина, тражимо први извод и при том сматрамо само једну од промењивих количина као у истини промењиву, а остале као сталне, онда се каже, да тој функцији тражимо први извод *односно оне промењиве*, која се при том одиста узима као промењива. Нађени први извод зове се тада први извод функције *односно* оне промењиве, коју смо при том сматрали као промењиву. Тако н. пр. ако функција зависи од промењљивих x, y, z . . . , па јој ми тражимо први извод, али сматрајући при том само x као промењљиву, онда се каже, да јој тражимо први извод односно x, и нађени први извод зове се први извод функције односно x.

Тако н. пр. ако је:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

онда је њен први извод односно x:

$$f'_x(x, y) = 2ax + by.$$

а први извод односно y:

$$f'_y(x, y) = bx + 2cy.$$

Исто тако, ако је:

$$f(x, y) = a^{x+y},$$

онда је први извод односно x:

$$f'_x(x, y) = a^{x+y}\, la$$

а такође је и први извод односно y:

$$f'_y(x, y) = a^{x+y}\, la.$$

11. Узмимо, нека је $f(x)$ стварна функција и нека x остаје стварно. Пошто је:

$$lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

то онда одатле следује, да је за h различно од нуле

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

где је ε количина која тежи нули у исти мах кад и h. Одатле следује:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) + \varepsilon \,.\, h$$

Пошто нам је слободно узети h, које сматрамо као положно, тако мало, да је ε бројно мање од $f'(x)$, то ће за тако мало h знак леве стране бити једнак са знаком првог извода $f'(x)$, то ће рећи положан или одречан, како је кад први извод $f'(x)$ положан или одречан. Одатле закључујемо: *Да докле је год при непрекидном рашћењу x-а први извод положан, дотле ће функција f(x) све једнако расти, а докле је год тај извод одречан дотле ће f(x) опадати.*

Да тај став вреди и онда кад га обрнемо, лако је доказати.

Кад једна непрекидна функција, до некле све расте, па за тим опада, она, пре него што почне опадати, добија вредност, која је у исти мах већа и од предње и од потоње вредности функцијине. Таква вредност функције зове се *maximum* или *највећа вредност* њена. Кад пак функција донекле опада, па за тим расте, онда она пре но што почне расти, добија вредност, која је у исти мах мања од предње и потоње вредности функцијине. Таква вредност функције зове се њен *minimum* или *најмања вредност*.

Пре но што x при свом непрекидном рашћењу добије вредност, за коју је $f(x)$ maximum, мора према горњему први извод $f'(x)$ бити положан, а пошто x пређе ту вредност, мора први извод бити одречан. Исто тако, пре него што x добије вредност, за коју је $f(x)$ минимум, мора први извод $f'(x)$ бити одречан, а пошто x пређе ту вредност, мора први извод бити положан. Дакле на кратко, кад x пређе такву вредноста, за коју је $f(x)$ maximum или minimum, мора $f'(x)$ променути свој знак. За саму вредност $x = a$ мора дакле $f'(x)$ бити равна нули или бесконачно великој количини, јер једна функција не може променути свој знак друкче, већ ако прође кроз нулу или кроз ∞. Обично је први извод једне непрекидне функције и сам непрекидна функција, и онда он може свој знак само тако променути, ако прође кроз нулу.

Према томе вредности x-а, за које $f(x)$ *може* бити maximum или minimum јесу оне, које поништавају њен први извод $f'(x)$, велим *може*, јер да би за једну вредност $x = a$ која поништава $f'(x)$ сама функција $f(x)$ била maximum или minimum, треба да, пошто x пређе ту вредност, функција $f'(x)$ свој знак промени. Ако је за $x = a$ $f(x)$ maximum, онда је функција $f'(x)$ најпре положна, за тим за $x = a$ једнака нули, а по том одречна, дакле $f'(x)$ све једнако опада, и с тога њен први извод, а то је други извод $f''(x)$ првобитне функције $f(x)$ мора бити све једнако одречан, дакле одречан и за $x = a$. Ако ли је $f(x)$ за $x = a$ minimum, онда је функција $f'(x)$ најпре одречна, за тим за $x = a$ једнака нули, па онда положна, дакле $f'(x)$ тада све једнако расти и с тога њен први извод $f''(x)$ мора бити све једнако положан, дакле положан и за $x = a$.

Да бисмо дакле нашли maximum и minimum функције $f(x)$, решићемо једначину

$$f'(x) = 0.$$

За једну вредност $x = a$ добивену решењем ове једначине биће $f(x)$ maximum или minimum. како је кад други извод $f''(x)$ за $x = a$ одречан или положан.

Примедба. Угаони сачинилац дирке на линију $y = f(x)$ јесте положан, док је додирна тачка пред тачком линије, која одговара maximum-у, а одречан ако је додирна тачка после тачке линијине, која одговара max. Исти угаони сачинилац јесте одречан или положан, како је кад додирна тачка пред или за тачком линије, која одговара minimum-у.

Примери.

1°. Пита се, кад ће $x^m + z^m$ бити maximum или minimum, ако се претпостави да је $x + z = a$, где је a сталан број. — За $x = \frac{a}{2}$ и $z = \frac{a}{2}$ биће $x^m + z^m$ max. или min. како је кад $m - 1 \lesseqgtr 0$.

2°. Пита се кад ће $x^m . z^n$ бити max. или min., ако је $x + z = a$. — За $x = \frac{am}{m+n}$ и $z = \frac{an}{m+n}$ биће $x^m z^n$ maximum.

3°. Наћи број x, чији је x-ти корен maximum? — Тај је број $x = e$.

4°. Да се проучи ток функције: $y = x - log_a x$. Први извод њен јесте

$$y' = 1 - \frac{1}{la} \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{log_a e}{x}.$$

за $x = 0$ јесте: $y' = -\infty$.

Кад x расти $\frac{log_a e}{x}$ опада, и први извод задате функције остаје одречан, докле x не добије вредност, за коју је $1 - \frac{log_a e}{x} = 0$, а та је вредност $x = log_a e$.

Кад x пређе ту вредност, y' постаје положно и расте приближавајући се граници 1.

Дакле функција y полази од $+\infty$ за $x = 0$ и опада све једнако до свог minimum-a, који одговара на вредности $x = log_a e$; за тим она расте бесконачно, пошто као што се лако може доказати, размера $x : log_a x$ при бесконачном рашћењу x-а бесконачно расте.

12. *Кад је једначини са стварним сачиниоцима:*

1.) $$f(x) = 0$$

$p + qi$ корен, онда јој мора и спрегнути уображени број $p - qi$ бити корен.

Јер кад у једначини ставимо $x = p + qi$ добићемо резултат облика:

$$P + Qi$$

Пошто је $p + qi$ корен једначине, то је:

$$P + Qi = 0,$$

дакле (№ 112 алгебарска анализа):

$$P = 0,\ Q = 0.$$

Али ако у једначини 1) ставимо $x = p - qi$, овда ће се резултат самене од пређашњег за $x = p + qi$ разликовати само знаком од i, дакле ће тај резултат бити:

$$P - Qi$$

и он је $= 0$, пошто је:

$$P = 0 \text{ и } Q = 0,$$

а кад је то, онда је и $p - qi$ корен једначине.

Горња теорема неби вредила, ако би једначина 1) имала уображених сачинилаца. Јер пошто се тада сачиниоци једначина неби променули при прелазу од вредности $x = p + qi$ ка вредности $x = p - qi$, то се тада не би могло тврдити, да ће вредност полинома за $x = p - qi$ бити спрегнута са његовом вредношћу, која одговара вредности $x = p + qi$.

Уображени корени јављају се дакле код *стварних* једначина, т. ј. *таквих, које имају стварне сачиниоце*, увек по двоје, и свака два и два корена, који се разликују само знаком уображеног дела, зове се *спрегнути* корени. Дакле стварна једначина може имати само парни број уображених корена, и према томе *ако је она непарног степена, она мора имати барем један стваран корен, и ако их има више, њихов број мора бити непаран. Ако ли је она — једначина — парнога степена, број стварних корена њених мора бити паран, а може их никако и не бити.*

Спрегнутим коренима $p + qi$ и $p - qi$ одговарају корени чиниоци $x - p - qi$ и $x - p + qi$, којих је производ $(x-p)^2 + q^2$.

Према томе можемо рећи:

Да је полином сваке алгебарске једначине са стварним чиниоцима производ од толико стварних чинилаца првог степена, колико има стварних корена, и од онолико *стварних чинилаца другог степена, колико има спрегова уображених корена.*

Јасно је, да, ако једначина има k корена једнаких броју $p + qi$, да велим она мора имати и толико исто корена једнаких броју $p - qi$.

13. На основу №-е 6 последњи је члан једначине једнак производу свију са противним знаком узетих корена. Пошто је сад производ двају спрегнутих корена вазда положан, и онда кад их узмемо са противним знаком, то је онда увиђавно, *да знак последњега члана у једначини зависи једино од броја положних корена.* Узимајући то на ум, лако ћемо доказати теореме, које долазе:

1°. *Свака стварна једначина непарнога степена мора имати бар један стваран корен, и знак његов противан је знаку последњега члана једначине.*

Јер на основу № 12 број њених стварних корена мора бити непаран. Ако је сад последњи члан једначине положан, то број положних корена мора бити паран, дакле једначина мора имати барем један одречан корен. Ако ли је последњи члан одречан, онда број положних корена мора бити непаран, и с тога једначина мора имати бар *један* положан корен.

2°. *Свака стварна једначина парнога степена, у којој је последњи стални члан одречан, мора имати бар два стварна корена, од којих је један положан а други одречан.*

Јер пошто је последњи члан одречан, то број положних корена мора бити непаран, дакле једначина мора имати бар један положан корен. Но како је једначина парнога степена, и с тога по № 12 број стварних корена њених мора бити паран, то онда и број одречних корена њених јесте непаран и за то она мора имати бар један одречан корен.

Сви корени једне једначине са стварним сачиниоцима могу дакле бити уображени само тако, ако је она парног

степена, и ако је последњи члан њен положан. Кад су сви корени једначине уображени, онда је њен полином производ из првог сачиниоца и чинилаца облика $(x-p)^2+q^2$. Тада је дакле полином једначине за сваку стварну вредност x-а истог знака са првим сачиниоцем. Ако дакле нађемо, да је полином једначине за једну стварну вредност x-а противног знака са првим сачиниоцем, то одатле можемо са извесношћу закључити, да је једначина мора имати стварних корена.

ПРИМЕДБА. На сличан начин доказује се, да кад су сачиниоци једначине стварни и рационални бројеви и $p + q\sqrt{r}$, где је $\sqrt{r}$ ирационалан број, корен њен, да онда и $p - q\sqrt{r}$ мора бити њен корен. У таквом случају има полином једначине једног чиниоца 2-ог степена са рационалним сачиниоцима.

14. *Кад у једначини:*

$$1.) \qquad f(x) = 0$$

сменемо x *са* $-x$ *онда нова једначина:*

$$2.) \qquad f(-x) = 0$$

има исте корене са даном али противно означене.

И доиста, ако н. пр. број α поништава $f(x)$ онда број $-\alpha$ мора поништавати $f(-x)$.

Лако је увидети, да се једначина, која са даном има исте корене, али противно означене, добија, ако се само промене знаци чланова на парним местима, при чему ваља узети у рачун и оне чланове, којих нема или којих су сачиниоци $= 0$.

Тако су н. пр. једначини:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0,$$

корени: -1, $+2$, и -3. Међу тим једначини:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

корени су: 1, -2, и $+3$.

15. Кад у једном потпуном или непотпуном полиному два узастопна члана имају противни знак, онда се каже да је на том месту *значна мена* или просто *мена*; а кад два узастопна члана имају исти знак, онда је на том месту *значна след* или просто *след*.

У потпуној једначини m-ног степена има свега $(m+1)$ чланова, одакле следује, да број мена и број сљеди износе — сабрани — број m. На основу односа, који постоје измећу сачинилаца и корена једначине (№ 6), једначина, која има само стварне и положне корене, може имати само мене, а једначина, која има само стварне а одречне корене може имати само сљеди.

Још ћемо напоменути, да од једног члана у полиному, па до другог неког члана, који има исти знак са првим, број мена мора бити паран; међу тим, тај број мена биће непаран, ако су поменута два члана противно означена.

Ми ћемо овде да докажемо теорему:

Кад се један цео и рационалан полином, са стварним сачиниоцима, помножи са $x-\alpha$, где је α положан број, тада производ има бар једну мену више него множеник.

Нека је дакле:

$$1.)\quad \overbrace{a_m x^m + \ldots + a_{n+1} x^{n+1}} \overbrace{- a_n x^n - \ldots - a_{p+1} x^{p+1}} + a_p x^p + \ldots$$
$$\underbrace{\ldots + a_{s+1} x^{s+1}} \underbrace{- a_s x^s - \ldots - a_0}$$

дати полином, уређен по падајућим степенима x-а.

Као што се види полином почиње са групом положних чланова, за тим долази група одречних чланова, после опет група положних чланова, и т. д. и најпосле долази последња група са одречним члановима. Међу тим напомињемо, да је за доказ теореме све једно били чланови последње групе одречни, као што смо претпоставили, или положни. У осталом свака група чланова може се састојати и из једног само члана.

Кад полином 1) умножимо са $x - \alpha$, добићемо као производ:

$$\begin{array}{l} a_m x^{m+1} \ldots - a_n \;\; x^{n+1} \ldots + a_p \big| \, x^{p+1} \ldots - a_s \big| \, x^{s+1} \; \ldots \\ \ldots - a_{n+1}\alpha \big| \qquad + a_{p+1}\alpha \big| \;\; - a_{s+1}\alpha \big| \qquad + a_0\alpha \end{array}$$

Кад погледамо овај производ, видимо да је његов први члан положан; за њим долазе чланови, којима знаке незнамо, па онда долази један одречан члан. За овим долазе опет чланови, којима знаке незнамо, па онда долази положан члан и т. д. Као што се дакле види, чланови са извесним и одређеним знаком јављају се тако, да за положним долази увек одречан, а за одречним положан. Да тако мора бити, и да два узастопна члана са одређеним знаком не могу бити једнако означени, лако је увидети из саме радње. Кад сад упоредимо производ са полиномом 1), онда видимо, да свакој мени полинома одговара у производу један члан са одређеним знаком. Ако је дакле k број мена у полиному 1), то онда у производу мора бити $k+2$ члана са одређеним знаком, пошто први и последњи члан производа имају такође одређени знак. Пошто сада од сваког члана са одређеним знаком до следећег члана са такође одређеним али противним знаком мора бити барем једна мена, то онда производ мора имати најмање $(k+1)$ мена. И тако је доказано, да производ који смо добили, кад смо умножили полином 1) са $x-\alpha$, мора имати бар једну мену више од полинома 1).

Може се десити, да производ добија више од једне мене, али тада број *добивених* мена у производу мора бити непаран. Ми смо рекли, да у производу од једног члана са одређеним знаком па до следећега са такође одређеним али противним знаком мора бити барем једна мена; али лако је увидети, да број мена од једног до другог члана може случајно бити и већи од јединице, ако се само узме на ум, да су чланови производа, који стоје између та два члана, постали сабирањем противно означених бројева. И тај број мена мора, услед напомене учињене у трећој алинеји ове №-е, бити непаран. Свака група у производу, сем последње, може дакле имати паран број мена више но одговарајућа група полинома 1), док међу тим последња група производа има непаран број мена више но последња група полинома 1). Одавде следује, да број добивених мена у производу мора бити непаран.

Да број добивених мена у производу мора бити непаран, лако је увидети и на овај начин:

Ако су у полиному 1) први и последњи члан противно означени, као што смо и претпоставили, онда први и последњи члан производа морају бити једнако означени. А ако су крајњи чланови полинома 1) једнако означени, онда крајњи чланови производа морају бити противно означени. На основу напомене у трећој алинеји ове №-е у првом случају број мена у полиному 1) јесте непаран, а у производу паран; а у другом случају број мена у полиному 1) јесте паран, а у производу непаран. У оба случаја разлика између броја мена у производу и броја мена у полиному јесте непаран број.

16. Узмимо нека је;

1.) $$f(x) = 0$$

дата једначина са стварним сачиниоцима нека су њени положни корени h на броју:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_h;$$

нека су њени одречни корени k на броју:

$$-\beta_1,\ -\beta_2,\ -\beta_3,\ \ldots\ -\beta_k;$$

и нека су њени уображени корени l на броју;

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \ldots\ \gamma_l.$$

Тада је:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h)(x+\beta_1)(x+\beta_2)\ldots$$
$$\ldots(x+\beta_k)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_l),$$

или, ако означимо производ свију корених чинилаца, који постају из одречних и уображених корена, са $\varphi(x)$:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h)\,\varphi(x).$$

Као што се види $f(x)$ постаје, кад се $\varphi(x)$ поступно помножи са сваким од h корених чинилаца, који постају из положних корена једначине 1). Пошто се сад после умножаја са сваким од тих корених чинилаца јавља у производу барем једна мена више, то је јасно, да ће се у последњем производу, т. ј. у $f(x)$ јавити бар толико мена, колико је положних корена. Дакле стоји — Descartes-ова — теорема:

1°. *Једна једначина не може имати више положних корена, него што има мена, али их може имати мање.*

Функција $\varphi(x)$ преставља производ свију корених чинилаца. који постају из одречних и уображених корена јер је претпостављено да нема више позитивних корена

једначине $f(x) = 0$. Ако претпоставимо, да је множење тих чинилаца, из којих се $\varphi(x)$ састоји, заиста и извршено, онди последњи члан у $\varphi(x)$ мора бити положан, јер би иначе једначина $\varphi(x) = 0$ имала положних корена. Према томе број мена у $\varphi(x)$ мора бити паран, ако их т. ј. буде имало. Али кад $\varphi(x)$ будемо поступно множили са сваким од корених чинилаца, који постају из h положних корена, онда после сваког таког умножаја добија производ непаран број мена, или једну мену и још паран број истих. У последњем производу — $f(x)$ — биће дакле онолико мена, колико је положних корена и још паран број истих. Дакле:

[illegible]

2°. *Разлика између броја мена и броја положних корена јесте паран број,* одакле следује: *да, ако је број мена паран, и број положних корена мора бити паран; а ако је број мена непаран, онда је и број положних корена непаран.*

Ако у једначини $f(x) = 0$ заменимо x са $-x$, нова једначина $f(-x) = 0$ има исте корене са датом, али само противно означене. Применом теореме 1° на једначину $f(-x) = 0$ добијамо теорему:

3°. *Једначина $f(x) = 0$ неможе имати више одречних корена, него што једначина $f(-x) = 0$ има мени.*

Ако је дана једначина $f(x) = 0$ потпуна и ако заменимо у њој x са $-x$, онда пошто је увек од два узастопна члана један парног, а други непарног степена, један од та два члана промениће свој знак а други не. Одатле сљедује, да ће из сваке мене у $f(x) = 0$ постати сљед у $f(-x) = 0$, и из сваке следи у $f(x) = 0$ постати мена у $f(-x) = 0$. Дакле број мена у $f(-x) = 0$ једнак је броју следи у $f(x) = 0$. Имајући ово, као и теореме 1° и 3°. на уму, можемо изрећи теорему:

имагинарних корена $2q$ а реалних r, онда је $r + 2q = m$ где је m највећи степен једначине. Ако број позитивних корена означимо са p а број промена са M, онда је $M - p = 2k$ и слично (број негативних корена f-је $f(-x)$ је) број $N - n = 2K$, где је N број мена функције $f(-x) = 0$

4°. *Потпуна једначина не може имати више положних корена него ли мена, нити више одречних корена него ли следи.* После тога јасно је да разлика између броја m — степена потпуне једначине — и броја стварних корена мора бити паран број (№ 12).

$m - r = 2N$

Ако је $f(x) = 0$ потпуна једначина m-ога степена, па дакле и $f(-x) = 0$ а v и v' бројеви мена у истим једначинама, онда је $v + v' = m$. Ако ли је $f(x) = 0$ непотпуна једначина и ми у њој уметнемо између два узастопна члана, између којих нема два или више чланова, један члан са ма каквим знаком, онда број мена остаће у $f(x)$ после тога исти, ако су поменута два узастопна члана противно означени; ако су пак та два члана једнако означени, број мена у $f(x)$ остаће опет исти или ће порасти за две јединице, како је кад уметнути члан истога или противног знака са она два члана, између којих се он умеће. Ако за тим у $f(x)$ уметнемо опет један члан, којег у њој нема, број мена или се неће променити или ће порасти за две јединице и т. д. Закључимо дакле да, кад се у једном полиному уметну чланови, којих у њему нема, са ма каквим знацима, после чега он постаје потпун, да велим онда број мена или је исти као и пре *или је за паран број постао већи.* То исто вреди и за $f(-x)$. Ако су сада v и v' бројеви мена у $f(x)$ и $f(-x)$, а v_1 и v_1' бројеви мена у истим функцијама, пошто смо их начинили потпунима, онда збир $v_1 + v_1'$ биће већи од збира $v + v'$ за паран број $2k$, који број може бити и 0. Но како је $v_1 + v_1' = m$, то је онда у опште $v + v' = m - 2k$.

Сад је опет јасно, да разлика између броја m — степена непотпуне једначине — и броја стварних корена њених мора бити паран број (№ 12).

Ако се из природе самог задатка даје сазнати, *да су сви корени једначине $f(x) = 0$ стварни, онда број p*

или број следа $f(x) = 0$. Број реалних корена је дакле $p + n$, па је $M + N - (p + n) = 2(k + K)$

положних корена једнак је броју v мена у $f(x)$, а број n одречних корена једнак је броју v' мена у $f(-x)$. Јер како је:

$$p = v - 2k' \quad \text{и} \quad n = v' - 2k''$$

дакле:

$$p + n = v + v' - 2k' - 2k''$$

$$= m - 2k - 2k' - 2k''$$

то онда да би број $p + n$ стварних корена могао бити једнак броју m, треба да су парни бројеви $2k$, $2k'$, $2k''$ посебице једнаки нули, но онда је:

$$p = v \quad \text{и} \quad n = v'.$$

Ако је $f(x) = 0$ потпуна једначина па дакле и $f(-x) = 0$, онда број v' мена у овој једнак је броју следи у $f(x) = 0$. И тако можемо изрећи теорему:

Потпуна једначина, чији су сви корени стварни, има онолико положних корена, колико има мена, и онолико одречних, колико има следи.

Примедба 1. Ако су v и v' бројеви мена у $f(x) = 0$ и $f(-x) = 0$, онда једначина $f(x) = 0$ мора имати бар $m - (v + v') = 2k$ уображених корена.

Примедба 2. Свака једначина са једном само меном има само један и то положан корен, јер пошто је разлика између броја мена и броја положних корена *паран* број, то тај број у овом случају мора бити $= 0$.

Примедба 3. Ако нема једног члана између два једнако означена члана, једначина мора имати бар један спрег уображених корена.

Јер узмимо:

$$x^m + \dots \pm a_q x^q \pm a_{q-2} x^{q-2} + \dots + a_m = 0.$$

Међутим ако не достаје један члан [illegible] број мена
~~[illegible]~~ број мена мањи за два дакле $p+n = m-2$
Међутим ако би недостајао [illegible] члан опет
би било свакако $p+n < m-2$

Пошто између $\pm a_q x^q$ и $\pm a_{q-2} x^{q-2}$ нема мене ни онда, кад заменимо x са $-x$, то је:

$$v + v' \leqq (m - q) + q - 2$$

или:

$$v + v' \leqq m - 2$$

дакле, тим пре:

$$p + n \leqq m - 2$$

Пример 1. Једначина:

$$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 4 = 0$$

има четири мене, дакле, она може имати највише четири положна корена. Кад у њој ставимо $-x$ место x, добићемо једначину:

$$x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 5x - 4 = 0$$

која има само једну мену и с тога прва једначина може имати највише један одречан корен и тај она мора имати (№ 13 и примедба 2 ове №-е).

Пример 2. Једначина:

$$2x^4 - x - 1 = 0$$

има само једну мену, дакле и само један положан корен. Кад заменемо x са $-x$, онда једначина:

$$2x^4 + x - 1 = 0$$

има опет само једну мену, дакле прва једначина има само један одречан корен. Прва једначина има дакле два уображена корена.

Пример 3. Једначина:

$$x^7 - 1 = 0$$

има само једну мену, а једначина

$$x^7 + 1 = 0$$

која из прве постаје, кад се x смени са $-x$ нема ни једну мену; дакле прва једначина има 6 уображених корена.

II. Преображавање једначина.

Преобразити дану једначину значи извести из ње другу једначину, чији корени зависе од корена задате једначине на извесан и одређени начин. Дате једначине преображавају се у главном за то, да се решавање истих сведе на решавање простијих једначина, и на тај начин посао олакша. Ми ћемо се овде ограничити на најглавније случајеве.

17. *Дата је једначина:*

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

па се тражи друга, чији ће корени бити за k мањи од корена једначине 1).

Ако означимо са y непознату тражене једначине, то онда, пошто је непозната x преставник ма којег корена једначине 1) а y преставник одговарајућег корена тражене једначине, мора бити:

$$y = x - k, \text{ одакле } x = y + k$$

Треба дакле заменути у 1) x са $y+k$ па ће изаћи:

$$2.)\quad f(k+y) = a_0y^m + f^{m-1}(k)y^{m-1} + f^{m-2}(k)y^{m-2} + \dots$$

$$\dots + f''(k)y^2 + f^1(k)y + f(k) = 0,$$

где су $f'(k)$, $f''(k)$, $f'''(k) \dots\dots f^{m-1}(k)$ вредности, које за $x = k$ добијају први, други ... $(m-1)$-ви — алгебарски — извод функције $f(x)$.

Пример. Узмимо једначину:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

чији су корени бројеви -1, 2, -3, 4 и тражимо једначину, чији су корени за *3* мањи

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ дакле: $f(3) = -24$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 26x + 14$ „ $f'(3) = -10$

$f''(x) = 6x^2 - 6x - 13$ „ $f''(3) = 23$

$f'''(x) = 4x - 2$ „ $f'''(3) = 10$

$f^{IV}(x) =$ „ $f^{IV}(3) = 1.$

Дакле је тражена једначина:

$$y^4 + 10y^3 + 23y^2 - 10y - 24 = 0,$$

чији су корени бројеви: -4, -1, -6 и $+1$.

Сачиниоци нове једначине:

$$f(k),\ f'(k),\ f''(k)\ \dots\ f^m(k)$$

могу се по Budan-у лакше наћи.

Ако т. ј. заменимо у једначини 2) y са $x-k$, онда морамо очевидно добити опет једначину 1), али неуређену. Дакле једначина:

$$3.)\quad a_0(x-k)^m + f^{m-1}(k)\,(x-k)^{m-1} + f^{m-2}(k)\,(x-k)^{m-2} + \dots$$
$$\dots + f''(k)\,(x-k)^2 + f'(k)\,(x-k) + f(k) = 0$$

мора бити истоветна са једначином 1) и за то сваки резултат добивен из *3* мораће се добити и из 1). — Сад кад поделимо полином *3* са $(x-k)$, нађени количник исто тако са $(x-k)$, и кад тако наставимо, т. ј. кад сваки нови количник поделимо са $(x-k)$ остаци при тим узастопним деобама добивени биће очевидно сачиниоци тражене једначине 2) т. ј.

$$f(k),\ f'(k),\ f''(k) \dots\dots f^{m-1}(k),\ a_0$$

Ако ову методу применимо на горњи пример и ако узастопне деобе извршимо по методи Хорнеровој (№ 4), добићемо:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1, & -2, & -13, & 14, & 24 \\
3]. & 1, & 1, & -10, & -16, & |\underline{-24} \\
 & 1, & 4, & 2, & |\underline{-10} & \\
 & 1, & 7, & |\underline{23} & & \\
 & 1, & |\underline{10} & & & \\
 & |\underline{1.} & & & &
\end{array}$$

где подвучени бројеви значе остатке добивене при узастопним деобама. Овде је:

$$f(3) = -24,\ f'(3) = -10,\ f''(3) = 23,\ f'''(3) = 10 \text{ и }$$
$$f^{IV}(3) = 1,$$

дакле је нова једначина:

$$y^4 + 10y^3 + 23y^2 - 10y - 24 = 0$$

као и горе.

Кад се корени дане једначине имају повећати за k онда у свима горњим рачунима треба сменути k са $-k$.

Узмимо нека је дата једначина:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

чији су корени: 1, — 3, 4 и тражимо нову једначину, чији су корени за 2 већи. Ако радимо по Budan-у, онда треба горе поменуту деобу извршити са делиоцем $(x+2)$, и онда ћемо добити:

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & -2, & -11, & 12 \\
-2]. & 1, & -4, & -3 & |\underline{18} \\
 & 1, & -6, & |\underline{9} & \\
 & 1, & -|\underline{8} & & \\
 & |\underline{1.} & & &
\end{array}$$

Тражена је једначина:

$$y^3 - 8y^2 + 9y + 18 = 0,$$

а корени су јој: 3, —1, и 6.

18. Помоћу преображаја у № 17 у стању смо сад избацити из једначине

1.) $$f(x) = 0$$

ма који члан њен. Зарад тога треба само у једначини:

2.) $$a_0 y^m + f^{m-1}(k) y^{m-1} + f^{m-2}(k) y^{m-2} + \dots$$
$$\dots + f''(k) y^2 + f'(k) y + f(k) = 0$$

ставити $= 0$ сачиниоца оног члана њеног, који члан у њој треба да ишчезне. На тај начин добићемо једначину, из које ће се за k израчунати она вредност, за коју ће тај сачинилац бити $= 0$, па дакле и одговарајући члан у 2) отпасти.

Тако ако хоћемо да у 2) нема $(r+1)$-вог члана ми ћемо ставити

$$f^{m-r}(k) = 0$$

и разрешајем ове једначине, која је односно k степена r-ог, наћи ћемо вредности за k, за које ће $(r+1)$-ви члан у 2) отпасти. Али овај начин може се лако употребити само при избацивању другог члана, јер за избацивање даљих чланова ваљало би решавати једначине виших степена, што је са великим тешкоћама скопчано.

Да би смо избацили други члан, морамо ставити:

$$f^{m-1}(k) = 0,$$

али како је по № 8 $f^{m-1}(k) = ma_0 k + a_1$ то имамо даље:

$$ma_0 k + a_1 = 0,$$

одакле:

$$k = -\frac{a_1}{ma_0}.$$

Дакле треба при преображају једначине, који смо у № 17 извршили, узети за k ову вредност, па ће у новој једначини отпасти други члан.

Узмимо н. пр. једначину:

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0,$$

чији су корени: -1, 3, 4.

Да бисмо из ње избацили други члан, треба узети $k = 2$, дакле ћемо тражити једначину, чији су корени за 2 мањи:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1, & -6, & 5, & 12 \\ 2]. & 1, & -4, & -3, & \underline{|6} \\ & 1, & -2, & \underline{|-7} & \\ & 1, & \underline{|0} & & \\ & \underline{|1} & & & \end{array}$$

дакле је нова једначина без другог члана

$$y^3 - 7y + 6 = 0.$$

чији су корени: -3, 1, 2.

Да бисмо из једначине 2) избацили последњи члан, морамо решити једначину:

$$f(k) = 0,$$

која је истоветна са даном, што не треба, да нам је чудно, јер k мора очевидно бити једнако ма ком корену дане једначине 1) за то, што један корен једначине 2) мора тада бити једнак нули.

Најзад не треба мислити, да се по овој методи могу избацити ма колико чланова једначине. Јер кад смо избацили један члан, па хоћемо из нове једначине да избацимо други који члан, онда ће се у трећој једначини јавити опет онај избачени члан.

До вредности за k, за коју ће у једначини 2) отпасти други члан, можемо доћи и овим краћим путем:

Ако сматрамо k за време као познато. и ако узмемо, да су корени једначине 1):

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots .\ \alpha_m,$$

онда су корени једначине 2)

$$\alpha_1 - k,\ \alpha_2 - k,\ \alpha_3 - k,\ \ldots\ \alpha_m - k$$

али пошто сачинилац другог члана једначине 2) треба да је једнак нули, то је онда № 6

$$(\alpha_1 - k) + (\alpha_2 - k) + (\alpha_3 - k) + \ldots + (\alpha_m - k) = 0.$$

или:

$$-\frac{a_1}{a_0} - mk = 0$$

дакле

$$k = -\frac{a_1}{ma_0}.$$

19. *Једначина:*

$$1.)\quad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + a_m = 0$$

да се претвори у другу, чији су корени k-пута већи.

Ако је y непозната тражене једначине, дакле представник ма којег корена њеног, онда је:

$$y = kx,\ \text{одакле је}\ x = \frac{y}{k}.$$

Овом вредношћу треба дакле заменути x у 1) и кад се то учини добија се тражена једначина:

$$\frac{a_0 y^m}{k^m} + \frac{a_1 y^{m-1}}{k^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1} y}{k} + a_m = 0$$

или кад помножимо са k^m:

$$a_0 y^m + a_1 k y^{m-1} + a_2 k^2 y^{m-2} + \ldots + a_{m-1} k^{m-1} y + a_m k^m = 0.$$

Као што се види, нова се једначина из дате добија, кад се узастопни чланови њени умноже са члановима постепености:

$$1,\ k,\ k^2,\ k^3\ \ldots .\ k^{m-1},\ k^m,$$

при чему треба узети у рачун и оне чланове једначине 1) којих нема, т. ј. чији су сачиниоци једнаки нули.

Помоћу овог преображаја може се једначина 1) ослободити првог сачиниоца a_0, а да остали сачиниоци остану цели бројеви. Зарад тога треба само ставити $k = a_0$.

Исто тако може се дана једначина, у којој је $a_0 = 1$ помоћу овог преображаја ослободити разломљених сачинилаца, а да јој први сачинилац остане $= 1$. Зарад тога треба узети, да је k једнако најмањем заједничком дељенику свију именилаца, премда у особеним случајевима може за k поднети и мања вредност.

Ако је н. пр. дата једначина:

$$x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{4} = 0$$

онда је 12 најмањи заједнички дељеник именилаца, дакле би требало узети ту вредност за k. Али овде може поднети и број 6. Дакле треба да се помноже чланови задате једначине редом са

$$1, \quad 6, \quad 6^2, \quad 6^3$$

и онда ћемо добити једначину

$$y^3 + 21y^2 - 12y - 270 = 0$$

По кад кад могу се сачиниоци једначине помоћу овог преображаја смањити. Тако н. пр. ако је задата једначина:

$$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 96x + 64 = 0$$

тражићемо из ње другу, чији су корени два пут мањи. Овде је $k = \frac{1}{2}$, а нова је једначина.

$$y^4 + 2x^3 - 2x^2 - 12x + 4 = 0$$

која је простија од дане.

20. Тражимо најзад из једначине:

1.) $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$

другу, чији су корени реципрочне вредности ове дане једначине. Овде је:

$$y = \frac{1}{x}, \text{ одакле } x = \frac{1}{y}.$$

Овом дакле вредношћу треба заменути x у 1), и као тражену једначину добићемо, пошто је још умножимо са y^m:

$$a_m y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \ldots + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0.$$

Ова једначина постаје, као што се види, из задате кад се у овој напишу сачиниоци обрнутим редом.

Примедба. Ми смо прешли оне преображаје једначина, које се у рачунима понајчешће употребљују. Цео рад око преображаја какве једначине није у ствари ништа друго, до избацај (елиминација) једне непознате из двеју једначина са две непознате.

И доиста узмимо нека је:

1.) $f(x) = 0$

задата једначина, а

2.) $\varphi(x, y) = 0$

она, у којој је исказан одношај корена једначине 1) и корена тражене једначине. Цео посао своди се очевидно на избацај x-а из 1) и 2). Кад се у 2) јавља само први степен непознате x-а, онда је лако избацити x и на тај начин добити тражену једначину. Али ако се у 2) јављају и виши степени x-а, онда ствар постаје тежа, и тада ваља прибећи методама елиминације о којима ће доцније бити говора.—

III. Највећи заједнички делилац двају полинома и заједнички корени даних једначина.

21. Претпоставимо, да нам је дат један полином и да је исти разложен на просте чиниоце, а то ће рећи чиниоце, који су првог степена, дакле облика $(x-\alpha)$. Нека је тај полином:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^p (x-\alpha_2)^q (x-\alpha_3)^r \dots .$$

Други који полином делиће овај полином тачно, т. ј. без остатка само тако, ако се у том другом полиному налазе исти прости чиниоци са изложиоцима, који су мањи или највише једнаки изложиоцима одговарајућих чинилаца у $f(x)$. Тај други полином, кад се разложи такође на чиниоце, мораће дакле бити облика:

$$a_0^1 (x-\alpha_1) \; (x-\alpha_2)^b (x-\alpha_3)^c \dots ,$$

где је $a \leq p$, $b \leq q$, $c \leq r$ . . . .

Све могуће делиоце функције $f(x)$ добићемо, ако за a узмемо вредности: 0, 1, 2. . . . . p; за b вредности: 0, 1, 2, . . . q; за c вредности: 0, 1, 2, ... r и т. д. На тај начин број свију могућих делилаца функције $f(x)$ биће:

$$(p+1)(q+1)(r+1) \dots - 1.$$

Највећи заједнички делилац двају датих полинома зове се полином, који је од свију заједничких делилаца њихових највишег степена. Као што ћемо доцније видети, највећи заједнички делилац тражи се понајвише ради тога, како би се изнашле вредности за x, које поништавају њега, па дакле и дане полиноме.

Такве ведности x-а јесу корени једначине, која постаје, кад се највећи заједнички делилац стави $= 0$. Па како корени те једначине остају исти и кад се највећи заједнички делилац помножи или подели са каквим од x-а независним бројем, то нам је слободно не градити у будуће никакве разлике између два највећа заједничка делиоца, који се разликују само једним од x-а независним сачиниоцем.

Ако дане полиноме разложимо на просте чиниоце тј. такве, који су односно x првога степена, онда највећи заједнички делилац тих полинома биће једнак производу свију заједничких простих чинилаца њиних, сваки од тих чинилаца узет са мањим од она два изложиоца, који показују колико се пута он јавља у задатим полиномима. Али се највећи заједнички делилац може наћи и на начин, који је сличан оном у рачуници.

Нека су $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ два полинома уређена по падајућим степенима x-а и нека је $\varphi_1(x)$ нижег или највише истог степена са $\varphi(x)$. Поделимо $\varphi(x)$ са $\varphi_1(x)$ и нека је Q количник а $\varphi_2(x)$ остатак, тада је:

$$1.) \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x)\, Q + \varphi_2(x).$$

Помоћу ове једначине лако је доказати, да је највећи заједнички делилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ истоветан са највећим заједничким делиоцем полинома $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Јер, ако је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, онда ако ставимо:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^p\, \psi(x), \text{ а } \varphi_1(x) = (x-\alpha)^p\, \psi_1(x)$$

биће:

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)\, Q = (x-\alpha)^p \{\psi(x) - \psi_1(x)\, Q\}.$$

Као што се види, функција $\varphi_2(x)$ једнака је производу из $(x-\alpha)^p$ и једне целе и рационалне функције x-а и по томе је $(x-\alpha)^p$ чинилац функције $\varphi_2(x)$. Према томе, кад је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, он мора бити и заједнички чинилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. И обратно, ако је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, он мора бити заједнички чинилац и полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$.

Пошто дакле сваки заједнички чинилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ јесте у исти мах и заједнички чинилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то онда то исто мора бити случај и са производом свију чинилаца заједничких полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Дакле највећи заједнички делилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ јесте у исти мах и највећи заједнички делилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Према томе тражење највећег заједничког делиоца полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ своди се на тражење највећег заједничког делиоца полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Са овим полиномима поступићемо сад онако исто као мало час са $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Ми ћемо т. ј. поделити $\varphi_1(x)$ са $\varphi_2(x)$. Ако је Q_1 количник, а $\varphi_3(x)$ остатак, биће:

$$2.)\qquad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\, Q_1 + \varphi_3(x),$$

одакле закључујемо као и горе, да је највећи заједнички делилац за $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ у исти мах највећи заједнички делилац и за $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$.

Ако сад даље поделимо $\varphi_2(x)$ са $\varphi_3(x)$ и узмемо да не остаје никакав остатак, онда је очевидно $\varphi_3(x)$ највећи заједнички делилац функцијама $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Дакле:

Да бисмо нашли највећег заједничког делиоца двају полинома, ми ћемо их најпре уредити по падајућим степенима x-а; за тим ћемо онај, који је вишег степена, поделити са другим; са нађеним остатком поделићемо пређашњег делиоца и тако ћемо наставити рад и даље, то ће рећи, са сваким остатком поделићемо делиоца при оној деоби, при којој је тај остатак нађен. Пошто су узастопни остатци све нижег и нижег степена односно x, то је јасно, да ћемо најзад морати добити остатак, који је или једнак нули, или је различан од нуле а од x независан. У првом случају последњи делилац јесте највећи заједнички делилац датих полинома. У другом случају полиноми немају никаквог заједничког делиоца и зову се *односно прости.*

При тражењу највећег заједничког делиоца слободно је помножити са каквим од x-а независним бројем све чланове ма којег од узастопних дељеника и делилаца, ако је то зарад простијег рачуна потребно. Исто тако кад сви сачиниоци једног ма којег од узастопних остатака имају заједничког чиниоца, овај се може просто изоставити. Јер узмимо да смо н. пр. одмах при првој деоби помножили дељеника са сталним бројем k, како би сачиниоци количника и остатка испали цели бројеви и осим тога узмимо, да сви сачиниоци остатка имају l као заједничког чиниоца, тада ће бити:

$$k\,\varphi(x) = \varphi_1(x)\,.\,Q + l\,.\,\varphi_2(x).$$

Као горе тако и овде, лако се доказује, да ако је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, он је такође заједнички чинилац и полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Дакле је слободно продужити радњу са функцијама $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Пример. Узмимо, нека се тражи заједнички делилац функцијама:

$$\varphi(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8,$$

$$\varphi_1(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

Прва деоба:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & & & & & & \left[\dfrac{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6}{3}\right. \\
3x^5 & & -10x^3 & & +15x & +8 & \left[\right. \\
-3x^5 & +6x^4 & +18x^3 & -12x^2 & -39x & -18 & \\
\hline
 & 6x^4 & +8x^3 & -12x^2 & -24x & -10 &
\end{array}$$

Пре него што пређемо на другу деобу, ми ћемо нађени остатак скратити са *два*, који је број заједнички чинилац свију сачинилаца, и сем тога умножићемо $\varphi_1(x)$ са 3.

Друга деоба:

$$\left[\frac{3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5}{x - 5}\right.$$

$$\begin{array}{r}
3x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 39x + 18 \\
-3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 5x \\
\hline
-10x^4 - 12x^3 + 24x^2 + 44x + 18 \\
-5x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 22x + 9 \\
-15x^4 - 18x^3 + 36x^2 + 66x + 27 \\
+15x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 60x - 25 \\
\hline
2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 \\
x^3 + 3x^2 + 3x + 1
\end{array}\left[\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right.$$

Први остатак при овој деоби скраћен је са два, па умножен са *3*, како би количник и други остатак имали целе сачиниоце.

Други пак остатак скраћен је са *2*.

Трећа деоба:

$$\begin{array}{r|l}
3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\cline{2-2}
-3x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 3x & 3x - 5 \\
\cline{1-1}
-5x^3 - 15x^2 - 15x - 5 & \\
+5x^3 + 15x^2 + 15x + 5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Дакле је највећи заједнички делилац:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

И тако је:

$$\varphi(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 9x + 8)$$

$$\varphi_1(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x^2 - 5x + 6)$$

22. Ако једначине:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0$$

имају k заједничких корена, онда ће полиноми $\varphi_1(x)$ и $\varphi(x)$ имати k заједничких простих чинилаца, дакле они имају једну функцију k-ог степена као највећег заједничког делиоца. Ако се највећи заједнички делилац стави $= 0$, онда корени те једначине биће заједнички корени горњих једначина. Ако $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ немају највећег заједничког делиоца, онда ни горње једначине немају заједничких корена.

Пример. Да се реши једначина:

$$1.)\qquad x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = 0.$$

о којој се зна да има два једнака, ал' противно означена корена. Једначина

$$2.)\qquad x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$$

има исте корене са даном, али само противно означене. Дакле ако су $+a$ и $-a$ корени прве, $-a$ и $+a$ јесу корени ове друге једначине. Дакле те две једначине морају имати два заједничка проста чиниоца, или морају имати једну функцију другог степена као највећег заједничког делиоца. И тог делиоца треба ставити = 0, па ће добивена једначина дати заједничке корене једначина 1) и 2).

Али ако узмемо на ум, да заједнички корени једначина:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0$$

јесу такође и корени једначине:

$$\varphi(x) + \lambda\varphi_1(x) = 0$$

где је λ ма какав особени број, онда је јасно да заједнички корени једначина:

$$3.)\quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad x^3 - 4x = 0.$$

које постају из једначина 1) и 2) сабирањем или одузимањем истих, јесу у исти мах и заједнички корени једначина 1) и 2). Према томе највећи заједнички чинилац полинома 1) и 2) јесте у исти мах и највећи заједнички чинилац левих страна једначина 3).

Пошто сад једначине 1) и 3) немају заједнички корен $x = 0$, то ћемо имати да поделимо просто

$$x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{са} \quad x^2 - 4.$$

Кад то учинимо наћи ћемо, да је $x^2 - 4$ највећи заједнички делилац. Једначина:

$$x^2 - 4 = 0$$

има $+ 2$ и $- 2$ за корене, и то су заједнички корени једначина 1) и 2). Да бисмо нашли остала два корена једначине 1), треба поделити полином 1) са $x^2 - 4$ или

по Хорнеру најпре са $x - 2$, па са $x + 2$ добивени количник стави. Кад се други количник $= 0$ добија се једначина, која даје $- 1 \pm \sqrt{2}$ као остала два корена једначине 1).

Примедба. У № 189 алгеб. анализе показали смо помоћу детерминаната, како се у напред дознаје, да ли дате једначине имају заједничких корена. Да ово буде, треба да је *резултанта* даних једначина $= 0$.

IV. Једнаки корени једначина.

23. Разрешавање једначина обично је теже онда, кад оне имају једнаких корена, него кад су им сви корени различни. И с тога је важно умети сазнати у свакој прилици, да ли дана једначина има једнаких корена, и ако их има, умети свести разрешавање исте на разрешавање других једначина, које имају само неједнаке корене.

Узмимо нека је:

$$1.)\qquad f(x) = 0$$

задата једначина m-ног степена. Пошто је:

$$f(x) = f\left\{a + (x - a)\right\}$$

онда по обрасцу 4) у № 8 смењујући у њему x са a, а h са $(x-a)$ добијамо:

$$2.)\quad f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2 f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + (x-a)^k f^k(a) + \ldots + (x-a)^m f^m(a),$$

где су изводи алгебарски.

Из ове опет једначине видимо, да ако a поништава $f(x)$ и све њене изводе до $(k—1)$-ога закључно, да велим онда функција $f(x)$ мора бити дељива без остатка са $(x—a)^k$, јер је то случај с десном страном, и да с тога број a мора бити k пута корен једначине 1). И обратно, ако је a корен једначине 1) k пута, онда он мора поништити $f(x)$ и све њене изводе до $(k—1)$-ога закључно, јер кад то не би било, онда би на основу једничине 2) број a морао бити више или мање него k пута корен једначини 1). На тај начин доказали смо теорему:

1° *Број* **a** *јесте* k *пута корен једначине 1), ако он поништава* $f(x)$ *и све њене изводе почев од првог, па до* $(k — 1)$*-ог.*

Ако узмемо на ум, да број a, који је k пута корен једначини 1), поништава осем $f(x)$ још и $f'(x)$ као и све њене изводе до $(k—2)$-ог закључно, то је јасно, да је a тада $(k—1)$ пут корен једначине:

$$f'(x) = 0$$

И за то можемо место горње теореме исказати сад ову:

2°. *Број* **a** *јесте* k*-пута корен једначини 1), ако он поништава* $f(x)$*, и ако је сем тога* $(k—1)$*-пута корен једначини*

$$f'(x) = 0.$$

Према томе, ако се у једначини $f(x) = 0$ број α_1 јавља p-пута као корен, α_2 q-пута као корен, α_3 r-пута као корен и т. д. a_h s-пута као корен, биће:

$$f(x) = (x—\alpha_1)^p (x—\alpha_2)^q (x—\alpha_3)^r \;.\;.\;.\;.\; (x—\alpha_h)^s \varphi(x),$$

$$f'(x) = (x—\alpha_1)^{p-1} (x—\alpha_2)^{q-1} (x—\alpha_3)^{r-1} \ldots (x—\alpha_h)^{s-1} \psi(x),$$

где су $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ производи корених чинилаца функција $f(x)$ и $f'(x)$, који им нису заједнички.

Дакле $f(x)$ и њен први извод имају:

$$(x—\alpha_1)^{p-1}, \quad (x—\alpha_2)^{q-1}, \quad (x—\alpha_3)^{r-1}, \ldots (x—\alpha_h)^{s-1}$$

као заједничке чиниоце. У осталом оне не могу имати других заједничких чинилаца, јер кад би н. пр. чинилац $(x—\alpha_i)$, који се у $f(x)$ јавља само један пут, био чинилац и функцији $f'(x)$, онда би, по теореми 1°, број α_i био два пут корен једначини:

$$f(x) = 0.$$

Према томе дакле, сваки чинилац, који се у $f(x)$ јавља само један пут не може се јавити у $f'(x)$ и за то $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не могу имати заједничког делиоца. Дакле можемо сада казати:

3°. *Највећи заједнички делилац функција* $f(x)$ *и* $f'(x)$ *јесте производ корених чинилаца функције* $f(x)$*, који одговарају једнаким коренима њеним, али сваки од тих чинилаца узет један пут мање него у* $f(x)$*.*

Да бисмо сазнали, да ли једначина $f(x) = 0$ има једнаких корена, тражићемо највећег заједничког делиоца функцијама $f'(x)$ и $f(x)$. Ако га оне немају, једначина неће имати једнаких корена, а ако га имају, онда сваки корен једначине, која постаје кад се тај делилац стави $= 0$ јавиће се један пут више као корен у једначини $f(x) = 0$.

24. Помоћу теореме 3° у № 23 не само да смо у стању сазнати, да ли дата једначина има једнаких корена, него смо још у стању свести и разрешавање дане једначине, која има једнаких корена, на разрешавање других једначина, које их немају.

Означимо са X полином дате једначине, и нека је X_1 производ чинилаца, који се у X јављају само по један пут; нека је X_2 производ чинилаца, који се у X јављају по два пут, али су у X_2 узети сваки само по један пут; нека је даље X_3 производ чинилаца, који се у X јављају по три пут, али су у X_3 узети сваки само по један пут и у опште нека је X_r производ чинилаца, који се у X јављају по r - пута, али су овде у X_r узети сваки само по један пут.

Задати полином можемо тада преставити као производ овако:

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4$$

При том претпостављамо, као што се види, да у X нема чинилаца, који би се јављали више од четири пута.

Највећи заједнички делилац D полинома X и његовог првог извода биће:

$$D = X_2 X_3^2 X_4^3$$

јер се у том највећем заједничком делиоцу сваки чинилац полинома X јавља један пут мање (теорема 3°). Највећи заједнички делилац D_1 полинома D и његовог првог извода јесте:

$$D_1 = X_3 X_4^2.$$

Најзад највећи заједнички делилац D_2 полинома D_1 и његовог првог извода биће:

$$D_2 = X_4$$

Ако дата једначина:

$$X = 0$$

нема корена, који би се у њој јављали више од четири пута, или што је све једно ако полином X нема корених чинилаца, који би се у њему јављали више од четири пута, онда и D_2 неће имати заједничких чинилаца са својим првим изводом. У противном случају ваља рад наставити онако исто као и досада, док се не дође до резултата, који нема заједничка делиоца са својим првим изводом.

Сад, кад поделимо сваку од горњих четири једначина оном, која за њом долази, добићемо:

$$\frac{X}{D} = Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_2 = X_2 X_3 X_4$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_3 = X_3 X_4$$

$$D_2 = X_4.$$

Ако сад то исто учинимо са ове четири једначине, добићемо:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_2, \quad \frac{Q_3}{D_2} = X_3, \quad D_2 = X_4.$$

Разрешавање дане једначине;

$$X = 0.$$

своди се дакле на разрешавање једначина:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0;$$

од којих прва даје просте корене дане једначине, друга двојне, т. ј. оне, који се у њој по два пут јављају; трећа тројне, а четврта четворне корене. Дакле: *да бисмо свели разрешавање дате једначине на разрешавање других једначина, које имају неједнаке корене, тражићемо највећег заједничког делиоца полиному дане једначине и његовом првом изводу; за тим тражићемо највећег заједничког делиоца томе првом највећем заједничком делиоцу и његовом првом изводу* и т. д. *док не дођемо до једног највећег заједничког делиоца, који са првим својим изводом нема заједничких чинилаца, дакле који њиме није дељив. Тада ћемо поделити полином дате једначине са првим највећим заједничким делиоцем, овај са другим* и т. д. *Најзад ћемо поделити сваки од добивених количника са оним који за њим долази и нове количнике ставити* $= 0$. *Тако ћемо наћи једначине, од којих прва даје просте корене дате једначине, друга двојне, трећа тројне* и т. д.

Пример. Нека је дата једначина:

$$X = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$$

први извод:

$$X' = 6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12$$

Њихов највећи заједнички делилац јесте:

$$D = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

Први извод полинома D јесте:

$$D' = 3x^2 + 2x - 5.$$

Највећи заједнички делилац полинома D и D' јесте:

$$D_1 = x - 1.$$

Пошто D_1 нема заједничких чинилаца са својим првим изводом, то онда задата једначина нема корена, који би се у њој јављали више од три пута. Дакле је сада:

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3$$

Извршујући узастопне деобе онако као што је горе речено, добијамо:

$$\frac{X}{D} = Q_1 = X_1 X_2 X_3 = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$\frac{D}{D_1} = Q = X_2 X_3 = x^2 + 2x - 3$$

$$D_1 = X_3 = x - 1,$$

а за тим:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1 = x + 1$$

$$\frac{Q_2}{Q_3} = X_2 = x + 3$$

$$D_1 = X_3 = x - 1$$

Дакле је:

$$X = (x + 1)(x + 3)^2 (x - 1)^3.$$

и дата једначина има -1 као прост корен, -3 има два пут, а $+1$ три пут као корен.

25. Теорија једнаких корена може се применити у задатку, где се траже односи, који треба да постоје између сачинилаца једначине 2-ог, 3-ег и т. д. степена, па да полином једначине буде односно потпуни квадрат, куб и т. д. Зарад тога треба само тражити услов, који треба да се испуни, па да једначина 2-ог степена има оба корена једнака, да једначина 3-ег степена има сва три корена једнака и т. д.

x: $\frac{b}{4a^2}$ - [illegible]

Узмимо, да се тражи услов, који треба да је испуњен, па да лева страна једначине:

$$1.)\qquad ax^2 + bx + c = 0$$

буде потпуни квадрат или што је све једно, да оба корена једначине буду једнака. Једначина

$$2.)\qquad 2ax + b = 0$$

чија је лева страна први извод левој страни једначине 1) има:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

као корен. Овај број треба дакле да је двојни корен једначине 1) и за то имамо, кад га у 1) заменимо,

$$b^2 - 4ac = 0$$

као услов, да једначина 1) има оба корена једнака.

Узмимо као други пример једначину:

$$3.)\qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Услов за то, да ова једначина има сва три корена једнака, или да је лева страна њена савршен куб, јесте тај, да број, који јој је три пут корен, буде у исто време и корен једначинама:

$$4.)\quad 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad \text{и} \quad 3ax + b = 0$$

које постају, кад се први и други извод полинома 3) ставе $= 0$; и то да буде корен првој два пут, а другој један

пут. Избацајем x-а из једначина 3) и 4) добијамо као тражене услове:

$$3ac - b^2 = 0, \quad 9ad - bc = 0.$$

Први од ова два услова јесте у исти мах услов, да је трином у првој једначини под 4) потпун квадрат, а тако треба и да буде.

Исто тако помоћу теорије највећег заједничког делиоца може се по некад степен једначине снизити као н. пр. онда, кад нам је познат однос између два корена задате једначине. Узмимо н. пр. да је:

$$1.)\quad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

задата једначина и да постоји овакав однос између два корена њена a и b:

$$2.)\qquad b = pa + q,$$

где су p и q познати бројеви. Пошто једначина 1) мора бити задовољена количинама a и $pa + q$, то отуда следује, да једначина 1) и једначина

$$3.)\quad (px + q)^m + A_1(px + q)^{m-1} + A_2(px + q)^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1}(px + q) + A_m = 0$$

морају имати један заједнички корен. Њихови полиноми морају дакле имати заједничког делиоца, који кад се нађе и стави $= 0$ изаћи ће нова једначина, која даје вредност корена a заједничког једначинама 1) и 3). Кад ту вредност заменимо у 2) добијамо вредност другог корена $b = pa + q$.

Ако би нова једначина била вишег степена, онда би и једначина 1) имала више парова корена, који би стајали у онаквој вези, каква је исказана у обрасцу 2).

Ако са производом корених чинилаца, који одговарају тако нађеним коренима једначине 1), ову поделимо, онда излази једначина нижег степена, која има за корене све остале корене једначине 1).

Тако н. пр. два корена једначине:

$$x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 71x + 30 = 0$$

стоје у овом односу: $b = 2a + 1$. Кад у овој једначини сменимо x са $2x + 1$ излази:

$$8x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Заједнички чинилац ових полинома јесте $x - 2$, одакле је $a = 2$ и за то $b = 5$. Полином задате једначине дељив је дакле са:

$$(x-2)(x-5);$$

кад се количник стави $= 0$ излази једначина:

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

а корени њени:

$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$ јесу остала два корена задате једначине.

У. Симетричне функције.

5 26. У № 15 алгебарске анализе ми смо казали, да се једна симетрична функција може сматрати као позната кад нам је познат ма који члан њен, а овај, па дакле и цела функција, могу се сматрати као познати, кад су познати изложиоци његових основака.

Ова примедба даје нам начина, да можемо симетричне функције означавати на један врло прост и разумљив начин, кад су нам познати њихови основци као изложиоци основака једног ма којег члана. Изложиоци основака пишу се т. ј. запетом одвојени као казаљке уз слово S, као што се то види из следећих симетричних функција количина x, y, z.

$$S_1 = x+y+z; \quad S_2 = x^2+y^2+z^2; \quad S_3 = x^3+y^3+z^3$$

$$S_{1,1,} = xy + xz + yz;$$

$$S_{2,1} = x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$$

$$S_{1,1,1,} = xyz; \quad S_{2,1,1} = x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Број казаљака које стоје уз S, показује у исто доба и број чинилаца, који се у сваком члану јављају. И сад још треба показати, како се поједини чланови симетричних функција налазе.

Узмимо нека су $x, y, z \ldots u, v$, дате количинее, m на броју, из којих се има саставити симетричка функција

$$S_{\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu}$$

где је број казаљака — изложилаца — r. Зарад тога начинимо све могуће комбинације r-не класе а без понављања из основака $x, y, z \ldots u, v$, па за тим сваку од тих комбинација — производа — вежимо са сваком пермутацијом изложилаца $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$, као што се види из примера, који долази:

Пример. Из количина x, y, z, u, има се саставити симетрична функција:

$$S_{3,2,1,}$$

$C^{n}_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ има број $r!$; даје број чланова

Комбинације треће класе, а без понављања начињене из основака x, y, z, u, јесу: $\binom{4}{3} = 4$

$$x\,y\,z,\ x\,y\,u,\ x\,z\,u,\ y\,z\,u.$$

Међу тим пермутације изложилаца 1, 2, 3, јесу $3! = 6$

1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1.

Дакле је:

$$\begin{aligned} S_{3,2,1} = {} & xy^2z^3 + xy^3z^2 + x^2yz^3 + x^2y^3z + x^3yz^2 \\ & + x^3y^2z + xy^2u^3 + xy^3u^2 + x^2yu^3 + x^2y^3u \\ & + x^3yu^2 + x^3y^2u + xz^2u^3 + xz^3u^2 + x^2zu^3 \\ & + x^2z^3u + x^3zu^2 + x^3z^2u + yz^2u^3 + yz^3u^2 \\ & + y^2zu^3 + y^2z^3u + y^3zu^2 + y^3z^2u. \end{aligned}$$

Број чланова, као што се види, мора бити = броју комбинација помноженом са бројем пермутација. Дакле ако је m број основака у симетричној функцији а r број изложилаца, онда је број чланова симетричне функције:

$$\binom{m}{r} r! = m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)$$

при чему се претпоставља, да су сви изложиоци међу собом различни. Али ако међу изложиоцима има више група од p, q, ... s једнаких бројева, онда је број пермутација изложилаца:

$$\frac{r!}{p!\ q!\ldots.\ s!}$$

дакле број свију чланова симетричне функције у томе случају:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-r+1)}{p!\ q!\ \ldots\ s!}$$

Збир изложилаца у ма ком члану симетричне функције одређује њен ред. Уз S пишу се изложиоци као казаљке почев од највећег па до најмањег, и тада од две симетричне функције каже се да је она више класе, кад у њеном симболу на ранијем месту долази виша казаљка — изложилац —. Тако су S_3, $S_{2,1}$, $S_{1,1,1}$ истога реда, али различите класе. Прва је највише, друга следеће ниже, а трећа најниже класе.

Симетрична функција зове се сложена, кад се она састоји из више делова, који су сваки за се симетрични. Ако се симетрична функција састоји из више рационалних разломака, онда кад се ови саберу, бројилац и именилац новога разломка јесу, за себе узети, целе и рационалне симетричне функције.

27. Нека су x, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_m $(m+1)$ променљивих и нека је $f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ функција тих променљивих, дефинисана једначином:

$$1.)\quad f(x, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$$

Функција f јесте као што се види линеарна функција сваке од m променљивих: ξ_1, ξ_2 ... ξ_m а цела и рационална, алгебарска функција x-а. Пошто функција f узајамном сменом променљивих ξ_1, ξ_2 ... ξ_m остаје иста, то је она симетрична функција тих променљивих. Кад множење означено на десној страни једначине 1) свршимо, и производ по падајућим степенима од x уредимо, добићемо:

$$2.) \qquad f(x,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_m) =$$
$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m.$$

Пошто се онако исто, као и у № 6, доказује, да су сачиниоци $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$ симетричне функције променљивих: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_m$, и то *онакве исте*, као тамо корена $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, то је јасно, да свака функција променљивих $a_1, a_2 \ldots a_m$ јесте у исти мах симетрична функција променљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$. Обратно може се доказати теорема:

1°. *Да се свака симетрична функција променљивих* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ *може изразити променљивим сачиниоцима:* $a_1, a_2, \ldots a_m$

Ми сад овде $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ сматрамо као променљиве, али имале те променљиве ма какве вредности, оне су очевидно увек корени једначине:

$$(x-\xi_1)(x-\xi_2) \ldots (x-\xi_m) =$$
$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

И с тога теорема 1° може гласити овако:

Свака симетрична функција корена једначине може се, а да ове незнамо, изразити сачиниоцима њеним.

При доказивању теореме 1° можемо се ограничити само на целе и рационалне функције, пошто су код ирационалних симетричних функција изрази под кореним знаком и код разломљених симетричних функција бројилац и именилац симетричне функције. Но пре него што приступимо самом доказу, напоменућемо ово, што следује:

Производ двеју симетричних функција јесте опет симетрична функција. Јер ако је P производ двеју симетричних функција U и V, а P^1 производ истих функција,

пошто смо само у њима сменули основке, то онда мора бити $P = P^1$. Јер, прво чиниоци U и V као симетричне функције остали су исти, а друго P^1 постаје из P истом сменом основака. Пошто дакле производ P после поменуте смене основака остаје исти, то је он симетричан.

Према томе производ ма колико симетричних функција, па дакле и сваки цели степен једне симетричне функције јесте симетрична функција. Лако је увидети, да ће такав степен једне симетричне функције састојати се из више симетричних функција, које су истога реда, али различних класа.

Тако н. пр. ако симетричну функцију:

$$S_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

подигнемо на други степен, наћи ћемо:

$$S_1^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3)$$

то јест:

$$S_1^2 = S_2 + 2 \cdot S_{1,1}.$$

Дакле се S_1^2 састоји из двеју симетричних функција S_2 и $S_{1,1}$, које су обе другог реда, али је само друга ниже класе од прве. Исто тако налазимо, да је:

$$S_1^3 = \left\{\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3\right\} + 3\left\{\xi_1^2\xi_2 + \xi_1^2\xi_3 + \xi_1\xi_2^2 + \xi_1\xi_3^2 +\right.$$
$$\left. + \xi_2^2\xi_3 + \xi_2\xi_3^2\right\} + 6\xi_1\xi_2\xi_3$$

или краће:

$$S_1^3 = S_3 + 3\,S_{2.1} + 6\,S_{1,1,1}.$$

28. Приступимо сада доказу теореме 1° у № 26. Нека је:

$$1.)\quad f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m) =$$
$$= x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

и

$$S_{a,\, b\, \ldots\, h,\, k}$$

симетрична функција промењљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, која се има изразити сачиниоцима $a_1, a_2, \ldots a_m$ и која се према томе мора састојати из чланова облика:

$$\xi_1^a\, \xi_2^b\, \xi_3^c\, \xi_4^d \ldots \xi_{n-1}^h\, \xi_n^k.$$

Ми при том претпостављамо, да су изложиоци $a, b, c, d \ldots h, k$ цели и положни бројеви, њих n на броју, и поређани по величини тако, да је:

$$a < b < c < d \ldots < h < k.$$

Саставимо сада из n првих сачинилаца полинома под 1) производ:

$$2.)\quad P = (-a_1)^{a-b}\, a_2^{b-c}\, (-a_3)^{c-d}\, a_4^{d-e} \ldots (\pm a_{n-1})^{h-k}\, (\mp a_n)^k$$

Вредности сачинилаца $a_1, a_2, \ldots a_n$ јесу оне у обрасцима 2) №-е 6, кад само тамо количине α сменимо са количинама ξ. Ако сад у овој последњој једначини заменимо сачиниоце $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ тим њиховим вредностима наћи ћемо:

$$3.)\quad P = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^{a-b} (\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \ldots)^{b-c} \times$$
$$\times (\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \ldots)^{c-d} (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \ldots \xi_{n-1} + \ldots)^{h-k} \times$$
$$\times (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \ldots \xi_n + \ldots)^k.$$

Да бисмо могли лакше дознати, како ће изгледати производ по свршеном умножају, ми ћемо најпре проматрати једног од чинилаца н. пр. првог:

$$(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^{a-b} = S_1^{a-b} = \xi_1^{a-b} +$$
$$+ \binom{a-b}{1} \xi_1^{a-b-1} (\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \ldots + \xi_m) +$$
$$+ \binom{a-b}{2} \xi_1^{a-b-2} (\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^2 +$$
$$+ \binom{a-b}{3} \xi_1^{a-b-3} (\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^3 +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (\xi_2 + \xi_3 \ldots + \xi_m)^{a-b}$$

или кад узастопне означене степене збира:

$$\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m$$

развијемо:

$$S_1^{a-b} = \xi_1^{a-b} + \binom{a-b}{1} \left\{ \xi_1^{a-b-1} \xi_2 + \xi_1^{a-b-1} \xi_3 + \ldots \right\} +$$
$$+ \binom{a-b}{2} \left\{ \xi_1^{a-b-2} \xi_2^2 + \xi_1^{a-b-2} \xi_3^2 + \ldots \right\} +$$
$$+ 2 \binom{a-b}{2} \left\{ \xi_1^{a-b-2} \xi_2 \xi_3 + \xi_1^{a-b-2} \xi_2 \xi_4 + \ldots \right\} +$$
$$+ \binom{a-b}{3} \left\{ \xi_1^{a-b-3} \xi_2^3 + \xi_1^{a-b-3} \xi_3^3 + \ldots \right\} + \text{и т. д.}$$

Сви су чланови као што се види ($a—b$)-ог реда; и пошто је даље израз симетричан, то се морају у њему јавити сви они чланови, који постају из чланова:

$$4.)\quad \xi_1^{a-b},\quad \xi_1^{a--b-1}\xi_2,\quad \xi_1^{a-b-2}\xi_2^2\ldots$$

узајамном сменом количина:

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\ \ldots\ldots\ \xi_m$$

то ће рећи, у том се изразу морају јавити симетричне функције, које одговарају члановима под 4. На тај начин дакле добијамо:

$$S_1^{a-b} = S_{a-b} + B_1\, S_{a-b-1,1} + B_2\, S_{a-b-2,2}\, B_3\, S_{a-b-2,1,1} +$$
$$+ B_4\, S_{a-b-3,3} + B_5\, S_{a-b-3,2,1} + B_6\, S_{a-b-3,1,1,1} +$$
$$+ B_7\, S_{a-b-4,4} + \ldots.$$

Први чинилац горњег производа 3) јесте дакле једнак збиру са извесним сачиниоцима умножених симетричних функција, које су све ($a—b$)-ог реда, али различитих класа. Посебице је пак:

$$5.)\quad S_{a-b} = \xi_1^{a-b} + \xi_2^{a--b} + \xi_3^{a-b} + \ldots + \xi_m^{a-b}$$

највише класе. На исти начин налазимо, да је други чинилац производа 3) једнак збиру симетричних функција 2 ($b—c$)-ог реда и различитих класа међу којима је:

$$6.)\quad S_{b-c,\, b-c} = \xi_1^{b-c}\xi_2^{b-c} + \xi_1^{b-c}\xi_3^{b-c}\ldots + \xi_{m-1}^{b-c}\xi_m^{b-c}$$

највише класе и т. д.

Претпоследњи чинилац производа 3) исто је тако једнак збиру симетричних функција ($n—1$). ($h—k$)-ог реда, а различитих класа, међу којима је:

$$7.)\quad S_{h-K,\, h-k,} = \xi_1^{h-k}\xi_2^{h-k}\xi_3^{h-k}\ldots\ldots\xi_{n-2}^{h-k}\xi_{n-1}^{h-k} +$$
$$+ \xi_1^{h-k}\xi_2^{h-k}\xi_3^{h-k}\ldots\ldots\xi_{n-2}^{h-k}\xi_n^{h-k} + \ldots$$

највише класе. Најзад међу симетричним функцијама nk-ог реда, које постају из последњега члана производа 3), највише је класе:

$$8.)\quad S_{k,\, k,\, \ldots\, k} = \xi_1^k\xi_2^k\xi_3^k\ldots\xi_{n-1}^k\xi_n^k + \xi_1^k\xi_2^k\xi_3^k\ldots\xi_{n-1}^k\xi_{n+1}^k + \ldots$$

Кад сад помножимо међу собом све оне збирове симетричних функција, које постају из појединих чинилаца производа P у 3), то ће се онда P јавити као скуп симетричних функција, које ће све бити реда:

$$(a-b) + 2(b-c) + 3(c-d) + 4(d-e) + \ldots +$$
$$+ (n-2)(g-p) + (n-1)(h-k) + nk =$$
$$= a + b + c + d + e + \ldots\ldots + h + k = r,$$

али ће припадати различним класама. Симетрична функција највише класе у производу P, добија се очевидно, кад се помноже међу собом оне симетричне функције појединих чинилаца, које су највише класе. Та симетрична функција највише класе добија се дакле кад се међу собом помноже изрази 5, 6, ... 7, 8. И пошто је свака симетрична функција позната, ако је само познат један члан њезин, то ћемо множећи прве чланове поменутих израза наћи:

$$\xi_1^a\,\xi_2^b\,\xi_3^c\,\xi_4^d\ldots\xi_{n-1}^h\,\xi_n^k$$

као први члан симетричке функције, која је највише класе у производу P. Та симетрична функција јесте она, коју смо горе означили са

$$S_{a,\, b,\, c, \dots h,\, k.}$$

Ако означимо са S збир свију осталих симетричних функција, које се налазе у производу P и које су нижих класа, добићемо:

$$P = S_{a,\, b, \dots h,\, k} + S$$

одакле

$$S_{a,\, b, \dots h,\, k} = P - S$$

И тако смо доказали теорему:

Свака цела, рационална и симетрична функција количина $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_m$ *може се изразити са неколицином првих сачинилаца полинома 1) и симетричним функцијама истога реда, али нижих класа.*

Ако сматрамо количине $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_m$ као корене једначине

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

онда можемо рећи:

Свака цела и рационална функција корена једначине, може се изразити неколицином првих сачинилаца њених и симетричним фуницкијама истог реда, али нижих класа.

Ако сад из гомиле симетричних функција S издвојимо ону, која је највише класе, то се она такође може изразити неколицином првих сачинилаца полинома 1) и симетричним функцијама истог реда, али нижих класа. И лако је увидети, да ћемо радећи и даље на тај начин, најзад моћи изразити

$$S_{a,\, b, \dots h,\, k}$$

неколицином првих сачинилаца једначине 1) и симетричним функцијама најнижих класа, које функције нису ништа друго, до сами сачиниоци полинома 1).

И тако је теорема, поменута у почетку №-е 27, доказана.

Пример 1. Захтева се, да се нађе симетрична функција

$$S_{2\,1}$$

количина: $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \dots \xi_m$.

Овде је $a=2$, $b=1$, $c=d=\dots=k=0$, $n=2$.

Ваља нам дакле развити производ:

$$(-a_1)\, a_2 = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots$$
$$\dots + \xi_m)(\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \dots + \xi_2 \xi_3 + \dots)$$
$$= \xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_3 + \dots + \xi_1 \xi_2^2 + \dots + \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \dots$$

Лако је увидети, да се у овом производу могу јавити само чланови облика:

$$\xi_1^2 \xi_2 \quad \text{и} \quad \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

и то сваки члан првог облика један пут, а другог облика три пут. Али збир свију чланова првог облика јесте симетрична функција

$$S_{2,1},$$

збир чланова другог облика јесте симетрична функција:

$$S_{1,1,1}$$

Дакле је: $-a_1 a_2 = S_{2,1} + 3 S_{1,1,1}$

или пошто је:

$$S_{1,1,1} = -a_3$$

најзад:

$$S_{2,1} = 3a_3 - a_1 a_2$$

Пример 2. Тражи се збир четвртих степена количина x, дакле

$$S_4$$

Овде је:

$$a = 4,\ b = c = d = \ldots\ldots = k = 0;\ n = 1$$

дакле треба развити производ

$$P = (-a_1)^4.$$

$$(-a_1)^4 = (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m)^4 =$$
$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + \ldots$$
$$\ldots + 2\xi_2\xi_3 + \ldots)^2;$$

још би ваљало развити и овај други степен, међу тим лако је увидети, да ћемо, кад то учинимо, добити само чланове оваког облика:

Чланове облика: ξ_1^4 сваки по 1 пут
„ „ $\xi_1^3\xi_2$ „ „ 4 пута
„ „ $\xi_1^2\xi_2^2$ „ „ 6 „

Чланови облика: $\xi_1^2\xi_2\xi_3$ сваки по 12 пута
„ „ $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ „ „ 24 „

Према томе је

$$(-a_1)^4 = S_4 + 4S_{3,1} + 6S_{2,2} + 12S_{2,1,1} + 24S_{1,1,1,1},$$

одакле следује

$$S_4 = a_1^4 - 4S_{3,1} - 6S_{2,2} - 12S_{2,1,1} - 24S_{1,1,1,1}$$

На исти начин налазимо из производа:

$$(-a_1)^2 a_2,\quad S_{3,1} = a_1^2 a_2 - 2S_{2,2} - 5S_{2,1,1} \overset{-}{+} 12S_{1,1,1,1}$$

(=)

$$(-a_1)^0 a_2^2 = a_2^2,\quad S_{2,2} = a_2^2 - 2S_{2,1,1} - 6\,S_{1,1,1,1}$$

$$(-a_1)\, a_2^0 (-a_3) = (-a_1)(-a_3):\quad S_{2,1,1} = a_1 a_3 - 4S_{1,1,1,1},$$

али пошто је:

$$S_{1,1,1,1} = a_4$$

то добијамо после свршене замене:

$$S_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 2a_2^2 + 4a_1 a_3 - 4a_4$$

29. Из самог доказа, који смо у №-и 28 извели следује, да *у израз једне симетричне функције количина ξ могу ући само првих r сачинилаца полинома:*

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

ако је та симетрична функција r-ног реда, јер су следећи сачиниоци:

$$a_{r+1},\quad a_{r+2}\ \ldots\ldots\ a_m$$

већ симетричне функције виших редова:

Дакле стоји теорема:

Кад су у два полинома истога степена или не првих r сачинилаца редом исти у једном и у другом, онда све могуће симетричне функције количина ξ почев од првог па до r-ог реда имају за оба полинома исту вредност.

Од особите су важности збирови, који постају из једноимених целих степена количина ξ, и који се збирови према усвојеном начину означавања имају означити са:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4\ \ldots$$

Ми ћемо да докажемо теорему:

Ма каква симетрична функција количина ξ може се изразити збировима једноимених степена њихових.

Узмимо зарад тога нека је:

$$S_{a,\, b,\, c, \ldots h,\, k}$$

ма каква симетрична функција r-ог реда, дакле

$$a + b + c + d + \ldots + h + k = r,$$

а n нека је број изложилаца. Поменута симетрична функција састоји се из чланова облика:

$$\xi_1^a \xi_3^b \xi_2^c \ldots\ldots \xi_{n-1}^h \xi_n^k.$$

Развимо производ:

$$P = S_a\ S_b\ S_c\ S_d\ \ldots\ S_h\ S_k,$$

где је:

$$S_a = \xi_1^a + \xi_2^a + \xi_3^a + \ldots\ldots + \xi_m^a$$

$$S_b = \xi_1^b + \xi_2^b + \xi_3^b + \ldots\ldots + \xi_m^b$$

$$S_c = \xi_1^c + \xi_2^c + \xi_3^c + \ldots\ldots + \xi_m^c$$

и т. д.

У производу биће очевидно чланова ове врсте:

$$\xi_1^{a+b+c+\ldots+k} = \xi_1^r \quad \text{и} \quad \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c \ldots \xi_n^k$$

па дакле и њима одговарајуће симетричне функције. Дакле стоји једначина:

$$S_a\ S_b\ S_c\ \ldots\ S_h\ S_k = S_r + S_{a,\, b,\, c, \ldots h,\, k} + S,$$

где је S скуп осталих симетричних функција истога реда, са којима се може исто тако поступити.

Пример. Тражи се, да се симетрична функција:

$$S_{3,2,1}$$

изрази збировима једноименованих степена корена ξ. Зарад тога развимо производ:

$$S_3\, S_2\, S_1 = (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \ldots)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots) \times$$

$$\times (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots) =$$

$$= \xi_1^6 + \xi_1^5 \xi_2 + \xi_1^4 \xi_2^2 + \xi_1^3 \xi_2^3 + \xi_1^3 \xi_2^2 \xi_3 + \ldots\ldots$$

Пошто се дакле чланови другчијег облика у производу не могу јавити, и пошто се даље сваки члан облика $\xi_1^3 \xi_2^3$ мора два пут јавити, то је онда даље:

$$S_3 S_2 S_1 = S_6 + S_{5,1} + S_{4,2} + 2 S_{3,3} + S_{3,2,1}$$

или:

1.) $S_{3,2,1} = S_3 S_2 S_1 - S_6 - S_{5,1} - S_{4,2} - 2 S_{3,3}$

Исто је тако:

$$S_{5,1} = (\xi_1^5 + \xi_2^5 + \dots)(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots) = \xi_1^6 + \xi_1^5 \xi_2 + \dots =$$
$$= S_6 + S_{5,1}$$

дакле је:

$$S_{5,1} = S_5 S_1 - S_6$$

Исто је тако даље:

$$S_4, S_2 = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \dots)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots) = \xi_1^6 + \xi_1^4 \xi_2^2 + \dots =$$
$$= S_6 + S_{4,2},$$

дакле је:

$$S_{4,2} = S_4 \; S_2 - S_6.$$

Најзад је

$$S_3^2 = (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \dots)^2 = \xi_1^6 + \dots + 2 \xi_1^3 \xi_2^3 + \dots =$$
$$= S_6 + 2 S_{3,3}$$

одакле следује

$$2 S_{3,3} = S_3^2 - S_6.$$

Пошто у једначини 1) заменимо последња три члана десно од знака једнакости њиховим вредностима, добијамо:

$$S_{3,2,1} = S_3 S_2 S_1 - S_3 S_1 - S_4 S_2 - S_3^2 + 2 S_6$$

---

30. У овој №-и показаћемо методу, помоћу које се збирови једноимених степена количина ξ могу врло лако изразити сачиниоцима једначине:

1.) $x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0.$

Кад ову једначину помножимо са x^r добијамо:

2.) $x^{m+r} + a_1 x^{m+r-1} + a_2 x^{m+r-2} + \dots + a_{m-1} x^{r+1} + a_m x^r = 0$

Пошто количине $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_m$ задовољавају једначину 1), оне морају задовољити и једначину 2) и за то морају вредети једначине:

$$\xi_1^{m+r} + a_1 \xi_1^{m+r-1} + a_2 \xi_1^{m+r-2} + \dots + a_{m-1} \xi_1^{r+1} + a_m \xi_1^r = 0$$
$$\xi_2^{m+r} + a_1 \xi_2^{m+r-1} + a_2 \xi_2^{m+r-2} + \dots + a_{m-1} \xi_2^{r+1} + a_m \xi_2^r = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi_m^{m+r} + a_1 \xi_m^{m+r-1} + a_2 \xi_m^{m+r-2} + \dots + a_{m-1} \xi_m^{r+1} + a_m \xi^r = 0$$

Кад све те једначине саберемо излази:

3.) $S_{m+r} + a_1 S_{m+r-1} + a_2 S_{m+r-2} + \dots$

$\dots + a_{m-1} S_{r+1} + a_m S_r = 0$

Ово је повратни образац, помоћу којега се збир $(m+r)$-них степена количина ξ даје изразити сачиниоцима полинома 1), пошто су пре тога збирови њиних нижих степена до r-ог закључно већ изражени тим сачиниоцима.

Ако ставимо у 3) $r = 0$ добићемо, пошто је:

$$S_0 = \xi_1^0 + \xi_2^0 + \xi_3^0 + \dots + \xi_m^0 = m:$$

4.) $S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \dots + a_{m-1} S_1 + m\, a_m = 0$

И ова једначина даје S_m т. ј. збир m-них степена количина ξ, кад су нам познати збирови њиних нижих степена.

Ако ставимо у 4) $m = 2, 3, 4, \dots$, то добијамо изразе, који дају збирове других, трећих, и т. д. степена количина ξ за полиноме, који су односно другог, трећег, четвртог и т. д. степена, и којих су сачиниоци, почев од првог па на десно редом једнаки онима у полиному 1.) Ти изрази по ономе, што смо рекли у почетку №-е 29 морају вредити и за полином 1).

Ако сада у једначини 4) заменимо m редом са: 1, 2, 3 ... m добићемо:

$$5.)\ \left|\begin{array}{l} S_1 + a_1 = 0 \\ S_2 + a_1 S_1 + 2\, a_2 = 0 \\ S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3\, a_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \dots + a_{m-1} S_1 + m a_m = 0 \end{array}\right.$$

из којих се једначина потпуно израчунавају функције S_1, S_2, $S_3 \dots$

За последњом једначином у 5) долази одмах прва од оних једначина, које постају из једначине 3), кад се у овој стави $r = 1, 2, 3, 4, \dots$

Обрасци 5) зову се Newton-ови. Помоћу тих образаца у стању смо дакле, кад је задата једначина, израчунати збирове једноимених степена корена њених.

31. Кад је задата општија једначина:

1.) $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$

којој су ξ_1, $\xi_2 \dots \xi_m$ корени, онда на начин истоветан са оним у № 30 добијамо место образаца 3) и 5) у № 30 ове општије:

2.) $a_0 S_{m+r} + a_1 S_{m+r-1} + \dots + a_{m-1} S_{r+1} + a_m S_r = 0$

и

$$3.)\ \left|\begin{array}{l} a_0 S_1 + a_1 = 0 \\ a_0 S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 S_m + a_1 S_{m-1} + \dots + a_{m-1} S_1 + m a_m = 0 \end{array}\right.$$

где су S_1, S_2, $S_3 \dots$ збирови првих, других, трећих итд. степена корена једначине 1). Помоћу образаца 2), 3) и 4) израчунавају се дакле збирови једноимених степена корена једначине 1) у овој №-и.

III

Једначина

4.) $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$

која из једначине 1) постаје, кад се у овој сачиниоци обрнутим редом напишу, има за корене реципрочне вредности корена једначине 1) т. ј:

$$\frac{1}{\xi_1},\ \frac{1}{\xi_2},\ \frac{1}{\xi_3}, \dots\dots \frac{1}{\xi_m},$$

или што је једно исто:

$$\xi_1^{-1},\ \xi_2^{-1},\ \xi_3^{-1}, \dots \xi_m^{-1}$$

Ако дакле обрасце ове №-е применимо на једначину 4) добићемо збирове степена реципрочних, или степена с одречним изложиоцима корена једначине 1).

Ако дакле ставимо:

$$S_{-1} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \dots + \frac{1}{\xi_m} = \xi_1^{-1} + \xi_2^{-1} + \dots + \xi_m^{-1}$$

$$S_{-2} = \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2} + \dots + \frac{1}{\xi_m^2} = \xi_1^{-2} + \xi_2^{-2} + \dots + \xi_m^{-2}$$

и т. д.

то из образаца 4), 3) и 2) ове №-е добијамо:

$$5.) \left\{ \begin{array}{l} a_m S_{-1} + a_{m-1} = 0 \\ a_m S_{-2} + a_{m-1} S_{-1} + 2a_{m-2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m S_{-(m+r)} + a_{m-1} S_{-(m+r-1)} + \dots + a_1 S_{-(r+1)} + a_0 S_{-r} = 0 \end{array} \right.$$

То су обрасци, помоћу којих се израчунавају збирови реципрочних степена корена једначине 1).

VI. Примена науке о симетричним функцијама.

32. Симетричне функције јављају се при преображавању једначина, кад год су корени тражене једначине извесне рационалне функције корена задате једначине.

Нека су н. пр. α_1, α_2, α_3 . . . корени задате једначине. Да бисмо имали један извесан случај пред очима, ми ћемо претпоставити, да у изразе за поједине корене тражене једначине не улазе више од два корена дате једначине. Ако означимо са $\varphi(\alpha_1\ \alpha_2)$ рационалну функцију, у којој је исказан закон, по коме се из појединих корена задате једначине склапају корени тражене једначине, онда ћемо добити све корене тражене једначине, ако у $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ сменимо α_1 и α_2 са појединим пермутацијама сваке комбинације друге класе која је начињена из корена α_1, α_2, α_3 . . . дате једначине. Корени тражене једначине биће дакле:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_3) \dots \varphi(\alpha_2, \alpha_1) \dots \varphi(\alpha_{m-1}, \alpha_m)$$

Према томе, тражена једначина биће, кад се њен полином престави као производ:

$$[x - \varphi(\alpha_1, \alpha_2)]\, [x - \varphi(\alpha_1, \alpha_3)] \dots [x - \varphi(\alpha_{m-1}, \alpha_m)] = 0$$

Овај се производ не мења, кад се количине α_1, α_2, α_3 . . . ма како узајамно смене, јер се тада само мења ред, којим узастопце теку чиниоци тога производа. Јасно је дакле, да ће по свршеном умножају чинилаца тога производа сачиниоци узастопних степена од x бити симетричке и рационалне функције корена α_1, α_2, α_3 . . . . задате једначине, које се функције по методама прећашње №-е могу лако израчунати из сачинилаца задате једначине.

Али има други у многим приликама згоднији начин рада, који се оснива на простој напомени, да помоћу једначина 2) и 5) у № 30 или 2) и 3) у № 31, можемо лако изнаћи сачиниоце тражене једначине, ако само знамо збирове првих, других и т. д. степена корена њених, и то до онога степена закључно, који је једнак степену њеном, или што је све једно, који је једнак броју њених непознатих сачинилаца.

Да бисмо дакле нашли тражену једначину, ми ћемо пре свега, а према условима задатка одредити, ког ће она морати бити степена. За тим ћемо тражити збирове узастопних степена корена њених, почев од првог степена па до оног, који је једнак степену њеном и помоћу тих збирова тада ћемо израчунати сачиниоце њене. И пошто су поменути збирови симетричне функције корена дане једначине, они се могу израчунати из њених сачинилаца.

Примедба. Ако се $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$, у којој је исказан закон, како корени тражене једначине постају из корена задане, не мења узајамном сменом корена α_1 и α_2, онда је јасно, да сви корени тражене једначине постају, кад се у $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ корени α_1 и α_2 смене појединим *комбинацијама* друге класе начињеним из корена задате једначине. Јасно је такође, да ће и у том случају сачиниоци тражене једначине морати бити симетричне функције дане једначине.

33. Као первый пример узећемо овај задатак:

Корени задате једначине нису познати и тражи се једначина, чији су корени збирови од два и два или три и три и т. д. корена дане једначине.

Узмимо, да бисмо имали један извесан случај пред очима, да се на пример тражи једначина, чији се корени добијају, кад се саберу све по два и два корена дане једначине.

Ако су корени задате једначине:

1.) $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \; . \; . \; . \; . \; \alpha_m$

онда ће корени нове једначине бити:

2.) $(\alpha_1+\alpha_2),\ (\alpha_1+\alpha_3),\ (\alpha_1+\alpha_4), \ldots (\alpha_2+\alpha_3), \ldots$

$\ldots (\alpha_{m-1}+\alpha_m)$.

Број ових последњих корена једнак је броју комбинација друге класе из m основака, дакле:

$$\binom{m}{2} = \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}$$

и то је степен тражене једначине.

Да бисмо нашли сачиниоце тражене једначине ваља узети на ум, да је први сачинилац исте јединица, а други:

$$-(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_3)-\ldots-(\alpha_{m-1}+\alpha_m)$$

а то је као што се види симетрична функција корена дате једначине, која се може израчунати из познатих сачинилаца дане једначине:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \; . \; . \; . \; a_m$$

Исто је тако трећи сачинилац тражене једначине:

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)+(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_3)+$$
$$+(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3)+\ldots$$

дакле опет симетрична функција корена дате једначине, која се функција може израчунати из познатих сачинилаца дате једначине.

То исто важи и за четвртог, петог, и т. д. и у опште за $(r+1)$-вог сачиниоца. Овај последњи јесте не гледећи на његов знак, збир комбинација r-не класе а без понављања начињених из количина под 2) дакле опет симетрична функција корена дате једначине. Али све те симетричне функције ми смо у стању израчунати помоћу сачинилаца задате једначине. Но то ми овде нећемо чинити, пошто ћемо мало доцније наћи простији начин за израчунавање тражених сачинилаца.

Исто тако, могла би се тражити једначина, чији би корени били облика:

$$(\alpha_1+\alpha_2+k\,\alpha_1\,\alpha_2),\ (\alpha_1+\alpha_3+k\,\alpha_1\,\alpha_3),$$
$$(\alpha_1+\alpha_4+k\,\alpha_1\alpha_4)\ldots$$

где су α_1, α_2, $\alpha_3\ldots$ корени задате једначине, а k познат број. Степен тражене једначине јесте опет онај исти, као и горе, а сачиниоци њени јесу симетричне функције корена дате једначине.

34. Као другу примену симетричних функција узмимо да се тражи једначина, чији су корени разлике од све два и два корена дате једначине. Пошто се сваки од m корена дате једначине одузима од сваког другог, то је степен тражене једначине $m(m-1)$. Пошто даље тражена једначина има увек по два једнака али противно означена корена, због чега она мора имати увек по два корена чиниоца облика:

$$x-\alpha\,;\quad x+\alpha,$$

којих је производ $=x^2-\alpha^2$, то је онда јасно, да се у траженој једначини могу налазити само парни степени непознате, да дакле, она мора бити облика:

$$1.)\quad x^{2n}+b_1x^{2n-2}+b_2x^{2n-4}+\ldots+b_{n-1}x^2+b_n=0.$$

Ако у ту једначину ставимо: $x^2=z$ она се претвара у:

$$2.)\quad z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\ldots+b_{n-1}z+b_n=0$$

и корени ове једначине јесу квадрати разлика корена дане једначине. Њени сачиниоци исти су као и у једначини 1), али је она простија за рад, јер јој је степен у пола онолики, колики је степен једначине 1). Та се једначина зове краће: *једначина квадриратих разлика корена.*

Ако су корени датих једначина:

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \ldots\ldots\quad \alpha_m;$$

онда ће корени једначине 2) бити

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2,\ (\alpha_1-\alpha_3)^2\ \ldots\ (\alpha_1-\alpha_3)^2\ \ldots\ (\alpha_{m-1}-\alpha_m)^2$$

За чиниоце b једначине 2) вреде једначине:

$$-b=(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+\ldots+(\alpha_{m-1}-\alpha_m)^2$$
$$b_2=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2+\ldots,$$
$$-b_3=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Као што се види изрази за поједина b јесу симетричне функције корена дане једначине, које се могу помоћу њених сачинилаца, α_1, α_2, $\ldots\ldots$ α_m израчунати. Међу тим само израчуњавање по методи № 28 прилично је заметно, за то ћемо радити на онај лакши у № 32 показани начин.

Помоћу образаца 5) у № 30 израчунавају се из — познатих — сачинилаца једначине збирови других, трећих и т. д. степена корена њених и обратно, из тих збирова, кад су они познати, израчунавају се помоћу истих образаца лако и сачиниоци једначине a_1, a_2, . . . a_m. Кад бисмо дакле могли израчунати за једначину 2) збирове једноимених степена корена њених, онда бисмо лако помоћу образаца 5) могли израчунати и сачиниоце њене b_1, b_2, b_3 . . . b_n.

Сад ако означимо са S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 збирове једноимених степена корена једначине 2) имаћемо:

$$3.)\left\{\begin{aligned} S'_1 &= (\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_4)^2+\ldots= \\ &= (m-1)\,S_2-2\,S_{1,1} \\ S'_2 &= (\alpha_1-\alpha_2)^4+(\alpha_1-\alpha_3)^4+\ldots= \\ &= (m-1)\,S_4-4\,S_{3,1}+6\,S_{2,2} \\ S'_3 &= (\alpha_1-\alpha_2)^6+(\alpha_1-\alpha_3)^6+\ldots= \\ &= (m-1)\,S_6-6\,S_{5,1}+15\,S_{4,2}-20\,S_{3,3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + \frac{[illegible]}{[illegible]}a^2b^2 - [illegible]$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + \frac{[illegible]}{[illegible]}a^4b^2 - \ldots$

где поједина S десно од знака једнакости јесу извесне симетричне функције корена задате једначине, које се функције из њених сачинилаца могу израчунати.

У изразима за S'_1, S'_2, S'_3 . . . јавља се као сачинилац функција S_2, S_4, S_6 . . . број $(m-1)$, а тако мора и бити, јер у S_2 мора се α_1^2, у S_4 мора се α_1^4, у S_6 мора се α_1^6 и т. д. налазити онолико пута, колико дата једначина има корена сем α_1 дакле $(m-1)$ пута; а то вреди и за 2-ги, 4-ти, 6-ти степен и ма којег другог корена задате једначине.

Сачиниоци осталих функција десно од знака једнакости у једначинама 3) јесу биномни сачиниоци, који се јављају у 2-ом, 4-том и т. д. степену бинома $(a-b)$ и то почев од другог биномног сачиниоца и закључно до оног, који је у среди. Најзад знаци чланова обрасца 3) мењају се као у 2-ом, 4-том и т. д. степену бинома $(a-b)$.

Број збирова S'_1, S'_2, S'_3, . . . S'_n, које треба израчунати, једнак је броју сачинилаца b у 2).

Према свему, што смо рекли, ево како ваља удесити рад:

Најпре ваља израчунати збирове:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ldots\ S_{2n}=S_{m(m-1)}$$

корена дане једначине. За тим по методи № 28 израчунати функције

$$S_{1,1},\ S_{3,1},\ S_{2,2}\ \ldots\ldots$$

и тада обрасци 3) ове №-е дају вредности за:

$$S'_1,\ S'_2,\ S'_3,\ \ldots\ S'_n$$

и најзад из ових последњих количина израчунавају се помоћу образаца 5) у № 30 сачиниоци:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_n$$

једначине 2.

Пример. Дата је једначина:

$$x^3-7x+7=0;$$

а тражи се једначина квадрираних разлика корена њених. Овде је:

$$\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{1.\,2}=3,$$

дакле је тражена једначина облика:

$$z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0$$

Дакле имају се израчунати три сачиниоца, а према томе и три збира:

$$S'_1,\ S'_2 \text{ и } S'_3$$

У овом је задатку:

$$a_1 = 0.\ a_2 = -7,\ a_3 = 7.$$

Обрасци 5) у № 30 дају:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 14,\ S_3 = -21,\ S_4 = 98,\ S_5 = -245$$
$$S_6 = 833$$

27

Даље по методи № 28 налазимо: $(S_{m\Pi} = a_4 = 0)$

$$S_{1,1} = -7;\ S_{3,1} = -98,\ S_{2,2} = 49,\ S_{5,1} = -833.$$
$$S_{4,2} = 539,\ S_{3,3} = -196.$$

ср. 33. ср. 91 ср. 94 ср. 94 ср. 94 ср. 34

дакле је:

$$S'_1 = 2S_2 - 2S_{1,1} = 42$$

$$S'_2 = 2S_4 - 4S_{3,1} + 6S_{2,2} = 882$$

$$S'_3 = 2S_6 - 6S_{5,1} + 15S_{4,2} - 20S_{3,3} = 18669.$$

Помоћу ових вредности и образаца 5) у № 30 добијамо:

$+b_1=0$
zле

$$b_1 = -42,\ b_2 = 441,\ b_3 = -49$$

Дакле је:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$$

тражена једначина, чији су корени квадрирате разлике корена дане једначине:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Међу тим једначина, чији су корени разлике од два и два корена дате једначине, јесте;

$$x^6 - 42x^4 + 441x^2 - 49 = 0$$

Примедба. На сличан начин као сачиниоци једначине квадрираних разлика, могу се наћи и сачиниоци, чији су корени збирови од два и два корена дате једначине (№ 33). 1,

Нека је:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

дата једначина; тражена једначина биће облика:

$$z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0$$

јер је сада

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{1.\ 2} = 3.$$

Ако су сада: S'_1, S'_2 и S'_3 збирови првих, других и трећих степена корена ове друге једначине, биће:

$$S'_1 = (\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_3) + (\alpha_2+\alpha_3) = 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) =$$
$$= 2S_1$$

$$S'_2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 + (\alpha_1+\alpha_3)^2 + (\alpha_2+\alpha_3)^2 = 2S_2 + 2S_{1,1}$$

$$S'_3 = (\alpha_1+\alpha_2)^3 + (\alpha_1+\alpha_3)^3 + (\alpha_2+\alpha_3)^3 = 2S_3 + 3S_{2,1}$$

Функције S_1, S_2 и S_3 израчунавају се помоћу образаца 5) у № 30, а $S_{1,1}$, $S_{2,1}$ по методи № 28. И пошто је то учињено, онда су познате и функције:

$$S'_1, \quad S'_2, \quad S'_3$$

из којих се помоћу образаца 5) у № 30 израчунавају сачуниоци b_1, b_2, b_3.

2,1

На сличан начин морали бисмо радити, кад бисмо хтели из дане једначине да изведемо једначину, чији су корени облика:

$$(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2),\ (\alpha_1+\alpha_3+k\alpha_1\alpha_3)\ldots$$

За једначину m-ог степена имали бисмо:

$$S'_1=(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3+k\alpha_1\alpha_3)+\ldots=$$
$$=(m-1)\,S_1+kS_{1,1},$$

$$S'_2=(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2)^2+\ldots=(m-1)\,S_2+2S_{1,1}+$$
$$+\,2kS_{2,1}+k^2S_{2,2}$$

$$S'_3=(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2)^3+\ldots=(m-1)\,S_3+3S_{2,1}+$$
$$+\,3k(S_{3,1}+2S_{2,2})+3k^2S_{3,2}+k^3S_{3,3}$$

VII. Њутнов образац у облику детерминанте. Услови за различност и једнакост корена.

35. Нека је опет као у № 27:

$$f(x,\ \xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_m)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)=$$
$$=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

где количине ξ можемо сматрати као корене једначине:

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

или као променљиве, услед чега су и сачиниоци a променљиви.

Њутнов образац под 5) у № 30:

$$1.)\quad S_m+a_1S_{m-1}+a_2S_{m-2}+\ldots+a_{m-1}S_1+m\,a_m=0$$

јесте повратни образац, помоћу којег се израчунавају збирови једноимених степена количина ξ. Но лако је из истог обрасца извести помоћу детерминаната други и то независан образац. Ако последњи члан обрасца 1) пребацимо на десну страну, и за тим у њему ставимо:

$S_0=$ $m=k,\ k-1,\ k-2\ \ldots\ 2,\ 1,$ добићемо:

$$S_k+a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\ldots+a_{k-1}S_1=-ka_k$$
$$S_{k-1}+a_1S_{k-2}+\ldots+a_{k-2}\,S_1=-(k-1)\,a_{k-1}$$
$$S_{k-2}+\ldots+a_{k-3}S_1=-(k-2)\,a_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_1=-a_1.$$

Одатле добијамо: елиминацијом S_{k-1} — S_1 !

+, j.

$$0=\begin{vmatrix} S_k+ka_k & a_1\,a_2\cdots a_{k-1} \\ (k-1)a_{k-1} & 1\ a_1\ldots a_{k-2} \\ \vdots & \vdots \\ 1a_1 & 0\,0\cdots 1 \end{vmatrix}$$

$$2.)\quad S_k=-\begin{vmatrix} k\,a_k & a_1 & a_2\ldots a_{k-1} \\ (k-1)\,a_{k-1} & 1 & a_1\ldots a_{k-2} \\ (k-2)\,a_{k-2} & 0 & 1\ldots a_{k-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\ a_1 & 0 & 0\ldots 1 \end{vmatrix}$$

I

И ово је *независни* образац, помоћу којег се израчунава збир k-их степена количина ξ из сачинилаца a полинома:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-} x + a_m$$

Ако количине ξ сматрамо као сталне и то као корене једначине:

$$3.)\quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

онда се помоћу обрасца 2) на независан начин израчунава збир k-их степена корена њених.

Ако се у једначини 3) ξ_1 јавља α_1-пута као корен, ξ_2 α_2-пута, ξ_3 α_3-пута и т. д. ξ_m α_m-пута, то је онда:

$$4.)\qquad S_k = \alpha_1 \xi_1^k + \alpha_2 \xi_2^k + \ldots + \alpha_r \xi_r^k$$

Помоћу Њутнових образаца може се такође врло лако и сачинилац a_k полинома

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

изразити функцијама S у облику детерминанте. Зарад тога треба само у Њутновој једначини 5) у № 30 узети $m = k$ па онда сматрајући у истима сачиниоце a као непознате решити те једначине односно a_k. Као резултат излази:

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_2 & S_1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \ldots & \ldots & k-1 \\ S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \ldots & \ldots & S_1 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{k-1} k a_k = \begin{vmatrix} S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \ldots & S_1 \\ S_{k-1} & S_{k-2} & \ldots & \ldots & (k-1) \\ S_{k-2} & \ldots & \ldots & \ldots & (k-2) \\ \vdots & & & & \\ S_2 & S_1 & 2 & \ldots & 0 \\ S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Ако је први сачинилац полинома не јединица већ a_0, онда се десна страна овог обрасца мора још помножити са a_0.

36. У № 178 алгебарске анализе ми смо упоредили детерминанту облика: §178

$$1.)\quad R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \ldots & \xi_m \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \ldots & \xi_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \ldots & \ldots & \xi_m^{m-1} \end{vmatrix}$$ 1.

која је односно сваке од m промењљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ цела функција $(m-1)$-ог степена, а односно свију промењљивих хомогена функција $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$-ог степена, са производом:

$$2.)\qquad P = P_2\,.\,P_3\,.\,P_4 \ldots P_{m-1}\;P_m,$$

где је за $k = 2, 3, 4 \ldots (m-1), m$:

$$3.)\quad P_k = (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-2}) \ldots (\xi_k - \xi_1)$$

Ми смо тамо нашли, да је производ 2) који је цела функција $(m-1)$-ог степена односно сваке од m промењљивих $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_m$, а хомогена функција $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$-ог степена односно свију тих промењљивих, једнак детерминанти 2) т. ј:

$$4.)\qquad R = P$$

Ми ћемо сада да тражимо квадрат детерминанте R, који се добија, кад се она сама собом помножи. Кад тај посао извршимо по упуствима № 177 алгебарске анализе, добићемо:

5.) $$R^2 = \begin{vmatrix} 1+1+\ldots+1, & \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m, & \ldots & \xi_1^{m-1}+\ldots+\xi_m^{m-1} \\ \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m, & \xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2, & \ldots & \xi_1^m+\ldots+\xi_m^m \\ \xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2, & \xi_1^3+\xi_2^3+\ldots+\xi_m^3, & \ldots & \xi_1^{m+1}+\ldots+\xi_m^{m+1} \\ \xi_1^3+\xi_2^3+\ldots+\xi_m^3, & \xi_1^4+\xi_2^4+\ldots+\xi_m^4, & \ldots & \xi_1^{m+2}+\ldots+\xi_m^{m+2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_1^{m-1}+\xi_2^{m-1}+\ldots+\xi_m^{m-1}, & \xi_1^m+\xi_2^m+\ldots+\xi_m^m, & \ldots & \xi_1^{2m-2}+\ldots+\xi_m^{2m-2} \end{vmatrix}$$

или краће:

6.) $$R^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots\ldots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 \ldots\ldots & S_m \\ S_2 & S_3 \ldots\ldots & S_{m+1} \\ S_3 & S_4 \ldots\ldots & S_{m+2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{m-1} & S_m \ldots\ldots & S_{2m-2} \end{vmatrix} .$$

2

али је такође:

7.) $$R^2 = P^2 = P_2^2\, P_3^2\, P_4^2 \ldots P_{m-1}^2\, P_m^2$$

Дакле детерминанта, што је на десној страни једначине 5) или 6) једнака је квадрату производа из разлика, које постају, кад се свака од количина

8.) $$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\ \ldots\ldots\ \xi_{m-1},\quad \xi_m$$

одузме од свију доцнијих.

Ако количине ξ под 8.) сматрамо као сталне, и то, као корене једначине:

9.) $$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

онда, као што се види симетрична функција тих корена под 6) може се помоћу обрасца 2) у № 35 израчунати, а да и не знамо корене.

Ми ћемо детерминанту под 6) означити са Δ_m тако, да је:

$$R^2 = \Delta_m = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1} & S_m & \ldots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

и у исти мах

$$\Delta_m = (\xi_2 - \xi_1)^2 (\xi_3 - \xi_1)^2 (\xi_4 - \xi_1)^2 \ldots (\xi_m - \xi_1)^2$$
$$\times (\xi_3 - \xi_2)^2 (\xi_4 - \xi_2)^2 \ldots (\xi_m - \xi_2)^2$$
$$\times (\xi_4 - \xi_3)^2 \ldots (\xi_m - \xi_3)^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\times (\xi_m - \xi_{m-1})^2$$

37. Количина Δ_m у № 36 може се изразити и сачиниоцима a функције:

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m =$$
$$= (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_m)$$

Напишимо детерминанту $(2m-2)$-ог реда:

$\frac{\pi}{3}$

$$1.) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & S_0 & S_1 & \ldots & S_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{m-3} & S_{m-2} & S_{m-1} & \ldots & S_{2m-3} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{m-2} & S_{m-1} & S_m & \ldots & S_{2m-2} \end{vmatrix} = \Delta_m \quad \uparrow (m-2) \text{ врсте}$$

у којој су сви основци у првих $(m-2)$ врста $= 0$, сем оних, што су у дијагонали детерминанте, која постаје из тих врста. Детерминанта 1) једнака је детерминанти Δ_m №-е 36 (алг. анал. № 171). Детерминанту 1) можемо сад преставити на други начин овако: Први стуб оставимо као што је, другом стубу додајмо са a_1 помножени први стуб, трећем стубу додајмо са a_1 помножени други и са a_2 помножени први стуб, четвртом стубу додајмо са a_1 помножени трећи, са a_2 помножени други и са a_3 помножени први стуб, и т. д.

На тај начин добијамо:

2.) $\triangle_m =$

$$\left|\begin{array}{cccc}
1 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots \\
0 & 1 & a_1 & a_2 \ldots\ldots \\
0 & 0 & 1 & a_1 \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
S_0, & S_1+a_1S_0, & S_2+a_1S_1+a_2S_0, & S_3+a_1S_2+ \\
 & & & +a_2S_1+a^3S_0 \ldots \\
S_1, & S_2+a_1S_1, & S_3+a_1S_2+a_2S_1, & S_4+a_1S_3+ \\
 & & & +a_2S_2+a_3S_1+a_4S_0 \ldots
\end{array}\right|$$

Овде оних $(m-1)$ врста, што долазе за $(m-2)$-ом врстом, почињу редом са $(m-2)$, $(m-3)$ и т. д. нула и те врсте јесу:

$$0,\quad 0\ldots 0,\quad S_0 \qquad S_1+a_1S_0 \qquad \ldots\ldots$$

$$0,\quad 0\ldots S_0,\quad S_1+a_1S_0,\quad S_2+a_1S_1+a_2S_0 \ldots\ldots$$

. . . .

Помоћу Њутнових образаца у № 30 могу се основци ове детерминанте простије представити. Јер помоћу тих образаца налазимо:

$$S_0 = m$$

$$S_1 + a_1S_0 = (m-1)\, a_1$$

$$S_2 + a_1S_1 + a_2S_0 = (m-2)\, a_2$$

$$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + a_3S_0 = (m-3)\, a_3$$

. . . .

Дакле, кад помоћу ових образаца преставимо простије основке горње детерминанте и за тим последњу врсту још помножимо са — 1, добићемо:

III/1

$$3.)\quad \underset{m}{\triangle} = -\left|\begin{array}{ccc}
1 & a_1 & a_2 \ldots\ldots \\
0 & 1 & a_1 \ldots\ldots \\
0 & 0 & 1 \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
0 & m & (m-1)\, a_1 \ldots \\
m & (m-1)\, a_1 & (m-2)\, a_2 \ldots \\
a_1 & 2a_2 & 3a_3 \ldots\ldots
\end{array}\right|$$

Помоћу овог обрасца у стању смо дакле израчунати симетричну функцију $\triangle_m$ количина ξ, а да ове не морамо знати, просто из сачинилаца a функције $f(x)$. Дакле нас овај образац ослобођава израчунавања количина S у прећашњој №-и.

Ако је у $f(x)$ први сачинилац a_0 а не јединица онда је лако увидети, да место обрасца 3) вреди овај

1/2

$$\Delta_m = -\frac{1}{a_0^{2m-2}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_0 \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & ma_0 & (m-1)\,a_1 \ldots \\ ma_0 & (m-1)\,a_1 & (m-2)\,a_2 \ldots \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Тако на пример ако је:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

онда је:

$$\Delta_m = - \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 0, & 3, & 4, & -1 \\ 3, & 4, & -1, & 0 \\ 2, & -2, & -6, & 0 \end{vmatrix} = 36.$$

Пре него што завршимо ову №-у још ћемо да покажемо, како се Δ_m може изразити вредностима, које $f'(x)$ — први извод функције $f(x)$ — добија за $x = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots . \xi_m$. Зарад веће општости ми ћемо узети, да је у $f(x)$ први сачинилац различан од 1 и $= a_0$, дакле:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m =$$
$$= a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)(x-\xi_4)\ldots(x-\xi_m)$$

Пошто је сад [№ 10, 3°]:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_0(x-\xi_2)(x-\xi_3)\ldots.(x-\xi_m) \\ &+ a_0(x-\xi_1)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_m) \\ &+ a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_4)\ldots(x-\xi_m) + \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{m-1}) \end{aligned}$$

то је:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= a_0(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)\;\ldots\;(\xi_1-\xi_m) \\ f'(\xi_2) &= a_0(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)\;\ldots\;(\xi_2-\xi_m) \\ f'(\xi_3) &= a_0(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)\;\ldots\;(\xi_3-\xi_m) \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f'(\xi_m) &= a_0(\xi_m-\xi_1)(\xi_m-\xi_2)\;\ldots\;(\xi_m-\xi_{m-1}) \end{aligned}$$

Множењем ових m једначина добијамо:

$$f'(\xi_1)\,f'(\xi_2)\;\ldots\;f'(\xi_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}} a_0^m \Delta_m.$$

IV

38. Узимајући да је k један ма који од бројева: 1, 2, 3, ... $(m-1)$, ми ћемо у детерминанти 6) №-е 36 изоставити $(m-k-1)$ последњих врста и $(m-k)$ последњих стубова. Систему, који преостаје, додаћемо као

k-ти стуб $z_0, z_1, z_2 \ldots z_k$ и тако ћемо имати детерминанту:

$$1.)\quad Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{k-1} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_k & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-1} & z_k \end{vmatrix}$$

или кад је уредимо по основцима последњег стуба:

$$2.)\quad Z_k = z_0 Z_{k,0} + z_1 Z_{k,1} + z_2 Z_{k,2} + \ldots + z_k Z_{k,k}$$

где

$$Z_{k,0},\quad Z_{k,1},\quad Z_{k,2} \ldots Z_{k,k}$$

значе субдетерминанте, које одговарају основцима последњега стуба.

У детерминанти 1):

$$S_0,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3 \ldots$$

јесу збирови нултих, првих, других и т. д. степена количина $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_m$.

Ми бисмо ту детерминанту могли разложити на m^k нових детерминаната, кад бисмо најпре поједина S у њојзи заменули њиним вредностима. Али пошто би свака од тих нових детерминаната, у којој би основци двају стубова били сразмерни, отпала, то би број заосталих детерминаната био:

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-k+1)$$

Али може се радити и на други начин. Ми т. ј. детерминанту 1) можемо разложити овако:

$$3.)\quad Z_k = \Sigma \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \ldots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^2_{\mu_2} & \ldots & \xi^k_{\mu_k} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^{k+1}_{\mu_2} & \ldots & \xi^{2k-1}_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix}$$

Знак Σ захтева да се имају сабрати све оне детерминанте, које постају из детерминанте у 3), кад се у овој:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \ldots \mu_k$$

замене редом пермутацијама сваке комбинације k-те класе са понављањем, а начињене из основака $1, 2, 3 \ldots (m-1), m$. Али је тада $= 0$ свака детерминанта, која постаје, кад се у детерминанти 3) $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_k$ замени једном пермутацијом такве комбинације, у којој има 2 или више једнаких основака, јер су тада у тој детерминанти основци двају или више стубова сразмерни. Остаје дакле да се саберу само детерминанте, које постају, кад се у 3) $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k$ замене пермутацијама оних комбинација k-те класе, у којима су само различни основци, а број је истих:

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-k+1)$$

Детерминанту у 3) можемо и овако написати:

$$4.)\qquad \xi^0_{\mu_1}\xi^1_{\mu_2}\dots\xi^{k-1}_{\mu_k}\begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix}$$

и тада можемо мало час споменуто сабирање извршити овако.

У 4) сматрајмо $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ као буди коју комбинацију k-те класе без понављања а из основака 1, 2, 3 ... $(m-1)$, m и саберимо резултате добивене пермутовањем казаљака у 4). При том детерминанта у 4) остаје иста, ако т. ј. не узмемо у обзир њен свагдањи знак. Али ако узмемо, да је $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ она пермутација, у којој нема никакве *инверзије,* то добијамо на тај начин:

$$\begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix} \Sigma \pm \xi^0_{\mu_1}\xi^1_{\mu_2}\dots\xi^{k-1}_{\mu_k}$$

или другаче:

$$5.)\qquad \frac{\begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & z_{k-1} \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} \end{vmatrix}}$$

И сад још остаје да се у 5) $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k$ замени сваком комбинацијом k-те класе а без понављања из основака 1, 2, 3 ... $(m-1)$, m и да се тако добивене вредности израза под 5) саберу. Дакле је на тај начин:

6,

$$6.)\qquad Z_k = \Sigma \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & z_{k-1} \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} \end{vmatrix}$$

Означимо са:

$$P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2},\ \ldots\ \xi_{\mu_k})$$

производ разлика, које постају, кад се свака од количина: $\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2}, \ldots \xi_{\mu_k}$ одузме од сваке доцније, то ћемо имати:

7.) $$P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ \ldots\ \xi_{\mu_k}) =$$

$$(\xi_{\mu_k}-\xi_{\mu_{k-1}})(\xi_{\mu_k}-\xi_{\mu_{k-2}})\ \ldots\ (\xi_{\mu_k}-\xi_{\mu_1})$$

$$\times(\xi_{\mu_{k-1}}-\xi_{\mu_{k-2}})\ \ldots\ (\xi_{\mu_{k-1}}-\xi_{\mu_1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\times(\xi_{\mu_2}-\xi_{\mu_1})$$

$1+2\ldots+(\mu_k-1)$

Број чинилаца у овом производу јесте $= \frac{1}{2}\mu_k(\mu_k-1)$

На исти начин као што смо у №-и 178 алгебарске анализе доказали, да је:

$$\triangle = P$$

тако исто налазимо и овде да је:

8.) $$\begin{vmatrix} \xi_{\mu_1}^0 & \xi_{\mu_2}^0 & \ldots & \xi_{\mu_k}^0 \\ \xi_{\mu_1}^1 & \xi_{\mu_2}^1 & \ldots & \xi_{\mu_k}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{\mu_1}^{k-1} & \xi_{\mu_2}^{k-1} & \ldots & \xi_{\mu_k}^{k-1} \end{vmatrix} = P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ldots\xi_{\mu_k})$$

На основу овог обрасца имамо сад даље:

9.) $$\begin{vmatrix} \xi_{\mu_1}^0 & \xi_{\mu_2}^0 & \ldots & \xi_{\mu_k}^0 & x^0 \\ \xi_{\mu_1}^1 & \xi_{\mu_2}^1 & \ldots & \xi_{\mu_k}^1 & x^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{\mu_1}^{k-1} & \xi_{\mu_2}^{k-1} & \ldots & \xi_{\mu_k}^{k-1} & x^{k-1} \\ \xi_{\mu_1}^{k} & \xi_{\mu_2}^{k} & \ldots & \xi_{\mu_k}^{k} & x^{k} \end{vmatrix} = P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ldots\xi_{\mu_k},\ x)$$

где је:

10.) $$P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ldots\xi_{\mu_k},\ x) =$$

$$= (x-\xi_{\mu_1})(x-\xi_{\mu_2})(x-\xi_{\mu_3})\ldots(x-\xi_{\mu_k})\,P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ldots\xi_{\mu_k})$$

Ако сад у обрасцима 1) и 6) ставимо:

$$z_0 = 1,\ z_1 = x,\ z_2 = x^2,\ \ldots z_k = x^k$$

добијамо овај интересни образац:

11.) $$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{k-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_k & x \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{k+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-1} & x_k \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma\,(x-\xi_{\mu_1})(x-\xi_{\mu_2})\ldots(x-\xi_{\mu_k})\Big\{P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ldots\xi_{\mu_k})\Big\}^2$$

На десној страни имају се $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ заменути редом свaком комбинацијом k-те класе без понављања, а из основака 1, 2, 3 . . . m и добивени резултати сабрати. Леву страну у 11) можемо уредити по основцима последњег стуба и тако ћемо добити:

$$12.)\quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_k & x \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{k+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \dots & S_{2k-1} & x^k \end{vmatrix} =$$

$$= Z_{k,0} + Z_{k,1}x + Z_{k,2}x^2 + \dots + Z_{k,k}x$$

Овде су:

$$Z_{k,0},\quad Z_{k,1},\quad Z_{k,2} \dots$$

исте субдетерминанте као и у обрасцу 2) и добијају се из детерминанте Z_k по већ познатим правилима. Ако десну страну у 11) развијемо у колико она од x-а зависи, а затим уредимо по степенима x-а, добићемо, упоредив резултат с десном страном у 12) вредност субдетерминанте:

$$Z_{k,q}$$

престављену као функцију количина: $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$.

3.

39. До сад смо претпостављали, да су количине ξ_1, $\xi_2 \dots \xi_m$ произвољне и једна од друге независне. Сада ћемо пак претпоставити, да су од тих количина првих k међу собом различите, дакле $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_k$, а свака

од осталих $(m-k)$ да је за себе узета, једнака једној од првих k количина.

Јасно је да је сада

$$1.)\qquad Z_{k+1} = 0,\ Z_{k+2} = 0 \dots Z_m = 0.$$

Међу тим функција Z_k своди се сада на производ двеју детерминанта само, то јест сада је:

$$2.)\qquad Z_k =$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \dots & \xi_k^0 & z_0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_k^1 & z_1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_k^2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{k-1} & \xi_2^{k-1} & \dots & \xi_k^{k-1} & z_{k-1} \\ \xi_1^k & \xi_2^k & \dots & \xi_k^k & z_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \dots & \xi_k^0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_k^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{k-1} & \xi_2^{k-1} & \dots & \xi_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Ако количине $z_0, z_1, z_2 \dots z_k$ сматрамо као неодређене, онда једначина [№ 37 обр. 2)]:

$$3.)\qquad Z_k = 0$$

може на основу правила неодређених сачинилаца само тако вредети, ако су посебице:

$$4.)\qquad Z_{k,0} = 0,\ Z_{k,1} = 0, \dots Z_{k,k} = 0$$

али је сада:

$$Z_{k,k} = \Big\{ P(\xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ \xi_k) \Big\}^2$$

и с тога последња једначина под 4) вредиће само тако, ако су бар две ма које од количина $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ (види и науку о детерминантама № 169, 4°) међу собом једнаке. Али тада вреде и све остале једначине у 4) за то, што се у њима лево од знака једнакости јавља као заједнички чинилац:

$$P(\xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ \xi_k)$$

И на тај начин доказали смо теорему:

1°. *Ако је свака од променљивих* $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots \xi_m$, *за се узета, једнака ма којој од променљивих* $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_k$, *и ако су количине* $z_0, z_1, z_2 \ldots z_m$ *неодређене, онда једначина:*

$$Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{k-1} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_k & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-1} & z_k \end{vmatrix} = 0$$

може само тако бити истинита, ако су ма које две од променљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ *међу собом једнаке.*

2, И сад је настао тренутак, да се запитамо, који су *нужни* и *довољни* услови, да при са свим неодређеним вредностима количина $z_0, z_1 \ldots z_m$ вреде једначине:

$$Z_{r+1} = 0,\ Z_{r+2} = 0,\ \ldots\ Z_m = 0$$

Узмимо најпре у посао функцију Z_m, која је дефинисана једначином 1) у № 38, кад се тамо узме, да је $k = m$. Услед обрасца 6 у № 38 такође је:

6.) $$Z_m = \begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \ldots & \xi_m^0 & z_0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_m^1 & z_1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_m^2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \ldots & \xi_m^{m-1} & z_{m-1} \\ \xi_1^m & \xi_2^m & \ldots & \xi_m^m & z_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \ldots & \xi_m^0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_m^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \ldots & \xi_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Ова једначина постаје из једначине 2) у овој №-и, кад се у овој последњој узме да је $k=m$. *Дакле је:*

7.) $$Z_{m,m} = 0$$

и *нуждан* и *довољан* услов, па да вреди једначина

$$Z_m = 0.$$

Услов 7) биће, према ономе, што је горе доказано испуњен *само онда*, кад су барем две од промењљивих: $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ међу собом једнаке.

И сад можемо теорему 1° овде поново применути, па ћемо имати:

2° *Ако су количине* $z_0, z_1, z_2 \ldots z_m$ *неодређене, онда једначине:*

$$Z_{r+1} = 0,\ Z_{r+2} = 0\ \ldots .\ Z_m = 0$$

биће истините само тако, ако су истините једначине:

$$Z_{r+1,r+1}=0,\ Z_{r+2,r+2}=0\ .\ .\ .\ Z_{m,m}=0$$

и овај нужни и довољни услов биће испуњен само онда, кад између m *променљивих* $\xi_1, \xi_2, \ .\ .\ .\ \xi_m$ *има највише њих* r, *које су по вредности међу собом различне.*

2.

40. У овој №-и пронаћићемо помоћу детерминаната знаке, по којима се даје оценити, да ли дана једначина има само различне корене или има и једнаких.

Зарад тога узмимо, нека је дата једначина:

$$1.)\qquad f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

и њени непознати корени нека су $\xi_1, \xi_2, \xi_3\ .\ .\ .\ \xi_m$. Ми ћемо овде имати да одговоримо на питање, да ли су сви корени међу собом различни или су $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}\ .\ .\ .\ \xi_m$ само ма каква понављања корена $\xi_1, \xi_2, \ .\ .\ .\ \xi_r$.

a,

Ми ћемо пре свега помоћу образаца Њутнових у № 30 под 5) или образаца у № 35 израчунати вредности за:

$$S_1, S_2, S_3\ .\ .\ .\ S_{2m-2}$$

b,

и за тим саставити детерминанту:

$$2.)\qquad \Delta_k=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & .\ .\ . & S_{k-1} \\ S_1 & S_2 & .\ .\ . & S_k \\ . & . & .\ .\ . & . \\ S_{k-1} & S_k & .\ .\ . & S_{2k-2} \end{vmatrix}$$

као и детерминанту:

c,

$$3.)\qquad Z_k=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & .\ .\ . & S_{k-1} & z_0 \\ S_1 & S_2 & .\ .\ . & S_k & z_1 \\ . & . & .\ .\ . & . & . \\ S_{k-1} & S_k & .\ .\ . & S_{2k-2} & z_{k-1} \\ S_k & S_{k+1} & .\ .\ . & S_{2k-1} & z_k \end{vmatrix},$$

На основу №-е 36 јесте квадрат количине P т. ј:

$$4.)\qquad P^2=(\xi_m-\xi_{m-1})^2(\xi_m-\xi_{m-2})^2\ldots(\xi_m-\xi_1)^2$$
$$\times(\xi_{m-1}-\xi_{m-2})^2\ldots(\xi_{m-1}-\xi_1)^2$$
$$\times(\xi_2-\xi_1)^2$$

једнак детерминанти:

d,

$$5.)\qquad \Delta_m=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & .\ .\ . & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & .\ .\ . & S_m \\ . & . & .\ .\ . & . \\ S_{m-2} & S_{m-1} & .\ .\ . & S_{2m-3} \\ S_{m-1} & S_m & .\ .\ . & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

С погледом на ове обрасце можемо изрећи теорему:

1.

1°. *Непознати корени једначине* 1) *сви су међу собом различни, кад је детертинанта* Δ_m *од нуле различна.*

Даље, узимајући на ум резултате, до којих смо дошли у № 39, можемо изрећи теорему:

2°. *Једначина* 1) *има само r различних корена, а остали корени — (m—r) на броју — јесу само ма каква понављања истих, кад је при неодређеним вредностима количина $z_0, z_1, z_2 \dots z_m$ функција z_r различна од нуле али је у усто доба*

$$Z_{r+1}=0,\ Z_{r+2}=0\ \dots\ Z_m=0$$

Најзад теорема 2° може се простије исказати овако:

2. 3°. *Једначина* 1) *има r различитих корена, а остали (m—r) на броју јесу само ма каква понављања истих, кад је детерминанта $\triangle_r$ различна од нуле, али је у исто доба:*

$$\triangle_{r+1}=0,\ \triangle_{r+2}=0\ \dots\ \triangle_m=0$$

3. Кад смо дознали, да задата једначина m-ог степена има само r различитих корена, онда да бисмо те корене нашли, треба нам само решити једначину:

$$6.)\qquad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{r-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_r & x \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_r & S_{r+1} & \dots & S_{2r-1} & x^r \end{vmatrix} = 0$$

Колико се пак пута сваки од тако нађених корена ове једначине јавља као корен у задатој једначини, лако је дознати по методи № 23.

Пример 1. Дата је једначина:

$$f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$$

Пита се, да ли су јој сви корени међу собом различни или не? По обрасцу 2) у № 35 налазимо:

$$S_0=4,\ S_1=-2,\ S_2=10,\ S_3=-14,\ S_4=34,$$

$$S_5=-62,\ S_6=130.$$

Овде је $\triangle_2$ различно од нуле, а $\triangle_3$ и $\triangle_4$ једнаки нули, дакле, одатле следује, да једначина има само два међу собом различна корена.

Једначина 6) у овом случају јесте:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & x \\ 10 & -14 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 1 \\ -1, & 5, & x \\ 5, & -7, & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & (x+5) & x \\ -9 & (x^2-7) & x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & (x+5) \\ -1 & (x^2-7) \end{vmatrix} = 0$$

или најзад:

$$x^2+x-2=0$$

Корени ове једначине јесу $+1$ и -2.

То су корени и задате једначине, само треба видети, колико се пута они јављају као корени задане једначине. Оба та броја поништавају само први извод полинома задане једначине, дакле се сваки од њих јавља два пут као корен у задатој једначини.

Пример 2. пита се, да ли једначина:

$$f(x) = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$$

има једнаких корена или не. Овде је:

$$S_0 = 6,\ S_1 = -4,\ S_2 = 22,\ S_3 = -52,\ S_4 = 166.$$

$$S_5 = -484,\ S_6 = 1462.$$

Једначина 6) сада је ово:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 22 & 1 \\ -4 & 22 & -52 & x \\ 22 & -52 & 166 & x^2 \\ -52 & 166 & -484 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

Корени ове једначине јесу: $1,\ -1,\ -3$.

Број $+1$ поништава $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$, дакле се он јавља три пута као корен. Број -1 поништава само $f(x)$, дакле се он јавља један пут као корен.

VIII. Резултанте алгебарских једначина.

41. Кад је задато n нехомогених једначина између $(n-1)$ непознатих, па се згодним везивањем тих једначина избаце све непознате, онда се добија једначина, у којој се налазе само сачиниоци заданих једначина. Та нова једначина између сачинилаца задатих једначина зове се њином *резултантом*. У резултанти исказан је однос у коме треба да стоје сачиниоци задатих једначина, или, у њој је исказан услов, који треба да је испуњен, па да све задате једначине могу заједно опстати, то ће рећи, да може имати вредности за непознате, које задовољавају све задате једначине. Лева страна резултанте зове се резултанта полинома задатих једначина.

Тако н. пр. на основу №-е 174 у алгебарској анализи резултанта једначина:

$$ax + b = 0, \quad a_1x + b_1 = 0$$

јесте једначина

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad ab_1 - a_1b = 0$$

Исто тако на основу исте №-е резултанта једначина:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

јесте:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

која се, по методи №-е 189 у алгебарској анализи даје и овако преставити:

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) \\ (ac_1) & (bc_1) \end{vmatrix} = 0$$

или кад се развије:

$$(ab_1)\ (bc_1) - (ac_1)^2 = 0$$

т. ј.

$$(ab_1 - a_1 b)\ (bc_1 - b_1 c) - (ac_1 - a_1 c)^2 = 0$$

42. Нека су задате две једначине

$$1.)\quad f(x) =$$

$$= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots . + a_{m-1} x + a_m = 0$$

$$2.)\quad \varphi(x) =$$

$$= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots . + b_{n-1} x + b_n = 0$$

Узмимо даље нека су

$$3.)\qquad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3 \ldots . \alpha_m$$

корени једначине 1). Ако су сви ти корени коначни бројеви, a_0 биће различно од 0 и ми ћемо тада имати:

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2)\ (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_m)$$

Услов нуждан и довољан у исти мах, те да један од корена у 3) буде корен и једначини 2), јесте тај, да једна од количина:

$$\varphi(\alpha_1),\quad \varphi(\alpha_2),\quad \varphi(\alpha_3) \ldots \varphi(\alpha_m)$$

буде = 0, или да је производ истих:

$$\varphi(\alpha_1)\, \varphi(\alpha_2)\, \varphi(\alpha_3) \ldots \varphi(\alpha_m) = 0$$

Обратно, ако је овај производ = 0, један од његових чинилаца мора нужно бити = 0, дакле један од корена једначине 1) мора бити корен и једначини 2). Дакле:

Да би једначина 1), чији су сви корени коначни бројеви, имала са једначином 2) један заједнички корен, треба само да је производ:

$$P = \varphi(\alpha_1)\, \varphi(\alpha_2) \ldots . \varphi(\alpha_m)$$

једнак нули.

Исто тако и у једначини:

$$Q = f(\beta_1)\, f(\beta_2)\, f(\beta_3) \ldots f(\beta_n) = 0$$

где су коначни бројеви β_1, β_2, β_3 . . . β_n корени једначине 2) исказан је услов, да један од тих корена буде и корен једначине 1.)

43. Лако је доказати, да се производи P и Q у № 42 разликују међу собом само једним сталним чиниоцем положним или одречним, како је кад mn парно или не, при чему се узима, да су a_0 и b_0 положни бројеви. Јер ако у једначинама:

$$1.)\quad f(x) = a_0 (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m)$$

$$2.)\quad \varphi(x) = b_0 (x - \beta_1)\ (x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n)$$

сменимо x и то у првој редом са коренима једначине $\varphi(x) = 0$, и добивене резултате помножимо; ако, тако исто сменимо x и у другој са коренима једначине 1) и тако добивене производе опет помножимо, наћићемо:

$$3.)\qquad Q = a_0(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)\ldots(\beta_1-\alpha_m)$$

$$\times\, a_0(\beta_2-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\ldots(\beta_2-\alpha_m)$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\times\, a_0(\beta_n-\alpha_1)(\beta_n-\alpha_2)\ldots(\beta_n-\alpha_m).$$

$$4.\qquad P = b_0(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\ldots(\alpha_1-\beta_n)$$

$$\times\, b_0(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\ldots(\alpha_2-\beta_n)$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\times\, b_0(\alpha_m-\beta_1)(\alpha_m-\beta_2)\ldots(\alpha_m-\beta_n)$$

Као што се види, два и два чиниоца у изразима за P и Q јесу једнаки и противно означени, а међу тим јасно је да је број истих чинилаца у оба израза исти т. ј. $m\,n$. Поделом добијамо:

$$\frac{P}{Q} = (-1)^{mn}\frac{b_0^m}{a_0^n}.$$

Према овоме могу се очевидно

$$5.)\qquad \underline{a_0^n P = 0} \quad \text{и} \quad \underline{b_0^m Q = 0}$$

сматрати као резултанте једначина $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$.

$a_0^n P$ и $b_0^m Q$ разликују се само знаком.

Пример 1. Узмимо једначине:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a_1x^2 + b_1x + c = 0$$

и претпоставимо, да су α, β корени прве, а α_1 и β_1 корени друге једначине. Резултанта:

$$R = b_0^m Q$$

датих једначина овде је:

$$R = a^2(a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1)(a_1\beta^2 + b_1\beta + c_1) =$$

$$= a^2\ a_1^2\alpha^2\beta^2 + a_1b_1\alpha\beta(\alpha+\beta) + a_1c_1(\alpha^2+\beta^2) +$$

$$+ b_1^2\alpha\beta + b_1c_1(\alpha+\beta) + c_1^2$$

Али је:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a},\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \text{одакле}\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

Према томе је сад:

$$R = a_1^2c^2 - a_1b_1bc + a_1c_1(b^2 - 4ac) + b_1^2ac -$$

$$- b_1c_1ab + c_1^2a^2$$

или:

$$R = (ac_1 - a_1c)^2 - (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c)$$

или краће:

$$R = (ac_1)^2 - (ab_1)(bc_1)$$

као и у № 40.

Пример 2. Нека је дата једначина:

$$1.) \qquad f(x) = x^3 + px + q = 0$$

Одатле добијамо као први извод:

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Ако су a, b, c корени дате једначине, онда је такође:

$$f(x) = (x-a)\,(x-b)\,(x-c),$$

дакле по №-и 10:

$$f'(x) =$$

$$= (x-a)\,(x-b) + (x-a)\,(x-c) + (x-b)\,(x-c)$$

Означимо још са α и $-\alpha$ корене једначине:

$$2.) \qquad f'(x) = 3x^2 + p = 0$$

Резултанта једначина 1) и 2) јесте дакле:

$$R = f'(a)\ f'(b)\ f'(c) = -(b-c)^2\,(c-a)^2\,(a-b)^2$$

а такође и:

$$R = 3^3 f(\alpha)\ f(-\alpha) = 27\,\underbrace{(\alpha^3 + p\alpha + q)\,(-\alpha^3 - p\alpha + q)}$$

$$= 4p^3 + 27\,q^2 \quad \underbrace{q^2 - \alpha^2(\alpha^2+p)^2}_{q^2 - \left(-\frac{p}{3}\right)\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2}$$

кад т. ј. заменимо α^2 са вредношћу $-\frac{p}{3}$. И тако је дакле:

$$R = -(b-c)^2\,(c-a)^2\,(a-b)^2 = 4p^3 + 27\,q^2$$

Из овог обрасца следује, *прво*, да су сви корени једначине 1) стварни, ако је количина:

$$4p^3 + 27\,q^2$$

одречна, а за то се опет изискује, да је p у једначини одречно, и *друго* да су два корена једначине једнака, кад је иста количина $= 0$.

44. Из образаца 5) у №-и 43 види се, да кад су познати корени једначине 1) и 2) у №-и 41 да је онда лако добити резултанту R истих у два различита облика:

$$R = a_0^n \varphi(\alpha_1)\ \varphi(\alpha_2)\ .\ .\ .\ \varphi(\alpha_m)$$

$$R_1 = b_0^m f(\beta_1)\ \ f(\beta_2)\ .\ .\ .\ f(\beta_n)$$

У првом обрасцу сваки од m чинилаца φ јесте цела рационална и линеарна функција сачинилаца:

$$b_0,\quad b_1,\quad b_2\ .\ .\ .\ .\ .\ b_n$$

једначине $\varphi(x) = 0$. Дакле је и R као производ тих чинилаца цела, рационална и хомогена функција m-ог степена истих саченилаца.

Исто тако и из другог обрасца увиђа се, да је R цела и рационална и хомогена функција n-га степена сачинилаца:

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2\ .\ .\ .\ .\ a_m$$

једначине $f(x) = 0$. По према ономе, што смо у № 43 сазнали, R и R_1 могу се разликовати само знаковима. Дакле:

Резултанта двеју количина с једном непознатом, једна m-ог а друга n-ог степена, јесте цела и рационална функција њихових сачинилаца. Она је n-ог степена односно сачинилаца једначине m-ог степена, а m-ог степена односно сачинилаца једначине n-ог степена. Али и обратно:

Ако је $\triangle$ цела и рационална функција m-ог степена сачинилаца једначине $\varphi(x) = 0$, која је n-ог степена односно x, ако је даље иста количина $\triangle$ цела и рационална функција n-ог степена сачинилаца једначине $f(x) = 0$, која је односно **x** *mn-ог степена; и ако је најзад $\triangle = 0$ за сваки заједнички корен поменутих једначина, онда се $\triangle$ разликује од резултанте R тих једначина само једним сталним сачиниоцем. Другим речима $\triangle = 0$ јесте резултанта једначина $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$.*

Јер ако је a_k сачинилац једначине $f(x) = 0$ онда су $\triangle$ и резултанта R полиноми истог т. ј. n-ог степена односно a_k. Сад ако су:

$$a_k', \quad a_k'', \quad a_k''' \; . \; . \; . \; a_k^n$$

корени једначине $R = 0$, кад R сматрамо као функцију од a_k, то онда, кад год a_k добије једну од ових n вредности, биће R једнако нули. Дакле једначине $\varphi(x) = 0$ и $f(x) = 0$ имају један заједнички корен и с тога ће функција $\triangle$ бити такође $= 0$.

Као што се види, функција $\triangle$ једнака је нули за све вредности од a_k, за које је $R = 0$. Пошто су у осталом $\triangle$ и R истога степена односно a_k, то се оне могу разликовати само једним од a_k независним сачиниоцем.

На исти начин дознаје се, да сачиниоци, којима се разликују међу собом R и $\triangle$ јесу независни и од ма ког другог сачиниоца у функцијама $f(x)$ и $\varphi(x)$. Дакле је $\triangle = 0$ резултанта једначина $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$.

45. Кад у једначинама:

$$1.) \quad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

$$2.) \quad \varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

сменимо x са $x + h$, онда су као што знамо корени нових једначина за h мањи од корена задатих једначина. Јасно је, да ће разлике:

$$\alpha_1 - \beta_1, \; \alpha_1 - \beta_2, \; . \; . \; . \; \alpha_m - \beta_n$$

између 2 и 2 корена задатих једначина бити једнаке разликама између 2 и 2 одговарајућа корена нових једначина. Дакле *резултанта нових једначина једнака је резултанти задатих једначина.*

Исто тако резултанта једначина:

$$3.) \qquad x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad x^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

које имају као корене реципрочне вредности корена једначина 1) и 2) једнака је резултанти једначина 1) и 2).

Јер за једначине 3) образац 4) у № 43 изгледа сада овако:

$$4.) \quad P^1 = b_n^m \frac{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \ldots (\beta_n - \alpha_m)}{(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^n (\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)^m}$$

пошто је b_n први сачинилац другој једначини под 3). Бројилац разломака под 4 јесте:

$$\frac{(-1)^{mn}P}{b_0^m}, \text{ а именилац } \frac{a_m^n\, b_n^m}{a_0^n\, b_0^m}$$

Дакле је:

$$P_1 = (-1)^{mn}\frac{a_0^n\, P}{a_m^n}$$

Дакле је резултанта једначина 3):

$$R^1 = a_m^n\, P^1 = (-1)^{mn}\, a_0^n\, P = \pm R;$$

она се разликује од резултанте датих једначина 1) и 2) највише знаком.

IX. Различне методе избацивања (елиминисања) помоћу детерминаната.

46. Кад две једначине:

$$f(x) = 0 \text{ и } \varphi(x) = 0$$

прва m-ог а друга n-ог степена имају заједнички корен $x = \alpha$ онда леве стране истих морају бити дељиве са $x - \alpha$. Дакле ако помножимо $f(x)$ са $(n-1)$ осталих корених чинилаца функције $\varphi(x)$ а ову са $(m-1)$ осталих корених чинилаца функције $f(x)$, резултати морају бити једнаки. На тој простој напомени оснива се Euler-ова метода избацивања.

I

Помножимо функцију (fx) са једном произвољном функцијом x-а $(n-1)$-ога степена, а функцију $\varphi(x)$ са другом опет произвољном функцијом x-а $(m-1)$-ог степена и напишимо, да су добивени производи међу собом једнаки. Тако ћемо добити нову једначину између две функције $(m+n-1)$-ог степена, и у тој једначини сем познатих сачинилаца функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ налазиће се још $(m+n)$ неодређених сачинилаца. Да би сад нова једначина била доиста идентична морају сачиниоци једнаких степена од x лево и десно од знака једнакости бити један другоме једнаки, или ако је та једначина сведена на нулу, морају поједини сачиниоци њени бити $= 0$.

Ако дакле напишемо, да су сачиниоци једнаких степена од x у новој једначини међу собом једнаки или, кад је та једначина сведена на нулу, ако напишемо, да су њени поједини сачиниоци $= 0$ добићемо $(m+n)$ хомогених једначина првога степена између $(m+n)$ поменутих неодређених сачинилаца.

Да би сад те нове једначине $(m+n)$ на броју могле заједно опстати, треба, да је њина детерминанта $= 0$. Ако је — детерминанту — ставимо $= 0$, добићемо резултанту горњих једначина.

Пример. Ако једначине:

$$1.)\quad ax^2 + bx + c = 0, \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

имају један заједнички корен, онда треба да је за ма какво x:

$$(A_1x + B_1)(ax^2 + bx + c) = (Ax + B)(a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

или

$$(A_1a - Aa_1)\,x^3 + (A_1b + B_1a - Ab_1 - Ba_1)\,x^2 +$$

$$+ (A_1c + B_1b - Ac_1 - Bb_1)\,x + B_1c - Bc_1 = 0$$

одавде стављајући једнаке нули поједине ове сачиниоце, добијамо четири хомогене једначине између четири непозната сачиниоца A_1, B_1, A и B:

$$\begin{aligned} A_1a \qquad\qquad &- Aa_1 = 0 \\ A_1b + B_1a &- Ab_1 - Ba_1 = 0 \\ A_1c + B_1b &- Ac_1 - Bb_1 = 0 \\ B_1c \qquad &- Bc_1 = 0 \end{aligned}$$

Из ових једначина на основу № 174 алгеб. анал. следује:

$$2.) \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & a_1 & 0 \\ b & a & b_1 & a_1 \\ c & b & c_1 & b_1 \\ 0 & c & 0 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$(ac_1)^2 - (ab_1)(bc_1) = 0.$$

и то је резултанта датих једначина, т. ј. услов, да имају један заједнички корен.

I Примедба. По Sylvester-овој методи, која је објашњена у №-ма 175 и 189 алг. анал. нашли бисмо као резултанту исту једначину 2), с том разликом само, што би се врсте детерминанте 2) јавиле као стубови и обратно.

II 47. Друга метода избацивања јесте: Bezout-ова, која је згоднија од Sylvester-ове и Euler-ове у томе, што даје резултанту у облику простије детерминанте. Да бисмо је лакше схватили, ми ћемо је објаснити на овом примеру:

Узмимо, да су нам дате ове две једначине:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0$$

Помножимо ове једначине редом са:

$$a_1 \quad \text{и} \quad a$$

$$a_1x + b_1 \quad \text{и} \quad ax + b$$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{и} \quad ax^2 + bx + c$$

и одузмимо сваки пут добивене проиводе. На тај начин добићемо три нове једначине:

$$\begin{aligned} &(ab_1)\,x^2 + (ac_1)\,x + ad_1 = 0 \\ &(ac_1)\,x^2 + [(ad_1) + (bc_1)]\,x + bd_1 = 0 \\ &(ad_1)\,x^2 + (bd_1)\,x + cd_1 = 0, \end{aligned}$$

одакле по избацају од x^2 и x добијамо:

$$\begin{vmatrix} (ab_1), & (ac_1), & (ad_1) \\ (ac_1), & (ad_1)+(bc_1), & (bd_1) \\ (ad_1), & (bd_1), & (cd_1) \end{vmatrix} = 0,$$

као резултанту даних једначина. Ова детерминанта, чији су основци:

$$(ab_1), \quad (ac_1), \quad (ad_1), \quad (bc_1) \quad \text{и т. д.}$$

опет детерминанте, али другог реда, јесте као што се види симетрична. Да смо тражили резултанту но Eulerовој или Sylvester-овој методи, ми бисмо добили детерминанту 6-ог реда:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b_1 & a_1 & 0 \\ c & b & a & c_1 & b_1 & a_1 \\ d & c & b & d_1 & c_1 & b_1 \\ 0 & d & c & 0 & d_1 & c_1 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} = 0$$

IV

48. Метода избацивања, коју ћу сада да покажем и која је по принципу иста са Bezout-овом методом, носи име инглеског научара: Cayley-a.

Нека су задате једначине:

1.) $$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0$$

Ма која од ових двеју једначина може се сменути једначином:

2.) $$f(x) + \lambda\varphi(x)$$

где је λ са свим произвољно. Ако узмемо, да је н. пр.

$$\lambda = -\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$$

онда се једначина 2) претвара у:

3.) $$f(x)\,\varphi(x_1) - \varphi(x)\,f(x_1) = 0.$$

Ова једначина у којој је x_1 са свим произвољно, може сменути ма коју од једначина 1), а њена лева страна дељива је са $x-x_1$, пошто је она — једначина 3) — задовољена вредношћу $x = x_1$. Ако дакле поделимо једначину 3) са $x-x_1$, онда нова једначина:

4.) $$F(x, x_1) = 0$$

биће нижег степена, но што је она од двеју једначина под 1), која је вишег степена. Једначина 4) вреди за сваку вредност x-а, која задовољава обе једначине под 1) а у исти мах и за све могуће вредности од x_1. Дакле сачиниоци узастопних степена од x_1 у једначини 4) морају бити сваки за се једнаки 0, кад x значи једну од оних вредности, која је заједнички корен једначина 1). Дакле, кад сачиниоце узастопних степена од x_1 у једначини 4) ставимо сваког посебице = 0, добићемо једначине, које су последице задатих, то ће рећи, које вреде за све оне вредности x-а, које су заједнички корени једначина 1). Из тих једначина, којих је број за јединицу већи од највишег x-вог степена избациваћемо поједине степене x-а, сматрајући при том сваки степен x-а као једну непознату.

Пример. Узмимо да се има избацити x из једначина:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Из ових једначина саставимо једначину:

$$(ax^2 + bx + c)(a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1) - (a_1x^2 + b_1x + c_1) \times$$
$$\times\ (ax_1^2 + bx_1 + c) = 0$$

која се може написати и овако:

$$(ab_1)(x-x_1)xx_1+(ac_1)(x^2-x_1^2)+(bc_1)(x-x_1)=0.$$

Кад поделимо са $(x-x_1)$ и уредимо по степенима x-а, добићемо:

$$[(ab_1)x+(ac_1)]x_1+(ac_1)x+(bc_1)=0$$

Одавде по правилу о неодређеним сачиниоцима добијамо:

$$(ab_1)x+(ac_1)=0, \quad (ac_1)x+(bc_1)=0$$

а одавде опет по избацају x-а:

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) \\ (ac_1) & (bc_1) \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (ab_1)(bc_1)-(ac_1)^2=0$$

као резултанту даних једначина.

49. Последња метода избацаја, коју још имамо да пређемо, јесте Cauchy-јева. Она у ствари није ништа друго, до опет Bezout-ова метода, али усавршена.

Узмимо, да се x има избацити из две једначине обе истог степена:

$$1.)\quad f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

$$2.)\quad \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0$$

Да бисмо сад нашли резултанту ових једначина, пребацимо с лева на десно у обема најпре први члан; за тим прва два, прва три, . . . првих m чланова. На тај начин добићемо m спрегова једначина. Једначине сваког спрега поделимо једну другом, и у новим једначинама, које будемо за тим добили, скратимо бројиоце и имениоце разломака лево од знака једнакости редом са x^m, x^{m-1}, ... x^2 и x па ћемо добити овај низ једначина:

$$3.)\quad \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m} \\[2ex] \dfrac{a_0x+a_1}{b_0x+b_1}=\dfrac{a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_2x^{m-2}+b_3x^{m-3}+\ldots+b_{m-1}x+b_m} \\[2ex] \dfrac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}=\dfrac{a_3x^{m-3}+a_4x^{m-4}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_3x^{m-3}+b_4x^{m-4}+\ldots+b_{m-1}x+b_m} \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{a_0x^{m-2}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-2}}{b_0x^{m-2}+b_1x^{m-3}+\ldots+b_{m-2}}=\dfrac{a_{m+1}x+a_m}{b_{m+1}x+b_m} \\[2ex] \dfrac{a_0x^{m-1}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}}{b_0x^{m-1}+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}}=\dfrac{a_m}{b_m} \end{cases}$$

За вредност x-а, која је заједнички корен једначинама 1) и 2) морају вредети све ове једначине. Ми ћемо их ослободити именилаца свести на 0, и уредити по степенима x, па ћемо добити:

$$4.)\quad \begin{cases} A_1x^{m-1}+B_1x^{m-2}+C_1x^{m-3}+\ldots+G_1x+H_1=0 \\ A_2x^{m-1}+B_2x^{m-2}+C_2x^{m-3}+\ldots+G_2x+H_2=0 \\ A_3x^{m-1}+B_3x^{m-2}+C_3x^{m-3}+\ldots+G_3x+H_3=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-1}x^{m-1}+B_{m-1}x^{m-2}+C_{m-1}x^{m-3}+\ldots+ \\ \qquad +G_{m-1}x+H_{m-1}=0 \\ A_mx^{m-1}+B_mx^{m-2}+C_mx^{m-3}+\ldots+G_mx+H_m=0 \end{cases}$$

где је:

$$A_1 = (a_0b_1),\quad B_1 = (a_0b_2),\quad \ldots\ldots\ldots\quad H_1 = (a_0b_m)$$

$$A_2 = (a_0b_2),\quad B_2 = (a_0b_3) + (a_1b_2)\quad \ldots\quad H_2 = (a_1b_m)$$

$$A_3 = (a_0b_3),\quad B_3 = (a_0b_4) + (a_1b_3)\quad \ldots\quad H_3 = (a_2b_m)$$

. . . .

$$A_{m-1} = (a_0b_{m-1}),\quad B_{m-1} = (a_0b_m) + (a_1b_{m-1})\quad H_{m-1} = (a_{m-2}b_m)$$

$$A_m = (a_0b_m),\qquad B_m = (a_1b_m)\qquad\qquad H_m = (a_{m-1}b_m)$$

У овим једначинама ограђени изрази десно од знака једнакости јесу детерминанте другог реда, које су по Cauchy-у и Jacobi-у означене. Из тих једначина видимо, да је свака једначина под 4) $(m-1)$-ог степена и да су сачиниоци истих линеарне функције сачинилаца једначине 1) као и сачинилаца једначине 2).

Једначине 4) јесу првог степена односно $(m-1)$ непознатих:

$$x^{m-1},\quad x^{m-2},\quad x^{m-3}\ \ldots\ x^2,\quad x$$

Пошто вредност x-а, која је заједнички корен једначина 1) и 2), задовољава једначине 4) то онда (№ 174 алгеб. анал.) детерминанта тих једначина мора бити $= 0$, дакле:

$$5.)\qquad \triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2 & H_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \ldots & G_3 & H_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} & \ldots & G_{m-1} & H_{m-1} \\ A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m & H_m \end{vmatrix} = 0$$

И ова детерминанта, која је m-ог степена односно сачинилаца и једне и друге једначине, јесте резултанта тих једначина.

Пример. Тражи се резултанта једначина:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\quad a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d = 0$$

Из њих добијамо:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{bx^2 + cx + d}{b_1x^2 + c_1x + d_1}$$

$$\frac{ax + b}{a_1x + b_1} = \frac{cx + d}{c_1x + d_1}$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1} = \frac{d}{d_1}$$

Кад ове три једначине ослободимо именилаца, сведемо на нулу и уредимо, добићемо, кад се послужимо Cauchy-јевим означавањем детерминаната:

$$(ab_1)\,x^2 + (ac_1)\,x + (ad_1) = 0$$

$$(ac_1)\,x^2 + [(ad_1) + (bc_1)]\,x + (bd_1) = 0$$

$$(ad_1)\,x^2 + (bd_1)\,x + (cd_1) = 0$$

Резултанта ових једначина јесте:

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) & (ad_1) \\ (ac_1) & (ad_1) + (bc_1) & (bd_1) \\ (ad_1) & (bd_1) & (cd_1) \end{vmatrix} = 0$$

2. 50. Узмимо сад, да се тражи резултанта једначина:

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ .\ .\ .\ + a_m = 0$$

$$2.)\quad \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ .\ .\ .\ + a_n = 0,$$

где је $m > n$. Ако једначину 2) помножимо са x^{m-n} добићемо из ње једначину истог степена с првом,

$$3.)\qquad b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ .\ .\ .\ + b_mx^{m-n} = 0$$

Онако исто као што смо у № 49) из једначина 1) и 2) извели једначине 3), изводимо и овде једначине:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + a_m}{b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + b_nx^{m-n}}$$

$$\frac{a_0x + a_1}{b_cx + b_1} = \frac{a_2x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + a_m}{b_2x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + b_nx^{m-n}}$$

$$\frac{a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ .\ .\ .\ + a_{n-1}}{b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ .\ .\ .\ + b_{n-1}} = \frac{a_nx^{m-n} + \ .\ .\ .\ + a_m}{b_nx^{m-n}}$$

које се дају преставити и овако:

$$4.)\quad \left|\begin{array}{l} A_1x^{m-1} + B_1x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + H_1 = 0 \\ A_2x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + H_2 = 0 \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ A_nx^{m-1} + B_nx^{m-2} + \ .\ .\ .\ + H_n = 0 \end{array}\right.$$

К овим једначинама придружићемо још и ове:

$$5.)\quad \left|\begin{array}{r} b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ = 0 \\ b_0x^{m-2} + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ = 0 \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ b_0x^n + \ .\ .\ .\ + b_n = 0 \end{array}\right.$$

која постаје, кад се једначина 2) поступно помножи са степенима x-а: x^{m-1-n}, x^{m-2-n} . . . x^2, x^1, x^0, којих је $(m—n)$ на броју. На тај начин добијамо у једначинама 4) и 5) један систем од m једначина са $(m—1)$ непознатом: x^{m-1}, x^{m-2} . . . x^2, x, које могу заједно опстати само тако, ако је:

$$6.)\quad \triangle = \left|\begin{array}{cccccc} A_1 & B_1 & C_1 & . & . & . \ \ H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & . & . & . \ \ H_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ A_n & B_n & C_n & . & . & . \ \ H_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . \ \ 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & . \ \ 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \ \ b_n \end{array}\right| = 0$$

Ово је резултанта даних једначина. Она је n-ог степена односно сачинилаца a функције $f(x)$, а m-ог степена односно сачинилаца b функције $\varphi(x)$.

Пример. Тражи се резултанта једначина:

$$7.)\quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,\quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Ако другу једначину помножимо са x^2 добићемо:

$$8.)\qquad a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 = 0,$$

која је истог степена са првом под 7).

По горњем упуству добијамо једначине:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{bx^3 + cx^2 + dx + e}{b_1x^3 + c_1x^2}$$

$$\frac{ax + b}{a_1x + b_1} = \frac{c_1x^2 + dx + e}{c_1x^2}$$

које се могу преставити и овако:

$$(ab_1)\,x^3 + (ac_1)\,x^2 - da_1\,x -- ea_1 = 0$$

$$(ac_1)\,x^3 + \left\{(bc_1) - da_1\right\} x^2 - (db_1 + ea_1)\,x - eb_1 = 0$$

ка којима придолазе и ове две:

$$a_1\,x^3 + b_1x^2 + c_1x = 0$$

$$a_1\,x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

На тај начин добили смо четири једначине са три непознате: x^3, x^2, x, које могу заједно опстати само тако, ако је њихова детерминанта $= 0$, т. ј.

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) & da_1 & ea_1 \\ (ac_1) & (bc_1) - da_1 & db_1 + ea_1 & eb_1 \\ a_1 & b_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & -b_1 & -c_1 \end{vmatrix} = 0$$

а то је резултанта даних једначина под 7).

X. Наставак о резултантама и дискриминанте.

51. У алгебарској анализи № 189 ми смо показали, како се по Sylvester-овој методи налази лако у облику детерминанте резултанта двеју једначина:

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

$$2.)\quad \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

Овде ћемо показати, да тамошња детерминанта по вредности није различна од израза нађених за R и R_1 у №-и 44.

Узмимо нека је u вредност функције $f(x)$, кад замислимо, да x у овој последњој значи један ма који корен једначине 2) онда за тај корен морају вредети једначине:

$$3.)\qquad \underline{f(x) - u = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0}$$

па дакле и једначине:

$$4.)\quad \begin{cases} f(x) - u = 0,\ xf(x) - xu = 0 \ldots x^{n-1}f(x) - x^{n-1}u = 0 \\ \varphi(x) = 0, \qquad x\varphi(x) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ x^{m-1}\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

или:

1'

$$\left\{\begin{array}{rr} a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + \ldots + (a_m - u)\,x^{n-1} & = 0 \\ a_0x^{m+n-2} + \ldots + a_{m-1}x^{n-1} + (a_m - u)\,x^{n-2} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_0x^{m+n-1} + b_1x^{m+n-2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0 \\ b_0x^{m+n-2} + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Но онда на основу № 189 алг. анал.

$$\psi(u) = 0$$

где $\psi(u)$ значи детерминанту:

$$5.)\quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & (a_m - u) & \dots & & \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & (a_m - u) & \dots & \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & (a_m - u) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ако су дакле:

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \dots \beta_n$$

корени једначине 2) онда, кад један ма који од тих корена задовољава обе једначине под 3) мора бити:

$$\psi(u) = \psi[f(x)] = 0$$

то ће рећи, вредност од $u = f(x)$, која одговара томе корену, јесте један корен једначине:

$$6.)\qquad \psi(u) = 0 = g_0 u^m + g_1 u^{m-1} + \dots - g_m$$

Сви корени ове једначине јесу:

$$f(\beta_1), \quad f(\beta_2), \dots f(\beta_n)$$

Као што је познато, кад се последњи сачинилац g_m једначине 6) подели са првим, g_0 онда тако добивени количник R мора бити $=$ производу:

$$\frac{g_m}{g_0} = (-1)^m f(\beta_1) f(\beta_2) f(\beta_3) \dots f(\beta_n)$$

Но лако је увидети, по детерм. 5) да је последњи члан једначине 6):

$$7.)\; g_m = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = R$$

а то је детерминанта $(m + n)$-ог реда у № 189 алгебарске анализе у којој су основци првих n врста сачиниоци функције $f(x)$, а основци последњих m врста сачиниоци функције $\varphi(x)$. $g_0 = (-1)^m b_0^m$

Дакле је:

$$R = b_0^m f(\beta_1) f(\beta_2) \dots (f\beta_n)$$

Али из образаца 3) и 4) у № 43 следује:

$$b_0^m f(\beta_1) f(\beta_2) \ . \ . \ . \ f(\beta_n) = (-1)^{mn} a_0^n b_0^m \varphi(\alpha_1) \ . \ . \ . \ \varphi(\alpha_m)$$

Дакле је R цела и рационална симетричка функција како корена α, тако и корена β, и осим тога цела и хомогена функција n-ог степена сачинилаца a и цела и хомогена функција m-ог степена сачинилаца b.

$R = 0$ јесте резултанта једначина:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0.$$

52. Резултанта R функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ јесте у исти мах и резултанта функције:

$$\varphi(x) + \lambda f(x)$$

Јер детерминанта 7) остаје иста, пошто се ка m последњих врста њених додају са λ помножене остале врсте (№ 151 алгеб. анализе) и то, ка $(n+1)$-ој прва, ка $(n+2)$-ој друга, ка $(n+3)$-ој трећа и т. д.!)

1. Резултанта функција (fx) и $(x-t)\varphi(x)$ једнака је производу из резултанте функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ и резултанте функција $f(x)$ и $(x-t)$, пошто је тражена резултанта:

$$b_0^m f(\beta_1) f(\beta_2) \ . \ . \ . \ f(\beta_n) f(t) = R f(t)$$

2. Ако сад једначине:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0$$

имају један или више заједничких корена, онда ће $f(x)$ и $\varphi(x)$ имати заједничка делиоца првог или вишег степена, и сачиниоци тога делиоца биће целе и хомогене функције познатих сачинилаца. Јер за сваки заједнички корен морају на основу №-е 51 вредети ових $(m+n)$ једначина:

) [illegible]

[illegible]

$$1.)\quad \left|\begin{array}{l} a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + a_2x^{m+n-3} + \ldots + a_mx^{n-1} = 0 \\ \qquad a_0x^{m+n-2} + a_1x^{m+n-3} + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ = 0 \\ \qquad\qquad a_0x^{m+n-3} + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ = 0 \\ \qquad\qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ b_0x^{m+n-1} + b_1x^{m+n-2} + b_2x^{m+n-3} + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ = 0 \\ \qquad b_0x^{m+n-2} + b_1x^{m+n-3} + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ = 0 \\ \qquad\qquad b_0x^{m+n-3} + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ = 0 \\ \qquad\qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{array}\right.$$

Дакле детерминанта ових једначина, коју смо били означили са R, мора бити $= 0$. Али тако исто за сваки заједнички корен мора бити $= 0$ очевидно и детерминанта $(n+m-1)$-ог реда, која постаје из $(n+m-1)$ првих једначина под 1).

$$2.)\quad \begin{vmatrix} a_0x + a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & . & . \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & . \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & . & . \\ b_0x + b_1 & b_2 & b_3 & . & . & . & . & . \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & . \\ & & b_0 & b_1 & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = R_{11}x + R_{10} = 0$$

То исто вреди и за детерминанту $(n+m-2)$-ог реда, која постаје из $(n+m-2)$ прве једначине под 1).

$$\left|\begin{array}{rccc} a_0x^2+a_1x+a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ b_0x^2+b_1x+b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ b_0x+b_1 & b_3 & b_3 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{array}\right| = R_{22}x^2+R_{21}x+R_{20}$$

и т. д. Да је истина ово што тврдимо увиђа се овако: Кад последњу једначину од оних под 1) изоставимо, остаће нам још $(m+n-1)$ једначина. Ако сада у овим једначинама из чланова, који су у првом и другом стубу извадимо x^{m+n-2} као заједничког чиниоца, онда у тим једначинама можемо сматрати степене x-а:

$$x^{m+n-2},\quad x^{m+n-3},\quad \ldots\; x^3,\; x^2,\; x$$

као толико непознатих. И пошто је ових непознатих $(m+n-2)$, а број једначина $(m+n-1)$, то оне могу заједно опстати само тако (№ 174 алгеб. анал.), ако је детерминанта сачинилаца тих једначина једнака 0. А та детерминанта јесте она под 2) и т. д.

У осталом истинитост горњег тврђења може се такође лако доказати и згодном применом последње теореме у № ~~117~~ 171 алгеб. анал. Треба т. ј. помоћу те теореме преобразити детерминанту 2) тако, да сваки од n првих основака у првом стубу буде $= f(x)$, а сваки од осталих m основака истог стуба, да буде једнак функцији $\varphi(x)$. Тада сви основци првог стуба јесу једнаки нули за ма који заједнички корен једначина:

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0$$

Сачиниоци:

$$R_{10},\; R_{11},\; R_{20},\; R_{21},\; R_{22} \text{ и т. д.}$$

који се јављају у детерминантама 1) и 2) и т. д. јесу познате субдетерминанте главне детерминанте R, и с тога су оне целе и хомогене функције сачинилаца $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Ако детерминанта R није $= 0$ онда $f(x)$ и $\varphi(x)$ немају заједничког чиниоца, или, што је све једно једначине $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ немају заједничких корена. Ако ли је $R = 0$ али не и R_{11} онда (fx) и $\varphi(x)$ имају као заједничког чиниоца функцију првог степена: $R_{11}x + R_{10}$. Ако је $R = 0$ и $R_{11} = 0$, али не и R_{22}, онда $f(x)$ и $\varphi(x)$ имају као заједничког делиоца функцију другог степена:

$$R_{20} + R_{21}x + R_{22}x^2$$

и т. д. Ако је $R_{22} = 0$ онда мора и R_{21} бити $= 0$, јер би иначе $f(x)$ и $\varphi(x)$ имале као заједнички корен ∞.

Пример. Нека су задате једначине:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Кад радимо по показаној методи, наћићемо, да $f(x)$ и $\varphi(x)$ имају као заједничког делиоца:

$$x^2 + x - 2$$

или, да дане једначине имају $+1$ и -2 као заједничке корене.

53. Ако је функција $\varphi(x)$ у № 51 и доцнијима први извод функције $f(x)$, онда је њихова резултанта:

$$a_0^{m-1} f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ . \ . \ . \ f'(\alpha_m) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ . \ . \ . \ a_{m-2} \quad a_{m-1} \quad a_m \\ \quad\quad a_0 \quad a_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ a_{m-2} \quad a_{m-1} \quad a_m \\ \quad\quad\quad\quad a_0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ a_{m-1} \quad a_m \\ \quad\quad\quad\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \longrightarrow \quad\quad\quad\quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ a_m \\ m\,a_0 \quad (m-1)\,a_1 \quad (m-2)\,a_2 \ . \ . \ . \ 2a_{m-2} \quad a_{m-1} \\ \quad\quad\quad\quad m a_0 \quad (m-1)\,a_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ a_{m-1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad m a_0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 2a_{m-2} \quad a_{m-1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad m a_0 \quad (m-1)\,a_1 \ . \ . \ . \ a_{m-1} \end{array} \right|$$

Одозго па до стрелице има $(m-1)$, а од ње па до краја има још m врста.) Кад од m-не врсте одузмемо са m помножену прву врсту, онда ће први основак m-не врсте постати $= 0$, и тако ће онда резултанта бити јед-

) дакле то је детерм. $(2m-1)^{ог}$ реда.

нака производу из a_0 и једне детерминанте $(2m-2)$-ог реда. Ако ту детерминанту означимо са D, онда је на основу № 37:

$$D = a_0^{m-2} f'(\alpha_1) \ . \ . \ . \ f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-2)}{1 \cdot 2}} a_0^{2m-2} \Delta_m$$

где Δ_m значи производ квадрата разлика, које постају кад се сваки од m корена:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2 \quad . \ . \ . \ . \quad \alpha_m$$

одузме од свију доцнијих. Детерминанта D, која је (№ 37) цела и симетрична функција корена $\alpha_1, \alpha_2 \ . \ . \ . \ \alpha_m$ а цела и хомогена функција сачинилаца $a_0, a_1, a_2 \ . \ . \ . \ a_m$ и то $(2m-2)$-ог степена, зове се *дискриминанта* функције $f(x)$ или једначине $f(x) = 0$.

Дискриминанта производа $f(x)\ \varphi(x)$ јавља се, без обзира на знак као производ из дискриминаната функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ и квадрата резултанте истих функција. О истинитости тога можемо се лако уверити, ако дискриминанту производа преставимо као производ из квадрираних разлика свију корена, јер се тада тај производ може лако разложити на поменуте чиниоце. 1.

Кад дискриминанта функције $f(x)$ није $= 0$, онда $f(x)$ и $f'(x)$ немају заједничког чиниоца, или једначина $f(x) = 0$ нема једнаких корена. Али ако је дискриминанта функције $f(x)$ једнака нули, онда $f(x)$ и $f'(x)$ имају заједничка делиоца, дакле и једначина $f(x) = 0$ имаде једнаких корена. Што се тиче израчунавања заједничког делиоца функцијама $f(x)$ и $f'(x)$, вреди оно, што је казано у № 52. 2.

Ако $f(x)$ и $f'(x)$ имају заједничког чиниоца $[\varphi(x)]^k$ и дискриминанта функције $\varphi(x)$ није $= 0$, онда је функција $f(x)$ дељива са $[\varphi(x)]^{k+1}$. Јер ако је: 3.

$$f(x) = [\varphi(x)]^{k} \cdot \psi(x)$$

онда је

$$f'(x) = k\,[\varphi(x)]^{k-1}\,\varphi'(x)\,\psi(x) + [\varphi(x)]^{k}\,\psi'(x)$$

Пошто $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ немају заједничког делиоца, јер дискриминанта функције $\varphi(x)$ није $= 0$, и пошто је на основу претпоставке функција $f'(x)$ дељива са $[\varphi(x)]^{k}$, то онда функција $\psi(x)$ мора бити дељива са $\varphi(x)$, одакле следује, да функција $f(x)$ мора бити дељива са $[\varphi(x)]^{k+1}$.

54. Кад једној хомогеној функцији, која зависи од n промењљивих, тражимо први извод односно сваке од тих промењљивих, онда резултанта тих n извода зове се *дискриминанта* функције.

Дискриминанта једне хомогене функције са више промењљивих добија се дакле, кад се њени изводи односно сваке промењљиве ставе $= 0$ и из тако добивених једначина све промењљиве избаце. Но ваља приметити да се при том не узимље у обзир бројни сачинилац, који би можда уз дискриминанту стајао.

α. Тако је дискриминанта функције;

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

резултанта једначина:

$$\frac{1}{2} f'_x(x, y) = ax + by = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y(x, y) = bx + cy = 0$$

то јест детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

β, Дискриминанта функције:

$$f(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + hz^2$$

јесте резултанта једначина:

$$\frac{1}{2} f'_x = ax + by + dz = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y = bx + cy + ez = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_z = dx + ey + hz = 0$$

дакле детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & h \end{vmatrix} = ach + 2bde - ae^2 - cd^2 - hb^2$$

γ, Даље дискриминанта функције:

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

јесте резултанта једначина:

$$\frac{1}{3} x f'_x = ax^3 + 2bx^2 y + cxy^2 \qquad = 0$$

$$\frac{1}{3} y f'_x = \qquad ax^2 y + 2bxy^2 + cy^3 = 0$$

$$\frac{1}{3} x f'_y = bx^3 + 2cx^2 y + dxy^2 \qquad = 0$$

$$\frac{1}{3} y f'_y = \qquad bx^2 y + 2cxy^2 + dy^3 = 0$$

у којој изразе:

$$x^3,\ x^2 y,\ xy^2,\ y^3$$

сматрамо као променљиве. Избацајем ових добијамо као тражену дискриминанту:

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$$

5. Најзад дискриминанта функције са четири променљиве количине:

$$f(x, y, z, u) = ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2 + 2byz + 2b_1 xz +$$

$$+ 2b_2 xy + 2cxu + 2c_1 yu + 2c_2 zu + du^2$$

јесте резултанта једначина

$$\frac{1}{2} f'_x = a\,x + b_2 y + b_1 z + c\,u = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y = b_2 x + a_1 y + b\,z + c_1 u = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_z = b_1 x + b\,y + a_2 z + c_2 u = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_u = c\,x + c_1 y + c_2 z + d\,u = 0$$

то јест, детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b_2 & b_1 & c \\ b_2 & a_1 & b & c_1 \\ b_1 & b & a_2 & c_2 \\ c & c_1 & c_2 & d \end{vmatrix}$$

или, кад развијемо ову детерминанту:

$$\Delta = d(aa_1 a_2 + 2bb_1 b_2 - ab^2 - a_1 b_1^2 - a_2 b_2^2) + c^2(b^2 - a_1 a_2) +$$

$$+ c_1^2(b_1^2 - a_2 a) + c_2^2(b_2^2 - aa_1) + 2c_1 c_2(ab - b_1 b_2) +$$

$$+ 2c_2 c(a_1 b_1 - b_2 b) + 2cc_1(a_2 b_2 - bb_1).$$

55. Узмимо сад да нам је дата хомогена функција x-а и y-а m-ог степена

$$1.)\quad f(x, y) =$$

$$= a_0x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1}y + \binom{m}{2} a_2x^{m-2}y^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{m}{1} a_{m-1}xy^{m-1} + a_my^m,$$

у којој смо појединим члановима додали као чинитеље биномне сачиниоце само зарад тога, да би се прво у изводима функције $f(x, y)$, пошто смо их најпре са m поделили, налазили сачиниоци истог рода и друго, да би $f(x, y)$ била савршени n-ти степен у оном случају, где су сачиниоци

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2 \; . \; . \; . \; . \; a_m$$

чланови једне геометријске постепености.

Са m подељени први изводи функције $f(x, y)$ односно x и y јесу:

$$2.)\quad \frac{1}{m} f'_x =$$

$$= a_0x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_1 x^{m-2}y + \binom{m-1}{2} a_2x^{m-3}y^2 + \ldots . +$$

$$+ a_{m-1}\, y^{m-1}$$

$$3.)\quad \frac{1}{m} f'_y =$$

$$= a_1x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_2\, x^{m-2}y + \binom{m\quad 1}{2} a_3x^{m-3}y^2 + \ldots . +$$

$$+ a_my^{m-1}$$

и резултанта ових функција јесте дискриминанта функције $f(x, y)$. Та дискриминанта јесте хомогена функција сачинилаца a степена $(2m-2)$-ог.

Ако у 1), 2), и 3) ставимо $y = 1$, онда се $f(x, y)$ претвара у функцију:

$$f(x) = a_0x^m + \binom{m}{1} a_1x^{m-1} + \binom{m}{2} a_2x^{m-2} + \ldots . +$$

$$+ \binom{m}{1} a_{m-1}x + a_m$$

са једном само променљивом x. Функција под 2) претвара се у први извод функције $f(x)$, али са m подељени, а функција под 3) претвара се у функцију:

$$f(x) - \frac{1}{m} x f'(x)$$

Резултанта ове функције и функције $f'(x)$, или што је све једно, резултанта функција:

$$4.)\qquad f'(x) \quad и \quad 5.)\quad mf(x) - x f'(x)$$

није ништа друго до дискриминанта $f(x)$ у № 53. Јер *прво* дискриминанта функције $f(x)$ и резултанта функција 4) и 5) јесу обе целе и хомогене функције сачинилаца a и то $(2m-2)$-ог степена, и *друго* из израза 4) и 5) види се, да заједнички делилац функција $f(x)$ и $f'(x)$ јесте у исти мах заједнички делилац функције $f'(x)$ и оне под 5) одакле следује, да дискриминанта функције $f(x)$ и резултанта функција 4) и 5) морају у исти мах бити $= 0$. И *треће* количник између споменуте дискриминанте и резултанте не зависи од сачинилаца a. Јер кад у детерминанти D у почетку №-е 53, помножимо са бројем m прве $(m-2)$ врсте, па онда одузмемо од њих редом m-ну и доцније врсте, дакле од прве m-ну, од друге $(m+1)$-ву и т. д. добићемо као резултат производ из $(-1)^{m-1} ma_0$ и резултанте функција:

$$mf(x) - xf'(x) \quad \text{и} \quad f'(x)$$

Да бисмо дакле нашли дискриминанту функције $f(x)$, која је цела и рационална функција x-а m-ог степена, треба само резултанту последњих двеју функција тражити, и та резултанта биће тражена дискриминанта. Или треба $f(x)$ начинити хомогеном множећи њене чланове са y^0, y^1, y^2, y^3, . . . y^{m-1}, y^m, па онда тражити тако добивеној функцији $f(x, y)$ дискриминанту, како је у почетку ове №-е показано, а то је резултанта функција:

$$\frac{1}{m} f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{1}{m} f'_y(x, y).$$

Примери. Дискриминанта функције:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2$$

јесте резултанта функција:

$$a_1x + a_2 \quad \text{и} \quad a_0x + a_1$$

дакле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2$$

Исто је тако дискриминанта функције:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3$$

резултанта функција:

$$a_1x^2 + 2a_2x + a_3 \quad \text{и} \quad a_0x^2 + 2a_1x + a_2$$

то јест:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

или по Cauchy-јевој методи

$$\begin{vmatrix} 2(a_1^2 - a_0a_2), & (a_1a_2 - a_0a_3) \\ (a_1a_2 - a_0a_3), & 2(a_2^2 - a_1a_3) \end{vmatrix}.$$

XI. Решавање општих једначина.

56. Општом једначином зове се једначина, у којој су сачиниоци писмена. Пошто корени сваке једначине јесу функције њених сачинилаца, то се разрешавање општих једначина састоји у тражењу функције, у којој је исказан закон, како буди који корен те једначине зависи од њених сачинилаца. И кад је таква функција нађена, онда нам она мора дати све корене задате једначине. Према томе, ако је задата једначина m-ог степена и поменута функција мора имати m вредности. Тако н. пр.

из ниже алгебре знамо, да нам оба корена квадратне једначине:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

даје образац:

$$x = -\frac{a_1 \quad \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0},$$

велим оба корена, јер се квадратни корен може узети у обрасцу и са знаком $+$ и са знаком $-$.

Али треба сад одмах приметити, да се такве функције, у којима би био исказан закон зависности корена једначине од њених сачинилаца, могу изнаћи само још за једначине 3-ег, 4-ог, али не и вишег степена, као што су то Ruffini и Abel доказали. Само у извесним случајејевима као н. пр. кад се из самог облика задате једначине може сазнати природа корена, могуће је да решимо општу једначину и вишег степена од четвртог. То је случај код реципрочних, биномних, триномних и још неких једначина.

Једначине трећег степена.

57. Кад се једначина трећег степена, која се зове и *кубном*, уреди, она изгледа овако:

1.) $$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Пошто се из ове једначине може по методи № 18 избацити други члан, јер зарад тога треба само тражити једначину, чији су корени за $\frac{1}{3}a_1$ мањи од корена дане једначине 1), то онда можемо претпоставити, да нам је дана једначина облика:

2.) $$x^3 + px + q = 0$$

Између многих метода, које су пронађене за разрешавање кубних једначина оваковых, као што је ова под 2), најпростија ми се чини она, по којој се склапа нова кубна једначина истог облика са задатом 2), и која нова једначина има као познати корен један извесни израз састављен из неодређених количина.

Затим се за те неодређене количине траже вредности, за које су нова и задата једначина истоветне. И за такве вредности неодређених количина онда је горе споменути израз очевидно корен и задане једначине Ставимо дакле:

$$x = u + v$$

Кад подигнемо на трећи степен добијамо:

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2.$$

или:

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$

а одавде, кад $u + v$ сменимо са x и за тим једначину сведемо на нулу

3.) $$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0.$$

Овој једначини, која је истог облика са једначином 2), $u + v$ јесте корен. То се јасно увиђа из самог рада, а можемо се о томе уверити, такође, ако место x ставимо у 3) вредност $u + v$.

Да би сад једначине 2) и 3) биле истоветне, треба да је:

$$-3uv = p \quad \text{и} \quad -(u^3 + v^3) = q$$

или

$$4.)\quad uv = -\frac{1}{3}p \quad \text{и} \quad (u^3 + v^3) = -q.$$

То ће рећи вредности за u и v, за које ће једначине 2) и 3) бити истоветне, за које ће дакле вредности израз $(u + v)$ бити корен задате једначине 2) треба да задовољавају једначине 4). Те вредности за u и v добићемо ако разрешимо једначине под 4).

Зарад тога подигнимо прву једначину на трећи степен, па ћемо тада имати:

$$5.)\quad u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3 \quad \text{и} \quad (u^3 + v^3) = -q.$$

Као што се види, познати су нам збир и производ количина u^3 и v^3. Дакле су (№ 6) вредности ових последњих количина корени квадратне једначине:

$$z^2 + qz - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Који ћемо пак од та два корена сматрати као вредност од u^3, а који као вредност од v^3, то је услед обрасца $x = u + v$ са свим свеједно.

Узмимо дакле да је:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

из чега следује:

$$6.)\quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

И ово би биле вредности за које би:

$$7.)\quad x = u + v$$

био корен једначине 2). Али треба се сетити да трећи корен из сваког броја $\pm a$ (алг. анал. № 120) има три вредности, које се добијају, кад се ма која од трију вредности трећега корена $\sqrt[3]{\pm a}$ н. пр. обична или аритметична помножи са $\sqrt[3]{+1}$. Услед тога свака од количина u и v има по три вредности. Ако изразе под 6) сматрамо као обичне или аритметичне вредности од u и v, онда је:

$$8.)\quad u = \sqrt[3]{A},\quad \alpha\sqrt[3]{A},\quad \alpha^2\sqrt[3]{A}$$

$$v = \sqrt[3]{B},\quad \alpha\sqrt[3]{B},\quad \alpha^2\sqrt[3]{B}$$

где су (№ 120 алг. анал.) α и α^2 уображене вредности за $\sqrt[3]{+1}$, т. ј. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$,

и где A и B стоје краткоће ради место израза под првим и другим кубним кореном под 6). Кад бисмо сад у 7) заменули u и v са сваком од њиних вредности, ми бисмо нашли за x свега *девет* вредности, док међу тим једначина трећег степена може имати само три корена. И сад се морамо запитати, па шта је узрок томе што смо добили за x девет вредности и после које су од тих вредности оне, које су корени једначине 2).

На то питање лако је дати одговора. Једначине под 5) из којих смо израчунавали u и v општије су од оних под 4), у којима су исказани услови, које треба да испуне вредности од u и v, па да њихов збир буде корен једначине 2). Јер кад бисмо место једначине 2) имали да разрешимо једначину:

9.) $$x^3 + \alpha p x + q = 0$$

или једначину:

10.) $$x^3 + \alpha^2 p x + q = 0$$

ми бисмо место једначина под 4) добили једначине:

11.) $$uv = -\frac{\alpha p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

или једначине:

12.) $$uv = -\frac{\alpha^2 p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

али би и из једног и из другог од ових спрегова једначина следовале оне под 5).

Одатле следује, да из једначина под 5) морамо добити за u и v не само оне вредности, за које је једначина 3) истоветна са задатом једначином 2), већ и оне, за које је свака од једначина 9) и 10) истоветна са задатом 2). Другаче из једначина 5) морамо добити не само оне вредности за u и v, које сабране дају корене једначине 2), већ и оне, које сабране дају корене једначина 9) и 10). И тиме се тачно објашњава то, што заменом вредности нађених за u и v у 7) добијамо за x свега девет вредности. Три од тих вредности јесу корени јеначине 2), друге три корени једначине 9), а остале три јесу корени једначине 10).

Сад остаје још да се испита, које су од тих девет вредности x-а корени једначине 2), које су пак од њих корени једначине 9), а које су најзад корени једначине 10).

1°. Вредности за u и v, за које је:

$$x = u + v$$

корен једначине 2), треба да су, услед првог обрасца под 4), такве, да је њин производ $= -\frac{1}{3} p$.

2°. Вредности за u и v, за које је:

$$x = u + v$$

корен једначине 9, треба да су, услед првог обрасца под 11), такве, да је њихов производ $= -\frac{1}{3} \alpha p$. И најзад

3°. Вредности за u и v, за које је:

$$x = u + v$$

корен једначине 10) треба да су, услед првог обрасца под 12) такве, да је њин производ $= -\frac{1}{3} \alpha^2 p$.

Према свему, што смо до сад рекли, ако под изразима у 6) разумевамо аритметичне вредности од *u* и *v*, онда се први корен једначине 2) добија, ако у 7) заменимо *u* и *v* са њиним првим вредностима под 8). Тај је дакле корен:

$$13.)\quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Остала два корена јесу:

$$14.)\quad x = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B}\,,\qquad x = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B}$$

где A и B значе прву поткорену количину у 13).

Како ваља у образцу 7) комбиновати вредности од *u* и *v*, што су под 8), те да се добију корени једначина 9) и 10) увиђа се из оног, што је речено под 1°, 2° и 3°.

Образац 13) одакле следују са свим просто обрасци 14), зове се Cardan-ов образац, по имену Талијанца, који га је 1595 год. свету обзнанио, и ако тај образац није пронашао он, већ Tartaglia, опет Талијанац.

58. У овоме, што иде ми ћемо сачиниоце p и q сматрати као *стварне* бројеве.

Да бисмо при овој претпоставци испитали природу корена кубне једначине:

$$x^3 + px + q = 0$$

разликоваћемо три случаја:

1°. Ако је:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0\,,$$

а тај случај може наступити и кад је $p > 0$ и кад је $p < 0$, онда су A и B стварни бројеви и кубна једначина има као што се види из образаца 13) и 14) у № 57 један стваран и два уображена корена.

2°. Ако је:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

а тај случај може наступити само, кад је p у једначини одречно, онда је:

$$A = B = -\frac{1}{2}q\,,$$

дакле тада је један корен (обр. 13):

$$x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\,,$$

а остала два (обр. 14) јесу:

$$x_2 = x_3 = -(\alpha + \alpha^2)\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

Дакле су тада сва три корена стварна, а два су од њих једнака и истог су знака са q.

3°. Ако је:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0\,,$$

а то може бити само онда, кад је $p<0$, онда су A и B уображени и с тога се сва три корена јављају као уображени. Међу тим, пошто је једначина непарног степена, она мора имати бар један стваран корен. Шта више, ако узмемо у обзир обрасце 13) и 14) у № 57 биће нам јасно, да се случај, кад су сви корени кубне једначине стварни, може десити само при садањој претпоставци. И ми ћемо сада да докажемо, да су при садањој претпоставци сви корени кубне једначине нужно стварни. И доиста ако означимо са P и Q аритметичне вредности од u и v у № 57 имаћемо као корене:

1.) $$x=P+Q$$

2.) $$x=\alpha P+\alpha^2 Q$$

3.) $$x=\alpha^2 P+\alpha Q$$

или ако у ове две последње једначине заменимо α и α^2 њиховим вредностима:

4.) $$x=-\frac{(P+Q)}{2}+\left(\frac{P-Q}{2}\right)\sqrt{-3}$$

5.) $$x=-\frac{(P+Q)}{2}-\left(\frac{P-Q}{2}\right)\sqrt{-3}$$

Да бисмо дакле сад доказали, да су сва три корена кубне једначине стварни, ми ћемо узети, да је први корен 1) онај, који је стваран, јер један стварни корен једначина мора имати, и тада остаје само, да се докаже, да је израз:

$$\left(\frac{P-Q}{2}\right)\sqrt{-3}$$

стваран, па ће одатле већ следовати, да су и остала два корена стварна.

Из образаца, којих је истинитост очигледна:

$$(P-Q)(P^2+PQ+Q^2)=P^3-Q^3$$

$$(P^2+PQ+Q^2)=(P+Q)^2-PQ$$

следује:

$$P-Q=\frac{P^3-Q^3}{(P+Q)^2-PQ}$$

Али ако узмемо на ум значење количина P и Q добићемо:

$$P^3-Q^3=2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$PQ=-\frac{1}{3}p$$

Ако сад ставимо:

$$P+Q=a$$

добићемо:

$$P-Q=\frac{2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{a+\frac{1}{3}p}$$

одакле:

$$\frac{P-Q}{2}\sqrt{-3}=\frac{\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}}{a+\frac{1}{3}p}$$

али је сада:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

дакле је израз:

$$\frac{P-Q}{2}\sqrt{-3}$$

стваран и према томе и остала два корена кубне једначине јесу стварни.

Дакле су доиста у случају:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

сва три корена стварна, и ако се они јављају као уображени. Па пошто стари нису били у стању ослободити поменуте корене њихове уображене одеће, а знали су, да ови — корени — у овом случају морају бити стварни, то су они трећи случај назвали несводљивим (casus irreducibilis). Али и сем тога Cardan-ов образац има и ту ману, што је у првом случају израчунавање стварног корена помоћу њега врло теготно због многих извлачења корена, а да и не помињемо још и то, што помоћу њега добијамо често стваран и рационалан корен у ирационалном облику. То је н. пр. случај са једначином:

$$x^3-6x-40=0.$$

Један корен њен јесте 4, док међу тим Cardan-ов образац даје:

$$x=\sqrt[3]{20+\sqrt{400-8}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{400-8}}$$

или кад се овде назначене радње изврше:

$$x=3{\cdot}999\ .\ .\ .\ .$$

Помоћу тригонометријских функција може се Cardan-ов образац 13), из којег се образац 14) лако изводи за рачун згодно приправити. Ми ћемо при том имати на уму само случај 1° и случај 3°, јер се у случају 2° корени јављају у са свим простом облику. Пошто се, кад је $p>0$ јавља увек први случај 1°, а кад је $p<0$ може се јавити први или трећи случај, како је кад

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\gtrless 0,$$

то ћемо у №-и која долази за овом, разликовати три случаја:

$$p>0,\quad p<0 \text{ и } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,\quad p<0 \text{ и } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

59. *Први случај.* Напишимо Cardan-ов образац у овом облику:

$$1.)\quad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}.$$

Пошто знамо да је сваки положан број тангента једног извесног лука, који је већи од 0, а мањи од $\frac{1}{2}\pi$ то нека је φ онај лук за који је:

$$2.)\quad tg\,\varphi = \sqrt{\frac{4p^3}{27\,q^2}} \quad \text{или} \quad tg^2\varphi = \frac{4p^3}{27\,q^2}$$

Одавде следује:

$$\frac{q}{2} = cotg\,\varphi . \sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

Ако још узмемо да је:

$$\sqrt{1 + tg^2\varphi} = \frac{1}{cos\,\varphi},$$

онда се претвара образац 1) у овај:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 - cos\,\varphi}{sin\,\varphi}} - \sqrt{\frac{p^3}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + cos\,\varphi}{sin\,\varphi}}$$

Одавде добијамо даље:

$$3.)\quad x = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\,\varphi} - \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{cotg\,\frac{1}{2}\,\varphi}$$

Ако сад узмемо, да је ψ онај лук, — између 0 и $\frac{\pi}{2}$ — за који је:

$$4.)\quad tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\,\varphi},$$

онда образац 3) прелази у овај:

$$5.)\quad x = \sqrt{\frac{p}{3}}\;tg\,\psi - \sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,\psi$$

Овај образац даје нам први и то стварни корен у оном случају, где је $p > 0$. Остала два корена добијају се (обр. 14 у № 57), и то други кад се први члан десно у обрасцу 5) помножи са α, о други са α^2; а трећи, кад се први члан у 5) десно од знака једнакости умножи са α^2, а други са α.

Ми ћемо гледати, да образац 5), који нам даје стварни корен једначине, преставимо што простије.

Он се даје преставити и овако:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{tg\,\psi - cotg\,\psi\right\} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{sin^2\psi - cos^2\psi}{sin\psi\;cos\psi}\right\} =$$

$$= -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\frac{cos\,2\,\psi}{sin\,2\,\varphi}$$

или најзад:

$$6.)\quad x = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}\;cotg\,2\,\psi$$

Дакле, да бисмо у овом случају, где је $p > 0$, израчунали стварни корен једначине, треба нам најпре из обрасца 2) а помоћу логаритамских таблица израчунати лук φ, а за тим из обрасца 4) израчунати лук ψ. Кад је овај познат, онда из обрасца 6), а помоћу логаритама израчунавамо стварни корен једначине.

За остала два уображена корена налазимо помоћу обрасца 5) лако:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{cotg\, 2\psi + \frac{1}{sin\, 2\psi}\sqrt{-3}\right\}$$

или ако под 6) израчунати стварни корен означимо са x_1, онда:

$$x = -\frac{1}{2}x_1 \pm \sqrt{p}\,\frac{1}{sin\, 2\psi}\sqrt{-1}.$$

Примедба. У овом првом случају и брже је и лакше је тражити корене једначине момоћу образаца 13) и 14) у № 57 извлачећи друге и треће корене помоћу логаритама.

Други случај. $p < 0,\ \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$

Ако у рачунима, који долазе, будемо под p разумевали бројну вредност сачиниоца од x, ако дакле узмемо да је задата кубна једначина:

$$x^3 - px + q = 0$$

онда Cardan-ов образац изгледа овако:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Одавде добијамо даље:

$$8.)\quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27\,q^2}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27\,q^2}}}.$$

Но пошто је сада:

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0,\ \text{дакле}\ \frac{4p^3}{27\,q^2} < 1$$

то смемо узети да је:

$$9.)\quad sin\varphi = \sqrt{\frac{4p^3}{27\,q^2}}\quad \text{или}\quad sin^2\varphi = \frac{4p^3}{27\,q^2},$$

одакле следује:

$$10.)\qquad \frac{q}{2} = \frac{1}{sin\,\varphi}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

Помоћу образаца 9) и 10) образац 8) претвара се у

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 - cos\,\varphi}{sin\,\varphi}} - \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + cos\,\varphi}{sin\,\varphi}}$$

Овај образац може се и овако преставити:

$$11.)\quad x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\,\varphi} - \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{cotg\,\frac{1}{2}\,\varphi}$$

ако сад ставимо:

12) $tg\,\psi = +\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi}$, онда 11) прелази у:

13.) $$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,tg\,\psi - \sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,\psi$$

Овај образац даје стварни корен једначине. Остала два корена добијају се, и то други, кад се у 12) десно помножи први члан са α, а други са α^2; а трећи корен кад се у 12) помножи први члан са α^2, а други са α.

Образац 12), који даје стварни корен, може се још простије преставити овако:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{tg\,\psi + cotg\,\psi\right\}$$

или:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{sin^2\psi + cos^2\psi}{sin\,\psi\,cos\,\psi}\right\}$$

или:

14.) $$x = -\frac{2}{sin\,2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

За остала два — уображена — корена налазимо из 12) сасма лако:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{1}{sin\,2\psi} \pm cotg\,2\psi\sqrt{-3}\right\}$$

или још простије, кад означимо са x_1 стварни корен под 14):

$$x = -\frac{1}{2}x_1 \pm \sqrt{p}\,cotg\,2\psi\sqrt{-1}.$$

Трећи случај $p < 0$ и $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

Ово је онај пређе поменути несводљиви случај. Ако у рачуну, који долази разумемо под p опет бројну вредност сачиниоца од x, онда је кубна једначина опет

$$x^3 - px + q = 0$$

а Cardan-ов образац може се сада овако преставити:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27\,q^2}{4p^3} - 1}} +$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27\,q^2}{4p^3} - 1}}$$

Пошто је услед претпоставке:

$$\frac{27\,q^2}{4p^3} < 1$$

то смемо узети да је:

14.) $cos\,\varphi = \sqrt{\frac{27\,q^2}{4p^3}}$, дакле $cos^2\varphi = \frac{27\,q^2}{4p^3}$

одавде следује:

$$\frac{q}{2} = cos\,\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

и услед тога горњи израз x-а прелази у овај:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\varphi - i\sin\varphi\right\}^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\varphi + i\sin\varphi\right\}^{\frac{1}{3}}$$

Ако на треће корене десно од знака равности применимо *Moivre*-ов образац у № 117 алг. анал. добићемо:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\frac{\varphi + 2r\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2r\pi}{3}\right\}$$

$$= -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\frac{\varphi + 2r\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2r\pi}{3}\right\},$$

или најзад;

$$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2r\pi}{3},$$

где је r ма какав цео број. Према томе изгледа, као да би x имало бесконачно много вредности. Међу тим то није случај, а не може ни бити, јер се све те вредности x-а своде на три међу собом различите. И те вредности добићемо, ако у последњем обрасцу заменимо r са 0, 1, 2. Корени кубне једначине у овом трећем случају јесу дакле:

$$15.)\quad \left|\begin{aligned} x &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \\ x &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right) \\ x &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right) \end{aligned}\right.$$

и они су, као што се види сви стварни.

60. Корене кубне једначине у трећем случају № 59 можемо наћи и без помоћи Moiovre-овог обрасца.

Узмимо опет, да је:

$$1.)\qquad x^3 - px + q = 0$$

задата једначина и:

$$p < 0,\quad \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

Ставимо:

$$2.)\qquad x = r\sin\varphi,$$

где је r један још неодређен стваран број, а φ један такође стваран неодређен лук. Кад једначину 2) подигнемо на трећи степен и нову једначину сведемо на нулу, добићемо:

$$3.)\qquad x^3 - r^3\sin^3\varphi = 0$$

али је, (види моју тригонометрију страна 45):

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

и с тога:

$$r^3\sin^3\varphi = \frac{3r^2}{4}r\sin\varphi - \frac{r^3}{4}\sin 3\varphi$$

Замењујући ово у 3) и стављајући у исти мах x место $r\sin\varphi$, добијамо:

$$4.)\qquad x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{r^3}{4}\sin 3\varphi = 0$$

И овој једначини, која је истог облика са једначином 1) израз:

$$x = r\, sin\, \varphi$$

јесте корен. О истинитости тога можемо се уверити простом заменом, а међу тим увиђа се то исто и из самог рада.

Да би сад задата једначина 1) била истоветна са једначином 4), треба да је:

$$5.) \qquad \frac{3r^2}{4} = p \quad \text{и} \quad \frac{r^3}{4}\, sin\, 3\varphi = q$$

За вредности од r и φ, добивене разрешајем ових једначина, биће дакле $x = r\, sin\, \varphi$ корен једначине 1). Из прве једначине под 5) добија се лако r и онда из друге једначине следује:

$$sin\, 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$$

Из ове једначине треба дакле тражити вредности за φ. Ако узмемо, да нам 3φ значи најмањи од оних лукова, којима је $4q : r^3$ синус, и који се лук из последње једначине, а помоћу логаритама лако добија, онда сви безбројни луци, којима је $4q : r^3$ такође синус, јесу (тригон. № 17, 18 и 20):

$$360 + 3\varphi, \quad 2.360 + 3\varphi, \quad 3.360 + 3\varphi \; . \; . \; .$$

$$3\varphi, \quad 180 - 3\varphi, \quad 3.180 - 3\varphi, \quad 5.180 - 3\varphi \; . \; . \; .$$

вредности за сам лук φ јесу дакле:

$$120 + \varphi, \; 240 + \varphi, \; 360 + \varphi, \; . \; . \; .$$

$$\varphi, \quad 60 - \varphi, \; 180 - \varphi, \; 300 - \varphi \; . \; . \; .$$

Пошто φ, као што се види, има бесконачно много вредности, то изгледа, да би и једначина 1) имала бесконачно много корена, што не може бити. И доиста синуси свију ових бесконачно многих лукова нису међу собом различни. Синус свакога од тих лукова једнак је синусу једног од ова три лука:

$$\varphi, \quad 60^\circ - \varphi \text{ и } -(\varphi + 60^\circ).$$

Према томе, корени једначине 1) јесу:

$$6.) \quad x = r\, sin \varphi, \; x = r\, sin\, (60^\circ - \varphi) \text{ и } x = -r\, sin\, (60 + \varphi)$$

Пример 1. Да се реши једначина:

$$x^3 + x + 10 = 0$$

Овде је $p = 1$, $q = 10$, а $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 25 + \frac{1}{27} > 0$, дакле случај 1° у № 58. Сад је:

$$x = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{25 + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{25 + \frac{1}{27}}}$$

или:

$$x = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}}$$

$$log \sqrt{\frac{676}{27}} = 0{\cdot}699\,2915 \text{ и } \sqrt{\frac{676}{27}} = 5{\cdot}0037$$

Дакле је сад даље:

$$x = \sqrt[3]{0{\cdot}0037} - \sqrt[3]{10{\cdot}0037}$$

$$log\, \sqrt[3]{0{\cdot}0037} = 0{\cdot}189\,4006-1$$

$$\text{и } \sqrt[3]{0{\cdot}0037} = 0{\cdot}1547$$

$$log\, \sqrt[3]{10{\cdot}0037} = 0{\cdot}333\,3869$$

$$\text{и } \sqrt[3]{10{\cdot}0037} = 2{\cdot}1547$$

Дакле је сада:

$$x = 0{\cdot}1547 - 2{\cdot}1547$$

и с тога стварни корен $= -2$.

Остала два корена налазимо помоћу образаца 4) и 5) у № 58, а могу се добити и из квадратне једначине, којој је лева страна количник између тринома задате једначине и $(x+2)$. Ти су корени:

$$x = 1 + 2\sqrt{-1}\,, \quad x = 1 - 2\sqrt{-1}$$

Нека читалац реши задану једначину и тригонометријским путем.

Пример 2. Да се реши једначина:

$$x^3 - 9x - 28 = 0$$

Овде је $p = -9$, и $q = -28$ а $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 196 - 27 > 0$ дакле опет случај 1° у № 58. Сад је:

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{196 - 27}}$$

$$x = \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13}$$

или најзад:

$$x = 3 + 1.$$

Дакле је стварни корен:

$$x = 4$$

Остала два уображена корена на основу образаца 4) и 5) у № 58 јесу:

$$x = -2 + \sqrt{-3}\,, \quad x = -2 - \sqrt{-3}$$

Пример 3. Да се реши једначина:

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

Овде је $p = -12$, $q = +16$; $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 64 - 64 = 0$, дакле случај други под № 58. Сви су корени сада стварни и два су од њих једнака. Ти су корени:

$$x = 2,\ x = 2, \quad \text{и} \quad x = -4.$$

Пример 4. Да се реши једначина:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Овде је $p = -7$, $q = 6$; $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 9 - \frac{343}{27} < 0$, дакле имамо сада случај 3° у № 58, где су сви корени стварни, али их обрасци под 13) и 14) у № 57 дају у уображеном облику.

Тражимо корене најпре помоћу образаца 15) у № 59.

$$\log 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \log 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \log\sqrt{\frac{28}{3}} = 0{\cdot}485\,0183$$

$$\log\cos\varphi = \log\sqrt{\frac{243}{343}} = 0{\cdot}925\,1561-1$$

$$\varphi = 32^\circ\,40'\,48{\cdot}7'', \quad \frac{1}{3}\varphi = 10^\circ\,53'\,36{\cdot}2''$$

$$\frac{1}{3}\varphi - 60^\circ = -\,49^\circ\,6'\,23{\cdot}8'' \quad \frac{1}{3}\varphi + 60^\circ = 70^\circ\,53'\,36{\cdot}2''$$

$$\log\cos\frac{1}{3}\varphi = \log\cos 10^\circ\,53'\,36{\cdot}2'' = 0{\cdot}992\,1029 - 1$$

$$\log\cos\left(\frac{1}{3}\varphi - 60^\circ\right) = \log\cos 49^\circ\,6'\,23{\cdot}8'' = 0{\cdot}816\,0116 - 1$$

$$\log\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 60^\circ\right) = \log\cos 70^\circ\,53'\,36{\cdot}2'' = 0{\cdot}514\,9837 - 1$$

И сад по првом обр. 15) у № 59 имамо:

$$\log(-x) = \left\{\begin{array}{l}0{\cdot}485\,0183\\ 0{\cdot}992\,1029\end{array}\right.$$
$$= 0{\cdot}477\,1212$$

одакле:

$$-x = 3 \quad \text{или} \quad x = -3.$$

као први корен.

Даље по другом обрасцу 15) у № 59 имамо:

$$\log x = \left\{\begin{array}{l}0{\cdot}485\,0183\\ 0{\cdot}816\,0116\end{array}\right.$$
$$= 0{\cdot}301\,0299$$

дакле:

$$x = 2.$$

као други корен.

Најзад по трећем обрасцу исте №-е имамо:

$$\log x = \left\{\begin{array}{l}0{\cdot}485\,0183\\ 0{\cdot}514\,9837-1\end{array}\right.$$
$$= 0{\cdot}000\,0020$$

дакле:

$$x = 1.$$

као трећи корен.

Нека читалац реши задату једначину и помоћу образаца 5) и 6) у № 60.

Разрешавање кубних једначина помоћу детерминаната.

61. Нека је задата детерминанта:

$$1.) \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b & x \\ b & x & a \\ x & a & b \end{vmatrix}$$

Кад је развијемо по основцима прве врсте, добићемо:

$$\triangle = a\begin{vmatrix} x & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a \\ x & b \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b & x \\ x & a \end{vmatrix}$$

или

$$\triangle = a(bx - a^2) + b(ax - b^2) + x(ab - x^2)$$

или најзад

2.) $$\triangle = 3abx - (a^3 + b^3 + x^3)$$

Други од овог различни израз за $\triangle$ добићемо, ако у 1) основцима првог стуба додамо основке другог и трећег стуба, јер тако добијамо:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a + b + x, & b, & x \\ b + x + a, & x, & a \\ x + a + b, & a, & b \end{vmatrix} = (a+b+x)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

одакле видимо да је полином 2) дељив са:

$$a + b + x.$$

Ако у 2) сменимо a са $a\alpha$ и b са $b\alpha^2$, где су α и α^2 уображени кубни корени јединице, добићемо:

$$\triangle = 3a\alpha \,.\, b\alpha^2 .\, x - (a^3\alpha^3 + b^3\alpha^6 + x^3)$$

или:

$$\triangle = 3ab\alpha^3 .\, x - (a^3\alpha^3 + b^3\alpha^6 + x^3)$$

или најзад:

$$\triangle = 3abx - (a^3 + b^3 + x^3)$$

јер је $\alpha^3 = 1$. Полином 2) није се поменутом сменом променуо, и зато је сад:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha^2 & x \\ b\alpha^2 & x & a\alpha \\ x & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha^2 + x, & b\alpha^2, & x \\ b\alpha^2 + x + a\alpha, & x, & a\alpha \\ x + a\alpha + b\alpha^2, & a\alpha, & b\alpha^2 \end{vmatrix}$$

или:

$$\triangle = (a\alpha + b\alpha^2 + x)\begin{vmatrix} 1 & b\alpha^2 & x \\ 1 & x & a\alpha \\ 1 & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix}$$

Дакле је као што видимо, полином 2) дељив и са:

$$a\alpha + b\alpha^2 + x$$

На сличан начин може се доказати, да је полином дељив и са:

$$a\alpha^2 + b\alpha + x$$

Према томе можемо дакле ставити:

$$3abx - (a^3 + b^3 + x^3) =$$

$$= c.\, (a + b + x)\,(a\alpha + b\alpha^2 + x)\,(a\alpha^2 + b\alpha + x)$$

где је c једна неодређена стална количина. Пошто из последње једначине за $a = 0$ и $b = 0$ добијамо:

$$-\, x^3 = cx^3,$$

то онда следује да је $c = 1$.

Према томе је сада:

3.) $$a^3 + b^3 + x^3 - 3abx =$$

$$= (a + b + x)(a\alpha + b\alpha^2 + x)(a\alpha^2 + b\alpha + x)$$

Ако овде сменимо x са $-x$, добићемо, пошто затим помножимо лево и десно са -1.

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 =$$

$$= (x - a - b)(x - a\alpha - l\alpha^2)(x - a\alpha^2 - b\alpha)$$

Одавде видимо, да су:

4.) $x = a + b, \quad x = a\alpha + l\alpha^2, \quad x = a\alpha^2 + b\alpha$

корени кубне једначине:

5.) $$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$$

Ако би задата била једначина:

6.) $$x^3 + px + q = 0,$$

треба само ставити:

$$ab = -\frac{1}{3}p, \quad a^3 + b^3 = -q,$$

одатле следује онда лако:

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

и кад се у 4) a и b замене овим вредностима, добијамо за једначину 6) иста три корена, која смо у № 57 нашли на други начин.

Једначине четвртог степена.

62. Разрешавање опште једначине:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

свешћемо на разрешавање једначине истог степена, али у којој нема члана са трећим степеном x-а. Та нова једначина, која постаје, кад се у 1) замени x са (№ 18):

$$x - \frac{1}{4}a_1$$

сад нека је:

1.) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Ставимо:

$$x = u + v + w.$$

Кад подигнемо на квадрат, добићемо:

$$x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(uv + uw + vw)$$

или:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw)$$

Кад ову једначину подигнемо такође на квадрат, добићемо:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 =$$

$$= 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$$

Кад ову једначину сведемо на нулу и сменимо: $u+v+w$ са x, добићемо:

2.) $$x^4 - 2(u^2+v^2+w^2)x^2 - 8uvwx +$$

$$+ (u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = 0$$

Ова једначина истог је облика са једначином 1), и као што се из извођења њеног увиђа, један корен њен јесте:

$$x = u + v + w.$$

За оне дакле вредности неодређених количина: u, v и w, за које је једначина 2) истоветна са једначином 1), биће:

$$x = u + v + w$$

корен и једначине 1). Да једначине 1) и 2) буду истоветно, треба да је:

3.) $$-2(u^2+v^2+w^2) = p$$

$$-8uvw = q$$

$$(u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = r$$

И ово је једначина, која ће нам дати за u, v и w вредности, за које ће једначине 1) и 2) бити истоветне, за које ће дакле вредности израз $u+v+w$ бити корен једначини 1). Али последње једначине могу се представити овако:

$$(u^2+v^2+w^2) = -\frac{1}{2}p$$

4.) $$(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = \frac{p^2-4r}{16}$$

$$u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}$$

Одавде видимо, да ће вредности за u^2, v^2, w^2 бити корени кубне једначине:

5.) $$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2-4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0$$

Претпоставимо сад да смо ову једначину решили и нашли z_1, z_2 и z_3 као корене њене. Тада је:

$$u = \pm\sqrt{z_1},\quad v = \pm\sqrt{z_2},\quad w = \pm\sqrt{z_3}$$

Ако сад у обрасцу:

$$x = u + v + w$$

заменимо количине u, v и w са сваком од њиних двеју вредности, добићемо за x свега осам вредности, док међутим једначина 1) има само четири корена. И сад настаје исто питање као и код кубне једначине, т. ј. за што добијамо за x осам вредности, и после које су од тих осам вредности оне, које су корени једначине 1).

И на то питање лако је дати одговора. Последња једначина под 4) одговара не само једначини 1), у којој стоји $+q$, већ и оној, која из једначине 1) постаје, кад се у њој $+q$ смени са $-q$. Једначине под 4) морају према томе дати за u, v и w не само такве вредности за које образац:

$$x = u + v + w$$

даје корене једначине 1), него и такве, за које исти образац даје и корене једначине:

$$6.) \qquad x^4 + px^2 - qx + r = 0$$

И тако је потпуно објашњено то, за што добијамо осам вредности за x. Сад је лако пронаћи и оне четири вредности између поменутих осам, које су корени једначине 1). Из друге једначине под 3) види се, да вредности за u, v и w, помоћу којих се из обрасца:

$$x = u + v + w$$

добијају корени једначине 1), морају бити такве, да је њихов производ:

$$uvw = -\frac{1}{8}q$$

дакле да је тај производ противног знака са сачиниоцем q. Остале четири вредности x-а јесу корени једначине 6)

Дакле корени једначине 1) јесу:

$$x_1 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_2 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

$$x_3 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

Међу тим корени једначине 6) јесу:

$$x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

63. Какви су корени једначине:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

т. ј. да ли су они стварни или уображени зависи од тога какви су корени једначине 5) у № 62. Пошто је сад последњи члан једначине 5) одречан, то она *мора* имати један положан корен. Остала два корена њена или морају бити оба стварни, или оба уображени (№ 13), и ако су оба стварни, они морају бити оба положни или оба одречни. Дакле на тај начин корени једначине 5) у № 62 или су: 1° сва три положни, или 2° један је положан а два одречна, или најзад, 3° један је положан, а остала два уображена.

Из образаца на крају № 62 види се, да су у случају 1° сви корени једначине четвртог степена стварни. У случају 2° сви су уображени, изузев случај, кад су два одречна корена једначине 5) једнаки, јер тада су два корена једначине четвртог степена стварни а два уображени. У случају 3° опет су два корена стварни а два уображени. Јер ако н. пр. узмемо, да је корен z_1 једначине 5) у № 62 стваран, а z_2 и z_3 да су уображени, и да је:

$$z_2 = a + bi, \quad z_3 = a - bi$$

онда је $\sqrt{z_2} = \sqrt{a+bi}, \quad \sqrt{z_3} = \sqrt{a-bi}.$

Ако сад узмемо даље, да су r и φ модуо и аргуменат уображеног израза $a + bi$, онда по Moivre-овом обрасцу:

$$\sqrt{z_2} = r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{\varphi+2r\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2r\pi}{2}\right\}$$

$$\sqrt{z_3} = r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{\varphi+2r\pi}{2} - i\sin\frac{\varphi+2r\pi}{2}\right\}$$

Дакле је збир корених израза:

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}$$

стваран, одакле следује с погледом на прва четири обрасца на крају № 62 да су корени x_1 и x_2 стварни, а корени x_3 и x_4 уображени.

Читалац нека реши једначину:

$$x^4 - 15\,x^2 + 10\,x + 24 = 0$$

Једначина 5) № 62 сада је:

$$z^3 - \frac{15}{2}z^2 + \frac{129}{16}z - 9 = 0$$

Кад се сврши добија се: $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -4$.

Реципрочне једначине.

64. Тако се зову једначине, које се не мењају кад се у њима x смени са $\frac{1}{x}$. Тако једначина:

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

у којој су, као што се види, сачиниоци, који су од оба краја једнако удаљени, једнаки, јесте реципрочна. Јер кад у њој сменимо x са $\frac{1}{x}$, изаћи ће:

$$\frac{1}{x^m} + a_1\frac{1}{x^{m-1}} + a_2\frac{1}{x^{m-2}} + \ldots + a_2\frac{1}{x^2} + a_1\frac{1}{x} + 1 = 0$$

или кад помножимо са x^m и за тим чланове обрнуто напишемо:

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

а то је иста једначина са задатом.

Реципрочне једначине зову се тако за то, што кад им је н. пр. број α корен, мора им и $\frac{1}{\alpha}$ бити корен.

Да бисмо сада сазнали облик, којим се реципрочне једначине од осталих разликују, ми ћемо разликовати два случаја: *први,* кад је једначина непарног степена и *други* кад је једначина парног степена.

Узмимо да нам је дата ма каква једначина непарног степена:

$$1.)\quad x^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \ldots + a_{2m-1}x^2 + a_{2m}x + a_{2m+1} = 0$$

Ако је ова једначина реципрочна, онда према горњој одредби она се не сме променути, кад се у њој x смени са $\frac{1}{x}$. Ако ту смену извршимо, добићемо:

$$\frac{1}{x^{2m+1}} + \frac{a_1}{x^{2m}} + \frac{a_2}{x^{2m-1}} + \ldots + \frac{a_{2m-1}}{x^2} + \frac{a_{2m}}{x} + a_{2m+1} = 0$$

или кад помножимо са x^{2m+1}, поделимо са a_{2m+1} и обрнуто напишемо:

$$2.)\quad x^{2m+1}+\frac{a_{2m}}{a_{2m+1}}x^{2m}+\frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}}x^{2m-1}+\dots+$$

$$+\frac{a_2}{a_{2m+1}}x^2+\frac{a_1}{a_{2m+1}}x+\frac{1}{a_{2m+1}}=0$$

Да би ова једначина била реципрочна са 1), треба да је:

$$\frac{a_{2m}}{a_{2m+1}}=a_1,\quad \frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}}=a_2,\dots$$

$$\dots\frac{a_2}{a_{2m+1}}=a_{2m-1},\quad \frac{a_1}{a_{2m+1}}=a_{2m},\quad \frac{1}{a_{2m+1}}=a_{2m+1}$$

Захтев исказан у последњој од ових једначина истоветан је са овим $a^2_{2m+1}=+1$ одакле $a_{2m+1}=\pm 1$.

Ако узмемо за a_{2m+1} прву вредност, онда следује:

$$a_{2m}=a_1,\quad a_{2m-1}=a_2,\quad \dots a_2=a_{2m-1},\quad a_1=a_{2m}$$

Ако ли узмемо за $a_{2m+1}=-1$, онда излази:

$$a_{2m}=-a_1,\quad a_{2m-1}=-a_2,\quad \dots a_2=-a_{2m-1},\quad a_1=-a_{2m}$$

Одатле следује, *да је једначина непарног степена реципрочна само тако, ако су у њој сачиниоци, који су од оба краја једнако удаљени, једнаки, и при том или једнако или противно означени.*

Узмимо сада, да нам је дата ма каква једначина парног степена:

$$3.)\quad x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\dots+$$

$$+a_mx^m+\dots+a_{2m-2}x^2+a_{2m-1}x+a_{2m}=0$$

где је a_mx^m средњи члан, од којег лево и десно има по m чланова.

Кад у једначини 3) сменимо x са $\frac{1}{x}$, добијамо:

$$\frac{1}{x^{2m}}+\frac{a_1}{x^{2m-1}}+\frac{a_2}{x^{2m-2}}+\dots+\frac{a_m}{x^m}+\dots+\frac{a_{2m-1}}{x}+a_{2m}=0$$

и одатле, кад са x^{2m} помножимо, па за тим са a_{2m} поделимо и обрнуто напишемо:

$$4.)\quad x^{2m}+\frac{a_{2m-1}}{a_{2m}}x^{2m-1}+\frac{a_{2m-2}}{a_{2m}}x^{2m-2}+\dots+\frac{a_m}{a_{2m}}x^m+\dots+$$

$$+\frac{a_2}{a_{2m}}x^2+\frac{a_1}{a_{2m}}x+\frac{1}{a_{2m}}=0$$

Да би једначине 3) и 4) биле истоветне треба да је:

$$\frac{a_{2m-1}}{a_{2m}}=a_1,\quad \frac{a_{2m-2}}{a_{2m}}=a_2\dots\frac{a_m}{a_{2m}}=a_m\dots$$

$$\frac{a_2}{a_{2m}}=a_{2m-2},\quad \frac{a_1}{a_{2m}}=a_{2m-1},\quad \frac{1}{a_{2m}}=a_{2m}$$

Из последње од ових једначина следује:

$$a^2_{2m}=1,\quad \text{одакле}\quad a_{2m}=\pm 1.$$

Ако узмемо за a_{2m} прву вредност, $+1$, добијамо:

$$a_{2m-1} = a_1,\ a_{2m-2} = a_2,\ \dots\ a_m = a_m,\ \dots$$

$$a_2 = a_{2m-2},\ a_1 = a_{2m-1}$$

Ако ли узмемо за a_{2m} другу вредност — 1, добићемо:

$$a_{2m-1} = -a_1,\ a_{2m-2} = -a_2 \dots a_m = -a_m \dots$$

$$a_2 = -a_{2m-2},\ a_1 = -a_{2m-1}$$

од којих једначина она у средини $a_m = -a_m$ може опстати само тако, ако је $a_m = 0$.

Према томе дакле:

Свака једначина парног степена јесте реципрочна, кад су у њој сачиниоци, који су од оба краја наједнако удаљени, једнаки и при том једнако или противно означени, у ком последњем случају нема средњег члана у једначини.

65. Узмимо да нам је дата 1° реципрочна једначина непарног степена:

1.) $x^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$

у којој су сачиниоци што су од оба краја подједнако удаљени, не само једнаки, него и једнако означени. Ова једначина мора имати — 1 као корен, о чему се непосредном заменом у 1) можемо уверити. Дакле полином једначине 1) мора бити дељив са $x + 1$. Ако се та деоба изврши и нађени количник стави = 0, онда нова једначина мора очевидно бити опет реципрочна и то таква, у којој су сачиниоци једнако удаљени од обадва краја једнако означени. О томе се можемо уверити непосредном деобом полинома под 1) са $(x+1)$.

Узмимо сад 2°, да нам је дата реципрочна једначина парног или непарног степена:

2.) $x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m = 0$

у којој су сачиниоци, који су наједнако од оба краја удаљени, супротно означени. Средњега члана у једначини 2) нема за то, што, ако је она непарнога степена, број је чланова паран, а ако је она парног степена средњег члана не може бити (№ 64). Једначина 2) има + 1 као корен, о чему се можемо уверити стављајући у 2) $x = +1$. Дакле полином у 2) дељив је са $x - 1$. Ако се та деоба изврши и количник стави = 0, добићемо једначину, која ће бити реципрочна, и то опет таква, у којој су сачиниоци, једнако удаљени од оба краја, једнако означени. О томе се можемо непосредном деобом између полинома 2) и $(x-1)$ и уверити.

Ако је једначина 2) парног степена, онда кад количник, који добијамо делећи полином 2) са $x - 1$ ставимо = 0, добићемо реципрочну једначину парнога степена, у којој ће, као што мало час рекосмо, сачиниоци, од оба краја наједнако удаљени, бити једнако означени. Кад дакле полином те нове једначине, којој је корен број — 1, поделимо са $x + 1$, па добивени количник ставимо = 0, добићемо по ономе, што дознасмо у 1°, реципрочну једначину парног степена, у којој су сачиниоци једнако удаљени од оба краја, једнако означени и којој су корени сви остали корени једначине 2).

Дакле једначина 2) има и + 1 и — 1 као корен.

Ми смо дакле у стању свести сваку реципрочну једначину непарног степена, делећи је са $x - 1$ или са $x + 1$, како је кад једна или друга деоба могућа, на једначину парног степена, у којој су сачиниоци једнако удаљени од оба краја, једнако означени. То смо исто у стању постићи и са једном једначином парног степена, у којој су од оба краја једнако удаљени сачиниоци противно означени, јер за то треба само полином једначине поделити са $(x-1)$ најпре, а нађени количник са $x+1$, или и обратно, или најзад треба поделити полином одмах са

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

Из свега тога следује, да се при даљем разматрању реципрочних једначина можемо ограничити само на оне, у којима су сачиниоци чланова једнако удаљених од оба краја, једнако означени.

Лако је сад доказати, да се из такве реципрочне једначине може извести нова, чији је степен половина њеног степена. Узмимо нека је задата једначина:

$$3.)\quad x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + a_2 x^{2m-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0$$

Кад поделимо ову једначину са x^m и за тим узмемо заједно два и два члана, који су од оба краја подједнако удаљени, добићемо:

$$4.)\quad \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + a_2\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots +$$

$$+ a_{m-2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m = 0$$

Ако ставимо:

$$5.)\quad x + \frac{1}{x} = z$$

моћи ћемо биноме облика: $x^r + \frac{1}{x^r}$ преставити као рационалну функцију z-а. Јер из

$$\left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) z = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

следује:

$$\left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) z = x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} + x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}$$

или:

$$x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) z - \left(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\right)$$

одакле уједно увиђамо, да ће израз $x^r + \frac{1}{x^r}$ морати бити r-ог степена односно z, пошто је једначина 5) првог степена односно z. Ако сад у последњој једначини ставимо редом:

$$r = 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ m$$

добићемо:

$$6.)\quad \left|\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= z^2 - 2 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= z^3 - 3z \\ x^4 + \frac{1}{x^4} &= z^4 - 4z^2 + 2 \\ x^5 + \frac{1}{x^5} &= z^5 - 5z^3 + 5z \end{aligned}\right.$$

. . . .

Као што се види, леве стране ових једначина јесу чланови повратнога реда, којима је скала: $z, -1$. Сваки члан тога реда добија се дакле, кад се онај, који је први пред њим помножи са z, а онај, који је други пред њим са -1.

Ако у једначини 4) заменимо поједине биноме њиним вредностима из образаца 6) добићемо једначину, чији је степен односно z половина степена задате једначине 3), дакле m. Да је m степен нове једначине, следује из тога, што је вредност бинома:

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)$$

односно z m-нога степена, а међу тим у једначини 4) нема изложилаца већих од m. Ако су сада корени те нове једначине $z_1, z_2, \ldots z_m$, онда из сваког од њих, а помоћу обрасца 5), у коме је исказан однос између корена нове и задате једначине, добијамо по две реципрочне вредности за x:

7.) $$x = \frac{z + \sqrt{z^2-4}}{2}, \quad x = \frac{z - \sqrt{z^2-4}}{2} = \frac{2}{z + \sqrt{z^2-4}}$$

дакле свега $2m$ корена једначине 3)

Пример. Да се реши реципрочна једначина:

1') $$x^8 - 2x^7 + x^6 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

Њен је полином дељив са $x - 1$ и $x + 1$. Кад извршимо ту деобу добијамо:

2') $$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

одакле:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Или по примени обрасца 5):

3') $$z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$$

Из ове једначине по № 18) добијамо:

4') $$y^3 - \frac{21}{9}y + \frac{20}{27} = 0$$

као једначину, чији су корени за $k = \frac{2}{3}$ већи од корена једначине 3'). Из 4') добијамо по № 19:

5') $$u^3 - 21u + 20 = 0$$

као једначину чији су корени три пут већи од корена једначине 4'.

Једначина 5') спада у несводљив случај. Њени корени јесу: $u = 1, -5, 4$. Дакле су корени једначине 4').

$$y = \frac{1}{3}, \ -\frac{5}{3}, \ \frac{4}{3},$$

а корени једначине 3') јесу:

$$z = 1, \ -1, \ 2$$

Из ових корена, а помоћу образаца 7) добијамо 6 корена једначине 2'). Ти корени са горе нађена два: -1, и $+1$, јесу:

$$x = 1, \ 1, \ 1, \ -1, \ \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \ \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Решавање биномних и триномних једначина.

66. Свака једначина облика:

1.) $$x^m \pm a = 0$$

зове се *биномна* — двочлана — једначина. Свака таква једначина може се, кад се у њој стави $x = z\sqrt[m]{a}$ свести на ову простијег облика:

$$z^m \pm 1 = 0$$

и с тога ћемо од сад узимати у претрес само такве биномне једначине. Узмимо најпре да нам је дата једначина:

2.) $$x^m - 1 = 0$$

Из ње добијамо да је:

$$x = \sqrt[m]{+1}$$

Као што се види, корени једначине 2) нису ништа до m вредности m-ог корена из $+1$. Те се вредности добијају (алг. анал. № 120, 2°) кад се у обрасцу:

3.) $$x = \cos\frac{2r\pi}{m} \pm i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

r замени редом са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ \frac{m}{2}$$

или са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ \frac{m-1}{2}$$

како је кад m парно или непарно. Кад у поменутој №-и алгебарске анализе и то у обрасцима 3) и 4) сменимо n са m, онда имамо све корене једначине 2) у случају кад је m парно, као и онда кад је m непарно.

Двама спрегнутим коренима једначине 2)

$$\cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}, \quad \cos\frac{2r\pi}{m} - i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

одговарају корени чиниоци:

$$x - \cos\frac{2r\pi}{m} - i\sin\frac{2r\pi}{m}, \quad x - \cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

Производ истих јесте стваран израз:

4.) $$x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{m} + 1.$$

Из овог израза добијамо редом све корене чиниоце бинома $x^m - 1$, кад у њему заменимо r редом са горе поменутим вредностима. Вредност израза 4) за $r = 0$ јесте:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1),$$

али чиниоца $(x-1)$ треба само један пут узети, јер као што се види из обрасца 3), кад у њему ставимо $r = 0$, јединица се јавља само један пут као корен једначине 2), дакле и $(x - 1)$ само један пут као корени чинилац њен. У осталом то се увиђа и отуда, што $f(x) = x^m - 1$ и њен први извод $f'(x) = mx^{m-1}$ немају заједничка делиоца. Кад је m парно, онда вредност израза за $r = \frac{m}{2}$ јесте:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1),$$

али чиниоца $x+1$ треба опет само један пут у рачун узети јер се и -1 у случају, кад је m парно јавља само један пут као корен једначине 2).

Ако је дакле m парно, онда је:

5.) $$x^m - 1 =$$

$$= (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\ldots\ldots \times \left(x^2 - 2x\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right).$$

А ако је m непарно онда је:

6.) $$x^m - 1 =$$

$$= (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\ldots\ldots \times \left(x^2 - 2x\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right).$$

67. Узмимо, да нам је дата једначина:

7.) $$x^m + 1 = 0$$

Из ове једначине следује:

$$x = \sqrt[m]{-1},$$

дакле су њени корени m вредности m-ог корена из -1, и с тога се добијају, кад се у обрасцу (алг. анал. 120, образац 5).

8.) $$x = \cos\frac{2r+1}{m}\pi \pm i\sin\frac{2r+1}{m}\pi,$$

r замени редом са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \frac{m}{2} - 1,$$

или са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \frac{m-1}{2},$$

како је кад m парно или непарно. У обрасцима 7) и 8) поменуте №-е алгеб. анализе, кад у њима сменимо n са m имамо за оба случаја свих m корена једначине 7).

Производ од свака два спрегнута корена чиниоца јесте стваран и облика:

$$x^2 - 2x\cos\frac{2r+1}{m}\pi + 1,$$

и с тога, кад је m парно, биће:

9.) $$x^m + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\times\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{m} + 1\right)\ldots\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right)$$

а кад је m непарно:

10.) $$x^m + 1 =$$

$$= (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right) \times$$

$$\times \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{m} + 1\right) \cdots \left(x^2 - 2x\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right)$$

Ако у једначини 1) № 66 ставимо: $\alpha = \sqrt[m]{a}$, онда једначина 1) изгледа овако:

11.) $$x^m \pm \alpha^m = 0$$

и резултати, до којих смо у овим двема №-ама дошли, вредиће и за ову једначину, ако само свуда сменимо x са $\frac{x}{\alpha}$. Ако то учинимо н. пр. у обрасцима 5), 6), 9) и 10) онда ћемо имати производе за биноме $x^m - a^m$ и $x^m + \alpha^m$. У тим производима место чинилаца $x-1$, $x+1$, $\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{m} + 1\right)$, јавиће се чиниоци.

$$x - \alpha,\ \ x + \alpha,\ \ x^2 - 2\alpha x\cos\frac{k\pi}{m} + \alpha^2$$

68. При разрешавању једначина:

12.) $$x^m - 1 = 0, \quad x^m + 1 = 0$$

ми смо претпоставили, да су нам познате вредности израза $\sqrt[m]{+1}$ и $\sqrt[m]{-1}$. Али то није било нужно. Јер да бисмо изнашли све корене једначине 12) ставимо:

$$x = k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где неодређене количине k и φ треба одредити тако, да овај израз буде корен једначина 12). Ако зарад тога заменимо у првој једначини под 12), x са овим изразом добићемо:

$$k^m\cos m\varphi - 1 + i\,k^m\sin m\varphi = 0.$$

Ова једначина распада се, пошто је k различно од нуле, на ове две

$$k^m\cos m\varphi - 1 = 0, \quad \sin m\varphi = 0.$$

Из прве једначине следује $m\varphi = h\pi$. Али, ако узмемо на ум, да услед прве једначине $\cos m\varphi$ мора бити положан, то ће нам бити јасно, да $m\varphi$ мора изнети само паран број полупериферија (π). Дакле је на тај начин $m\varphi = 2r\pi$, али је онда услед прве од последњих једначина $k = 1$.

Дакле је:

$$x = \cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

И овај образац даје све корене једначине: $x^m - 1 = 0$, кад у њему стављамо редом:

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ (m-1).$$

На сличан начин може се радити и са једначином: $x^m + 1 = 0$.

И овде ћемо најзад приметити још и то, да два и два спрегнута корена једначине $x^m \pm 1 = 0$ стоје у реципрочном односу. Јер:

$$\cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}, \quad \cos\frac{2r\pi}{m} - i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

јесу два ма која спрегнута корена једначине: $x^m - 1 = 0$ и производ истих јесте једнак јединици. Исто тако:

$$\cos\frac{2r+1}{m}\pi + i\sin\frac{2r+1}{m}\pi,\quad \cos\frac{2r+1}{m}\pi - i\sin\frac{2r+1}{m}\pi$$

јесу два ма која спрегнута корена једначине: $x^m + 1 = 0$, и производ истих јесте једнак јединици.

У осталом истинитост овога, што тврдимо, увиђа се такође лако, ако само напоменемо како једначине:

$$x^m - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^m + 1 = 0$$

јесу рципрочне једначине.

69. *Триномне* — трочлане — једначине, јесу облика:

1.) $$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

Оне се могу увек свести на биномне једначине. Јер, кад једначину 1) решимо као квадратну, добићемо:

2.) $$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ако је сада:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0,$$

дакле корени израз у 2) стваран, онда ваља само решити биномну једначину:

$$x^m + \left(\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0.$$

Али ако је:

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

дакле корени израз у 2) уображен, а тај случај наступа само онда, кад је $q > 0$, онда треба друкче радити.

У том случају из једначине 2) добијамо:

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

1°. Узмимо најпре нека је $p < 0$. Ако под p сада разумевамо бројну вредност сачинилаца од x у једначини 1.), онда је:

$$x^m = \frac{p}{2}\left\{1 \pm i\,\frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\frac{1}{2}p}\right\}$$

или ако ставимо:

3.) $$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\frac{1}{2}p}$$

добијамо простије:

4.) $$x^m = \frac{p}{2}\left\{1 \pm i\,tg\,\varphi\right\}$$

Пошто из 3) следује:

5.) $$\frac{1}{2}p = \cos\varphi\sqrt{q}$$

то онда кад још ставимо: $a^m = \sqrt{q}$, добијамо из 4)

$$x^m = a^m(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

А из ове једначине следује:

$$x = a(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^{\frac{1}{m}}$$

или:

$$x = a\left\{\cos\frac{(\varphi + 2k\pi)}{m} \pm i \sin\frac{(\varphi + 2k\pi)}{m}\right\},$$

и из овог обрасца добијају се за $k = 0, 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ сви корени једначине:

$$x^{2m} - px^m + q = 0,$$

или пошто је сада $p = 2a^m \cos\varphi$ и $q = a^{2m}$ корени једначине:

$$7.)\qquad x^{2m} - 2a^m \cos\varphi . x^m + a^{2m} = 0.$$

Лако је увидети, да се лева страна ове једначине даје преставити као производ m квадратних чинилаца, који су сви облика:

$$8.)\qquad x^2 - 2ax\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} + a^2$$

Поједини од тих чинилаца добијају се стављајући овде:

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (m-1)$$

2° Ако је p у једначини 1) положно, онда узимајући опет на ум једначину 5), добијамо и у овом случају:

$$x^m = -a^m(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

или:

$$x^m = +a^m\left\{\cos(\pi + \varphi) \pm i \sin(\pi + \varphi)\right\}$$

и одавде:

$$9.)\qquad x = a\left\{\cos\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m} \pm i \sin\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m}\right\}$$

И овде, као и у 1) може се лако доказати, да се лева страна једначине:

$$x^{2m} + 2a^m \cos\varphi . x^m + a^{2m} = 0$$

може преставити као производ корених чинилаца облика:

$$10.)\qquad x^2 - 2ax\cos\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m} + a^2$$

Израз:

$$x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2$$

преставља, као што је познато, квадрат стране троугла, којег су остале две стране x и a нагнуте једна ка другој под углом α. Одатле следује, да се горепоменути квадратни чиниоци, којих је у сваком од два случаја 1° и 2° m на броју, могу лако конструјисати. Зарад тога повуцимо једну праву, одређене дужине, која преставља x, а из левог н. пр. краја њеног као средишта опишимо са полупречником a један круг. За тим повуцимо из средишта круга полупречнике, који су нагнути према правој x у првом случају под углима:

$$\frac{\varphi}{m},\ \frac{\varphi + 2\pi}{m},\ \frac{\varphi + 4\pi}{m}\ \ldots\ldots\ \frac{\varphi + (m-1)\pi}{m},$$

а у другом случају под углима:

$$\frac{\varphi+\pi}{m},\quad \frac{\varphi+3\pi}{m},\quad \frac{\varphi+5\pi}{m}\ldots\ldots\frac{\varphi+(2m-1)\pi}{m}.$$

Тако повучени полупречници биће стране m узастопних троуглова, којима је друга страна вазда x, а треће су им стране праве, које везују крајеве повучених полупречника са десним крајем праве x-а. Пошто сад квадрати тих трећих страна у случају 1° престављају узастопне квадратне чиниоце, тринома 8), а у случају 2° квадратне чиниоце тринома 10), то смемо изрећи као доказану теорему:

Производ квадрата трећих страна свију m троуглова у првом случају 1° јесте једнак бројној вредности тринома

$$x^{2m}-2a^{m}\cos\varphi.x^{m}+a^{2m}$$

а у другом случају једнак бројној вредности тринома:

$$x^{2m}+2a^{m}\cos\varphi.x^{m}+a^{2m}.$$

Ову је теорему *Moivre* доказао. Ако узмемо да је $\varphi=0$, онда

Производ трећих страна поменутих m троуглова јесте у првом случају једнак биному: x^m-a^m који је корен квадратни из тринома:

$$x^{2m}-2a^{m}x^{m}+a^{2m},$$

а у другом случају једнак је биному x^m+a^m, који је корен квадратни из тринома:

$$x^{2m}+2a^{m}x^{m}+a^{2m}$$

Ову теорему, која је особен случај Moivre-ове теореме доказао је Roger Cotes пре Moivre-а.

У случају, кад је дат бином x^m-a^m, и m је парно, први и $\left(\frac{m}{2}+1\right)$-ви Cotes-ов троугао прелази у једну праву линију. Кад је дат бином x^m+a^m онда само кад је m непарно прелази $\left(\frac{m+1}{2}\right)$-ви троугао у праву линију.

XII. Особине корена биномних једначина.

70. Сви корени једначине:

1.) $$x^{m}-1=0$$

добијају се, кад се у обрасцу:

2.) $$x=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

k замени вредностима:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3.\ \ldots\ldots\ (m-1)$$

У № 120 алг. анал. ми смо то доказали, као и то, да за сваку другу вредност од k, која је различна од поменутих m вредности, x добија вредност, која је једнака једној од већ нађених m вредности. Такође смо доказали, да за две вредности од k, којих је збир $=m$, или штоје све једно да за два аргумента, чији је збир $=2\pi$, x добија две спрегнуте вредности.

Ако опишемо један круг са полупречником јединицом, па га за тим поделимо на m једнаких делова, онда узастопни корени једначине 1), означимо их са x_0, x_1, x_2, ... x_m, престављени су узастопним подеоним тачкама.

1°. Ако вредностима, које x добија за $k = a$ и $k = b$ означимо са x_a и x_b, онда је по обрасцу 2)

$$x_a = cos\frac{2a\pi}{m} + i\,sin\frac{2a\pi}{m}$$

$$x_b = cos\frac{2b\pi}{m} + i\,sin\frac{2b\pi}{m}$$

Кад ове две једначине, помножимо, добићемо:

$$x_a\,x_b = cos\frac{2\,(a+b)\,\pi}{m} + i\,sin\frac{2\,(a+b)\,\pi}{m}$$

а то је вредност, коју x добија, кад се у 2) стави $k=a+b$. Дакле је та вредност, коју ћемо означити са x_{a+b} један корен једначине 1) и ми имамо:

$$x_a\,x_b = x_{a+b}$$

т. ј.

Производ двају корена једначине 1) *јесте корен исте једначине.*

На сличан начин доказује се и:

Количник двају корена једначине 1) *јесте корен исте једначине.*

Степени корена једначине 1) *јесу опет корени њени.*

Тако је на пример:

$$(x_a)^r = x_{ra}.$$

2°. У № 116 алг. анал. ми смо већ доказали, да ако су a и m *односно прости* бројеви, т. ј. такви, који сем јединице немају никаквог заједничког делиоца, да велим онда остатци, које добијамо делећи бројеве:

$$0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a,\ .\ .\ .\ (m-1)a$$

са бројем m, морају бити сви међу собом различни и да сваки од тих m остатака мора бити једнак једном од бројева:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .\ (m-1).$$

Поделимо као и горе круг на m једнаких делова, па онда обилазећи круг у једном и истом смислу вежимо буди коју подеону тачку A са a-ом испред ње, a-ту са оном која је $2a$-та испред A, $2a$-ту са оном, која је $3a$-та пред A и т. д. тако, да су бројеви тачака, које на тај начин узастопце прелазимо узастопне множине броја a. Ако је 1 казаљка прве подеоне тачке испред A, тада, да бисмо добили казаљке подеоних тачака, код којих при том везивању тачака узастопце застајемо, одбићемо од бројева тачака, које узастопце прелазимо, множине броја m. **На** тај начин казаљке тачака, код којих поступно застајемо, јесу остатци, које добијамо, делећи са m узастопне множине броја a. Према томе, ако су a и m односно прости бројеви, пре него што се могнемо вратити полазној тачци A, мораћемо застати код сваке подеоне тачке и на тај начин добићемо један правилни *звездасти* полигон.

Узмимо сада корен:

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m},$$

који из обрасца 2) добијамо за $k = 1$. Кад погледамо на образац 2), увидећемо да су корени $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ којих је m на броју, редом једнаки члановима геометријске постепености:

$$x_1^0,\ x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^3,\ \ldots\ x_1^{m-1}$$

Овај низ корена одговара обичном правилном полигону од m страна. Узастопна темена тога полигона представљају редом те корене.

Узмимо сада корен:

$$x_a = \cos\frac{2a\pi}{m} + i\sin\frac{2a\pi}{m}$$

који из обрасца 2 добијамо за $k = a$. Ми претпостављамо, да су a и m односно прости бројеви. Узастопни степени корена x_a:

$$x_a^0,\ x_a^1,\ x_a^2\ \ldots\ x_a^{m-1}$$

једнаки су (1°) вредностима:

$$x_0,\ x_a,\ x_{2a},\ x_{3a}\ \ldots\ x_{(m-1)a}$$

Тачке круга, које овим вредностима одговарају, јесу узастопна темена *звездастог* полигона од m страна, који постаје, кад се једна ма која подеона тачка A веже са a-ом после ње, ова са $2a$-ом и т. д. Из овог следује јасно, да у последњих m бројева имамо свих m међу собом различних корена једначине 1).

И тако сад имамо теорему:

Ако су a *и* m *односно прости бројеви, онда подижући корен* x_a *на степене* 0-ти, 1-ви, 2-ги ... $(m-1)$-ви *добијамо све међу собом различне корене једначине* 1).

3°. *Али ако* a *и* m *нису односно прости бројеви, и ако им је* c *заједнички делилац, онда узастопни степени корена* x_a *не дају све корене једначине* 1) *него само онолико, колико јединица има у* $\frac{m}{c}$. *Јер ако узмемо да је:*

$$m = cm^1,\quad a = ca^1$$

имаћемо

$$x_a = \cos\frac{2a\pi}{m} + i\sin\frac{2a\pi}{m} = \cos\frac{2a^1\pi}{m^1} + i\sin\frac{2a^1\pi}{m^1}$$

одакле видимо, да је x_a корен и једначине $x^{m^1} - 1 = 0$. Па како су a^1 и m^1 односно прости бројеви, то онда узастопни степени корена x_a дају свих m^1 корена последње једначине и никоје друге. Ти су корени у исти мах и корени једначине 1).

Корени једначине 1), којих узастопни степени дају све корене њене, зову се *примитивни* корени исте једначине. Из до сада реченога лако је увидети *да једначина 1) мора имати само онолико примитивних корена, колико има бројева мањих од* m, *који* су такови, да са m сем јединице немају никаквог другог заједничког делиоца.

Такође је лако увидети *прво: да сваки корен једначине* 1), *који није примитивни корен њен, јесте примитивни корен биномне једначине нижег степена* $x^{m^1} - 1 = 0$, *где је* m^1 *делилац изложиоца* m.

Друго, да примитивни корени једначине 1) *не могу бити корени никоје једначине, која би била нижег степена.* И *треће, да, ако је* m *прост број т. ј. такав, да сем јединицом и самим собом није дељив са никојим другим бројем, да онда сви корени дане једначине, сем јединице, јесу примитивни.*

71. У овој №-и остаје нам да докажемо још неколико особина корена биномне једначине.

1°. Ми смо видели, да ако је x_a примитиван корен једначине 1), да су онда:

$$x_a^0,\ x_a^1,\ x_a^2\ .\ .\ .\ x_a^{m-1}$$

сви корени њени. Ако сваки од њих подигнемо на n-ти степен, добићемо геометријску постепеност:

$$x_a^0,\ x_a^n,\ x_a^{2n}\ .\ .\ .\ x_a^{(m-1)n}$$

Збир те геометријске постепености јесте:

$$S_n = \frac{x_a^{mn} - x_a^0}{x_a^n - 1}$$

Пошто је x_a корен једначине $x^m - 1 = 0$; то је $x_a^m = 1$, па дакле и $x_a^{mn} = 1$. Дакле је и $S_n = 0$. Али ако је n множина m-а, онда је сваки члан постепености $= 1$ па дакле је и $S_n = m$. И тако стоји.

Збир једноимених степена биномне једначине 1) *јесте једнак* 0. *осим у случају, кад је изложилац степена множина од* m, *јер тада је тај збир* $= m$. Ово се у осталом дознаје лако и помоћу Њутновог обрасца у № 30.

2°. Корени једначине $x^m - 1 = 0$ добијају се из обрасца:

$$x = cos\,\frac{2k\pi}{m} + i\ sin\,\frac{2k\pi}{m}$$

за $k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ (m-1)$. Корени једначине $x^n - 1 = 0$ добијају се опет из обрасца

$$x = cos\,\frac{2k'\pi}{n} + i\ sin\,\frac{2k'\pi}{n},$$

за $k = 0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .\ (n-1)$. Ако су m и n односно прости бројеви, онда поменуте две биномне једначине немају осем јединице никаквих других заједничких корена. Јер да два корена тих једначина буду једнаки, треба да је:

$$\frac{2k\pi}{m} = \frac{2k'\pi}{n} \quad \text{или} \quad \frac{k}{m} = \frac{k'}{n} \quad \text{или} \quad kn = k'm$$

дакле, пошто је производ kn дељив са m, и пошто су даље m и n односно прости бројеви, требало би, да је k дељиво са m, али то није могуће, јер је $k < m$.

Узмимо сада да m и n имају c као највећег заједничког делиоца, дакле $m = cm'$, $n = cn'$.

Заједничке корене добићемо помоћу оних вредности за k и k' за које је $\frac{k}{m} = \frac{k'}{n}$ или $kn = k'm$. Одатле изводимо да k и k' морају бити облика $k = m't$ и $k' = n't$. Али се тада једнаки аргументи своде на $\frac{2t\pi}{c}$, одакле видимо, да заједнички корени једначина јесу корени једначине $x^c - 1 = 0$, и добијају се кад се у обрасцу

$$x = cos\,\frac{2t\pi}{c} + i\ sin\,\frac{2t\pi}{c}$$

стави редом:

$$t = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ (c-1).$$

Дакле: *Заједнички корени једначина $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ јесу корени једначине $x^c - 1 = 0$, где је* **c** *највећи заједнички чинилац изложилаца* m *и* n.

Лако је доказати, да *ако су* m *и* n *односно прости бројеви, да велим онда добијамо све корене једначине: $x^{mn} - 1 = 0$ множећи сваки корен једначине $x^m - 1 = 0$ са сваким кореном $x^n - 1 = 0$.*

Јер ако узмемо да је k један ма који од бројева 0, 1, 2, 3 . . . $(m-1)$, а тако исто и k' један ма који од бројева 0, 1, 2, 3 . . . $(n-1)$, онда аргуменат производа оних корена, који одговарају бројевима k и k' биће:

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{n} = \frac{2(kn+k'm)\pi}{m\,n}$$

Одавде се већ види јасно, да је производ корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$. Само остаје још да се докаже, да су сви производи, којих је mn на броју, међу собом различити. Узмимо зарад тога, да су k_1 и k'_1 друга два броја, узета из горе поменута два низа бројева. Аргуменат производа она два корена, који одговарају новим бројевима k_1 и k'_1 јесте:

$$\frac{2(k_1 n + k'_1 m)\pi}{m\,n}$$

и тај нови производ јесте, као што се види, опет корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$. Овај други корен различан је од оног првог, јер да они буду једнаки, треба да је разлика њихових аргумената:

$$\frac{2(kn + k'm)\pi}{m\,n} - \frac{2(k_1 n + k'_1 m)\pi}{m\,n} = 2h\pi$$

где је h ма какв цео број. Но одавде следује:

$$(k - k_1)\,n + (k' - k'_1)\,m = hmn$$

Пошто су десна страна и други члан леве стране дељиви са m, треба да је и први члан леве стране дељив са m, а то не може бити, јер су m и n односно прости бројеви, а $(k - k_1) < m$. Дакле су сви производи различни и они су корени једначине $x^{mn} - 1 = 0$.

4°. Најзад лако је доказати теорему:

Кад су m *и* n *односно прости бројеви, онда све* **примитивне** *корене једначине $x^{mn} - 1 = 0$, добијамо множећи сваки примитивни корен прве од двеју једначина*

$$x^m - 1 = 0, \quad x^n - 1 = 0$$

са сваким примитивним кореном друге.

Јер нека су k и m односно прости бројеви, а тако исто k' и n. Онда вредности k одговара један примитивни корен прве једначине. Исто тако броју k' одговара један примитивни корен друге једначине. Производ тих двају корена јесте

$$\cos\frac{2\,(kn + k'm)\,\pi}{mn} + i\,\sin\frac{2\,(kn + k'm)\,\pi}{mn}$$

и он је очевидно један корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$. И да је тај корен прост, биће доказано, ако само докажемо да су изрази:

$$(kn + k'm) \quad \text{и} \quad mn$$

односно прости бројеви. А то и јесте. Јер кад би ова два израза имали заједничког делиоца c онда, пошто c дели други израз то би оно морало делити m или n. Узмимо да оно дели m. Пошто сад c дели други израз и други сабирак првог израза оно би морало делити и kn, а то не може бити јер су k, m и n по претпоставци односно прости бројеви. Дакле је доиста горњи производ примитивни корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$.

Ако k и m или k' и n нису односно прости бројеви онда је то случај и са:

$$kn + k'm \quad \text{и} \quad nm$$

и онда дакле горњи производ није примитивни корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$.

72. Последне две теореме у № 71 важне су за то, што се помоћу њих разрешавање једначине:

$$1.) \qquad x^{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots} - 1 = 0$$

где су a, b, c, ... прости и међу собом различни бројеви, своди на разрешавање једначина:

$$x^{a^{\alpha}} - 1 = 0, \quad x^{b^{\beta}} - 1 = 0, \quad x^{c^{\gamma}} - 1 = 0 \ \ldots$$

које су од њих простије. Јер ако изнађемо по један примитивни корен за сваку од њих онда производ тих примитивних корена биће један примитивни корен једначине 1). И тај примитивни корен њен подигнут на узастопне степене 0-ви, 1-ви, 2-ги . . . даће све корене њене.

Ми смо у №-и 70 дознали, да корени задате биномне једначине, који нису примитивни корени њени, јесу корени друге које биномне једначине, која је таква да је изложилац њеног степена делилац изложиоцу степена задате једначине. Тако они корени једначине:

$$2.) \qquad x^{a^{\alpha}} - 1 = 0$$

који нису примитивни, јесу корени једначине:

$$x^{a^{\alpha - 1}} - 1 = 0$$

Пошто смо такође доказали, да примитивни корени биномне једначине не могу бити корени биномне једначине, чији је степен нижи од њеног, то је јасно, да је број примитивних корена једначине 2) једнак:

$$a^{\alpha} - a^{\alpha - 1} = a^{\alpha - 1}(a - 1)$$

Исто тако бројеви примитивних корена једначина

$$x^{b^{\beta}} - 1 = 0, \qquad x^{c^{\gamma}} - 1 = 0 \ \ldots$$

јесу односно једнаки:

$$b^{\beta - 1}(b - 1), \qquad c^{\gamma - 1}(c - 1) \ \ldots.$$

Из свега тога следује, да горња једначина 1) има примитивних корена на броју свега:

$$a^{\alpha - 1} b^{\beta - 1} c^{\gamma - 1} \ \ldots \times (a - 1)(b - 1)(c - 1) \ldots$$

Ако је сад:

$$m = a^{\alpha} \ {}^{\beta} c^{\gamma} \ \ldots.$$

онда образац:

$$N = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots.$$

показује, колико има бројева мањих од m, који са њим немају никаквог заједничког делиоца, сем јединице.

Правилни полигони.

73. Кад један круг, чији полупречник сматрамо као јединицу, поделимо на m једнаких делова и за тим вежемо буди коју подеону тачку са n-ом испред ње, ову последњу опет са n-ом испред ње и т. д. док се најзад не вратимо полазној тачки, онда добијамо, као што смо то већ видели, један правилан полигон од m страна. Кад су m и n односно прости бројеви, онда је то исто случај и са m и $m - n$. Кад сад буди коју тачку вежемо са $(m-n)$-ом после ње, ову опет са $(m-n)$-ом после ње и т. д. добићемо очевидно исти полигон од m страна, само што ће се стране тога полигона добијати обрнутим редом. Одатле следује (№ 72) да је број правилних полигона од m страна $= \frac{1}{2}N$, ако број N показује, колико има бројева мањих од m, који су са m односно прости.

Према томе можни су: само један равнострани троугао, и правилни шестоугаоник; петоугла пак има два, обични, који постаје, кад се свака од подеоних тачака веже са оном, која непосредно следује, или, што је све једно, кад се свака подеона тачка веже са четвртом од ње, и звездасти петоугаоник, који постаје, кад се свака подеона тачка веже са другом, или пак трећом после ње. Правилних седмоугаоника има три, обични, који постаје, кад се свака од 7 подеоних тачака веже са оном, која непосредно следује или са оном, која је 6-та од ње, и два звездаста. Један од ових постаје, кад се свака подеона тачка веже са другом од ње, или са петом од ње, и други који постаје, кад се свака подеона тачка веже са трећом од ње или са четвртом од ње. Исто тако има и три деветоугаоника, један обичан и два звездздаста; само два десетоугаоника, један обичан и један звездаст.

Правилна подела круга на једнаке делове, као и израчунавање страна правилних полигона стоје у присној вези са разрешавањем биномне једначине:

$$x^m - 1 = 0$$

Јер ако су m и n односно прости, и ако означимо са u_n страну полигона, која постаје, кад се свака подеона тачка веже с оном, која за њом долази као n-та, онда је:

$$1.)\quad u_n = 2\sin\frac{n\pi}{m} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 - \cos\frac{2n\pi}{m}\right\}}$$

или:

$$2.)\qquad u_n = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2n\pi}{m}}$$

Али је $\cos\frac{2n\pi}{m}$ стваран део у изразу примитивног корена x_n. Према томе, кад смо једном израчунали примитивне корене биномне једначине, можемо лако наћи и стране правилних полигона. Но може се у приликама и простије радити. Јер ако је m непарно, а n парно и $= 2n'$ онда је:

$$\sin\frac{n\pi}{m} = \sin\frac{2n'\pi}{m}$$

сачинилац од i у изразу примитивног корена $x_{n'}$; ако ли је пак n непарно, дакле $m-n$ парно, онда ће се узети:

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{m}.$$

Има биномних једначина, које се без помоћи тригонометријских функција дају алгебарски разрешити. Упоређујући вредности корена нађене на овај последњи начин са оним, које су нађене помоћу обрасца:

3.) $$x = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

добијамо тада вредности за синусе и косинусе извесних лукова или стране извесних правилних полигона.

74. У овој №-и бавићемо се равностраним троуглом, правилним шестоугаоником, петоугаоником и десетоугаоником.

1°. Изналажај страна равностраног троугла и правилног шестоугаоника зависи од биномне једначине:

1.) $$x^3 - 1 = 0$$

Ову је једначину алгебарски лако решити. Један корен њен јесте јединица, а остала 2 корена њена јесу корени квадратне једначине:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

чија је лева страна количник, који се добија кад се x^3-1 подели са $x-1$. Корени једначине 1) јесу:

$$1,\quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а вредности тих истих корена нађених тригонометријским путем, помоћу обрасца 3) у №-и 73, јесу:

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

Из упоређаја ових вредности са оним више њих добијамо:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

а одатле, пошто су $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ суплементи, а $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ комплементи:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Као што смо видели, има само један правилан шестоугаоник и један равностран троугао.

Страна шестоугаоника (№ 73) јесте:

$$2\sin\frac{\pi}{6} = 1,$$

а страна равностраног троугла

$$2\,sin\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

2°. Изналажај страна правилног петоугаоника и десетоугаоника зависи од биномне једначине:

$$1.)\qquad x^5 - 1 = 0$$

Један корен њен јесте = 1. Кад леву страну поделимо са $x-1$ и количник = 0 ставимо, добијамо реципрочну једначину:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Кад је израчунамо, добићемо:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_2 = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_3 = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Ово су четири примитивна корена задане једначине 1). Из упоређаја ових вредности са вредностима истих корена, нађених помоћу образаца 3) у № 73 добијамо:

$$cos\,\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad sin\,\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$cos\,\frac{4\pi}{5} = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}, \qquad sin\,\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

И помоћу ових образаца налазимо стране правилних петоугаоника и десетоугаоника.

Страна обичног петоугаоника (№ 73) јесте:

$$2\,sin\,\frac{\pi}{5} = 2\,sin\,\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

Страна звездастог петоугаоника јесте:

$$2\,sin\,\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

Исто тако страна обичног десетоугаоника:

$$2\,sin\,\frac{3\pi}{10} = 2\,cos\,\frac{\pi}{5} = -\,2\,cos\,\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

75. У овој нумери бавићемо се са правилним петнајстоугаоником (pentidecagone).

Правилних петнајстоугаоника има (№ 73) свега 4. Један је обичан а остала четири јесу звездати, и добијамо их, кад сваку од 15 подеоних тачака вежемо са сваком другом, или са сваком четвртом или са сваком седмом после ње.

Изналажај страна ових полигона зависи од разрешаја једначине:

1.) $$x^{15} - 1 = 0$$

Корени ове једначине добијају се (№ 73, 3°), кад сваки корен прве од ових двеју једначина:

2.) $$x^5 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^3 - 1 = 0$$

помножимо са сваким кореном друге. Исто тако свих 8 примитивних корена једначине 1) добићемо, ако (№ 71, 4) сваки од четири примитивна корена прве једначине под два помножимо са сваким од два примитивна корена друге једначине под 2). Кад упоредимо вредности тих осам примитивних корена са онима, које добијамо помоћу обрасца у 73, добићемо:

$$\cos\frac{2\pi}{15} \pm i \sin\frac{2\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{3(10 - 2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right]$$

$$\cos\frac{4\pi}{15} \pm i \sin\frac{4\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{3(10 + 2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right]$$

$$\cos\frac{8\pi}{15} \pm i \sin\frac{8\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + \sqrt{5} - \sqrt{3(10 - 2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right]$$

$$\cos\frac{14\pi}{15} \pm i \sin\frac{14\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{3(10 + 2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right]$$

И одавде добијамо лако (№ 73) као стране горе поменута четири 15-угаоника:

$$s_1 = 2 \sin\frac{\pi}{15} = 2 \sin\frac{14\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right]$$

$$s_2 = 2 \sin\frac{2\pi}{15} = 2 \sin\frac{13\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right]$$

$$s_3 = 2\,sin\,\frac{4\pi}{15} = 2\,sin\,\frac{11\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right]$$

$$s_4 = 2\,sin\,\frac{7\pi}{15} = 2\,sin\,\frac{8\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right]$$

Ако желимо имати једначину којој су корени само 8 примитивних корена једначине 1), треба нам само (№ 70, 3) из једначине 1) истиснути 5 корена једначине:

$$x^5 - 1 = 0$$

делећи леву страну једначине 1) с левом страном ове једначине, па ћемо добити:

2.) $$x^{10} + x^5 + 1 = 0$$

И сад нам још остаје да одавде истиснемо два уображена корена једначине:

$$x^3 - 1 = 0$$

делећи са $x^2 + x + 1$ леву страну једначине 2). **На** тај начин добићемо реципрочну једначину

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

из које за: $x + \frac{1}{x} = z$

следује:

$$z^4 - z^3 - 4z^2 + 4z + 1 = 0$$

Одавде добијамо једначину, којој су корени стране горе поменута четири петнајстоугаоника, кад ставимо (№ 73, обр. 2)

$$z = 2 - y^2$$

На тај начин налазимо:

$$y^8 - 7y^6 + 14y^4 - 8y^2 + 1 = 0$$

76. У овој №-и још ћемо да покажемо начин израчунавања стране 17-тоугаоника. Одредба истих зависи од разрешаја биномне једначине:

1.) $$x^{17} - 1 = 0$$

Пошто је изложилац 17 непаран број, то су сви корени ове једначине сем јединице примитивни (№ 70, 3°) и за то треба умети наћи само један од њих.

Што се тиче броја правилних 17-тоугаоника, њих свега има 8, један обичан, а седам звездастих.

Ако ставимо:

2.) $$\alpha = cos\,\frac{2\pi}{17} + i\,sin\,\frac{2\pi}{17}$$

онда сви корени једначине 1) сем јединице:

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ldots\ x_{16}$$

добијају се, кад се α подигне на први, други ... 16-ти закључно степен.

Кад леву страну једначине 1) поделимо са кореним чиниоцем $(x-1)$ и за тим количник $= 0$ ставимо, добићемо једначину:

$$3.) \qquad x^{16} + x^{15} + \;.\;.\;.\; + x^2 + x + 1 = 0.$$

Разрешењем ове једначине добијамо такође свих 16 од јединице различних корена једначине 1), које добијамо на горе поменути начин и из тригонометријског обрасца 2).

Из ове реципрочне једначине следује за

$$4.) \qquad x + \frac{1}{x} = u$$

једначина, која је односно u осмога степена (№ 65). Нека је та једначина:

$$5.) \qquad f(u) = 0$$

Лева страна њена јесте цела и рационална функција од u. Кад смо корене ове једначине т. ј:

$$u_1,\; u_2,\; u_3 \;.\;.\;.\; u_8$$

израчунали, онда помоћу обрасца:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}$$

налазимо и све корене једначине 3), који су корени у исти мах и корени једначине 1). Ако је k један од бројева: 1, 2, 3 . . . 8, онда је:

$$6.) \qquad u_k = x_k + \frac{1}{x_k} = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{17}$$

одакле следује, да су сви корени једначине 5) стварни. Од тих корена довољно ће нам бити да знамо само један према ономе, што горе споменусмо. Ако је један од њих нађен н. пр. u_1, онда се α_1 израчунава из обрасца:

$$7.) \qquad \alpha_1 = x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{u_1^2}{4} \quad 1}$$

Кад сваки од осам корена:

$$u_1,\; u_2,\; u_3 \;.\;.\;.\; u_8$$

једначине 5) помножимо са сваким доцнијим и при том множењу будемо пазили на образац 6) добићемо ових 28 једначина:

$$u_1 u_2 = u_1 + u_3$$
$$u_1 u_3 = u_2 + u_4$$
$$u_1 u_4 = u_3 + u_5$$
$$u_1 u_5 = u_4 + u_6$$
$$u_1 u_6 = u_5 + u_7$$
$$u_1 u_7 = u_6 + u_8$$
$$u_1 u_8 = u_7 + u_8$$

$$u_2 u_3 = u_1 + u_5$$
$$u_2 u_4 = u_2 + u_6$$
$$u_2 u_5 = u_3 + u_7$$
$$u_2 u_6 = u_4 + u_8$$
$$u_2 u_7 = u_5 + u_8$$
$$u_2 u_8 = u_6 + u_7$$
$$u_3 u_4 = u_1 + u_7$$
$$u_3 u_5 = u_2 + u_8$$
$$u_3 u_6 = u_3 + u_8$$
$$u_3 u_7 = u_4 + u_7$$
$$u_3 u_8 = u_5 + u_6$$

$$u_4 u_5 = u_1 + u_8$$
$$u_4 u_6 = u_2 + u_7$$
$$u_4 u_7 = u_3 + u_6$$
$$u_4 u_8 = u_4 + u_5$$
$$u_5 u_6 = u_1 + u_6$$
$$u_5 u_7 = u_2 + u_5$$
$$u_5 u_8 = u_3 + u_4$$
$$u_6 u_7 = u_1 + u_4$$
$$u_6 u_8 = u_2 + u_3$$
$$u_7 u_8 = u_1 + u_2$$

Ових 28 једначина можемо сад распоредити по групама тако, да су казаљке десно од знака једнакости у ма којој од њих једнаке казаљкама лево од знака једнакости у једначини, која одмах за њом долази. На тај начин добијамо три групе сваку са по 8 једначина и једну групу са 4 једначине. У последњој једначини сваке групе казаљке десно од знака једнакости исте су са казаљкама лево од знака једнакости у првој једначини.

Ми ћемо узети да проматрамо само ону групу, у којој су четири једначине, а то је:

9.)
$$u_1 u_4 = u_3 + u_5$$
$$u_3 u_5 = u_2 + u_8$$
$$u_2 u_8 = u_6 + u_7$$
$$u_6 u_7 = u_1 + u_4$$

Сада ћемо ставити:

10.)
$$u_1 u_4 = z_1,$$
$$u_3 u_5 = z_2,$$
$$u_2 u_8 = z_3,$$
$$u_6 u_7 = z_4,$$

и сад из једначина 9) следује:

11.)
$$u_1 + u_4 = z_4 \quad u_1 u_4 = z_1$$
$$u_6 + u_7 = z_3 \quad u_6 u_7 = z_4$$
$$u_2 + u_8 = z_2 \quad u_2 u_8 = z_3$$
$$u_3 + u_5 = z_1 \quad u_3 u_5 = z_2$$

Ако смо сад у стању израчунати вредности непознатих z_1, z_2, z_3 и z_4 онда помоћу ових осам једначина добијамо лако и вредности за поједина u, која нам представљају непознате корене једначине 5). Тако н. пр. из прве једначине под 11) видимо, да су вредности непознатих u_1 и u_4 корени једне квадратне једначине. Кад исту решимо, наћићемо да је:

12.)
$$u_1 = \frac{1}{2} z_4 + \sqrt{\frac{1}{4} z_4^2 - z_1}$$
$$u_4 = \frac{1}{2} z_4 - \sqrt{\frac{1}{4} z_4^2 - z_2}$$

Да су овде знаци у вредностима од u_1 и u_4 добро узети увиђа се из једначине 6).

Сад можемо сваку од количина z_1, z_2, z_3, z_4 помножити са сваком од оних, које за њом долазе и на тај начин добићемо шест нових образаца, којих леве стране можемо помоћу образаца 11) и 8) развити. За нас су од тих 6) образаца важна ова два:

$$z_1 z_3 = u_3 + u_8 + u_4 + u_7 + u_1 + u_6 + u_2 + u_5$$
$$z_2 z_4 = u_1 + u_3 + u_7 + u_8 + u_2 + u_6 + u_4 + u_5$$

Десне стране ових једначина јесу истоветне.

Кад се погледа на једначину 6), онда је лако увидети, да је лева страна ових једначина једнака збиру свију корена једначине 3) и због тога $= -1$ (№ 6). И тако сад имамо:

$$z_1 z_3 = -1, \quad z_2 z_4 = -1.$$

Помоћу једначина 11) налазимо:

$$z_1 + z_3 = u_3 + u_5 + u_6 + u_7$$

$$z_2 + z_4 = u_1 + u_2 + u_4 + u_8$$

Ако десне стране ових једначина означимо са y_1 и y_2 добићемо:

13.) $$y_1 = u_3 + u_5 + u_6 + u_7$$

$$y_2 = u_1 + u_2 + u_4 + u_8$$

дакле:

$$z_1 + z_3 = y_1\,, \quad z_1 z_3 = -1$$

$$z_2 + z_4 = y_2\,, \quad z_2 z_4 = -1$$

Кад бисмо могли непознате y_1 и y_2 израчунати, ми бисмо онда помоћу ових једначина лако нашли и непознате z_1, z_3 и z_2, z_4. Тако бисмо н. пр. нашли:

14.) $$\left\{\begin{aligned} z_1 &= \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} \\ z_2 &= \frac{y_2}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} \end{aligned}\right.$$

Да бисмо сад y_1 и y_2 израчунали, саберимо најпре а за тим помножимо једначине 13) па ће изаћи:

15.) $$y_1 + y_2 = -1\,, \quad y_1 y_2 = -4$$

Дакле су y_1 и y_2 корени квадратне једначине. Разрешавањем исте налазимо:

16.) $$y_1 = -\frac{(1 + \sqrt{17})}{2}$$

$$y_2 = -\frac{(1 - \sqrt{17})}{2}$$

И тако помоћу једначина 16), 14), 12) и 7) добијамо један корен $x_1 = \alpha$ једначине 1), из којег се остали на познати начин налазе. Да су знаци у 14) и 16) добро узети, нека се подруди читалац да сазна сам.

XIII. Бројне једначине.

77. Једначина облика:

1.) $$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \;.\;.\;.\; + a_{m-1} x + a_m = 0$$

зове се бројном — нумеричном — кад су сачиниоци a истински бројеви. Разрешавање бројних једначина битно је различно од разрешавања општих једначина. При разрешавању општих једначина траже се обрасци, у којима је исказан закон, како буди који корен једначине зависи од њених сачинилаца и такав један образац, кад је једном нађен мора дати све корене једначине просто за то, што се не може наћи разлога, за што би нам тај образац дао један корен једначине пре него ли ма који други. Корени бројних једначина јесу извесни стварни или уображени бројеви, који се сваки посебице независно од осталих израчунавају. Зарад тога нужно је пронаћи границе сваком појединим корену, то ће рећи два броја, између којих се он и само он један налази. Методе згодне за тај посао ми ћемо мало доцније изложити.

Ми ћемо од сада претпостављати, да су сачиниоци a стварни бројеви; противни случај ми ћемо изреком напоменути.

Исто тако слободно нам је претпоставити, да су сачиниоци a рационални бројеви, јер ако су неки од њих ирационални, ми их можемо заменути рационалним разломцима, који се од њих за ма колико мало разликују. Кад су пак сви сачиниоци једначине рационални, онда смо у стању помоћу преображаја у № 17 и следећим преставити једначину у облику једначине 1) тако, да су сви сачиниоци цели бројеви сем првог, који је једнак јединици.

Ако узмемо, да је једначина 1) *онаква, како мало час казасмо, онда је лако доказати, да стварни корени њени морају бити цели или ирационални бројеви, а никако рационални разломци.*

Јер кад би $x = \frac{p}{q}$, где су p и q цели и односно прости бројеви, био корен једначине:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

онда би морала вредети једначина:

$$\frac{p^m}{q^m} + a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + a_2 \frac{p^{m-2}}{q^{m-2}} + \dots + a_{m-1} \frac{p}{q} + a_m = 0$$

или, по умножају са q^{m-1}, једначина

$$\frac{p^m}{q} + a_1 p^{m-1} + a_2 p^{m-2} q + a_3 p^{m-3} q^2 + \dots + a_{m-1} p q^{m-2} + \\ + a_m q^{m-1} = 0$$

а то не може бити, јер збир из једног разломка и целог броја никад не може бити $= 0$.

78. *Ако полином $f(x)$ задате једначине добија за $x = a$ и $x = b$ две противно означене вредности н. пр. $f(a) = + A$, и $f(b) = - B$, онда између a и b мора се налазити бар један корен једначине, или може их бити и више, али број истих мора бити непаран.*

Јер пошто је $f(x)$ као цела и рационална, функција непрекидна од $x = - \infty$, до $x = + \infty$, то се она при непрекидном мењању x-а мора и сама непрекидно мењати од прве своје вредности $f(x) = + A$ до последње $f(b) = - B$, дакле она не може прескочити ни једну вредност, која лежи између тих крајњих вредности њених. Између тих крајњих вредности њених, пошто су оне противно означене, лежи и нула. Она вредност x-а, за коју је $f(x) = 0$, јесте корен једначине. Дакле доиста између $x=a$ и $x=b$ лежи барем један корен једначине $f(x) = 0$. Али их може бити и више као што рекосмо горе, и тада је број истих непаран. И доиста може се н. пр. десити, да се $f(x)$ од прве своје вредности $f(a) = + A$ овако мења. Она поступно добија све мање и мање вредности, постаје $= 0$, па онда добија одречне вредности, донекле све веће и веће, а после све мање и мање; за тим постаје опет $= 0$, па онда добија донекле све веће, па за тим све мање положне вредности, постаје трећи пут равна нули, па онда добија све веће одречне вредности до $- B$ закључно. Дакле у том случају има једначина три корена између $x = a$ и $x = b$; и тако даље.

Ако ли $f(x) = 0$ за $x = a$ и $x = b$ добија две једнако означене вредности, н. пр. $f(a) = +A$, а $f(b) = +B$, онда се на начин са свим сличан овоме може доказати, да $f(x)$ при свом непрекидном мењању од прве па до последње вредности своје или никако не постаје = нули, у ком случају између a и b нема ниједног корена, или пак при том $f(x)$ постаје парни број пута = 0, у ком случају између a и b има паран број корена.

У осталом може се ово на овај још увиђавнији начин доказати:

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$ корени једначине, који леже између a и b, и од којих неки могу бити и једнаки међу собом. Тада можемо ставити:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_r)\varphi(x)$$

где је $\varphi(x)$ количник, који се добија, кад се $f(x)$ подели са производом корених чинилаца, који постају из корена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$. Количине $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ јесу једнаког знака, јер у противном случају а услед непрекидности функције $f(x)$, па дакле и функције $\varphi(x)$ морало би $\varphi(x)$ бити равно нули за једну вредност $x = \alpha_{r+1}$, која лежи између a и b, дакле би се противно претпоставци још и корен α_{r+1} осим корена $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ налазио, између a и b. Ако сад за $x = a$ и $x = b$ $f(x)$ добије противно означене вредности, онда пошто су $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ једнако означене, морају производи:

$$(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)(a-\alpha_3)\ldots(a-\alpha_r)$$

$$(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)(b-\alpha_3)\ldots(b-\alpha_r)$$

бити противно означени, па како су сви чиниоци првог производа одречни, ако узмемо да је $a < b$, што је допуштено, док су међу тим сви чиниоци другог производа положни, то онда број тих чинилаца мора бити непаран, дакле и број корена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$, што су између a и b мора бити такође непаран.

Ако ли $f(x)$ за $x = a$ и $x = b$ добија једнако означене вредности, онда и горњи производи морају бити једнако означени, дакле број њихових чинилаца мора бити паран, дакле тада између a и b има паран број корена, који број може бити и нула.

79. Кад x при свом непрекидном мењању пређе један корен α задате једначине $f(x) = 0$, полином $f(x)$ постаје = 0, али не мења увек свој знак. Јер ако h замислимо тако мало, да између $\alpha-h$ и $\alpha+h$ не лежи више ни један корен задате једначине, онда на основу онога, што је у № 78 доказано $f(\alpha-h)$ и $f(\alpha+h)$ морају бити једнако или противно означене, како се кад α јавља као корен једначине парни или непарни број пута. *Дакле $f(x)$ мења свој знак или не мења, како се кад корен, који x прелази, јавља у једначини непарни или парни број пута.*

У осталом лако је то доказати и непосредно. Јер ако се α јавља r-пута као корен, онда је:

$$f(x) = (x-\alpha)^r\varphi(x)$$

Ако сменимо x са $\alpha - h$ и $\alpha + h$ добићемо:

$$f(\alpha-h) = (-h)^r\varphi(\alpha-h),$$

$$f(\alpha+h) = (h)^r\varphi(\alpha+h).$$

Пошто су количине $\varphi(\alpha-h)$ и $\varphi(\alpha+h)$ једнако означене, то ће $f(\alpha-h)$ и $f(\alpha+h)$ бити истог или противног знака, како је кад r парно или непарно.

И сад из онога, што смо доказали у овој №-и и оној пред њом, потичу као просте последице неке теореме, које смо раније на други начин доказали.

Свака једначина непарног степена мора имати непарни број стварних корена, дакле најмање један такав корен. Јер за $x = -\infty$ и $= +\infty$ постаје $f(x) = -\infty$ и $= +\infty$.

Свака једначина парног степена мора имати паран број стварних корена, којих се број може и на нулу свести. Јер и за $x = -\infty$ и $x = +\infty$ $f(x)$ постаје сада $= +\infty$.

Свака једначина парног степена, у којој је последњи члан одречан, мора имати бар два стварна корена. Јер сада $f(x)$ за $x = 0$ и $x = -\infty$ а тако исто и за $x = 0$ и $x = +\infty$ постаје $= -\infty$ и $= +\infty$.

Примедба. До резултата, до којих смо дошли у овој №-и и № 78 можемо доћи и геометријским путем. Ако $y = f(x)$ конструјишемо, добићемо једну криву линију. Ако је сад н. пр. $f(a) = +A$ и $f(b) = -B$, онда тачке, које одговарају апсцисама $x = a$ и $x = b$ морају лежати на противним странама апсцисне осе, и за то линија у своме току мора пресећи апсцисну осу најмање један пут или непарни број пута. — Међу тим већ знамо да сваком пресеку одговара један корен једначине. Али ако је $f(a) = +A$ и $f(b) = +B$, онда тачке, које одговарају апсцисама $x = a$ и $x = b$, леже на истој страни апсцисне осе и за то је линија у своме току или никако не сече, или је сече у више тачака, чији је број паран.

Границе стварних корена.

80. При израчунавању стварних корена важно је знати, или умети наћи два броја између којих се налазе сви корени једначине, који су стварни. Сваки број који је већи од највећег положног корена зове се *горња граница* стварних корена једначине. Горња граница стварних

корена једначине $f(-x) = 0$ узета са знаком (мање) —, јесте доња граница стварних корена задате једначине. Према томе свака једначина има небројено много горњих и доњих граница. Али се при том захтева, да размак тих граница буде што мањи, а то ће бити, ако је разлика између горње границе и највећег положног корена а тако исто и разлика између доње границе и — бројно — највећег одречног корена што мања.

У № 24 алгеб. анал. ми смо нашли, да кад је M бројна вредност највећег сачиниоца у полиному једначине

$$1.)\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

да је велим онда за:

$$2.)\qquad x = 1 + \frac{M}{a_0}$$

а и за сваку већу вредност x-а, први члан полинома већи од збира свију доцнијих чланова. Одатле следује, да за вредност x-а под 2) као и за сваку од ње већу полином једначине 1) не може бити $= 0$. Дакле је та вредност x-а горња граница стварних корена једначине 1). Ако је $a_0 = 1$, дакле задата једначина облика:

$$3.)\quad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m = 0$$

онда је горња граница стварних корена њених

$$4.)\qquad x = 1 + M.$$

Дакле: *горња граница положних корена добија се, кад се јединици дода бројна вредност највећег сачиниоца једначине.*

Лако је међу тим доказати онако као у № 24 алгеб. анал. да ће број под 4) бити горња граница стварних корена и онда, кад је M бројна вредност највећег одречног сачиниоца.

Мању доњу границу од ове можемо наћи, ако водимо рачуна о првом одречном члану полинома једначине.

Нека је M бројна вредност највећег одречног сачиниоца, а први одречни члан нека је $(k+1)$-ви дакле онај у коме стоји x^{m-k}.

Лако је увидети, да сада треба x одредити само тако, да је:

$$x^m > M\left\{x^{m-k}+x^{m-k-1}+\ldots+1\right\}$$

или

$$x^m > M\left\{\frac{x^{m-k+1}-1}{x-1}\right\}$$

што можемо написати и овако:

$$\frac{x^{m-k+1}\left\{(x-1)\,x^{k-1}-M\right\}+M}{x-1}>0$$

Одавде видимо, да ће полином једначине 1) бити положан за сваку положну вредност x-а, за коју је:

$$(x-1)\,x^{k-1}\geqq M$$

дакле тим пре вредност x-а, за коју је:

$$(x-1)\,(x-1)^{k-1}=M$$

а и за сваку већу. Из ове једначине следује:

5.) $$x=1+\sqrt[k]{M}$$

Дакле за ову вредност x-а а и за сваку већу полином једначине биће увек положан.

И тако:

Горњу границу корена једначине 3) добијамо кад додамо јединици k-ти корен из бројне вредности највећег одречног сачиниоца, где $(k+1)$ значи казаљку места првог одречног члана једначине.

81. Newton је пронашао једну методу, по којој се изналази често као горња граница стварних корена број мањи од оних, које налазимо по методама прошле нумере. Ево у чему се састоји та метода:

Једначина, у којој су сви чланови положни, не може очевидно имати положних корена (№ 6 и 14), и кад у таквој једначини будемо замењивали x са све већим и већим положним вредностима полином једначине, остајући положан добијаће такође све веће и веће положне вредности.

Сад ако из дане једначине изнађемо нову, чији су корени за h мањи од корена дане једначине, и ако смо h изабрали такво, да сви сачиниоци нове једначине испадну положни, онда је јасно, да нова једначина не може имати ни један положан корен. Број h, за који су корени нове једначине мањи од корена задате једначине, мора дакле тада бити већи од највећег положног корена задате једначине.

Нова једначина јесте као што знамо:

$$f^{m}(h)y^{m}+f^{(m-1)}(h)y^{m-1}+\ldots+f'(h)y+f(h)=0$$

И по томе, да бисмо нашли горњу границу стварних корена једначине $f(x)=0$, треба наћи за h што мању вредност, која је таква, да за њу сви изводи функције $f(x)$ као и она сама испадну положни, и та вредност јесте горња граница стварних корена.

Ми знамо, да су узастопни изводи функције $f(x)$:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x) \dots f(^{(m-1)}(x),\ f^{m}(x)$$

односно x редом:

$$(m-1)\text{-ог},\ (m-2)\text{-ог},\ (m-3)\text{-ег},\ \dots\ 2\text{-ог},\ 1\text{-ог},\ 0\text{-ог}$$

степена. Пошто је $f^{m}(x)$ сталан и положан број, то ћемо тражити за x вредност, за коју $f^{(m-1)}(x)$ испада положна, а то је лако, пошто је она првог степена. За тим ћемо исту вредност x-а поступно повећавати, ако је потребно дотле, докле сви изводи функције $f(x)$, као и она сама, не постану положни. Вредности пак, које функција $f(x)$ и њени узастопни изводи добијају за $x = a$, тражићемо најзгодније, делећи те изразе по Хорнеру са $x - a$, јер ми знамо, да је остатак деобе вредност дељене функције за $x = a$.

Најзад ваља приметити, да кад смо при тражењу вредности x-а, за коју функције:

$$1.)\qquad f^{m}(x),\ f^{m-1}(x)\ \dots\ f'(x),\ f(x)$$

испадају све положне, нашли, да су првих r функција под 2) положне, а не и све остале, за н. пр. $x = a$, да велим онда при огледању следећег већег броја није потребно враћати се на оних r узастопних функција под 2), које су већ за мањи број $x = a$ биле све положне, просто за то, што све функције и за сваки већи број морају бити положне. Истинитост тога тврђења лако је увидети. Узмимо образац:

$$2.)\quad f^{r}(a+l) = f^{r}(a) + f^{r+1}(a)l + f^{r+2}(a)l^{2} + \dots +$$

$$+ f^{m-1}(a)\, l^{m-r-1} + f^{m}(a)\, l^{m-r}$$

где је r положан број.

Из овога видимо, да ако су за $x = a$ r-ни извод функције и сви њени виши изводи положни, да велим онда r-ни извод мора бити положан и за сваку већу вредност x-а. Према овоме, ако је количина: $f^{(m-1)}(a)$ била положна, то ће исто бити случај и са количином $f^{(m-1)}(a+l)$, где је l ма колики положни број. Ако је количина $f^{(m-2)}(a$ била положна, мораће бити и количина $f^{(m-2)}(a+l)$ и т. д.

82. У № 80 већ смо казали, да доња граница стварних корена задате једначине јесте са знаком — узета горња граница стварних корена једначине $f(-x) = 0$

Ако положне корене једначине за себе сматрамо, а одречне опет за себе, онда се могу тражити горња и доња граница како положних, тако и одречних корена. Горња граница положних корена, то је пређашња горња граница стварних корена. Доња граница положних корена, то је број мањи од најмањег положног корена. Доња граница одречних корена јесте пређашња доња граница стварних корена, а горња граница одречних корена, јесте одречни број, који је — бројно — мањи од — бројно — најмањег одречног корена једначине.

Да бисмо сад изнашли доњу границу положних корена једначини:

$$1.)\qquad f(x) = 0$$

треба само наћи горњу границу g положних корена једначини:

$$2.)\qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Пошто је најмањи положни корен једначине 1) једнак јединици подељеној са највећим положним кореном једначине 2), то је јасно, да је $\frac{1}{g}$ доња граница положних корена задате једначине 1).

Горња граница одречних корена једначине 1) јесте очевидно, са знаком — узета, доња граница положних корена једначине:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Но треба приметити, да се обично узимље нула и као доња граница положних и као горња граница одречних корена задате једначине.

Ако се повратимо на № 24 алгеб. анализе видећемо да је:

$$3.) \qquad x = \frac{a_0}{a_0 + M},$$

где је a_0 први сачинилац а број M бројна вредност највећег сачиниоца једначине, такође доња граница положних корена једначине. На начин у № 24 алг. анал. показани доказује се да је израз под 3) доња граница положних корена и онда, кад M значи бројну вредност највећег одречног сачиниоца у једначини. Ако је $a_0 = 1$, онда образац 3) прелази у $x = \frac{1}{1 + M}$.

Лако је увидети, да кад сви чланови једначине, у којима стоје непарни степени x-а имају један и исти знак, а сви чланови са парним степенима противни знак, да велим онда није нужно тражити границе одречних корена, пошто их једначина у таком случају не може ни имати.

Пример. Нека је задата једначина:

$$2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 11x - 4 = 0.$$

Траже се границе њиних корена. По обрасцу 2) у № 80 горња граница g положних корена јесте:

$$g = 1 + \frac{7}{2} = 4{\cdot}5$$

По обрасцу 5) исте №-е налазимо као горњу границу положних корена:

$$g = 1 + \sqrt{\frac{7}{2}} = 2{\cdot}88$$

дакле мало мању но мало час.

Тражимо сад горњу границу положних корена по методи Newton-овој.

Сад је:

$$f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 11x - 4$$

$$f'(x) = 10x^4 + 16x^3 - 15x^2 - 14x + 11$$

$$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 15x - 7$$

$$f'''(x) = 20x^2 + 16x - 5$$

$$f^{\text{IV}}(x) = 10x + 4$$

$$f^{\text{V}}(x) = 2$$

За $x = 0$ $f^{v}(x)$ и $f^{IV}(x)$ положне су али не и све остале. За $x = 1$ положне су све, дакле је:

$$g = 1$$

Дакле смо по Newton-овој методи нашли као горњу границу положних корена најмањи број.

Тражимо сада доњу границу одречних корена.

Сад је:

$$f(-x) = 2x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 11x + 4$$

$$f'(-x) = 10x^4 - 16x^3 - 15x^2 + 14x + 11$$

$$f''(-x) = 20x^3 - 24x^2 - 15x + 7$$

$$f'''(-x) = 20x^2 - 16x - 5$$

$$f^{IV}(-x) = 10x - 4$$

$$f^{V}(-x) = 2$$

Први цео број за који испадају положне све ове функције, јесте $+ 2$, а то је горња граница положних корена једначине $f(-x) = 0$, дакле је $- 2$ доња граница одречних корена задате једначине. Дакле сви стварни корени њени леже између $- 2$ и $+ 1$. Овде бисмо, пошто је размак између бројева $- 2$ и $+ 1$ могли узети нулу као заједничку границу и то као доњу границу положних и горњу границу одречних корена. Но ми ћемо при свем том да тражимо споменуте две границе. Овде је:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x^5 - 11x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 4x - 2$$

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = 20x^4 - 44x^3 + 21x^2 + 10x - 4$$

$$f''\left(\frac{1}{x}\right) = 40x^3 - 66x^2 + 21x + 5$$

$$f'''\left(\frac{1}{x}\right) = 40x^2 - 44x + 7$$

$$f^{IV}\left(\frac{1}{x}\right) = 20x - 11$$

$$f^{V}\left(\frac{1}{x}\right) = 4$$

Најмањи цео број, за који испадају положне све ове функције јесте $+ 2$, и то је горња граница положних корена једначине:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

дакле је $\frac{1}{2}$ доња граница положних корена задате једначине. За $x = 2$ функција $f''\left(\frac{1}{x}\right)$ јесте $= 0$, али она на основу обрасца 2) у № 81 мора опет за то бити положна за сваку положну вредност x-а већу од јединице.

Приступимо најзад и истраживању горње границе одречних корена.

Сада је:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 4x^5 + 11x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 4x + 2,$$

$$f'\left(-\frac{1}{x}\right) = 20x^4 + 44x^3 + 21x^2 - 10x - 4$$

$$f''\left(-\frac{1}{x}\right) = 40x^3 + 66x^2 + 21x - 5$$

$$f'''\left(-\frac{1}{x}\right) = 40x^2 + 44x + 7$$

$$f^{\mathrm{IV}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 20x + 11$$

$$f^{\mathrm{V}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 4$$

Први цео број за који су све ове функције положне јесте $+ 1$. Дакле је $- 1$ горња граница одречних корена задате једначине.

По обрасцу 3) ове №-е налазимо као доњу границу положних корена $\frac{2}{9}$, а као горњу границу одречних корена $- \frac{2}{5}$.

83. Newton-ова метода, помоћу које тражимо горњу границу положних корена може се у неколико изменути. Место да из дане једначине тражимо одмах једначину, у којој су сви чланови положни, која дакле једначина нема ни једног положног корена, ми можемо поступно смањивати корене дане једначине све са једном јединицом. Тим хоћемо да кажемо то, да из дане једначине можемо поступно извести читав један низ нових једначина, чији су корени за једну, две, три и т. д. јединице мањи од корена дане једначине. На тај начин радећи за цело ћемо најзад добити једначину, у којој су сви чланови положни, или која нема ни једног положног корена. Кад бројимо све те нове једначине почев од прве па до оне, у којој су сви чланови положни, онда казаљка места последње једначине јесте горња граница положних корена задате једначине.

Узмимо као пример за то једначину:

$$x^4 + 6x^3 - 76x^2 + 31x + 294 = 0$$

Као полиноме једначина, чији су корени за 1, 2, 3 . . . мањи од корена задате једначине, добијамо:

1.) $1 + 10 - 52 - 99 + 256,$

2,) $1 + 14 - 16 - 169 + 116,$

3.) $1 + 18 + 32 - 155 - 54,$

4.) $1 + 22 + 92 - 33 - 158,$

5.) $1 + 26 + 164 + 221 - 76,$

6.) $1 + 30 + 248 + 631 + 336.$

Ми смо написали само узастопне сачиниоце тих полинома, а бројеви које смо лево написали, показују, за колико су јединица корени полинома који стоје десно мањи од корена задате једначине. Пошто су у шестом полиному сви чланови положни, то је шест горња граница положних корена задате једначине. Ако овако будемо радили и са једначином $f(-x) = 0$ добићемо доњу границу одречних корена задате једначине.

Овај начин и ако није простији од Newton-овог, опет има неких добрих страна. Пошто су последњи чланови узастопних једначина очевидно вредности, које полином задате једначине добија за $x = 1, 2, 3, 4 \ldots \ldots$ то је онда r очевидно корен задате једначине, кад је последњи члан r-не једначине $= 0$. Дакле тражећи по овој методи горњу границу положних корена задате једначине, налазимо успут рационалне корене њене, ако их, т. ј. она има. Из истог разлога, а на основу №-е 78 и 79 из броја мена у последњем стубу дознаје се и то, да ли има ирационалних корена између два и два узастопна броја. Тако н. пр. горња једначина има један положан и ирационалан корен између 2 и 3, а други такав између 5 и 6. Ако најзад у једној од нових једначина нема једног члана између два једнако означена члана, онда та једначина, па дакле и задата мора имати уображених корена (№ 16).

Лако је најзад увидети, да се при поступном смањивању корена задате једначине *мора* најзад наићи на такву једначину у којој су сви чланови положни. Јер корене задате једначине ми можемо смањити са тако великим бројем, да не само сви стварни корени, него и стварни делови уображених корена постану одречни. Но тада ће једначине имати чинилаца само једног од ова два облика: $(x+\alpha)$ или $(x+p-qi)(x+p+qi) = [(x+p)^2+q^2]$, али у производу таквих чинилаца не може очигледно бити ни једне мене. И тако при поступном смањивању корена задане једначине могу се губити мене, али никако придолазити. И тако сад можемо сматрати као доказану ову теорему:

Ако су **a** *и* **b** *два ма каква броја и* $b > a$, *онда прва од ових двеју једначина:*

$$f(x+b) = 0, \quad f(x+a) = 0$$

не може никако имати више мена од друге. Корени ових двеју једначина јесу за b и a мањи од корена једначине $f(x) = 0$.

Тражење рационалних корена.

84. Кад је задата једначина, коју треба решити, облика:

$$1.)\ x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2} x^2 + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

где су сви сачиниоци a цели бројеви, онда на основу онога, што смо рекли у № 77 рационални корени њени морају бити цели бројеви, и осим тога чиниоци последњега члана a_m (№ 6). Да бисмо дакле нашли рационалне корене једначине 1) разложићемо њен последњи члан a_m на његове просте и сложене чиниоце, па ћемо онда свакогод тих чинилаца узетог најпре са знаком + па са знаком — огледати, да ли је корен или не задате једначине. То огледање можемо извршити двојако т. ј. или замењујући у једначини x са поменутим чиниоцем, у ком случају резултат замене мора бити $= 0$, ако је огледани број корен, или пак делећи по Horner-овој методи полином једначине са разликом између x и огледаног броја, у ком случају остатак деобе мора бити $= 0$ (№ 4) ако је огледани број корен.

Ако смо изнашли границе стварних корена, онда при том огледању чинилаца, треба се само ограничити на оне чиниоце његове, који леже између горње и доње границе стварних корена, ако хоћемо себи да уштедимо излишан посао.

Али има још један згодан начин, помоћу којег се испитује, да ли је број α корен дане једначине или не. Ако је број α корен једначине, онда он мора једначину задовољавати, дакле мора вредети једначина:

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + a_2\alpha^{m-2} + \ldots + a_{m-2}\alpha^2 + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

Кад све ове чланове сем оног последњег пребацимо на супротну страну, за тим поделимо лево и десно са α, добићемо:

$$2.)\quad \frac{a_m}{\alpha} = -\alpha^{m-1} - a_1\alpha^{m-2} - \ldots - a_{m-3}\alpha^2 - a_{m-2}\alpha - a_{m-2}$$

Одавде видимо, да последњи члан једначине мора бити дељив са α, ако је овај број корен једначине 1), што смо ми пређе (№ 6) дознали на други начин.

У једначини 2) пребацимо члан $-a_{m-2}$ на лево, па за тим поделимо лево и десно са α, па ћемо добити:

$$3.)\quad \frac{b_1 + a_{m-1}}{\alpha} = -\alpha^{m-2} - a_1\alpha^{m-3} - \ldots - a_{m-3}\alpha - a_{m-2}$$

где је краткоће ради стављено:

$$\frac{a_m}{\alpha} = b_1$$

Из 3) видимо, да пошто је десна страна цео број, то исто мора бити случај и са левом, дакле збир $b_1 + a_{m-1}$ мора бити дељив са α. Пребацимо сада даље a_{m-2} на леву страну, и поделимо лево и десно са α, па ћемо добити:

$$4.)\quad \frac{b_2 + a_{m-2}}{\alpha} = -\alpha^{m-3} - a_1\alpha^{m-4} - \ldots - a_{m-4}\alpha \quad a_{m-3}$$

где смо краткоће ради ставили:

$$b_2 = \frac{b_1 + a_{m-2}}{\alpha}$$

Из 4) видимо да и збир $b_2 + a_{m-2}$ мора бити дељив са α.

Ако наставимо пребацивати на лево чланове, који су десно и у исти мах делити са α, добићемо после $(m-1)$ таквих рачуна:

$$m)\qquad \frac{b_{m-2} + a_2}{\alpha} = -\alpha - a_1$$

где је b_{m-2} цео број. Одавде видимо, да је збир $b_{m-2} + a_2$ дељив са α. Ако сад пребацимо и a_1 на леву страну и поделимо са α добићемо:

$$m+1)\qquad \frac{b_{m-1} + a_1}{\alpha} = -1\,,$$

где смо краткоће ради ставили:

$$b_{m-1} = b_{m-2} + a_2$$

Ако леви израз у једначини $m+1$), који је израз цео број, означимо са b_m, онда та једначина изгледа овако:

$$b_m = -1 \quad \text{или} \quad b_m + 1 = 0$$

Овако се исто може радити и онда, кад је први сачинилац у једначини не 1 него a_0, само што ће последња једначина тада бити:

$$b_m + a_0 = 0$$

Дакле да би број α могао бити корен задане једначине, треба:

Да је количник измеђ последњег члана и броја α цео број.

Даље, кад томе количнику додамо сачиниоца од x^1, узстог са његовим знаком, па добивени збир поделимо са α нови количник треба да је опет цео број.

Кад томе количнику додамо сачиниоца од x^2, узетог са његовим знаком, и добивени збир поделимо са α, количник треба да је опет цео број и т. д.

На послетку треба да су сви ови на показани начин добивени количници цели бројеви, и сем тога да је збир из последњег количника и првог сачиниоца једначине једнак нули.

Ову методу показао је први Newton.

Пример. Траже се рационални корени једначине:

$$x^4+3x^3-31x^2-63x+90=0.$$

Сви прости и сложени чиниоци последњег члана 90 јесу:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Кад потражимо границе стварних корена задане једначине по Newton-овој методи, онда успут дознајемо, да су + 5 и — 6 корени задате једначине. Сви дакле корени задате једначине леже између + 6 и — 7. И према томе од горњих чинилаца броја 90 треба огледати, да ли су корени само првих пет, узетих најпре са знаком +, па са знаком —. Ми ћемо то урадити по последњој Newton-овој методи, а остављамо читаоцу, да он то уради и по другим двема методама. Међу тим, да ли су + 1 и — 1 корени једначине најпростије се уверавамо простом заменом. И ако то учинимо видећемо, да је број + 1 корен једначине а број — 1 не.

Огледајмо сада бројеве + 2 и — 2 по Newton-овој методи.

$$\frac{90}{2}=45,\ 45-63=-18,\ \frac{-18}{2}=-9,\ -9-31=-40,$$

$$-\frac{40}{2}=-20,\ -20+3=-17,\ -\frac{17}{2}=-8{\cdot}5,$$

дакле + 2 није корен.

$$\frac{90}{-2}=-45,\ -45-63=-108,\ \frac{-108}{-2}=54,$$

$$54-31=23,\ \frac{23}{-2}=-11{\cdot}5,$$

и — 2 дакле није корен.

Огледајмо сада бројеве + 3 и — 3:

$$\frac{90}{3}=30,\ 30-63=-33,\ \frac{-33}{3}=-11$$

$$-11-31=-42,\ \frac{-42}{3}=-14,\ -14+3=-11$$

$$\frac{-11}{3}=-3\,{}^{2}/_{3}$$

дакле ни + 3 није корен.

$$\frac{90}{-3} = -30, \quad -30 - 63 = -93, \quad \frac{-93}{-3} = 31$$

$$31 - 31 = 0, \frac{0}{-3} = 0, \ 0 + 3 = 3$$

$$\frac{3}{-3} = -1, \ -1 + 1 = 0$$

дакле је — 3 корен једначине.

Ми смо већ напоменули, да су рационални корени задате једначине + 5, + 1, — 6 и — 3. Пошто је једначина четвртога степена, то смо нашли све корене њене и с тога није потребно огледати још и бројеве — 5 и + 6.

85. Ако је број чинилаца последњега члана a_m, који се налазе између стварних корена једначине, велики, онда се број огледа може смањити помоћу једне методе, коју ћемо сада да изложимо.

Ако у полиному једначине заменимо x са + 1 и — 1, онда ће резултати замене бити: $f(+1)$ и $f(-1)$. Али оба ова броја јесу такође последњи чланови у оним двема једначинама, којих су корени односно за јединицу мањи и већи од корена дане једначине. Одавде следује, да само они чиниоци последњега члана узети са знаком + или —, *могу а не морају* бити корени задане једначине, који, кад се од њих одузме јединица, деле $f(+1)$, а кад им се дода јединица деле $f(-1)$ без остатка.

Ако би који од бројева $f(+1)$ или $f(-1)$ био једнак нули, онда би + 1 или — 1 био корен једначине. У таквом случају требало би тај корен најпре истиснути из једначине, па онда применути ово правило.

Узмимо н. пр. да је дата једначина:

$$x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 38x + 60 = 0$$

Чиниоци последњега члана јесу:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30, 60.

Пошто су границе стварних корена + 4 и — 6, то онда треба огледати само бројеве 1, 2, 3 и — 1, — 2, — 3, — 4, — 5. Овде су сад:

$$f(+1) = 12, \quad f(-1) = 80.$$

+ 1 и — 1 нису корени. Огледајмо да ли су остали бројеви корени. Са 2 — 1 = 1 дељив је број 12, али са 2 + 1 = 3 није дељив број 80, дакле + 2 није корен.

Са 3 — 1 = 2 дељив је број 12, а са 3 + 1 = 4 дељив је број 80, дакле + 3 може бити, и ми дознајемо по једној од показаних метода, да је он доиста корен.

Са —2 —1 = —3 дељив је број 12, а са —2 + 1 = —1 дељив број 80, дакле може бити корен; али ако огледамо, видећемо да није.

Исто тако број — 3 може бити корен, али кад га огледамо видећемо, да није

Број — 4 не може бити корен. А број — 5 може бити и јесте доиста корен.

У извесним приликама сваки је оглед излишан. Тако н. пр. кад је дата једначина

$$x^4 - 143x^3 + 21x^2 - 82x + 360 = 0$$

онда налазимо 143 као горњу границу стварних корена њених. Дакле бисмо имали да огледамо све чиниоце броја

360 сем броја 180 а таквих је 21 свега. Али пошто је сада:

$$f(+1) = 157 \quad f(-1) = 607$$

то је лако увидети да једначина нема рационалних корена, јер бројеви 157 и 607 као прости бројеви не могу бити дељиви са ниједним, јединицом увећаним или смањеним, чиниоцем последњега члана.

86. Кад смо тражили по једној од показаних метода рационалне корене једначине, онда не треба одмах помислити, да остали још неоткривени корени једначине морају бити ирационални или уображени. Јер лако може бити да једначина има једнаких корена. Да ли једначина има доиста једнаких корена или не, могли бисмо се уверити помоћу познатих метода. Међу тим много је простије и лакше, кад дану једначину поделимо поступно са сваким од оних корених чинилаца, који постају из већ нађених корена, и за тим нову једначину подвргнемо истим рачунима као и дану.

Пример 1. Траже се рационални корени једначине:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$$

По једној од показаних метода налазимо као корене задате једначине само бројеве $x = 1$ и $x = -2$. Али кад полином једначине поделимо са кореним чиниоцима $(x-1)$ и $(x+2)$ и нађени количник ставимо једнак нули, добићемо једначину:

$$x^3 - 3x + 2 = 0,$$

чија су три корена у исти мах и корени задате једначине. Као рационалне корене ове једначине налазимо

$+1$ и -2. Кад леву страну последње једначине поделимо са кореним чиниоцима $(x-1)$ и $(x+2)$ и нађени количник ставимо једнак нули, добићемо једначину:

$$x + 2 = 0$$

чији корен -2 јесте последњи корен дане једначине. И тако, једначина има $+1$ три пута, а -2 два пута као корен.

Пример 2. Траже се рационални корени једначине:

$$x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 46x^3 - 67x^2 - 84x + 180 = 0$$

Најпре налазимо помоћу познатих већ метода, да су само -2 и $+3$ корени њени. Кад поделимо полином са кореним чиниоцима $(x+2)$ и $(x-3)$, и количник ставимо једнак нули добијамо једначину:

$$x^4 - 7x^2 + 4x + 20$$

Рационални корени њени јесу: опет $+3$ и -2. Кад поделимо леву страну једначине са $(x-3)$ и $(x+2)$, добијамо квадратну једначину:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Корени њени јесу: $x = 2 + \sqrt{-1}$ и $x = 2 - \sqrt{-1}$

Дакле су корени задате једначине:

$$-2, \ -2, \ +3, \ +3, \ 2 + \sqrt{-1}, \ 2 - \sqrt{-1}$$

87. У № 24 видели смо, помоћу којих се рачуна добијају полиноми једначина:

1.) $X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0 \ldots$

Прва има као корене само просто корене задате једначине, т. ј. оне који се у њој јављају само по један пут; друга има као корене само двојне корене задате једначине, т. ј. такове корене, који се у њој јављају по два пут, али се у $X_2 = 0$ налази сваки само по један пут; трећи има као корене само тројне корене задате једначине, али се сваки од њих у X_3 јавља само по један пут и т. д. Пошто су горепоменути рачуни деобе, то је онда са свим јасно, да ако су сачиниоци полинома X задате једначине рационални, да велим онда то исто мора бити случај и са полиномима: X_1, X_2, X_3 . . . . Ако претпоставимо сад, да је од свију корена једначине:

$$X = 0$$

a једини, који се у њој јавља α пута онда ће полином X_α бити односно x првог степена, и за то корен a, који се добија решењем једначине:

$$X_\alpha = 0$$

која је првог степена, а има рационалне сачиниоце, мора бити рационалан, и тако имамо теорему:

Кад једна једначина са рационалним сачиниоцима има један једини корен, који се у њој јавља α пута онда тај корен мора бити рационалан.

Кад једначина трећег степена има једнаких корена, онда она може имати или један прост корен и један двојан, или само један тројан корен. По мало час доказаној теореми корени једначине у оба су случаја рационални.

Исто тако кад једначина четвртог степена има једнаких корена, она може имати или два проста корена и један двојни, или два двојна корена, или најзад један прост и један тројни, или један четворни корен. На основу доказане теореме у првом случају двојни корен а у трећем и четвртом случају сви корени морају бити рационални, али у другом случају, два двојна корена у опште су ирационални, јер се добијају решавањем једне квадратне једначине.

Кад најзад једначина петог степена има једнаких корена, она може имати или три проста корена и један двојан, или један прост корен и два двојна, или два проста и један тројан, или један двојан и један тројан, или један прост и један четворан, или најзад један петоран корен. У сваком од тих шест случајева једначина мора имати бар један рационалан корен.

Према томе дакле

Кад каква једначина са стварним сачиниоцима, која је највише петог степена, има једнаких корена, онда она мора имати бар један рационалан корен, сем кад је полином једначине четвртог степена и савршен квадрат.

Резултат овог разматрања јесте ово:

Ако је једначина највише петог степена, онда није нужно испитивати, да ли она има једнаких корена или не, што је обично доста заметан и дуг посао, већ пошто смо сазнали, да полином једначине није потпуни квадрат, треба на исту применути просто методе, по којима тражимо рационалне корене. Али ако је степен једначине виши од петог, она може имати једнаких корена и ако нема рационалних.

Пример 1. Дата је једначина:

$$x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0$$

Рационални корени њени јесу: 2, — 2, — 4. Кад поделимо њен полином са кореним чиниоцима:

$$x - 2 \quad x + 2, \quad x + 4$$

и количник ставимо = 0, добијамо једначину:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

одакле налазимо:

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}$$

као последња два и то ирационална корена дане једначине.

Пример 2. Дата је једначина:

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

Као једини рационални корен ове једначине налазимо + 1. Кад са $(x-1)$ поделимо једначину и количник ставимо једнак нули, добијамо:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

која нема рационалних корена. Сад може лако бити, да ова једначина има два двојна ирационална корена, у ком је случају њена лева страна потпуни квадрат. Тај је случај овде доиста, и лева је страна квадрат полинома:

$$x^2 - 2x - 1,$$

дакле су остала четири корена дате једначине:

$$1 + \sqrt{2}, \ 1 + \sqrt{2}, \ 1 - \sqrt{2}, \ 1 - \sqrt{2}$$

Примедба. Да је горњи полином потпун квадрат једног полинома, може се овако дознати. Нека је трином:

$$x^2 + px + q$$

онај, чији је квадрат једнак горњем полиному. Онда мора вредети једначина:

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)\,x^2 + 2pq\,x + 9^2 =$$

$$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1,$$

дакле, на основу правила о неодређеним сачиниоцима добијамо једначине:

$$2p = -4, \ p^2 + 2q = 2, \ 2pq = 4, \ q^2 = 1$$

Ако се сад за p и q могу наћи такве вредности да су све ове једначине задовољене, онда за те вредности квадрат горњег тринома биће једнак поменутом полиному четвртог степена.

Из прве две од последњих једначина добијамо:

$$p = -2, \ q = -1,$$

које вредности задовољавају последње две једначине, и по томе је доиста квадрат тринома:

$$x^2 - 2x - 1$$

једнак поменутом полиному.

XIV. Тражење ирационалних корена.

Раздвајање корена.

88. Ми смо видели како се лако налазе рационални корени. С тога, кад нам је дата каква једначина, да је разрешимо, ми ћемо пре свега пронаћи све рационалне корене њене, па онда са кореним чиниоцима, који одговарају тим коренима, поделити полином задане једначине. Пошто се може лако десити, да једначина има и једнаких корена, то онда треба помоћу познатих метода испитати, да ли она има једнаких корена или не, па ако их има, треба је ослободити и тих корена. Пошто смо све то урадили, имаћемо посла са једначином, чији су корени сви различни и чији су стварни корени ирационални бројеви.

Разлог, за што треба једначину ослободити и једнаких корена, јесте тај, да у будуће, кад полином једначине за две довољно блиске вредности x-а буде добио протвно означене вредности, можемо извесно тврдити, да између те две вредности x-а лежи један и то само један корен једначине. Према томе дакле у будуће ми ћемо претпостављати, да имамо посла само са таковим једначинама, које немају ни рационалних ни једнаких корена и кад буде било говора о стварним коренима, онда под истима треба разумевати неједнаке и ирационалне корене.

Радња око истраживања ирационалних корена распада се у две оделите и са свим различне радње. У првој траже се најпре за сваки корен две границе, између којих се тај корен и само он налази. Та радња зове се *раздвајање корена.* У другој пак радњи израчунава се сваки корен посебице.

Да бисмо раздвојили ирационалне корене, а са израчунавањем ових понајпре ћемо се бавити, можемо радити овако:

Пошто смо изнашли горњу и доњу границу стварних корена, ми ћемо заменути x у полиному дате једначине најпре са доњом границом стварних корена, а за тим са свима целим бројевима, који леже између те доње и горње границе и најзад и са самом горњом границом. При том претпостављамо, да су обе границе цели бројеви. Како се сад између сваке две узастопне вредности x-а, за које полином добија противно означене вредности, мора налазити барем један стваран корен једначине (№ 78), то је увиђавно, да ће сви стварни корени једначине бити раздвојени, ако је полином при поменутим заменама x-а онолико пута свој знак променуо, колики је број стварних корена, које једначина по № 16 може *највише* имати.

Узмимо као пример једначину:

1.) $$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$$

Ова једначина по № 16 може имати највише два положна и највише један одречан корен. Границе њених стварних корена јесу $+3$ и -3. Дакле треба у једначину 1) ставити редом: $x = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ и тада добијамо за:

$x = -3$	$f(-3) = -5$
$x = -2$	$f(-2) = +7$
$x = -1$	$f(-1) = +7$
$x = 0$	$f(0) \quad = +1$

$x = +1$	$f(+1) = -5$
$x = +2$	$f(+2) = -5$
$x = +3$	$f(+3) = +7$

Кад погледамо на низ узастопних вредности полинома $f(x)$, видећемо, да бар један корен мора бити између -3 и -2, бар један између 0 и $+1$ и најзад бар један између $+2$ и $+3$. Пошто једначина не може имати више од три стварна корена, то су, као што се види, раздвојени сви корени једначине, и по један и то само један лежи између сваке две од мало час поменутих граница.

89. Врло се ретко догађа да се на мало час показани начин могу раздвојити сви стварни корени једначине. Јер у највише прилика број мена у низу вредности функције $f(x)$ није онолики, колико стварних корена по № 16 једначина може највише имати. У таквој прилици не треба одмах помислити, да корени, који нам недостају, морају бити сви уображени онда, кад је број истих паран. Јер прво између две узастопне вредности x-а, за које је полином добио противно означене вредности, може лежати више од једног корена, али у непарном броју. Исто тако између две узастопне вредности x-а, за које је полином добио једнако означене вредности, може не бити ни један корен, али их може и бити и то у парном броју. Истина вероватноћа, да ће се сви стварни корени најзад морати раздвојити биће све већа и већа, што год је мањи размак оних вредности, којима x у једначини поступно замењујемо. Али на тај начин, ако једначина има стварних корена, који се међу собом за врло мало разликују, може се посао прво јако отегнути, а друго, ако једначина има и уображених корена, може се тај посао отегнути без краја, а да опет нисмо на чисто.

Међу тим лако је увидети, да би се сви корени једначине морали открити, кад бисмо као размак оних вредности, којима x узастопце замењујемо, узели такав један број, који је бројно мањи, но најмања од оних разлика, које постају, кад се сваки корен једначине од свију осталих одузме.

Такав један број може се по Lagrange-у наћи. У № 34 ми смо показали, како се добија једначина квадрата разлика, т. ј. она чији су корени једнаки квадратима разлика корена задате једначине. Пошто су квадрати разлика стварних корена задате једначине положни, то ћемо тражити доњу границу положним коренима квадриране једначине. Ако је g та граница, онда је очигледно број $\delta = \sqrt{g}$ мањи од најмање разлике корена задате једначине. Ако је δ, као што је то понајчешће случај, ирационалан број, онда ћемо узети непосредно мањи цео број ε, или ако би било $\varepsilon = 0$, прву десетну цифру броја δ као размак оних вредности, којима ћемо x у задатој једначини поступно замењивати. И кад тако будемо радили сви ће стварни корени задате једначине морати бити откривени и раздвојени.

Кад се ова Lagrange-ова метода проматра са чисто теоријског гледишта, нема јој се шта замерити, она је савршена, јер решава потпунце задатак о раздвајању корена. Али гледана са практичког гледишта она се мора одбацити. Јер прво, тражење једначине квадрираних разлика по себи је врло заметан и тежак посао, а после и број вредности, којима треба заменути поступно x може бити врло велики.

Ако из дане једначине изведемо нову, чији су корени k пута већи, и ако је број δ мањи од најмање разлике корена задате једначине, биће број $k\delta$ мањи од најмање разлике корена нове једначине. Ако је дакле k довољно велики број, тако, да је $k\delta > 1$, онда ће очевидно сви корени нове једначине бити раздвојени, ако у њој будемо x замењивали целим бројевима, почев од доње, па до горње границе стварних корена њених. Из корена те нове једначине, пошто су они једном нађени, добијају се корени дане једначине, кад оне прве поделимо са k.

Пример. Да се раздвоје корени једначине:

1.) $$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Границе њених корена јесу + 2 и — 4. Кад заменимо x поступно са свима вредностима, почев од — 4 па до + 2, онда $f(x)$ мења свој знак само један пут.

Она је за $x = -4$ одречна, а за $x = -3$ положна. Дакле још два корена нису откривена. Ако x будемо замењивали са вредностима, којих је размак 0·5 опет ће $f(x)$ само један пут променути свој знак. Она је за $x = -3{\cdot}5$ одречна, а за $x = -3$ положна, и тако опет не достају још два корена. Ако најзад узмемо, да је размак вредности, којима ћемо x замењивати поступно, још мањи н. пр. 0·1, онда ће сви корени бити раздвојени. Ми ћемо т. ј. наћи, да је:

$$f(-3{\cdot}1) = -, \qquad f(-3) = +$$

$$f(1{\cdot}3) = + \qquad f(1.4) = -$$

$$f(1{\cdot}6) = - \qquad f(1{\cdot}7) = +$$

Дакле један корен лежи између — 3·1 и —3, други између 1·3 и 1·4, а трећи између 1·6 и 1·7.

У № 34 нашли смо као једначину квадрираних разлика:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$$

Доња граница њених стварних, то јест положних корена, јер одречних знамо да не може ни имати, што се у осталом и одатле увиђа, што је једначина потпуна а нема следи, доња граница велим јесте број $\delta = \frac{1}{9}$. Тај број мора бити мањи од најмање разлике корена задате једначине, дакле тим ће пре то бити случај са 0·1. Ако дакле у датој једначини замењујемо x почев од — 4 па до + 2 са вредностима, којих је размак 0·1 онда сви корени једначине морају бити откривени, што смо и видели, да је истина.

Изведимо из дане једначине једначину, чији су корени два пута већи. Та нова једначина јесте ова:

2.) $$\varphi(x) = x^3 - 28x + 56 = 0$$

Границе њених корена јесу + 4 и — 7. Овде је горе поменуто $k = 2$. Ова једначина као и дана може на основу № 16 имати највише један одречан корен, и овај она мора имати (№ 13), и највише два положна. Кад сад у овој једначини 2) замењујемо x са целим вредностима, почев од — 7 до + 4, наћи ћемо, да је: $\varphi(-7) = -$ а $\varphi(-6) = +$, одакле следује, да одречни корен једначине 2) лежи између — 6 и — 7. Пошто она не може имати више одречних корена, то онда није нужно замењивати x са осталим бројно мањим одречним вредностима него треба одмах прећи на 0 и положне вредности 1, 2, 3 и 4. Пошто тада налазимо:

$$\varphi(+2) = +, \quad \varphi(+3) = -, \quad \varphi(+4) = +$$

то онда остала два положна корена леже један између 2 и 3, а други између 3 и 4.

Примедба. Није згорег напоменути на овом месту да *услов, који треба да је испуњен, па да сви корени какве једначине буду стварни и неједнаки, јесте тај, да је једначина квадрираних разлика потпуна и да има само мене.*

И доиста, ако су корени дане једначине сви стварни и неједнаки, онда су квадрати разлика тих корена сви положни и међу собом различни. Једначина квадрираних разлика има дакле само положне и неједнаке корене и с тога је она потпуна и без икаквих следи. Али ако би између корена дане једначине било и уображених онда квадрат двају спрегнутих уображених корена $a + bi$ и $a - bi$ дакле одречан број $- b^2$ јесте корен једначине квадрираних разлика. У таквом дакле случају једначина квадрираних разлика има следи или је непотпуна. Ако ли дана једначина има и једнаких корена, онда једначина квадриратих разлика мора имати један или више корена једнаких нули.

Штурмова теорема.

90. Помоћу ове теореме, са којом ћемо се у овој и још неколико доцнијих №-а бавити, можемо увек сазнати тачан број корена, који се налазе између два ма каква стварна броја. Са гледишта чисте теорије може се рећи, да је ова теорија оличено савршенство. Помоћу ње не само да смо у стању изнаћи, колико је стварних корена између два ма каква стварна броја, него смо услед тога у стању и раздвојити све те корене једно од друго.

Претпоставимо, да нам је дата једначина:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

где под сачиниоцима a разумем стварне истинске бројеве. Први извод полинома $f(x)$ јесте $f'(x)$. Сад са $f(x)$ и $f'(x)$ радимо онако, као кад бисмо им тражили највећег заједничког делиоца, само свакой остатку пре но што га узмемо за делиоца променимо знак. На тај начин добићемо овај низ једначина:

$$\begin{aligned}
f(x) &= q_1\ f'(x) - f_2(x)\\
f'(x) &= q_2\ f_2(x) - f_3(x)\\
f_2(x) &= q_3\ f_3(x) - f_4(x)\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
f_{n-2}(x) &= q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x)\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
f_{r-2}(x) &= q_{r-1} f_{r-1}(x) - f_r(x)\\
f_{r-1}(x) &= q_r\ f_r(x),
\end{aligned}$$

где је $r \leqq m$, т. ј. степену једначине 1). Функције:

$$3.)\quad f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x) \ldots . f_r(x)$$

зову се *Штурмове функције*, а количници:

$$q_1,\ \ q_2,\ \ q_3,\ \ q_4 \ldots . q_r$$

Штурмови количници. Пошто смо претпоставили, да су сачиниоци функције $f(x)$ стварни, то је онда очевидно то исто случај и са Штурмовим функцијама и количницима. Обично су количници q линеарне функције x-а. У таквом случају, који ћемо звати *обичним*, количника има на броју

r, а Штурмових функција под 3) има свега $(r+1)$, и прва је од њих m-ног степена, а степен сваке доцније за јединицу је нижи.

Али се може десити, да један од количника или више њих премаша први степен, и кад је то, онда је број количника мањи од r. У таквом случају ми ћемо при општим разматрањима казаљку ма којег количника изабрати тако, да је казаљка тога количника једнака степену производа, који добијамо, кад тај количник помножимо са свима који су пред њим. А код Штурмових функција опет изабраћемо казаљке тако, да број, који означава степен дотичне функције, и казаљка те функције дају сабрани број m.

Ми ћемо у ономе што долази разликовати ова два случаја:

$$r = m \quad \text{и} \quad r < m$$

Први случај: $r = m$

91. Кад је $r = m$, онда је последња Штурмова функција $f_r(x)$ нулног степена, т. ј. од x независан број. Она мора бити од нуле различна, јер би иначе услед једначина 2) све функције Штурмове, па дакле и $f(x)$ биле идентично равне нули. На основу истих једначина 2) $f_r(x)$ јесте највећи заједники делилац функцији $f(x)$ и њеном првом изводу $f'(x)$. Но како тај заједнички делилац $f_r(x)$ није функција x-а, него сталан број, то онда на основу № 23 једначина нема једнаких корена и функције $f(x)$ и $f'(x)$ не могу никако бити једнаке нули за једну и исту вредност x-а.

Кад у Штурмовим функцијама под 3) заменимо x са ма каквим стварним бројем н. пр. са a, онда ће одговарајуће вредности свију тих функција бити такође стварне. И ако не водимо рачуна о самим вредностима истих функција него само о њиховим знацима, дакле ако само знаке тих вредности будемо бележили, добићемо један низ знакова, који ћемо звати *Штурмовим значним низом за* $x = a$. Помоћу извесних особина тога значног низа ми ћемо доказати Штурмову теорему.

Кад је за једну особену вредност $x = a$ једна од оних Штурмових функција, које леже између прве и последње, равна нули, онда за ту исту вредност x-а две оближње Штурмове функције добијају *супротно означене и од нуле различне вредности.* Јер ако је за $x = a$ Штурмова функција $f_n(x) = 0$, онда услед једначина 2) оближње функције $f_{n-1}(x)$ и $f_{n+1}(x)$ морају бити противног знака. Од нуле морају бити различне те оближње Штурмове функције за то, што у опште две узастопне Штурмове функције не могу бити никад равне нули за једну и исту вредност x-а. Јер кад би н. пр. функције $f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$ биле равне нули за $x = a$, онда би за ту вредност x-а услед једначина 2) морале бити $= 0$ све остале Штурмове функције; дакле би тада имали:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f'(x) = 0$$

а то се коси са оним, што смо на крају прве алинеје овог првог случаја сазнали да стоји и мора стојати.

Ако је сад $f_n(a) = 0$, то можемо наћи један тако мали број δ, да између $a - \delta$ и $a + \delta$ не лежи ни једна вредност x-а, за коју би функције $f_{n-1}(x)$ и $f_{n+1}(x)$ биле равне нули. Штурмов значни низ изгледаће дакле на оном месту, где стоје функције:

$$f_{n-1}(x), \quad f_n(x) \quad \text{и} \quad f_{n+1}(x)$$

на један од ових начина:

	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$	$f_{n+1}(x)$
За $x = a - \delta$	—	±	+
$x = a$	—	0	+
$x = a + \delta$	—	±	+

	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$	$f_{n+1}(x)$
За $x = a - \delta$	+	±	—
$x = a$	+	0	—
$x = a + \delta$	+	±	—

Али вредио ма који од ових случајева, вазда ћемо имати једну мену и једну след на местима, која одговарају функцијама: $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$, и то како у значним низовима за $x = a - \delta$ и $x = a + \delta$, тако и у значном низу за $x = a$, пошто и у овом значном низу а на поменутом месту имамо једну мену и једну след па сменули ми нулу са знаком + или —. Пошто то исто стоји, ако би која и од осталих функција, што су између $f(x)$ и $f_r(x)$ била $= 0$ за $x = a$, то смемо изрећи теорему:

1°. *Кад променљива x при свом непрекидном рашћењу пређе вредност a, која поништава једну или више од оних Штурмових функција, што стоје међ прве и последње, онда у значном низу за непосредно већу вредност $x = a + \delta$ има исто онолико мена, колико их има у оном, који одговара непосредно мањој вредности $x = a - \delta$.*

92. Да бисмо сазнали, како стоји са бројем мена и у оном случају, кад x пређе једну вредност c, која поништава саму функцију $f(x)$, која је вредност дакле корен једначине $f(x) = 0$, морамо најпре доказати теорему:

2°. *Да, кад x расти од $c - \delta$ до $c + \delta$ функција $f(x)$ и њен први извод $f'(x)$ јесу противног знака, пре него x пређе корен c, а да су истог знака, пошто x пређе исти корен.*

И доиста, кад x расти од $c - \delta$ до c, онда, ако је први извод $f'(x)$ при том све једнако положан, функција $f(x)$ расти, па пошто је она за $x = c$ равна нули, то је она пре тога била одречна. А ако је први извод од $x = c - \delta$ до $x = c$ све једнако одречан, $f(x)$ опада и пошто је она за $x = c$ равна нули, то је она пре тога била положна. Дакле за вредности x-а од $c - \delta$ па до корена c $f(x)$ и $f'(x)$ противног су знака.

Исто тако кад x расти од c до $c + \delta$, онда, ако је први извод $f'(x)$ при том све једнако положан, функција $f(x)$ расти и пошто је за $x = c$ равна нули, она је положна. Ако ли је први извод при том одречан, $f(x)$ опада, и пошто је за $x = c$ равна нули, то је она одречна. Дакле за вредности x-а од c па до $c + \delta$ $f(x)$ и $f'(x)$ истог су знака (види № 11).

У осталом ово, што смо доказали, увиђа се и из једначина:

$$\begin{aligned} f(c-\delta) &= -\delta f'(c) + \delta^2 f''(c) - \ldots \pm \delta^m f^m(c) \\ f(c+\delta) &= \delta f'(c) + \delta^2 f''(c) + \ldots + \delta^m f^m(c) \end{aligned} \tag*{4.)}$$

где смо десно изоставили $f(c)$, јер је она $= 0$, пошто је c корен једначине $f(x) = 0$.

Ми можемо положни број δ узети тако мали, да су први чланови десно од знака једнакости бројно већи од збира свију доцнијих чланова, а осим тога да између

$c - \delta$ и $c + \delta$ не лежи ни једна вредност x-а, која би поништила $f'(x)$. Пошто су тада количине:

$$f'(c-\delta),\quad f'(c),\quad f'(c+\delta)$$

истога знака, а из једначина се види, да су

$$f(c-\delta) \text{ и } f'(c)$$

противног и

$$f(c+\delta) \text{ и } f'(c)$$

истог знака, онда је јасно, да су и

$$f(c-\delta) \text{ и } f'(c-\delta)$$

такође противног, а

$$f(c+\delta) \text{ и } f'(c+\delta)$$

истог знака. Но може се на сличан начин и лако доказати, да су $f(x)$ и $f'(x)$ противног знака, пре него пређе x вредност c, а истога знака пошто x пређе вредност c и онда, кад је c више пута корен једначини $f(x) = 0$. Читалац може ово што смо нашли оправдати и геометријским путем, ако конструише једначину $y = f(x)$, где је $f(x)$ полином задате једначине 1).

Узмимо сад, да је c један од корена једначине 1), а δ тако мали број, да између $x = c - \delta$ и $x = c + \delta$ нема ни једне вредности x-а за коју би и први извод $f'(x)$ био једнак нули. Пошто се на основу теореме 1° у № 91 број мена у значном низу неће променути, ако би за $x = c$ била једнака нули једна или више од оних Штурмових функција, које долазе после $f'(x)$, то је онда довољно видети како стоји само са знацима функција $f(x)$ и $f'(x)$ у значним низовима пре и после $x = c$.

И ту су могућа само ова два случаја:

		$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
за	$x = c - \delta$	$-$	$+$	$+$	$-$
	$x = c$	0	$+$	0	$-$
	$x = c + \delta$	$+$	$+$	$-$	$-$

Одавде видимо, да се, пошто је x прешло корен c изгубила једна мена и то она, коју су градиле функција $f(x)$ и $f'(x)$ пре $x = c$. Дакле можемо изрећи теорему:

3°. *Кад x при свом непрекидном растењу пређе један корен* c *задате једначине, губи се једна мена; т. ј. у значном низу одмах иза $x = c$ има једна мена мање, него у оном пре $x = c$.*

Претпоставимо сад, да су:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ .\ .\ .\ \alpha_k$$

k корена задате једначине, који се налазе између два броја a и b, где је $a < b$ и узмимо, да су ти корени поређани по својој величини, т. ј. тако, да је сваки већи од оног пред њим.

Ако сад у Штурмовим функцијама 3) у № 90 заменимо x најпре са a, добићемо један значан низ и у њему извесан број мена. При непрекидном рашћењу x-а од $x = a$ до $x = \alpha_1 - \delta$ тај број мена неће се променути, пошто између те две границе нема ни једног корена једначине 1). Највише се може променути положај тих мена, а то ће бити, ако у том размаку имадне вредности, које поништавају једну или више Штурмових функција, што стоје између $f'(x)$ и $f_r(x)$. За $x = \alpha_1 - \delta$ функције $f(x)$ $f'(x)$ морају бити противног, а за $x = \alpha_1 + \delta$ истог знака, дакле се једна мена на том месту изгубила, пошто је x прошло корен α_1, или другаче значни низ за $x = \alpha_1 + \delta$ има једну мену мање, од оног за $x = \alpha_1 - \delta$.

Кад x даље расти од $x = \alpha_1 + \delta$ до $x = \alpha_2 - \delta$ број мена неће се променути, јер и у том размаку нема ни једног корена једначине 1). Али место следи, коју су $f(x)$ и $f'(x)$ у значном низу за $x = \alpha_1 + \delta$ градиле, стоји у значном низу за $x = \alpha_2 - \delta$ мена, јер услед теореме 2° $f(x)$ и $f'(x)$ морају бити увек противног знака пре него што x пређе један корен једначине. И ова мена дошла је и могла је доћи само отуда, што је $f'(x)$ у размаку од $x = \alpha_1 + \delta$ до $x = \alpha_2 - \delta$ морала свој знак променути; а та промена знака дошла је опет отуда, што је x у истом размаку прешло један или више — али у непарном броју — корена једначине: $f'(x) = 0$. Међу тим и та промена знака није могла променути број, него само положај мена (теор. 1° у № 91). Према свему овоме у значном низу за $x = \alpha_2 - \delta$ има дакле онолико исто мена, колико их је било и у значном низу за $x = \alpha_1 + \delta$. Пошто x пређе и други корен α_2, онда се опет губи једна мена, јер мена, коју су $f(x)$ и $f'(x)$ градиле за $x = \alpha_2 - \delta$ претвара се у след за $x = \alpha_2 + \delta$. И тако у значном низу за $x = \alpha_2 + \delta$ има две мене мање, него у ономе за $x = \alpha$. Кад овако и даље наставимо умовати, наћи ћемо, да пошто је x прешло и k-ти корен $x = \alpha_k$, у значном низу за $x = \alpha_k + \delta$ мора бити k мена мање него у првом значном низу. Пошто између α_k и b нема ни једног више корена једначине, то онда и у значном низу за $x = b$ мора бити k мена мање него у значном низу за $x = a$.

Дакле је доказана теорема:

4°. *Ако су a и b два стварна броја и $a < b$, онда значни низ за $x = b$ не може имати никада више мена од низа за $x = a$, али их маже имати мање. И колико год мена мање има значни низ за $x = b$ од значног низа за $x = a$, толико има стварних корена између a и b.*

И ово је *Штурмова теорема*

93. У овој №-и учинићемо неколико не безначајних примедаба о Штурмовој теореми.

1'.) Да бисмо избегли у Штурмових функција разломљене сачиниоце ми можемо при узастопним деобама множити — а ако је потребно и делити — дељенике и делиоце са ма каквим али *положним* бројевима. Последица тога биће само та, што ће Штурмове функције бити помножене — или подељене — са положним бројевима, што очигледно нема утицаја на њихов знак.

2'.) Ако се међу Штурмовим функцијама налази једна $f_k(x)$, која не мења свога знака при рашћењу x-а од a до b, а то ће бити, ако између тих граница нема ни једног корена једначине:

$$f_k(x) = 0,$$

онда, да бисмо дознали број стварних корена, који се налазе између a и b, можемо слободно прекинути низ Штурмових функција са $f_k(x)$ и доцније функције по све занемарити. И онда, колико је год мена мање у значном низу, који добијамо, кад ставимо $x = b$ у функцијама:

$$5.) \qquad f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ \ldots\ f_k(x),$$

него што их је у значном низу, који се добија, када у истим функцијама ставимо $x = a$, толико ће стварних корена морати бити између $x = a$ и $x = b$.

Јер *прво,* кад год x при свом непрекидном рашћењу од $x = a$ до $x = b$ пређе један корен једначине $f(x) = 0$, значни низ, који одговара функцијама 5), губи по једну мену: *друго,* ако која вредност x-а, која се налази између a и b поништава коју од ових функција, што су између $f(x)$ и $f_k(x)$, онда се број значних мена не мења; и *треће,* $f_k(x)$ на основу претпоставке има при том вазда исти знак као пре $f_k(x)$. Јасно је дакле, да онолико корена мора бити између a и b, колико се мена изгубило, кад је x при свом рашћењу од a па до b прешло вредност b.

Према овоме, што смо рекли, кад при тражењу Штурмових функција наиђемо на једну $f_k(x)$, која нема стварних корена, онда са том функцијом можемо слободно прекинути тражење Штурмових функција, јер пошто $f_k(x)$ нема стварних корена, то она има увек један и исти знак за сваку могућу вредност x-а.

Ова примедба даје се лако применути на Штурмову функцију, која је трећа идући с десна на лево и која је односно x другог степена. Јер корени те функције, која је другог степена дакле облика:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

јесу уображени, ако је $b^2 - 4ac < 0$.

3'). Последња Штурмова функција јесте сталан и од x-а независан број. Како нам сад није стало до његове вредности, него само до знака, то онда, да бисмо овај дознали, треба имати на уму (№ 91 друга алинеја), да тај знак мора бити противан знаку вредности, коју трећа Штурмова функција с десна добија за ону вредност x-а, која поништава претпоследњу функцију, која је првог степена.

4'). Ако би за један од бројева a и b или за оба та броја, између којих хоћемо да знамо колико има стварних корена, једна или више од Штурмових функција биле равне нули, онда та околност не треба да нас ни мало буни. Јер ако су једна или више од оних функција, које се налазе између прве и последње равне нули, онда, као што већ знамо, свака од њих лежи између двеју функција, чије су вредности противнога знака. Метнули дакле у значном низу место функције, која постаје равна нули, нулу или знак $+$ или знак $-$ или најзад не водили о њој никаква рачуна, у сваком случају имаћемо на дотичном месту једну само мену.

Ако је пак $f(a) = 0$, онда је прво: a корен једначине. Да бисмо нашли колико још корена има између a и b, могли бисмо упоредити значни низ за $x = b$ са оним за $x = a + \delta$. Али како у овом последњем низу $f(x)$ и $f'(x)$ имају исти знак, то онда тај низ и онај за $x = a$, кад у овом занемаримо прву нулу, имају исти број мена, и по томе између a и b биће још онолико корена, колико је мена мање у значном низу за $x = b$ него у оном за $x = a$.

Лако је на слични начин увидети, да ако је $f(b) = 0$ једначина има онолико корена између a и b колико је мена мање у значном низу за $x = b$, него у оном за $x = a$. Јер у овом случају место да тражимо, колико је корена између a и b, могли бисмо тражити, колико их је између a и $b + \delta$. Али то није нужно, јер у значном низу за $x = b$. кад прву нулу изоставимо, има онолико исто мена, колико их је и у значном низу за $x = b + \delta$, пошто у овом низу $f(x)$ и $f'(x)$ имају једнак знак. Дакле у овом случају просто ваља поредити низове за $x = a$ и $x = b$ као и у обичним приликама.

Ако је најзад и $f(a) = 0$ и $f(b) = 0$, онда у значним низовима за $x = a$ и $x = b$ треба занемарити прве нуле, и тада, ако је у значном низу за $x = b$ k мена мање, него у оном за $x = a$, биће $(k + 1)$ корена од a па до b урачунавајући ту и корене a и b.

5'). Најзад кад је једначина m-ног степена, а број је Штурмових функција потпун, онда број уображених корена можемо сазнати, гледајући просто на знаке првих чланова тих функција. Јер ако узимајући у обзир само знаке првих чланова тих функција имамо n мена дакле $m - n$ следи, онда за $x = -\infty$ значни низ, који даје Штурмове функције имаће $m - n$ мена, а значни низ за $x = +\infty$ имаће n мена, дакле разлика између броја мена у значном низу за $x = -\infty$ и броја мена у значном низу за $x = +\infty$ износи $m - 2n$, и толико је свега стварних корена. Дакле је $2n$ број уображених корена. И тако дакле стоји:

Дана једначина има онолико парегова уображених корена, колико има мена у значном низу, који постаје из знакова првих чланова Штурмових функција.

94. Што се тиче саме употребе Штурмове теореме, има се рећи ово, што иде:

Да бисмо нашли, колико свега положних корена има једначина, замениђемо у Штурмовим функцијама x са нулом најпре, а после са таквим једним бројем g, за који су први чланови тих функција већи од збира свију доцнијих чланова њиних, за који су дакле броj знаци вредности тих функција истоветни са знацима вредности првих њиних чланова. Изнад тога броја g не може бити више ни једног положног корена једначине. Јер кад је за $x = g$ први члан од $f(x)$ већи од збира свију доцнијих, то ће тим пре бити за вредности веће од g, што се јасно увиђа, кад се $f(x)$ напише у овом облику:

$$A_0x^m\left[1 + \frac{A_1}{A_0x} + \frac{A_2}{A_0x^2} + \dots\right]$$

Пошто се сад за $x = 0$ све Штурмове функције своде на своје последње чланове, и пошто су даље за $x = g$ све функције истог знака са првим својим члановима, то је јасно, да ће се на први поглед Штурмових функција моћи лако сазнати, колики је број мена у значним низовима за $x = 0$ и $x = g$, а да те значне низове и не бележимо. На основу Штурмове теореме број свију положних корена јесте онолики, колико је мена мање у значном низу за $x = g$, него у оном за $x = 0$.

На са свим сличан начин дознаје се и број свију одречних корена, ако се само узме на ум то, да почев од једне извесне границе $-g'$ па на даље у одречном смислу свака Штурмова функција па дакле и $f(x)$ не мења више свој знак, који је знак истоветан са знаком њеног првог члана, и да изнад тога броја $-g'$ не лежи више ни један одречан корен.

Зарад простијег посла узимљу се место $+g$ и $-g'$ обично $+\infty$ и $-\infty$ са којим се симболима означавају бројеви у положном и одречном смислу, који расту бесконачно, које дакле можемо замислити бројно веће од ма како великог броја, дакле и тако велике да су за њих први чланови Штурмових функција већи од збира свију доцнијих чланова њиних, усљед чега изнад тих бројева неће и не може више бити стварних корена једначине.

Све ово, што смо рекли, кад у кратко сведемо, имаћемо:

a). Да бисмо дознали, колико свега стварних корена има једначина, замениђемо x у Штурмовим функцијама:

$$f(x),\quad f'(x),\quad f_2(x)\ \dots\ f_r(x)$$

са $-\infty$ и $+\infty$. Колико је мена мање у значном низу за $x = +\infty$ него у оном за $x = -\infty$, толико свега стварних корена мора имати једначина.

b). Да бисмо дознали, колико је од тих корена положних, а колико одречних, заменићемо у Штурмовим функцијама x и са нулом. Колико је мена у значном низу за $x = 0$ мање него у оном за $x = -\infty$, толико је свега одречних корена, а колико је мена у значном низу за $x = +\infty$ мање него у оном за $x = 0$ толико је свега положних корена.

Најзад, ако хоћемо да раздвојимо корене н. пр. положне треба овако радити:

Замењујмо x у Штурмовим функцијама најпре са целим бројевима, којих је размак мало повећи н. пр. 10, дакле са:

0, 10, 20, 30 . . . .

дотле, док не наиђемо на број, за који значни низ има онолико исто мена колико и за $x = +\infty$. Изнад тога броја не може више бити ни једног корена. Упоређујући за тим значне низове, који одговарају узастопним бројевима 0, 10, 20, 30 . . , видећемо, између која два узастопна броја има корена, и то још колико их има. Кад између два ма која узастопна броја н. пр. између 10 и 20 има више корена, онда, да бисмо их раздвојили, заменићемо x у Штурмовим функцијама најпре са 15 и видећемо, да ли између 10 и 15 или само између 15 и 20 или у исти мах и између 15 и 20 и 10 и 15 има корена. У првом случају заменићемо x у Штурмовим функцијама са целим бројевима између 10 и 15 у другом између 15 и 20, а у трећем између 10 и 20. Ако при том нађемо, да између два узастопна цела броја има више од једног

корена, замењиваћемо у Штурмовим функцијама x са вредностима, којих је размак мањи од јединице и т. д.

Међу тим, пошто смо дознали, да има више од једног корена између два узастопна броја, онда те корене можемо после тога лакше раздвојити по № 88. На пр. ако смо дознали, да између 15 и 16 има више од једног корена, онда да бисмо их раздвојили, замењиваћемо x у $f(x)$ са 15·1, 15·2, 15·3 . . . до 16. На исти овај начин можемо покушати, да раздвојимо и корене за које будемо нашли, да леже између два броја, којих је размак 0·1. Н. пр. ако више од једног корена има између 15·2 и 15·3 замењиваћемо x у $f(x)$ са 15·21, 15·22, 15·23 . . . до 15·3, и ако при том не успемо, можемо покушати, да их раздвојимо помоћу Штурмових функција и т. д. У осталом ми ћемо доцније показати једну простију методу, помоћу које смо у стању не само увек раздвојити, него и израчунати корене, који се један од другог разликују за врло мало. Помоћу досадањих метода довољно је раздвојити корене, којих разлика не износи мање од 0·1.

95. Штурмова теорема даје нам начин, да можемо сазнати услове, који треба да су испуњени, па да сви корени једначине буду стварни. Пошто сви стварни корени леже између два броја $-g'$ и $+g$, које можемо узети колико нам драго велике, то онда мало час поменути услови исти су са онима, који треба да су испуњени, па да у значном низу за $x = +g$ буде онолико мена мање него у низу за $x = -g'$ колики је степен једначине. Ако је дакле једначина m-ног степена, онда у низу за $x = g$ треба да је m мена мање него у ономе за $x = -g'$. Али да би низ Штурмових функција могао дати m мена, треба да тих функција буде барем $(m+1)$. Но како их више од $(m+1)$ не може ни бити, јер је полином једначине т. ј. $f(r)$ m-ног степена, то онда треба

да их буде равно $(m+1)$. Отуда следује, да степен сваке Штурмове функције треба да буде за јединицу нижи од степена оне, која је пред њом.

Ми већ знамо, да су за врло велике положне и одречне вредности x-а вредности Штурмових функција истог знака са вредностима њихових првих чланова, одакле следује, да је при овом послу довољно, ако водимо рачуна о знацима само првих чланова тих функција.

Узмимо нека је задата једначина:

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Први члан полинома $f(x)$ јесте x^m, а први члан првог извода $f'(x)$ јесте mx^{m-1}. Што се тиче првих чланова доцнијих Штурмових функција, они зависе сем од x-а још и од сачинилаца функције $f(x)$ и добијају се помоћу узастопних деоба извршених онако, како је при доказу Штурмове теореме напоменуто. Нека су први чланови узастопних Штурмових функција ово:

$$6.)\quad x^m, \quad mx^{m-1}, \quad b_2 x^{m-2}, \quad b_3 x^{m-3} \dots, b_m,$$

где последњи члан не зависи од x. Тражени услов, да сви корени једначине буду стварни, исти је дакле са оним, који треба да је испуњен, па да низ количина под 6) за $x = +g$ покаже m мена мање него ли за $x = -g'$ а да то буде, треба само да тај низ количина покаже m мена, кад се у њему x замени са $-g'$, а m следи, кад се x замени са $+g$. Али у низу количина 6) степен сваке доцније нижи је за једну јединицу само од степена оне, која је пред њом, и према томе низ количина под 6) треба да има само мена за $x = -g'$, а само следи за $x = +g$. Према свему томе услови, који треба да су испуњени, па да сви корени једначине буду стварни, јесу ти, да сачиниоци количина под 6) морају бити сви положни, дакле:

$$b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad \dots \quad b_m > 0$$

Број тих услова не може бити већи од $(m-1)$, али може бити мањи, ако су неке од ових неједначина последице осталих.

Тако н. пр. ако је дата кубна једначина:

$$x^3 + px + q = 0$$

Штурмове су функције:

$$f(x) = x^3 + px + q$$

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

$$f_2(x) = -\frac{2p}{3}x - q$$

$$f_3(x) = -\frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2}$$

Овде је:

$$b_2 = -\frac{2p}{3}, \quad b_3 = -\frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2}$$

Да би дакле сви корени кубне једначине били стварни, треба да су b_2 и b_3 већи од нуле, дакле:

$$p < 0 \quad \text{и} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

а то су услови стварности, које смо већ нашли (№ 58).

Пример 1. Дата је једначина:

$$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$$

Да се испита, колико стварних корена она има, и да се њени корени раздвоје. — Овде је:

$$f'(x) = 3x - 7, \quad f_2(x) = 2x - 3, \quad f_3(x) = +1$$

Дакле је:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
За $x = -\infty$	−	+	−	+
$x = 0$	+	−	−	+
„ $x = +\infty$	+	+	+	+

У значном низу за $x = -\infty$ има три мене, у оном за $x = 0$ две, а у оном за $x = +\infty$ ни једна. И тако једначина има три стварна корена, и то један одречан а два положна.

Даље су за $x = -10$ и $x = +10$ значни низови:

За $x = -10$	−	+	−	+
„ $x = +10$	+	+	+	+

Из упоређаја ових низова са оним за $x = +\infty$ и $x = -\infty$ види се, да изнад -10 и $+10$ нема корена. Даље:

За $x = -5$	−	+	−	+
„ $x = +5$	+	+	+	+

Дакле сви корени леже између -5 и $+5$. Ако у горњим Штурмовим функцијама замењујемо даље, добићемо:

За $x = -4$	−	+	−	+
$x = -3$	+	+	−	+

У првом од ова два низа има три, у другом има две мене, дакле јединцати одречни корен лежи између -4 и -3. Даље је:

за $x = 0$	+	−	−	+
„ $x = 1$	+	−	−	+
„ $x = 2$	+	+	+	+

Одавде видимо, да оставша два корена леже између $+1$ и $+2$. Ако бисмо хтели да их раздвојимо, лакше ће бити, да радимо по методама № 88 но то нећемо чинити, јер смо тамо корене ове једначине већ раздвојили.

Пример 2. Дата је једначина:

$$f(x) = 2x^4 - 13x^2 + 10x - 19 = 0$$

Овде су осем ове следеће Штурмове функције:

$$f'(x) = 4x^3 - 13x + 5,$$

$$f_2(x) = 13x^2 - 15x + 38.$$

Последње две Штурмове функције нису нам потребне, јер као што се види корени једначине $f_2(x) = 0$ јесу уображени и по томе $f_2(x)$ остаје вазда истог знака за сваку могућу вредност x-а. Овде дакле налази своје примене примедба 2') у № 93. Довољно је то јест, имати посла само са знацима низова, који одговарају првим трима Штурмовим функцијама. Замењујући x са $-\infty$, 0, $+\infty$, добијамо:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$
за $x = -\infty$:	+	−	+
„ $x = 0$:	−	+	+
„ $x = +\infty$:	+	+	+

Дакле једначина има само два стварна корена, један положан, а други одречан, и два уображена Значни су низови:

за $x = -10$:	+	−	+
„ $x = -5$:	+	−	+
„ $x = 10$:	+	+	+
„ $x = 5$:	+	+	+

Дакле одречни корен лежи између 0 и -5, а положни између 0 и $+5$. Даље је:

за $x = +4$:	+	+	+
„ $x = +3$:	+	+	+
„ $x = +2$:	−	+	+

Дакле положни корен лежи између $+2$ и $+3$. Даље је:

за $x = -4$:	+	−	+
„ $x = -3$:	−	−	+

Дакле одречни корен лежи између -4 и -3.

Пример 3. Задата је једначина:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 16 = 0$$

Овде су:

$$f'(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$$

$$f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$$

$$f_3(x) = 2x - 7$$

$$f_4(x) = -153.$$

Сада је значни низ:

за $x = -\infty$	−	+	−	−	−
„ $x = 0$	+	−	−	−	−
„ $x = +\infty$	+	+	+	+	−

Одакле следује, да једначина има само један стваран и то одречан корен. Даље је:

за $x = -10$	−	+	−	−	−
„ $x = -5$	−	+	−	−	−
„ $x = -4$	−	+	−	−	−
„ $x = -3$	+	+	−	−	−

Одавде је очевидно, да јединцати стварни корен лежи између -3 и -4.

Примедба. Код ових примера учињена је употреба од примедбе 1^{1}) у № 93.

Други случај $r < m$

96. Кад је $r < m$, онда је последња Штурмова функција $f_r(x)$, која је $(m-r)$-ог степена, највећи заједнички делилац функцији $f(x)$ и њеном првом изводу $f'(x)$. Но тада на основу науке о једнаким коренима једначина има само r различних корена: x_1, x_2, x_3 . . . x_r, а остали корени x_{r+1}, x_{r+2} . . . x_m јесу само извесна понављања првих.

Ако сад узмемо на ум, да заједничка мера дељеника и делиоца мора делити и остатак, то је онда јасно, да се сада Штурмове функције могу и овако представити:

$$1.) \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = (x-x_{r+1})(x-x_{r+2}) \ldots (x-x_m) \; F(x) \\ f'(x) = (x-x_{r+1})(x-x_{r+2}) \ldots (x-x_m) \; F_1(x) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_n(x) = (x-x_{r+1})(x-x_{r+2}) \ldots (x-x_m) \; F_n(x) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_r(x) = (x-x_{r+1})(x-x_{r+2}) \ldots (x-x_m) \; F_r(x) \end{array} \right.$$

Ми ћемо функције:

$$F'(x), \; F_1(x), \; F_2(x), \; . \; . \; . \; F_n(x) \; . \; . \; . \; F_r(x)$$

звати *простијим* Штурмовим функцијама. Прва од њих, т. ј. $F(x)$ јесте r-ног степена, $F_n(x)$ јесте $(r-n)$-ога степена, а последња $F_r(x)$ јесте сталан и од нуле различан број

Ако сад функције:

$$f(x), \; f'(x), \; f_2(x) \; . \; . \; . \; f_n(x) \; . \; . \; . \; f_r(x)$$

заменимо овим њиним вредностима у једначинама 2) № 90 и за тим скратимо у свакој од њих лево и десно са заједничким чиниоцем:

$$(x-x_{r+1})\,(x-x_{r+2}) \; . \; . \; . \; (x-x_m)$$

онда ћемо лако увидети, да *теорема* 1° у № 91 *вреди и сада за* **простије** *Штурмове функције.*

Ако се сад стварни број x_1 јавља као корен једначине α_1-пута, то онда можемо ставити:

$$2.) \qquad f(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}\, \varphi(x).$$

где $(x-x_1)$ не може бити делилац функције $\varphi(x)$, пошто једначина $f(x) = 0$ има број x_1 само α_1 пута као корен. Из једначине 2) добијамо за први извод функције $f(x)$:

$$3.) \quad f'(x) = (x-x_1)^{\alpha_1 - 1} \left\{ \alpha_1 \varphi(x) + (x-x_1)\, \varphi'(x) \right\}$$

где $\varphi'(x)$ значи први извод функције $\varphi(x)$. Из једначина 2) и 3) узимајући у обзир оне под 1) добијамо:

$$4.) \quad \frac{F_1(x)}{F'(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} \left\{ \alpha_1 + (x-x_1) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right\}$$

Ако узмемо, што је увек могуће, δ тако мало, да за $x = x_1 - \delta$ и $x = x_1 + \delta$ чинилац:

$$\alpha_1 + (x - x_1)\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}$$

испадне положан, онда је увиђавно, да ће количник

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}$$

бити одречан за $x = x_1 - \delta$, а положан за $x = x_1 + \delta$, или што је све једно, да ће функције $F(x)$ и $F_1(x)$ бити противно означене за $x = x_1 - \delta$, а једнако означене за $x = x_1 + \delta$. Дакле према овоме и теорема 2° па дакле и теорема 3° у № 92 вреди такође и за *простије* Штурмове функције. Али функције:

5). $f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ .\ .\ .\ f_r(x)$

морају очевидно за ма какву вредност x-а дати значни низ са истим бројем мена и следи, као и функције:

6.) $F(x),\ F_1(x),\ F_2(x)\ .\ .\ .\ F_r(x)$

јер функције 5) постају, кад функције 6) помножимо са заједничким чиниоцем:

7.) $(x - x_{r+1})(x - x_{r+2})\ .\ .\ .\ (x - x_m)$

Одатле следује, да функције под 5) морају бити истог знака са одговарајућим под 6) и то за ма какву вредност x-а, ако је за ту вредност x-а чинилац 7) положан, а противног знака, ако је чинилац 7) одречан. У осталом лако је увидети, да је тај чинилац за сваку — стварну — вредност x-а стваран.

Одатле следује још јасније, да *теореме* 1° и 3° *морају вредети за* **простије** *Штурмове функције.*

Према свему, што смо до сада рекли, можемо исказати теорему:

1°. *Ако су a и b стварни бројеви и $a < b$, онда значни низ за $x = b$ не може имати више мéна него ли онај за $x = a$, а може их имати мање; и колико год их је мање у значном низу за $x = b$, него ли у значном низу за $x = a$, толико различних корена једначине $f(x) = 0$ морају лежати између бројева a и b.*

Пример. Нека је задата једначина:

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 46x^3 - 18x^2 + 621x - 945 = 0$$

Овде је сада:

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 138x^2 - 36x + 621$$

$$f_2(x) = 31x^3 - 9x^2 - 783x + 1593$$

$$f_3(x) = x^2 - 6x + 9$$

Овде је $f_3(x)$ последња Штурмова функција, дакле је она заједнички делилац функција $f(x)$ и $f'(x)$, и с тога задата једначина има једнаких корена. Значни су низови:

за $x = -\infty$: $\quad - \quad + \quad - \quad +$

„ $x = 0$: $\quad - \quad + \quad + \quad +$

„ $x = +\infty$: $\quad + \quad + \quad + \quad +$

Једначина дакле има три различна стварна корена, један положан а два одречна. Даље је

за $x = -5$: $\quad 0 \quad - \quad + \quad +$

одакле видимо, да је -5 један од одречних корена.

Овде налази примене примедба учињена у № 93, 4' друга алинеја. То јест између 0 и -5 нема више ни једног корена једначине. Други корен — одречни — мора се дакле налазити изнад броја -5. За $x = -6$ и $x = -7$ имамо:

за $x = -6$: $\quad - \quad - \quad - \quad +$

„ $x = -7$: $\quad 0 \quad + \quad - \quad +$

Дакле између -5 и -6 нема ни једног корена. Други одречни корен једначине јесте, као што се види из значног низа за $x = -7$, број -7.

Да бисмо нашли границе положног корена, заменимо у Штурмовим функцијама x са $+10$, па ћемо добити:

за $x = +10$: $\quad + \quad + \quad + \quad +$

Кад упоредимо овај значни низ са оним за $x = +\infty$, видећемо да изнад броја $+10$ нема корена. Замењујмо дакле даље:

за $x = +5$: $\quad + \quad + \quad + \quad +$

Дакле изнад $+5$ нема корена. Замењујмо даље:

за $x = +4$: $\quad + \quad + \quad + \quad +$

„ $x = +3$: $\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Као што се види $x = 3$ јесте корен задате једначине, и пошто су за ту вредност x-а први и други извод функције $f(x)$ једнаки нули, а трећи извод $f'''(x)$ једнак 80, то је број 3 три пута корен задатој једначини. Разлог, зашто се значни низ Штурмових функција за $x = +3$ састоји из самих нула, дају нам једначине 1) у овој №-и.

97. Кад су сачиниоци једначине:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

уображени, дакле:

$$a_1 = b_1 + c_1 i, \quad a_2 = b_2 + c_2 i \ \ldots \ a_m = b_m + c_m i$$

где поједина a и b значе стварне бројеве, па се траже стварни корени једначине 1), онда можемо пре свега, узевши у полиному $f(x)$ стварне делове заједно, а уображене заједно, представити једначину у овом облику:

$$2.)\qquad f(x) = \varphi(x) + i\,\varphi_1(x) = 0$$

где је:

$$\varphi(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

$$\varphi_1(x) = \qquad c_1 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1} x + c_m$$

За стварне вредности x-а може вредети једначина 2) само тако, ако је:

$$3.)\qquad \varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0$$

Заједнички корени ових двеју једначина јесу стварни корени једначине 2) или 1). Ако је сада $\varphi_r(x)$ највећи заједнички делилац функције $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, то су онда корени једначине:

$$4.)\qquad \varphi_r(x) = 0$$

заједнички корени једначипа 3), па дакле и стварни корени једначине 2) или 1). Пошто су сачиниоци једначине 4) стварни, то се онда по досадањим методама испитује, да ли она има стварних корена, и ако их има, онда се они израчунавају по методама, које ћемо доцније показати.

Штурмов верижни разломак.

98. Ми опет претпостављамо, да су сачиниоци једначине:

$$f(x) = 0$$

стварни бројеви.

Помоћу једначине 2) у № 90 можемо лако добити следећи верижни разломак, који ћемо звати *Штурмовим верижним разломком:*

$$1.) \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \cdot \, \cdot \, \cdot \, - \cfrac{1}{q_r}}}$$

Ми ћемо узастопне приближне разломке овог верижног разломка означити са:

$$2.) \quad \frac{p_{11}}{1}, \; \frac{p_{12}}{p_{22}}, \; \frac{p_{13}}{p_{23}} \; . \; . \; . \; . \; \frac{p_{1r}}{p_{2r}}.$$

За израчунавање тих приближних разломака служе обрасци (алгеб. анал. № 148):

$$3.) \quad \begin{cases} p_{11} = q_1 \\ p_{12} = q_2\, p_{11} - 1 \\ p_{13} = q_3\, p_{12} - p_{11} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p_{1r} = q_r\, p_{1,r-1} - p_{1,r-2} \end{cases}$$

$$4.) \quad \begin{cases} p_{22} = q_2 \\ p_{23} = q_3\, p_{22} - 1 \\ p_{24} = q_4\, p_{23} - p_{22} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p_{2r} = q_r\, p_{2,r-1} - p_{2,r-2} \end{cases}$$

Разлика последњих двају приближних разломака јесте (алг. анал. № 148 обр. 5):

$$\frac{p_{1r}}{p_{2r}} - \frac{p_{1,r-1}}{p_{2,r-1}} = \frac{-1}{p_{2r}\, p_{2,r-1}}$$

Одавде добијамо:

$$p_{1r}\, p_{2,r-1} - p_{1,r-1}\, p_{2r} = -1$$

или:

$$5.) \quad p_{1,r-1}\, p_{2r} = 1 + p_{1r}\, p_{2,r-1}$$

Кад погледамо на једначине 3) увидећемо лако, да вреди теорема:

1°. *Кад је у низу функција:*

$$1,\ p_{11},\ p_{12},\ p_{13}\ \cdots\ p_{1r}$$

једна од оних, које се налазе између крајних 1 *и* p_{1r} *за* $x = a$ *равна нули, онда су две оближне функције различне од нуле и противно означене.*

Јер кад би ма које две узастопне од тих функција за исту вредност $x = a$ биле равне нули, онда би на основу једначина 3) и све остале функције, које су пред њима, морале бити $= 0$, а то не може бити, јер се коси са другом једначином под 3).

На исти начин, како се доказује теорема 1° у № 91, могли бисмо доказати и овде, *да поменута теорема вреди не само за значни низ Штурмових функција него и за значни низ функција:*

$$1,\ p_{11},\ p_{12},\ \cdots\ p_{1r}.$$

И то нам даје повода испитати, да случајно и теорема 3° у № 92 не вреди за значни низ ових последњих функција. Зарад тога узмимо последњи приближни разломак Штурмовог верижног разломка:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{p_{1r}}{p_{2r}} = \frac{p_{1r}\,p_{1,r-1}}{p_{2r}\,p_{1,r-1}}$$

Али ово се услед обрасца 5) претвара у:

$$6.)\qquad \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{p_{1r}}{p_{1,r-1}} \cdot \frac{p_{1,r-1}^2}{1 + p_{1r}\,p_{2,r-1}}$$

Али је p_{1r} цела функција x-а r-ног степена, као и $F(x)$, а тако је исто и p_{2r} цела функција x-а $(r-1)$-ог степена као и $F_1(x)$. Одатле следује нужно:

$$7.)\qquad \frac{p_{1r}}{F(x)} = \frac{p_{2r}}{F_1(x)} = c,$$

где је c сталан број. Из ове једначине видимо да једначине:

$$F(x) = 0,\quad p_{1r} = 0$$

имају исте корене. Ако је сада x_1 такав један и то стваран корен, онда се може увек наћи један тако мали број δ, да $p_{1r}.\,p_{2,r-1}$ буде <1 и да количник:

$$\frac{p_{1,r-1}^2}{1 + p_{1r}\,p_{2,r-1}}$$

буде положан и то како за $x = x_1 - \delta$ тако и за $x = x_1 + \delta$. Узимајући сад ово на ум дознајемо из обрасца 6), да су оба количника:

$$\frac{p_{1r}}{p_{1,r-1}},\quad \frac{F(x)}{F_1(x)}$$

једнако означени, како пре, тако и после $x = x_1$, то јест оба су одречни за $x = x_1 - \delta$ а оба положни за $x = x_1 + \delta$. Дакле су:

$$p_{1r} \quad \text{и} \quad p_{1,r-1}$$

противно означени за $x = x_1 - \delta$ а једнако означени за $x = x_1 + \delta$. Према овоме можемо изрећи теорему:

2°. *Кад променљива x при свом непрекидном рашћењу пређе једну вредност x_1, која поништава функцију $f(x)$, онда значни низ функција:*

$$8.)\qquad 1,\ p_{11},\ p_{12},\ p_{13},\ \cdots\ p_{1r}$$

губи једну мену т. ј. у значном низу тих функција за $x = x_1 + \delta$ *има једна мена мање него ли у низу за* $x = x_1 - \delta$.

Из теореме 1° и 2° следује, *да се за Штурмову теорему 1° у № 96 место значног низа Штурмових функција може употребити значни низ функција* 8).

99. Напишимо једначине 2) у № 90 овако:

$$\begin{aligned} &f_2(x) &&= q_1 f'(x) - f(x) \\ &-q_2 f_2(x) + f_3(x) &&= -f'(x) \\ 1.)\quad &f_2(x) - q_3 f_3(x) + f_4(x) &&= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n-2}(x) - q_{n-1} f_{n-1}(x) + f_n(x) &&= 0 \end{aligned}$$

У овим једначинама сматрајмо функције:

$$f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_n(x)$$

као непознате. Детерминанта сачинилаца на левој страни јесте $= 1$, дакле ако хоћемо да израчунамо $f_n(x)$ добићемо:

$$2.)\quad f_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \{q_1 f'(x) - f(x)\} \\ -q_2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -f'(x) \\ 1 & -q_3 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_4 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -q_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Детерминанта може се представити као разлика:

$$3.)\qquad R\, f'(x) - S\, f(x)$$

где је:

$$4.)\quad R = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0, & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & -q_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -q_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$4.)\quad S = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} -q_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -q_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -q_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{n-1} \end{vmatrix}$$

Да бисмо множење са $(-1)^{n-2}$ означено у 4) и 5) извршили, променићемо у 4) знаке свима основцима, који стоје у другој, четвртој, шестој и т. д. врсти и за тим свима основцима, који стоје у трећем, петом, седмом и т. д. стубу. Исто тако у 5) променићемо знаке основцима свију врста, којих су казаљке непарне, а затим основцима свију стубова, којих су казаљке парне. На тај начин добићемо:

$$6.)\quad R=\begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & q_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_4 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & q_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$7.)\qquad S = R_{q_1}$$

где под R_{q_1} разумемо субдетерминанту детерминанте 6) и то ону, која одговара основку њеном q_1. Али кад од једначина 3) у № 98 узмемо $(n-1)$ првих, а од једначина 4) $(n-2)$ првих, онда из њих добијамо простом елиминацијом:

$$8.)\qquad R = p_{1,n-1},\quad S = p_{2,n-1}.$$

Према томе једначина 2) сада гласи:

$$9.)\qquad f_n(x) = p_{1,n-1}\, f'(x) - p_{2,n-1}\, f(x)$$

у ком је обрасцу исказана веза Штурмових функција са функцијама $f(x)$ и $f'(x)$ као и са бројиоцима и имениоцима приближних разломака Штурмовог верижног разломка. Не треба испустити из вида, да су:

$$p_{1,n-1} \quad \text{и} \quad p_{2,n-1}$$

целе функције x-а, прва $(n-1)$-ог и друга $(n-2)$-ог степена.

Силвестрове функције.

100. Једначина 9) у № 99 јесте особени случај ове општије једначине:

$$1.)\qquad \chi_{m-n}(x) = \varphi_{n-1}(x)\, f'(x) - \psi_{n-2}(x)\, f(x)$$

у којој су $\chi_{m-n}(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$ и $\psi_{n-2}(x)$ целе и рационалне алгебарске функције x-а, и то прва $(m-n)$-ог, друга $(n-1)$-ог, а трећа $(n-2)$-ог степена. Кад из једначине 1) и једначине 9) избацимо $f'(x)$ добићемо:

$$2.)\qquad f_n(x)\varphi_{n-1}(x) - \chi_{m-n}(x)\, p_{1,n-1} = f(x)\left\{\psi_{n-2}(x)\, p_{1,n-1} - \varphi_{n-1}(x)\, p_{2,n-1}\right\}$$

Оба производа лево од знака равности јесу $(m-1)$-ог степена, док је међу тим десно већ први чинилац m-ног степена. Дакле једначина 2) може само тако вредити, ако су обе стране идентично једнаке нули т. ј.

$$3.)\qquad \frac{\chi_{m-n}(x)}{f_n(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{p_{1,n-1}} = \frac{\psi_{n-2}(x)}{p_{2,n-1}} = \lambda_{n-1}$$

Кад λ_{n-1} неби било стално него функција x-а, онда би λ_{n-1} морало бити бесконачно велика количина првог степена за сваки — стварни или уображени — корен једначине:

$$4.)\qquad p_{1,n-1} = 0,$$

и то само за корене те једначине. То би исто морало бити са λ_{n-1} и за сваки корен једначине:

$$5.) \qquad p_{2,n-1} = 0$$

и то опет само за корене те једначине.

Али између бројилаца и именилаца двају узастопних приближних разломака постоји однос:

$$p_{1,n-1}\, p_{2,n-2} - p_{2,n-1}\, p_{1,n-2} = -1$$

одакле следује да $p_{1,n-1}$ и $p_{2,n-1}$ немају никаквог заједничког делиоца, који би од јединице био различан. Према томе корени једначине 4) различни су од корена једначине 5). Претпоставка дакле, да је λ_{n-1} функција x-а, даје повода несугласици, која се не може уклонити. Дакле мора бити:

$$\lambda_{n-1} = c$$

где је c сталан број. Дакле сва разрешења функционе једначине 1) налазе се у једначинама:

$$6.) \qquad \begin{aligned} \chi_{m-n}(x) &= \lambda_{n-1}\, f_n(x), \\ \varphi_{n-1}(x) &= \lambda_{n-1}\, p_{1,n-1}, \\ \psi_{n-2}(x) &= \lambda_{n-1}\, p_{2,n-1}, \end{aligned}$$

где је λ_{n-1} један и исти, али у осталом са свим произвољан сталан број. Ако од безбројних разрешења узмемо једно, онда је њиме и вредност од λ_{n-1} одређена.

Ако су само r корена једначине:

$$f(x) = 0$$

међу собом различни и то:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \; \ldots \; x_r$$

а остали:

$$x_{r+1}, \quad x_{r+2} \; \ldots \; x_m$$

само извесна понављања истих, онда функције:

$$f_{r+1}(x), \quad f_{r+2}(x) \; \ldots$$

идентично су $= 0$. Та околност даје нам повода потражити независно разрешење функционе једначине 1.) Зарад тога треба нам се осврнути на № 39 и № 40, и то посебице на теорему 2° № 39.

Ми ћемо покушати, да у функцији:

$$3.) \quad Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & z_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & z_{n-1} \end{vmatrix}$$

сменимо неодређене количине:

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \; \ldots \; z_{n-1}$$

извесним функцијама x-а и за тим потражити, да ли се функције:

$$\chi_{m-n}(x), \quad \varphi_{n-1}(x), \quad \psi_{n-2}(x)$$

дају тако одредити, да функциона једначина 1) буде задовољена. Једначина 1) може се представити и овако:

$$1'). \qquad \frac{\chi_{m-n}(x)}{f(x)} = \varphi_{n-1}(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - \psi_{n-2}(x)$$

где је:

$$8.) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{x-x_k}$$

$$= \frac{\alpha_1}{x-x_1} + \frac{\alpha_2}{x-x_2} + \frac{\alpha_3}{x-x_3} + \ldots + \frac{\alpha_r}{x-x_r}$$

где бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$, којих је збир $= m$, показују, колико су пута корени даној једначини количине:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots . x_r.$$

Образац 8) лако је доказати. Пошто је:

$$f(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \ldots (x-x_r)^{\alpha_r}$$

то онда, кад узмемо десно и лево природне логаритме, добићемо:

$$lf(x) = \alpha_1 l(x-x_1) + \alpha_2 l(x-x_2) + \ldots + \alpha_r l(x-x_r)$$

Пошто су први изводи двеју једнаких функција једнаки, то онда по упуствима № 10 добијамо из ове једначине непосредно образац 8).

Да видимо, да ли се може узети да је:

$$9.) \qquad \varphi_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots . & S_{n-2} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots . & S_{n-1} & z \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots . & S_{2n-4} & z^{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots . & S_{2n-3} & z^{n-1} \end{vmatrix}$$

Кад ову једначину помножимо са оном под 8) и то леву страну левом, а последњи стуб десне детерминанте десном страном, т. ј. са количином:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{x-x_k}$$

и кад при том узмемо на ум, да је

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_r = m = S_0$$

добићемо

$$10.) \quad \varphi_{n-1}(x)\frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & v_0 + 0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & v_1 + P_1 \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & v_{n-2} + P_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & v_{n-1} + P_{n-1} \end{vmatrix}$$

где је за $p = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ узето краткоће ради:

$$11.) \qquad v_p = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k x^p}{x-x_k}$$

као и

$$12.) \quad P_p = S_{p-1} + S_{p-2}x + S_{p-3}x^2 + \ldots + S_0 x^{p-1}$$

Дакле сад смемо ставити, да је:

$$13.)\quad \psi_{n-2}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & 0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & P_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & P_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

Захтев, који треба сада да је испуњен, па да вреди функциона једначина 1) јесте:

$$14.)\quad \frac{\chi_{m-n}(x)}{f(x)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & v_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & v_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & v_{n-1} \end{vmatrix}$$

На основу једначина 9) и 13) функције:

$$\varphi_{n-1}(x) \quad \text{и} \quad \psi_{n-2}(x)$$

јесу целе функције x-а, и то прва $(n-1)$-ог, а друга $(n-2)$-ог степена, као што смо и тражили да буде. У једначинама 9), 13) и 14) имаћемо дакле једно разрешење функционе једначине 1), ако само будемо доказали још и то, да се израз функције: $\chi_{m-n}(x)$ у једначини 14) јавља као цела функција x-а $(m-n)$-ог степена. Тај доказ извршићемо у следећој №-и.

101. Да бисмо сада и то доказали, радићемо на начин, који иде. Ставимо за $p = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$:

$$1.)\qquad w_p = v_p\, f(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k^p \cdot \frac{f(x)}{x - x_k}$$

$$= \alpha_1 x_1^p \frac{f(x)}{x - x_1} + \alpha_2 x_2^p \frac{f(x)}{x - x_2} + \ldots + \alpha_r x_r^p \frac{f(x)}{x - x_r}$$

И кад то, што рекосмо, учинимо, онда ћемо из једначине 14) у № 100, кад је лево и десно помножимо са $f(x)$ — десно последњи стуб детерминанте — добити:

$$2.)\quad x_{m-n}(x) \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & w_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & w_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & w_{n-1} \end{vmatrix}$$

Кад по Horner-овом начину дељења поделимо функцију $f(x)$ са $(x-x_k)$ добићемо као количник једну целу функцију $(m-1)$-ог степена и тај количник јесте:

$$3.)\quad \frac{f(x)}{x - x_k} = x^{m-1} + \left.\begin{matrix} a_1 \\ x_k \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \left.\begin{matrix} a_2 \\ a_1 x_k \\ x_k^2 \end{matrix}\right\} x^{m-3} + \ldots$$

$$+ \left.\begin{matrix} a_{m-2} \\ a_{m-3} x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k^{m-2} \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k^{m-1} \end{matrix}\right\}$$

Ако десну страну ове једначине уредимо по падајућим степенима од x_k добићемо:

$$\frac{f(x)}{x-x_k}=\left.\begin{matrix} x^{m-1} \\ a_1x^{m-2} \\ a_2x^{m-3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-2}x \\ a_{m-1} \end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix} x^{m-2} \\ a_1x^{m-3} \\ a_2x^{m-4} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-3}x \\ a_{m-2} \end{matrix}\right| x_k + \left.\begin{matrix} x^{m-3} \\ a_1x^{m-4} \\ a_2x^{m-5} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-4}x \\ a_{m-3} \end{matrix}\right| x_k^2 + \ldots + \left.\begin{matrix} x \\ a_1 \end{matrix}\right\} x_k^{m-2} + x_k^{m-1}$$

Како постају сачиниоци деснога реда из полинома $f(x)$, лако је увидети. Треба само у овоме поступно смањивати изложиоце његових чланова са 1, 2, 3, 4 и т. д. Ако сад краткоће ради означимо сачиниоце узастопних чланова десног реда са:

$$f_{m-1}(x),\ f_{m-2}(x),\ f_{m-3}(x)\ \ldots$$

и у опште сачиниоца h-тог члана са $f_{m-h}(x)$, тако, да је:

$$4.)\quad f_{m-h}(x) = x^{m-h} + a_1x^{m-h-1} + a_2x^{m-h-2} + \ldots$$
$$+ a_{m-h-1}x + a_{m-h},$$

добићемо:

$$5.)\quad \frac{f(x)}{x-x_k} = f_{m-1}(x) + x_kf_{m-2}(x) + x_k^2f_{m-3}(x) + \ldots$$
$$+ x_k^{m-2}f_1(x) + x_k^{m-1}$$

Ми смо горе ставили:

$$w_p = \alpha_1x_1^p\frac{f(x)}{x-x_1} + \alpha_2x_2^p\frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \alpha_rx_r^p\frac{f(x)}{x-x_r}$$

Кад на ову једначину применимо образац 5) добићемо:

$$w_p = \alpha_1x_1^p\Big\{f_{m-1}(x) + x_1f_{m-2}(x) + x_1^2f_{m-3}(x) + \ldots$$
$$+ x_1^{m-2}f_1(x) + x_1^{m-1}\Big\}$$
$$+ \alpha_2x_2^p\Big\{f_{m-1}(x) + x_2f_{m-2}(x) + x_2^2f_{m-3}(x) + \ldots$$
$$+ x_2^{m-2}f_1(x) + x_2^{m-1}\Big\}$$
$$+ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \alpha_rx_r^p\Big\{f_{m-1}(x) + x_rf_{m-2}(x) + x_r^2f_{m-3}(x) + \ldots$$
$$+ x_r^{m-2}f_1(x) + x_r^{m-1}\Big\}$$

Извршимо десно од знака једнакости означена множења са:

$$\alpha_1x_1^p,\ \alpha_2x_2^p,\ \alpha_3x_3^p,\ \ldots\ \alpha_rx_r^p$$

па за тим саберимо по вертикалним стубовима и збир чланова, који постају из $(n-1)$ првих стубова, узмимо заједно, а тако исто и збир чланова. који постају из осталих $(m-n+1)$ стубова. Ако још узмемо на ум, да се:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_r$$

јављају редом:

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_r$ — пута као корени једначине $f(x)=0$, услед чега је у опште:

$$\alpha_1x_1^p + \alpha_2x_2^p + \alpha_3x_3^p + \ldots + \alpha_rx_r^p = S_p$$

добићемо:

$$w_p = \Big\{ S_p f_{m-1}(x) + S_{p+1} f_{m-2}(x) + \ldots + S_{p+n-2} f_{m-n+1}(x)$$

$$+ \Big\{ S_{p+n-1} f_{m-n}(x) + S_{p+n} f_{m-n-1}(x) + \ldots$$

$$+ S_{p+m-2} f_1(x) + S_{p+m-1}$$

Ако ставимо краткоће ради:

$$6.) \quad Q_p = S_p f_{m-1}(x) + S_{p+1} f_{m-2}(x) + \ldots + S_{p+n-2} f_{m-n+1}(x)$$

$$7.) \quad R_{p+n-1} = S_{p+n-1} f_{m-n}(x) + S_{p+n} f_{m-n-1}(x) + \ldots$$

$$+ S_{p+m-2} f_1(x) + S_{p+m-1}$$

добићемо даље:

$$8.) \qquad w_p = Q_p + R_{p+n-1}$$

Ако сад помоћу овог обрасца заменимо у детерминанти обрасца 2) количине:

$$w_0, \quad w_1, \quad w_2 \ldots w_{n-1}$$

њиним вредностима, моћи ће се иста детерминанта разложити на два сабирка (алг. анал. № 171) и тако ћемо онда имати:

$$\chi_{m-n}(x) =$$

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & Q_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & Q_1 \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & Q_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & Q_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & R_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & R_n \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & R_{2n-3} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & R_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Ако помоћу обрасца 6) заменимо поједина Q у првој од ових двеју детерминаната њиним вредностима, видећемо, да ће се иста детерминанта моћи разложити на неколико нових детерминаната, од којих је свака на основу № 169, 4° и № 170 алг. анал. једнака нули. Услед тога добијамо из последње једначине:

$$9.) \quad \chi_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & R_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & R_n \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & R_{2n-3} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & R_{2n-2} \end{vmatrix}$$

И тако је сада доказано, да је функција $\chi_{m-n}(x)$ једначином 14) у № 100 дата као цела функција x-а $(m-n)$-ог степена. И тиме је доказано то, да нам једначине 9), 13) и 14) дају потпуно разрешење функцијоне једначине 1). Функције:

$$\chi_{m-n}(x) \quad \text{и} \quad \varphi_{n-1}(x)$$

пронашао је *Sylvester*, али не у облику детерминаната. Образац 9) изнашао је *Cayley*.

Примери.

a). Да се помоћу обрасца 11) у № 38 докаже да је:

$$10.) \quad \varphi_{n-1}(x) = \Sigma\,(x - x_{\mu_1})\,(x - x_{\mu_2}) \ldots$$

$$\ldots (x - x_{\mu_{n-1}}) \Big\{ P(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \ldots x_{\mu_{n-1}}) \Big\}^2$$

b.) Да се докаже, да кад се $\varphi_{n-1}(x)$ узме као у обрасцу 10) *a*) и

$$11.)\qquad \chi_{m-n}(x) = \Sigma \frac{f(x)}{(x-x_{\mu_1})\,(x-x_{\mu_2})\,\ldots\,(x-x_{\mu_n})} \times$$

$$\left\{F(x_{\mu_1},\; x_{\mu_2}, \ldots\, x_{\mu_n})\right\}^2,$$

да је онда функцијона једначина 1) задовољена.

c). Да се из израза функције $\chi_{m-n}(x)$ у 11) *b*) изведе израз исте функције, који је под 14), № 100.

102. Напишимо функцијону једначину 1) №-е 100 и ону, која из ње постаје, кад се n смени са $(n+1)$

$$\chi_{m-n}(x) = f'(x)\,\varphi_{n-1}(x) - f(x)\,\psi_{n-2}(x)$$

$$\chi_{m-n-1}(x) = f'(x)\,\varphi_{n}(x) - f(x)\,\psi_{n-1}(x)$$

Кад из ових једначина избацимо $f'(x)$, добићемо:

$$1.)\qquad \chi_{m-n}(x)\,\varphi_n(x) - \chi_{m-n-1}(x)\,\varphi_{n-1}(x)$$

$$= f(x)\left\{\varphi_{n-1}(x)\,\psi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\,\psi_{n-2}(x)\right\}$$

Ако на чиниоце у загради десно од знака једнакости применимо обрасце 6) у № 100, добићемо:

$$\varphi_{n-1}(x)\cdot\psi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\cdot\psi_{n-2}(x)$$

$$= \lambda_{n-1}\,\lambda_n\left\{p_{1,n-1}\,p_{2n} - p_{1n}\,p_{2,n-1}\right\} = \lambda_{n-1}\,\lambda_n$$

јер је на основу обрасца 5) №-е 148 алг. анал.

$$p_{1,n-1}\,p_{2n} - p_{1n}\,p_{2,n-1} = 1$$

Према томе једначина 1) претвара се у ову:

$$2.)\qquad \chi_{m-n}(x)\,\varphi_n(x) - \chi_{m-n-1}(x)\,\varphi_{n-1}(x) = \lambda_{n-1}\lambda_n\,f(x),$$

где су обе стране целе функције x-а. Из обрасца 9) у № 100 и обрасца 9) у № 101 дознајемо лако, да су сачинилац од x^{m-n} у функцији $\chi_{m-n}(x)$ и сачинилац од x^n у функцији $\varphi_n(x)$ међу собом једнаки. Сваки је од њих т. ј.

$$3.)\qquad = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-2} \end{vmatrix} = \Delta_n$$

Упоређивањем сачинилаца од x^m лево и десно од знака једнакости у једначини 2) добијамо:

$$4.)\qquad \lambda_{n-1}\,\lambda_n = \Delta_n^2$$

Ако претпоставимо, да су количине:

$$\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3\;\ldots\;\Delta_r$$

све од нуле различне, добићемо:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \triangle_2^2, \qquad \lambda_2 \lambda_3 = \triangle_3^2,$$

$$\lambda_3 \lambda_4 = \triangle_4^2, \qquad \lambda_4 \lambda_5 = \triangle_5^2,$$

$$\lambda_5 \lambda_6 = \triangle_6^2, \qquad \lambda_6 \lambda_7 = \triangle_7^2,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\lambda_{2p-1} \lambda_{2p} = \triangle_{2p}^2, \qquad \lambda_{2p-2} \lambda_{2p-1} = \triangle_{2p-1}^2$$

Кад производ левих једначина поделимо са производом десних, добићемо:

$$\lambda_1 \lambda_{2p} = \frac{\triangle_2^2 \triangle_4^2 \triangle_6^2 \; . \; . \; . \; \triangle_{2p}^2}{\triangle_3^2 \triangle_5^2 \triangle_7^2 \; . \; . \; . \; \triangle_{2p-1}^2}$$

Али је на основу образаца 6) у № 100 и образаца 3) у № 98:

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 . q_1$$

Даље делећи (№ 98) $f(x)$ са $f'(x)$ добијамо:

$$q_1 = \frac{1}{m} x + \frac{a_1}{m^2}$$

Даље из образаца 9) у № 100 добијамо за $n = 2$

$$\varphi_1(x) = S_0 \, x - S_1 = mx + a_1$$

Из последње две једначине следује:

$$\varphi_1(x) = m^2 q_1$$

одакле увиђамо, да је:

$$\lambda_1 = m^2 = S_0^2 = \triangle_1^2$$

и за то:

$$6.) \qquad \lambda_{2p} = \frac{\triangle_2^2 \triangle_4^2 \triangle_6^2 \; . \; . \; . \; \triangle_{2p}^2}{\triangle_1^2 \triangle_3^2 \triangle_5^2 \; . \; . \; . \; \triangle_{2p-1}^2},$$

$$7.) \qquad \lambda_{2p-1} = \frac{\triangle_1^2 \triangle_3^2 \triangle_5^2 \; . \; . \; . \; \triangle_{2p-1}^2}{\triangle_2^2 \triangle_4^2 \triangle_6^2 \; . \; . \; . \; \triangle_{2p-2}^2}.$$

Услед горе учињене претпоставке о количинама $\triangle$ сва λ испадају коначна и положна.

Исто тако ни једна од Sylvester-ових функција, а те су:

$$f(x), \; f'(x), \; \chi_{m-2}(x) \; . \; . \; . \; \chi_{m-r}(x)$$

и

$$1, \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x) . \; . \; . \; . \; \varphi_r(x)$$

не може у овом случају бити идентично једнака нули, јер је у свима њима сачинилац највишег степена различан од нуле. Дакле је и број Штурмових функција:

$$f(x), \; f'(x), \; f_2(x) \; . \; . \; . \; f_r(x)$$

потпун, т. ј. једнак броју $(r+1)$, а узастопни имениоци:

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3 \; . \; . \; . \; q_r$$

у Штурмовом верижном разломку јесу сви линеарне функције x-а.

Ако сад узмемо у обзир једначине 6) и 7) ове №-е и једначине 6) у № 100, то ћемо видети, да вреди теорема:

1°. *Кад је у свима Sylvester-овим функцијама:*

$$f(x), \; f'(x), \; \chi_{m-2}(x) \; . \; . \; . \; \chi_{m-r}(x)$$

сачинилац највишег степена од x различан од нуле, онда при примени Штурмове теореме могу се оне узети место Штурмових функција.

Кад се најзад још обазремо на последњи став № 98 онда лако увиђамо, да вреди и теорема:

2°. *Кад је у свима Sylvester-овим функцијама:*

$$1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\ .\ .\ .\ .\ \varphi_r(x)$$

сачинилац највишег степена од x различан од нуле, онда се и оне могу употребити место Штурмових функција при примени Штурмове теореме.

103. Сад ћемо да пређемо на случај, кад је сачинилац од x^{m-n+1} у функцији $\chi_{m-n+1}(x)$ различан од нуле, и кад су равни нули сачиниоци првих k чланова у функцији $\chi_{m-n}(x)$, док је међу тим сачинилац од x^{m-n-k} различан од нуле. Узмимо функцију Z_{n-1} коју смо већ у № 40 обр. 3) дефинисали:

$$1.)\quad Z_{n-1}=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & . & . & . & S_{n-2} & z_0 \\ S_1 & S_2 & . & . & . & S_{n-1} & z_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ S_{n-2} & S_{n-1} & . & . & . & S_{2n-4} & z_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & . & . & . & S_{2n-3} & z_{n-1} \end{vmatrix}$$

Ако узмемо на ум образац 9) у № 101 а особито последњи стуб тамошње детерминанте, то ћемо онда лако наћи, да је мало час учињена претпоставка поред $(r-1)$

првих идентичних једначина исказана у следећим једначинама:

$$2.)\qquad Z_{n-1,n-1} \gtrless 0$$

$$3.)\quad \left|\begin{array}{l} S_0\ Z_{n-1,0}+S_1\ Z_{n-1,1}+\ldots+S_{n-1}\ Z_{n-1,n-1}=0 \\ S_1\ Z_{n-1,0}+S_2\ Z_{n-1,1}+\ldots+S_n\ Z_{n-1,n-1}=0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ S_{n+k-2}\ Z_{n-1,0}+S_{n+k-1}\ Z_{n-1,1}+\ldots+S_{2n+k-3}\ Z_{n-1,n-1}=0 \end{array}\right.$$

$$4.)\quad S_{n+k-1}\ Z_{n-1,0}+S_{n+k}\ Z_{n-1,1}+\ldots+S_{2n+k-2}\ Z_{n-1,n-1}=M$$

где је M различно од нуле. У овим једначинама симбол

$$Z_{n-1,r}$$

означава ону субдетерминанту детерминанте 1) која одговара основку z_r њеног последњег стуба.

Из ових претпоставака добијају се на начин, који иде, врло важни резултати.

Ми ћемо да узмемо функцију:

$$5.)\quad Z_{n+p-1}=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & . & . & . & S_{n+p-2} & z_0 \\ S_1 & S_2 & . & . & . & S_{n+p-1} & z_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ S_{n+p-2} & S_{n+p-1} & . & . & . & S_{2n+2p-4} & z_{n+p-2} \\ S_{n+p-1} & S_{n+p} & . & . & . & S_{2n+2p-3} & z_{n+p-1} \end{vmatrix}$$

где претпостављамо, да је p апсолутан цео број и $< k$. Пошто је услед претпоставке, коју смо горе учинили,

$Z_{n-1,n-1}$ различно од нуле, то можемо са том количином помножити једначину 5) лево и десно. Множење детерминанте на десној страни биће извршено, ако основке њеног n-ог стуба, који почиње са S_{n-1}, будемо помножили са поменутом количином. И кад то множење n-тог стуба будемо извршили, ми ћемо, ослањајући се на последњу у № 171 алгеб. анал. исказану теорему додати основцима помноженог n-ог стуба одговарајуће основке $(n-1)$ првих стубова помножене редом са:

$$Z_{n-1,0},\ Z_{n-1,1},\ Z_{n-1,2}\ \ldots$$

И за тим ће основци n-ог стуба бити:

$$\begin{array}{l}
S_0 Z_{n-1,0} + S_1 Z_{n-1,1} + \ldots + S_{n-1} Z_{n-1,n-1} \\
S_1 Z_{n-1,0} + S_2 Z_{n-1,1} + \ldots + S_n \ Z_{n-1,n-1} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
S_{n+p-1} Z_{n-1,0} + S_{n+p} Z_{n-1,1} + \ldots + S_{2n+p-2} Z_{n-1,n-1}
\end{array}$$

Пошто смо сад узели, да је $p < k$, то су на основу једначина 3) сви ови основци једнаки нули, а због тога је онда и

$$Z_{n-1,n-1} \times Z_{n+p-1} = 0$$

или пошто је први чинилац услед неједначине под 2) различан од нуле:

$$6.) \qquad Z_{n+p-1} = 0$$

за $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (k-1)$.

Али ако узмемо $p = k$, онда се поменута последња теорема у № 171 алгеб. анал. као и горњи обрасци 3) и 4) могу употребити тако, да најзад изађе као резултат једначина:

$$7.) \qquad (Z_{n-1,n-1})^k Z_{n+k-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{cccccccc}
S_0 & \ldots & S_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
S_{n-1} & \ldots & S_{2n-3} & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{n-1} \\
S_n & \ldots & S_{2n-2} & 0 & 0 & \ldots & M & z_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
S_{n+k-2} & & S_{2n+k-4} & 0 & M & \ldots & & z_{n+k-2} \\
S_{n+k-1} & & S_{2n+k-3} & M & & & & z_{n+k-1}
\end{array} \right|$$

У стубовима, где је M, стоје више тога основка саме нуле; а основци испод M нису забележени за то, што од њих вредност детерминанте на основу треће теореме у № 171 алг. анал. и не зависи. Кад ту теорему овде узастопце више пута применимо, добићемо:

$$8.) \quad (Z_{n-1,\,n-1})^k Z_{n+k-1} = (-)^{\frac{k(k+1)}{1.2}} M^k Z_{n-1}$$

Али је количник:

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{1.2}} M^k : (Z_{n-1,\,n-1})^k$$

стална и од нуле различна количина, коју ћемо означити краткоће ради са M_{n+k}. И тада ћемо добити из 8):

$$9.) \qquad Z_{n+k-1} = M_{n+k} . Z_{n-1}$$

Кад у Z_{n+p-1} заменимо неодређене количине:

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2 \; . \; . \; . \; . \; z_{n+p-1}$$

одређеним функцијама x-а, онда детерминанта постаје равна функцијама:

$$\chi_{m-n-p}(x), \quad \varphi_{n+p-1}(x), \quad \psi_{n+p-2}(x).$$

Једначине 6) и 9) дају дакле:

$$10.) \qquad \chi_{m-n-p}(x) = 0$$

$$\varphi_{n+p-1}(x) = 0$$

$$\psi_{n+p-2}(x) = 0$$

за $p = 0, 1, 2, \ldots (k-1)$; а иначе:

$$11.) \qquad \chi_{m-n-k}(x) = M_{n+k} . \chi_{m-n}(x)$$

$$\varphi_{n+k-1}(x) = M_{n+k} . \varphi_{n-1}(x)$$

$$\psi_{n+k-2}(x) = M_{n+k} . \psi_{n-2}(x).$$

104. Кад су, као што смо то у № 103 претпоставили, у Sylvester-овој функцији $\chi_{m-n}(x)$ првих k сачинилаца једнаки нули, а $(k+1)$-ви сачинилац то јест онај, који је уз x^{m-n-k}, различан од нуле, дакле кад степен

Sylvester-ове функције од $(m-n)$-ог спада на $(m-n-k)$-ти онда на основу образаца 6) у № 100 мора то исто бити случај и са Штурмовом функцијом: $f_n(x)$. Делећи $f_{n-1}(x)$ са $f_n(x)$ добићемо количник $(k+1)$-ог степена, који ћемо количник означити са q_{n+k}, и остатак, који је $(m-n-k-1)$-ог степена. Истинитост овог тврђења лако је увидети, ако се само узме на ум то, да је $f_{n-1}(x)$ степена $(m-n+1)$ а $f_n(x)$ услед садање претпоставке степена $(m-n-k)$-ог. Сада је Штурмова функција:

$$1.) \qquad f_{n-1}(x) = q_{n+k} f_n(x) - f_{n+k+1}(x).$$

У низу Штурмових функција 2) № 90 јавља се дакле празнина, јер нема Штурмових функција:

$$f_{n+1}(x), \quad f_{n+2}(x) \; . \; . \; . \; . \; f_{n+k}(x)$$

Ове Штурмове функције *изузев последњу* одговарају Sylvester-овим функцијама

$$\chi_{m-n-1}(x), \quad \chi_{m-n-2}(x) \; . \; . \; . \; \chi_{m-n-k+1}(x)$$

које су идентично $= 0$. Ако ове Sylvester-ове функције изоставимо, то ће се у низу Sylvester-ових функција јавити празнина, која одговара оној код Штурмових функција. Али је број Штурмових функција, којих нема, за јединицу већи од броја Sylvester-ових функција, којих такође нема. Функција $f_n(x)$ одговара у исти мах двема Sylvester-овим функцијама

$$2.) \qquad \chi_{m-n}(x) = \lambda_{n-1} f_n(x)$$

$$3.) \qquad \chi_{m-n-k}(x) = \lambda_{n+k-1} f_n(x)$$

и као што се из прве једначине 11) у № 103 лако увиђа, производ:

$$\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n+k-1}$$

истог је знака са сталним чиниоцем M_{n+k} у једначинама 11) поменуте №-е.

Али став, да је производ двају обличжњих λ положан, вреди за размаке, у којима нема горе поменутих празнина. Ако дакле у *непотпуном* низу Sylvester-ових функција не бројимо мене и следи, које долазе на поменуте празнине, онда поменути низ има исто онолико мена и исто онолико следи, колико их има и у низу Штурмових функција. Оне прекобројне мене и следи исте су за $x = a$ и $x = b$. Ако је дакле код Штурмове теореме питање само о томе, колико нестаје мена, када x при свом непрекидном рашћењу од вредности $x = a$, пређе на вредност $x = b$, онда при пребројавању мена и следи за $x = a$ и $x = b$ све једно је, узимали ми у рачун поменуте прекобројне мене и следи или не.

Дакле стоји теорема:

1°. *Низ Sylvester-ових функција:*

$$f(x)\ \ f'(x),\ \ \chi_{m-1}(x)\ \ .\ .\ .\ \ \chi_{m-r}(x)$$

може код Штурмове теореме заменити низ Штурмових функција у сваком случају.

Ако у низу Штурмових функција има празнина, онда се у низу бројилаца Штурмовог верижног разломка налазе тачно на истим местима такође празнине. Али непотпуни низ Sylvester-ових функција χ стоји према Штурмовим функцијама, што се тиче значног низа, онако исто,

као што стоји непотпуни низ Sylvester-ових функција φ према бројиоцима Штурмовог верижног разломка. О овима вреди увек став на крају № 98. Дакле можемо исказати теорему:

2°. *Низ Sylvester-ових функција:*

$$1,\ \ \varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x),\ \ .\ .\ .\ \ \varphi_r(x)$$

може се код Штурмове теореме употребити место Sturm-ових функција у сваком случају.

Budan-ова теорема.

105. У № 96 а помоћу обрасца 4) ми смо нашли, да је количник $f(x) : f'(x)$ одречан за $x = x_1 - \delta$ а положан за $x = x_1 + \delta$, ако је број x_1 корен једначине $f(x) = 0$ и ако је број δ положан али тако мали, да између $x_1 - \delta$ и $x_1 + \delta$ нема више ни једног од x_1 различног стварног корена једначине. И ово на основу поменуте №-е вреди, па био x_1 прост корен једначине, или јој он био више пута корен.

Претпоставимо, да је x_1 α-пута корен задатој једначини. Тада је:

$$1.)\qquad f(x) = (x-x_1)^{\alpha}\,\varphi(x).$$

Кад се изведу узастопни изводи функције $f(x)$ почев од првог па до α-ог, они се онда могу краће представити овако:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1}\,\varphi_1(x)\\
&f''(x) = (x - x_1)^{\alpha-2}\,\varphi_2(x)\\
2.)\qquad &f'''(x) = (x - x_1)^{\alpha-3}\,\varphi_3(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{\alpha-1}(x) = (x - x_1)\,\varphi_{\alpha-1}(x),\\
&f^{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(x)
\end{aligned}$$

Узастопне функције φ у овим једначинама не могу за $x = \alpha$ бити $= 0$ из разлога, који се лако даје увидети. Ми можемо дакле δ изабрати тако мало, да је свака од поменутих функција једног и истог знака за све вредности x-а почев од $x = x_1 - \delta$ па до $x = x_1 + \delta$. Међу тим су функције:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ \ldots\ f^{\alpha-1}(x),\ f^{\alpha}(x)$$

за $x = x_1$ све $= 0$. Дакле можемо и овде применути теорему горе поменуте №-е 96 и на тај начин имаћемо теорему:

1°. *Кад се x_1 јавља α пута као стварни корен једначине $f(x) = 0$, онда су количници:*

$$\frac{f(x)}{f'(x)},\ \frac{f'(x)}{f''(x)},\ \ldots\ \frac{f^{\alpha-1}(x)}{f^{\alpha}(x)}$$

сви одречни за $x = x_1 - \delta$, а сви положни за $x = x_1 + \delta$, и значни низ, који постаје из функција:

$$f(x),\quad f'(x),\ \ldots\ f^{\alpha-1}(x),\quad f^{\alpha}(x)$$

губи α мена, кад променљива x при свом непрекидном мењању пређе вредност x_1, која је α пута корен једначини $f(x) = 0$.

Узмимо сада, да је ξ β-пута корен једначине:

$$f^{k}(x) = 0,$$

која постаје, кад се k-ти извод функције $f(x)$ стави једнак нули, али у исти мах претпоставимо, да је за $x = \xi$ $(k-1)$-ви извод функције $f(x)$, т. ј. $f^{k-1}(x)$ различан од нуле. Сад вреде дакле једначине:

$$\begin{aligned}
&f^{k}(x) = (x - \xi)^{\beta}\varphi_{k}(x)\\
&f^{k+1}(x) = (x - \xi)^{\beta-1}\varphi_{k+1}(x)\\
3.)\qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{k+\beta-1}(x) = (x - \xi).\ \varphi_{k+\beta-1}(x),\\
&f^{k+\beta}(x) = \varphi_{k+\beta}(x).
\end{aligned}$$

У овим једначинама вредности функција φ не могу никад бити $= 0$ за $x = \xi$.

Пошто положни број δ можемо узети тако мали, да је свака од функција φ једног и истог знака за све вредности x-а, које се налазе између $x = \xi - \delta$ и $x = \xi + \delta$, то можемо на узастопне изводе:

$$f^{k}(x),\ f^{k+1}(x),\ f^{k+2}(x)\ \ldots\ f^{k+\beta}(x)$$

применути теорему 1°. Значни низ, који постаје из ових функција, губи дакле β мена, кад x при свом непрекидном мењању пређе број ξ, који је β пута корен једначини: $f^{k}(x) = 0$.

Остаје нам да испитамо, како стоји са знацима функција $f^{k-1}(x)$ и $f^{k}(x)$, зарад чега ћемо морати разликовати два случаја, т. ј. да ли је β парно или непарно.

Ако је β паран број, онда из прве једначине под 3) увиђамо лако, да су: $f^{k}(\xi - \delta)$ и $f^{k}(\xi + \delta)$ истога знака. Но то исто вреди и за $f^{k-1}(\xi - \delta)$ и $f^{k-1}(\xi + \delta)$, јер на основу претпоставке ξ није корен једначине:

$$f^{k-1}(x) = 0$$

Дакле функције $f^{k-1}(x)$ и $f^{k}(x)$ од $x = \xi - \delta$ па до $x = \xi + \delta$ не губе мену или след, коју су градиле.

Ако је пак β непаран број, онда су:

$$f^{k}(\xi - \delta) \quad \text{и} \quad f^{k}(\xi + \delta)$$

противног знака, а међу тим су:

$$f^{k-1}(\xi - \delta) \quad \text{и} \quad f^{k-1}(\xi + \delta)$$

истога знака. Дакле ће количник

$$\frac{f^{k-1}(\xi + \delta)}{f^{k}(\xi + \delta)}$$

бити положан или одречан, како је кад количник

$$\frac{f^{k-1}(\xi - \delta)}{f^{k}(\xi - \delta)}$$

одречан или положан. Дакле тада функције:

$$f^{k-1}(x) \quad \text{и} \quad f^{k}(x)$$

од $x = \xi - \delta$ па до $x = \xi + \delta$ или губе једну мену или је добијају. Дакле стоји теорема:

2°. *Ако је* $x = \xi$ *β-пута корен једначини* $f^{k}(x) = 0$ *и ако је* $f^{k-1}(\xi)$ *различно од нуле, онда значни низ функција:*

$$f^{k-1}(x),\ f^{k}(x),\ f^{k+1}(x)\ \ldots\ f^{k+\beta}(x)$$

губи паран број значних мена, кад променљива x *при свом непрекидном рашћењу пређе број* ξ. *Број изгубљених мена или је* β, *или* $\beta \pm 1$, *како је кад* β *паран или непаран број.* И ова теорема вреди и онда, ако би случајно било $f(\xi) = 0$, у ком би случају наравно $k > \alpha$ било.

Из теорема 1° и 2° следује ова:

3°. *Ако су* a *и* b *стварни бројеви, и* $b > a$ *онда значни низ функција:*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ \ldots\ f^{m}(x)$$

не може за $x = b$ *имати више мена, него ли за* $x = a$. *И број мена, којих нестаје при непрекидном прелазу од* $x = a$, *до* $x = b$ *или је једнак броју корена, што су између* a *и* b, *или је тај број мена за паран број већи.*

И ово је Budan-ова теорема, коју неки зову и Fourier-овом за то, што ју је и овај, али много доцније и независно од првог, доказао.

Descartes-ова теорема у № 16 јавља се као особени случај Budan-ове. Јер за једну довољно велику вредност $x = +g$ значни низ функција:

4.) $$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ .\ .\ f^{m}(x)$$

имаће очевидно само следи. Али за $x = 0$ ове функције постају једнаке сачиниоцима једначине $f(x) = 0$ (№ 17) помноженим можда са извесним положним бројевима, што немења знак поменутим сачиниоцима. Одатле следује, да при рашћењу x-а од $x = 0$ до $x = +g$ низ функција 4) мора изгубити онолико мена, колико их има у једначини $f(x) = 0$. Дакле број стварних корена између 0 и $+g$ може бити највише једнак броју мена у задатој једначини. Но ово је Descartes-ова теорема.

Rolle-ова теорема.

106. Она гласи овако:

1°. *Између два узастопна корена x_1 и x_2 једначине $f(x) = 0$ мора се налазити барем један корен једначине $f'(x) = 0$.* Јер за врло мало δ количници:

1.) $$\frac{f(x_1+\delta)}{f'(x_1+\delta)} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_2-\delta)}{f'(x_2-\delta)}$$

морају бити противнога знака и то први положан а други одречан. Функције $f(x)$ и $f'(x)$ јесу непрекидне и $f(x)$ при непрекидном рашћењу x-а од $x_1+\delta$ до $x_2-\delta$ не може постати равна нули, јер на основу претпоставке између те две границе нема ни једног корена једначине $f(x) = 0$. Дакле количник:

$$\frac{f(x)}{f'(x)},$$

који је за $x = x_1 + \delta$ положан, а за $x = x_2 - \delta$ одречан, дакле између тих граница свој знак мења, може свој знак променути само тако, ако $f'(x)$ при мењању x-а од $x = x_1$ до $x = x_2$ постане $= 0$ најмање један пут или непаран број пута.

Из овога, што на послетку рекосмо, следује, да се између два узастопна корена једначине $f'(x) = 0$ може налазити највише један корен једначине $f(x) = 0$ а може их никако и не бити. Јер кад би x_1 и x_2 били два *различна* корена једначине $f(x) = 0$, који се налазе између два узастопна корена ξ_1 и ξ_2 једначине $f'(x) = 0$, онда би се на основу теореме 1° морао налазити између x_1 и x_2 најмање један корен ξ_3 последње једначине. И тај би се корен ξ_3 налазио између ξ_1 и ξ_2, што је противно претпоставци, да су последња два броја узастопни корени једначине $f'(x) = 0$.

Ако бисмо пак претпоставили, да се између ξ_1 и ξ_2 налази само корен x_3 једначине $f(x) = 0$, али који јој је корен барем два пута, онда би исти број x_3 морао бити барем један пут корен једначини $f'(x) = 0$, али то је опет противно претпоставци, да су ξ_1 и ξ_2 два узастопна корена једначине $f'(x) = 0$.

Дакле стоји теорема:

2°. *Кад су $x = \xi_1$ и $x = \xi_2$ два узастопна — разуме се стварна — корена једначине $f'(x) = 0$, онда се између њих може налазити највише један стваран и то прост корен једначине $f(x) = 0$.*

Rolle-ова теорема остаје очевидно у важности, ако би за један од два узастопна корена x_1 и x_2 једначине $f(x) = 0$ или и за оба била $f'(x) = 0$, јер количници под 1) јесу и тада противнога знака. Даље иста теорема вреди и за трансцендентне једначине, само ако је први извод $f'(x)$ непрекидна функција између $x = x_1$ и $x = x_2$.

Из до сада реченога увиђавно је, *да ако смо у стању решити једначину*:

$$2.)\qquad f'(x) = 0$$

да смо у стању дознати и број стварних корена једначине $f'(x) = 0$.

Јер узмимо да су:

$$a^1,\ b^1,\ c^1\ \ldots\ l^1$$

стварни корени једначине 2) поређани према својој величини тако, да нигде пред мањим кореном не стоји већи. Ако сад у задатој једначини:

$$3.)\qquad f(x) = 0$$

заменимо x редом са:

$$4.)\qquad -\infty,\ a^1,\ b^1,\ c^1\ \ldots\ l^1,\ +\infty,$$

онда, ако $f(x)$ за две узастопне вредности x-а добија противно означене вредности, између те две вредности x-а мора се налазити један корен задате једначине 3) (№ 78) и то, услед теореме 2° *само један*. Ако ли $f(x)$ добија једнако означене вредности за две узастопне вредности x-а, онда између тих вредности x-а не може бити ни једног корена једначине 3), јер их више од једнога између тих вредности x-а не може ни бити. Према томе при поменутом замењивању x-а при свакој промени знака

функције $f(x)$ открива се по један и то само један корен једначине 3).

Ако је n број стварних корена једначине $f'(x) = 0$, онда ћемо у 4) имати $(n+2)$ броја, одакле следује, да ће једначина $f(x)$ моћи имати највише $(n+1)$ стварних корена.

Такође је јасно, да ако су сви корени задате једначине 3) стварни, да је то онда исто случај и са коренима једначине 2). Јер између свака два узастопна корена задате једначине, а има их m, мора се налазити један корен једначине $f'(x) = 0$ и то само један, јер би у противном случају ова једначина, која је $(m-1)$-ог степена, имала више од $(m-1)$ корена, што не може бити.

107. У овој №-и тражићемо помоћу Rolle-ове теореме услове, који треба да су испуњени, па да сви корени кубне једначине буду стварни.

Пошто сваку кубну једначину можемо ослободити њеног другог члана, то можемо узети као задату једначину:

$$1.)\qquad f(x) = x^3 + px + q = 0$$

Овде је:

$$2.)\qquad f'(x) = 3x^2 + p = 0$$

Да би сва три корена једначине 1) могли бити стварни, треба да су стварни корени једначине 2), а за то се изискује, да је $p < 0$. Узмимо да је овај услов испуњен, онда су стварни корени једначине 2):

$$a' = -\sqrt{-\frac{1}{3}p}\,,\qquad b' = \sqrt{-\frac{1}{3}p}$$

Ако су сада a, b и c стварни корени једначине 1), онда $f(x)$ мора, пошто x пређе први корен a, бити положна, јер је била одречна за све вредности x-а од $-\infty$ до првог корена a. Пошто при рашћењу x-а од a до b функција $f(x)$ остаје све једнако положна и a' лежи између a и b (№ 106) то је онда:

$$f(a') > 0 \quad \text{или} \quad -\left(\sqrt{-\frac{1}{3}p}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{1}{3}p} + q > 0$$

или што је све једно:

$$3.) \qquad -\frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} > -\frac{1}{2}q$$

Пошто x пређе корен b, $f(x)$ мења свој знак, т. ј. постаје одречна и остаје таква, докле год x не пређе и трећи корен c једначине 1). Пошто изнад c нема више ни једног корена, то онда $f(x)$ остаје положна за све вредности x-а веће од c. Пошто b' лежи између b и c, то је онда:

$$f(b') < 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} < -\frac{1}{2}q$$

или што је све једно:

$$4.) \qquad -\frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} > \frac{1}{2}q$$

Неједначине 3) и 4) разликују се само знаком десне стране, а ако их подигнемо на квадрат, добићемо једнаке резултате.

Ако је q положно, онда је неједначина 3) увек задовољена, јер је $p < 0$ на основу претпоставке, а неједначину 4) можемо подићи на квадрат, пошто је због $p < 0$ и лева страна положна.

Ако је q одречно, онда је неједначина 4) увек задовољена због $p < 0$, а неједначину 3) можемо подићи на квадрат, јер су обе стране положне.

Дакле и у једном и у другом случају остаје као други услов, који треба да је испуњен, па да корени једначине 1) буду сви стварни:

$$5.) \qquad -\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0,$$

а први је услов $p < 0$. Но пошто неједначина 5) повлачи за собом као нужну последицу овај први услов, то онда смемо казати, да је у неједначини 5) исказан једини услов, који треба да је испуњен, па да сви корени једначине 1) буду стварни.

Примедба. Нека читалац сам помоћу геометријских конструкција учини очигледном Rolle-ову теорему.

XV. Методе за приближно израчунавање ирационалних корена.

Помоћу разних метода, које смо до сад прешли, ми смо у стању за сваки — стварни и ирационални — корен задате једначине изнаћи две границе a и b, којих је разлика колико хоћемо мала. Ми ћемо претпоставити, да та разлика није већа од 0·1. Онда свака од двеју граница може се сматрати као приближна вредност траженога корена, који се између њих налази, до на 0·1.

У будуће ми ћемо се ограничити на израчунавање само положних корена, јер израчунавање одречних корена једначине $f(x) = 0$ своди се на израчунавање положних корена једначине $f(-x) = 0$.

Newton-ова метода.

108. Узмимо да је $f(x)$ цела функција x-а са стварним сачиниоцима. Ако пустимо, да x у тој функцији порасти за h, који број узимамо такође, да је стваран, добићемо:

$$1.)\qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}R,$$

где R представља познату целу и рационалну функцију од x и h (№ 8 обр. 4). Кад погледамо на функцију z-а:

$$2.)\qquad f(x+z) - f(x) - zf'(x) - \frac{z^2}{2}R,$$

видимо, да је она равна нули за $z = 0$, а тако исто на основу једначине 1) још и за $z = h$. На основу Rolle-ове теореме, њен први извод, који се добија, кад је сматрамо само као функцију z-а, мора дакле бити једнак нули за једну вредност $z = h'$, која се налази између $z = 0$ и $z = h$. Али први извод функције под 2), кад ју сматрамо као функцију само z-а, јесте (№ 10).

$$3.)\qquad f'(x+z) - f'(x) - z R.$$

Ова функција, која је такође цела, једнака је нули за $z = 0$ и сем тога као што мало час рекосмо за $z = h'$ Први њен извод, кад је сматрамо као функцију само z-а, мора дакле опет на основу Rolle-ове теореме бити једнак нули за једну вредност $z = h''$, која се налази између $z = 0$ и $z = h'$. Али тај први извод функције 3) јесте:

$$f''(x+z) - R;$$

дакле је на тај начин

$$f''(x+h'') - R = 0,$$

одакле следује:

$$R = f''(x+h'')$$

Овде је h'' број, који се налази између 0 и h, који према томе можемо означити са θh, ако узмемо да је θ број, који се налази између 0 и $+1$. Према томе последњи образац сада изгледа:

$$R = f''(x+\theta h),$$

и једначина 1) претвара се у ову:

$$4.)\qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h),$$

где је као што рекосмо $0 < \theta < +1$.

Образац 4) морали смо извести, пре него што смо приступили излагању Newton-ове методе. Али да читаоцу неби ништа нејасно остало, мислимо да је потребно проговорити још неколико речи о количинама $f'(x+z)$ и $f''(x+z)$, на које смо наишли приликом извођења обрасца 4). Те две количине јесу први и други извод функције $f(x+z)$, кад у тој функцији само z сматрамо као променљиво. Али није тешко увидети, да те две количине јесу први и други извод функције $f(x+z)$ и онда, кад у њој само x сматрамо као променљиво. Јер на основу № 190 алгеб. анал.

$$lim\,\frac{f(x+z+h) - f(x+z)}{h}$$

остаје исти, кад h тежи нули, па сматрали ми x или z као промењиво, то јест сматрали ми h као промену x-а или z-а. То се исто може рећи и за:

$$lim \frac{f'(x+z+h)-f'(x+z)}{h}$$

и т. д. Овим је дакле успут доказана теорема:

Кад се у једној функцији $f(x+z)$ *збир променљивих* x и z јавља као једна промењива, онда први, други, а тако исто и сваки доцнији извод те функције остају исти, па сматрали ми при њиховом извођењу x као промењиво а z као стално, или обратно.

109. Нека је сада x_1 корен алгебарске једначине:

$$1.) \qquad f(x)=0,$$

а a и b нека су границе, којих је разлика највише $= 0{\cdot}1$.

Ако узмемо a као прву приближну вредност траженога корена, а са h означимо *поправку* (коректуру) те прве приближне вредности т. ј. број, који треба додати ка a, па да изађе права вредност траженог корена x_1, онда је:

$$f(a+h)=0.$$

јер је $a+h=x_1$, које је корен једначине 1). Али последња једначина може се и овако написати (№ 108).

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)=0.$$

Одавде добијамо као вредност поправке:

$$2.) \qquad h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2}{2!}\,\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$$

Али ако сад узмемо b као прву приближну вредност траженога корена x_1, и ако означимо са k поправку те приближне вредности, т. ј. број, који треба одузети од b, па да изађе права вредност траженог корена, имаћемо:

$$f(b-k)=0$$

или (№ 108)

$$f(b)-kf'(b)+\frac{k^2}{2!}f''(b-\theta' k)=0,$$

где је θ' положно и мање од један. Из ове једначине добијамо:

$$3.) \qquad k=\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{k^2}{2!}\,\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

Пошто корен x_1 лежи између a и b, којих је разлика на основу претпоставке највише $= 0{\cdot}1$, то су h и k мањи од $0{\cdot}1$, а њихови квадрати мањи од $0{\cdot}01$. Према томе можемо узети, да је приближно тачно:

$$4.) \qquad h=-\frac{f(a)}{f'(a)}, \quad \text{и} \quad k=\frac{f(b)}{f'(b)}$$

Ако узмемо број $a<x_1$ као прву приближну вредност корена x_1, онда први образац под 4) даје њену поправку и то приближно тачну. Друга приближна вредност тада је:

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Тај први образац под 4) даје очевидно поправку и ове друге и сваке доцније приближне вредности. Треба само зарад тога сменути a у том обрасцу са оном приближном вредношћу, којој се тражи поправка.

Тако исто кад пођемо од b као прве приближне вредности, други образац под 4) даје нам њену поправку и тада је друга приближна вредност траженога корена:

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Поправка ове као и сваке доцније приближне вредности добија се, кад се у другом обрасцу под 4) b смени са приближном вредношћу, којој се тражи поправка.

У највише прилика друга и свака доцнија приближна вредност траженога корена тачнија је од оне, коју смо одмах пре ње нашли. Али то не бива увек. И доиста да бисмо полазећи од a или од b, добили тачније вредности траженога корена, треба да су количине:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{и} \quad \frac{f(b)}{f'(b)}$$

обе положне, јер би иначе приближне вредности:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

биле и то прва $a' < a$, а друга $b' > b$ дакле би се од траженог корена више разликовале, него ли a и b. Кад погледамо даље на обрасце 2) и 3) увидећемо, да и количине:

$$-\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}, \quad \frac{k^2}{2!}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

треба да су такође положне, ако хоћемо, да смо са свим извесни, да су a' и b' тачније вредности траженога корена од a и b.

Ми смо горе претпоставили, да је разлика бројева a и b највише $= 0{\cdot}1$. Али ми можемо помоћу познатих нам метода бројеве a и b, између којих лежи тражени корен x_1, изабрати тако, да између њих не лежи ни један корен једначина:

$$5.) \qquad f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0$$

а то ћемо бити увек у стању да учинимо, ако само једначине:

$$f(x) = 0, \ f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0$$

немају заједничких корена. А ово ће последње опет вазда бити, ако задата једначина $f(x) = 0$ нема једнаких корена.

Претпостављајући дакле, да једначине 5) немају између a и b ни једног корена, ми смемо тврдити, да су количници:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}, \ \frac{f(b)}{f'(b)}$$

оба положни. Јер ако је н. пр. $f(a)$ одречна, онда је $f(b)$ положна, дакле функција $f(x)$ при рашћењу x-а од a до b расти и зато је при том први извод $f'(x)$ вазда положан. Дакле је тада количник:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

положан, а тако исто и други:

$$\frac{f(b)}{f'(b)}$$

Ако ли је $f(a)$ положна, онда је $f(b)$ одречна, дакле тада $f(x)$ опада, кад x расти од a до b, и за то $f'(x)$

мора бити све једнако одречна. Јасно је дакле, да су и у овом случају оба поменута количника положни.

Пошто сад по претпоставци нема између a и b ни једног броја, који би поништавао функције $f'(x)$ и $f''(x)$, то онда:

$$f''(a+\theta h) \quad \text{и} \quad f''(b-\theta' k)$$

морају имати исти знак, а тако исто и $f'(a)$ и $f'(b)$. С тога дакле једна од двеју количина:

$$6.) \qquad -\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}, \quad \frac{k^2}{2!}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

мора бити положна.

Према томе, ако само између a и b нема ниједног корена функција $f'(x)$ и $f''(x)$, ми ћемо помоћу једне од поправака под 4) добити за цело тачнију вредност за тражени корен од пређашње.

Ако су $f'(x)$ и $f''(x)$ противно означене за вредности x-а од a до b, онда је први количник под 6) положан а други одречан, дакле тада треба поћи од a као прве приближне вредности, чију поправку налазимо помоћу првог обрасца под 4). Ако ли су $f'(x)$ и $f''(x)$ једнако означене, онда је први количник под 6) одречан, а други положан, дакле тада треба поћи од b, чију поправку даје други образац под 4).

Али кад погледамо на количнике:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{и} \quad \frac{f(b)}{f'(b)},$$

за које смо доказали, да су положни, онда ћемо лако увидети, да кад $f'(a)$ и $f''(a)$ имају противне знаке, да

велим онда $f(a)$ и $f''(a)$ имају једнаке знаке; и да код $f'(b)$ и $f''(b)$ имају исте знаке, да онда $f(b)$ и $f''(b)$ имају такође исте знаке.

Ако сад узмемо добро на ум ово, што сад рекосмо, као и оно у алинеји пре тога, увидећемо, да при тражењу узастопних приближних вредности траженога корена x_1, који лежи између приближних вредности a и b, *треба поћи од a или од b као од прве приближне вредности, како кад за $x = a$ или за $x = b$ функције $f(x)$ и $f''(x)$ имају једнак знак.* У првом случају поправке узастопних приближних вредности налазе се помоћу првог обрасца под 4), а у другом случају помоћу другог обрасца под 4).

Лако је најзад наћи и горњу границу погрешке, коју чинимо, кад се при израчунавању поправке служимо у место образаца под 2) и 3) обрасцима под 4). Кад се служимо првим или другим обрасцем под 4), онда занемарујемо положне количине:

$$-\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)} \quad \text{или} \quad \frac{k^2}{2!}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

и то су дакле погрешке које чинимо, служећи се првим или другим обрасцем под 4) при израчунавању поправке. Ако хоћемо да изнађемо горњу границу погрешке:

$$7.) \qquad -\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$$

без обзира на знак, треба само да заменимо h^2 са $(b-a)^2$ и $f''(a+\theta h)$ са бројно највећом од оних вредности, које $f''(x)$ добија при рашћењу x-а од $x = a$ до $x = b$. На сличан начин налази се без обзира на знак и горња граница погрешке:

$$8.) \qquad \frac{k^2}{2!}\,\frac{f''(b-\theta'k)}{f'(b)}$$

110. Newton-ова метода, коју смо у № 109 објаснили, може се помоћу геометријских конструкција тако рећи очигледном учинити.

Као што нам је већ познато, стварни корени једначине $f(x) = 0$ представљени су апсцисама тачака, у којима линија $y = f(x)$ пресеца апсцисну осу. Ако је сад a приближна вредност корена, онда је $f(a)$ ордината оне линијине тачке, којој је број a апсциса. Кад повучемо дирку линије $y = f(x)$, којој су a и b апсциса и ордината, онда је једначина те дирке:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a).$$

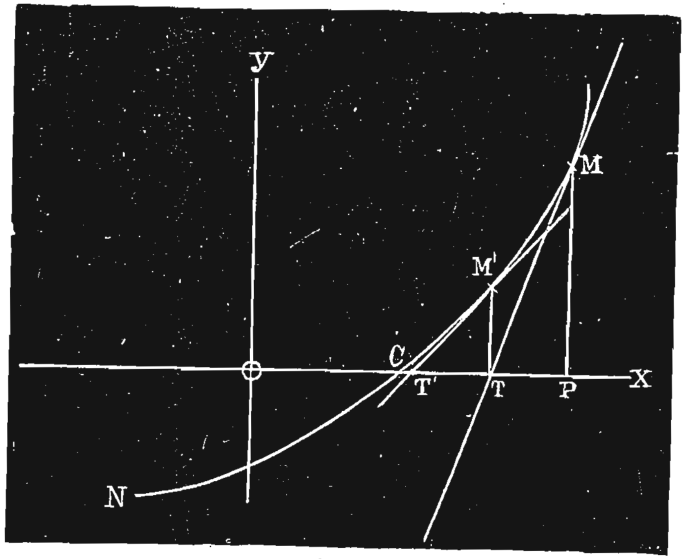
Та дирка пресеца апсцисну осу у тачци, чија је апсциса:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Као што се види, апсциса те тачке јесте друга приближна вредност траженога корена, коју добијамо по Newton-овој методи.

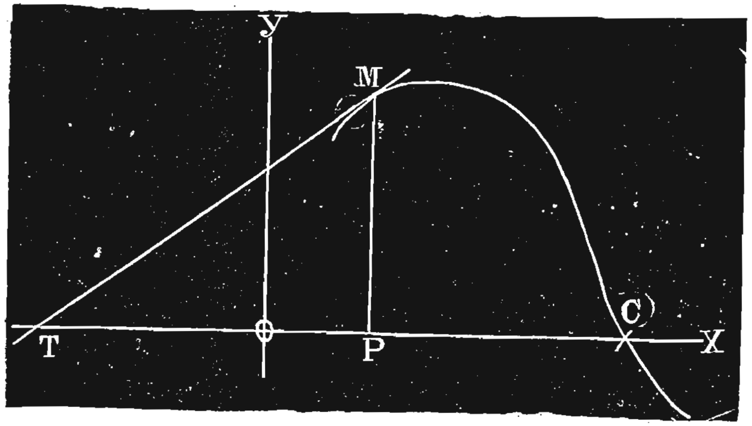
Нека је сад MN линија, којој је $y = f(x)$ једначина, а C непозната тачка, у којој линија пресеца апсцисну осу. OC представља линеарно тражени корен једначине $f(x) = 0$. У тачци M, којој је апсциса $a = OP$, а приближна вредност траженога корена $OC = x_1$, повуцимо дирку. Апсциса тачке T, где дирка пресеца апсцисну осу, јесте још приближнија вредност за $OC = x_1$. Ако поновимо исту конструкцију, т. ј. ако у тачци M', којој је апсциса OT,

повучемо дирку, апсциса тачке T', где та дирка пресеца апсцисну осу, биће још приближнија вредност за OC итд.



Сл. 2.

Из овог геометријског представљаја Newton-ове методе, види се, да у извесним приликама, место да се помоћу



Сл. 3.

те методе приближавамо непознатом корену једначине, ми се од њега удаљавамо. На пр. ако би (сл. 3) једначина представљена геометријски дала оваку линију, онда тачка T, у којој дирка, повучена кроз тачку M, пресеца апсцисну осу, место да је ближа тачци C но што је P, она је од C даља.

У № 109 ми смо показали услове, који треба да су испуњени, па да можемо бити са свим сигурни, да ћемо помоћу Newton-ове методе добијати све тачније вредности непознатог корена x_1, који се налази између граница a и b. Ти су услови:

1°. Између a и b лежи само један корен једначине $f(x) = 0$.

2°. Између a и b не лежи ни један корен једначина $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$.

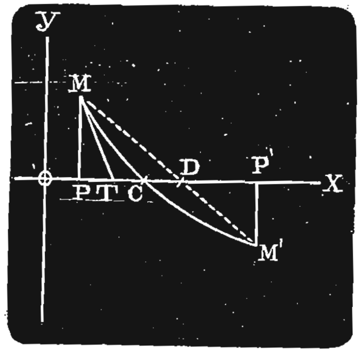
И кад су ови услови испуњени, онда да бисмо могли добијати све тачније вредности за x_1, треба поћи од a или b као прве приближне вредности, како су кад $f(x)$ и $f''(x)$ за $x = a$ или за $x = b$ једнаког знака. Све ово геометријски тумачено значи:

1'. Линија $y = f(x)$ треба да сече само један пут апсцисну осу између својих двеју тачака M и M', којима су a и b апсцисе.

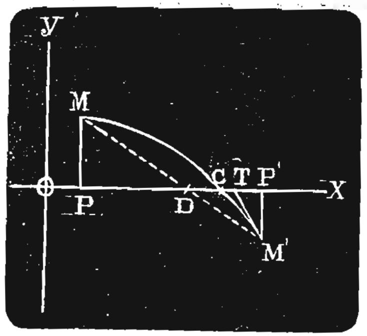
2'. Линија не сме имати између тачака M и M', maximal-них ни minimal-них тачака, т. ј. таквих, да кроз њих повучене дирке иду паралелно са апсцисном осом. Она у поменутом размаку не сме имати ни превоја (point d' inflexion, Beugungspunkt), т. ј. тачака, за које је угаони сачинилац дирке т. ј. $f'(x)$ maximum или minimum.

Према томе линија између M и M' мора изгледати на један од четири начина показана у сликама 4, 5, 6 и 7. Линија то јест мора између тачака M и M' показивати или само испупченост или само издубљеност према одречном смислу ординатне осе.

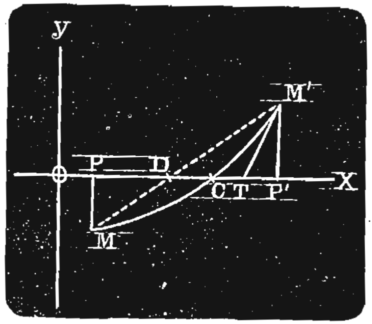
У случају сл. 4 ордината почев од M до M' опада, њен први извод $f'(x)$, т. ј. угаони сачинилац дирке све једнако је одречан и расте. Дакле први извод $f''(x)$ првог извода т. ј. други извод функције $f(x)$ све једнако



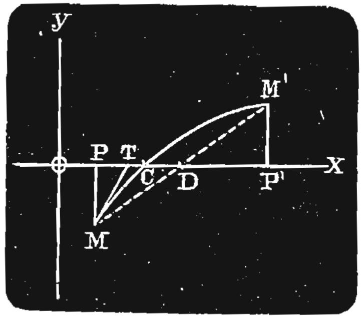
Сл. 4.



Сл. 5.



Сл. 6.



Сл. 7.

је положан. У случају слике 4) $f(a)$ и $f''(a)$ јесу дакле једнако означене и обе положне. Да би дакле тачка T била ближа тачци C него тачка P или P', треба повући дирку кроз M.

На сличан начин увиђа се, да су у случају сл. 5 $f(b)$ и $f''(b)$ једнаког знака, т. ј. обе одречне, и да тада ваља повући дирку кроз тачку M'.

У случају сл. 6 $f(b)$ и $f''(b)$ опет су истог знака, т. ј. обе положне и тада треба повући дирку опет кроз M'.

Најзад у случају слике 7) $f(a)$ и $f''(a)$ једнаког су знака, и тада треба повући дирку кроз M.

Пример. Нека је дата једначина:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0$$

По познатим методама налазимо, да су границе појединих корена: 0 и + 1, 2 и 3, − 5 и − 6. Ми ћемо се најпре бавити са израчунавањем најмањег корена, који се налази између 0 и + 1. Као уже границе налазимо за тај корен 0·3 и 0·4. Сада је:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 17$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Пошто су за $x = 0\cdot 3$ $f(x)$ и $f''(x)$ једнако означене, то ћемо 0·3 узети као прву приближну вредност траженога корена, од које вредности полазимо. Као приближну вредност поправке налазимо по Newton-овој методи:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{0\cdot 197}{14\cdot 93} 0\cdot 01319 \ . \ . \ .$$

Тражимо сада погрешку помоћу обрасца 8) у № 109. Функција $f''(x)$ јесте положна и расте при рашћењу x-а од $x = 0\cdot 3$ до $x = 0\cdot 4$, јер је при том њен први извод $f'''(x)$ све једнако положан. Одатле следује, да је:

$$f''(0\cdot 3 + \theta h) < f''(0\cdot 4)$$

Али је:

$$f''(0\cdot 4) = 8\cdot 4 \ , \qquad f'(0\cdot 3) = -\ 14\cdot 93$$

дакле је учињена погрешка:

$$1.) \qquad \varepsilon < \frac{h^2 \times 8\cdot 4}{2 \times 24\cdot 93} < h^2 \times 3\cdot 4$$

Пошто је $h < 0\cdot 1$, јер тражени корен стоји између 0·3 и 0·4 то је $\varepsilon < 0\cdot 003$. Одатле опет следује, да је за цело $h < 0\cdot 014 + 0\cdot 003 = 0\cdot 017$. Кад заменимо h са 0·017 у неједначини 1) добијамо:

$$\varepsilon < 0\cdot 017^2 \times 0\cdot 3 < 0\cdot 0001.$$

Прва вредност поправке налази се између 0·0131 и 0·0133. Ако узмемо дакле $h = 0\cdot 0132$, онда ће тражени корен бити:

$$x = 0\cdot 3132$$

са погрешком, која је највише $= 0\cdot 0001$.

Други положни корен једначине налази се између 2 и 3. Уже границе истога јесу: 2·6 и 2·7. $f''(x)$ јесте положна од $x = 2\cdot 6$ до $x = 2\cdot 7$ закључно, док је међу тим $f(x)$ одречна за $x = 2\cdot 6$ а положна за $x = 2\cdot 7$. Дакле ћемо ову последњу вредност узети као прву приближну вредност траженога корена, од које полазимо. Као поправку истe налазимо по Newton-овој методи:

$$h = \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{0\cdot 653}{21\cdot 07} = 0\cdot 03099$$

Тражимо сада погрешку, са којом смо израчунали ову поправку. Пошто је први извод функције $f''(x)$ то јест $f'''(x)$ вазда положан при мењању x-а од $x = 2{\cdot}6$ до $x = 2{\cdot}7$, то онда $f''(x)$ непрестано расти, кад x расти од $x = 2{\cdot}6$ до $x = 2{\cdot}7$ и за то је:

$$f''(2{\cdot}7 - \theta' k) < f''(2{\cdot}7)$$

Али је:

$$f''(2{\cdot}7) = 22{\cdot}2\,, \qquad f'(2{\cdot}7) = 21{\cdot}07.$$

Дакле је учињена погрешка:

$$\varepsilon < \frac{k^2 \times 22{\cdot}2}{2 \times 21{\cdot}07} < k^2 \times 0{\cdot}6$$

Пошто је $k < 0{\cdot}1$, то је јасно, да је $\varepsilon < 0{\cdot}006$. Дакле је за цело k мање и од $0{\cdot}031 + 0{\cdot}006 = 0{\cdot}037$ или тим пре $k < 0{\cdot}04$. Замењујући k овом вредношћу мало више налазимо да је:

$$\varepsilon < 0{\cdot}04^2 \times 0{\cdot}6 < 0{\cdot}001$$

Дакле k лежи између $0{\cdot}030$ и $0{\cdot}032$. Ако узмемо $k = 0{\cdot}031$, онда ће тражени корен бити:

$$x = 2{\cdot}669,$$

са погрешком, која је највише $= 0{\cdot}001$.

Примедба. Кад смо један корен једначине $f(x) = 0$ израчунали са m децимала:

$$x = \alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ \ldots\ \alpha_{m-1}\alpha_m$$

лако је дознати на начин који иде, да ли је погрешка мања од једне јединице на m-ном десетном месту т. ј.

да ли је мања од $\frac{1}{10^m}$. Ми ћемо т. ј. заменити у $f(x)$ x редом са:

$$\alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ \ldots\ \alpha_{m-1}(a_m - 1)$$

$$\alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ \ldots\ \alpha_{m-1}\alpha_m$$

$$\alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ \ldots\ \alpha_{m-1}(\alpha_m + 1)$$

и пазићемо на знаке, које $f(x)$ добија. Ако $f(x)$ добија за прве две вредности x-а противно означене вредности, онда се корен налази између њих. Ако ли $f(x)$ добија противно означене вредности за последње две од горњих вредности x-а, онда ће се корен налазити између њих. Наступио сад један или други од та два случаја, број

$$\alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ \ldots\ \alpha_{m-1}\alpha_m$$

разликоваће се од праве вредности траженога корена за мање од $\frac{1}{10^m}$. Али ако су у оба та случаја резултати замена истога знака, онда разлика између $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m$ и праве вредности траженога корена јесте већа од $\frac{1}{10^m}$. Тада ћемо дакле према потреби појачати или ослабити у $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m$ последњу децималу α_m са једном или више јединица, док не добијемо такве бројеве, који дају резултате са противним знаком.

На тај начин радећи налазимо, да први корен у примеру № 110 лежи између $0{\cdot}3132$ и $0{\cdot}3133$.

Regula falsi.

111. Ову методу треба претпоставити Newton-овој у оним случајевима, кад је у близини траженога корена:

$$f'(x) = 0 \quad \text{или} \quad f''(x) = 0$$

Ево у чему се састоји та метода. Кад променљива x, од које зависи буди каква функција — алгебарска или трансцендентна, — добија редом вредности од $x = a$ до $x = b$, а размак је бројева a и b врло мали, онда се може без осетне погрешке узети, да су промене функције сразмерне одговарајућим променама x-а. Ето то је принцип, на коме се оснива ова метода, а на коме се, што није тешко увидети, оснива и Newton-ова метода.

Ако је сада $h < b - a$, онда је на основу поменутог принципа:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

одакле, кад узмемо да је $x = a + h$ корен једначине $f(x) = 0$, следује:

$$1.) \qquad h = -\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

дакле је приближна вредност траженога корена

$$2.) \quad x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = a + \frac{(b-a)f(a)}{f(a) - f(b)}$$

која се једначина може и овако написати:

$$3.) \quad x_1 = b + \frac{(b-a)f(b)}{f(a) - f(b)} = b - \frac{(b-a)f(b)}{f(b) - f(a)}$$

Помоћу ових образаца налази се из двеју приближних вредности непознатог корена још тачнија вредност истога. Ако је та нова приближна вредност c, онда из ње и једне од пређашњих a или b, а помоћу ових образаца налази се још тачнија вредност корена и т. д. Само ваља знати, који је од два броја a и b згодније узети при тражењу друге приближне вредности корена. Очевидно ону, која се од траженог корена мање разликује, дакле a или b, како је кад $f(a) < f(b)$ или обратно.

До обрасца 2), у коме је исказана метода Regula falsi, као и у обрасцу 3), који из обрасца 2) следује, можемо доћи и помоћу геометрије. Јер ако погледамо на слике 4), 5), 6) и 7) у № 110, у којима нам $OC = x_1$ представља непознати корен, онда је лако увидети, да нам ова метода даје OD као приближну вредност корена OC, она дакле смењује лук MCM' правом MM'. Сад једначина праве MM' јесте:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Ако у овој једначини ставимо $y = 0$, да бисмо добили OD, наћићемо после тога:

$$x = OD = a - \frac{(b-a)\;f(a)}{f(b) - f(a)}$$

дакле исти образац 1).

Кад $f'(x)$ и $f''(x)$ нису $= 0$ ни за једну вредност од $x = a$ до $x = b$, као што смо то ми код Newton-ове методе претпоставили, дакле кад линија $y = f(x)$ у своме току од $x=a$ до $x=b$ нема ни максималних ни минималних тачака нити пак превоја, онда тачка C, у којој линија пресеца апсцисну осу, лежи увек између тачке D, у којој права MM' пресеца апсцисну осу, и тачке T, у којој ју пресеца дирка повучена према упутству Newton-ове методе кроз тачку M или M'. Одатле сад следује, да ако је приближна вредност, нађена помоћу Newton-ове методе, мања од траженог корена, онда она, која је нађена помоћу ове методе, мора бити већа од њега и обратно.

Применом обеју метода и Newton-ове и Regula falsi код једног и истог примера ослобођавамо се израчунавања погрешке, пошто тада увек знамо, на колику тачност можемо рачунати.

Примедба. Нека читалац помоћу слика 4), 5), 6) и 7) у № 110 просто геометријски изведе обрасце 2) и 3) у овој №-и.

Пример. Нека је дата једначина:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0$$

Сви корени ове једначине јесу стварни. Границе њине јесу: — 1 и — 2, — 1 и 0, 1 и 2 и 5 и 6. Ми ћемо да израчунамо онај корен, који се налази између 5 и 6. Тешње границе тога корена јесу 5·7 и 5·8. Помоћу Newton-ове методе добијамо:

$$x = 5{\cdot}8 - 0{\cdot}0506 = 5{\cdot}7494$$

резултат, који је већи од траженога корена. Помоћу методе Regula falsi и то по обрасцу 1) ове №-е добијамо међутим:

$$h = -\frac{0{\cdot}1 \times 9{\cdot}2949}{19{\cdot}9045} = -0{\cdot}0466$$

јер је: $f(5{\cdot}7) = -9{\cdot}2949$, $f(5{\cdot}8) = 10{\cdot}6096$, дакле по обрасцу 2) ове №-е:

$$x = 5{\cdot}7466$$

резултат, који је мањи од траженог корена. Ми ћемо узети да је:

$$x = 5{\cdot}748$$

са погрешком до на 0·002.

Лагранжова метода.

112. По тој методи добија се тражени корен у облику простог верижног разломка, т. ј. таквог, коме су делимични бројиоци положне јединице а делимични имениоци стварни цели и положни бројеви. Ми ћемо овде опет показати само, како се по овој методи израчунавају положни корени, јер израчунавање одречних корена своди се на израчунавање положних корена једначине $f(-x)=0$.

Претпоставимо да се између a и $a+1$ налази само један корен једначине:

1.) $$f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Кад овде ставимо:

$$x = a + \frac{1}{z_1}$$

онда, као што је познато, корени нове једначине биће реципрочне вредности корена оне једначине, чији су корени за a мањи од корена дате једначине. Једначина, која се после поменуте замене добија, биће:

$$2.)\quad \varphi(z_1) = f(a)\, z_1^m + f'(a)\, z_1^{m-1} + f''(a)\, z_1^{m-2} + \dots \\ + f^{m-1}(a)\, z_1 + f^m(a) = 0.$$

Пошто на основу претпоставке једначина 1) има само један корен између a и $a+1$, то онда једначина 2) може имати само један стваран и положан корен, *који је већи од јединице,* јер у противном случају једначина 1) имала би више корена између a и $a+1$, а то нисмо претпоставили.

Ако сад тај корен једначине 2) лежи између b и $b+1$, онда ћемо ставити у једначини 2):

$$z_1 = b + \frac{1}{z_2}$$

и нова једначина биће:

$$2.)\quad \psi(z_2) = \varphi(b)\, z_2^m + \varphi'(b)\, z_2^{m-1} + \varphi''(b)\, z_2^{m-2} + \dots \\ + \varphi^{m-1}(b)\, z_2 + \varphi^m(b) = 0,$$

о којој се као мало час доказује, да мора имати један и то само један стваран и положан корен, који је већи од јединице. Ако се тај корен налази између c и $c+1$, ставићемо у једначину 3)

$$z_2 = c + \frac{1}{z_3}$$

и нова једначина биће:

$$4.)\quad \chi(z_3) = \psi(c)\, z_3^m + \psi'(c)\, z_3^{m-1} + \psi''(c)\, z_3^{m-2} + \dots \\ + \psi^{m-1}(c)\, z_3 + \psi^m(c) = 0,$$

која опет има само један корен, који је већи од јединице. И овако можемо наставити, докле нам је воља. Пошто смо n пута овако радили, као што је показано, наћи ћемо:

$$5.)\quad x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots + \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{z_{n+1}}}}}}$$

Овде су $a, b, c, d \dots l$ познати цели и положни бројеви. Пошто је за x добивени верижни разломак збирљив и сви су делимични бројиоци и имениоци положни, то се на основу № 142 и № 146 у алгебарској анализи права вредност непознате x налази између приближних разломака:

$$\frac{Z_{0,n-1}}{N_{0,n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{Z_{0,n}}{N_{0,n}}$$

Што је n веће, тим ће тачније вредност x-а бити израчуната. Но не треба прећутати, да је ова лагранжова метода, и ако у теорији врло проста, у применама врло заметна, и то нарочито у послу израчунавања делимичних именилаца. Међу тим је Лагранж гледао ту тешкоћу да уклони, но ми нећемо у то овде улазити (види I. A. Serret Algèbre supérieure T. I. p. 353).

Пример. Дата је једначина:

1') $f(x) = x^3 - 5x - 3 = 0$

Границе њених корена јесу 2 и 3, 0 и — 1, и —2 и — 1. Тражимо корен, што је између 2 и 3. Сада је $a = 2$ и да бисмо нашли сачиниоце једначине 2) т. ј. $\varphi(z_1) = 0$, ми ћемо радити по Budan-у (№ 17):

$$x^3 - 5x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 2] & 1, & 2, & -1 & \underline{\lvert -5} \\ & 1, & 4, & \underline{\lvert 7} & \\ & 1, & \underline{\lvert 6} & & \\ & \underline{\lvert 1} & & & \end{array}$$

Дакле је сад горња једначина 2):

$$\varphi(z_1) = -5z_1^3 + 7z_1^2 + 6z_1 + 1 = 0$$

или

2') $\varphi_1(z_1) = 5z_1^3 - 7z_1^2 - 6z_1 - 1 = 0$

Ова једначина има само једну мену, дакле може имати највише један положан корен, и тај, као што смо горе видели, она мора имати. Тај корен, за који такође знамо, да мора бити > 1, налази се између 2 и 3. Дакле је $b = 2$ сада, и да бисмо нашли сачиниоце једначине 3) т. ј. $\psi(z_2) = 0$, ми ћемо опет радити по Budan-у.

$$5z_1^3 - 7z_1^2 - 6z_1 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 2] & 5 & 3 & 0 & \underline{\lvert -1} \\ & 5 & 13 & \underline{\lvert 26} & \\ & 5 & \underline{\lvert 23} & & \\ & \underline{\lvert 5} & & & \end{array}$$

Дакле је горња једначина 3) сада:

3') $\psi(z_2) = z_2^3 - 26z_2^2 - 23z_2 - 5 = 0$

И ова једначина има само једну мену, дакле она може имати само један положан корен, а тај, као што смо видели, мора бити > 1. Он лежи између 26 и 27. Сада је $c = 26$

$$z_2^3 - 26z_2^2 - 23z_2 - 5 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 26] & 1 & 0 & -23 & \underline{\lvert -603} \\ & 1 & 26 & \underline{\lvert +653} & \\ & 1 & \underline{\lvert 52} & & \\ & \underline{\lvert 1} & & & \end{array}$$

Дакле је сада:

4') $\chi(z_3) = 603z_3^3 - 653z_3^2 - 52z_3 - 1 = 0.$

Јединцати положни корен ове једначине налази се између 1 и 2. Дакле је сада $d = 1$. Дакле:

$$603z_3^3 - 653z_3^2 - 52z_3 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 1] & 603 & -50 & -102 & -\underline{103} \\ & 603 & 553 & \underline{451} & \\ & 603 & \underline{1156} & & \\ & \underline{603} & & & \end{array}$$

Дакле је сада:

5') $\mu(z_4) = 103z_4^3 - 451z_4^2 - 1156z_4 - 603 = 0.$

Једини положни корен ове једначине налази се између 6 и 7. Сада је $e = 6$. Дакле:

$$103z_4^3 - 451z_4^2 - 1156z_4 - 603 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 6] & 103 & 167 & -154 & -\underline{1527} \\ & 103 & 785 & \underline{4556} & \\ & 103 & \underline{1403} & & \\ & \underline{103} & & & \end{array}$$

Дакле је сада:

6') $\nu(z_5) = 1527z_5^3 - 4556z_5^2 - 1403z_5 - 103 = 0$

Једини положни корен ове једначине лежи између 2 и 3. Сада је $f = 3$. Дакле је и т. д.

И тако сад добијамо:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Помоћу последњих образаца на стр. 413 алг. анал. са свим је лако доказати, да је разлика између праве вредности верижног разломка и његовог m-ног приближног разломка мања од јединице подељене са квадратом имениоца m-ног приближног разломка.

Узастопни приближни разломци горњег верижног разломка јесу:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{132}{53},\ \frac{137}{55},\ \frac{954}{383},\ \frac{2999}{1204}$$

Они који стоје на непарним местима јесу мањи, а они на парним већи од праве вредности верижног разломка. Кад последњи приближни разломак претворимо у десетни и узмемо га као вредност траженога корена, добићемо:

$$x = 2{\cdot}49086378.$$

При том је према горњем погрешка мања него

$$\frac{1}{1204^2} = 0{\cdot}0000007$$

Horner-ова метода.

113. Узмимо нека је:

1.) $$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

задата једначина. Ако сад из ове једначине изведемо другу, чији су корени за α мањи од корена једначине 1), и при том α изаберемо тако, да се последњи члан нове једначине:

2.) $$f^m(\alpha)y^m + f^{m-1}(\alpha)\,y^{m-1} + \dots + f'(\alpha)\,y + f(\alpha) = 0$$

може као врло мали занемарити, то се онда може приближно тачно нула узети као корен једначине 2) и по томе α као корен једначине 1). На овој простој примедби оснива се Horner-ова метода, која се може сматрати као усавршена Newton-ова метода.

Узмимо нека је:

3.) $$x = \alpha_0;\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots$$

тражени корен једначине 1). α_0 јесте цео број, а α_1, α_2, α_3 . . . јесу цифре, које стоје на првом, другом, трећем и т. д. десетном месту. Број $x = \alpha_0;\alpha_1$ јесте приближна вредност тога корена или мања од оних двеју за 0·1 разликујућих се граница, између којих се тражени корен 3) налази. Једначина, чији су корени за $\alpha_0;\alpha_1$ мањи од корена задате једначине, јесте:

4.) $$v_0x^m + v_1x^{m-1} + v_2x^{m-2} + \dots + v_{m-2}x^2 + v_{m-1}x + v_m = 0$$

где узастопна слова v стоје само краткоће ради место количина:

$$f^m(\alpha_0;\alpha_1),\ f^{m-1}(\alpha_0;\alpha_1)\ \dots\ f''(\alpha_0;\alpha_1),\ f'(\alpha_0;\alpha_1),\ f(\alpha_0;\alpha_1),$$

то јест место вредности, које изводи — алгебарски — функције $f(x)$ и она сама добијају за $x = \alpha_0;\alpha_1$

Једначина 4) има само један корен

5.) $$x = 0{\cdot}0\,\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots .$$

који је $< 0{\cdot}1$, јер ми претпостављамо, да се између бројева $\alpha_0;\alpha_1$ и $\alpha_0;(\alpha_1 + 1)$ налази само један корен једначине 1). Пошто је дакле корен 5) у једначини 4) мањи од 0·1, то ћемо приближну вредност истога $0{\cdot}0\alpha_2$ наћи, кад у једначини 4) занемаримо све чланове са степенима x-а који су виши од првог, дакле кад узмемо, да је:

$$v_{m-1}x + v_m = 0.$$

Одатле следује:

6.) $$x = -\frac{v_m}{v_{m-1}}.$$

Дакле на тај начин друга децимала траженога корена једначине 1), или општије, прва од нуле различна децимала тога корена, која после α_1 долази, добија се, кад се последњи сачинилац једначине 4) подели са предпоследњим, и у количнику тражи само прва од нуле различна цифра.

Нека је сад даље:

7.) $$v_0^1x^m + v_1^1x^{m-1} + \dots + v_{m-1}^1x + v_m^1 = 0$$

једначина, чији су корени за $0{\cdot}0\alpha_2$ мањи од корена једначине 4), дакле за $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2$ мањи од корена једначине 1). Једначина 7) има само један корен $x = 0{\cdot}00\alpha_3\alpha_4 \ldots.$ који је $< 0{\cdot}01$, и који се опет приближно тачно израчунава из једначине:

$$v^1_{m-1}\, x + v^1_m = 0$$

одакле следује:

$$8.)\qquad x = 0{\cdot}00\alpha_3 = -\frac{v^1_m}{v^1_{m-1}}$$

Трећа или још општије прва од нуле различна децимала траженога корена, која после α_r долази, добија се дакле опет, кад се последњи сачинилац једначине 7) подели са предпоследњим.

Нека је даље:

$$9.)\quad v''_0 x^m + v''_1 x^{m-1} + \ldots + v''_{m-1}\, x + v''_m = 0$$

једначина, чији су корени за $0{\cdot}00\alpha_3$ мањи од корена једначине 7). Једначина има само један корен: $x = 0{\cdot}000\alpha_4\alpha_5\ldots$ који је $< 0{\cdot}001$ и који се израчунава из једначине:

$$v''_{m-1}\, x + v''_m = 0$$

из које следује:

$$10.)\qquad x = 0{\cdot}000\alpha_4 = -\frac{v''_m}{v''_{m-1}}$$

И на овај начин ваља посао наставити дотле, докле за тражени корен нисмо добили онолики број десетних места, колико се тражило. Цела радња, особито ако при израчунавању количина v будемо радили по Budan-овој

методи № 18, јесте лака и проста. Последњи, од x-а независни, чланови нових једначина јесу из лако појмљивих узрока све мањи и мањи, и они се имају увек израчунавати са онолико децимала, колико их се у корену траже или највише са једном више. Поменути последњи чланови почев од v_m па на даље увек су међу собом једнако означени за то, што права вредност непознатог корена лежи увек с једне и исте стране узастопних приближних вредности:

$$\alpha_0;\alpha_1,\ \alpha_0;\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_0;\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \text{ и т. д.}$$

то јест она је већа од свију тих приближних вредности. Међу тим последњи члан v_m прве једначине, која после задате долази, има са a_m исти знак или не, како се кад између 0 и $\alpha_0;\alpha_1$ налази паран или непаран број корена, где се и нула узимље као паран број.

Што се тиче тачности, са којом се узастопне децимале α_2, α_3, α_4 . . . траженога корена добијају из:

$$-\frac{v_m}{v_{m-1}},\ -\frac{v'_m}{v'_{m-1}},\ -\frac{v''_m}{v''_{m-1}},\ \ldots\ldots$$

ваља приметити, да се, особито у почетку рада, може десити, да понека од тих децимала испадне већа или мања него што треба. Али ако је то случај, онда ће се то одмах у следећој једначини показати. Тако н. пр. ако је:

$$-\frac{v_m}{v_{m-1}} = 0{\cdot}0\alpha_2$$

испало мање, него што треба, то онда, кад из следеће једначине тражимо:

$$-\frac{v'_m}{v'_{m-1}} = 0{\cdot}00\alpha_3,$$

наћићемо, да је $\alpha_3 > 9$, а то несме бити. Ми ћемо дакле тада α_2 са јединицом повисити, и радњу поновити. Ако ли би пак α_2 испало веће него што треба, онда би последњи члан следеће једначине добио противни знак, јер би се тада тражени корен налазио између бројева $\alpha_0;\alpha_1$ и $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2$, а међу тим знамо, да је:

$$v_m = f(\alpha_0;\alpha_1) \quad \text{и} \quad v'_m = f(\alpha_0;\alpha_1\alpha_2)$$

Исто је тако лако увидети, да последња два члана сваке од нових једначина морају бити противнога знака, чиме се објашњава одречни знак у обрасцима 6), 8) и 10). Јер пошто последњи члан у узастопним новим једначинама бројно опада, то онда полином $f(x)$ у близини од

$$x = \alpha_0;\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \;.\;.\;.$$

расти или опада, како је кад последњи члан нових једначина одречан или положан. У првом случају мора дакле сачинилац претпоследњег члана, као први извод функције $f(x)$, бити за ту вредност x-а као и за приближне $\alpha_0;\alpha_1$, $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ и т. д. положан, а у другом одречан.

Пре него што пређемо на примере, поновићемо горњу примедбу, да се последњи од x-а независни чланови имају са онолико децимала израчунавати, са колико се децимала тражи непознати корен. Што се тиче сачинилаца осталих чланова у појединим једначинама, које после задате долазе у њима се задржавају увек само онолико децимала, колико их утиче на последњу децималу последњега члана.

Пример. Дата је једначина:

$$1') \qquad f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Границе њених корена јесу: 0 и + 1, 4 и 5, — 1 и — 2.

1°. Тражимо најпре први корен, коме су 0·8 и 0·9 уже границе, са девет децимала. Приближна вредност тога корена до на 0·1 јесте:

$$x = 0{\cdot}8 = \alpha_0;\alpha_1$$

Тражимо једначину, чији су корени за 0·8 мањи.

	1,	— 4,	— 2,	+ 4
0·8]	1,	— 3·2	— 4·56	0·352
	1,	— 2·4	— 6·48	
	1,	— 1·6		
	1			

Нова једначина јесте дакле:

$$2') \qquad x^3 - 1{\cdot}6x^2 - 6{\cdot}48x + 0{\cdot}352 = 0$$

Из ње добијамо:

$$0{\cdot}0\alpha_2 = \frac{0{\cdot}352}{6{\cdot}48} = 0{\cdot}05$$

Дакле је сада $x = 0{\cdot}85$. Тражимо сада једначину, чији су корени за 0·05 мањи од корена једначине 2').

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & -1{\cdot}6, & -6{\cdot}48, & 0{\cdot}352 \\
0{\cdot}05] & 1, & -1{\cdot}55, & -6{\cdot}5575, & \underline{0{\cdot}024125} \\
 & 1, & -1{\cdot}50, & \underline{-6{\cdot}6325} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}45} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена једначина јесте:

3') $x^3 - 1{\cdot}45x^2 - 6{\cdot}6325x + 0{\cdot}024125 = 0$

Из ње добијамо:

$$0{\cdot}00\alpha_3 = \frac{0{\cdot}0241}{6{\cdot}63} = 0{\cdot}003$$

и тако је сада $x = 0{\cdot}853$. Тражимо сада једначину, чији су корени од корена једначине 3') за 0·003 мањи

$$\begin{array}{lllll}
 & +1, & -1{\cdot}45, & -6{\cdot}6325, & +0{\cdot}024125 \\
0{\cdot}003] & 1, & -1{\cdot}447, & -6{\cdot}636841, & \underline{0{\cdot}00421447} \\
 & 1, & -1{\cdot}444, & \underline{-6{\cdot}641173,} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}441} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена једначина:

4') $x^3 - 1{\cdot}441x^2 - 6{\cdot}641173x + 0{\cdot}004214477 = 0$

даје четврту децималу корена:

$$0{\cdot}000\alpha_4 = \frac{0{\cdot}0042}{6{\cdot}64} = 0{\cdot}0006$$

дакле је сада $x = 0{\cdot}8536$. Тражимо сада из 4') једначину, чији су корени за 0·0006 мањи.

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & -1{\cdot}441, & -6{\cdot}641173, & 0{\cdot}004214477 \\
0{\cdot}\overset{3}{0}6 & 1, & -1{\cdot}441, & -6{\cdot}642038, & \underline{0{\cdot}000229254} \\
 & 1, & -1{\cdot}44, & \underline{-6{\cdot}64290} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}44} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена је једначина:

5') $x^3 - 1{\cdot}4x^2 - 6{\cdot}64290x + 0{\cdot}000229254 = 0$

из које добијамо пету децималу:

$$0{\cdot}0000\alpha_5 = \frac{0{\cdot}000229\ldots}{6{\cdot}64\ldots} = 0{\cdot}00003$$

Дакле је сада $x = 0{\cdot}85363$.

У једначини 5') занемарили смо, и то у другом и трећем сачиниоцу, децимале. Јер пошто последњи члан треба да има девет тачних децимала, а број, са којима се сада имају смањити корени једначине 5'), јесте 0·00003, дакле он сам већ има пет децимала, то предпоследњи сачинилац треба да има 9 — 5 = 4 децимале и једну зарад поправке дакле свега пет. Други пак треба да има $5 - 5 + 1 = 1$ децималу. Тражимо сада једначину, чији су корени за 0·00003 мањи од корена једначине 5')

$$\begin{array}{rllll}
 & 1, & -1{\cdot}4, & -6{\cdot}64290, & +0{\cdot}000229254 \\
0{\cdot}0\overset{4}{3}] & 1, & -1{\cdot}4, & -6{\cdot}64294, & \underline{0{\cdot}000029966} \\
 & 1, & -1{\cdot}4, & -\underline{6{\cdot}6430,} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}4} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена једначина јесте:

$$6') \quad x^3 - 1{\cdot}4x^2 - 6{\cdot}6430x + 0{\cdot}000029966 = 0$$

Пошто број, за који ће се корени ове једначине морати смањити, има 6 децимала, то би ваљало у предпоследњем сачиниоцу задржати само четири децимале, што је и учињено, а у оном пред њим $4 - 6 + 1 = -1$, одакле следује, да нам ни јединице тога сачиниоца не требају. Одатле следује, да се претпоследњи сачинилац у доцнијим једначинама неће мењати и према томе тражење последњих децимала непознатог корена своди се на деобу.

$$0{\cdot}000029966 : 6{\cdot}643 = 0{\cdot}000004511$$

$$\begin{array}{r}
3394 \\
73 \\
7
\end{array}$$

Тражени корен тачан до на девет десетних места јесте: $x = 0{\cdot}853634511$.

2°. Тражимо сада други положан корен, који се налази између 4 и 5. Кад као овде корен има и цели део уза се, онда није нужно тражити му уже границе, то ће рећи, тражити и његове десетне делове, јер се ови помоћу Horner-ове методе барем врло приближно налазе. При тражењу тога корена бићемо у писању мало краћи.

$$\begin{array}{rllll}
 & 1, & -4, & -2, & +4 \\
4] & 1, & 0 & -2 & \underline{-4}\ ^{1)} \\
 & 1, & 4, & \underline{14} & \\
 & 1, & \underline{8} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlllll}
 & 1, & 8, & 14, & -4; & 4 : 14 = 0{\cdot}2 \\
0{\cdot}2] & 1, & 8{\cdot}2, & 15{\cdot}64 & \underline{-0{\cdot}872} & \\
 & 1, & 8{\cdot}4, & \underline{17{\cdot}32} & & \\
 & 1, & \underline{8{\cdot}6} & & & \\
 & \underline{1} & & & &
\end{array}$$

---

[1] Ова мена долази отуда, што је прескочен корен 0·8, који се налази између 0 и + 4.

1, 8·6, 17·32, — 0·872,

0·872 : 17 = 0·04

0·04] 1, 8·64, 17·6656, $\underline{—\ 0·165376}$

1, 8·68 $\underline{18·0128}$

1, $\underline{8·72}$

$\underline{1}$

1, 8.72, 18·0128, — 0·165376:

0·165 : 18 = 0·009

$0·\overset{2}{0}9]$ 1, 8·729, 18·091361, $\underline{—\ 0·002553751}$

1, 8·738, $\underline{18·170003}$

1, $\underline{8·747}$

$\underline{1}$

1, 8·747, 18·170003, — 0·002553751;

0·00255 : 18 = 0·0001

$0·\overset{3}{0}1]$ 1, 8·747, 18·170878, $\underline{—\ 0·000736662}$

1, 8·747, $\underline{18·17175}$

1, $\underline{8·747}$

$\underline{1}$

---

1. 8·747, 18·17175, — 0·000736662;

0·000736 : 18 = 0·00004

1, 8·7, 18·17210, — 0·000009778

— — 18·17175

Остале децимале корена тражићемо путем деобе, дакле:

0·000009778 : 18·17 = 0·000000538

Дакле је тражени корен, израчунат са 9 децимала:

$$x = 4·249140538$$

3°. Трећи, одречан корен, који се налази између — 1 и — 2 израчунаћемо помоћу једначине:

1''). $f(-x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$

1, 4, — 2, — 4,

1.] 1, 5, 3 — 1,

1, 6, 9,

1, 7,

1,

$1,\quad 7,\quad 9,\quad -1;$

$1 : 9 = 0\cdot1$

$0\cdot1]\quad 1,\quad 7\cdot1\quad 9\cdot71\quad \underline{-0\cdot029}$

$1,\quad 7\cdot2\quad \underline{10\cdot43}$

$1,\quad \underline{7\cdot3}$

$\underline{1}$

$1,\quad 7\cdot3\quad 10\cdot43,\quad -0\cdot029:$

$0\cdot029 : 10 = 0\cdot002$

$0\cdot\overset{2}{0}2]\quad 1,\quad 7\cdot302,\quad 10\cdot444604,\quad \underline{-0\cdot008110792}$

$1,\quad 7\cdot304,\quad \underline{10\cdot459212}$

$1,\quad \underline{7\cdot306}$

$\underline{1}$

$1,\quad 7\cdot306,\quad 10\cdot459212,\quad -0\cdot0008110792$

$0\cdot0081 : 10\cdot4 = 0\cdot0007$

$0\cdot\overset{3}{0}7]\quad 1,\quad 7\cdot307,\quad 10\cdot464327,\quad \underline{-0\cdot000785763}$

$1,\quad 7\cdot31,\quad \underline{10\cdot46944}$

$1,\quad \underline{7\cdot31}$

$\underline{1}$

$1,\quad 7\cdot31,\quad 10\cdot46944,\quad -0\cdot000785763$

$0\cdot00078 : 10 = 0\cdot00007$

$0\cdot\overset{4}{0}7]\quad 1,\quad 7\cdot31,\quad 10\cdot46995,\quad \underline{-0\cdot000052867}$

$1,\quad 7\cdot31,\quad \underline{10\cdot4705}$

$1,\quad \underline{7\cdot31}$

$\underline{1}$

Доцније децимале корена добијају се помоћу деобе:

$0\cdot000052867 : 10\cdot4705 = 0\cdot000005049$

5145

957

Дакле је корен једначине 1") : $x = 1\cdot102775049$ и по томе корен једначине 1') : $x = -1\cdot102775049$

Примедба. Ми смо при објашњавању Horner-ове методе претпоставили, да је тражени корен од свију осталих одвојен т. ј. да су му нађене две границе, између којих се само он налази. А то, као што знамо можемо увек постићи.

Израчунавање једнаких и наблизу једнаких корена.

114. Кад дана једначина има једнаких корена, онда, као што знамо, можемо увек извести из ове једначину, која има за корене оне корене дате једначине, који се у њој јављају само по један пут, само по два пут, или само по три пут и т. д. И онда те нове једначине мо-

жемо решавати по методама, које смо прешли у ово неколико досадањих №-а. Али ако би дана једначина имала и једнаких корена, па би се захтевало, да се они из ње непосредно израчунају, онда је лако увидети, да се при том Newton-ова и Horner-ова метода не могу просто применити. Јер код тих двеју метода израчунава се поправка приближне вредности траженога корена x_1 помоћу количника:

$$1.)\qquad -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

кад се у њему x замени том приближном вредношћу. Ако сад тражени корен није прост, већ даној једначини припада два или више пута као корен, онда је $f(x_1) = 0$ и $f'(x_1) = 0$. Дакле ће за узастопне приближне вредности траженога корена и бројилац и именилац тежити све више и више и више нули, и по томе тај разломак неће нам моћи дати ту поправку.

Што се тиче методе Regula falsi и она нас при том издаје, јер није тешко доказати, да би, ако се тражени корен јавља k-пута као корен једначине, требало решити једначину k-ог степена. И доиста, ако је x_1 тражени корен, а a и b две приближне вредности његове, између којих се он не мора налазити, и ако су h_1 и h_2 поправке тих приближних вредности, тако, да је:

$$x_1 = a + h, \quad x_1 = b + h_2$$

онда је:

$$1.)\quad \begin{cases} f(a) = f(x_1 - h_1) = f(x_1) - h_1 f'(x_1) + h_1^2 f''(x_1) - \dots \\ \qquad\qquad + h_1^m f^m(x_1), \\ f(b) = f(x_1 - h_2) = f(x_1) - h_2 f'(x_1) + h_2^2 f''(x_1) - \dots \\ \qquad\qquad + h_2^m f^m(x_1) \end{cases}$$

Пошто су h_1 и h_2 врло мали бројеви, то можемо узети, да је приближно тачно:

$$2.)\quad f(a) = -h_1 f'(x_1), \quad f(b) = -h_2 f'(x_1),$$

где је $f(x_1) = 0$ за то, што је x_1 корен задате једначине $f(x) = 0$. Из 2) добијамо деобом:

$$3.)\qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{h_1}{h_2}$$

или пошто је: $h_1 = x_1 - a$, $h_2 = x_1 - b$:

$$4.)\qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{x_1 - a}{x_1 - b}$$

одакле следују са свим лако обрасци 2) и 3) у № 111.

Али ако је x_1 k-пута корен задатој једначини, онда је:

$$f(x_1) = 0, \; f'(x_1) = 0, \; f''(x_1) = 0 \; . \; . \; . \; f^{k-1}(x_1) = 0,$$

дакле се онда из 1) место обрасца 3) добија:

$$5.)\qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{h_1^k}{h_2^k} \quad \text{или} \quad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{(x_1 - a)^k}{(x_1 - b)^k}$$

и да бисмо одавде израчунали x_1, треба решити једначину k-тог степена.

Међу тим може се и Horner-ова метода са незнатном изменом исте применити и у овом случају.

115. Узмимо нека је $x = a + h$ корен датој једначини:

$$1.)\qquad f(x) = 0$$

више од један пут, где под a разумевамо приближну вредност тога корена, а под h поправку њену. Кад у 1) ставимо $x = a + h$, добићемо:

$$2.)\qquad \varphi(h) = v_0h^m + v_1h^{m-1} + \dots\dots$$
$$+ v_{m-4}h^4 + v_{m-3}h^3 + v_{m-2}h^2 + v_{m-1}h + v_m = 0.$$

одакле видимо, да је поправка h корен једначине:

$$3.)\qquad \varphi(z) = v_0z^m + v_1z^{m-1} + \dots\dots$$
$$+ v_{m-4}z^4 + v_{m-3}z^3 + v_{m-2}z^2 + v_{m-1}z + v_m = 0$$

и њој је поправка h онолико исто пута корен, колико је пута $a + h$ корен једначини 1). Ако је сад $a + h$ два пут корен једначини 1), дакле h два пут корен једначини 3), онда h мора бити једанпут корен једначини:

$$4.)\quad \varphi'(z) = m.v_0z^{m-1} + \dots + 3v_{m-3}z^2 + 2v_{m-2}z + v_{m-1} = 0$$

Сад кад будемо смењивали a са све приближнијим вредностима траженога корена једначине 1), при чему ће поправка h тежити нули, т. ј. постајати све мања и мања, онда ће $v_{m-1} = f'(a)$ тежити нули, али не и $v_{m-2} = f''(a)$, јер је по претпоставци $a + h$ само два пут корен једначини 1). То се у осталом јасно увиђа и из једначине 4). Јер кад би осим v_{m-1} и v_{m-2} тежило нули, кад a тежи траженом корену једначине 1) а h нули, онда би $h = 0$ био два пут корен једначини 4), дакле и три пут корен једначини 3), и за то би онда тражени корен био три пут корен једначини 1), а ми смо претпоставили да јој је он корен само два пут.

Ако се сад a разликује мало од траженог корена, дакле, ако је h мало, онда из једначине 2), која постаје, кад се у једначини 3) z замени вредношћу h, добијамо приближно тачно:

$$h = -\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}.$$

Овај израз треба дакле у случају двојних корена, употребити као поправку приближне вредности место израза под 6) у № 113.

Да бисмо дакле добили узастопне децимале двојнога корена, ми ћемо у узастопним једначинама, које добијамо поступним смањивањем корена задате једначине, поделити другог сачиниоца с десна са двогубим трећим сачиниоцем опет с десна и резултат узети са противним знаком.

Ако се тражени корен јавља три пут као корен задате једначине, онда његова поправка h мора задовољити осим једначине 3) и 4) још и ову:

$$5.)\qquad \varphi''(z) = m(m-1)\,v_0z^{m-2} + \dots\dots$$
$$+ 2.3v_{m-3}z + 2v_{m-2} = 0.$$

из које добијамо приближно тачно за $z = h$:

$$2.3v_{m-3}\,h + 2v_{m-2} = 0$$

или:

$$h = -\frac{v_{m-2}}{3v_{m-3}}.$$

Дакле: узастопне децимале тројнога корена добијамо, кад у узастопним једначинама, које налазимо смањујући поступно корене дате једначине, поделимо, идући с десна на лево, трећег сачиниоца са трогубим четвртим и резултат заузмемо противним знаком.

Радећи овако и даље доћи ћемо до закључка, да се помоћу Horner-ове методе добијају узастопне децимале траженога корена помоћу израза:

$$6.)\quad -\frac{v_m}{v_{m-1}},\ -\frac{1}{2}\frac{v_{m-1}}{v_{m-2}},\ -\frac{1}{3}\frac{v_{m-2}}{v_{m-3}},\dots -\frac{1}{k}\frac{v_{m-k+1}}{v_{m-k}},$$

како се кад тражени корен јавља један пут, два пут, три пут . . . или k-пута као корен задате једначине.

Нека читалац огледа сам показану методу на примеру:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

Ова једначина има два спрега једнаких корена, један између 1·6 и 1·7, а други између — 0·6 и — 0·7. Међу тим треба приметити, да се корени ове једначине могу такође лако наћи помоћу једне биквадратне једначине која се добија, кад се корени дане смање за $\frac{1}{2}$.

У осталом може се ствар проматрати и на овај начин. Узмимо нека се тражени корен једначине 1) јавља два пут као корен. Онда је h два пут корен једначини 3). Ако сад претпоставимо, да је h довољно мало, онда је приближно тачно.

$$v_{m-2}\,h^2 + v_{m-1}\,h + v_m = 0$$

Али, пошто је h двојни корен једначине 3), то из једначине 4) добијамо опет приближно тачно:

$$2v_{m-2}h + v_{m-1} = 0$$

из које смо једначине горе добили за h вредност $-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}$

Ако из последњих двеју једначина избацимо v_{m-2}, добићемо:

$$h = -\frac{2v_m}{v_{m-1}}$$

На тај начин изрази:

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}},\quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}}$$

морају дати за h скоро једнаке приближне вредности, које ће се једна од друге разликовати тим мање, што је h мање.

Ако се тражени корен једначине јавља три пут као њен корен, онда вреде приближно тачно ове једначине:

$$v_{m-3}h^3 + v_{m-2}h^2 + v_{m-1}h + v_m = 0$$

$$3v_{m-3}h^2 + 2v_{m-2}h + v_{m-1} = 0$$

$$2.\ 3v_{m-3}h + 2v_{m-2} = 0.$$

Последња од ових једначина даје нам: $h = -\frac{v_{m-2}}{3v_{m-3}}$, вредност, коју смо горе нашли. Из прве две налазимо избацујући најпре v_{m-3} а после v_{m-2}:

$$h = -\frac{v_{m-1}}{v_{m-2}} \quad \text{и} \quad h = -\frac{3v_m}{v_{m-1}}$$

Ако би се тражени корен јављао 4-пута као корен, нашли бисмо радећи на сличан начин:

$$-\frac{v_{m-3}}{4v_{m-4}},\ -\frac{2v_{m-2}}{3v_{m-3}},\ -\frac{3v_{m-1}}{2v_{m-2}},\ -\frac{4v_m}{v_{m-1}}$$

и т. д. и бројне вредности тих израза разликоваће се тим мање, што је год h мање.

116. Помоћу резултата, до којих смо дошли у № 115, у стању смо применити Horner-ову методу на раздвајање и израчунавање наблизу једнаких корена.

Претпоставимо, да задата једначина има два наблизу једнака корена, којима су заједнички: цели део α_0 и k првих децимала: α_1, α_2 . . . α_k, тако, да се та два корена разликују међу собом тек $(k+1)$-ом децималом и доцнијим. Кад смо по једној од познатих метода н. пр. Штурмовој, нашли заједничку приближну вредност $\alpha_0;\alpha_1$ тих двају корена, онда ћемо смањити корен дане једначине за $\alpha_0;\alpha_1$ па ћемо онда из нове једначине као и из доцнијих, на сличан начин т. ј. смањивањем њиних корена за $0{\cdot}0\alpha_2$, $0{\cdot}00\alpha_3$ и т. д. добивених, израчунавати остале заједничке децимале помоћу обрасца $-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}$, јер се односно тих децимала оба корена могу сматрати као једнаки. Тако добивене заједничке децимале морају бити једнаке са онима, које добијамо помоћу количника $-\frac{2v_m}{v_{m-1}}$, што нам може служити као овера, да те децимале припадају доиста обојим коренима. И на тај начин радићемо дотле, док нисмо дошли до $(k+1)$-ве децимале, од које се па на даље оба корена међу собом разликују. А то ће се открити само собом тиме, што се за ту децималу неће добити иста вредност из оба количника, или ако би се то по некад и десило, онда ће за $(k+1)$-ву децималу, добивену из $-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}$ последњи члан једначине свој

знак променути, што служи као миг, да смо мањи од два наблизу једнака корена прешли. Остале међу собом различне децимале оба корена наћићемо на обичан начин помоћу количника $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$, при чему ће само прве неједнаке децимале оба корена, т. ј. α_{k+1} и α^1_{k+1} задавати мало посла док их не нађемо. За α_{k+1} треба узети највећи број, за који последњи члан једначине, што долази одмах за оном, која је дала последњу — k-ту — заједничку децималу, има још исти знак са последњим чланом ове друге једначине. А за α^1_{k+1} треба опет узети највећи број, за који је последњи члан прве од поменутих двеју једначина још противнога знака са последњим чланом друге једначине.

На сличан начин треба радити. кад једначина има више од два н. пр. r на близу једнаких корена. Ако су цели део и k првих децимала исти у свима тим коренима, и ако је опет $\alpha_0\alpha_1$ заједничка приближна вредност тих корена, ми ћемо смањити корене једначине за $\alpha_0;\alpha_1$ и из нове једначине, а помоћу обрасца:

$$1.)\qquad -\frac{v_{m-r+1}}{r\,v_{m-r}}$$

израчунаћемо другу заједничку децималу $0{\cdot}0\alpha_2$. За тим ћемо смањити за $0{\cdot}0\alpha_2$ корене нове једначине, коју тако добијемо, а помоћу обрасца 1) израчунаћемо трећу децималу $0{\cdot}00\alpha_3$ и т. д. док нисмо нашли свих k — заједничких децимала, односно којих се морају поменутих r корена сматрати као једнаки. Нађене заједничке децимале морају бити исте са онима, које се добијају помоћу количника:

2.) $$-\frac{r\,v_m}{v_{m-1}}$$

Корени ће се раздвојити код $(k+1)$-ве децимале, а то ће се познати или по томе, што за $(k+1)$-ву децималу нећемо добити исту вредност из оба обрасца 1) и 2) или по томе, што ће последњи члан једначине свој знак променути, а то ће онда бити сигуран знак, да смо најмањи од r наблизу једнаких корена већ прешли. $(k+1)$-ву као и даље децимале тога корена налазимо после помоћу обрасца $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$. Али полазећи од исте једначине, од које полазимо при израчунавању $(k+1)$-ве и доцнијих децимала најмањег корена, ми можемо лако израчунати $(k+1)$-ву као и доцније децимале и свију осталих наблизу једнаких корена, ако су $(k+1)$-ве децимале тих корена међу собом различне, јер се тада ти корени могу лако раздвојити и за тим сваки од њих за се помоћу обрасца $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$ даље израчунавати. Али ако би неки од поменутих r корена имали и $(k+1)$-не децимале једнаке, онда ће се границе појединим групама таквих корена, који се још и у $(k+1)$-ој децимали слажу, открити просто нестанком извесног броја значних мена — сагласно са Budan-овом теоремом № 105. На сваку од тих група треба посебице применути методу израчунавања наблизу једнаких корена.

Пример. Нека је дата једначина:

$$f(x) = x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48 = 0$$

која има два наблизу једнака корена између граница 0·4 и 0·5. Смањимо корене једначине са 0·4 па за тим радимо према горњем упутству.

$$\begin{array}{rlllll}
 & 1, & +40, & +185, & -198, & +48 \\
0\cdot4] & 1, & 40\cdot4, & 201\cdot16, & -117\cdot536 & \underline{0\cdot9856} \\
 & 1, & 40\cdot8, & 217\cdot48, & \underline{-30\cdot544} & \\
 & 1, & 41\cdot2, & \underline{233\cdot96} & & \\
 & 1, & \underline{41\cdot6} & & & \\
 & \underline{1} & & & &
\end{array}$$

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}} = 0\cdot06\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}} = 0\cdot06$$

$$\begin{array}{rlllll}
 & 1, & +41\cdot66, & +236\cdot4596, & -16\cdot356424, & \underline{+0\cdot00421456} \\
0\cdot06] & 1, & 41\cdot72, & 233\cdot9628, & \underline{-2\cdot018656} & \\
 & 1, & 41\cdot78, & \underline{241\cdot4696} & & \\
 & 1, & \underline{41\cdot84} & & & \\
 & \underline{1} & & & &
\end{array}$$

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}} = 0\cdot004\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}} = 0\cdot004$$

$$\begin{array}{lllll}
1, & +41\cdot85, & +241\cdot6370, & -1\cdot052108, & +\underline{0\cdot00000613} \\
. \quad . \quad . & . \quad . & 241\cdot8044, & \underline{-0\cdot084890} & \\
 & & 241\cdot9718 & &
\end{array}$$

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}} = 0\cdot0001\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}} = 0\cdot00007$$

Као што се види, прве три заједничке децимале оба корена добијамо исте из оба обрасца:

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}}$$

дакле је 0·464 заједнички део у оба корена. Код четвртог десетног места корени се раздвајају. Ако смањимо корене последње једначине са 0·0001, онда последњи члан нове једначине остаје још положан; ако ли смањимо корене поменуте последње једначине са 0·0002, онда последњи члан нове једначине мења знак т. ј. постаје одречан и најзад постаје опет положан, кад корене поменуте последње једначине смањимо са 0·0003. Дакле је 1 четврта децимала првог а 2 другог корена, и по томе су они раздвојени и могу се сад сваки за се даље израчунавати.

За мањи од та два корена имамо:

$$\begin{array}{lllll} 1, & +\,42, & +\,241\,972, & -\,0\cdot08489, & 0\cdot00000613 \\ & & 241\cdot98, & -\,0\cdot06069, & \underline{0\cdot00000006} \\ & & & \underline{-\,0\cdot03649} & \end{array}$$

Кад поделимо последњи члан претпоследњим, добићемо: 0·000002, и корен са шест тачних децимала биће $x = 0\cdot464102$.

За други пак корен имамо:

$$\begin{array}{llllll} & 1, & +\,42, & +\,241\cdot972, & -\,0\cdot08489, & +\,0\cdot00000613 \\ 0\cdot\overset{3}{0}2] & & & 241\cdot98 & -\,0\cdot036\;9 & \underline{-\,0\cdot00000117} \\ & & & 241\cdot99 & \underline{+\,0\cdot01191} & \\ & & & \underline{242} & & \\ \hline 0\cdot\overset{4}{0}4] & & & 242 & 0\cdot0216 & \underline{0\cdot00000031} \\ & & & & \underline{0\cdot0313} & \end{array}$$

Дакле други корен: $x = 0\cdot464249$.

Разрешавање трансцендентних једначина.

117. Метода Newton-ова и Regula falsi могу се корисно и скоро без икакве измене употребити и при разрешавању сваке трансцендентне једначине $f(x) = 0$, ако су само $f(x)$ и њени изводи непрекидне функције и то, ако не за све могуће вредности x-а, а оно бар за један извезан низ тих вредности, оних, које проматрамо. Јер поменуте две методе као и остале претпостављају, да су $f(x)$ и њени изводи непрекидне функције x-а између оних граница, између којих тражимо корен једначине. У осталом ми ћемо доцније показати још једну методу израчунавања корена.

Али пре но што се приђе израчунавању корена трансцендентних једначина, треба корене најпре раздвојити. За тај посао не може се Штурмова теорема увек ни згодно употребити, али може Rolle-ова, као што ћемо видети из примера, који ће доћи.

Да се Newton-ова метода сме применити и на трансцендентне једначине, може се видети из онога, што сад одмах долази. Rolle-ова теорема као и образац 4) у № 108 вреде за $f(x)$ очевидно и онда, кад је она трансцендентна, ако су само она и њени изводи непрекидне функције за онај низ вредности x-а, који проматрамо.

Ако је:

$$f(x) = 0$$

задата трансцендентна једначина, a приближна вредност једног корена њеног, а $a + h$ тачна вредност истога, онда по обрасцу 4) №-е 108, кад још узмемо на ум то, да је $f(a + h) = 0$, добијамо:

$$0 = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h)$$

одакле као и тамо налазимо даље

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2!} \frac{f''(a + \theta h)}{f'(a)}$$

Дакле је:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

приближна вредност поправке. На исти начин налазимо и овде као и у № 108, да је:

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{k^2}{2!} \frac{f''(b - \theta' b)}{f'(b)}$$

поправка друге границе b траженога корена, а приближна вредност те поправке:

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Regula falsi претпоставља, да се на довољно малом размаку $x = a$, $x = b$ може узети, да су промене функције $f(x)$ сразмерне променама x-а. Но то вреди за $f(x)$, па била она алгебарска или трансцендентна, ако је она само непрекидна између $x = a$, $x = b$ и ако је разлика $(b - a)$ довољно мала. Дакле и Regula falsi сме се употребити при решавању трансцендентних једначина.

Примери:

1°. Узмимо да се има да реши једначина:

$$x^x = 100$$

Ако узмемо обичне логаритме лево и десно, добићемо:

$$f(x) = x \log x - \log 100 = 0.$$

и то је сада једначина, коју треба решити. Ако означимо са M модуо обичне логаритамске системе, т. ј. број: $0{\cdot}4342945\ldots$, онда су први и други извод функције $f(x)$:

$$f'(x) = \log x + M, \quad f''(x) = \frac{M}{x}$$

Од 0 до 1 нема корена, јер је функција $f(x)$ за вредности x-а између тих граница вазда одречна. Замењујући x са узастопним целим и положним бројевима налазимо:

за $x = 2: \quad f(x) = -1{\cdot}40$

за $x = 3: \quad f(x) = -0{\cdot}57$

за $x = 4: \quad f(x) = +0{\cdot}41$

Одавде се види, да се један корен једначине налази између 3 и 4. Узимајући на ум, да је:

$$M = \frac{1}{l\,10} = log\ e$$

где је e основица природне логаритамске системе, налазимо да је први извод $f'(x) = 0$ за $x = \frac{1}{e}$, и да остаје положан за све веће вредности x-а. Одатле, као што знамо, следује, да $f(x)$ расти, кад x расти од $\frac{1}{e}$ до $+\infty$, и према томе $f(x)$ постаје само један пут $= 0$ и то између горе поменутих граница 3 и 4.

Помоћу обрасца 1) у № 111 налазимо као поправку прве приближне вредности 3:

$$h = \frac{0{\cdot}57}{0{\cdot}98} = 0{\cdot}5$$

Нова приближна вредност јесте дакле $x = 3{\cdot}5$. И сад налазимо:

за $x = 3{\cdot}5: \quad f(x) = -0{\cdot}09576186$

за $x = 3{\cdot}6: \quad f(x) = +0{\cdot}00268900$

Дакле се корен налази између 3·5 и 3·6 и то ближе другом него првом броју. Ако сад применимо Newton-ову методу и пођемо од 3·6 наћи ћемо као поправку:

$$k = 0{\cdot}0027145$$

Што се тиче погрешке, њу ћемо (№ 109) наћи помоћу обрасца:

$$\varepsilon < \frac{k^2}{2!}\,\frac{f''(3{\cdot}5)}{f'(3{\cdot}6)} < \frac{k^2 \times 0{\cdot}13}{2 \times 0{\cdot}99} < k^2 \times 0{\cdot}07$$

пошто је k бројно $< 0{\cdot}1$, то је $\varepsilon < 0{\cdot}0007$. Одатле узимајући горњу приближну вредност од k на ум, закључујемо да је:

$$k < 0{\cdot}0028 + 0{\cdot}0007 = 0{\cdot}0035.$$

Замењујући k са 0·0035 у горњи образац за погрешку ε налазимо даље:

$$\varepsilon < 0{\cdot}0035^2 \times 0{\cdot}07 < 0{\cdot}000001.$$

Према томе права вредност поправке k налази се између $+0{\cdot}027145$ и $+0{\cdot}0027155$. Узимајући $k = 0{\cdot}002715$ наћићемо тражени корен са 6 тачних децимала: $x = 3{\cdot}597285$.

2°. Да се реши једначина:

1.) $$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1},$$

где је $e = 2{\cdot}7182818284\ldots$ основица природне логаритамске системе. Кад узмемо лево и десно логаритме, добићемо:

2.) $$f(x) = 2x - l\frac{x+1}{x-1} = 0.$$

Ако немамо при себи таблицу природних логаритама, онда, ако нећемо да израчунавамо непосредно помоћу редова природне логаритме бројева, можемо их наћи (№ 87 алг. анал.), кад помножимо обичне логаритме бројева са:

$$l\,10 = 2{\cdot}3025851.$$

Први и други извод функције $f(x)$ јесу:

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{x^2-1}, \quad f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

Пошто $f'(x)$ почев од $x = 1 + \delta$, где је δ врло мали и положан број, па до $x = +\infty$ остаје положна, то $f(x)$ расте и остаје непрекидна, кад x расте од $x = 1 + \delta$ до $x = +\infty$. Она је за $x = 1 + \delta$ одречна, а за $x=2$ положна, одакле следује да једначина 2), па дакле и једначина 1.) има *само један* корен и то између 1 и 2.

Из једначине 2) добијамо:

$$\text{за } x = 1{\cdot}1: \quad f(x) = -\,0{\cdot}844522437$$

$$\text{за } x = 1{\cdot}2: \quad f(x) = +\,0{\cdot}002104727$$

Тражени корен дакле налази се између 1·1 и 1·2 и много је ближи другом, него ли првом корену.

При рашћењу x-а од $x = 1 + \delta$ до $x = +\infty$ први и други извод не мењају знака, јер их ни једна од оних вредности, које x при том добија, не поништава, и за то се Newton-ова метода може применути.

Пошто су у овом примеру $f(x)$ и $f''(x)$ истог знака за $x = 1{\cdot}1$ а противног за $x = 1{\cdot}2$, то би ради веће сигурности требало поћи од $x = 1{\cdot}1$ као прве приближне вредности. Али пошто се 1·2 од траженог корена врло мало разликује, то ћемо поћи од тога броја.

Узимајући дакле $x = 1{\cdot}2$ у обрасцу:

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

добићемо:

$$k = 0{\cdot}00032.$$

Дакле је тачнија вредност траженог корена:

$$x = 1{\cdot}19968$$

Пошто је погрешка од k одречна, то права вредност корена јесте мања од ове. Да видимо, да ли се корен случајно не налази између: 1·19967 и 1·19968.

$$\text{За } x = 1{\cdot}19967: \quad f(x) = -\,0{\cdot}000106788$$

$$\text{„ } x = 1{\cdot}19968: \quad f(x) = +\,0{\cdot}000008999$$

Дакле се доиста налази тражени корен између поменутих бројева. Примењујући поново Newton-ову методу налазимо:

$$\text{За } x = 1{\cdot}199678, \quad f(x) = -\,0{\cdot}0000044,$$

$$\text{„ } x = 1{\cdot}199679, \quad f(x) = +\,0{\cdot}0000022.$$

Ако применимо још један пут Newton-ову методу и водимо рачуна о погрешци поправке, или ако применимо у исти мах и Newton-ову методу и Regula falsi, наћићемо као тражени корен са 8 тачних децимала:

$$x = 1{\cdot}19967867$$

3°. Да се реши једначина:

1.) $$f(x) = x - tg\,x = 0.$$

Ова једначина не мења се, кад у њој сменимо x са $-x$, одакле следује, да кад јој је н. пр. број α корен, да јој онда мора бити корен и број $-\alpha$. Ми ћемо се дакле ограничити на израчунавање само положних корена.

Али да би једначина могла бити задовољена, треба да је $tg\,x$ положна, кад је x положно. Луци, који задовољавају једначину 1), морају се дакле завршивати у 1-ој, 3-ој, 5-ој и т. д. $(2n+1)$-ој четврти. Вредности тих лукова, који задовољавају једначину 1), морају се према томе налазити између $n\pi$ и $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, где је n ма какав цео и положан број. У свакој од тих четврти лук и његова тангента расту све једнако, али лук расти много спорије од тангенте, јер лук расти од $n\pi$ до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, док међу тим његова тангента расти од 0 до $+\infty$. Дакле у свакој од поменутих четврти завршује се један, и то *само један лук,* који је корен једначини 1), што се у осталом може увидети и отуда, што први извод функције $f(x)$ т. ј:

$$f'(x) = -tg^2x$$

не постаје никако $= 0$, кад x расте од $n\pi$ до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

Међу тим лако је увидети, да кад лук расте од $n\pi$ па до извесне границе, која је граница у 3-ој, 5-ој и свакој доцнијој непарној четврти већа од $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$, да је онда лук $x > tg\,x$ и за то (fx) положна; а кад прешав ту границу x расте до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, онда је $x < tg\,x$ и за то $f(x)$ постаје одречна. Једначина 1) има дакле бесконачно много корена, и први њен корен, т. ј. онај, који се завршује у 1-ој четврти, јесте $= 0$. Међу тим у свакој доцнијој непарној четврти, крај лука, који је корен једначине 1), према ономе, што смо већ видели, све се већма удаљава од почетка те четврти. Но то се још боље може увидети из онога, што сад долази.

Узмимо да су $n\pi + \alpha$ и $(n+k)\pi + \beta$, где су луци α и β мањи од $\frac{1}{2}\pi$, n-ти и $(n+k)$-ти корен једначине 1). Тада је:

$$tg\,(n\pi+\alpha) = n\pi + \alpha$$

$$tg\left\{(n+k)\,\pi + \beta\right\} = (n+k)\,\pi + \beta$$

и због тога:

$$(n+k)\,\pi + \beta > n\pi + \alpha,$$

па дакле и:

$$tg\left\{(n+k)\,\pi + \beta\right\} > tg\,(n\pi+\alpha)$$

или:

$$tg\,\beta > tg\,\alpha,$$

одакле најзад следује:

$$\beta > \alpha.$$

Ми ћемо да тражимо најмањи положни и од нуле различни корен једначине 1), а то је онај, који се завршује у 3-ој четврти. Кад лук x расти од π па до $\pi + \frac{1}{4}\pi$, онда $tg\,x$ расти од 0 па до $+1$, и за то тражени корен не може се налазити између π и $\pi + \frac{1}{4}\pi$, него се мора налазити између $\frac{3}{4}\pi$ и $\frac{3}{2}\pi$ или $3{\cdot}9$ и 5. Огледајмо најпре лук $4{\cdot}5$. Ако ставимо $x = 4{\cdot}5 = \pi + x^1$ онда је $x^1 = 1{\cdot}3584$ или у степенима одприлике $= 77^\circ\,50'$. У таблицама тражићемо најпре $log\,tg\,x^1$ па из овога онда и саму $tg\,x^1$ и наћићемо:

$$tg\,x^1 = tg\,x = 4{\cdot}6384.$$

Дакле је за $x = 4{\cdot}5$: $f(x) = -0{\cdot}1384$.

Одавде закључујемо, да је број $4{\cdot}5$ већи од траженога корена. Заменимо у 1) x са $4{\cdot}4$. Ако опет ставимо $x = 4{\cdot}4 = \pi + x^1$ онда је у степенима $x' = 72^\circ\,6'$

$$tg\,x = tg\,x^1 = 3{\cdot}0960.$$

Дакле је:

за $x = 4{\cdot}4$: $f(x) = +1{\cdot}3040$,

и по томе је $4{\cdot}4$ мање од траженог корена. Он се дакле налази између $4{\cdot}4$ и $4{\cdot}5$ и то много ближе овом другом броју.

Помоћу методе Regula falsi добијамо као поправку $k = 0{\cdot}009$, дакле као нову приближну вредност $4{\cdot}49$. Замењујући добијамо:

за $x = 4{\cdot}49$: $x' = 77^\circ 15' 30''$ $tg\,x' = 4{\cdot}223$

и

$$f(x) = +0{\cdot}0677$$

за $x = 4{\cdot}50$: $x' = 77^\circ 49' 50''$. $tg\,x' = 4{\cdot}6372$ и

$$f(x) = -0{\cdot}1372$$

Корен се дакле налази између $4{\cdot}49$ и $4{\cdot}50$. Помоћу Regula falsi добијамо као поправку $h = 0{\cdot}0033$, дакле као нову приближну вредност $4{\cdot}4933$. Ми ћемо да огледамо број $4{\cdot}4934$ и $4{\cdot}4935$; и кад то учинимо, наћићемо:

за $x = 4{\cdot}4934$: $x' = 77^\circ 27' 10''{\cdot}3$, $tg\,x' = 4{\cdot}493210$

и $f(c) = +0{\cdot}000190.$

за $x = 4{\cdot}4935$: $x' = 77^\circ 27' 30''{\cdot}9$, $tg\,x = 4{\cdot}495328$

и $f(x) = -0{\cdot}001828.$

Дакле се корен налази између $4{\cdot}4934$ и $4{\cdot}4935$ и ближи је првом броју него ли другом. Помоћу Regula falsi добијамо као поправку приближне вредности $4{\cdot}4934$ број $0{\cdot}0000094$, дакле као следећу приближну вредност

$$x = 4{\cdot}4934094$$

4°. Нека читалац реши сам ове задатке:

1') $\quad f(x) = x - cos\,x = 0.$

Ова једначина има само један корен између 0 и $+1$, јер је за $x = 0$: $f(x) = 1$, а за $x = \frac{1}{2}\pi : f(x) = +\frac{1}{2}\pi$

Лако је увидети да она нема одречних корена, нити више од поменутог једног положног. Јер између $x=0$ и $x=\frac{1}{2}\pi$ први извод $f'(x)$ није $= 0$, а за вредности x-а веће од $\frac{\pi}{2}$ лук x већи је од $\cos x$. Тражени корен са седам тачних децимала јесте:

$$x = 0{\cdot}7390852$$

2') $$x + \sin x = \frac{1}{3}\pi$$

$$x = 0{\cdot}536267 \quad \text{или} \quad x = 30^{\circ}43'33''$$

3') $$x - \operatorname{cotg} x = 0$$

$$x = 0{\cdot}8603334 \quad \text{или} \quad x = 49^{\circ}17'36''{\cdot}55$$

4') $$(e^{x} + e^{-x}) \cos x - 2 = 0$$

$$x = 4{\cdot}73004099.$$

Метода узастопних замена.

118. Ова је метода од најпростијих и најзгоднијих у оним случајевима, где је природа самог задатка таква, да се она може применити. Ево у чему се она састоји:

Треба дану једначину представити у облику

1.) $$x = f(x)$$

т. ј. треба у њојзи непознату оставити само на једној страни неводећи бриге о томе, што ће се можда она налазити и на другој страни заједно са познатим бројевима.

Занемарујући сад десно оне чланове, у којима је непозната, добићемо прву приближну вредност за тражени корен. И ту ћемо вредност заменити опет место x десно од знака једнакости и т. д. И на тај прост начин радићемо дотле, док нисмо добили вредност непознате са оноликом тачношћу, колика се захтевала.

Нека је почев од друге приближне вредности па на даље a ма која а $a + h$ тачна вредност траженог корена. Тада је:

$$a + h = f(a + h)$$

Али је:

$$f(a + h) - f(a) = h \left\{ f'(a) + \delta \right\}$$

дакле је и

$$a + h - f(a) = h \left\{ f'(a) + \delta \right\}$$

Погрешка дакле, коју чинимо, кад узимамо $f(a)$ као тражени корен, скоро је једнака производу $hf'(a)$, одакле следује, да се метода може употребити само онда, кад је $f'(a) < 1$. Кад се метода може употребити, онда цифре које припадају заједно узастопним приближним вредностима траженога корена, припадају и тачној вредности његовој.

Пример Траже се корени једначине:

$$\frac{10^{x}}{\sqrt{x}} = 329476$$

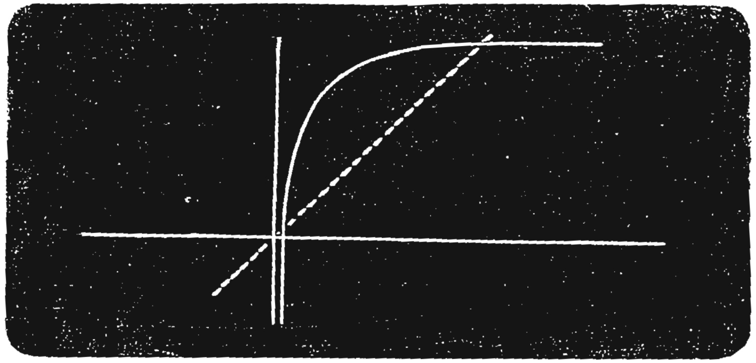
Ова једначина не може имати одречних корена, пошто је за такве вредности x-а именилац лево уображен. Да бисмо нашли положне корене њене, ми ћемо зарад простијега после узети лево и десно логаритме, и тако ћемо добити:

$$1.)\qquad x = \frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178238.$$

Ова једначина, можемо узети, да је постала избацајем y-а из двеју једначина:

$$y = x \text{ и } y = \frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178238$$

од којих прва представља праву, која полови координатни угао, а друга тако звану логаритамску линију, којој је асимтота ординатна оса.



Сл. 8.

Апсцисе тачака, у којима се секу те две линије, јесу корени задате једначине. Једна је од тих тачака са свим близу почетка, а друга има апсцису, која лежи између 5 и 6. Дакле дата једначина има само два корена.

Пошто је вредност последњег члана једначине скоро = 6., то ћемо овај број узети као прву приближну вредност корена, а кад тај број заменимо у једначину 1), добићемо тачнију вредност корена:

$$x = \frac{1}{2} \log 6 + 5{\cdot}5178 = 5{\cdot}9069$$

Замењујући ову другу вредност у једначину 1) добићемо:

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9069 + 5{\cdot}5178238 = 5{\cdot}9035036$$

и кад тако продужимо, добијаћемо поступно:

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9035036 + 5{\cdot}5178238 = 5{\cdot}9033787$$

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9033787 + 5{\cdot}5178238 = 5{\cdot}9033741$$

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9033741 + 5{\cdot}5178238 \quad \text{или}$$

$$x = 5{\cdot}9033740$$

Овај резултат тачан је до на 7 децимала јер је:

$$\log x = \log 5{\cdot}9033740 = \underline{0{\cdot}7711004}$$

$$\frac{1}{2} \log x = 0{\cdot}3855502$$

$$\underline{5{\cdot}5178238}$$

одакле: $\frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178\ldots = 5{\cdot}9033740 = x.$

Ако се повратимо на општа разматрања у почетку ове №-е 118, наћи ћемо да је:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178238$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\log e}{x}.$$

Пошто је сад x скоро $= 6$, то је онда наблизу $f'(x) = \frac{1}{20}$ и према томе свака нова приближна вредност скоро двадесет пута приближнија, него она пред њом.

Сад тражимо и други корен једначине, који се налази између 0 и $+ 1$. Како је тражена вредност x-а врло мала, то можемо занемарити леву страну једначине 1), и онда ћемо имати:

$$\frac{1}{2} \log x = - \quad 5{\cdot}5178238$$

$$\log x = - 11{\cdot}0356476$$

$$= + \quad 0{\cdot}9643524 - 12.$$

Дакле је:

$$x = 0{\cdot}000\ 000\ 000\ 092\ 119\ 7$$

и то тачно до на 17 децимала.

119. У овој ћемо №-и да применимо методу узастопних замена на квадратну једначину.

Кад је у једначини:

1.) $$ax^2 + bx + c = 0$$

сачинилац a врло мали, онда образац

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

није згодан, јер пошто смо добили приближну вредност бројиоца, треба је поделити са врло малим бројем $2a$. Дакле ћемо тада поделити и погрешку вредности бројиочеве са врло малим бројим, и тако ће погрешка корена испасти врло велика. Но томе се може помоћи методом узастопних замена.

Тражимо најпре корен, који се разликује врло мало од $-\frac{c}{b}$, а кад смо га нашли, лако је наћи и други корен, пошто је њин збир $= -\frac{b}{a}$.

Напишимо једначину 1) овако:

2.) $$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$$

Овде је:

$$f(x) = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}, \ f'(x) = -\frac{2ax}{b}.$$

Пошто је a врло мало, то је $f'(x) < 1$ и за то се може применити метода.

Прва приближна вредност јесте:

$$x = -\frac{c}{b}$$

Другу приближну вредност наћи ћемо, кад ову заменимо у једначину 2)

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$$

И ова друга приближна вредност биће са гледишта примена већ доста тачна. Трећу приближну вредност могли бисмо добити, кад бисмо заменили ову другу у једначину 2). И кад то учинимо добићемо:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left\{-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}\right\}^2$$

$$= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7}$$

Међу тим треба се зауставити код трећег члана десно и узети као приближне обрасце:

$$x = -\frac{c}{b},\; x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3},$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^3}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5},$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7}$$

Као што се види, свака од ових вредности изводи се из оне пред њом, кад се овој дода један члан као поправка, и *погрешка* корена после тога додавања *увек је врло мала наспрам додатог члана*, а то је битни захтев при сваком приближном рачуну. Тако кад узмемо да је $x = -\frac{c}{b}$, погрешка је наспрам $-\frac{c}{b}$ врло мала, пошто је та погрешка помножена са врло малим бројем a. Ако ли узмемо да је:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$$

погрешка је опет на спрам $-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$ врло мала, пошто је та погрешка помножена са врло малим бројем a^2. Према овоме лако је, па зауставили се ми код ма кога члана, сазнати, да ли је нађена приближна вредност корена мања или пак већа од њега. Зарад тога треба само гледати на знак првог занемареног члана.

Пример. Да се израчуна дубина бунара, кад је t број секунада, који је протекао између тренутка, кад је камен пуштен у бунар, и тренутка, кад је звук од удара камена о дно дошао до нас, при чему се отпор ваздуха не узима у рачун.

Време t састоји се из два дела t_1 и t_2. Време t_1 јесте оно, које је требало камену, да прође дубину x бунара, а t_2 време, које је требало звуку, па да пређе исти простор.

Из Физике и Механике познато је да је:

$$x = \frac{gt_1^2}{2}$$

где је $g = 9{\cdot}80944$ метара. Одатле следује:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Такође је и

$$x = vt_2$$

где је $v = 340$ метара брзина звука. Одавде следује:

$$t_2 = \frac{x}{v}$$

Дакле је сада:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v}$$

Одавде простим рачуном добијамо:

$$1.)\qquad \frac{x^2}{v^2} - 2\left\{\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right\} x + t^2 = 0$$

Оба корена ове једначине јесу положна, пошто је њихов збир:

$$2\left\{\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right\}$$

положан, и њихов производ t^2v^2 такође положан. Међутим само један корен одговара задатку, пошто бунар не може имати две различите дубине.

Из једначине 1) добијамо:

$$x = \frac{\frac{t}{v} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

Први корен као што се види већи је од vt; дакле тај корен не одговара задатку, јер пошто је $x = vt_2$ и $t_2 < t$, то мора бити $x < vt$, дакле само други корен одговара задатку.

Сачинилац од x^2 у једначини 1) мањи је од јединице, јер је он раван броју $\frac{1}{340^2}$. Дакле се смемо послужити обрасцем:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$$

јер само мањи корен одговара задатку.

Претпоставимо, да је $t = 10''$ н. пр. онда је:

$$a = \frac{1}{340^2},\quad b = -2\left\{\frac{10}{340} + \frac{1}{g}\right\},\quad c = 100.$$

Кад заменимо g његовом вредношћу добијамо $b = -0{\cdot}26278$ и сад помоћу логаритама добијамо даље:

$$\log\left(-\frac{c}{b}\right) = \log\frac{100}{0{\cdot}26278} = 2{\cdot}5804077$$

Као прву приближну вредност траженога корена налазимо:

$$x = -\frac{c}{b} = 380{\cdot}55 \text{ метара.}$$

Израчунајмо сада поправку: $-\frac{ac^2}{b^3}$

$$\log\left(-\frac{ac^2}{b^3}\right) = \log\frac{100^2}{340^2 \times 0{\cdot}26278^3} = 0{\cdot}6782653,$$

$$-\frac{ac^2}{b^3} = 4{\cdot}76 \text{ метара;}$$

дакле је друга приближна вредност:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} = 385{\cdot}31$$

Ова је вредност тачна до на један метар.

120. Проматрајмо поново једначину:

$$1.)\qquad x - tg\, x = 0$$

са којом смо већ имали посла. Ми смо у № 117 видели, да ова једначина има бесконачно много положних корена и израчунали смо најмањи од нуле различни корен. А овде ћемо да тражимо образац, помоћу којег ћемо израчунати ма који од узастопних корена њених.

Ми смо видели, да крај сваког лука, који је корен овој једначини, пада у четврт непарнога реда. Одатле следује, да је $(n+1)$-ви корен $< (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Ако означимо са α одстојање $(n+1)$-ог корена од почетка оне четврти, у којој се он завршује, добићемо:

$$2.)\qquad (2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \alpha$$

Одавде добијамо даље:

$$tg\, x = tg\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha\right\} = cotg\, \alpha = \frac{1}{tg\, \alpha}$$

Но пошто из једначине 1) следује $tg\, x = x$, то је даље

$$x = \frac{1}{tg\, \alpha} \quad \text{или} \quad tg\, \alpha = \frac{1}{x}.$$

Једначина 2) може се сад овако представити:

$$(2n+1)\,\frac{\pi}{2} = x + arc\, tg\, \frac{1}{x}.$$

Кад други члан ове једначине, који је десно од знака једнакости, заменимо његовим редом (№ 106 алгеб. анал.) добићемо:

$$(2n+1)\,\frac{\pi}{2} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots$$

Одавде, кад лук лево од знака једнакости означимо са a, добијамо:

$$3.)\quad x = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots$$

И ово је образац, помоћу којега можемо наћи са коликом хоћемо приближношћу ма који од бесконачно многих корена једначине 1).

Прва приближна вредност $(n+1)$-ог корена јесте: $x = a$, друга $x = a - \frac{1}{a}$. Трећу ћемо наћи, кад у једначини 3) заменимо у 2-ом и 3-ем члану десно од знака једнакости x са $\left(a - \frac{1}{a}\right)$ а занемаримо све доцније чланове. Та трећа приближна вредност јесте дакле:

$$x = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}$$

или, ако десно назначене деобе извршимо и занемаримо чланове са a^5 и т. д.:

$$x = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}$$

Четврту приближну вредност $(n+1)$-ог корена добићемо, ако са овом последњом вредношћу заменимо x десно у једначини 3) и занемаримо члан са x^7 и т. д. Деобе назначене у оставшим члановима извршићемо занемарујући при том све чланове са a^7 и т. д. На тај начин добићемо:

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5}$$

Нову приближну вредност могли бисмо наћи, кад бисмо ову заменили у једначину 3) занемарујући при том 9-ти степен x-а, а при извршивању деобе назначене у оставшим члановима 9-ти степен од a и т. д.

Да бисмо сад нашли узастопне корене једначине 1) заменићемо a његовом вредношћу $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ а n поступно са 1, 2, 3 и т. д.

Неколико речи о ирационалним једначинама.

122. Методе, помоћу којих се израчунавају корени бројних једначина, захтевају, да би се лакше могле применити, да се непозната x не налази у датој једначини нигде под кореним знаком. Одатле се види, колико је важно умети урационалити дату ирационалну једначину, т. ј. претворити је у другу, која је рационална, и у којој дакле непозната не стоји нигде под кореним знаком.

Узмимо једначину:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt[3]{b_0x + b_1} + c = 0$$

где c не мора бити стално, него и ма каква рационална функција x-а. Да бисмо је урационалили, ми ћемо подићи лево и десно на трећи степен, па ћемо добити:

$$(a_0x + a_1 + 3c^2)\sqrt{a_0x + a_1}$$

$$= -\left\{(3a_0c + b_0)x + 3a_1c + b_1 + c^3\right\}$$

и сад још остаје да подигнемо лево и десно на квадрат, па да једначина буде урационаљена.

Кад се у једначини налазе само два корена израза, и корени је изложилац бар у једног $= 2$, онда се на показани начин увек лако излази на крај, јер само треба вазда избацити најпре онај од два корена израза, код кога је корени изложилац већи.

Узмимо као бројни пример:

1.) $$x + 3\sqrt{x} = 10$$

Одавде добијамо:

$$10 - x = 3\sqrt{x}$$

и кад подигнемо лево и десно на квадрат:

2.) $$100 - 29x + x^2 = 0$$

Први корен $x = 4$ ове једначине задовољава задату једначину, а други $x = 25$ не. Разлог овој на први мах чудноватој појави лежи у томе, што је једначина 2) општија од задате, јер она постаје не само из задате него и из једначине:

3.) $$x - 3\sqrt{x} = 10$$

за то, што се при квадрирању мора добити исти резултат, па узео се знак $+$ или $-$ пред изразом $3\sqrt{x}$.

Ако једначину 1) схватимо општије, т. ј. тако, да се корена количина може узети и са знаком $+$ и са знаком $-$, онда она стоји као представник двеју једначина:

4.) $$x - 10 + 3\sqrt{x} = 0,\ x - 10 - 3\sqrt{x} = 0$$

Једначина добивена множењем ових мора дати очевидно корене обеју једначина. Та нова једначина јесте:

$$(x - 10 + 3\sqrt{x})(x - 10 - 3\sqrt{x}) = 0$$

или:

$$(x^2 - 10)^2 - 9x = 0$$

или најзад

$$x^2 - 29x + 100 = 0,$$

а то је иста рационална једначина 2). Овај начин урационаљивања згодан је особито онда, кад се у једначини јављају више корена.

Узмимо једначину:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

Ова једначина, кад корене изразе схватимо као двозначне, стоји као представник једначина:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} - \sqrt{c_0x - c_1} = 0$$

$$\sqrt{a_cx + a_2} - \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

$$-\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

Једначина, која постаје множењем ових, јесте:

$$-(a_0x + a_1)^2 - (b_0x + b_1)^2 - (c_0x + c_1)^2$$

$$+ 2(a_0x + a_1)(b_0x + b_1) + 2(a_0x + a_1)(c_0x + c_1)$$

$$+ 2(b_0x + b_1)(c_0x + c_1) = 0$$

или кад је уредимо:

$$(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 - 2a_0b_0 - 2a_0c_0 - 2b_0c_0)x^2 +$$

$$2(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1 - a_0b_1 - a_0c_1 - b_0a_1 - b_0c_1 - c_0a_1 - c_0b_1)x$$

$$+ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2a_1b_1 - 2a_1c_1 - 2b_1c_1) = 0$$

Као бројни пример нека послужи једначина:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} + \sqrt{6x+7}$$

Из ње добијамо на мало час показани начин:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

којој су: $x = +3$ и $x = -1$ корени. Први број задовољава дату једначину, кад се само последњи члан узме са знаком $-$, а други је задовољава, кад се или други или трећи члан узме са знаком $-$.

122. На горе показани начин може се радити и онда, кад се у једначини налазе и корени виши од дру-

гог. Само тада треба имати на уму, да n-ти корен има n-различних вредности, које се добијају, кад се аритметична вредност n-тог корена помножи са свима вредностима количине $\sqrt[n]{+1}$.

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt[3]{b_0x + b_1} + c = 0$$

Ако означимо аритметичну вредност првог члана са u, а другог са v, и узмемо на ум да су 1, α и α^2 вредности за $\sqrt[3]{+1}$, имаћемо овај низ једначина:

$$1.)\quad \left|\begin{aligned} u + v + c &= 0 \\ u + \alpha v + c &= 0 \\ u + \alpha^2 v + c &= 0 \\ -u + v + c &= 0 \\ -u + \alpha v + c &= 0 \\ -u + \alpha^2 v + c &= 0 \end{aligned}\right.$$

Производ прве три једначине јесте:

$$(u + c)^3 + (u + c)^2 (1 + \alpha + \alpha^2) v$$
$$+ (u + c) (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3) v^2 + \alpha^3 v^3 = 0$$

Али је као што знамо:

$$\alpha + \alpha^2 = -1, \quad \alpha^3 = +1$$

Дакле због овога једначина се претвара у ову:

$$(u + c)^3 + v^3 = 0$$

или:

$$(v^3 + 3cu^2 + c^3) + u (3c^2 + u^2) = 0$$

Исто тако лако налазимо као производ последњих трију једначина под 1):

$$(v^3 + 3cu^2 + c^3) - u (3c^2 + u^2) = 0$$

Дакле је производ свих шест једначина под 1)

$$(v^3 + 3cu^2 + c^3)^2 - u^2(u^2 + 3c^2)^2 = 0$$

Кад у овој једначини заменимо u^2 и v^3 вредностима њиховим:

$$u^2 = a_0x + a_1, \quad v^3 = b_0x + b_1$$

добићемо после са свим лаког свођаја рационалну једначину:

$$2.)\quad a_0 x^3 + \left\{3 a_0^2 (a_1 - c^2) - b_0 (6a_0c + b_0)\right\} x^2$$
$$+ \left\{3a_0(a_1 - c^2)^2 - 6a_0b_1c_1 - 2b_0(3a_1c + b_1 + c^3)\right\} x$$
$$+ (a_1 - c)^3 - b_1(6a_1c + b_1 + 2c^3) = 0$$

Као бројни пример узмимо:

$$\sqrt{x + 4} + \sqrt[3]{x + 3} + 1 = 0$$

Из ове једначине постаје рационална једначина:

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$$

одакле следује:

$$x = -3, \quad x = -4, \quad x = +5$$

Прва и трећа вредност задовољавају дату једначину, кад се у њој узме први члан са знаком —, а друга је задовољава онакву, каква је.

123. Избацивање корених израза из задате једначине може се свести на избацај (елиминацију) више непознатих из више једначина. — Узмимо н. пр. једначину:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt[3]{b_0x + b_1} + c = 0$$

Ако ставимо:

$$\sqrt{a_0x + a_1} = y, \quad \sqrt[3]{b_0x + b_1} = z$$

дакле:

$$a_0x + a_1 = y^2, \quad b_0x + b_1 = z^3$$

добићемо три једначине:

$$y + z + c = 0$$

$$a_0x + a_1 - y^2 = 0, \quad b_0x + b_1 - z^3 = 0$$

Избацајем y-а и z-а из ових трију једначина добићемо тражену рационалну једначину. Кад z заменимо његовом вредношћу из прве једначине у последње две, добијамо:

$$y^2 - (a_0x + a_1) = 0$$

$$y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + (b_0x + b_1 + c^3) = 0$$

Да бисмо сад избацили из ове две једначине и y, ми ћемо радити по Sylvester-овој методи. Дакле ћемо помножити прву једначину редом са y^2, y^1 и y^0, а другу са y^1 и y^0 и тако ћемо добити ових пет једначина:

$$y^4 + 0y^3 - uy^2 + 0y + 0 = 0$$

$$0y^4 + y^3 + 0y^2 - uy + 0 = 0$$

$$0y^4 + 0y^3 + y^2 + 0y - u = 0$$

$$y^4 + 3cy^3 + 3c^2y^2 + vy + 0 = 0$$

$$0y^4 + y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + v = 0$$

где смо само краткоће ради ставили:

$$u = a_0x + a_1, \quad v = b_0x + b_1 + c^3$$

Пошто имамо пет једначина са 4 непознате, y^1, y^2, y^3 и y^4, то детерминанта њиних сачинилаца мора бити $= 0$, дакле:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -u \\ 1 & 3c & 3c^2 & v & 0 \\ 1 & 0 & 3c & 3c^2 & v \end{vmatrix}$$

Кад у овој детерминанти са -1 помножену прву врсту додамо четвртој, онда су сви основци првог стуба сем његовог првог основка равни нули, и онда се (№ 171 алгеб. анал) детерминанта своди на ову 4-ог реда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u \\ 3c & 3c^2+u & v & 0 \\ 1 & 3c & 3c^2 & v \end{vmatrix} = 0$$

Кад у овој детерминанти додамо са u помножени први стуб трећем, онда сви чланови прве врсте сем првог, који је јединица, јесу једнаки нули, и детерминанта се своди на ову детерминанту трећег реда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -u \\ 3c^2+u & 3cu+v & 0 \\ 3c & 3c^2+u & v \end{vmatrix} = 0$$

Ако најзад у овој детерминанти додамо са u помножени први стуб трећем, онда опет сви чланови прве врсте осем првог — јединице — јесу = 0 и детерминанта се своди на ову:

$$\begin{vmatrix} 3cu+v, & u(u+3c^2) \\ u+3c^2, & 3cu+v \end{vmatrix} = 0$$

одакле сљедује:

$$u\,(u+3c^2)^2 - (v+3cu)^2 = 0$$

или кад u и v заменимо њиховим вредностима

$$(a_0x + a_1)\,(a_0x + a_1 + 3c^2)^2$$
$$- \left\{3c(a_0x + a_1) + b_0x + b_1 + c^3\right\}^2 = 0$$

а то је једначина 2) у № 122 само мало друкчије написана.

B. Једначине са две и више непознатих.

123. Кад је једначина са две или више непознатих цела и рационална односно свију непознатих, онда се степен њен управља по збиру изложилаца непознатих у ономе члану, где је тај збир највећи.

Према томе у *потпуној* једначини m-ог степена са две непознате x и y морају бити сви чланови, у којих збир изложилаца непознатих x и y није већи од m. Да бисмо једначину што простије написали, ми можемо у њој скупити увек заједно све оне чланове њене, у којима се налази један и исти степен једне непознате, н. пр. x-а, и за тим је уредити по степенима x-а. После тога једначина ће изгледати овако:

1.) $a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$

Ако тако исто учинимо и са другом такође задатом једначином, која је n-ог степена, она ће изгледати овако:

2.) $b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{o-1}x + b_n = 0.$

У једначинама 1) и 2) сачиниоци a_0 и b_0 морају бити независни од y, иначе би степен прве био виши од m-ог, а друге од n-ог. Из истог узрока могу сачиниоци a_1 и b_1 односно y бити највише првог степена, сачиниоци a_2 и b_2

највише другог, сачиниоци a_3 и b_3 највише трећег и т. д., и најзад сачиниоци a_m и b_n могу бити односно y: први највише m-ог, а други највише n-ог степена.

Кад у једначини нема свију чланова, које она према висини свога степена може имати, она се зове *непотпуна*. Сачиниоци чланова, којих нема, могу се сматрати као $= 0$.

Пошто a_0 и b_0 од y не зависе, то нам је слободно поделити њима једначине 1) и 2).

Претпоставимо сад нека су нам задате једначине 1) и 2), у којима, ако хоћемо, можемо узети, да су a_0 и b_0 једнаки јединици, нека су нам велим оне задате с тим да их решимо. А под тим разумемо, да имамо наћи за непознате x и y такве спрегове вредности, које у једначинама место x и y стављене исте једначине задовољавају. Ако је:

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

такав један спрег вредности, које задовољавају обе једначине у исти мах, онда се тај спрег зове *корени спрег* или *разрешење* даних једначина 1) и 2). Ако су задате једначине вишег степена, оне ће имати више разрешења; али број ових, као што ћемо доцније видети и као што се из № 176 алгеб. анал. увиђа, не може никад бити већи од mn, ако су m и n степени задатих једначина. Број тих разрешења једнак је производу mn, ако су једначине потпуне; у противном случају он је мањи од mn.

Пре свега ваља показати, по чему се распознаје, да једна вредност y-а одговара задатим једначинама, а тим хоћемо да кажемо, да их она у свези са извесном вредношћу x-а задовољава.

Узмимо нека је $y = \beta$ једна од тражених вредности y-а. Пошто она у свези са извесном вредношћу x-а задовољава задате једначине, то онда та вредност y-а мора бити таква, да кад је заменимо у обе једначине, после чега ће се у њима налазити само непозната x, да онда велим обе једначине морају имати бар једну извесну вредност x-а као заједнички корен. И том заједничком корену одговараће заједнички делилац двају полинома. Тај делилац, који је функција x-а, биће првог или вишег степена односно x, како кад вредности $y = \beta$ одговарају једна или више вредности x-а.

И обратно свака вредност y-а, која је таква, да кад је заменимо у задате једначине, ове после тога добијају извесну функцију x-а као заједничког делиоца, свака таква вредност y-а одговара задатим једначинама. Јер она тада очевидно задовољава задате једначине у свези са вредношћу или вредностима x-а, које поништавају заједничког делиоца.

124. Али пре сваке замене полиноми задатих једначина не могу имати заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих или једне само од њих, сем ако су задате једначине неодређене, што ми не претпостављамо. Јер ако задате једначине представимо краће са:

$$A = 0\,, \quad B = 0 \tag{3.)}$$

и ако узмемо да је:

$$A = A'C\,, \quad B = B'C$$

где је C функција x-а и y-а, онда очевидно свако од бесконачно многих разрешења неодређене једначине $C = 0$ јесте и разрешење једначина 3), и ове су дакле неодређене

Ако ли је C само функција x-а, онда свака од оно неколико вредности x-а, које даје једначина $C = 0$, у свези са ма каквом вредношћу y-а задовољава једначине 3) и оне су опет неодређене. Исто тако кад је C само функција y-а, свака од неколико вредности y-а, које даје једначина $C = 0$, у свези са ма каквом вредношћу x-а мора задовољити једначине 3), које су дакле и тада неодређене.

Закључимо дакле: *да кад год су задате једначине одређене, т. ј. кад имају одређени број разрешења, њини полиноми не могу пре сваке особене замене имати заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих или само једне од њих.*

Да бисмо нашли сва разрешења задатих једначина, ми ћемо из њих најпре избацити (елиминисати) једну непознату, н. пр. x, и на тај начин добићемо нову једначину само са непознатом y. Корени те једначине, која се зове *решавајућа једначина* или *резултанта* даних једначина, биће тражене вредности y-а, које одговарају датим једначинама. Ми ћемо сад да покажемо једну методу елиминације, која потиче непосредно из онога, што смо до сад говорили.

Ми смо видели, да је значајна особина сваке вредности y-а, која одговара задатим једначинама, та, да кад њоме заменимо y у тим једначинама, њини полиноми после тога имају извесну функцију x-а као заједничког делиоца, који пре те замене полиноми нису имали, изузев случај, кад су једначине неодређене, а тај случај ми сада не замишљамо. И тога заједничког делиоца могли бисмо наћи, кад бисмо полиномима, после поменуте замене y-а, тражили на већ познати начин највећег заједничког делиоца.

Али у почетку посла ми још незнамо ни вредности y-а ни вредности x-а, које одговарају задатим једначинама. Међу тим ми смо при свем том у стању наћи решавајућу једначину. Зарад тога ми ћемо са полиномима једначина радити онако, као кад бисмо им тражили највећег заједничког делиоца Узастопни остатци биће односно x све нижег и нижег степена, и најзад ће се јавити један остатак, који не зависи од x, већ је само функција y-а. Да су нам познате биле тражене вредности y-а, и да смо једном ма којом од њих још у почетку рада заменили y, ми бисмо место поменуте функције y-а нашли нулу као последњи остатак. Но пошто је очевидно са свим све једно, заменили ми y у почетку или на крају рада таквом једном вредношћу, то онда излази, да последња функција y-а или последњи остатак мора бити $= 0$ за сваку вредност y-а, која одговара датим једначинама. Дакле:

Решавајућа једначина, која даје тражене вредности y-а, добија се, кад се последњи остатак стави $= 0$.

Питање је још, како се налазе вредности x-а, које одговарају вредностима y-а нађеним помоћу решавајуће једначине. Зарад тога узмимо на ум то, да је претпоследњи остатак при горе поменутом раду облика: $a + bx$, где су a и b функције само y-а, и да је тај претпоследњи остатак за сваку нађену вредност y-а заједнички чинилац датих полинома, претпостављајући наравно, да у овима место y стоји иста вредност као и у том остатку. Одатле следује, да ћемо вредности x-а, које одговарају нађеним вредностима y-а, т. ј. које с њима у свези задовољавају обе дане једначине, наћи, кад претпоследњи остатак ставимо $= 0$, тако добивену једначину решимо односно x, па онда у изразу за x заменимо редом y нађеним вредностима. Према свему до сад реченоме излази дакле:

Да се сва разрешења датих једначина налазе разрешењем једначина, које постају из последња два остатка, нађена при примени методе највећег заједничког делиоца на задате полиноме.

Примедба. Ако су задати полиноми уређени по степенима y-а а не x-а, онда ће се у решавајућој једначини налазити само непозната x. Претпоследњи остатак у том случају биће облика: $a' + b'y$, где су a' и b' функције само x-а.

125. У овој №-и намера нам је да покажемо још јасније, да су сва разрешења датих једначина доиста истоветна са разрешењима једначина, које постају, кад се горе поменута последња два остатка ставе $= 0$.

Ми при том можемо претпоставити, да полиноми задатих једначина немају заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих или само једне од њих. Јер ако би задате једначине имале заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих, то би се само собом открило, кад бисмо на задате полиноме применили методу највећег заједничког делиоца, јер би тада последњи остатак био $= 0$, а претпоследњи би био заједнички делилац полинома. Задате једначине биле би неодређене, оне би т. ј. имале бесконачно много разрешења. Кад бисмо у таквом случају скратили задате једначине са нађеним заједничким делиоцем, онда полиноми нових једначина не би више имали заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих.

Да ли пак полиноми задатих једначина имају као заједничког делиоца једну функцију само x-а или само y-а, може се дознати одмах у почетку рада. Зарад тога уредимо полиноме најпре по степенима н. пр. x-а, а за тим тражимо заједничког делиоца сачиниоцима узастопних степена од x како у једном тако и у другом полиному. Ако би било таквог заједничког делиоца, како за један тако и за други полином, онда би заједнички делилац тих делилаца био и заједнички делилац полинома задатих једначина, и ако тај заједнички делилац полинома није особени број него функција y-а, онда би задате једначине (№ 124) биле опет неодређене. Али кад бисмо их скратили и са тим заједничким делиоцем, оне би после тога могле имати као заједничког делиоца још само какву функцију x-а. Да бисмо дознали, да ли је то случај или не, ми ћемо полиноме уредити поново, али по степенима y-а и за тим ћемо тражити заједничког делиоца сачиниоцима и једног и другог полинома. Заједнички делилац тако нађених делилаца биће заједнички делилац полиномима задатих једначина, са којим се оне могу скратити.

Претпостављајући дакле, да полиноми задатих једначина немају никаква заједничка делиоца, радимо са њима онако, као кад бисмо им тражили највећег заједничког делиоца, користећи се при том свима познатим рачунским олакшицама. Те олакшице састоје се с једне стране у томе, што се узастопни дељеници имају помножити како кад са једним особеним бројем или функцијом y-а, и то зарад тога, како сачиниоци количника и остатка не би били разломци, а с друге стране у томе, што се узастопни остатци зарад простијег посла имају скратити са особеним бројем, који би се јавио као чинилац — заједнички — њихових чланова. Зарад онога што ће доћи, ми претпостављамо, да ако би сачиниоци којег остатка имали какву функцију y-а као заједничког чиниоца, да тај остатак није скраћен с том функцијом. Цео низ узастопних радова може се представити овим једначинама:

$$\text{1.)}\qquad \begin{aligned} KA &= BQ + R \\ K_1B &= RQ_1 + R_1 \\ K_2R &= R_1Q_2 + R_2 \\ K_3R_1 &= R_2Q_3 + R_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ K_nR_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n \end{aligned}$$

где су $K, K_1, K_2 \ldots K_n$ најпростији чиниоци, са којима је ваљало помножити дотичне дељенике, те да сачиниоци количника и остатка испадну цели. Из прве једначине 1) следује, да свако разрешење задатих једначина:

$$2.) \qquad A = 0 \quad \text{и} \quad B = 0$$

т. ј. сваки спрег вредности x-а и y-а, које поништавају у исти мах и A и B, морају поништити и први остатак R. Дакле сва разрешења задатих једначина 2) јесу у исти мах и разрешења једначина:

$$3.) \qquad B = 0 \quad \text{и} \quad R = 0$$

На исти начин дознајемо из друге једначине под 1), да сва разрешења једначина 3), па дакле и једначина 2) јесу у исти мах и разрешења једначина:

$$4.) \qquad R = 0 \quad \text{и} \quad R_1 = 0$$

Из треће једначине под 1) дознајемо, да сва разрешења једначина 4), па дакле и једначина 3) и једначина 2) јесу у исти мах и разрешења једначина:

$$5.) \qquad R_1 = 0 \quad \text{и} \quad R_2 = 0$$

Продужавајући овако и даље наћи ћемо најзад, да сва разрешења задатих једначина јесу у исти мах разрешења сваког од ових спрегова једначина:

$$\left.\begin{matrix} B = 0 \\ R = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} R = 0 \\ R_1 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \left.\begin{matrix} R_{n-1} = 0 \\ R_n = 0 \end{matrix}\right\}$$

Последње две једначине јесу оне у № 124 поменуте, које постају из последња два остатка. Друга од тих једначина има само непознату y, и решењем те једначине добијају се све вредности за ту непознату, које одговарају задатим једначинама.

Повратимо се опет на једначине 1), које ћемо сада прелазити у обрнутом смислу, т. ј. одоздо на горе. Из последње једначине под 1), видимо, да свако разрешење једначина:

$$6.) \qquad R_{n-1} = 0, \quad R_n = 0$$

мора поништити $K_n R_{n-2}$, а то може бити, ако је или $K_n = 0$ или $R_{n-2} = 0$. Одатле следује, да се међу разрешењима једначина 6) морају налазити разрешења једначина:

$$7.) \quad \left.\begin{matrix} K_n = 0 \\ R_{n-1} = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad 8.) \quad \begin{matrix} R_{n-2} = 0 \\ R_{n-1} = 0 \end{matrix}$$

Прелазећи на претпоследњу једначину, дознаћемо на сличан начин, да се међу разрешењима једначина 8) морају налазити разрешења једначина:

$$\left.\begin{matrix} K_{n-1} = 0 \\ R_{n-2} = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad \begin{matrix} R_{n-3} = 0 \\ R_{n-2} = 0 \end{matrix}$$

и ако тако и даље продужимо, заустављајући се код сваке од једначина под 1), доћи ћемо најзад до закључка, да се међу разрешењима једначина 6), које постају из последња два остатка, морају налазити разрешења свију ових спрегова једначина:

$$\left.\begin{array}{l} K_n = 0 \\ R_{n-1} = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} K_{n-1} = 0 \\ R_{n-2} = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots \quad \left.\begin{array}{l} K = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}$$

И на тај начин видимо, да су једначине 6) општије од задатих, јер оне имају као разрешења не само разрешења задатих једначина, него и разрешења свију оних спрегова једначина, који постају, кад се ставе једнаки нули сваки делилац, као и количина K, са којом је одговарајући дељеник био помножен.

Закључимо дакле из свега тога, да решавајућа једначина $R_n = 0$, коју добијамо применом методе највећег заједничког делиоца, има истина као корене све вредности y-а, које одговарају задатим једначинама, али да она може имати као корене и такве вредности y-а, које никако не одговарају задатим једначинама, или које су им, као што се то каже, *стране*. Ми рекосмо: *може*, јер се дешава по кад кад, да ни један спрег једначина, које следују:

$$9.)\quad \left.\begin{array}{l} K_n = 0 \\ R_{n-1} = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} K_{n-1} = 0 \\ R_{n-2} = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots \quad \left.\begin{array}{l} K = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}$$

нема разрешења, у ком је случају $R_n = 0$ права решавајућа једначина. Један ма који спрег једначина од оних под 9) неће имати ни једног разрешења онда, кад свака вредност y-а, коју даје прва једначина тога спрега, поништава све оне чланове друге једначине истога спрега у којима се налази x. *Први спрег једначина под* 9) *нема и не може никад имати разрешења.*

126. Ако би неке од једначина под 9) имале разрешења, која ће се, као што смо видели, налазити међу разрешењима једначина 6):

$$R_{n-1} = 0, \quad R_n = 0$$

онда та разрешења треба у опште напустити, јер она не одговарају задатим једначинама. Ми рекосмо *у опште*, јер има случајева, где по неко разрешење једначина под 9) јесте разрешење и самих задатих једначина. Узмимо н. пр. да смо са $K_3 = (y - \beta)$ морали помножити четвртог дељеника R_1 у једначинама под 1) № 125. Ако је сад $(y - \beta)$ чинилац не само првом члану одговарајућег делиоца R_2 него и самом том делиоцу, онда ће се он морати јавити као чинилац и у свима доцнијим остацима до последњега закључно, као што се то може увидети из једначина 1) у № 125. Пошто је сад за $y = \beta$ $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ и т. д. при ма каквој вредности x-а, то је онда јасно, да ће R_1 *при тој вредности* y-а морати бити последњи делилац. Ако дакле K_2. K_1 и K нису $= 0$ за $y = \beta$, онда је увиђавно, да ће $y = \beta$ у свези са вредношћу x-а, која се помоћу ње добија из једначине $R_1 = 0$, морати задовољити и задане једначине.

Кад смо на тај начин сазнали оне корене једначине $R_n = 0$, који не одговарају задатим једначинама, онда да бисмо добили праву решавајућу једначину, треба само R_n поделити са кореним чиниоцима, који постају из тих корена.

Примери

1°. Да се реше једначине:

$$x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - y^3 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 - 2yx + y^2 - y = 0.$$

При првој деоби добија се $x - y$ као количник, а као остатак:

$$R = x - 2y$$

При другој и последњој деоби добија се x као количник, а као други и последњи остатак:

$$R_1 = y^2 - y$$

Пошто ни једног дељеника нисмо морали множити, то је:

$$y^2 - y = 0$$

права решавајућа једначина; корени су њени:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = +1.$$

Кад претпоследњи остатак $x-2y$ ставимо $= 0$ добићемо:

$$x = 2y$$

Кад овде заменимо y са нађеним вредностима, наћићемо као одговарајуће вредности x-а

$$x = 0, \quad x = 2.$$

2°. Да се реше једначине:

$$(y-1)x^2 + 2x - 5y + 3 = 0$$

$$yx^2 + 9x - 10y = 0$$

Првог дељеника, а то је први задати полином, треба помножати са y, како би сачиниоци количника и остатка испали цели. Први је количник $(y-1)$ а први остатак:

$$R = (-7y + 9)x + 5y^2 - 7y$$

При другој деоби, при којој је дељеник помножен са $(-7y + 9)^2$, добија се као количник:

$$yx + (-5y^3 + 7y^2 - 63y + 81)$$

а као остатак и то последњи:

$$R_1 = 25y^5 - 70y^4 - 126y^3 + 414y^2 - 243y$$

Решавајућа једначина, која се добија, кад се овај остатак стави $= 0$, даје за y ове вредности:

$$y = 0,\ 1,\ 3,\ -\frac{3 \pm 3\sqrt{10}}{5}$$

Кад ове вредности заменимо у једначину, која постаје, кад се претпоследњи остатак стави $= 0$, наћи ћемо као одговарајуће вредности x-а:

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 5 \mp \sqrt{10}$$

Но сад треба видети, да ли међу нађеним разрешењима има и таквих, која не одговарају задатим једначинама.

Пошто смо првог дељеника помножили са y, то треба решити ове једначине:

$$y = 0, \quad yx^2 + 9x - 10y = 0$$

Једно разрешење ових једначина јесте $x = 0$, $y = 0$, и то разрешење треба одбацити.

Други дељеник био је помножен са $(-7y + 9)^2$ дакле треба решити једначине:

$$-7y + 9 = 0,\ (-7y + 9)x - 5y^2 - 7y = 0$$

Но оне немају разрешења, и за то услед множења другог дељеника није придошао никакав стран корен решавајућој једначини. На тај начин остају само четири разрешења задатих једначина:

$$\left.\begin{matrix} y = 1 \\ x = 1 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = 3 \\ x = 2 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = \dfrac{-3+3\sqrt{10}}{5} \\ x = -5 - \sqrt{10} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = \dfrac{-3-3\sqrt{10}}{5} \\ x = -5 + \sqrt{10} \end{matrix}\right\}$$

3°. Да се реше једначине:

$$x^3 - 3(y-1)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x -$$

$$- y^3 + 3y^2 + y - 3 = 0$$

$$x^2 + 2(y+2)x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

Остатак при првој деоби скраћен са 4 јесте:

$$R = 3y(y+1)x + y^3 + 6y^2 + 5y.$$

При другој деоби треба дељеника, а то је други задати полином, помножити са $3y^2(y+1)^2$. Остатак при деоби са 4 скраћен јесте:

$$R_1 = y^6 + 3y^5 + y^4 - 3y^3 - 2y^2$$

или

$$R_2 = y^2(y^4 + 3y^3 + y^2 - 3y - 2)$$

Кад се овај остатак, који је последњи, стави $= 0$ и добивена једначина реши, налазимо као корене њене:

$$y = 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1,\ -2$$

Но питање је сад, да ли међу овим коренима има и таквих, који не одговарају датим једначинама. Једини корени, који би могли не одговарати задатим једначинама, могли би бити $y = 0$ и $y = -1$, који долазе од чинилаца y и $y + 1$ увучених у рачун при другој деоби. Да бисмо испитали, да ли $y = 0$ одговара задатим једначинама, треба решити једначине:

$$y = 0,\ 3y(y+1)x + y^3 + 6y^2 + 5y = 0$$

Као што се види сви чланови друге једначине за $y = 0$ јесу $= 0$, јер је y чинилац полиному; дакле ваља вредности $y = 0$ тражити одговарајућу вредност x-а из једначине:

$$x^2 + 2(y+2)x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

Одавде за $y = 0$ следује једначина:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

и њени корени: $x = -1$, $x = -3$ одговарају вредности $y = 0$. Дакле су (№ 126):

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ x = -1 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = 0 \\ x = -3 \end{matrix}\right\}$$

разрешења задатих једначина.

Да бисмо испитали, да ли $y = -1$ одговара задатим једначинама, треба решити једначине:

$$y + 1 = 0,\ 3y(y+1)x + (y^3 + 6y^2 + 5y) = 0$$

Али чланови друге једначине постају $= 0$ за $y = -1$, јер је $(y+1)$ чинилац њеној левој страни; дакле треба вредности $y = -1$ одговарајуће вредности x-а тражити (№ 126) из једначине:

$$x^2 + 2(y+2)x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

Одавде за $y = -1$ добијамо:

$$x^2 + 2x = 0$$

и њени корени $x = 0$, $x = -2$ одговарају вредности $y = -1$. Дакле су:

$$\left.\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = -1 \\ x = -2 \end{array}\right\}$$

такође разрешења задатих једначина. Остала два разрешења јесу, као што је лако наћи:

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

4°. $$y^3x^2 - 3y^3x - y^2 + 2 = 0$$

$$(y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - 3y + 1 = 0$$

Пошто су оба полинома истог степена односно x, то је све једно, узели ма који од њих за првог дељеника. Ако узмемо први полином као дељеника, треба га помножити са $(y^2 - 3y + 2)$. Први је остатак:

$$R = (-3y^5 + 8y^4 - 5y^3)x + (2y^4 + 2y^3 - 6y + 4)$$

Први сачинилац остатка може се представити као производ овако:

$$-y^3(y-1)(3y-5)$$

Други члан остатка нема ни једног од ових чинилаца. Пошто се даље први сачинилац другог задатог полинома може написати овако:

$$(y-1)(y-2)$$

то је онда јасно, да другог дељеника треба помножити са:

$$y^6(y-1)(3y+5)^2$$

Други и последњи остатак узет са противним знаком и стављен $= 0$, даје једначину:

$$27y^{10} - 136y^9 + 214y^8 - 112y^7 + 65y^6 - 100y^5 + 30y^4$$
$$-24y^3 + 120y^2 - 112y + 32 = 0.$$

Сад треба видети, да ли ова једначина има и таквих корена, који задатим једначинама не одговарају. При првој деоби увучени су у рачун чиниоци $(y-1)$ и $(y-2)$, дакле треба најпре решити једначине:

$$y - 1 = 0,\ (y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - 3y + 1 = 0$$

Но оне немају разрешења и за то $+1$ не јавља се као корен горње једначине 10-ог степена.

А сад ваља решити једначине:

$$y - 2 = 0,\ (y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - 3y + 1 = 0$$

Једно разрешење истих јесте:

$$y = 2, \quad x = 5$$

и њега треба одбацити. Дакле горња једначина 10-ог степена има страног чиниоца $(y-2)$, са којим кад се она скрати, излази као истинска решавајућа једначина:

$$27y^9 - 82y^8 + 50y^7 - 12y^6 + 41y^5 \quad 18y^4$$

$$- 6y^3 - 36y^2 + 48y - 16 = 0$$

127. У овој №-и пређи ћемо неколико особених случајева, који се могу десити при тражењу решавајуће једначине.

1°. При узастопним деобама може се десити, да по неки делилац има какву функцију y-а као чиниоца. Тада зарад простијег посла треба тога делиоца скратити са тим његовим чиниоцем. Али се онда обично губе по неки корени решавајуће једначине. Но помоћу једначина 1) у № 125 врло је лако доказати, да се ти изгубљени корени могу добити решењем двеју једначина, које постају, кад се ставе једнаки нули: функција y-а, са којом је био помножен дотични делилац и одговарајући дељеник. Ако је тај дељеник био односно x r-нога степена, онда да бисмо у таквом случају добили потпуну решавајућу једначину, треба помножити последњи остатак са $\{\varphi(y)\}^r$, ако је са $\varphi(y)$ био скраћен дотични делилац.

2°. Вредности x-а, које одговарају вредностима y-а, добивеним помоћу решавајуће једначине, налазе се, видели смо из једначине, која постаје из претпоследњег остатка, т. ј. из:

$$1.) \qquad R_{n-1} = a + bx = 0$$

Али се при том може десити, да по нека вредност $y = \beta$, коју нам даје решавајућа једначина, поништава a и b тако, да се из једначине 1) не може наћи вредност x-а, која одговара вредности $y = \beta$. Али пошто, као што смо то већ видели, свако разрешење датих једначина поништава не само полиноме, него и сваки од узастопних остатака, то ћемо дакле тражити одговарајућу вредност x-а из једначине:

$$R_{n-2} = a' + b'x + c'x^2 = 0$$

где су a', b', c' у опште функције y-а. Тада ће дакле вредности $y = \beta$ одговарати две вредности x-а. Али ако би и остатак R_{n-2} за $y = \beta$ био идентично $= 0$, онда бисмо морали тражити одговарајуће вредности x-а из једначине:

$$R_{n-3} = 0$$

која је односно x трећег степена. У том случају одговарале би вредности $y = \beta$ три вредности x-а и т. д.

Међу тим треба напоменути, да ако се при узастопним деобама буду скраћивали делиоци са њиховим чиниоцима, ако ових то јест буде било, да се велим онда у једначини, која постаје из последњег остатка, неће никад јавити такви корени, који би поништавали идентично претпоследњи остатак или још који пред њим.

3°. Ако је у задатим једначинама:

$$A = 0, \quad B = 0$$

$A = A'C$, где је C функција само y-а, онда се оне очевидно могу сменити овим једначинама:

$$\left.\begin{array}{l}A'=0\\B=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}C=0\\B=0\end{array}\right\}$$

Ако је сад $R_n^1 = 0$ решавајућа једначина првом од ових спрегова, онда је $CR_n^1 = 0$ решавајућа једначина задатим једначинама.

Ако ли су $A=A'C$, $B = B'C'$ где су C и C' функције само y-а, које немају заједничка делиоца, који би био функција y-а, онда се дане једначине могу сменити овима:

$$\left.\begin{array}{l}A'=0\\B'=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}A'=0\\C'=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}B'=0\\C=0\end{array}\right\}$$

Али ако функције C и C' имају као заједничког делиоца функцију y-а D тако, да је:

$$C = C_1 D \quad \text{и} \quad C' = C_1' D$$

онда су дане једначине облика:

$$A'C_1 D = 0\,, \quad B'C_1' D = 0$$

и оне су, при ма каквој вредности x-а, задовољене сваким од бесконачно много корена једначине $D = 0$. Задате једначине тада су дакле неодређене. Али ако из задатих полинома истиснемо заједничког чиниоца D, онда су нове једначине:

$$A'C_1 = 0 \quad B'C_1' = 0$$

одређене и ако је $R_n' = 0$ њихова решавајућа једначина, онда је:

$$R_n' C_1 C_1' = 0$$

решавајућа једначина задатих једначина.

На сличан начин ваља умовати, кад су:

$$C,\ C',\ C_1,\ C_1' \ \text{и}\ D$$

функције само x-а.

Ако најзад полиноми A и B задатих једначина имају као заједничког чиниоца једну функцију x-а и y-а, онда су задате једначине неодређене, што смо ми већ једном приликом напоменули. И тај заједнички чинилац открива се сам собом при примени методе највећег заједничког делиоца на задате полиноме.

4°. Ако се као последњи остатак при узастопним деобама јави особен какав број, онда се задате једначине косе, т. ј. тада нема никаквог спрега вредности за x и y, који би их задовољавао.

Примери.

1°. Да се реше једначине:

$$x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 2y^2 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + (6-y)\,x - 2y^2 = 0$$

Узимајући први полином за дељеника добијамо као први остатак:

$$-4(y-1)\,x^2 + (5y^2+y-6)\,x - 2y^2\,(y-1)$$

Кад га скратимо са његовим чиниоцем $(y-1)$, добићемо:

$$-x^2+(5y+6)x-2y^2$$

и то ће бити други делилац. Кад други и последњи остатак скратимо са — 64 и ставимо га $= 0$, добијамо једначину:

$$2y^6-27y^5+108y^4-108y^3=0.$$

Једначина, која постаје из претпоследњег остатка, јесте:

$$(17y^2-36y+36)x-(10y^3+12y^2)=0.$$

Решењем ових двеју једначина добијамо:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\ 3\ \text{пут},\qquad \left.\begin{matrix} x=6 \\ y=6 \end{matrix}\right\}\ 2\ \text{пут},\qquad \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \end{matrix}\right\}$$

При другој деоби скратили смо делиоца са $(y-1)$, дакле нађеним разрешењима придолазе још и разрешења ових једначина:

$$y-1=0,\ x^3-4x^2+(6-y)x-2y^2=0$$

а та су разрешења:

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}\ 2\ \text{пут},\qquad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$$

Праву решавајућу једначину добили бисмо, кад бисмо помножили са $(y-1)^3$ једначину, која је постала из последњег остатка.

2°. Да се реше једначине:

$$x^2+(y+2)x-6y^2-4y=0,$$

$$x^2+3x-y^2-5y-4=0.$$

Кад узмемо први полином као дељеника, добијамо као први остатак:

$$(y-1)x-5y^2+y+4.$$

Кад дељеника при другој деоби помножимо са $(y-1)^2$, добијамо после извршене деобе као други и последњи остатак:

$$24y^4+2y^3-52y^2+2y+24.$$

Кад га ставимо $= 0$ и решимо једначину, добићемо:

$$y=-\frac{3}{4},\ -\frac{4}{3},\ 1,\ 1.$$

Одговарајуће вредности x-а тражићемо из једначине:

$$(y-1)x-5y^2+y+4=0.$$

За $y=-\frac{3}{4}$ јесте $x=\frac{1}{4}$; за $y=-\frac{4}{3}$ јесте $x=-\frac{8}{3}$; а за $y=1$ јесте $x=\frac{0}{0}$. Дакле ћемо вредности x-а, које одговарају вредности $y=1$, наћи из друге задате једначине, кад у њој ставимо $y=1$, дакле из:

$$x^2+3x-10=0.$$

Корени ове једначине јесу $x=2$, $x=-5$ и те одговарају вредности $y=1$.

3°. Да се реше једначине:

$$yx^3 - (y^3 - 3y - 1)\,x + y = 0,$$

$$x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

Остатак је при првој деоби $(x+y)$ а при другој број $+\,3$, дакле се задате једначине косе. Да задате једначине не могу заједно опстати, може се лако и на други начин увидети. Јер из прве деобе следује, да се једначина 1) може представити овако:

$$(x^2 - y^2 + 3)\,yx + x + y = 0:$$

али она, кад погледамо на другу задату једначину, своди се на ову:

$$x + y = 0.$$

Кад ову помножимо са $(x-y)$, добијамо:

$$x^2 - y^2 = 0,$$

који се резултат очевидно коси са:

$$x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

4°. Да се реше једначине:

$$x^2 - (3y+1)\,x + 2y^2 - y = 0,$$

$$x^2 - 2\,(2y-1) + 3y^2 - 2y = 0.$$

Као први остатак добијамо:

$$(y-1)\,x - y\,(y-1);$$

кад га скратимо са $(y-1)$, онда је други делилац $(x-y)$, којим је други дељеник дељив. Дакле је $(x-y)$ заједнички чинилац задатих полинома. И доиста ти се полиноми могу написати и овако:

$$(x-y)\,(x-2y+1)\,, \quad (x-y)\,(x-3y+2).$$

Задате једначине јесу неодређене.

5°. Да се реше једначине:

$$2(x^2-1)\,y^3 - (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1)\,y^2 -$$
$$(x^5 - 2x^3 + x)\,y = 0,$$

$$(x-1)\,y^5 + x\,(x-1)\,y^4 - x^2\,(x-1)\,y^3 - x^3\,(x-1)\,y^2 = 0.$$

Оне се могу представити овако:

$$y(x-1)\,(x+y)\,(x+1)\,(x^2 - 2y - 1) = 0$$

$$y(x-1)\,(x+y)\,y\,(x^2 - y^2) = 0.$$

Стављајући једнаке нули сваког од заједничких чинилаца добићемо:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = \text{неодр.} \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} y = \text{неодр.} \\ x = 1 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} y = \text{неодр.} \\ x = -\,y \end{array}\right\}$$

Стављајући једнаке нули остале чиниоце добијамо ова 4 спрега једначина:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 - 2y - 1 = 0 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 - 2y - 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

И кад их редом разрешимо, наћи ћемо ова разрешења:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = \pm 1 \\ x = -1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

6°. Да се разреше једначине:

$$(yx - 6)\ (x^2 - 1) = 0,$$

$$(2x - 3y)\,(x^2 - y^2) = 0.$$

Њих можемо написати и овако:

$$(yx - 6)\ (x + 1)\,(x - 1) = 0,$$

$$(2x - 3y)\,(x + y)\,(x - y) = 0.$$

Комбинујући чиниоце прве једначине са чиниоцима друге добићемо:

$$\left.\begin{array}{l} yx - 6 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} yx - 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} yx - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}.$$

Разрешења ових па дакле и задатих једначина јесу:

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm 2 \\ x = \pm 3 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = +\frac{2}{3} \\ x = +1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = -\frac{2}{3} \\ x = -1 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm \sqrt{-6} \\ x = \mp \sqrt{-6} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = -1 \\ x = +1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = +1 \\ x = -1 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm \sqrt{6} \\ x = \mp \sqrt{6} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = +1 \\ x = +1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = -1 \\ x = -1 \end{array}\right\}.$$

Примедба. Из овога примера увиђа се, како се могу склопити једначине, кад су нам њихова разрешења позната.

128. Друга метода, по којој се увек добија права решавајућа једначина, јесте ова, која сад долази.

Узмимо да су нам дате једначине:

1.) $A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$

2.) $B = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0,$

где су a_0 и b_0 од x-а и y-а независни бројеви а сва остала a и b у опште узев функције y-а, што смо већ и у № 123 видели.

Сад кад решимо прву једначину односно x, добићемо за исту непознату m вредности:

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad x_3 = \varphi_3(y) \; . \; . \; . \; .$$

$$x_m = \varphi_m(y),$$

и свака од тих m вредности мора задовољити једначину 1), па дали ми x-у у осталом ма какву вредност. Ако ли те вредности заменимо у једначину 2), добићемо овај низ једначина:

$$3.) \quad \left| \begin{array}{l} B_1 = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} + b_2 x_1^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \\ B_2 = b_0 x_2^n + b_1 x_2^{n-1} + b_2 x_2^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \\ B_3 = b_0 x_3^n + b_1 x_3^{n-1} + b_2 x_3^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ B_m = b_0 x_m^n + b_1 x_m^{n-1} + b_2 x_m^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \end{array} \right.$$

Леве стране ових једначина јесу у опште узев ирационалне функције y-а и ми сад тврдимо, да свака вредност $y = \beta$, која поништава једну ма коју од тих функција, мора одговарати задатим једначинама. Јер узмимо да β поништава н. пр. прву функцију B_1. Ако још узмемо да је α вредност од x_1 за $y = \beta$, онда спрег вредности $x = \alpha$, $y = \beta$ мора задовољити једначину 1), јер смо већ видели, да је $x = x_1$ морати задовољити, па имало y у осталом ма какву вредност. Пошто сад $y = \beta$ задовољава услед претпоставке једначину $B_1 = 0$, која није ништа друго но једначина 2), али у којој је x смењено са x_1, то онда дакле $y = \beta$ задовољава једначину 2) у свези са

вредношћу $x = \alpha$, коју вредност има $x = x_1$ за $y = \beta_1$ *Дакле доиста свака вредност y-а, која поништава једну од функција под* 3) *одговара задатим једначинама.*

Обратно свака вредност y-а, која одговара задатим једначинама, мора поништити једну од функција под 3).

Одатле закључујемо, да ће производ свију функција под 3) дати, кад га ставимо $= 0$, праву решавајућу једначину. Та је дакле једначина:

$$4.) \qquad B_1 B_2 B_3 \; . \; . \; . \; B_m = 0.$$

На први мах чини се, као да би требало решити једначину 1), те да би се могла добити једначина 4), али то није нужно. Јер лева страна једначине 4) јесте симетрична функција количина x_1, x_2, x_3 . . . x_m, пошто узајамном сменом ових количине B_1, B_2, B_3, ... B_m једна у другу прелазе. Дакле лева страна једначине 4) може се (№ 27) исказати сачиниоцима једначине 1).

Узмимо као пример ове две једначине:

$$x^2 + (2y-10)\,x + y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$x^2 - (2y-\;6)\,x + y^2 -\;\; 6y + \;\;5 = 0$$

Ако означимо корене прве једначине са x_1, x_2, то је онда:

$$B_1 = x_1^2 - (2y-6)\,x_1 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$B_2 = x_2^2 - (2y-6)\,x_2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

Множењем ових једначина добијамо:

$$\left.\begin{aligned} B_1 B_2 = x_1^2 x_2^2 - (2y-6)(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1) + \\ + (y^2-6y+5)(x_1^2+x_2^2) + (2y-6) x_1 x_2 \\ -(2y-6)(y^2-6y+5)(x_1+x_2) + (y^2-6y+5)^2 \end{aligned}\right\} = 0$$

Али је:

$$x_1 + x_2 = -(2y-10)$$

$$x_1 x_2 = y^2 - 10y + 21,$$

и по томе:

$$x_1^2 x_2^2 = y^4 - 20y^3 + 142y^2 - 420y + 441,$$

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -2y^3 + 30y^2 - 142y + 210,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2y^2 - 20y + 58.$$

Кад ове изразе заменимо у горњу једначину $B_1 B_2 = 0$, добићемо као решавајућу једначину:

$$y^4 - 16y^3 + 92y^2 - 224y + 192 = 0$$

Корени су њени:

$$y = 2,\ 4,\ 4,\ 6.$$

Као одговарајуће вредности x-а (№ 123) налазимо:

$$x = 1,\ 3,\ -1,\ 1.$$

Ова метода, која даје увек истинску решавајућу једначину, јесте врло заметна, кад је степен задатих једначина виши од другог.

Још нам остаје да докажемо, да степен решавајуће једначине 4) не може бити виши од mn; а то ће бити учињено, кад докажемо, да степен ни једног члана решавајуће једначине не може бити више од mn. Пошто се решавајућа једначина добија множењем једначина 3), то ће онда буди који члан њен бити:

$$b_\alpha\, b_\beta\, b_\gamma\, b_\delta \ldots\, b_\lambda . x_1^{m-\alpha} . x_2^{m-\beta} . x_3^{m-\gamma} . x_4^{m-\delta} \ldots\, x_\lambda^{m-\lambda} = LM$$

Али су сачиниоци b_α, b_β, b_γ, . . . b_λ највише α-ог, β-ог, γ-ог, . . . λ-ог степена односно y и с тога је производ L истих цела функција y-а највише μ-ог степена, где је:

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \lambda.$$

Број μ не може бити већи од mn, јер ни један од бројева α, β, γ, δ, . . . λ није већи од m а број истих опет није већи од n. Други чинилац M јесте функција количина x_1, x_2, x_3 . . . . x_λ највише $(nm - \mu)$-ог степена, где је:

$$nm - \mu = m - \alpha + m - \beta + m - \gamma + \ldots + m - \lambda,$$

и он је — M — симетрична функција тих количина. Према томе моћи ће се M изразити збировима узастопних степена количина x_1, x_2, x_3, . . . x_λ почев од 1-ог па до $(nm-\mu)$-ог степена. Ако сад узмемо на ум, да су сачиниоци a_0, a_1, a_2, . . . a_m једначине 1) функције y-а највише 0-ог, 1-ог, 2-ог, . . . m-ог степена, то ће нам онда бити јасно, да ћемо, кад поменуте збирове степена изразимо сачиниоцима a_0, a_1, a_2 . . . a_m помоћу образаца у №-ма 30 и 31, да ћемо велим за те збирове степена добити као вредности извесне функције y-а, које

$(nm - \mu)$-ти степен не могу премашити. Пошто је дакле један чинилац L горепоменутог члана решавајуће једначине највише μ-ог степена а други чинилац M највише $(nm - \mu)$-ог степена, то онда степен тога члана може бити највише $(nm - \mu + \mu)$ или nm.

Ако су обе задате једначине потпуне, онда је степен решавајуће једначине тачно mn, као што се даје лако извести из мало час извршеног доказа.

129. Трећи начин добијања решавајуће једначине јесте овај, који ћемо сад показати.

Нека су:

1.) $a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$

2.) $b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m = 0$

задате једначине. Ми претпостављамо, као што се види, да су обе истог степена, јер у противном случају ми бисмо могли учинити, да оне буду истог степена. Зарад тога требало би само помножити са одговарајућим степеном x-а ону једначину, која је нижег степена.

Кад сад помножимо једначину 1) са b_0 а једначину 2) са a_0 и резултате одузмемо, добићемо нову једначину, која је $(m-1)$-ог степена односно x:

3.) $c_1x^{m-1} + c_2x^{m-2} + c_3x^{m-3} + \ldots + c_m = 0$

где је: $c_1 = a_1b_0 - a_0b_1$, $c_2 = a_2b_0 - a_0b_2$ и т. д.

Али ако једначину 1) помножимо са b_m, једначину 2) са a_m и резултате опет одузмемо, добићемо избацив заједничког чиниоца x још једну једначину $(m-1)$-ог степена:

4.) $d_1x^{m-1} + d_2x^{m-2} + d_3x^{m-3} + \ldots + d_m = 0$

На тај начин ми смо из задатих једначина извели друге две, којих је степен односно x за јединицу нижи т. ј. $(m-1)$. Сад на сасвим исти начин можемо из једначина 3) и 4) извести друге две, којих је степен односно x опет за јединицу нижи т. ј. $(m-2)$. И ако на тај начин продужимо и даље, мораћемо најзад добити две једначине, које су првог степена односно x. Кад из истих избацимо x, добићемо једначину са непознатом само y. Та једначина даје вредности за y, а њима одговарајуће вредности за x даје једна од поменутих једначина, које су 1-ог степена односно x.

Но не треба изгубити из вида то, да у највише случајева поменута једначина са непознатом само y неће бити права решавајућа једначина, јер услед тога, што су у току рада увучене извесне функције y-а као чиниоци, може она дати за y и такве вредности, које не одговарају задатим једначинама.

Пример. Да се реше једначине:

$$x^2 - (2y + 5)x + (y^2 + 5y + 6) = 0$$

$$x^2 - 4yx + (4y^2 - 1) = 0$$

Одузимањем ових једначина добијамо:

$$(2y - 5)x - 3y^2 + 5y + 7 = 0$$

а одавде:

$$x = \frac{3y^2 - 5y - 7}{2y - 5}$$

Кад помножимо прву једначину са $(4y^2-1)$, другу са (y^2+5y+6), резултате одузмемо и затим скратимо са x, добићемо:

$$(3y^2-5y-7)\,x-4y^3+26y+5=0$$

и одавде:

$$x=\frac{4y^3-26y-5}{3y^2-5y-7}$$

Кад овај израз x-а ставимо једнак оном горе, добићемо:

$$\frac{3y^2-5y-7}{2y-5}=\frac{4y^3-26y-5}{3y^2-5y-7}$$

или кад као што треба сведемо:

$$y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0$$

Корени ове једначине јесу:

$$y=1,\ 2,\ 3,\ 4\,;$$

вредности x-а, које им одговарају, јесу:

$$x=3,\ 5,\ 5,\ 7.$$

130. Последњи начин добијања решавајуће једначине бива помоћу детерминаната. Узмимо, да су нам задате једначине:

$$1.)\quad A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m=0$$

$$2.)\quad B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_nx^{n-2}+\ldots+b_n+0$$

где су a_0 и b_0 стални бројеви а сва остала a и b познате нам функције y-а (№ 123). Решавајућу једначину добићемо, ако помоћу једне од познатих нам већ метода Sylvester-ове, Cauchy-јеве и т. д. избацимо из њих непознату x. Кад смо из добивене решавајуће једначине (резултанте) израчунали вредности за y, онда је лако наћи и вредности x-а, које им одговарају. Ако је н. пр. $y=\beta$ једна од нађених вредности y-а, онда за $y=\beta$ морају полиноми 1) и 2) имати један или више заједничких корена, или другаче, они морају имати као заједничког чиниоца једну функцију x-а првог или вишег степена, како кад поменутој вредности $y=\beta$ одговарају једна или више вредности x-а. Како се пак налазе заједнички корени двеју једначина, ми смо у пређашњим №-ма доста и опширно и јасно показали (види у осталом и №-е 173 и 189 алгеб. анализе).

Пример. Да се реше једначине:

$$x^3-4yx^2+5y^2x-2y^3=0$$

$$x^3-4x^2+(6-y)\,x-2y^2=0.$$

Кад се резултанта ових једначина нађена по Bezout-овој или Cauchy-јевој методи стави једнака нули, добијамо:

$$\begin{vmatrix} 4(y-1) & -(5y^2+y-6), & 2y^2(y-1) \\ -(5y^2+y-6), & 2y\,(y-1)\,(y+12) & 0 \\ 2y^2(y-1), & 0 & -12y^3(y-1) \end{vmatrix}=0$$

Ова се детерминанта може написати и овако:

$$\begin{vmatrix} 4\,(y-1), & -(5y+6)\,(y-1), & 2y^2(y-1) \\ -(5y+6)\,(y-1), & 2y(y-1)\,(y-12), & 0 \\ 2y^2(y-1) & 0 & -12y^3(y-1) \end{vmatrix} = 0$$

Кад се заједнички чиниоци стубова као и последње врсте извуку напоље (№ 171 алгеб анал.), онда излази:

$$4y^3(y-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -(5y+6) & 1 \\ -(5y+6) & 2y(y+12) & 0 \\ y & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или кад последњој врсти додамо са три помножену прву врсту:

$$4y^3(y-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -(5y+6), & 1 \\ -(5y+6), & 2y(y+12), & 0 \\ (y+12), & -3(5y-6), & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Одавде пак (№ 171 алгеб. анал. трећа теорема) добијамо:

$$4y^3(y-1)^3 \begin{vmatrix} -(5y+6), & 2y(y+12) \\ (y+12), & -3(5y+6) \end{vmatrix} = 0$$

или, кад детерминанту развијемо, најзад:

$$4y^3(y-1)^3 \left\{2y^3 - 37y^2 + 108y - 108\right\} = 0$$

И ово је решавајућа једначина. Корени су њени:

$$y = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6,\ 6,\ \frac{3}{2}.$$

Помоћу метода изложених у №-ма 175 и 176 алгеб. анализе као и № 52 или № 123 и доцнијих ове науке налазимо лако, да су одговарајуће вредности за x:

$$x = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 3.$$

Што се најзад тиче разрешења више од две једначине са онолико исто непознатих колико је једначина, има се ово приметити: Треба их најпре уредити по степенима једне непознате н. пр. x-а, па онда из две и две, не испуштајући при том ни једну из рачуна, избацити непознату x. На тај начин добићемо нове једначине, којих је број за јединицу мањи од броја задатих једначина, и у којима се непозната x више не налази. Из тих једначина треба за тим извести на исти начин нов низ једначина, којих је број опет за јединицу мањи и у којима још једне непознате нема, и тако ваља наставити, док најзад нисмо нашли две једначине са две само непознате, из којих се ове по показаним методама могу израчунати. Њима одговарајуће вредности осталих непознатих могу се онда лако израчунати редом из једначина, на које смо у рачуну раније нашли. Само треба при том добро пазити на то, да се разрешења, која задатим једначинама не одговарају, открију и затим одбаце.

131. Пре него што завршимо овај одељак, да покажемо још једну примену метода елиминације.

Узмимо да је дата једначина m-ог степена:

1.) $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$

и да се тражи једначина, чији је сваки корен позната и одређена функција двају одговарајућих корена једначине 1).

Узмимо даље, да је у обрасцу:

$$2.) \qquad y = \varphi(x_1, x_2),$$

где y представља непознати корен тражене једначине, а x_1 и x_2 ма која два корена једначине 1), исказан закон, како ма који корен тражене једначине зависи од два ма која корена дате једначине.

Пошто су сад x_1 и x_2 корени једначине 1), то онда морају вредити ове једначине:

$$3.) \quad f(x_1) = x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x_1 + a_m = 0$$

$$4.) \quad f(x) = x_2^m + a_1 x_2^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x_2 + a_m = 0.$$

И ми сад тврдимо, да се тражена једначина добија елиминацијом корена x_1 и x_2 из једначина 2), 3) и 4). И доиста једначина са непознатом y, која се јавља као резултат елиминације, остаје иста, па стајало у 2), 3) и 4) место x_1 и x_2 ма која друга два корена задате једначине.

Пређимо сад на овај особени случај истога задатка:

Да се нађе једначина, чији су корени разлике све од два и два корена једначине 1). Тражена једначина зове се *једначина простих разлика*.

Узмимо, да су:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$$

корени задате једначине 1). Ако означимо са y непознату тражене једначине, онда y представља једну ма коју од ових разлика:

$$x_1 - x_1, \; x_1 - x_2 \; \ldots \; x_1 - x_m, \; x_2 - x_1, \; x_2 - x_2, \; \ldots .$$

Пошто су сад x_1 и x_2 корени једначине 1) то стоје ове две једначине:

$$5.) \quad x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x_1 + a_m = 0$$

$$6.) \quad x_2^m + a_1 x_2^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x_2 + a_m = 0$$

Али из једначине:

$$y = x_2 - x_1 \quad \text{следује} \quad x_2 = x_1 + y.$$

Кад x_2 заменимо овом његовом вредношћу у 6), добићемо:

$$7.) \quad y^m + f^{m-1}(x_1)\, y^{m-1} + f^{m-2}(x_1)\, y^{m-2} + \ldots$$
$$+ f''(x_1)\, y^2 + f'(x_1)\, y + f(x_1) = 0,$$

где су сачиниоци узастопних степена од y вредности, које добијају полином задате једначине 1) и његови узастопни изводи за $x = x_1$. Али пошто је x_1 корен једначине 1), то је онда у једначини 7) $f(x_1) = 0$ и за то је сада:

$$8.) \quad y^m + f^{m-1}(x_1)\, y^{m-1} + \ldots + f'(x_1)\, y = 0$$

или пошто скратимо са y:

$$9.) \quad y^{m-1} + f^{m-1}(x_1)\, y^{m-2} + \ldots + f'(x_1) = 0$$

Једначина простих разлика добија се дакле, кад се из једначина 3) и 9) избаци x_1. Пошто се резултат елиминације не мења, кад у истим једначинама сменимо x_1 са ма којим другим кореном једначине 1) или и са њиховим заједничким представником x, то можемо казати, да се једначина простих разлика добија, кад се из једначина:

$$10.)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x)=0\\ &y^{m-1}+f^{m-1}(x)y^{m-2}+\dots+f'(x)=0\end{aligned}\right.$$

избаци x.

Једначину 9) добили смо, кад смо једначину 8) скратили са y. Тиме је истиснут корен $y=0$ једначине простих разлика, дакле онај, који постаје, кад се ма који корен задате једначине одузме сам од себе. На тај начин корени једначине, која се добија из једначина 10), постају, кад се сваки корен задате једначине одузме од свију осталих.

Најзад треба приметити, да ако задата једначина има једнаких корена, да ће онда и једначина простих разлика имати корена једнаких нули, дакле тада у њој неће бити једног или више чланова с десног краја.

132. Облик и склоп једначине простих разлика може се напред сазнати. Јер ако су опет x_1, x_2, x_3 . . . x_m корени задате једначине, то онда свакој разлици тих корена одговара друга разлика, која се од ње само знаком разликује. Тако н. пр разлици x_2-x_1 одговара разлика противнога знака x_1-x_2, разлици x_3-x_2 одговара разлика противнога знака x_2-x_3 и т. д. Дакле видимо, да кад је $+\alpha$ корен једначине простих разлика, да јој онда мора бити корен и $-\alpha$. Дакле једначина простих разлика може се представити овако:

$$(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)(y-\gamma)(y+\gamma)\dots=0$$

или овако:

$$(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)(y^2-\gamma^2)\dots=0$$

Као што се види, степен једначине простих разлика јесте паран, и у њој се могу налазити само парни степени непознате y. Њен је степен једнак броју разлика, које се могу начинити из m корена задате једначине, дакле $m(m-1)=2n$. Према томе једначина простих разлика, уређена по степенима y-а, изгледаће овако:

$$1.)\quad y^{2n}+b_1y^{2n-2}+b_2y^{2n-4}+\dots+b_{n-1}y^2+b_n=0.$$

Кад у овој једначини ставимо $y^2=z$, она се претвара у:

$$2.)\quad z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\dots+b_{n-1}z+b_n=0,$$

чији је степен половина степена једначине разлика, и чији су корени квадрати разлика из корена задате једначине:

$$3.)\quad x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_{m-1}x+a_m=0.$$

Једначина 2) јесте дакле једначина квадрираних разлика, коју смо ми пређе и то на два разна начина извели.

Најзад треба приметити још и ово, што иде. Пошто се разлике корена x_1, x_2, $x_3\dots x_m$ не мењају, кад те корене повећамо или пак смањимо за исти број a, онда можемо ради простијег рада избацити најпре из задате једначине други члан a_1x^{m-1}, па ново добивеној једначини тражити једначину простих и једначину квадрираних разлика; те ће једначине одговарати и задатој једначини.

Узмимо, да је дата једначина:

$$1')\quad f(x)=x^3-7x+6=0.$$

Овде је:

$$f'(x) = 3x - 7; \quad f''(x) = 3x; \quad f'''(x) = 1.$$

Дакле је сада једначина 7) №-е 131:

$$y^2 + 3xy + 3x^2 - 7 = 0$$

или:

2.) $$3x^2 + 3xy + y^2 - 7 = 0.$$

Кад се по једној ма којој од познатих нам метода из 1') и 2') избаци x, излази као једначина простих разлика:

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0,$$

а као једначина квадрираних разлика:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 400 = 0.$$

Корени су ове једначине: 1, 16, 25.

С. Cauchy-јева теорема о раздвајању уображених корена и њена примена.

133. Узмимо, да нам је дата једначина m-ог степена:

1.) $$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

где сачиниоци a могу бити стварни или уображени, и где је a_0 у сваком случају од нуле различно. Да ли једначина 1) има једнаких корена или не, треба као што то већ знамо, да тражимо највећег заједничког делиоца тој функцији $f(z)$ и њеном првом изводу $f'(z)$; ако те две функције немају заједничког делиоца, који би био функција z-а, онда су сви корени међу собом различни. Али ако оне имају као заједничког чиниоца функцију r-ог степена $\varphi(z)$, онда једначина 1) има само $(m-r)$ међу собом различних корена, а остали корени, којих је r на броју, јесу само извесна понављања оних првих. У том је случају:

$$f(z) = \varphi(z)\,\psi(z)$$

и једначина:

$$\psi(z) = 0$$

има као корене све корене дане једначине 1), али сваки само по један пут. Ми дакле можемо претпоставити, да су сви корени једначине 1) међу собом различити. — Да бисмо сад раздвојили уображене корене једначине 1), ми ћемо се користити теоремом 2) у № 164 алгеб. анализе, коју теорему можемо сада и овако исказати:

1°. *Кад променљива z опише један пут од почетка до краја и у положном смислу једну једноставну затворену линију, која је у коначној даљини од почетка, и на којој не лежи ни једна корена тачка функције $f(z)$, онда последња вредност функције $\frac{1}{2\pi i} lf(z)$ већа је од своје прве вредности за онолико јединица, колико је корена једначине $f(z) = 0$ у унутрашњости поменуте линије.*

Означимо са w вредност функције $f(z)$ за $z = x + yi$, па ћемо имати:

$$w = u + vi = \varrho e^{\theta i}$$

где су u и v стварне количине, а тако исто модуо ϱ као и аргуменат θ. Представник уображене количине w јесте тачка равни, којој су u и v правоугаоне, а ϱ и θ полне координате.

Пошто су сад u и v алгебарске целе и рационалне функције променљивих x и y, то се оне морају непрекидно мењати при непрекидном мењању тих променљивих. (№ 33 и 77 алг. анал.) и морају бити коначне, докле су год y и x коначни. Осем тога u и v јесу једнозначне функције x-а и y-а, и кад z описав једноставну затворену линију добије поново своју прву вредност, онда ће то исто бити случај и са количинама u и v.

Претпостављајући сад, да променљива z описује једноставну затворену линију онако, како је то у теореми 1° наглашено, ми ћемо прву вредност од w означити са w_0 а последњу са w_ω. Узмимо да је:

$$w_0 = u_0 + v_0 i = \varrho_0 e^{\theta_0 i}$$

$$w_\omega = u_\omega + v_\omega i = \varrho_\omega e^{\theta_\omega i}$$

тада је: $w_\omega = w_0$, $u_\omega = u_0$, $\varrho_\omega = \varrho_0$

дакле:

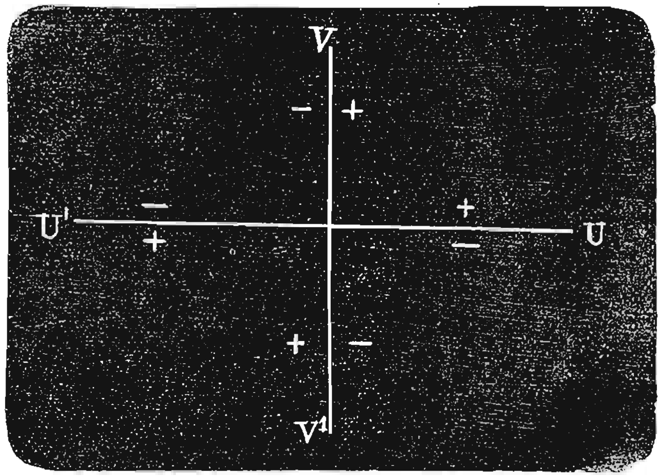
$$3.) \qquad log\, w_\omega - log\, w_0 = (\theta_\omega - \theta_0)\, i$$

Ако сад у унутрашњости линије, коју z описује, има k простих корена једначине 1), онда је на основу теореме 1):

$$4.) \qquad \theta_\omega - \theta_0 = 2k\pi$$

и обратно кад једначина 4) стоји, онда се у унутрашњости поменуте линије, коју z описује, налазе k простих корена једначине 1). Али у исто доба ми дознајемо из једначине 4), да кад z у својој бројној равни описује један пут поменуту линију, да онда велим и w у својој бројној равни прелази у наоколо око почетка 0 и непрекидно једну опет једноставну и затворену линију *и то k-пута узастопце.*

Да бисмо сад кретање тачке w изближе испитали, ми ћемо кроз почетак 0 бројне равни, која одговара променљивој w, повући две координатне осе $U'U$ и $V'V$, на које се преносе вредности од u и v. Десна пола U-осе и горња пола V-осе нека су положне поле њине, а друге поле њине нека су одречне поле њине. Ми ћемо код сваке поле тих оса разликовати положну и одречну страну онако, као што је на слици то показано:



Сл. 9.

Пошто је:

$$cotg\, \theta = \frac{u}{v}$$

то онда, кад променљива w описује у својој бројној равни поменуту криву линију, количник $\frac{u}{v}$ биће положан, кад се описани лук завршује у првој или трећој четврти, а одречан, кад се завршује у другој или последњој четврти.

Сад кад променљива w обиђе при кретању у својој бројној равни један пут око почетка 0, онда ће број њених прелаза са положне на одречну страну V-осе бити за две јединице већи од броја њених прелаза са одречне на положну страну исте осе. Исто је тако број њених прелаза са одречне на положну страну U-осе за две јединице већи од броја њених прелаза са положне на одречну страну исте осе.

Одавде опет следује јасно, да број прелаза количине $\frac{u}{v}$ из положног стања у одречно а кроз нулу јесте за две јединице већи од броја њених прелаза из одречног стања у положно опет кроз нулу; и да број прелаза исте количине из одречног стања у положно, а кроз ∞ јесте за две јединице већи од броја њених прелаза из положног стања у одречно опет кроз ∞.

Кад узмемо на ум ово што рекосмо, као и то, да услед једначине 4) променљива w прелази своју линију од почетка па до краја k пута узастопце, док међу тим променљива z пређе своју линију само један пут од почетка па до краја, то смемо исказати ову теорему:

2°. *Кад променљива z опише у својој бројној равни једанпут и у положном смислу једну једноставну затворену линију, која се налази у коначној даљини од почетка, и кад при том количник $\frac{u}{v}$ пређе чешће из положног стања у одречно, а кроз нулу, него ли обрнуто из одречног стања у положно, а опет кроз нулу, онда је разлика између броја прелаза прве и броја прелаза друге врсте паран број и два пут већи од броја простих корена једначине:*

$$u + vi = 0$$

који се налазе у унутрашњости z-ом описане линије.

И ово је Cauchy-јева теорема. Она вреди и онда, кад се у унутрашњости линије, коју z описује, више корених тачака поклапају. Али тада треба r корених тачака, које се поклапају, сматрати не као једну, већ као r простих корених тачака. Једноставну и затворену линију треба при том изабрати тако, да на њој нема ни једне корене тачке функције $f(z)$.

Што смо у почетку претпоставили, да задата једначина $f(z) = 0$ нема једнаких корена, било је због тога, да бисмо олакшали раздвајање корена. Корени ће бити раздвојени, кад је у бројној равни z-а обележена за сваки корен једна линија, у чијој се унутрашњости он и само он један налази. Најбоље је узети за такве линије правоугаонике, којих су стране паралелне са осом x-а и осом y-а. У странама, које су паралелне са осом x-а има y сталну вредност, а у странама, које су паралелне са осом y-а, има x сталну вредност. На тај начин тражење уображених корена своди се на тражење стварних корена једначинама са једном само непознатом.

Место теореме 1°, кад узмемо на ум оно, што смо пре ње говорили, можемо узети ову теорему:

2°. *Кад променљива z опише у својој бројној равни један пут и у положном смислу једну једноставну затворену линију, која је у коначној даљини од почетка, и кад при том количник $\frac{v}{u}$ пређе чешће из одречног стања у положно а кроз нулу, него ли обрнуто из положног стања у одречно опет кроз нулу, онда је разлика између броја прелаза прве и броја прелаза друге врсте паран број и два пут већи од броја простих корена једначине:*

$$u + vi = 0$$

што су у унутрашњости z-ом описане линије.

133. Правоугаоник у z-овој бројној равни, у чијој се унутрашњости налази само један уображен корен једначине $f(x) = 0$, можемо смањити дотле, да је само у двема тачкама његове периферије $u = 0$, и само у двема другим тачкама $v = 0$. Ако вежемо тачке у којима је $u = 0$, а тако исто и тачке у којима је $v = 0$, и ако кроз пресек тако добивених правих повучемо паралелне са координатним осама, онда ће онај првашњи правоугаоник бити разложен на четири мања правоугаоника. Помоћу онога, што смо сазнали у № 132, можемо онда лако пронаћи онај од та четири правоугаоника, у коме се тражени корен налази. Понављајући овај рад више пута, моћи ћемо наћи непознати уображени корен са сваком могућом приближношћу.

У осталом могу се уображени корени једначине израчунавати и то лакше путем елиминације. Ставимо у задатој једначини:

$$1.) \qquad f(z) = 0$$

$z = x + yi$. Тада ће се задата једначина претворити у једначину облика:

$$2.) \qquad u + vi = 0,$$

где су u и v целе и рационалне функције x-а и y-а. Једначина 2) распада се у једначине:

$$3.) \qquad u = 0, \quad v = 0.$$

Ако је сад $x = \alpha$, $y = \beta$ једно разрешење ових једначина, онда је очевидно:

$$z = \alpha + \beta i$$

један уображени корен једначине 1). Што се пак тиче разрешавања једначина под 3) са двема непознатима x и y, ми смо за тај посао показали више метода.

Читалац нека сам реши једначину:

$$z^4 - z + 1 = 0$$

која има само један положан и два уображена корена.

ДРУГИ ДЕО.

РАЗЛИЧНИ, ЗБИРНИ И АРИТМЕТИЧНИ РЕДОВИ И ИНТЕРПОЛАЦИЈА.

I. Различни редови.

134. Кад у једном задатом реду:

1.) $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$

који може бити ма какав, одузмемо сваки члан од онога, који је одмах за њим, добићемо нов ред количина.

$$u_2-u_1,\ u_3-u_2,\ u_4-u_3;\ \ldots\ u_{n+1}-u_n,\ \ldots$$

Чланови овог новог реда зову се прве разлике чланова задатог реда. И то посебице u_2-u_1 зове се прва разлика од u_1; u_3-u_2 зове се прва разлика од u_2 и у опште сваки члан новог реда зове се прва разлика оног члана задатог реда 1), који је у дотичном члану новога реда одузет. Прве разлике чланова задатог реда означавамо стављајући слово Δ пред одузетим чланом, дакле овако:

2.) $\Delta u_1 = u_2-u_1,\ \Delta u_2 = u_3-u_2\ \ldots$

$$\Delta u_n = u_{n+1}-u_n$$

Према овоме ред првих разлика или краће *први различни ред* биће представљен на овај начин:

3.) $\Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3,\ \ldots\ \Delta u_n,\ \Delta u_{n+1}\ \ldots$

Са овим редом првих разлика можемо радити онако исто као и са задатим редом. Ми можемо т. ј. и у реду 3) одузети сваки члан од онога, који је за њим, и тако ћемо добити нови ред:

$$\Delta u_2-\Delta u_1,\ \Delta u_3-\Delta u_2,\ \ldots\ \Delta u_{n+1}-\Delta u_n\ \ldots$$

Чланови овог реда, који су прве разлике чланова реда 3), зову се *друге разлике* чланова реда 1), и они би се према усвојеном начину означавања имали означити стављањем слова Δ пред одузети члан, дакле овако:

$$\Delta\Delta u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \Delta\Delta u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2\ \ldots$$

Али зарад краткоће слово Δ пише се само један пут, а уз њега се десно и озго пише казаљка 2. На тај начин ред других разлика, или краће: *други различни ред* биће представљен овако:

4.) $\Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \Delta^2 u_3\ \ldots\ \Delta^2 u_{n+1}\ \ldots$

Кад са овим другим редом разлика радимо онако исто, као што смо радили са задатим редом 1) и са редом 3), добићемо ред трећих разлика:

5.) $\Delta^3 u_1,\ \Delta^3 u_2,\ \Delta^3 u_3\ \ldots\ \Delta^3 u_n,\ \Delta^3 u_{n+1}\ \ldots$

где је:

$$\Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1,\ \ldots\ \Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n,\ \ldots$$

На тај начин можемо наставити и даље, и тако ћемо добити узастопце редове четвртих, петих . . . m-них разлика. Чланови реда m-них разлика означавају се са:

$$\triangle^m u_1,\ \triangle^m u_2\ .\ .\ .\ \triangle^m u_n,\ \triangle^m u_{n+1}\ .\ .\ .$$

где је у опште:

6.) $$\triangle^m u_n = \triangle^{m-1} u_{n+1} - \triangle^{m-1} u_n$$

Из последњег обрасца под 2) следује:

$$u_{n+1} = u_n + \triangle u_n$$

што ће рећи: $(n+1)$-ви т. ј. *ма који члан задатог реда једнак је предњем, — n-ом — члану истог реда, више n-ти члан реда првих разлика.* Исто тако из обрасца 6) следује:

$$\triangle^{m-1} u_{n+1} = \triangle^{m-1} u_n + \triangle^m u_n$$

а то ће рећи: $(n+1)$-ви, *т. ј. ма који члан у реду m-тих т. ј. ма којих разлика једнак је предњем n-ом члану истога реда више n-ти члан у реду m-них разлика, који одмах следује.*

Ако задати ред има коначан број чланова н. пр. $(m+1)$, онда ће у реду m-тих разлика бити само један члан. Јер очевидно у реду првих разлика биће један члан мање него у задатом реду, у реду других разлика биће два члана мање, у реду трећих разлика три члана мање, и т. д. у реду m-них разлика биће m чланова мање, дакле ће тај ред имати само један члан.

Између чланова задатог реда и чланова узастопних различних редова постоје извесни односи, који су са свим независни од тога, какви су чланови задатог реда.

И ми ћемо се у №-ама, што долазе, бавити тражењем тих односа.

135. На основу предње №-е имамо редом:

1.) $$\triangle u_n = u_{n+1} - u_n$$

$$\triangle^2 u_n = \triangle u_{n+1} - \triangle u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n)$$

или:

2.) $$\triangle^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

$$\triangle^3 u_n = \triangle^2 u_{n+1} - \triangle^2 u_n = \triangle u_{n+2} - 2\triangle u_{n+1} + \triangle u_n$$

$$= u_{n+3} - u_{n+2} - 2(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_{n+1} - u_n$$

или:

3.) $$\triangle^3 u_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n$$

И овде ћемо сад стати. Кад погледамо на једначине 1), 2) и 3), видимо да у њима владају ови закони:

a) Казаљка од u у првом члану десно од знака једнакости већа је од казаљке истог слова лево од знака једнакости за онолико јединица, колико износи горња казаљка од $\triangle$.

b) Казаљка од u десно опада поступно са јединицом, док најзад не постане $= n$.

c) Као сачиниоци узастопних чланова десно јављају се биномни сачиниоци и то у једначини 1) они, који се јављају у реду за $(x-a)^1$; у једначини 2) они, који се јављају у реду за $(x-a)^2$; у једначини 3) они, који се јављају у реду за $(x-a)^3$.

И сад треба доказати, да ови закони вреде у опште, т. ј. за ма који члан у реду ма којих разлика. Ми ћемо се послужити начином доказивања познатим под именом више индукције.

Претпоставимо, да поменути закони владају у изразу за $\triangle^m u_n$ то ће рећи за n-ти члан у реду m-них разлика. Тада је дакле:

$$4.)\qquad \triangle^m u_n = u_{n+m} - \binom{m}{1} u_{n+m-1} + \binom{m}{2} u_{n+m-2} - \dots$$

$$+ (-1)^{m-2} \binom{m}{m-2} u_{n+2} + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} u_{n+1} +$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{m} u_n.$$

Пошто овај образац на основу претпоставке вреди за ма који члан ма којег различног реда, то смемо сменити у њему n са $n+1$ и кад то учинимо, добићемо:

$$5.)\qquad \triangle^m u_{n+1} = u_{n+m+1} - \binom{m}{1} u_{n+m} + \binom{m}{2} u_{n+m-1} - \dots$$

$$+ (-1)^{m-2} \binom{m}{m-2} u_{n+3} + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} u_{n+2}$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{m} u_{n+1}$$

Али је по обрасцу 6) у № 134:

$$\triangle^{m+1} u_n = \triangle^m u_{n+1} - \triangle^m u_n.$$

Дакле, кад одузмемо једначину 4) од једначине 5) добићемо:

$$\triangle^{m+1} u_n = u_{n+m+1} - (m+1) u_{n+m} + \left\{ \binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right\} u_{n+m-1} + \dots$$

$$+ (-1)^{m-2} \left\{ \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-3} \right\} u_{n+3}$$

$$+ (-1)^{m-1} \left\{ \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2} \right\} u_{n+2}$$

$$+ (-1)^m \left\{ \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} \right\} u_{n+1} + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} u_n$$

где смо у последњем члану место $\binom{m}{m}$ метнули $\binom{m+1}{m+1}$, што је све једно, јер су оба израза $= 1$.

Али из науке о комбинацијама и то обрасца 7) у № 27 знамо да је у опште:

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} = \binom{m+1}{r}$$

Помоћу овог обрасца своди се последња једначина на ову:

$$\triangle^{m+1} u_n = u_{n+m+1} - \binom{m+1}{1} u_{n+m} + \binom{m+1}{2} u_{n+m-1} + \dots$$

$$+ (-1)^{m-2} \binom{m+1}{m-2} u_{n+3} + (-1)^{m-1} \binom{m+1}{m-1} u_{n+2}$$

$$+ (-1)^m \binom{m+1}{m} u_{n+1} + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} u_n.$$

У овој једначини, која је нужна последица једначине 4), владају као што видимо исти закони, који владају у једначини 4). Дакле смо доказали, да ако горе поменути закони вреде за ма какву целу и положну вредност m-а, они морају вредити и за вредност m-а, која је за јединицу већа. Но непосредним рачуном ми смо доказали, да он вреди за $m = 1$, 2 и 3; дакле он вреди у опште.

Из обрасца 4), чија је општост сада доказана, види се, *да је n-ти, т. ј. буди који члан у реду m-них разлика одређен n-им чланом задатог реда и са још m следећих чланова истога реда.*

Тако н. пр. ако је дат ред бројева:

$$1,\ 5,\ 10,\ 17,\ 21,\ 29,\ 37$$

онда је:

$$\triangle^5 u_1 = \triangle^5 1 = 29 - 5.\ 21 + 10.\ 17 - 10.10 + 5.\ 5 - 1.$$

136. Опет на основу №-е 134 добијамо:

$$1.)\qquad u_2 = u_1 + \triangle u_1$$

$$u_3 = u_2 + \triangle u_2 = u_1 + \triangle u_1 + \triangle u_1 + \triangle^2 u_1$$

или:

$$2.)\qquad u_3 = u_1 + 2\triangle u_1 + \triangle^2 u_1$$

$$u_4 = u_3 + \triangle u_3 = u_1 + 2\triangle u_1 + \triangle^2 u_1 + \triangle u_2 + \triangle^2 u_2$$

$$= u_1 + 2\triangle u_1 + \triangle^2 u_1 + \triangle u_1 + \triangle^2 u_1 + \triangle^2 u_1 + \triangle^3 u_1$$

или:

$$3.)\qquad u_4 = u_1 + 3\triangle u_1 + 3\triangle^2 u_1 + \triangle^3 u_1$$

Да не идемо даље, видимо, да у једначинама 1), 2) и 3) влада овај закон:

Члан n-ти задатог реда добија се, кад се први члан тога реда и први чланови узастопних различних редова до $(n-1)$-га закључно помноже редом са биномним сачиниоцима, који се јављају у $(n-1)$-ом степену бинома $(x-a)$.

Сад треба још доказати, да тај закон вреди не само за $n = 2$, 3 и 4, што смо непосредним рачуном доказали, него да он вреди у опште.

Претпоставимо дакле да тај закон вреди за u_n и докажимо, да он онда мора вредити и за u_{n+1}. Услед претпоставке стоји:

$$4.)\quad u_n = u_1 + \binom{n-1}{1}\triangle u_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 u_1 + \binom{n-1}{3}\triangle^3 u_1 + \ldots$$

$$+ \binom{n-1}{r-1}\triangle^{r-1} u_1 + \binom{n-1}{r}\triangle^r u_1 + \ldots + \triangle^{n-1} u_1$$

Пошто смо претпоставили, да овај образац вреди за u_1 и његове узастопне разлике $\triangle u_1$ $\triangle^2 u_1$, $\triangle^3 u_1 \ldots \triangle^{n-1} u_1$, то он мора вредити и за количину $\triangle u_1$ и њене узастопне разлике $\triangle^2 u_1$, $\triangle^3 u_1$, $\triangle^4 u_1 \ . \ . \ . \ \triangle^n u_1$. Дакле је на тај начин:

$$5.)\qquad \triangle u_n = \triangle u_1 + \binom{n-1}{1}\triangle^2 u_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^3 u_1 + \ldots$$

$$+ \binom{n-1}{r-1}\triangle^r u_1 + \ldots + \triangle^n u_1$$

Али је:

$$u_{n+1} = u_n + \triangle u_n$$

Кад дакле саберемо једначине 4) и 5), добићемо:

$$u_{n+1} = u_1 + \left\{\binom{n-1}{1} + 1\right\}\Delta u_1 + \left\{\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}\right\}\Delta^2 u_1 +$$

$$+ \left\{\binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}\right\}\Delta^3 u_1 + \dots$$

$$+ \left\{\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}\right\}\Delta^r u_1 + \dots + \Delta^n u_1$$

Или кад сведемо помоћу обрасца:

$$6.)\qquad \binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} = \binom{m+1}{r},$$

$$u_{n+1} = u_1 + \binom{n}{1}\Delta u_1 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_1 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_1 + \dots$$

$$+ \binom{n}{r}\Delta^r u_1 + \dots + \Delta^n u_1.$$

Дакле видимо, да горе поменути закон мора вредити за $(n+1)$, ако само вреди за n. Но ми смо непосредним рачуном дознали, да он вреди за $n = 2$, 3 и 4, дакле он вреди у опште.

137. Узмимо, да нам је дат ред:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots u_n + \dots$$

и да се тражи збирни образац тога реда, т. ј. образац за збир S_n првих n чланова његових. Поступним радом добијамо:

$$1.)\quad \left|\begin{array}{l} S_1 = u_1 \\ S_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + \Delta u_1 \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 \\ S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4u_1 + 6\Delta u_1 + 4\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 \end{array}\right.$$

Да не идемо даље, видимо, да се у изразима за узастопна S јављају као чиниоци, изузев првог биномног сачиниоца (1), сви остали биномни сачиниоци, који се показују у првом, другом, трећем и четвртом степену бинома $(x+a)$.

И сад треба доказати, да закон, који влада у обрасцима 1), вреди у опште. Претпоставимо дакле, да он вреди за S_n, па докажимо да он онда мора вредити и за S_{n+1}.

Услед претпоставке имамо:

$$2.)\quad S_n = nu_1 + \binom{n}{2}\Delta u_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_1 + \dots + \Delta^{n-1} u_1$$

Пошто је сад:

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1},$$

то онда, кад заменимо S_n његовом вредношћу под 2) а u_{n+1} опет његовом вредношћу, која се добија, кад се у обрасцу 4) № 136 n смени са $(n+1)$, налазимо:

$$S_{n+1} = nu_1 + \binom{n}{2}\Delta u_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_1 + \dots + \Delta^{n-1} u_1$$

$$+ \quad u_1 + \binom{n}{1}\Delta u_1 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_1 + \dots + \Delta^n u_1$$

или кад помоћу обрасца 6) у № 136 сведемо:

$$S_{n+1} = (n+1)\,u_1 + \binom{n+1}{2}\Delta u_1 + \binom{n+1}{3}\Delta^2 u_1 + \ldots + \Delta^n u_1$$

Дакле видимо, да кад горе поменути закон, који је у обрасцу 2) исказан, вреди за извесну вредност n-а, да он мора вредити и за непосредно већу, — разуме се целу — вредност n-а.

Не треба никако сметнути с ума, да обрасци до сада изведени вреде, па био дати ред:

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots$$

ма какав, правилан или неправилан, општи или особен. Међу тим треба напоменути, да обрасци, они под 4) у №-и 136 за u_n и овај овде за S_n, нису ни од какве особите вајде у оном случају, кад дати ред није такав, да су сви чланови једног извесног различног реда његовог једнаки нули. Јер да бисмо н. пр. помоћу обрасца 4) могли наћи u_n. треба да знамо количине u_1, Δu_1 $\Delta^2 u_1$, $\ldots$ $\Delta^n u_1$, а за то се опет услед обрасца 4) у № 135 изискује, да су нам већ познати чланови $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ датога реда. Дакле да бисмо помоћу реченог обрасца 4) могли израчунати u_n, треба да нам је оно само већ дато. Али права корист општих чланова датих редова састоји се у томе, да помоћу њих можемо из неколико само првих чланова реда и казаљке места траженога члана наћи тај члан, па била у осталом казаљка места траженога члана ма колико велика. Слично овоме може се казати и о обрасцу за S_n.

II. Аритметични редови.

138. Тако се зову редови, у којих су чланови једног извесног различног реда сви међу собом једнаки. Тада је тај различни ред последњи. Задати ред зове се аритметичан ред m-ог степена, кад су сви чланови његовог m-ог различног реда међу собом једнаки, дакле кад он има само m различних редова а не више.

Претпоставимо сада, да је ред:

$$1.)\qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots\,.$$

са којим смо имали посла у неколико предњих №-а, аритметичан m-ог степена. Тада ће $\Delta^m u_1$ бити сталан члан m-ног различног реда, а чланови свију доцнијих различних редова биће $= 0$. При споменутој дакле претпоставци, да је ред 1) аритметичан m-ог степена, обрасци 4) у № 136 и 2) у № 137 прекинуће се са оним чланом, у коме стоји $\Delta^m u_1$. Ти ће дакле обрасци овако изгледати:

$$2.)\quad u_n = u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta u_1 + \binom{n\ \ 1}{2}\Delta^2 u_1 + \ \ldots$$

$$+ \binom{n-1}{m}\Delta^m u_1$$

$$3.)\quad S_n = n u_1 + \binom{n}{2}\Delta u_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_1 + \ldots\,.$$

$$+ \binom{n}{m+1}\Delta^m u_1$$

Сваки од ова два обрасца има $(m+1)$ чланова, и кад се погледа само на последњи члан сваког од њих, увидеће се, да сваки од њих захтева, да су познати $(m+1)$ првих чланова реда 1). Према томе да бисмо могли наћи општи члан и збирни образац аритметичног реда 1-ог, 2-ог, 3-ег и т. д. степена, треба да су нам дати редом 2, 3, 4 и т. д. прва члана задатог реда.

Из образаца 2) и 3) добијамо:

За аритметичне редове првог степена:

$$u_n = u_1 + (n-1)\triangle u_1$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\cdot\triangle u_1$$

а то су још из ниже алгебре познати обрасци за општи члан и збир од n чланова аритметичне постепености;

За аритметичне редове другог степена:

$$u_n = u_1 + (n-1)\triangle u_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2}\triangle^2 u_1,$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\triangle u_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^2 u_1$$

и т. д.

Ако радње, које су у обрасцима 2) и 3) само назначене, и извршимо, па за тим све по степенима n-а уредимо, добићемо изразе за u_n и S_n у овим облицима:

4.) $u_n = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + a_4 n^3 + \ldots + a_{m+1} n^m$

5.) $S_n = b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \ldots\ldots + b_{m+1} n^{m+1}$

Из обрасца 4) закључујемо, да се свака цела и рационална функција, која зависи од једне промењљиве и која је m-ог степена, може сматрати као општи члан једног аритметичног реда m-ог степена. И из те функције добијају се узастопни чланови одговарајућег реда, кад се промењљива количина, од које функција зависи, буде замењивала редом са 1, 2, 3, 4 и т. д.

Исто тако из обрасца 5) закључујемо, да се свака цела и рационална функција — једне промењљиве — $(m+1)$-ог степена, у којој нема сталног — од промењљиве независног — члана, може сматрати као збирни образац једног аритметичног реда m-ог степена. Успут напомињемо то, да не само у збирном обрасцу аритметичног реда, него и у збирном обрасцу ма каквог реда несме бити члана, који би био независан од n, ако смо т. ј. означили са n број сабраних чланова. Јер кад узмемо да је n т. ј. број сабраних чланова $= 0$, онда мора и збир бити $= 0$, а то може само тако бити случај, ако су сви чланови у збирном обрасцу функције n-а.

Последњи члан a_{m+1} у обрасцу 4) добија се при свођају обрасца 2) само из његовог последњег члана, јер само у том последњем члану има m чинилаца, од којих је сваки односно n првог степена. И лако је из самог тог свођаја сазнати да је:

$$a_{m+1} n^m = \frac{n^m}{m!}\triangle^m u_1$$

одакле следује:

6.) $\qquad \triangle^m u_1 = 1.\ 2.\ 3\ldots m.\ a_{m+1}$

И у овој једначини показан је начин, како се добија стални члан последњег различног реда, кад нам је општи члан аритметичног реда дат у облику 4).

Тако н. пр. узмимо, да је:

$$u_n = 2 - 3n + 5n^2$$

Пошто је ова функција 2-ог степена, то је ред, који из ње постаје, аритметичан 2-ог степена, т. ј. он има два различна реда и стални члан другог различног реда јесте:

$$\triangle^2 u_1 = 1.\,2.\,5 = 10.$$

И доиста ред, који постаје из дате функције и његова два различна реда јесу:

4, 16, 38, 70, 112, 164 . . . .

12, 22, 32, 42, 52 . . . .

10, 10, 10, 10, ...

139. Из онога, што рекосмо о обрасцу 4) у № 138, следује:

a). Да су *m*-ни степени чланова аритметичне постепености:

$$a,\ a + h,\ a + 2h,\ a + 3h\ ,\ \ldots\ \left\{a + (n-1)h\right\}\ \ldots\ldots$$

чланови новог и то аритметичног реда *m*-ог степена. Јер општи члан новога реда јесте:

$$\left\{a + (n-1)h\right\}^m,$$

а он ће развијен изгледати овако:

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 + \ldots + \alpha_{m+1} n^m$$

Тако је н. пр. ред:

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 6^3\ \ldots\ldots$$

или што је све једно ред:

1, 8, 27, 64, 125, 216 . . . .

аритметичан трећег степена. Његови су различни редови:

7, 19, 37, 61, 91 . . . .

12, 18, 24, 30 . . . .

6, 6, 6, ...

b). *m*-ни степени чланова аритметичног реда *r*-ог степена јесу чланови новога реда, који је аритметичан *mr*-ог степена. Јер ако је:

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \ldots + a_{r+1} n^r$$

општи члан задатог аритметичног реда *r*-ог степена, онда је:

$$\left\{a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \ldots + a_{r+1} n^r\right\}^m$$

општи члан новог аритметичног реда, који мора бити *mr*-ог степена, јер му је, као што се види, општи члан цела и рационална функција *n*-а *mr*-ог степена.

Тако н. пр. ред:

4, 16, 38, 70, 112, 164 . . . .

са којим смо имали посла у №-и 138, јесте аритметичан другог степена. Кад његове чланове подигнемо на квадрат, добићемо нов ред, који је аритметичан 4-ог степена. Тај је ред:

16, 256, 1444, 4900, 12544, 26896 . . .

Његови различни редови јесу:

240, 1188, 3456, 7644, 14352 . . .

948, 2268, 4188, 6708 . . .

1320, 1920, 2520 . . .

600, 600 . . .

Општи члан новог реда јесте:

$$[2 - 3n + 5n^2]^2.$$

c.) Кад више аритметичних редова саберемо члан по члан, онда ред, који постаје из добивених збирова, јесте опет аритметичан, и степен му је једнак са степеном реда, који је највишег степена од свију сабраних редова, просто зато, што је општи члан новог реда = збиру општих чланова задатих редова. Тако су н. пр. редови:

1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .

1, 4, 9, 16, 25, 36, . . .

— 9, — 10, 1, 30, 83, 166, . . .

аритметични редом 1-ог, 2-ог, 3-ег степена. Кад их саберемо члан по члан, добијамо аритметичан ред 3-ег степена:

— 7, — 3, 15, 53, 117, 213 . . .

Његови су различни редови:

4, 18, 38, 64, 96, . . .

14, 20, 26, 32, . . .

6 6 6 . . .

Исто тако, кад прва два реда саберемо члан по члан па тако добивени ред одузмемо члан по члан од трећега, добићемо аритметичан ред трећег степена:

— 11, — 17, — 13, 7, 49, 119 . . .

Његови различни редови јесу:

— 6, 4, 20, 42, 70 . . .

10, 16, 22, 28 . . .

6, 6, 6 . . .

Из онога, што је овде речено, следује очевидно, да се може увек узети, да је ред, коме је:

$$u_n = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \ldots + a_{m+1} n^m$$

општи члан, постао сабирањем редова, којима су:

$$a_1,\ a_2 n,\ a_3 n^2,\ a_4 n^3\ \ldots\ a_{m+1} n^m$$

општи чланови, који су дакле редови односно 0-ог, 1-ог, 2-ог 3-ег . . . m-ог степена.

$d.$) Најзад, кад помножимо више аритметичних редова члан по члан, онда нови ред јесте аритметичан и његов степен једнак је збиру степена задатих редова, којих смо одговарајуће чланове множили. Јер општи члан новог реда једнак је производу општих чланова умножених редова. Ако су дакле општи чланови умножених редова били α-ог, β-ог, γ-ог . . . λ-ог степена, онда је општи члан новог реда $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)$-ог степена, дакле је нови ред аритметичан тога степена.

Пример нека узме и изради сам читалац, а ми ћемо у овој №-и напоменути још само то, да у обрасцима за u_n и S_n под 2) и 3) у № 138 има свега $(m+1)$ параметара, одакле следује, да је за одредбу општег члана и збирног обрасца аритметичног реда m-ога степена потребно имати свега $(m+1)$ услова. У осталом ти услови могу бити ма какви; али је најпростије, кад су познати $(m+1)$ првих чланова.

140. У № 138 дознали смо, да из једне функције, која је цела, рационална и m-ог степена односно оне промењљиве од које она зависи, да велим из такве функције постаје аритметичан ред m-ог степена, кад само поменуту промењљиву количину будемо замењивали редом са 1, 2, 3, 4 . . . Но лако је закључити из онога, што је речено под a) и c) у № 139, да из такве функције постаје аритметичан ред m-ог степена и онда, кад промењљиву те функције будемо замењивали члановима ма какве аритметичне постепености:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ \ldots$$

У осталом то се даје лако увидети и на овај начин. Ако је $f(x)$ цела и рационална функција x m-ног степена, онда је ред, који из ње добијамо стављајући:

$$x = a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ \ldots$$

истоветан са редом, који добијамо стављајући:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ldots$$

у функцију

$$f\left\{a+(x-1)h\right\}.$$

Но ова функција јесте односно x m-ог степена, дакле је горње тврђење доказано.

Ако је члан са највишим степеном x-а у $f(x)$: $a_{m+1}x^m$, онда је у $f\left\{a+(x-1)h\right\}$ члан са највишим степеном x-а очевидно $a_{m+1}h^m x^m$. Дакле је (№ 138, 6):

$$m!\ a_{m+1}h^m$$

стална разлика аритметичног реда, који постаје из $f\left\{a+(x-1)h\right\}$ за $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$ или из $f(x)$ за $x = a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ \ldots$

Пример. Да се нађе општи члан и збирни образац реда:

$$-2,\quad 4,\quad 28,\quad 82,\quad 178,\quad 328\ \ldots$$

$$6,\quad 24,\quad 54,\quad 96,\quad 150\ \ldots$$

$$18,\quad 30,\quad 42,\quad 54\ \ldots$$

$$12,\quad 12,\quad 12\ \ldots$$

Овде је $u_1 = -2$, $\Delta u_1 = 6$, $\Delta^2 u_1 = 18$, $\Delta^3 u_1 = 12$, $m = 3$.

Помоћу обрасца 2) и 3) у № 138 добијамо:

$$u_n = -2 + (n \quad 1)6 + \binom{n-1}{2}.18 + \binom{n-1}{3}.12$$

$$S_n = -2n + \binom{n}{2}6 + \binom{n}{3}.18 + \binom{n}{4}.12$$

или кад се сведе:

$$u_n = 2n^3 - 3n^2 + n - 2$$

$$S_n = \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

Општи члан и збирни образац задатог реда могу се наћи и друкче, ако се само узме на ум, што је у № 138 речено о обрасцима 4) и 5). Пошто је задати ред аритметичан трећег степена то на основу № 138 можемо претпоставити, као да су:

$$u_n = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + a_4 n^3$$

$$S_n = b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + b_4 n^4.$$

општи члан и збирни образац задатога реда. Сад остаје, да се још израчунају непознати сачиниоци a и b у овим обрасцима.

Пошто за $n = 1, 2, 3$ и 4 мора бити $u_n = -2, 4, 28$ и 82, онда имамо као једначине, које ће дати сачиниоце a:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -2$$

$$a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 4$$

$$a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 27a_4 = 28$$

$$a_1 + 4a_2 + 16a_3 + 64a_4 = 82$$

Решили ми сад ове једначине на обичан начин или помоћу детерминаната, добићемо:

$$a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_3 = -3,\ a_4 = 2$$

Да бисмо сачиниоце b у горњем обрасцу за S_n израчунали, треба само узети на ум то, да тај образац за $n = 1, 2, 3, 4$ мора дати збир од 1, 2, 3 и 4 прва члана задатога реда, и да према томе за поменуте вредности n-а S_n мора бити редом $= -2, 2, 30, 112$. На тај начин добијамо овај низ једначина:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2,$$

$$2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + 16b_4 = 2,$$

$$3b_1 + 9b_2 + 27b_3 + 81b_4 = 30,$$

$$4b_1 + 16b_2 + 64b_3 + 256b_4 = 112$$

из којих се поједина b могу израчунати или на обичан начин или помоћу детерминаната. У оба случаја добијамо:

$$b_1 = -2,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = 0,\ b_4 = \frac{1}{2}$$

141. Узмимо нека нам је дат аритметичан ред 1-ог степена, т. ј. аритметична постепеност:

1.) $1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d, \ldots$

Кад збирове од $1, 2, 3, 4 \ldots n, (n+1), \ldots$ првих чланова овога реда сматрамо као чланове новог реда, онда тај нови ред:

2.) $1, 2 + d, 3 + 3d, 4 + 6d, 5 + 10d \ldots$

јесте аритметичан другог степена.

Исто тако збирови од $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ првих чланова реда 2) биће чланови аритметичног реда трећег степена. Тај је ред:

3.) $1, 3 + d, 6 + 4d, 10 + 10d, 15 + 20d, \ldots$

На исти начин могли бисмо добити из реда 3) аритметичан ред 4-ог степена, из овог опет аритметичан ред 5-ог степена и т. д.

Сви тако добивени редови 1), 2), 3) и т. д. зову се збирни или фигурни редови 1-ог, 2-ог, 3-ег и т. д. степена. Ред 2) зове се ред полигонских бројева, а особени редови, који из њега постају за $d = 1, 2, 3 \ldots$ зову се редови троугаоних, четвороугаоних, петоугаоних и т. д. бројева. Исто тако ред 3) зове се ред пирамидних бројева, а особени редови, који из њега постају за $d = 1, 2, 3, \ldots$ зову се редови тространо-пирамидних, четворострано-пирамидних, петострано-пирамидних и т. д. бројева.

Помоћу обрасца 2) у № 138 налазимо као општи члан и збирни образац реда 2):

$$4.)\quad \begin{aligned} u_n &= 1 - \frac{1}{2}dn + \frac{1}{2}dn^2, \\ S_n &= \frac{(3-d)}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}dn^3 \end{aligned}$$

Кад у овим обрасцима ставимо $d = 1, 2, 3 \ldots$ добићемо као општи члан и збирни образац за:

a) ред троугаоних бројева: $1, 3, 6, 10, 15 \ldots$

$$u_n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2},\quad S_n = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.};$$

b) ред четвороугаоних бројева: $1.\ 4, 9, 16 \ldots$

$$u_n = n^2,\quad S_n = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}$$

c) ред петоугаоних бројева: $1, 5, 12, 22 \ldots$

$$u_n = \frac{n(3n\quad 1)}{1\,.\,2},\quad S_n = \frac{n^2(n+1)}{1\,.\,2} \text{ и т. д.}$$

Исто тако помоћу обрасца 3) у № 138 налазимо као општи члан и збирни образац реда 3):

$$5.)\quad \left\{ \begin{aligned} u_n &= \frac{3-d}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}dn^3 \\ S_n &= \frac{4-d}{12}n + \frac{12-d}{24}n^2 + \frac{2+d}{12}n^3 + \frac{d}{24}n^4. \end{aligned} \right.$$

Као што се види, општи члан реда пирамидних бројева једнак је збирном обрасцу реда полигонских бројева. А тако мора и бити, јер је n-ти члан реда 3) једнак збиру првих n чланова реда 2).

За $d = 1, 2, 3 \ldots$ добијамо из последња два обрасца општи члан и збирни образац за редове 3-страно, 4-страно, 5-страно и т. д. пирамидних бројева.

Дакле је:

a) за ред 3 страно-пирамидних бројева:

$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}\quad S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.};$$

b) за ред 4-страно-пирамидних бројева:

$$u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.},\quad S_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{1\,.\,3\,.\,4\,.};$$

c) за ред 5-страно-пирамидних бројева:

$$u_n = \frac{n^2(n+1)}{1\,.\,2\,.},\quad S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\,.\;\;2\,.\;\;3\,.\;\;4\,.},\ \text{и т. д.}$$

Читалац нека изведе сам следећа два обрасца за збирни ред *k*-ог степена:

$$6.)\quad \left|\begin{array}{l} u_n = \dfrac{n(n+1)\ldots\{n+(r-2)\}}{1\,.\;\;2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}\left\{r + d\,(n-1)\right\} \\[2ex] S_n = \dfrac{n(n+1)\ldots\{n+(r-1)\}}{1\,.\;\;2\,.\,.\,.\,.\,(r+1)}\left\{r + 1 + d\,(n-1)\right\} \end{array}\right.$$

Неће бити згорега овде напоменути, да се из онолико ђулади једнаке величине, колико сваки члан троугаоног реда има јединица, може начинити гомила у облику троугла, а из онолико ђулади, колико сваки члан 4-угаоног реда има јединица, гомила у облику квадрата. Исто тако из онолико ђулади опет једнаке величине, колико сваки члан 3-страно-пирамидног реда има јединица, може се начинити гомила у облику тростране пирамиде, а из онолико ђулади, колико сваки члан 4-страно-пирамидног реда има јединица, гомила у облику 4-стране пирамиде.

На завршетку ове №-е да пређемо још неколико редова, који се јављају при множењу редова, који су облика:

$$7.)\qquad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + \ldots$$

Ти су редови заједно са њиховим општим члановима и збирним обрасцима:

$$8.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n \\[1ex] 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \dbinom{n+1}{2} \\[1ex] 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \dbinom{n+1}{2} = \dbinom{n+2}{3} \\[1ex] 1 + 4 + 10 + 20 + \ldots + \dbinom{n+2}{3} = \dbinom{n+3}{4} \\[1ex] .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\[1ex] 1 + m + \dbinom{m+1}{2} + \ldots + \dbinom{n+m-2}{m-1} = \dbinom{n+m-1}{m} \end{array}\right.$$

Како ови редови један из другог постају као и општи чланови, који се налазе у последњем стубу и збирни обрасци, који се налазе десно од знакова једнакости, ваљда није нужно напомињати, јер су сви ти редови аритметични редом 0-ог, 1-ог, 2-ог . . . *m*-ог степена.

Кад помножимо два реда онаквог облика као онај под 7), онда број сабирака у *k*-том сачиниоцу производа једнак је *k*-том члану другог реда под 8). Исто тако кад помножимо три реда онаквог облика као онај под 7), онда број сабирака у k-том сачиниоцу производа једнак је k-том члану трећег реда под 8). У опште у производу m редова онаквог облика као онај под 7) број сабирака k-тог сачиниоца једнак је k-том члану последњега реда под 8). Ти редови зову се такође *фигурни*.

142. У овој №-и решићемо неколико задатака, који се могу сматрати као примена онога, што смо мало час о збирним редовима говорили.

1°. Ђулад једнаке величине наслагана су у облику тростране пирамиде. Пита се колико је ђулади у n-ом слоју идући одозго на доле, и после колико је свега ђулади у првих n-слојева.

Лако је увидети из самог начина склапања те пирамиде, да број ђулади у узастопним слојевима одозго на доле мора бити редом: 1, 3, 6, 10 ... а ово је ред троугаоних бројева. Дакле n-ти члан тога реда:

$$\frac{n(n+1)}{1.2}$$

показује колико у n-ом слоју има ђулади, а збир првих n чланова истога реда, а то је n-ти члан 3-страно-пирамидног реда:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.}$$

показује, колико је свега ђулади у првих n-слојева идући одозго на доле.

Према овоме читалац ће и сам моћи у свакој прилици лако наћи, колики је број ђулади у целој таквој пирамиди, као и колики је број ђулади у једној зарубљеној тространој пирамиди, у којој т. ј. нема неколико горњих слојева.

2°. Ђулад једнаке величине наслагана су у облику четворостране пирамиде. Пита се колико је ђулади у n-том слоју идући озго на доле и колико у свих n слојева.

И овде је лако увидети из самог начина, како постаје пирамида, да број ђулади у узастопним слојевима идући озго на доле мора бити редом раван 1, 4, 9, 16, 25 . . . . , а то је ред четвороугаоних бројева. Дакле n-ти члан овог реда:

$$n^2$$

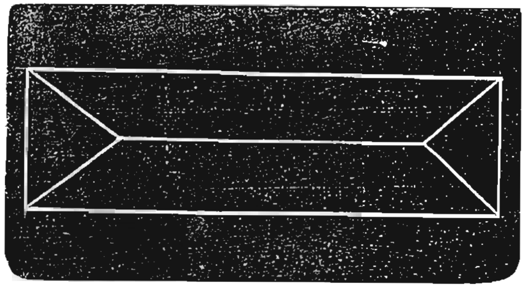
показује, колико у n-ом слоју има ђулади, а збирни образац тога реда, а то је n-ти члан четворострано-пирамидног реда:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.}$$

показује, колико у првих n слојева идући озго на доле има свега ђулади.

И овде нека читалац сам изнађе, колико у свакој прилици има ђулади у целој таквој пирамиди, као и онда, кад би она била зарубљена.

3°. Ђулад једнаке величине наслагана је у облику тростране призме, којој су основе косо зарубљене, и која једном својом пљоштом, а та је правоугаоник, лежи на земљи. Та је призма дакле овог облика.



Пита се колико је ђулади у n-ом слоју озго на доле, и после колико је ђулади у првих n-слојева.

У првом слоју озго има само један низ ђулади, и има их m. У другом слоју мора бити свега два слоја и у сваком по $(m+1)$ ђуле. дакле једно више него у првом слоју. У олуку, који постаје из ова два низа ђулади, леже оних m ђулади првог слоја. У трећем слоју мора бити три низа сваки са $(m+2)$ ђулета. У два олука, који постају из та три низа, стају ђулад првог и другог низа другог слоја. У опште у n-том слоју биће n низова ђулади сваки са $(m+n-1)$ ђулади.

Из овога што рекосмо следује, да у узастопним слојевима идући озго на доле има редом онолико ђулади, колико имају јединица узастопни чланови реда:

$$m,\ 2(m+1),\ 3(m+2), \ldots n(m+n-1) \ldots$$

У n-ом слоју биће дакле онолико ђулади, колико n-ти члан овога реда има јединица, дакле: $n(m+n-1)$.

А у n првих слојева биће онолико ђулади, колики је збир првих n чланова тога реда. Али тај ред јесте аритметичан другог степена и његови су различни редови:

$$(m+2),\ (m+4),\ (m+6),\ (m+8)\ \ldots$$

$$2, \qquad 2, \qquad 2, \ \ldots$$

Помоћу обрасца 3) у № 138 добијамо као збирни образац овог реда:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

и тај образац показује дакле, колико у првих n слојева има ђулади.

143. Ред:

1.) $1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m,\ \ldots\ldots n^m\ \ldots\ldots$

видели смо у № 139 да је аритметичан m-ог степена и према томе у стању смо му наћи збирни образац, па имало m ма какву целу и положну вредност. Међу тим ми ћемо збирни образац реда 1) овде нарочито извести. Означимо са $S(n^m)$ збир првих n чланова реда 1) и ставимо:

2.) $$S(n^m) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$$
$$= a_1 n^{m+1} + a_2 n^m + a_3 n^{m-1} + \ldots + a_{m+1} n,$$

јер смо видели, да збирни образац аритметичног реда m-ог степена мора бити функција n-а степена $(m+1)$-ог, у којој нема члана, који би био независан од n. Кад једначину 2) одузмемо од оне, која из ње постаје сменом броја n са $(n+1)$ добићемо:

$$(n+1)^m = a_1\left\{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}\right\} +$$
$$+ a_2\left\{(n+1)^m - n^m\right\} +$$
$$+ a_3\left\{(n+1)^{m-1} - n^{m-1}\right\} +$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ a_{m+1}\left\{(n+1) - n\right\}$$

или кад развијемо и по степенима n-а уредимо:

$$n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \ldots + 1 =$$

$$a_1\binom{m+1}{1} n^m + \left.\begin{array}{l} a_1\binom{m+1}{2} \\ a_2\binom{m}{1} \end{array}\right\} n^{m-1} + \left|\begin{array}{l} a_1\binom{m+1}{3} \\ a_2\binom{m}{2} \\ a_3\binom{m-1}{1} \end{array}\right| n^{m-2} +$$

$$\left|\begin{array}{l} a_1\binom{m+1}{4} \\ a_2\binom{m}{3} \\ a_3\binom{m-1}{2} \\ a_4\binom{m-2}{1} \end{array}\right| n^{m-3} + \ldots + \left|\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m+1} \end{array}\right|$$

Одавде по правилу неодређених сачинилаца добијамо:

$$a_1 = \frac{1}{m+1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{m}{12}, \quad a_4 = 0,$$

$$a_5 = -\frac{m(m-1)(m-2)}{120.\ 2.\ 3}, \quad a_6 = 0,$$

$$a_7 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{252.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

и т. д. Последња упоређајем сачинилаца добивена једначина јесте:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{m+1} = 1.$$

Помоћу ње уверавамо се у исти мах, да ли су вредности сачинилаца a добро израчунате.

Кад вредности нађене за сачиниоце a заменимо у једначину 2), добићемо образац:

$$3.)\qquad S(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\binom{m}{1}n^{m-1} -$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}n^{m-3} + \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6}\cdot\binom{m}{5}n^{m-5} -$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{8}\binom{m}{7}n^{m-7} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10}\cdot\binom{m}{9}n^{m-9} - \ldots.$$

Као што се из обрасца 2) увиђа, треба овај образац у сваком особеном случају продужити само дотле, докле је то могуће, а да изложилац од n не постане мањи од $+1$.

У овом обрасцу јављају се у сачиниоцима бројеви Bernouilli-јеви:

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ \text{и т. д.}$$

на које смо наишли и у алгебарској анализи № 103, где смо такође показали, како се они израчунавају.

Помоћу обрасца 3) у стању смо сада наћи збирне обрасце свима оним редовима, којих су општи чланови целе и рационалне функције n-а. Тако н. пр. ако је:

$$u_n = a + bn + cn^2$$

општи члан неког реда, онда су чланови његови:

$$u_1 = a + b + c$$

$$u_2 = a + 2b + 2^2c$$

$$u_3 = a + 3b + 3^2c$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$u_n = a + bn + cn^2$$

Дакле је збир првих **n** чланова тога реда:

$$S(a + bn + cn^2) =$$

$$na + b(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + c(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Пошто је према усвојеном начину означавања у почетку ове №-е:

$$n = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots . + n^0 = S(n^0)$$

то је даље:

$$S(a + bn + cn^2) = a\,S(n^0) + b\,S(n) + c\,S(n^2)$$

На сличан начин нашли бисмо, да је у опште:

$$4.)\qquad S(a + bn + cn^2 + \ldots + kn^m) =$$

$$= a\,S(n^0) + b\,S(n) + c\,S(n^2) + \ldots + k\,S(n^m)$$

што је у осталом по себи увиђавно.

И сад после овога можемо показати још један начин како се добија образац 3).

Очевидно је:

$$n^m = S(n^m) - S(n-1)^m$$

па дакле и:

$$S(n^m) - n^m = S(n-1)^m$$

Ако сад $(n-1)^m$, где је m цео и положан број, развијемо по биномном обрасцу, добићемо:

$$S(n^m) - n^m = S\left\{n^m - \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2}\right.$$

$$\left. - \binom{m}{3} n^{m-3} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} n + (-1)^m \right\}$$

Одавде, кад једначину 4) узмемо у обзир, добијамо даље:

$$S(n^m) - n^m = S(n^m) - \binom{m}{1} S(n^{m-1}) + \binom{m}{2} S(n^{m-2}) -$$

$$- \binom{m}{3} S(n^{m-3}) + \ldots + (-1)^{m-1} S(n) + (-1)^m S(n^0).$$

Ако ову једначину решимо по $S(n^{m-1})$ и за тим у новој једначини сменимо m са $(m+1)$, добићемо:

$$5.)\quad S(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{m}{2} S(n^{m-1}) - \frac{m(m-1)}{2.\,3} S(n^{m-1}) + \ldots .$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{m+1} S(n^0)$$

Из овог обрасца добићемо образац 3), ако у овом обрасцу (5) сменимо m поступно са $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-3)$ и т. д., и ако тим путем добивене вредности за $S(n^{m-1})$, $S(n^{m-2})$ и т. д. будемо заменили у једначину 5).

Нека читалац сам помоћу обрасца 3) нађе збирне обрасце за редове, којима су чланови први, други, трећи и т. д. степени бројева 1, 2, 3, 4, . . . n, ... Исто тако нека нађе збирни образац аритметичном реду m-ог степена:

$$a^m + (a+h)^m + (a+2h)^m + \ldots + \left\{a + (n-1)h\right\}^m$$

Ако краткоће ради ставимо $a + (n-1)\,h = k$, онда је тај тражени образац ово:

$$S(k^m) = \frac{k^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\,h} + \frac{1}{2}(k^m - a^m)$$

$$+B_1 \frac{h}{2}\binom{m}{1}(k^{m-1} - a^{m-1})$$

$$+B_3 \frac{h^3}{4}\binom{m}{3}(k^{m-3} - a^{m-3})$$

$$+B_5 \frac{h^5}{6}\binom{m}{5}(k^{m-5} \quad a^{m-5})$$

$+$ и т. д.

где слова B значе Bernouilli-јеве бројеве.

144. Различни редови налазе своје и то корисне примене нарочито при израчунавању сваковрсних таблица. Ми ћемо да покажемо, како се при том ради.

Узмимо функцију:

1.) $y = f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_{m+1}x^m$

која је цела и рационална функција x-а m-ног степена, па претпоставимо да се тражи таблица вредности, које та функција добија за вредности x-а, којих је размак сталан, које су дакле чланови једне аритметичне постепености. Из № 138 и 140 знамо, да ред, коме су чланови вредности, које y при том поступно добија, мора бити аритметичан m-ог степена. Због тога треба дакле израчунати непосредно само $(m+1)$ првих вредности функције (y-а), а све доцније вредности њене можемо за тим наћи простим сабирањем, а помоћу различних редова, који постају из реда y-ових вредности. Ако се сетимо обрасца:

2.) $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$, $\Delta^{m-1}u_{n+1} = \Delta^{m-1}u_n + \Delta^m u_n$

онда видимо, на како се лак начин може помоћу другог обрасца продужити и то докле нам је воља, претпоследњи т. ј. $(m-1)$-ви различни ред, а помоћу овог $(m-2)$-ги и т. д. до првог различног реда закључно, помоћу којег се после а уз припомоћ првог обрасца и главни ред y-вих вредности може продужити докле се хоће.

Узмимо н. пр. да се има саградити таблица вредности, које добија функција:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

за вредности $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ до 1000. Ред, који постаје из одговарајућих вредности y-а, јесте аритметичан трећег степена, и с тога треба израчунати непосредно из функције само 4 прве вредности њене. Остале треба тражити помоћу различних редова. Цео рад изгледа овако:

x	y	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
0	— 5	2	2	6
1	— 3	4	8	6
2	1	12	14	6
3	13	26	20	6
4	39	46	26	6
5	85	72	32	6
6	157	104	38	6
7	261	142	44	.
8	403	186	50	.
9	589	236	.	.
10	825	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Помоћу другог обрасца под 2) продужени су редови других и првих разлика, а помоћу другог обрасца продужен је ред y-вих вредности.

Пошто у рачунима можемо погрешити, то нам ваља од времена на време контролисати рад тиме, што ћемо вредност функције непосредно и из обрасца израчунати. Ако се вредности функције не могу са свим тачно него само приближно тачно наћи, што ће бити случај, кад у функцијама има ирационалних сачинилаца или пак разломљених, који се десетним разломком не могу тачно исказати, онда морамо рачунати са више децимала, него што мислимо на крају рада задржати. Јер лако је увидети, да погрешка, која долази услед занемарених децимала, може услед непрестаног сабирања напослетку толико нарасти, да се осети и на оним десетним местима, која хоћемо да су нам тачна.

На сличан начин и са врло малом изменом ради се и онда, кад функција $y = f(x)$, за коју се хоће да сагради таблица њених вредности, није цела и рационална. У таквом случају наравно да низ функцијиних вредности неће бити аритметичан ред, али се он може приближно као такав сматрати. Јер кад у таквом случају изведемо узастопне различне редове реда функцијиних вредности, ми ћемо видети, да ће чланови једног извесног различног реда, па дакле и чланови свију доцнијих различних редова, бити тако мали, да се могу просто занемарити, а да се погрешка, која отуда произлази, не осети на оном десетном месту, које хоћемо да нам је још тачно.

Замислимо задату функцију развиту у бесконачни ред тако да је:

$$y = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{m+1} x^m + \dots$$

Претпоставимо сада, да за вредности x-а почев од a па до b, за које је ред збирљив, члан $a_{m+1} x^{m+1}$ и сви доцнији не утичу на r-ту децималу y-ве вредности. Тада можемо за тај низ вредности x-а узети, до на r децимала тачно:

$$y = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{m+1} x^m.$$

Тада ће дакле вредности y-а, које одговарају поменутом низу вредности x-а, бити до r-те децимале закључно чланови аритметичног реда m-ог степена.

Пошто за различне низове вредности x-а, вредности y-а неће једнако нагло опадати, то је јасно, да ће сѐ услед тога мењати степен аритметичног реда, па дакле и број различних редова, које треба у рачун узимати. За то треба рачун поделити на партије и за сваку израчунати непосредно из обрасца $y = f(x)$ потребни број функцијиних вредности заједно са њиним разликама.

Узмимо примера ради, да смо при израчунавању логаритама целих бројева дошли до $log\, a = log\, 6000 = 3{\cdot}7781513$. Логаритме бројева 6001, 6002 и 6003 можемо непосредно помоћу обрасца израчунати, а логаритме свију доцнијих бројева до близу броја 6040 можемо затим много лакше помоћу различних редова наћи.

Из обрасца

$$l(a+\delta) = la + l\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$$

следује образац за обичне логаритме:

$$log\,(a+\delta) = Mla + Ml\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$$

или кад $l\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$ развијемо помоћу обрасца 5) у № 87 алгеб анал. у ред:

$$3.)\qquad log\,(a+\delta) = Mla + M\frac{\delta}{a} - \frac{M}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \frac{M}{3}\frac{\delta^3}{a^3} - \dots$$

Сад ако овде узмемо да је $a = 6000$ а δ ма који од бројева 1, 2, 3 . . . 40 н. пр. највећи 40, онда је због $M = 0{\cdot}434\dots$ (№ 88 алгеб. анал.) вредност четвртог члана у последњој једначини $< 0{\cdot}000\,000\,049$. Ако се дакле тај члан и сви остали занемаре при израчунавању логаритама бројева од 6000 до 6040, онда погрешка у израчунатим логаритмима, која отуд долази, мања је од 0·000 000 049 (№66 алгеб. анализе). Дакле ће првих 7 децимала у нађеним логаритмима бити тачне. Ако се дакле траже логаритми са 7 тачних децимала, онда можемо у обрасцу 3), који их даје, напустити четврти члан и све доцније и онда ћемо имати за поменути низ вредности x-а и до на 7 децимала тачно:

$$4.)\qquad log\,(a+\delta) = Mla + M\frac{\delta}{a} - M\frac{\delta^2}{a^2}.$$

Дакле логаритме свију целих бројева од 6000 до 6040 смемо до на 7 децимала тачно сматрати као чланове аритметичног реда другог степена. Због тога дакле пошто већ имамо log 6000, морамо још израчунати и log 6001 и log 6002 непосредно помоћу обрасца 4), а логаритме свију доцнијих бројева помоћу различних редова.

Рад изгледа од прилике овако:

	y	$\triangle$	$\triangle^2$
log 6000 =	3·7781513	723·74,	— 0·12
„ 6001 =	2236·74	723·62,	
„ 6002 =	2960·36	723·50,	
„ 6003 =	3683·86	723·38,	
„ 6004 =	4407·24	723·26,	
„ 6005 =	5130·50	723·14,	
„ 6006 =	5853·64	723·02,	

. . . .

Прве и друге разлике изражене су јединицама седмог десетног места.

III. Интерполација или уметање редова.

145. *Интерполовати* задати ред значи уметнути између свака два узастопна члана његова по један и исти број његових чланова, који се владају по истом закону. Уметнути чланови зову се *уметци*. Нови интерполацијом задатог реда добивени ред зове се краће *интерполовани ред*.

Кад је познат или се може наћи општи члан задатог реда, у коме је општем члану исказан закон тога реда, онда је ствар врло лака.

Узмимо н. пр. да је:

$$1.)\quad y = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots + a_{m+1}x^m$$

општи члан задатог реда. Тај ред јесте дакле аритметичан m-ога степена и његове узастопне чланове добијамо, стављајући у 1) $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$ Али кад у истом обрасцу 1) будемо замењивали x са члановима аритметичне постепености;

$$2.)\quad 1, 1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{2}{k}, 1 + \frac{3}{k}, \ldots 1 + \frac{k-1}{k}, 2, 2 + \frac{1}{k}, \ldots$$

којој је $\frac{1}{k}$ разлика, онда ред, који постаје из одговарајућих вредности функције под 1), биће опет аритметичан m-ог степена (№ 140). И у том новом реду јавиће се али само у извесним и то једнаким размацима и чланови задатог реда. Као што се лако увиђа из самог низа вредности под 2), у новом реду биће између свака два узастопна члана задатога реда по $(k-1)$ нових чланова или *уметака*.

Да бисмо дакле нашли ред, у коме између свака два и два члана задатог аритметичног реда има по $(k-1)$ нових чланова, треба само у x-том члану задатог реда замењивати x са члановима аритметичне постепености, којој је $\frac{1}{k}$ разлика. Ако у x-ном члану задатог реда сменимо x са $1 + \frac{z}{k}$, онда функција m-ог степена од z, коју добијамо, представља $(z+1)$-ви члан новог реда. Та је функција дакле општи члан новог реда, који даје чланове његове за $z = 0, 1\ \ 2, 3 \ldots$

Успут приметимо још, да кад је размак вредности, којима замењујемо x у општем члану задатог реда, цео број h, да се велим онда у новом реду јављају као његов први, други, трећи и т. д. члан први, $(h+1)$-ви, $(2h+1)$-ви и т. д. члан задатог реда.

Узмимо примера ради ред:

$$3.) \qquad -4,\ 3,\ 22,\ 59,\ 120,\ 211\ \ldots$$

Његови су различни редови:

$$7,\quad 19,\quad 37,\quad 61,\quad 91\ \ldots$$

$$12,\quad 18,\quad 24,\quad 30\ \ldots$$

$$6,\quad 6,\quad 6,\ \ldots$$

дакле је он аритметичан трећег степена.

Његов општи члан јесте:

$$y = x^3 - 5.$$

Ако сад хоћемо, да између свака два и два члана датога реда уметнемо по три нова члана, онда треба само у 4) стављати редом $x = 1,\ 1 + \frac{1}{4},\ 1 + \frac{2}{4},\ 1 + \frac{3}{4},$ $2,\ 2 + \frac{1}{4},\ 2 + \frac{2}{4},\ 2 + \frac{3}{4}, 3 \ldots.$

Или можемо одмах тражити $(z+1)$-ви члан новога реда стављајући у 4) $x = 1 + \frac{z}{4}$, пошто је сада $(k-1) = 3$. На тај начин добијамо:

$$5.) \qquad A_{z+1} = \frac{z^3 + 12z^2 + 48z - 256}{64}$$

као општи члан интерполованог реда. Но пошто је овај аритметичан 3-ег степена, то је довољно помоћу обрасца 5) наћи само 4 прва члана његова а све доцније помоћу различних редова, као што је то у № 144 показано.

Ако је у опште ред:

$$6.) \qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots\ u_n\ \ldots$$

аритметичан m-ог степена, онда је његов x-ни члан (№ 138)

$$u_x = u_1 + \binom{x-1}{1}\Delta u_1 + \binom{x-1}{2}\Delta^2 u_1 + \ldots + \binom{x-1}{m}\Delta^m u_1$$

Кад у овом обрасцу ставимо $x = 1 + \frac{z}{k}$, добићемо $(z+1)$-ви члан новог реда, у коме између свака два члана реда 6) има по $(k-1)$ нових чланова. Дакле је:

$$A_{z+1} = u_1 + \frac{z}{k}\Delta u_1 + \binom{\frac{z}{k}}{2}\Delta^2 u_1 + \ldots + \binom{\frac{z}{k}}{m}\Delta^m u_1$$

Или кад биномне сачиниоце развијемо и за тим бројиоце њихове ослободимо разломака:

$$7.) \quad A_{z+1} = u_1 + \frac{z}{k}\Delta u_1 + \frac{z\,(z-k)}{1.\,2.\,k^2}\Delta^2 u_1 +$$

$$+ \frac{z(z-k)(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ k^3}\Delta^3 u_1 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{z(z-k)(z-2k)\ldots\{z-(m-1)\,k\}}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ mk^m}\Delta^m u_1$$

И ово је општи образац за интерполацију аритметичних редова. Помоћу овог обрасца добијамо општи члан интерполованог реда у сваком особеном случају. Међу тим, да бисмо могли продужити докле хоћемо интерполовани ред, није баш нужно изналазити његов општи члан. Ако је дани па дакле и тражени ред аритметичан, онда треба израчунати непосредно помоћу обрасца 7) само онолико првих чланова последњега реда, колики је његов степен и још један члан више. Помоћу тих чланова и различних редова, који из њих постају, можемо лако продужити тражени интерполовани ред, докле хоћемо.

Ако узмемо горњи ред 3):

$$-4,\ 3,\ 22,\ 59,\ 120,\ 211,\ \ldots$$

чије смо различне редове горе нашли, и ставимо у образац 7):

$$u_1 = -4,\ \triangle u_1 = 7,\ \triangle^2 u_1 = 12,\ \triangle^3 u_1 = 6,\ k = 4$$

онда добијамо образац 5), који нам представља $(z+1)$-ви члан интерполованог реда, у коме између свака два члана реда 3) стоје три уметка.

Ако ли у обрасцу 7) после мало час поменутих замена ставимо редом $z = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, добијамо као пет првих чланова траженог интерполованог реда:

$$-4,\ -\frac{195}{64},\ -\frac{13}{8},\ \frac{23}{64},\ 3 \ldots$$

или другаче:

$$8.)\quad -\frac{256}{64},\ -\frac{195}{64},\ -\frac{104}{64}.\ \frac{23}{64},\ \frac{192}{64}, \ldots$$

Различни редови овог реда јесу:

$$\frac{61}{64},\quad \frac{91}{64},\quad \frac{127}{64},\quad \frac{169}{64} \ldots.$$

$$\frac{30}{64},\quad \frac{36}{64},\quad \frac{42}{64} \ldots.$$

$$\frac{6}{64},\quad \frac{6}{64} \ldots.$$

и сад бисмо могли лако на познати начин продужити интерполовани ред 8) колико нам је воља.

146. Ако функција $y = f(x)$, у којој је исказан закон реда, није цела и рационална, онда ред, који из ње постаје за вредности x-а, којих је размак сталан, неће бити аритметичан. Међу тим кад тражимо узастопне различне редове тога реда, видећемо, да ће чланови једног извесног различног реда и свију доцнијих бити тако мали, да се они с погледом на тачност, која се у рачуну захтева, могу сматрати као једнаки нули, и да се они према томе могу просто занемарити. Ако је то н. пр случај са члановима $(m+1)$-ог различног реда и свију доцнијих, и ми због тога све те редове напустимо, као да их и нема, ако дакле сматрамо чланове m-ог различног реда као једнаке и према томе функцију $y = f(x)$ приближно тачно као целу и рационалну m-ог степена, онда можемо по методама № 145 интерполовати ред функцијиних вредности, које одговарају вредностима x-а сталног размака. Интерполацијом добивене вредности функцијине биће наравно приближно тачне, али се рачун може увек удесити тако, да оне буду тачне у онолико децимала у колико ми хоћемо.

Нека читалац зарад бољег разумевања ове ствари проучи пажљиво 7-му и неколико доцнијих алинеја у № 144 а ми ћемо целу ствар да објаснимо још боље примерима.

Пример 1. Као први пример узмимо онај у № 144, где су се тражили логаритми свију целих бројева почев од 6000 па до 6040. Место да израчунавамо као тамо логаритме бројева, којих је размак јединица, ми можемо најпре израчунавати логаритме бројева, којих је размак већи н. пр. 10, дакле бројева 6010, 6020, 6030 и 6040, пошто $log\, 6000$ узимамо као већ познат. После тога тражићемо путем интерполације и логаритме осталих бројева, који су између оних првих.

Из обрасца 3) у № 144:

$$log\,(a+\delta) = Mla + M\frac{\delta}{a} - \frac{M}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \frac{M}{3}\frac{\delta^3}{a^3} - \dots$$

видели смо, да је за $a = 6000$ и $\delta = 10,\ 20,\ 30$ и 40 вредност трећег члана мања од пола јединице седмог десетног места. Ако дакле хоћемо логаритме са 7 децимала онда, као што смо горе напоменули, можемо при израчунавању тих логаритама занемарити тај трећи члан и све доцније а да се погрешка не осети на 7-ом десетном месту. Дакле до на 7 децимала тачно можемо сматрати ред логаритама бројева 6000, 6010, 6020, 6030 и 6040 као аритметичан другог степена.

Пошто је већ познат:

$$log\, a = Mla = log\, 6000 = 3{\cdot}7781513$$

то онда из једначине:

$$log\,(a+\delta) = log\, a + M\frac{\delta}{a} - \frac{M}{2}\cdot\frac{\delta^2}{a^2}$$

добијамо за $a = 6000$ и $\delta = 10,\ 20,\ 30,\ 40$:

	$\triangle$	$\triangle^2$
$log\ 6000 = 3{\cdot}7781513$	7232	-12
„ $6010 = 3{\cdot}7788745$	7220	-12
„ $6020 = 3{\cdot}7795965$	7208	-12
„ $6030 = 3{\cdot}7803173$	7196	.
„ $6040 = 3{\cdot}7810369$	.	.

где су прве разлике исказане у јединицама 7-ог десетног места.

Да бисмо сад нашли логаритме свију целих бројева почев од 6000 до 6040, треба између свака два и два логаритма под 1) уметнути по 9 нових чланова. Зарад тога треба у општем интерполационом обрасцу 7) у № 145 пошто су ред логаритама под 1) а тако исто и тражени интерполовани ред до на 7 децимала тачно аритметични другог степена, ставити

$$u_1 = 3{\cdot}7781513,\quad \triangle u_1 = 0{\cdot}0007232$$

$$\triangle^2 u_1 = -\,0{\cdot}0000012,\quad \triangle^3 u_1 = \triangle^4 u_1 = \dots = 0,\quad k = 10$$

На тај начин добићемо:

$$A_{z+1} = 3·7781513 + \frac{7}{10} · 0·0007232 - \frac{z(z-10)}{2.10^2}$$
$$\times 0·0000012$$

или кад се сведе:

$$2.) \quad A_{z+1} = 3·7781513 + 723·8z - 0·06z^2$$

где су последња два сачиниоца исказана у јединицама 7-ог десетног места. Овај образац може се до на 7 децимала тачно сматрати као општи члан траженог интерполованог реда.

Када бисмо сад у обрасцу 2) ставили редом $z = 0$, 1, 2, 3 . . . 40 добили бисмо све тражене логаритме. Али пошто је ред, који из њих постаје, до на 7 децимала тачно, аритметичан другог степена, то треба помоћу обрасца 2), пошто је већ *log* 6000 познат, израчунати само *log* 6001 и *log* 6002 стављајући у 2) $z = 1$ и 2. А остале логаритме треба тражити помоћу различних редова. Почетак рада показан је у таблици, која долази мало ниже и у којој смо прве и друге разлике исказали опет јединицама 7-ог децималног места. Осму и девету децималу узели смо зарад поправке, јер као што смо већ напоменули у № 144 погрешке, које долазе од занемарених децимала, могу услед непрестаног сабирања најзад толико нарасти, да се дотакну и седмог децималног места у логаритмима.

Мало час поменута таблица јесте ово:

log	$\triangle$	$\triangle^2$
3·7781513	723·74	— 0·12
223674	723·92	— 0·13
296036	723·50	.
368386	723·38	.
440724	723·26	.
513050	723·14	.
585364	723·02	
657666	722·90	
729956	722·78	
802234	722·66	
874500	.	
.	.	
.	.	
.	.	

Није згорег овом приликом напоменути, да кад се као овде израчунава какав ред помоћу приближних разлика његових чланова, да се велим погрешке, које долазе од занемарених децимала у последњем различном реду, јављају али наравно повећане и у претходећим различним редовима као и у главном реду, али само опе у тим редовима расту по законима фигурних бројева (№ 141).

На начин, који је овде показан, израчунато је врло много таблица, као логаритамске, тригонометријске и т. д. Помоћу функције, ако је она позната, или опитима, ако је она непозната, изналази се само врло мали број вредности њених, а остале се вредности после траже путем интерполације. Израчунати или опитима нађени бројеви при том се увек сматрају приближно тачно као чланови аритметичног реда, вишег или нижег степена, како кад то захтева тачност, коју у рачуну мислимо постићи.

147. У опште, кад је $u = \varphi(x)$ непозната функција, али је познат низ вредности њених:

1.) $u_1, u_2, u_3, \dots u_{m+1}$

које одговарају такође познатим вредностима x-а:

2.) $x_1, x_2, x_3 \dots x_{m+1}$

онда се може захтевати, да изнађемо вредности непознате функције, које одговарају ма којим другим вредностима x-а, што су између x_1 и x_{m+1}. Јасно је да се тај задатак не може решити са свим тачно, него само приближно тачно. Зарад тога ми ћемо морати тражити једну функцију $f(x)$, која ће при израчунавању вредности непознате функције $\varphi(x)$ моћи ову бар приближно заменити. Функција $f(x)$ мора очевидно бити таква, да и она за горње вредности x-а добија вредности:

$$u_1, u_2, u_3, \dots u_{m+1}$$

Пошто је разлика вредности, које добијају функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ за сваку од горњих вредности x-а, једнака нули, то је јасно, да ће се вредности тих функција, које одговарају вредностима x-а, што су између ма које две узастопне од оних под 1), међу собом мало разликовати. Дакле се без осетне погрешке $f(x)$ може узети место непознате функције $\varphi(x)$ за све вредности x-а, што су између x_1 и x_{m+1} и то узети тим слободније, што је год мањи размак горњих вредности x-а.

Као што се види, ова је радња опет интерполација. Лако је осем тога увидети, да је овај задатак неодређен, т. ј. да има бесконачно много функција, које за вредности x-а: $x_1, x_2, \dots . x_{m+1}$ добијају вредности: $u_1. u_2, u_3 \dots u_{m+1}$. Јер једини услов, који функција $f(x)$ има да испуни, јесте тај, да она за вредности x-а под 2) добија вредности под 1). Ово се тврђење у осталом даје геометријски најлакше и најувиђавније оправдати.

И доиста ако горње вредности x-а сматрамо као апсцисе, а њима одговарајуће вредности непознате функције $u = \varphi(x)$, што су под 1), за ординате, онда помоћу истих вредности добијамо $(m+1)$ тачака у равни. Сад тражити функцију $f(x)$, која би у горепоменутом послу могла заменити функцију $\varphi(x)$, значи толико, колико тражити линију, која би могла заменити непознату линију, којој припадају $(m+1)$ поменутих тачака. Али пошто линија, која непознату линију $u = \varphi(x)$ треба да замени, има само један услов да испуни, а тај је да она пролази такође кроз $(m+1)$ поменутих тачака, то је онда јасно, да таквих линија има бесконачно много. Међу тим непрекидност, која се обично огледа у природним законима, налаже нам, да између линија, које пролазе кроз $(m+1)$ поменутих тачака, узмемо као заменика непознате линије увек ону, која показује највише правилности, или боље, чији се ток највише слаже са током, који је овлаш обележен поменутим тачкама.

Међу тим задатак постаје са свим одређен, кад придодамо још један услов, н. пр. да непозната функција $\varphi(x)$ има бити цела и рационална m-ог степена, дакле за једну јединицу нижег степена од броја познатих вредности њених. Јер кад би било могуће две целе и рационалне функције x-а m-ог степена $\varphi(x)$ и $f(x)$, које би за горе поменутих $(m+1)$ вредности x-а имале једнаке вредности, онда би једначина:

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

која може бити највише m-ог степена, имала $(m+1)$ корена: x_1, x_2, x_3, . . . x_{m+1} а то не може бити, јер једначина m-ог степена има само m корена, ни више ни мање.

У највише прилика размак вредности x-а, којима одговарајуће вредности непознате функције знамо, јесте сталан. Ми смо тај случај већ имали у № 146, али није згорега претрести га овде још један пут.

148. Узмимо дакле, да је $u = \varphi(x)$ непозната функција x-а, и да су:

1.) $$u_1,\ u_2,\ u_3 . \ . \ . \ . \ u_{m+1}$$

вредности, које та непозната функција добија за вредности x-а:

2.) $$x_1,\ x_1 + k,\ x_1 + 2k,\ . \ . \ . \ x_1 + mk$$

Пошто образац 4) у № 136 вреди у опште, то ће рећи, па био задати ред ма какав, то је онда:

$$u_{m+1} = u_1 + \frac{m}{1}\triangle u_1 + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\triangle^2 u_1 + \,.\,.$$

$$+\frac{m(m-1)\,.\,.\,.\left\{m-(m-1)\right\}}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ m}\triangle^m u_1.$$

Сменимо овде u_{m+1} са u и ставимо:

$$x = x_1 + mk$$

одакле следује:

$$m = \frac{x - x_1}{k}$$

па ћемо на тај начин добити:

3.) $$u = u_1 + \frac{x-x_1}{k}\triangle u_1 + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\frac{\triangle^2 u_1}{1.\,2} +$$

$$.\,.\,.\,. + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}.\,.\,.\,.$$

$$.\,.\,.\,.\left\{\frac{x-x_1}{k} - (m-1)\right\}\frac{\triangle^m u_1}{m!}$$

И ми сад тврдимо, да ова функција x-а испуњава оне услове, које треба да испуни једна функција, те да може заменити непознату функцију $\varphi(x)$. Она је понајпре цела и рационална функција x-а m-ог степена, као што се то јасно види из њеног последњег члана, који је производ m чинилаца сваки првог степена односно x. Даље за вредности x-а под 2) она добија редом оне вредности, које стоје под 1). Јер ако узмемо да је r ма који од бројева 0, 1, 2, 3 . . . m, онда за $(r+1)$-ву вредност x-а:

$$x = x_1 + rk$$

функција под 3) добија вредност:

$$u = u_1 + r\triangle u_1 + \binom{r}{2}\triangle^2 u_1 + \ldots + \binom{r}{m}\triangle^m u_1$$

а то је очевидно $(r+1)$-ва вредност од оних под 1).

Према томе може се функција под 3) узети као заменик непознате функције $u = \varphi(x)$, дакле као функција, која приближно зависи од x онако као и непозната функција $\varphi(x)$. Кад у обрасцу 3) заменимо x са вредношћу x', која се вредност налази између x_1 и $x_{m+1} = x_1 + mk$, онда ће тај образац дати за u вредност u', која ће бити приближна вредност праве вредности $\varphi(x')$. При том треба добро имати на уму то, да је k стални размак оних вредности x-а, којима одговарајуће вредности непознате функције $\varphi(x)$ знамо. Ако ставимо:

$$x - x_1 = z$$

онда се образац 3) претвара у:

$$5.)\quad u = u_1 + \frac{z}{k}\triangle u_1 + \frac{z(z-k)}{1.\ 2.\ k^2}\triangle^2 u_1 +$$

$$\frac{z(z-k)\,(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ k^3}\triangle^3 u_1 +$$

$$\ldots \frac{z(z-k)(z-2k)\ldots\{z-(m-1)k\}}{1.\ \ 2\ \ \ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ m\ k^m}\triangle^m u_1$$

а то је — Newton-ов — образац 7) у № 145. При употреби тога обрасца треба имати на уму то, да z значи разлику између вредности x-а, за коју тражимо вредност непознате функције $\varphi(x)$ и вредности x-а, која одговара првој познатој вредности исте функције.

Кад су друге разлике вредности под 1) тако већ мале, да се могу занемарити, онда се образац 4) своди на овај:

$$5.)\qquad u = u_1 + \frac{z}{k}\triangle u_1$$

који се може написати и овако:

$$\frac{u - u_1}{\triangle u_1} = \frac{z}{k} = \frac{x - x_1}{k}$$

Тада се дакле *узима*, да су промене непознате функције сразмерне променама променљиве, од које она зависи, да дакле једнаким променама променљиве одговарају једнаке промене непознате функције, или што је све једно, да су прве разлике њене међу собом једнаке. Тако се т. ј. помоћу обрасца 5) ради, кад се траже логаритми тригонометријских функција, који се не налазе у таблицама.

Али при употреби таблица дешава се и противан случај, где се познатој вредности функције u, која се вредност у таблицама тачно не налази, тражи одговарајућа вредност x-а. Ако се друге разлике могу занемарити, онда добијамо из 4):

$$5.)\qquad z = x - x_1 = k\,\frac{u - u_1}{\triangle u_1}$$

где се под u_1 разуме таблична вредност функције u, која долази непосредно пред познатом вредности њеном, а међу тим као u_2 узимље се таблична вредност функције, која долази непосредно за поменутом познатом вредношћу њеном.

Али ако последњи образац неби дао довољно тачан резултат, другим речима, ако би се и више разлике морале узети у рачун, морали бисмо решити једначину вишег степена. Но то можемо избећи овако:

Из 4) добијамо:

$$6.)\quad z=\frac{u-u_1}{\frac{1}{k}\Delta u_1+\frac{z-k}{1.2.\,k^2}\Delta^2 u_1+\frac{(z-k)(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ k^3}\Delta^3 u_1+\ldots}$$

Ако овде занемаримо више разлике, т. ј. $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$ и т. д. онда овај образац даје као прву приближну вредност за $z = x - x_1$ ону, коју даје и образац 5). Ако прву приближну вредност заменимо десно у обрасцу 6) и при том занемаримо $\Delta^3 u_1$ и све више разлике, онда добијамо као другу приближну вредност:

$$z=\frac{u-u_1}{\frac{1}{k}\Delta u_1+\frac{z-k}{1.2.\,k^2}\Delta^2 u_1}$$

Кад смо ову израчунали, онда помоћу ње добијамо као четврту приближну вредност:

$$z=\frac{u-u_1}{\frac{1}{k}\Delta u_1+\frac{z-k}{1.2.\,k^2}\Delta^2 u_1+\frac{(z-k)\,(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ k^3}\Delta^3 u_1}$$

и т. д.

Примедба. По методи овде изложеној ради се и онда, кад је $u = \varphi(x)$ позната функција, али није згодна за израчунавање.

Пример 1. Тражи се $tg\,30^\circ 15'$, кад је дато:

$x_1 = 30^\circ\ \ 0'$ $\quad u_1 = 0{\cdot}5773503$

$x_2 = 30^\circ\ 30'$ $\quad u_2 = 0{\cdot}5890450$

$x_3 = 31^\circ\ \ 0'$ $\quad u_3 = 0{\cdot}6008606$

$x_4 = 31^\circ\ 30'$ $\quad u_4 = 0{\cdot}6128008$

$x_5 = 32^\circ\ \ 0'$ $\quad u_5 = 0{\cdot}6248694$

Тражимо узастопне разлике вредности од u:

$u = tg\,x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0·5773503	+ 116947	+ 1209	+ 37	+ 1
0·5890450	118156	1246	38	
0·6008606	119402	1284		
0·6128008	120686			
0·6248694				

Овде је $k = 30'$ а $z = 15'$, дакле радећи по обрасцу 4) добијамо:

$$u = tg\,30^\circ\ 15' = 0{\cdot}5773503 + \frac{1}{2}\times 0{\cdot}0116947$$

$$-\frac{1}{8}\times 0{\cdot}0001209+\frac{1}{16}\times 0{\cdot}0000037$$

где смо четврту разлику + 1 занемарили, пошто не утиче на седму децималу. Даље је:

$$u = tg\, 30^\circ\, 15' = 0{\cdot}5773503$$
$$+\, 0{\cdot}00584735$$
$$-\, 0{\cdot}00001511$$
$$+\, 0{\cdot}00000023$$
$$= 0{\cdot}5831828$$

Пример 2. Да се са таблицама десетомесних логаритама бројева од 1 до 1000 у рукама нађе логаритам броја:

$$\pi = 3{\cdot}1415926536$$

са десет децимала. Ми ћемо логаритме у тој таблици сматрати као познате вредности функције u а бројеве као вредности x-а, па ћемо имати:

x	$log\, x$	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
3·14	0·4969296481	13809057	— 43769	277	— 3
3·15	0·4983105538	13765288	— 43492	274	
3·16	0·4996870826	13721796	— 43218		
3·17	0·5010592622	13678578			
3·18	0·5024271200				

Овде је $k = 0{\cdot}001$, $z = 0{\cdot}0015926533$; $u_1 = 0{\cdot}4969296481$;

$$\triangle\, u_1 = 0{\cdot}0013809057;\quad \triangle^2 u_1 = -\, 0{\cdot}0000043769;$$

$$\triangle^3 u_1 = 0{\cdot}0000000277;\quad \triangle^4 u_1 = -\, 0{\cdot}0000000003$$

Даље је:

$$\frac{z}{k} = 0{\cdot}15926533,\quad \frac{(z-k)}{2k} = -\, 0{\cdot}42036732,$$

$$\frac{z-2k}{3k} = -\, 0{\cdot}61357821,\quad \frac{z-3k}{4k} = -\, 0{\cdot}71018366$$

Са овим вредностима а помоћу обрасца 4) добијамо лако:

$$log\, \pi = 0{\cdot}4971498727$$

149. Вратимо се к обрасцу у № 148:

$$1.)\quad u = u_1 + \frac{x-x_1}{k} \triangle u_1 + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\frac{\triangle^2 u_1}{1.\ 2} +$$

$$\ldots\ldots + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left\{\frac{x-x_1}{k} - (m-1)\right\}\frac{\triangle^m u_1}{m!}.$$

Као што из онога, што смо у № 148 говорили, следује, ми смо у стању наћи увек помоћу овог обрасца непознату функцију x-а, за коју знамо, да је цела и рационална и да добија $(m+1)$ извесних вредности за толико исто познатих вредности x-а.

Тако н. пр. ако се тражи цела и рационална функција x-а, која за $x = -2, -1, 0, 1$ и 2 добија вредности: 67, 14, 3, 4, 11, треба узети на ум да је сада:

$$u_1 = 67,\ \triangle u_1 = -53,\ \triangle^2 u_1 = 42,\ \triangle^3 u_1 = -30,$$

$$\triangle^4 u_1 = 24,\ x_1 = -2 \ \text{ и } \ k = 1$$

па ћемо помоћу горњег обрасца добити:

$$u = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3$$

Ако су у горњем обрасцу 1) количине u_1, $\triangle u_1$, $\triangle^2 u_1$, . . . све положне и ако је чинилац:

$$\frac{x - x_1}{k} - (m-1),$$

који је најмањи од сродних му чинилаца у истом обрасцу, такође положан, онда ће и сви остали чиниоци тога рода у горњем обрасцу 1) бити положни. Дакле ће тада функција u као збир положних чланова бити положна. Али ако је поменути чинилац и једнак нули, то ће исто бити случај, јер тада ће само последњи члан десно од знака једнакости у обрасцу 1) нестати, док ће међу тим сви остали чланови бити положни. Из

$$\frac{x - x_1}{k} - (m-1) = 0$$

добијамо:

1.) $$x = x_1 + (m-1)\,k$$

За ову вредност x-а дакле као и за сваку другу од ње већу биће функција u у почетку ове №-е положна. Дакле је вредност x-а под 1) горња граница корена једначине, која се добија, кад се функција u стави $= 0$.

Али ако су количине u_1, $\triangle u_1$, $\triangle^2 u_1$, . . . на изменце положне и одречне за н. пр. $x = x_1$, онда је x_1 доња граница корена, јер лако је увидети, да ће за сваку од x_1 мању вредност x-а функција под 1) бити вазда једног и истог знака.

Узмимо н. пр. једначину:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 7 = 0.$$

Ред вредности, које функција $f(x)$ добија за $x = 0$, 1, 2, 3, и различни редови тога реда јесу:

$$\begin{array}{c} 7,\quad 11,\quad 31,\quad 73 \\ 4,\quad 20,\quad 42 \\ 16,\quad 22 \\ 6 \end{array}$$

Овде је $u_1 = 7$, $\triangle u_1 = 4$, $\triangle^2 u = 16$, $\triangle^3 u_1 = 6$. Све те количине јесу положне и с тога пошто је сада $k = 1$, $m = 3$, и $x_1 = 0$, горња граница корена једначине јесте:

$$x = 2.$$

Исто тако ред вредности функције $f(x)$ за $x = -6$, -5, -4, -3 са различним редовима јесте:

$$-17, \quad 17, \quad 31, \quad 31$$

$$4 \quad 14 \quad 0$$

$$-20 \quad -14$$

$$6$$

Овде је сада $u_1 = 17$, $\triangle u_1 = 34$, $\triangle^2 u_1 = -20$, $\triangle^3 u_1 = 6$, Те су дакле количине наизменце положне и одречне, дакле је $x = x_1 = 6$ доња граница корена горње једначине.

150. Newton-ов образац 3) и 4) у № 148 претпоставља, да је размак оних вредности променљиве, којима одговарају познате вредности функције, сталан. Образац Lagrange-ов, који ћемо сада да изведемо, то не претпоставља. Узмимо дакле, да су:

$$x_1, \ x_2, \ x_3 \ \ldots \ x_{m+1}$$

познате вредности променљиве x, којима одговарају такође познате вредности:

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ \ldots \ u_{m+1}$$

непознате функције $u = \varphi(x)$. Размак познатих вредности x-а може бити сталан или не.

Ставимо непознату функцију:

$$1.) \quad u = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{m+1} x^m$$

И сад треба непознате сачиниоце a израчунати тако, да ова једначина за $x = x_1, \ x_2, \ x_3 \ \ldots \ x_{m+1}$ да као одговарајуће вредности $u = u_1, \ u_2, \ u_3 \ \ldots \ u_{m+1}$. Такве

вредности за непознате сачиниоце a израчунавају се помоћу $(m+1)$ једначина:

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \ldots + a_{m+1} x_1^m$$

$$u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \ldots + a_{m+1} x_2^m$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$u_{m+1} = a_1 + a_2 x_{m+1} + a_3 x_{m+1}^2 + \ldots + a_{m+1} x_{m+1}^m$$

Али место да решавамо ове једначине на обичан начин или пак помоћу детерминаната, згодније је радити овако: Из линеарног облика једначина увиђамо, да сваки непознати сачинилац н. пр. a_1 мора бити облика:

$$a_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 + \ldots + u_{m+1} p_{m+1}$$

где су поједина p функције бројева $x_1, \ x_2, \ x_3 \ \ldots \ x_{m+1}$.

Ако сад заменимо у 1) поједине сачиниоце a тим њиховим вредностима и после те замене уредимо једначину по количинама $u_1, \ u_2, \ u_3 \ \ldots \ u_{m+1}$, она ће се јавити у овом облику:

$$2.) \quad u = u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 + \ldots + u_{m+1} q_{m+1}$$

где су поједина q целе и рационалне функције m-ог степена променљиве x. Према условима задатка мора једначина 2) за $x = x_1$ дати $u = u_1$ а за то се опет изискује, да је за ту вредност x-а:

$$q_1 = 1, \ q_2 = q_3 = q_4 = \ldots = q_{m+1} = 0$$

И из истог основа мора за $x = x_2$ бити:

$$q_2 = 1, \text{ и } q_1 = q_3 = q_4 = \ldots = q_{m+1} = 0$$

и т. д. На кратко ма који од ових сачинилаца н. пр. q_k мора бити такав, да је он једнак јединици за $x = x_k$ а једнак нули за сваку од осталих вредности: $x = x_1$, x_2, $x_3 \ldots x_{k-1}$, $x_{k+1} \ldots x_{m+1}$. Према томе количина q_k, која је функција m-ог степена промењљиве x, и која мора бити $= 0$ за сваку од m вредности $x = x_1$, x_2, $\ldots x_{k-1}$, x_{k+1}, $\ldots x_{m+1}$ може се узети, да је облика:

$$3.)\quad q_k = c(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots (x-x_{m+1})$$

где је c од промењљиве x независан број. Тај број c лако је наћи, само ако узмемо на ум, да за $x = x_k$ мора бити $q_k = 1$. Према томе је дакле:

$$1 = c(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_{m+1}).$$

и кад c вредношћу, која се одавде добија, заменимо у обрасцу 3), наћи ћемо:

$$q_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{m+1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{m+1})}$$

Ако у овом општем обрасцу заменимо k редом вредностима 1, 2, 3 . . . $(m+1)$, добићемо интерполациони образац Lagrange-ов.

$$4.)\quad \begin{aligned} u = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{m+1})}\, u_1 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{m+1})}\, u_2 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m+1})}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_3-x_{m+1})}\, u_3 \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2)\ldots(x_{m+1}-x_{m-1})}\, u_{m+1} \end{aligned}$$

Кад бисмо развили разломке, и после уредили по степенима промењљиве x, ова би се једначина јавила у облику обрасца 1). Једначина 4) јесте m-ог степена и она за $x = x_1$, x_2, $x_3 \ldots x_{m+1}$ даје за u вредности: u_1, u_2, $u_3 \ldots u_{m+1}$. Свака друга једначина, која би била нађена по ма којој другој методи и испуњавала би исте захтеве као и једначина 4), морала би бити са овом истоветна. Јер смо ми видели, да кад су две целе и рационалне функције x-а m-ог степена једнаке за више од m вредности x-а, да оне морају бити истоветне. Најзад из самог извођења обрасца 4) може се увидети, да је задатак интерполације са свим неодређен. Јер ако се не постави, у осталом са свим произвољан и ничим не оправдан услов, да непозната функција има бити цела и рационална, онда можемо ставити, да је:

$$q_k = \frac{\sqrt{x-x_1}\,\sqrt{x-x_2}\ldots\sqrt{x-x_{m+1}}}{\sqrt{x_k-x_2}\,\sqrt{x_k-x_3}\ldots\sqrt{x_k-x_{m+1}}}$$

или:

$$q_k = \frac{tg(x-x_1)\,tg(x-x_2)\ldots tg(x-x_{m+1})}{tg(x_k-x_1)\,tg(x_k-x_2)\ldots tg(x_k-x_{m+1})}$$

ТРЕЋИ ДЕО.

Разлагање рационалних разломака на простије разломке.

151. Ми ћемо претпоставити, да нам је дат разломак, коме су и бројилац и именилац полиноми уређени по степенима x-а. Ми ћемо даље претпоставити, да је разломак чиста разломљена функција x-а, јер у противном случају ми бисмо могли поделив бројиоца имениоцем разложити дани разломак на два дела, од којих је један цела, а други чисто разломљена функција x-а. И најзад ми ћемо претпоставити, да бројилац и именилац немају никаквог заједничког делиоца, јер бисмо га у противном случају могли скратити са тим делиоцем. Претпостављајући дакле, да је такав разломак:

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

наш ће сада задатак бити, да покажемо, како се он може представити као збир више простијих рационалних разломака. Ми ћемо још претпоставити, да су нам познати корени једначине, која постаје, кад именилац $F(x)$ ставимо једнак нули. Тада су нам дакле познати и корени чиниоци функције $F(x)$.

Случај неједнаких корена.

152. Ми претпостављамо, да је именилац разломка:

$$1.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}$$

функција x-а m-ог степена, услед чега бројилац може бити највише $(m-1)$-ог степена. Корени $a, b, c, d \ldots k, l$, једначине:

$$F(x) = 0$$

узећемо најпре, да су сви међу собом различни. И ми сад тврдимо, да се дати разломак може разложити на m разломака, као што следује:

$$2.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots$$

$$+ \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}$$

где су бројиоци $A, B, C \ldots K, L$ стални бројеви. Да бисмо ово што тврдимо и оправдали, треба само доказати, да се за $A, B, C, \ldots K, L$ могу увек наћи такве вредности, да је за њих једначина 2) идентична, т. ј. лева страна једнака десној за сваку вредност x-а.

Претпоставимо за време, да $A, B, C \ldots K, L$ у једначини 2) већ имају такве вредности. Онда је једначина идентична, па очевидно и свака од оних, које сад одмах долазе. Кад једначину 2) помножимо са $F(x)$, добићемо:

$$3.) \qquad f(x) = \frac{AF(x)}{x-a} + \frac{BF(x)}{x-b} + \ldots + \frac{KF(x)}{x-k} + \frac{LF(x)}{x-l}$$

Или кад количнике, који се добијају, кад се $F(x)$ подели редом са $(x-a)$, $(x-b)$, . . . $(x-l)$, означимо са: $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ . . . $F_m(x)$:

$$4.)\quad f(x) = AF_1(x) + BF_2(x) + CF_3(x) + \dots + LF_m(x).$$

Пошто је ова једначина идентична, то она мора вредити за сваку вредност x-а, па дакле и за $x = a$, b, $c \dots k$, l. Ако у њој ставимо $x = a$ н. пр., онда ће сви чланови десно сем првог ишчезнути, јер свака од функција:

$$F_2(x),\quad F_3(x),\quad F_4(x)\ \dots\ F_m(x)$$

има $(x-a)$ као чиниоца. На тај начин добијамо:

$$f(a) = AF_1(a)$$

одакле следује:

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}$$

Исто тако за $x = b$ добијамо из једначине 4)

$$B = \frac{f(b)}{F_2(b)}$$

и т. д. и најзад

$$L = \frac{f(l)}{F_m(l)}$$

Према томе:

Да бисмо нашли бројиоца ма којем од m разломака десно од знака једнакости у једначини 2) н. пр. разломку

$$\frac{H}{x-h}$$

треба поделити $F(x)$ са $x-h$ и ако је $\varphi(x)$ добивени количник, онда је:

$$H = \frac{f(h)}{\varphi(h)}$$

Да бисмо изнашли вредности појединих бројилаца ми смо претпоставили, да се задати разломак може разложити онако, како је показано у једначини 2), из које су после нужно следовале једначине 3) и 4). Треба дакле сада доказати, да су за нађене вредности бројилаца, које су вредности очевидно једино можне, поменуте једначине идентичне. Зарад тога узмимо на ум само то, да кад бројиоце заменимо нађеним вредностима, да је онда једначина 2) задовољена сваком од m вредности $x = a$, b, $c \dots k$, l. То је исто случај и са једначинама 3) и 4). Пошто је сад у једначини 4) десно од знака једнакости сваки члан $(m-1)$-ог степена односно x, док је међу тим услед претпоставке $f(x)$ највише $(m-1)$-ог степена, то је онда једначина 4) $(m-1)$-ог степена. Па пошто је број горњих вредности x-а, које ју задовољавају, већи од њеног степена, то она мора бити идентична (№ 147). То дакле исто мора бити случај за нађене вредности бројилаца и са једначином 3) као и са једначином 2).

Помоћу једне Euler-ом учињене примедбе можемо израчунати бројиоце простијих разломака, а да не морамо делити $F(x)$ са $(x-a)$, $(x-b)$ . . . $(x-l)$. Јер из једначине:

$$F(x) = (x-h)\,\varphi(x)$$

следује, кад узмемо лево и десно прве изводе:

$$F'(x) = (x-h)\,\varphi'(x) + \varphi(x),$$

а одатле за $x = h$:

$$F'(h) = \varphi(h)$$

услед чега добијамо сада:

$$H = \frac{f(h)}{F'(h)}$$

Дакле можемо сада казати:

Да бисмо добили бројиоце простијих разломака:

$$\frac{A}{x-a}, \ \frac{B}{x-b}, \dots\dots \frac{L}{x-l},$$

треба само заменити у:

$$\frac{f(x)}{F'(x)}$$

x редом са a, b, c, ... l.

153. Умовање у № 152 независно је од тога, да ли су сви сачиниоци једначине:

1.) $$F(x) = 0$$

стварни или не, као и од тога, да ли су сви неједнаки корени њени стварни или не. Међу тим у оном случају, кад су сачиниоци њени стварни, а међу коренима њеним има и уображених, могу се уображени разломци, којих ће тада бити, избећи на врло прост начин. Треба само то узети на ум, да сваком уображеном корену једначине 1): $a + bi$ мора одговарати други њен корен $a - bi$. Ако сад означимо са A и B бројиоце простих разломака, којима ће имениоци бити:

$$x - a - bi \quad \text{и} \quad x - a + bi$$

онда ће бити:

$$A = \frac{f(a+bi)}{F'(a+bi)}, \quad B = \frac{f(a-bi)}{F'(a-bi)}$$

или:

$$A = P + Qi, \quad B = P - Qi$$

Дакле ће збир разломака, који одговарају поменутим уображеним коренима, бити:

$$\frac{P + Qi}{x - a - bi} + \frac{P - Qi}{x - a + bi} = \frac{2P(x-a) - 2bQ}{(x-a)^2 + b^2}$$

Из овог дакле видимо, да сваком спрегу уображених корена, који се у једначини 1) један пут само јавља, одговара један стваран разломак облика:

$$\frac{Rx + S}{(x-a)^2 + b^2}$$

Примедба. И ако из самога рада у № 152 јасно следује, да се за задати разломак може добити само један систем простих разломака а не више, опет за то мислимо, да неће згорега бити, ако то овде нарочито докажемо.

Јер узмимо да смо, радећи по једној методи, нашли да је задати разломак:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l},$$

а радећи по другој методи, да смо нашли:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A'}{x-a'} + \frac{B'}{x-b'} + \frac{C'}{x-c'} + \dots + \frac{L'}{x-l'}$$

Из ових двеју једначина следује једначина:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots+\frac{L}{x-l}=$$

$$\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\cdots+\frac{L'}{x-l'},$$

или кад помножимо лево и десно са $(x-a)$

$$A+(x-a)\left\{\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots+\frac{L}{x-l}\right\}$$

$$=(x-a)\left\{\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\cdots+\frac{L'}{x-l'}\right\}.$$

За $x=a$ лева страна своди се на A, а десна страна кад ни један од именилаца у загради не би био $=(x-a)$, свела би се на нулу. Дакле један од десних именилаца мора бити $=(x-a)$. Ако претпоставимо да је то случај са првим имениоцем, онда је:

$$A+(x-a)\left\{\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots+\frac{L}{x-l}\right\}$$

$$=A'+(x-a)\left\{\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\cdots+\frac{L'}{x-l'}\right\}$$

За $x=a$ следује из ове једначине: $A=A'$. Дакле су већ први разломци у оба система једнаки. Ако та два једнака разломка изоставимо, онда имамо једначину:

$$\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots+\frac{L}{x-l}=\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\cdots$$

$$+\frac{L'}{x-l'}.$$

помоћу које се на сличан начин доказује, да су једнаки и разломци:

$$\frac{B}{x-b},\quad \frac{B'}{x-b'}\ \text{и т. д.}$$

Дакле су оба низа горњих разломака идентични.

Пример 1. Да се разложи на простије разломке:

$$1.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{2x^3+5x^2-6}{x^4+2x^3-x^2-2x}$$

Корени једначине:

$$x^4+2x^3-x^2-2x=0$$

јесу: $x=0,\ 1,\ -1,\ -2$. Дакле се дати разломак може разложити овако:

$$2.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}.$$

Да бисмо нашли бројиоце, ми ћемо радити по другој методи, т. ј. послужићемо се првим изводом:

$$F'(x)=4x^3+6x^2-2x-2,$$

и тако ћемо добити:

$$A = \frac{f(0)}{F'(0)} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad B = \frac{f(1)}{F'(1)} = \frac{1}{6},$$

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = -\frac{3}{2}, \qquad D = \frac{f(-2)}{F'(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Дакле је:

$$\frac{2x^3+5x^2-6}{x^4+2x^3-x^2-2x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{6(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Ако бисмо се пак хтели послужити првом методом, морали бисмо имати на уму, да је сада:

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6$$

$$F_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad F_2(x) = x^3 + 3x^2 + 2x,$$

$$F_3(x) = x^3 + x^2 - 2x, \qquad F_4(x) = x^3 - x.$$

Дакле је:

$$A = \frac{f(0)}{F_1(0)} = \frac{-6}{-2} = 3, \quad B = \frac{f(1)}{F_2(1)} = \frac{1}{6},$$

$$C = \frac{f(-1)}{F_3(-1)} = -\frac{3}{2}, \qquad D = \frac{f(-2)}{F_4(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3},$$

као што смо нашли мало час.

Најзад могли бисмо бројиоце израчунати и по правилу неодређених сачинилаца. Јер пошто је једначина 2), у којој место симбола на левој страни треба да стоји а дати разломак, идентична, то онда, кад ту једначину

ослободимо именилаца и уредимо лево и десно по степенима x-а, одговарајући сачиниоци лево и десно морају бити једнаки.

Пример 2. Да се разложи на простије разломке:

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)}$$

Једначина $F(x) = 0$ има -1 и $\pm i$ као корене. Дакле је

$$1.) \qquad \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

По једној од двеју метода налазимо $A = \frac{3}{2}$. Кад заменимо A том вредношћу у једначину и за тим први члан пребацимо лево, па најзад помножимо лево и десно са имениоцем:

$$2.) \qquad (x+1)(x^2+1),$$

онда из нове једначине можемо по правилу неодређених сачинилаца добити B и C. Или можемо одмах једначину 1) помножити са имениоцем под 2), уредити лево и десно по степенима x-а и затим израчунати A, B и C по правилу неодређених сачинилаца.

Или најзад можемо и овако радити. Из једначине

$$x^2 - x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

добијамо за $x = -1$, а то је вредност, која поништава имениоца од A:

$$3 = 2A \text{ или } A = \frac{3}{2}.$$

Кад то заменимо у последњу једначину и за тим први члан пребацимо лево, добићемо:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = (Bx+C)(x+1).$$

Десна страна дељива је са $(x+1)$, дакле то мора бити случај и са левом. Кад се деоба сврши, излази:

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (Bx+C)$$

одакле по правилу неодређених сачинилаца добијамо:

$$B = C = -\frac{1}{2}.$$

Дакле:

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{(x+1)}{2(x^2+1)}$$

Случај једнаких корена.

154. Кад једначина $F(x)=0$ има и једнаких корена, онда се разлагање задатог разломка у простије разломке не може извршити ни по једној од метода у № 152. Јер ако је $x=a$ корен, који поменутој једначини више пута припада, онда се:

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)} = \frac{f(a)}{F'(a)}$$

јавља као апсолутно бесконачно велика количина. Дакле треба тражити друге методе.

Зарад тога претпоставимо, да је a k-пута корен једначини $F(x)=0$. Тада је:

1.) $$F(x) = (x-a)^k F_1(x)$$

где је $F_1(x)$ производ корених чинилаца, који постају из осталих од a различних корена.

Пре свега по једној од метода №-е 152 може се разломак:

$$\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)}$$

који постаје, кад се именилац датог разломка:

2.) $$\frac{f(x)}{F(x)}$$

скрати са $(x-a)^{k-1}$, разложити овако:

3.) $$\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)} = \frac{A_k}{x-a} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

Можност овог разлагања не зависи очевидно ни уколико од тога, да ли је разломак лево од знака једнакости чист или не. Овде је A_k од x независан број, а $f_1(x)$ цела и рационална функција x-а највише $(m-2)$-ог степена, јер из ове једначине 3) следује:

$$A_k = \frac{f(a)}{F_1(a)} \quad (\text{№ } 152) \text{ и}$$

4.) $$f_1(x) = \frac{f(x) - A_k F_1(x)}{x-a}$$

Кад поделимо једначину 1) са $(x-a)^{k-1}$ добићемо:

$$5.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)}$$

Одавде дакле видимо, да се дати разломак 2) у оном случају, где му је именилац облика под 1), где другим речима једначина $F(x) = 0$ има k корена једнаких броју a, може увек разложити на два разломка, од којих један има за бројиоца сталан број а за имениоца $(x-a)^k$, а други, који је чист разломак, има у имениоцу само $(k-1)$-ви степен чиниоца $(x-a)$.

Са другим разломком десно од знака једнакости у једначини 4) можемо онако исто радити, као и са задатим и т. д. и на тај начин добићемо редом

$$6.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)} = \dfrac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}F_1(x)}\,, \\[2ex] \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}F_1(x)} = \dfrac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \dfrac{f_3(x)}{(x-a)^{k-3}F_1(x)}\,, \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex] \dfrac{f_{k-1}(x)}{(x-a)F_1(x)} = \dfrac{A_1}{(x-a)} + \dfrac{f_k(x)}{F_1(x)} \end{array}\right.$$

Из једначина 5) и 6) добијамо најзад:

$$7.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

где услед горњег обрасца 4) бројилац и именилац последњег разломка немају заједничког делиоца. Дакле смо доказали истину:

Кад се $(x-a)$ јавља у $F(x)$ k-пута као чинилац, али не више пута, онда међу простијим разломцима, на које је задати разломак 2) разложен, биће k разломака, којима су бројиоци стални бројеви, а имениоци сви степени бинома $(x-a)$ почев од првог па до k-ог.

Ако би се $(x-b)$ јављало h пута као чинилац у $F(x)$, па дакле и у имениоцу $F_1(x)$ последњега разломка под 7), онда бисмо на сличан начин могли добити за тај последњи разломак $(h+1)$ разломака. Првих h разломака имали би за бројиоце опет сталне бројеве, а за имениоце све степене бинома $(x-b)$ почев од првог па до h-тог, а $(h+1)$-ви разломак био би чист разломак и т. д.

И овде на са свим сличан начин као и у № 153 може се доказати нарочито, да се за дати разломак може добити, па разлагали по ма којој методи, увек само један и исти низ разломака.

Сад нам још остаје, да покажемо разне методе израчунавања бројилаца простијих разломака. То ћемо учинити у №-и, која долази.

155. *Прва метода.* Кад смо у сваком особеном случају написали једначину 7) у № 154, онда је помножимо са имениоцем $F(x)$, па ћемо добити:

$$1.)\qquad f(x) = F_1(x)\Big\{A_k + A_{k-1}(x-a) + \dots + A_1(x-a)^{k-1}\Big\} + f_k(x)\,(x-a)^k$$

Кад у овој једначини заменимо x са a, дакле бројем, који поништава имениоца од A_k, добијамо:

$$A_k = \frac{f(a)}{F_1(a)}$$

Ако сада A_k у једначини 1) заменимо овом вредношћу, па пребацимо лево:

$$A_k F_1(x)$$

онда ће десна страна бити дељива са $(x-a)$, па због тога и лева страна. Ако дакле поделимо ту нову једначину са $(x-a)$, па после поделе опет ставимо $x = a$, добићемо:

$$A_{k-1} = \frac{\varphi(a)}{F_1(a)},$$

где $\varphi(x)$ значи количник: $f(x) - A_k F_1(x)$ леве стране последње поменуте једначине са $(x-a)$. Ако сад у последњој поменутој једначини заменимо A_{k-1} овом вредношћу, па за тим пребацимо лево:

$$A_{k-1} F_1(x),$$

онда ће после тога једначина бити опет дељива са $(x-a)$. Кад ту деобу извршимо, па опет ставимо $x = a$, добићемо:

$$A_{k-2} = \frac{\psi(a)}{F_1(a)},$$

где $\psi(x)$ значи количник између $\varphi(x) - A_{k-1}F_1(x)$ са $(x-a)$ и т. д.

Друга метода. Кад једначину 7) помножимо и лево и десно са $(x-a)^k$, добићемо:

$$2.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = A_k + A_{k-1}(x-a) + \dots$$
$$+ A_1(x-a)^{k-1} + (x-a)^k \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

Ако у овој једначини ставимо краткоће ради десно:

$$x - a = z,$$

она се претвара у:

$$3.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = A_k + A_{k-1}z + A_{k-2}z^2 + \dots$$
$$+ A_1 z^{k-1} + z^k \frac{f_k(a+z)}{F_1(a+z)}$$

Али је с друге стране:

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{f\{a + (x-a)\}}{F_1\{a + (x-a)\}} = \frac{f(a+z)}{F_1(a+z)}$$

или кад бројиоца и имениоца десно развијемо по Taylor-овом обрасцу (№ 8):

$$4.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{f(a) + zf'(a) + z^2f''(a) + \dots}{F_1(a) + zF_1'(a) + z^2F_1''(a) + \dots}$$

где су изводи у бројиоцу и имениоцу десно од знака једнакости *алгебарски* (№ 8).

Сад кад деобу, која је у 4) десно од знака једнакости означена, извршимо, и количник уредимо по растућим степенима z-а, остатци узастопце добивени биће односно z све вишег и вишег степена. Према томе мораће се најзад јавити један остатак, који је односно z k-ог — или вишег — степена, у ком ће случају дотични члан количника бити односно z степена $(k-1)$-ог. Ту ћемо онда при деоби стати. И пошто је већ нађени количник $(k-1)$-ог степена односно z, то ћемо имати:

$$5.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = C_1 + C_2 z^2 + \dots + C_k z^{k-1} + \frac{z^k \varphi(z)}{F_1(a+z)}$$

Из једначина 3) и 5) добијамо по правилу неодређених сачинилаца (№ 78 алгеб. анал.):

$$A_k = C_1, \; A_{k-1} = C_2, \; \ldots . \; A_1 = C_k$$

Дакле смо доказали:

Да су бројиоци разломака у обрасцу 7) № 154 k првих сачинилаца количника, који се добија, кад се $f(a+z)$ подели са $F_1(a+z)$ и количник уреди по растућим степенима z-а.

Трећа метода. Кад једначину 7) у № 154 т. ј.:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

помножимо са:

$$F_1(x) = (x-a)^k F_1(x)$$

добићемо:

$$f(x) = \Big\{ A_1(x-a)^{k-1} + A_2(x-a)^{k-2} + \ldots$$

$$+ A_{k-1}(x-a) + A_k \Big\} F_1(x) + (x-a)^k f_k(x).$$

Ова једначина, кад ставимо краткоће ради:

$$6.) \quad \varphi(x) = A_1(x-a)^{k-1} + A_2(x-a)^{k-2} + \ldots$$

$$+ A_{k-1}(x-a) + A_k$$

претвара се у ову:

$$7.) \qquad f(x) = \varphi(x)\, F_1(x) + (x-a)^k f_k(x).$$

Кад функцију $f(x)$ будемо тражили помоћу последње једначине њен први извод, првом изводу опет његов први извод, и тако продужимо и даље, докле најзад нисмо добили и $(k-1)$-ви извод функције $f(x)$, добићемо овај низ једначина:

$$8.) \left| \begin{array}{l} f'(x) = \varphi(x)\, F_1'(x) + \varphi'(x)\, F_1(x) + \ldots . \\ f''(x) = \varphi(x)\, F_1''(x) + 2\varphi'(x)\, F_1'(x) \\ \qquad\qquad + \varphi''(x)\, F_1(x) + \ldots . \\ f'''(x) = \varphi(x) F_1'''(x) + 3\varphi'(x)\, F_1''(x) + 3\varphi''(x)\, F_1'(x) \\ \qquad\qquad + \varphi'''(x)\, F_1(x) + \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

У једначинама 7) и 8) сменимо x са a, па ћемо добити:

$$f(a) = \varphi(a)\, F_1(a),$$

$$f'(a) = \varphi(a)\, F_1'(a) + \varphi'(a)\, F_1(a),$$

$$f''(a) = \varphi(a)\, F_1''(a) + 2\varphi'(a)\, F_1'(a) + \varphi''(a)\, F_1(a),$$

$$f'''(a) = \varphi(a)\, F_1'''(a) + 3\varphi'(a)\, F_1''(a) + 3\varphi''(a)\, F_1'(a)$$

$$+ \varphi'''(a)\, F_1(a),$$

. . . .

Али је на основу обрасца 6):

$$\varphi(a) = A_k, \; \varphi'(a) = 1!\, A_{k-1}, \; \varphi''(a) = 2!\, A_{k-2},$$

$$\varphi'''(a) = 3!\, A_{k-3} \text{ и т. д.}$$

Дакле је најзад:

$$9.)\quad \left|\begin{array}{l} f(a) = A_k F'_1(a), \\ f'(a) = A_k F'_1(a) + A_{k-1} F'_1(a), \\ f''(a) = A_k F''_1(a) + 1!\binom{2}{1} A_{k-1} F'_1(a) + 2!\, A_{k-2} F'_1(a) \\ f'''(a) = A_k F'''_1(a) + 1!\binom{3}{1} A_{k-1} F''_1(a) \\ \qquad + 2!\binom{3}{2} A_{k-2} F'_1(a) + 3!\, A_{k-3} F_1(a), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Прва од ових једначина даје A_k, друга A_{k-1}, трећа A_{k-2} и т. д.

Лако је у осталом увидети, зашто при тражењу узастопних извода функције $f(x)$ нисмо водили никаква рачуна о другом члану десно у једначини 7). То је било за то, што би сви изводи тога члана од првог па до $(k-1)$-ог и онако за $x = a$ ишчезли.

Пример. Да се разложи у простије разломке:

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$$

Овај разломак може се разложити овако:

$$10.)\quad \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{A_1}{(x-1)} + + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

Радимо најпре по првој методи. Из ове једначине следује:

$$11.)\qquad x^2 - x + 1 = A_3(x+1)^2(x-2)$$

$$+ A_2(x-1)(x+1)^2(x-2) + A_1(x-1)^2(x+1)^2(x-2)$$

$$+ B_2(x-1)^3(x-2) + B_1(x-1)^3(x+1)(x-2)$$

$$+ C(x-1)^3(x+1)^2.$$

За $x = 1$, $x = -1$ и $x = 2$ добијамо редом:

$$A_3 = = \frac{1}{4},\quad B_2 = \frac{1}{8},\quad C = \frac{1}{3}.$$

Сад кад заменимо A_3, B_3 и C овим вредностима у једначину 10) и за тим чланове, у којима су ти сачиниоци, бацимо лево, добићемо, после простог свођаја лево од знака једнакости:

$$-8x^5 + 5x^4 + 37x^3 - 19x^2 - 29x + 14$$

$$= 24A_2(x-1)(x+1)^2(x-2) + 24A_1(x-1)^2(x+1)^2(x-2)$$

$$+ 24B_1(x-1)^3(x+1)(x-2).$$

Десна је страна дељива са:

$$(x-1)(x+1)(x-2)$$

дакле то исто мора бити случај и са левом. Кад ту деобу свршимо излази:

$$-8x^2 - 11x + 7 =$$

$$24A_2(x+1) + 24A_1(x-1)(x+1) + 24B_1(x-1)^2.$$

Из ове једначине за $x = +1$ и $x = -1$ добијамо:

$$A_2 = -\frac{1}{4}, \quad B_1 = \frac{5}{48}.$$

Кад ово у последњу једначину заменимо и за тим први и трећи члан пребацимо лево, добићемо после простог свођаја:

$$-\frac{21}{2}x^2 + \frac{21}{2} = 24\,A_1(x^2-1)$$

или:

$$-7(x^2-1) = 16A_1(x^2-1)$$

одакле следује најзад:

$$A_1 = -\frac{7}{16}$$

И тако је задани разломак:

$$12.) \qquad \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3\,(x+1)^2\,(x-2)} =$$

$$-\frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{7}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x+1)^2}$$

$$+\frac{5}{48(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)}$$

Тражимо сада бројиоце по другој методи.

Да бисмо израчунали најпре бројиоце A_3, A_2 и A_1, треба узети на ум, да је сада $k = 3$ и $a = 1$ и

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)^2\,(x-2)} = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x - 2}$$

Ако сад ставимо $x - 1 = z$, добијамо:

$$\frac{f(1+z)}{F_1(1+z)} = \frac{1 + z + z^2}{-4 + 3z^2 - z^3}$$

Или кад деобу извршимо дотле, док нисмо добили члан са z^2 у количнику:

$$\frac{f(4+z)}{F_1(1+z)} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}z - \frac{7}{16}z^2 + \frac{(16 + 25z + 7z^2)z^3}{16(-4 + 3z^2 + z^3)}$$

Као што се види, сачиниоци количника јесу доиста вредности сачинилаца A_3, A_2 и A_1.

Кад последњу једначину поделимо лево и десно са z^3 и за тим заменимо z са $(x-1)$, добићемо:

$$13.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3\,(x+1)^2\,(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{7}{16(x-1)} + \frac{7x^2 + 11x - 2}{16(x+1)^2\,(x-2)}$$

И сад остаје да се разложи последњи разломак. Сада је за овај разломак:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{7x^2 + 11x - 2}{16(x+1)^2\,(x-2)}, \quad \frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{7x^2 + 11x - 2}{16(x-2)}$$

Сад је дакле $k = 2$, $a = -1$. Кад у овој једначини ставимо $x + 1 = z$ или $x = z - 1$ добићемо:

$$\frac{f(z-1)}{F_1(z-1)} = \frac{-6 - 3z + 7z^2}{-48 + 16z}$$

Кад према упуству №-е 155 означену деобу извршимо само дотле, док нисмо добили члан у количнику само са првим степеном z-а, наћи ћемо:

$$\frac{f(z-1)}{F_1(z-1)}=\frac{1}{8}+\frac{5}{48}z+\frac{z^2}{3(-3+z)}.$$

Као што се види, сачиниоци количника јесу вредности бројилаца B_2 и B_1. Сад кад ову једначину поделимо лево и десно са z^2 и затим ставимо $z=x+1$, добићемо:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{7x^2+11x-2}{16(x+1)^2(x-2)}=\frac{1}{8(x+1)^2}+\frac{5}{48(x+1)}$$

$$+\frac{1}{3(x-2)}$$

Кад ово заменимо у 12), добијамо за дати разломак исти низ разломака као и по првој методи.

Радимо најзад и по трећој методи. Сада је:

$$f(x)=x^2-x+1,\ f'(x)=2x-1,\ f''(x)=2$$

$$F_1(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2,$$

$$F_1'(x)=3x^2-3,\ F_1''(x)=6x,\ F_1'''(x)=6.$$

Одавде опет стављајући $a=1$, ако хоћемо да израчунамо најпре бројиоце A_3, A_2, A_1, добијамо:

$$f(1)=1,\ f'(1)=1,\ f''(1)=2,$$

$$F_1(1)=-4,\ F_1'(1)=0,\ F_1''(1)=6,\ F_1'''(1)=6.$$

И сад из обрасца 8) добијамо:

$$1=-4A_3 \quad \text{дакле} \quad A_3=-\frac{1}{4},$$

$$1=-4A_2 \quad „ \quad A_2=-\frac{1}{4},$$

$$2=6A_3-8A_1 \quad „ \quad A_1=-\frac{7}{16}.$$

Да бисмо изнашли бројиоце B_2 и B_1, треба у обрасцима 8) узети $a=-1$, даље:

$$f(x)=x^2-x+1,\ f'(x)=2x-1,$$

$$F_1(x)=(x-1)^3(x-2)=x^4-5x^3+9x^2-7x+2;$$

$$F_1'(x)=4x^3-15x^2+18x-7$$

и према томе:

$$f(-1)=3,\ f'(-1)=-3,\ F_1(-1)=24,\ F_1'(-1)=-44.$$

И сад помоћу првог и другог обрасца под 8), где ваља још ставити $k=2$, $A_k=B_2$, $A_{k-1}=B_1$, добијамо:

$$3=24B_2 \quad \text{дакле} \quad B_2=\frac{1}{8};\ -3=-44B_2+24B_1,$$

дакле: $$B_1=\frac{5}{48}$$

Што се тиче бројиоца C, њега је лакше израчунати помоћу обрасца (№ 152):

$$\frac{f(x)}{F_1(x)}=\frac{x^3-x+1}{(x-1)^3(x+1)^2}$$

стављајући у њему $x = a = 2$ и на тај начин добијамо опет:

$$C = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Случај уображених корена.

156. У предњој №-и 155 нисмо никакве претпоставке чинили односно корена једначине $F(x) = 0$,т. ј. да ли су они сви стварни или да ли међу њима има и уображених. Ако међу коренима има и уображених, онда ће чиниоци, који им одговарају, бити облика

$$(x - \alpha - \beta i)^k$$

и тим чиниоцима одговараће разломци облика:

$$\frac{A_1}{(x - \alpha - \beta i)}, \quad \frac{A_2}{(x - \alpha - \beta i)^2} \quad \ldots .$$

где су бројиоци A уображени бројеви.

Ако претпоставимо да именилац и бројилац датог разломка:

$$1.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}$$

имају *само стварне сачиниоце*, онда се по методи, која иде, могу истиснути уображени разломци, или још боље, могу се они и не уводити у рачун.

Како се ради, кад у случају стварних сачинилаца један спрег уображених корена $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ припада једначини $F(x) = 0$ само један пут, видели смо у

№ 153. За то ћемо сада показати, како се ради онда, кад такав један спрег припада једначини $F(x) = 0$ н. пр. k-пута.

Ако се спрег $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ јавља k-пута као спрег корена, онда се и сваки од два корена чиниоца:

$$x - \alpha - \beta i \quad \text{и} \quad x - \alpha + \beta i$$

или што је све једно њихов производ:

$$2.) \qquad (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

мора јавити k-пута као чинилац у $F(x)$, и ми сад тврдимо, *да тада међу разломцима, на које је разломак* 1) *разложен, мора бити k разломака, којима су бројиоци облика:*

$$P + Qi$$

а имениоци сви степени чиниоца 2) *почев од k-ог па до првог.*

Да бисмо то доказали, ставимо:

$$F(x) = \left\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\right\}^k F_1(x)$$

где други чинилац десно значи производ корених чинилаца, који постају из осталих корена различних од $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$. За сваку могућу вредност количина P_k и Q_k очевидно вреди једначина;

$$3.) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\{(x - a)^2 + \beta^2\}^k . F_1(x)} = \frac{P_k x + Q_k}{\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\}^k}$$

$$+ \frac{f(x) - (P_k x + Q_k) . F_1(x)}{\{(x - a)^2 + \beta^2\}^k . F_1(x)}.$$

И пошто, као што рекосмо, ова једначина вреди за ма какво P_k и Q_k, то ћемо за те количине узети оне вредности, при којима су:

$$x = \alpha + \beta i,\ x = \alpha - \beta i$$

корени једначине:

$$4.)\qquad f(x) - (P_k x + Q_k) . F_1(x) = 0$$

која постаје, кад се стави $= 0$ бројилац другог разломка десно од знака једнакости у 3), и за те вредности, које ћемо сад одмах наћи, биће онда:

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2$$

делилац поменутог бројиоца. Из реченога следује, да тражене вредности за P_k и Q_k даје једначина:

$$f(\alpha \pm \beta i) - \left\{ P_k(\alpha \pm \beta i) + Q_k \right\} . F_1(\alpha \pm \beta i) = 0.$$

или кад ставимо:

$$f(a \pm \beta i) = A \pm Bi,\ F_1(\alpha \pm \beta i) = C \pm Di:$$

$$(A \pm Bi) - \left\{ P_k(\alpha \pm \beta i) + Q_k \right\} . (C \pm Di) = 0,$$

Стављајући сад стварни део ове једначине $= 0$ за себе, а за себе опет сачиниоца од i, добијамо даље:

$$5.)\qquad \begin{cases} (\beta D - \alpha C)\, P_k - C Q_k + A = 0 \\ (\beta C - \alpha D)\, P_k + D Q_k - B = 0 \end{cases}$$

Из ових једначина, које су првог степена односно P_k и Q_k, добијамо вредности тих количина. Заједнички именилац

$$\beta(C^2 + D^2)$$

тих вредности не може очевидно бити $= 0$. Јер то би само тако могло бити, ако би први или други чинилац тога имениоца био $= 0$. Али то не може бити, јер кад би $\beta = 0$ било, онда не би било уображених корена. А кад би $C^2 + D^2 = 0$ било, одакле би следовало $C = 0$, $D = 0$ и $C \pm Di = 0$, онда би то значило, да су $x = \alpha + \beta i$ и $x = \alpha - \beta i$ корени једначине $F_1(x) = 0$, а то не може бити, јер смо ми претпоставили, да је сваки од тих бројева само k-пута корен једначини $F(x) = 0$. Према свему томе једначина 5) даће у сваком случају за P_k и Q_k одређене, стварне и коначне вредности.

Замислимо сада, да у једначини 3) P_k и Q_k имају већ вредности добивене решењем једначина 5). Тада је бројилац другог разломка десно од знака једнакости у једначини 3) дељив са $\{(x-a)^2 + \beta^2\}$ и кад то учинимо, онда се једначина 3) претвара у једначину:

$$6.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P_k x + Q_k}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^k} + \frac{f_1(x)}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1} F_1(x)}$$

где $f_1(x)$ значи количник између $f(x) - (P_k x + Q_k) . F_1(x)$ и $\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}$.

Кад образац 6 применимо па његов други разломак десно, добићемо:

$$\frac{f_1(x)}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1} F_1(x)} = \frac{P_{k-1}(x) + Q_{k-1}}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1}}$$

$$+ \frac{f_2(x)}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1} F_1(x)}$$

И кад тако наставимо и даље, видећемо, да ћемо најзад морати добити:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P_k x + Q_k}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^k} + \frac{P_{k-1} x + Q_{k-1}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{k-1}} + \dots$$

$$+ \frac{P_1 x + Q_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

и тиме је горње тврђење оправдано.

Лако је доказати, да је последњи разломак чист и да су му бројилац и именилац односно прости т. ј. да немају заједничког делиоца.

Кад овај резултат доведемо у свезу са оним у № 154, онда смемо изрећи теорему:

Ако је именилац задатог разломка:

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^k \dots (x^2+rx+s)^n$$

где неки од изложилаца могу бити $= 1$, *онда се дати разломак може овако разложити:*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-a)}$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)}$$

. . . .

$$+ \frac{P_k x + Q_k}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_{k-1} x + Q_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \dots + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)}$$

. . . .

$$+ \frac{R_n x + S_n}{(x^2+rx+s)^n} + \frac{R_{n-1} x + S_{n-1}}{(x^2+rx+s)^{n-1}} + \dots + \frac{R_1 x + S_1}{(x^2+rx+s)}$$

Како се израчунавају бројиоци A, B и т. д., т. ј. они, којих имениоци постају из стварних корена једначине $F(x) = 0$, то је у пређашњим №-ама показано. А што се тиче количина P, Q, R, S, које се налазе у разломцима, којих имениоци постају из спрегова уображених корена, оне би се могле израчунати по првој и трећој методи №-е 153. Међу тим обично је згодније израчунавати их помоћу методе неодређених сачинилаца.

Пример. Да се разломак:

$$\frac{1}{x\,(x+1)\,(x^2+1)^2}$$

разложи на простије разломке. Ми ћемо ставити:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+1)^2} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+1)}$$

Кад помножимо једначину лево и десно са $F(x)$ добићемо:

$$1 = A(x+1)\,(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1)^2 + (P_2 x + Q_2)\,x(x+1)$$

$$+ (P_1 x + Q_1)\,x(x+1)\,(x^2+1)$$

За $x = 0$ и $x = -1$ добијамо из ове једначине:

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{4}.$$

Кад заменимо A и B овим вредностима у последњој једначини, за тим пребацимо прва два члана с десна на лево и сведемо добићемо:

$$-3x^5 - 4x^4 - 6x^3 - 8x^3 - 3x$$

$$= (P_2 x + Q_2)\,x(x+1) + (P_1 x + Q_1)\,x(x+1)\,(x^2+1)$$

Десна је страна дељива са $x(x+1)$, дакле мора бити и лева. По свршеној деоби излази:

$$-3x^3-x^2-5x-3=4(P_2x+Q_2)+4(P_1x+Q_1)(x^2+1)$$

или кад развијемо и уредимо десно:

$$-3x^3-x^2-5x-3=4P_1x^3+4Q_1x^2$$
$$+4(P_1+P_2)x+4(Q_1+Q_2)$$

а одавде по правилу неодређених сачинилаца:

$$P_1=-\frac{3}{4}.\quad Q_1=-\frac{1}{4},\quad P_1+P_2=-\frac{5}{4},$$
$$Q_1+Q_2=-\frac{3}{4}$$

и из последњих двеју једначина још:

$$P_2=-\frac{1}{2},\quad Q_2=-\frac{1}{2}$$

Дакле најзад:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{(x+1)}{2(x^2+1)^2}-\frac{(3x+1)}{4(x^2+1)}.$$

ЧЕТВРТИ ДЕО.

О разликама функција.

157. Кад каква количина u зависи од једне или више промењливих количина $x, y, z \ldots$ и ми у њојзи пустимо, да те промењливе добијају различите вредности:

$$x,\ y,\ z\ldots,\ x_1,\ y_1,\ z_1\ldots,\ x_2,\ y_2,\ z_2\ldots \text{ и т. д.}$$

онда ће и функција u добијати различне вредности:

1.) $\quad u,\ u_1,\ u_2\ \ldots.$

Закон, по коме се поступно мењају промењливе, од којих u зависи, мора бити познат.

Обично се узима, да је размак вредности, које добија свака промењлива, сталан, н. пр. $\triangle x,\ \triangle y,\ \triangle z\ \ldots$ за поједине промењливе $x,\ y,\ z\ \ldots$ Ми ћемо то од сад и претпоставити.

Кад са редом 1) радимо онако исто као у № 134, онда први чланови:

$$\triangle u,\ \triangle^2 u,\ \triangle^3 u,\ \ldots$$

узастопних различних редова, који су чланови у опште опет функције од $x,\ y,\ z\ldots$ зову се редом прва, друга, трећа … разлика функције u. Те прве чланове узастопних различних редова треба само знати, јер је тада лако наћи помоћу њих и све остале чланове тих редова. На пример $(n+1)$-ви члан заданог реда 1), као и ма којег различног реда, добићемо, ако само у првом члану дотичнога реда сменимо $x, y, z \dots$ са $x+n\triangle x, y+n\triangle y, z+n\triangle z \dots$

Пошто је прва разлика $\triangle u$ функције u разлика између другог и првог члана реда 1), а међу тим се други члан овога добија, кад у првом члану тога реда сменимо $x, y, z \dots$ са $x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z \dots$ то можемо казати:

Прва разлика задате функције добија се, кад у њојзи сменимо променљиве $x, y, z \dots$ *са* $x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z \dots$ *и кад за тим од тако добивене нове вредности функцијине одузмемо њу саму.*

На исти начин добија се очевидно и прва разлика прве разлике т. ј. друга разлика $\triangle^2 u$ задате функције; даље прва разлика друге разлике или трећа разлика $\triangle^3 u$ задате функције и т. д.

Кад у обрасцу 4) №-е 135 сменимо u_n са u, добијамо образац:

$$2.)\quad \triangle^m u = u_m - \binom{m}{1} u_{m+1} + \binom{m}{2} u_{m+2} - \dots + (-1)^m u,$$

помоћу којег налазимо ма коју разлику задате функције u просто из чланова реда 1), дакле са свим независно од нижих разлика функције.

Исто тако помоћу обрасца 4) у № 136 налазимо као $(n+1)$-ви члан реда 1):

$$3.)\quad u_n = u + \binom{n}{1} \triangle u + \binom{n}{2} \triangle^2 u + \dots + \triangle^n u,$$

помоћу којег обрасца дакле налазимо вредност функције u, која одговара вредностима $x+n\triangle x, y+n\triangle y, z+n\triangle z \dots$ променљивих $x, y, z \dots$ и то налазимо помоћу саме задате функције и њених узастопних разлика.

Диференцовати задату функцију:

$$u = f(x, y, z \dots)$$

значи тражити јој узастопне разлике, а упуства за то исказана су према ономе, што смо горе говорили, у обрасцима:

$$\triangle u = f(x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z \dots) - f(x,\ y,\ z \dots)$$

$$\triangle^{m+1} u = \triangle^m f(x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z \dots)$$

$$-\triangle^m f(x,\ y,\ z \dots)$$

Кад се при тражењу узастопних разлика дате функције претпоставља као овде, да се све променљиве, од којих она зависи, мењају у исти мах, онда се оне — разлике — зову *потпуне*, а у противном случају разлике се зову *непотпуне*.

Јасно је по себи, а и врло је лако доказати, да се стални чиниоци функција јављају као чиниоци и њиних разлика, да је дакле у опште:

$$\triangle(Au) = A.\triangle u$$

Такође је врло лако доказати, да кад је дата функција једнака збиру више ма каквих функција, да је тада њина разлика једнака збиру појединих састојака њених. На тај начин тражење разлика полинома своди се на тражење разлика самих монома.

Ми ћемо од сада претпостављати, да имамо посла једино са функцијама једне променљиве. Ако је дакле:

$$u = f(x),$$

онда упуство за добијање њене прве разлике, као и осталих виших разлика њених, исказано је у обрасцима:

$$4.)\quad \begin{cases} \Delta u = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \\ \Delta^{m+1} u = \Delta^{m+1} f(x) = \Delta^m f(x+\Delta x) - \Delta^m f(x) \end{cases}$$

Образац 2) у овом случају, где је $u = f(x)$, може се написати и овако:

$$5.)\quad \Delta^m f(x) = f(x+m\Delta x) - \binom{m}{1} f\left\{x + (m-1)\Delta x\right\}$$

$$+ \binom{m}{2} f\left\{x + (m-2)\Delta x\right\} - \binom{m}{3} f\left\{x + (m-3)\Delta x\right\}$$

$$+ \binom{m}{4} f\left\{\quad + (m-4)\Delta v\right\} - \ldots + (-1)^m fx)$$

Исто тако и образац 3) може се сада написати и овако:

$$6.)\quad f(x+n\Delta x) = f(x) + \binom{n}{1} \Delta f(x) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(x) +$$

$$+ \binom{n}{3} \Delta^3 f(x) + \ldots + \Delta^n f(x)$$

158. Ако узмемо као задату функцију:

$$u = ax^m$$

где претпостављамо, да је m положно, онда је на основу обрасца:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x):$$

$$\Delta u = a\left\{mx^{m-1}\Delta x + \binom{m}{2} x^{m-2}\overline{\Delta x}^2 + \ldots + \overline{\Delta x}^m\right\}$$

Дакле је, као што се види, степен прве разлике сваког монома за јединицу нижи.

То исто дакле мора вредити и за сваки цели полином, пошто је разлика полинома једнака збиру разлика његових појединих чланова. Из овога следује, да је m-на разлика полинома, који је m-ог степена односно x, стална т. ј. од x независна.

1_0. Узмимо н. пр. полином:

$$1.)\qquad u = ax^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

Да бисмо нашли његову m-ну разлику, треба у њему, као и у узастопним његовим разликама водити рачуна само о њиховим првим члановима, јер остали чланови тих полинома и њихових разлика и онако ће отпасти при поступном диференцовању, и према томе неће имати никаква утицаја на крајњи резултат. Треба дакле тражити само m-ну разлику првом члану ax^m полинома 1) и та ће разлика бити у исти мах и m-на разлика полинома 1). На тај начин имамо:

$$2.)\qquad max^{m-1}\Delta x$$

као први члан разлике првог полиномовог члана. Даље имамо као први члан разлике израза 2):

$$3.)\qquad m(m-1)\, ax^{m-2}\overline{\Delta x}^2$$

Даље као први члан разлике израза 3):

$$4.) \qquad m(m-1)(m-2)\,ax^{m-3}\overline{\Delta x}^{3}, \text{ и т. д.}$$

Настављајући дакле овако и даље, наћићемо најзад:

$$\Delta^{m}u = m(m-1)(m-2)\ldots 3.\,2.\,1.\,a.\,\overline{\Delta x}^{m},$$

а то је m-на разлика полинома 1). Пошто је она стална, то су све остале више разлике $= 0$. Дакле смемо рећи:

Свака цела и рационална функција једне променљиве има само m разлика а више не.

Ако у обрасцу 5) №-е 147 узмемо да је:

$$f(x) = x^{m}$$

а m је цео и положан број, онда је:

$$\left\{x + m\Delta x\right\}^{m} - \binom{m}{1}\left\{x + (m-1)\,\Delta x\right\}^{m}$$

$$+ \binom{m}{2}\left\{x + (m-2)\,\Delta x\right\}^{m} - \binom{m}{3}\left\{x + (m-3)\,\Delta x\right\}^{m} + \ldots$$

$$+ (-1)^{m}x^{m} = m\,!\;\overline{\Delta x}^{m}$$

и

$$\left\{x + (m+r)\,\Delta x\right\}^{m} - \binom{m+r}{1}\left\{x + (m+r-1)\,\Delta x\right\}^{m}$$

$$+ \binom{m+r}{2}\left\{x + (m+r-2)\,\Delta x\right\}^{m} - \ldots + (-1)^{m+r}x^{m} = 0$$

где је r цео и положан број > 0.

Из последње од двеју једначина дознајемо, да је за свако цело и положно m:

$$m^{m} - \binom{m}{1}(m-1)^{m} + \binom{m}{2}(m-2)^{m} - \binom{m}{3}(m-3)^{m} + \ldots = m!$$

а за свако цело и положно $n > m$:

$$n^{m} - \binom{n}{1}(n-1)^{m} + \binom{n}{2}(n-2)^{m} - \binom{n}{3}(n-3)^{m} + \ldots = 0$$

2°. Разлике факторијела добијају се врло лако, кад је разлика вредности, које промењива x поступно добија, једнака разлици факторијела. Узмимо н. пр. да је:

$$u = [x, \Delta x]^{m}$$

Тада је:

$$\Delta u = [x + \Delta x, \Delta x]^{m} - [x, \Delta x]^{m}$$

Па како је (види науку о комбинацијама страна 95 и доцније):

$$[x + \Delta x, \Delta x]^{m} = [x + \Delta x, \Delta x]^{m-1}(x + m\Delta x)$$

и даље:

$$[x, \Delta x]^{m} = x\,[x + \Delta x, \Delta x]^{m-1}$$

то је онда даље:

$$\Delta u = m\Delta x\,[x + \Delta x, \Delta x]^{m-1}$$

Али је услед претпоследњег обрасца за Δu:

$$\Delta\,[x + \Delta x, \Delta x]^{m-1} = (m-1)\,\Delta x\,[x + 2\Delta x, \Delta x]^{m-2}$$

и по томе је:

$$\triangle^2 u = m(m-1)\,\overline{\triangle x}^2\,[x+2\triangle x,\ \triangle x]^{m-2}$$

И кад на овај лак начин продужимо и даље, наћи ћемо најзад, да је:

$$\triangle^n u = \triangle^n\,[x,\ \triangle x]^m = m(m-1)(m-2)\dots$$

$$\dots(m-n+1)\,\overline{\triangle x}^n\,[x+n\triangle x,\ \triangle x]^{m-n}$$

3°. Ако је:

$$u = \frac{1}{[x,\ \triangle x]^m}$$

онда је:

$$\triangle u = \frac{1}{[x+\triangle x,\ \triangle x]^m} - \frac{1}{[x,\ \triangle x]^m}$$

или:

$$\triangle u = \frac{x}{x\,[x+\triangle x,\ \triangle x]^m} - \frac{x+m\triangle x}{(x+m\triangle x)\,[x,\ \triangle x]^m}$$

или најзад:

$$\triangle u = \frac{-\,m\triangle x}{[x,\ \triangle x]^{m+1}}$$

Одавде добијамо на исти начин даље:

$$\triangle^2 u = \frac{m(m+1)\,\overline{\triangle x}^2}{[x,\ \triangle x]^{m+2}},$$

$$\triangle^3 u = \frac{-\,m(m+1)(m+2)\,\overline{\triangle x}^3}{[x,\ \triangle x]^{m+3}}$$

и у опште:

$$\triangle^n u = (-1)^n\,\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)\,\overline{\triangle x}^n}{[x,\ \triangle x]^{m+n}}$$

Ако у обрасцима 5) и 6) №-е 157 узмемо да је:

$$f(x) = \frac{1}{[x,\ \triangle x]^m}$$

добићемо прво:

$$(-1)^n\,\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)\,\triangle x^n}{[x,\ \triangle x]^{m+n}}$$

$$= \frac{1}{[x+n\triangle x,\ \triangle x]^m} - \binom{m}{1}\frac{1}{[x+(n-1)\triangle x,\ \triangle x]^m}$$

$$+\binom{m}{2}\frac{1}{[x+(n-2)\triangle x,\ \triangle x]^m}$$

$$-\binom{m}{3}\frac{1}{[x+(n-3)\triangle x,\ \triangle x]^m}+\dots+(-1)^n\frac{1}{[x,\ \triangle x]^m}$$

и друго:

$$\frac{1}{[x+n\triangle x,\ \triangle x]^m} = \frac{1}{[x,\ \triangle x]^m} - \binom{n}{1}\frac{m\triangle x}{[x,\ \triangle x]^{m+1}}$$

$$+\binom{n}{2}\frac{m(m+1)\overline{\triangle x}^2}{[x,\ \triangle x]^{m+2}} - \binom{n}{3}\frac{m(m+1)(m+2)\overline{\triangle x}^3}{[x,\ \triangle x]^{m+3}} +$$

$$\dots+(-1)^n\,\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)\overline{\triangle x}^n}{[x,\ \triangle x]^{m+n}}$$

4°. Ако је:

$$u = a^x$$

онда је:

$$\triangle u = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$$

$$\triangle^2 u = a^x(a^{\Delta x}-1)^2,$$

$$\triangle^3 u = a^x(a^{\Delta x}-1)^3,$$

. . . .

$$\triangle^m u = a^x(a^{\Delta x}-1)^m$$

Ако у обрасцу 5) №. 157 узмемо, да је:

$$f(x) = a^x,$$

онда добијамо, пошто лево и десно скратимо са a^x:

$$(a^{\triangle x} - 1) = a^{m\triangle x} - \binom{m}{1} a^{(m-1)\triangle x} + \binom{m}{2} a^{(m-2)\triangle x}$$

$$- \binom{m}{3} a^{(m-3)\triangle x} + \dots .$$

а то ништа друго није, до познати биномни образац.

5°. Ако је:

$$u = log\, x$$

онда је:

$$\triangle u = log(x + \triangle x) - log\, x = log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right),$$

или кад развијемо по обрасцу 5) №-е 87 алгеб. анализе:

$$\triangle u = M\left\{\frac{\triangle x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

где је $M = 0{\cdot}43429448 \dots$ модуо Бригове системе.

Да бисмо добили и више разлике, узмимо на ум, да је:

$$log\,(x + \triangle x) = log\, x + log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$log\,(x + 2\triangle r) = log\, x + log\left(1 + \frac{2\triangle x}{x}\right)$$

$$log\,(x + 3\triangle x) = log\, x + log\left(1 + \frac{3\triangle x}{x}\right)$$

Ако развијемо логаритме десно по мало час поменутом обрасцу алг. анал., онда уз припомоћ обрасца 5) у № 157 добијамо:

$$\triangle u = M\left\{\frac{\triangle x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

$$\triangle^2 u = M\left\{\qquad - \left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

$$\triangle^3 u = M\left\{\qquad\qquad\qquad 2\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

. . . .

6°. Ако је:

$$u = sin\, x$$

добићемо са свим лако:

$$\triangle u = 2\, sin\frac{\triangle x}{2} cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = 2 sin\frac{\triangle x}{2} sin\left(x + \frac{\triangle x + \pi}{2}\right)$$

$$\triangle^2 u = \left(2\, sin\frac{\triangle x}{2}\right)^2 sin\left(x + 2\,\frac{\triangle x + \pi}{2}\right)$$

. . . .

$$\triangle^m u = \left(2\, sin\frac{\triangle x}{2}\right)^m sin\left(x + m\,\frac{\triangle x + \pi}{2}\right).$$

Ако у обрасцима 5) и 6) у № 157 узмемо да је:

$$f(x) = sin\, x,$$

Узмимо н. пр. да је:

1.) $u = \varphi(x).\ \psi(x)$

Тада је:

2.) $\Delta u = \varphi(x+\Delta x).\ \psi(x+\Delta x) - \varphi(x).\ \psi(x)$

Али како је:

$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x),\quad \Delta\psi(x) = \psi(x+\Delta x) - \psi(x),$

одакле следује:

$\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x),\quad \psi(x+\Delta x) = \psi(x) + \Delta\psi(x),$

то онда множењем ових једначина добијамо:

$$\varphi(x+\Delta x).\ \psi(x) + \Delta\psi(x) =$$

$$\varphi(x)\ \psi(x) + \psi(x).\ \Delta\varphi(x) + \varphi(x)\ \Delta\psi(x) + \Delta\varphi(x).\ \Delta\psi(x)$$

И кад ово заменимо у једначину 1), добићемо:

$$\Delta u = \varphi(x)\ \Delta\psi(x) + \Delta\varphi(x)\left\{\psi(x) + \Delta\psi(x)\right\}$$

Другу разлику наћи ћемо радећи исто тако. Она је:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u = \varphi(x)\Delta^2\psi(x) &+ 2\Delta\varphi(x)\left\{\Delta\psi(x) + \Delta^2\psi(x)\right\}\\ &+ \Delta^2\varphi(x)\left\{\psi(x) + 2\Delta\psi(x) + \Delta^2\psi(x)\right\}\end{aligned}$$

И у опште кад је m ма какав цео број:

$$\begin{aligned}3.)\quad \Delta^m u = \varphi(x)\Delta^m\psi(x) &+ m\Delta\varphi(x)\left\{\Delta^{m-1}\psi(x) + \Delta^m\psi(x)\right\}\\ &+ \binom{m}{2}\Delta^2\varphi(x)\left\{\Delta^{m-2}\psi(x) + 2\Delta^{m-1}\psi(x) + \Delta^m\psi(x)\right\}\\ &+ \binom{m}{3}\Delta^3\varphi(x)\left\{\Delta^{m-3}\psi(x) + 3\Delta^{m-2}\psi(x)\right.\\ &\left.+ 3\Delta^{m-1}\psi(x) + \Delta^m\psi(x)\right\}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Општи члан деснога реда јесте:

$$\begin{aligned}\binom{m}{n}\Delta^n\varphi(x)\left\{\Delta^{m-n}\psi(x) + \binom{n}{1}\Delta^{m-n-1}\psi(x) + \binom{n}{2}\Delta^{m-n-2}\psi(x)\right.\\ \left.+ \binom{n}{3}\Delta^{m-n-3}\psi(x) + \ldots + \Delta^m\psi(x)\right\}.\end{aligned}$$

Још можемо овде додати и то, да ако је:

$$u = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

да је дата

$$\Delta u = \frac{\psi(x)\ \Delta\varphi(x) - \varphi(x)\ \Delta\psi(x)}{\psi(x)\left\{\psi(x) + \Delta\psi(x)\right\}}$$

Интегровање функција.

160. У неколико последњих №-а ми смо показали, како се налазе узастопне разлике задате функције. Сад прелазимо на обрнути посао, при коме се тражи непозната функција, кад нам је позната ма која разлика њена: прва, друга и т. д. m-па.

Ако је функција $f(x)$ m-на разлика непознате функције, онда се ова зове m-ни интеграл функције $f(x)$ и означава се са $\Sigma^m f(x)$.

Ако је сад $\varphi(x)$ m-ни интеграл функције $f(x)$, дакле она функција, којој је $f(x)$ m-на разлика, онда је:

$$1.)\qquad \Sigma^m f(x) = \Sigma^m\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \varphi(x)$$

и обратно:

$$2.)\qquad \Delta^m\varphi(x) = \Delta^m\left\{\Sigma^m f(x)\right\} = f(x)$$

Отуда видимо, да се радње символима;

$$\Sigma^m \quad \text{и} \quad \Delta^m$$

означене и једна за другом извршене узајамно паралишу.

Пошто је m-ној разлици функције $\varphi(x)$ $(m-1)$-ва разлика те функције први интеграл, $(m-2)$-га разлика те функције други интеграл, $(m-3)$-ћа разлика исте функције трећи интеграл и т. д., то онда вреде ове једначине:

$$3.)\qquad \left|\begin{array}{l} \Sigma\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Delta^{m-1}\varphi(x) \\ \Sigma^2\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Delta^{m-2}\varphi(x) \\ \Sigma^3\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Delta^{m-3}\varphi(x) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Sigma^k\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Delta^{m-k}\varphi(x) \end{array}\right.$$

За $k = m$ следује из ове последње једначине:

$$\Sigma^m\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \varphi(x) = \Delta^0\varphi(x)$$

што је по себи јасно.

Ако у последњој једначини под 3) ставимо:

$$k = m + 1,\ \ m + 2,\ .\ .\ .\ (m+k)$$

добићемо:

$$\Sigma^{m+1}\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Sigma\ \varphi(x) = \Delta^{-1}\varphi(x),$$

$$\Sigma^{m+2}\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Sigma^2\varphi(x) = \Delta^{-2}\varphi(x),$$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$$\Sigma^{m+k}\left\{\Delta^m\varphi(x)\right\} = \Sigma^k\varphi(x) = \Delta^{-k}\varphi(x).$$

Одавде видимо, да символи Σ^m и $\triangle^{-m}$ показују исту радњу. Одавде опет следује, да се из израза за $\triangle^m\varphi(x)$ добија израз за $\Sigma^m\varphi(x)$, кад у првом изразу сменимо свуда m са $-m$.

На тај лак начин добијамо н. пр. из обрасца 5) у № 107 овај:

$$\Sigma^m f(x) = f(x-m\triangle x) + \binom{m}{1} f\left\{x-(m+1)\triangle x\right\}$$

$$+\binom{m+1}{2} f\left\{x-(m+2)\triangle x\right\}$$

$$+\binom{m+2}{3} f\left\{x-(m+3)\triangle x\right\}$$

$$+\binom{m+3}{4} f\left\{x-(m+4)\triangle x\right\} + \dots\dots$$

$$\Sigma^m\left\{\varphi(x).\,\psi(x)\right\}$$

$$= \varphi(x)\,\Sigma^m\psi(x) - m\triangle\varphi(x)\left\{\Sigma^{m+1}\psi(x) + \Sigma^m\psi(x)\right\}$$

$$+\binom{m+1}{2}\triangle^2\varphi(x)\left\{\Sigma^{m+2}\psi(x) + 2\,\Sigma^{m+1}\psi(x) + \Sigma^m\psi(x)\right\}$$

$$-\binom{m+2}{3}\triangle^3\varphi(x)\left\{\Sigma^{m+3}\psi(x) + 3\,\Sigma^{m+2}\psi(x)\right.$$

$$\left. + 3\,\Sigma^{m+1}\psi(x) + \Sigma^m\psi(x)\right\}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$

161. Интегровати дату функцију значи тражити јој интеграл, т. ј. ону функцију, из које је она постала диференцовањем. Но треба приметити, да је истина увек могуће наћи датој функцији ма коју разлику њену, али није и обрнуто увек могуће наћи датој функцији њен интеграл у облику израза са коначним бројем чланова.

Пре свега ми ћемо приметити, да је интеграл збира више функција једнак збиру интеграла ових последњих.

Тако је н. пр.

$$\Sigma(ax^m + bx^n + cx + d) = \Sigma ax^m + \Sigma bx^n + \Sigma cx + \Sigma d$$

Такође је лако увидети и то, да се стални чинилац увек може бацити пред знак Σ, да је дакле:

$$\Sigma Af(x) = A.\Sigma f(x),$$

који је образац непосредна последица овог:

$$\triangle Af(x) = A\triangle f(x)$$

Из овога, што до сада рекосмо, следује, да се интегровање сваке целе и рационалне функције x-а своди у последњој линији на интегровање количине x^m, где је m цео и положан број. И за то ће нам бити сад прва брига, да тој количини тражимо интеграл.

Из треће једначине у почетку № 158 добијамо за $a = 1$:

$$\triangle(x^m) = mx^{m-1}\triangle x + \binom{m}{2}x^{m-2}\overline{\triangle x}^2$$

$$+\binom{m}{3}x^{m-3}\overline{\triangle x}^3 + \dots\dots$$

Кад интегрујемо лево и десно добићемо:

$$x^m = m\Delta x\Sigma x^{m-1} + \binom{m}{2}\overline{\Delta x}^{2}\,\Sigma x^{m-2}$$
$$+\binom{m}{3}\overline{\Delta x}^{3}\,\Sigma x^{m-3} + \ldots\ldots$$

Кад у овој једначини сменимо m са $(m+1)$, па је за тим решимо односно Σx^m, добићемо:

$$1.)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{n+1}}{(m+1)\Delta x} - \Big\{\frac{1}{2}\,m\Delta x\Sigma x^{m-1}$$
$$+\frac{1}{3}\binom{m}{2}\overline{\Delta x}^{2}\Sigma x^{m-2} + \ldots + \frac{1}{m+1}\overline{\Delta x}^{m}\Sigma x^{0}\Big\}$$

Овај образац своди интегровање количине x^m на интегровање количина x^{m-1}, x^{m-2} и т. д. Кад у њој ставимо редом $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ и т. д. и у сваком добивеном изразу заменимо оне, које смо нашли пре њега, добићемо:

$$\Sigma\, 1 = \frac{x}{\Delta x},$$

$$\Sigma x = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma\, x^2 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\Delta x$$

$$\Sigma\, x^3 = \frac{1}{4}\frac{x^4}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\Delta x$$

$$\Sigma\, x^4 = \frac{1}{5}\frac{x^5}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{30}x\overline{\Delta x}^{3}$$

$$\Sigma\, x^5 = \frac{1}{6}\frac{x^6}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4\Delta x - \frac{1}{12}x^2\overline{\Delta x}^{3}$$

$$\Sigma\, x^6 = \frac{1}{7}\frac{x^7}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5\Delta x - \frac{1}{6}x^3\overline{\Delta x}^{3} + \frac{1}{42}x\overline{\Delta x}^{5}$$

и т. д.

Тако сад можемо помоћу ових образаца наћи интеграл н. пр. ове функције:

$$(2x+a)\,\Delta x + \overline{\Delta x}^{2}$$

$$\Sigma\,(2x\Delta x + a\Delta x + \overline{\Delta x}^{2}) = \Sigma\, 2x\Delta x + \Sigma\, a\Delta x + \Sigma\overline{\Delta x}^{2}.$$

Али је услед образаца 2):

$$\Sigma\, 2x\Delta x = 2\Delta x\,\Sigma\, x = 2\Delta x\left\{\frac{1}{2}\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{x}{2}\right\} = x^2 - x\Delta x$$

$$\Sigma\, a\Delta x = a\Delta x\,\Sigma\, 1 = a\Delta x\,\frac{x}{\Delta x} = ax$$

$$\Sigma\,\overline{\Delta x}^{2} = \overline{\Delta x}^{2}\,\Sigma\, 1 = \overline{\Delta x}^{2}\,\frac{x}{\Delta x} = x\Delta x$$

Дакле је:

$$\Sigma\,(2x\Delta x + a\Delta x + \overline{\Delta x}^{2}) = x^2 + ax.$$

Како при диференцовању функција њини стални чланови отпадају, то онда одатле следује, да при сваком поједином интегровању ваља ради веће општности додати нађеном резултату једну сталну количину, која остаје неодређена све дотле, докле се из природе самога задатка не сазна права вредност њена. Те сталне количине обично се означавају са C.

162. Образац 1) предње №-е јесте повратног облика, јер помоћу њега сазнајемо интеграл од x^m, тек пошто смо већ нашли интеграле количина x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} и т. д. Треба дакле да нађемо и независни образац за Σx^m, помоћу којега бисмо такав интеграл у свакој особеној прилици могли непосредно изнаћи.

Један само поглед на обрасце 2) у предњој №-и даје нам права, да смемо написати:

$$1.)\qquad \Sigma x^m = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} + dx^{m-2} + \ldots,$$

јер су сви поменути обрасци очевидно тога облика.

Кад у овој једначини узмемо разлике лево и десно добићемо:

$$x^m = a(m+1)\,\Delta x . x^m + a\binom{m+1}{2}\overline{\Delta x}^2\,x^{m-1}$$

$$+ a\binom{m+1}{3}\overline{\Delta x}^3\,x^{m-2} + \text{ и т. д.}$$

$$+ b\binom{m}{1}\Delta x . x^{m-1} + b\binom{m}{2}\overline{\Delta x}^2\,x^{m-2} + \text{ и т. д.}$$

$$+ c\binom{m-1}{1}\Delta x . x^{m-2} + \text{ и т. д.}$$

$$+ \text{ и т. д.}$$

Одавде добијамо даље:

$$0 = \left\{a(m+1)\Delta x - 1\right\} x^m + \left\{a\binom{m+1}{2}\overline{\Delta x}^2 + bm\Delta x\right\} x^{m-1}$$

$$+ \left\{a\binom{m+1}{3}\overline{\Delta x}^3 + b\binom{m}{2}\overline{\Delta x}^2 + c(m-1)\Delta x\right\} x^{m-2}$$

$$+ \left\{a\binom{m+1}{4}\overline{\Delta x}^4 + b\binom{m}{3}\overline{\Delta x}^3 + c\binom{m-1}{2}\overline{\Delta x}^2\right.$$

$$\left. + d(m-2)\Delta x\right\} x^{m-3}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Пошто, на основу теореме о неодређеним сачиниоцима, ова једначина може само тако вредити, ако су сачиниоци узастопних степена од x сваки за се $= 0$, то онда добијамо следећи низ једначина, из којих можемо постепно израчунати сачиниоце: a, b, c . . . једначине 1).

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{(m+1)\Delta x}$$

$$\boldsymbol{b} = -\frac{1}{2}a(m+1)\Delta x = -\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{c} = -\frac{1}{6}a(m+1)\,m\overline{\Delta x}^2 - \frac{1}{2}bm\Delta x$$

$$\boldsymbol{d} = -\frac{1}{24}a(m+1)\,m(m-1)\,\overline{\Delta x}^3 - \frac{1}{6}bm(m--1)\,\Delta x^2$$

$$-\frac{1}{2}c(m-1)\Delta x$$

и т. д.

Ако 12 првих сачинилаца израчунамо и нађене вредности заменимо у једначину 1), добићемо:

$$2.)\quad \Sigma x^{m}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\frac{1}{2}x^{m}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\binom{m}{1}x^{m-1}\Delta x$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}x^{m-3}\Delta x^{3}+\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6}\binom{m}{5}x^{m-5}\overline{\Delta x}$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{8}\binom{m}{7}x^{m-7}\overline{\Delta x}^{7}+\frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10}\binom{m}{9}x^{m-9}\overline{\Delta x}^{9}$$

$$-\frac{691}{2730}\cdot\frac{1}{12}\binom{m}{11}x^{m-11}\overline{\Delta x}^{11}+\ldots.$$

У сачиниоцима овог обрасца јављају се као што видимо Bernouilli-јеви бројеви: B_1, B_3, B_5 и т. д. на које смо наишли у № 103 алгебарске анализе, где смо у исти мах показали и начин, како се они израчунавају. Правилност, која се у обрасцу 2) јасно огледа, пашће још боље у очи, ако у том обрасцу поменуте Bernouilli-јеве бројеве означимо са B_1, B_3, B_5 .... Тада тај образац изгледа овако:

$$2'.)\quad \Sigma x^{m}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\frac{1}{2}x^{m}+\frac{1}{2}B_{1}\binom{m}{1}x^{m-1}\Delta x$$

$$-\frac{1}{4}B_{3}\binom{m}{3}x^{m-3}\overline{\Delta x}^{3}+\frac{1}{6}B_{5}\binom{m}{5}x^{m-5}\overline{\Delta x}^{5}$$

$$-\frac{1}{8}B_{7}\binom{m}{7}x^{m-7}\overline{\Delta x}^{7}+\frac{1}{10}B_{9}\binom{m}{9}x^{m-9}\overline{\Delta x}^{9}$$

$$-\frac{1}{12}B_{11}\binom{m}{11}x^{m-11}\overline{\Delta x}^{11}+\ldots$$

163. Обрасце за интеграле факторијела, разломака са факторијелним имениоцима, изложилачких и тригонометријских функција добијамо лако из образаца за разлике таквих функција.

1°. У № 158 под 2°, ми смо нашли да је:

$$1.)\quad \Delta[x,\Delta x]^{m}=m\Delta x\,[x+\Delta x,\Delta x]^{m-1}$$

Интегровањем обеју страна добијамо:

$$[x,\Delta x]^{m}=m\Delta x\,\Sigma[x+\Delta x,\Delta x]^{m-1}$$

а одавде:

$$\Sigma\,[x+\Delta x,\Delta x]^{m-1}=\frac{[x,\Delta x]^{m}}{m\Delta x},$$

или кад сменимо m са $m+1$, а x са $x-\Delta x$:

$$2.)\qquad \Sigma[x,\Delta x]^{m}=\frac{[x-\Delta x,\Delta x]^{m+1}}{(m+1)\,\Delta x}$$

Но ми можемо помоћу примедбе, коју смо учинили на крају №-е 160, наћи одмах n-ти интеграл факторијела, па онда из тога интеграла први и ма који доцнији интеграл.

На основу №-е 158, 2° имамо:

$$3.)\quad \Delta^{n}[x,\Delta x]^{m}=[m,-1]^{n}\,[x+n\Delta x,\Delta x]^{m-n}$$

Према поменутој примедби №-е 160 јесте:

$$\Sigma^{n}[x,\Delta x]^{m}=[m,-1]^{-n}\,[x-n\Delta x,\Delta x]^{m+n}\,\overline{\Delta x}^{-n}$$

Или пошто овде применимо образац 7) или 8) у № 63 науке о факторијелима (види науку о комбинацијама) н. пр. последњи:

$$4.)\quad \Sigma^{n}[x, \triangle x]^{m} = \frac{1}{[m+1, 1]^{n}\overline{\triangle x}^{n}}[x - n\triangle x, \triangle x]^{m+n}$$

Одавде за $n = 1$ добијамо горњи образац 2), пошто је $[m+1, 1]^{1} = (m+1)$.

2°. У №-и 158 под 3° нашли смо:

$$\triangle\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^{m}}\right\} = \frac{-m\triangle x}{[x,\triangle x]^{m+1}}$$

Одавде пак, кад интегрујемо лево и десно, добићемо:

$$\frac{1}{[x, \triangle x]^{m}} = -m\triangle x\,\Sigma\,\frac{1}{[x, \triangle x]^{m+1}}.$$

Кад у овој једначини сменимо m са $m-1$ и за тим из нове једначине израчунамо интеграл, добићемо:

$$\Sigma\,\frac{1}{[x,\triangle x]^{m}} = \frac{-1}{(m-1)\,\triangle x\,[x, \triangle x]^{m-1}}$$

У № 158 под 3° нашли смо такође:

$$\triangle^{n}\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^{m}}\right\} = (-1)^{n}\frac{[m, 1]^{n}\overline{\triangle x}^{n}}{[x, \triangle x]^{m+n}}$$

Одавде по примедби у № 160:

$$\Sigma^{n}\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^{m}}\right\} = (-1)^{n}\frac{[m, 1)^{-n}}{\overline{\triangle x}^{n}[x, \triangle x]^{m-n}}$$

или због:

$$[m, 1]^{-n} = \frac{1}{[m-1, -1]^{n}} = \frac{1}{[m-n, 1]^{n}}:$$

$$\Sigma^{n}\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^{m}}\right\} = \frac{(-1)^{n}}{[m-1, -1]^{n}\overline{\triangle x}^{n}[x, \triangle x]^{m-n}}$$

Одавде за $n = 1$ добијамо горњи образац за први интеграл.

3°. У №-и 158 под 4° нашли смо да је:

$$\triangle a^{x} = a^{x}\left\{a^{\Delta x} - 1\right.$$

Одавде добијамо интегрујући лево и десно и по том делећи са $(a^{\Delta x} - 1)$:

$$\Sigma a^{x} = \frac{a^{x}}{a^{\Delta x} - 1}$$

Исто тако налазимо да је и:

$$\Sigma^{m} a^{x} = \frac{a^{x}}{[a^{\Delta x} - 1]^{m}}.$$

4°. У № 158 под 6° нашли смо:

$$\triangle sin\,x = 2\,sin\frac{\triangle x}{2}\,cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)$$

Одавде добијамо:

$$cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = \frac{\triangle sin\,x}{2\,sin\frac{\triangle x}{2}}$$

Интегрујући лево и десно и узимајући на ум да је $2\,sin\frac{\triangle x}{2}$ стална количина, добићемо;

$$\Sigma cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)=\frac{x}{2\,sin\frac{\triangle x}{2}},$$

или кад сменимо x са $x-\frac{\triangle x}{2}$:

$$\Sigma cos\,x=\frac{sin\left(x-\frac{1}{2}\triangle x\right)}{2\,sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

Из познате нам разлике количине $cos\,x$ налазимо на исти начин:

$$\Sigma sin\,x=-\frac{cos\left(x-\frac{1}{2}\triangle x\right)}{2\,sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

Такође са свим лако а на основу познате примедбе у № 160 добијамо из образаца:

$$\triangle^m sin\,x=\left(2\,sin\frac{\triangle x}{2}\right)^m sin\left(x+m\,\frac{\triangle x+\pi}{2}\right)$$

$$\triangle^m cos\,x=\left(2\,sin\frac{\triangle x}{2}\right)^m cos\left(x+m\,\frac{\triangle x+\pi}{2}\right)$$

ове обрасце:

$$\Sigma^m sin\,x=\frac{sin\left(x-m\,\frac{\triangle x+\pi}{2}\right)}{\left(2\,sin\frac{\triangle x}{2}\right)^m}$$

$$\Sigma^m cos=\frac{cos\left(x-m\,\frac{\triangle x+\pi}{2}\right)}{\left(2\,sin\frac{\triangle x}{2}\right)^m}$$

Примедба. Ми при интегровању функција у овој №-и нисмо водили рачуна о неодређеним сталним количинама, али у свакој особеној прилици треба то чинити. У осталом није тешко увидети, да се у изразу m-ог интеграла ма какве функције морају налазити m таквих сталних количина, којих се вредности, као што смо то већ једном рекли, дознају из услова самог задатка.

Тражење збирних образаца (сумирање) редовима.

164. Узмимо нека је $f(x)$ дата функција. Тада је:

$$\triangle f(x)=f(x+\triangle x)-f(x)$$

дакле:

$$f(x)=\Sigma f(x+\triangle x)-\Sigma f(x)$$

$$f(x+\triangle x)=\Sigma f(x+2\triangle x)-\Sigma f(x+\triangle x)$$

$$f(x+2\triangle x)=\Sigma f(x+3\triangle x)-\Sigma f(x+2\triangle x)$$

. . . .

$$f\{x+(n-1)\triangle x\}=\Sigma f(x+n\triangle x)-\Sigma f\{x+(n-1)\triangle x\}$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

$$1.)\quad f(x)+f(x+\triangle x)+f(x+2\triangle x)+\ldots+f\{x+(n-1)\triangle x\}$$
$$=\Sigma f(x+n\triangle x)-\Sigma f(x)$$

Помоћу овог обрасца у стању смо сумирати редове, којих чланове добијамо замењујући x у задатој функцији са $x, x+\triangle x, x+2\triangle x, \ldots x+(n-1)\triangle x$ и то наравно увек само онда, кад смо помоћу досадањих упустава у стању наћи интеграл функције. *О додавању неодређене сталне количине не може очевидно бити говора, пошто би она при одузимању и онако отпала.*

И сад ћемо ово да применимо на сумирање неколико редова.

1°. Узмимо, да се тражи збир реда:

$$2.)\quad S_n = [x, \triangle x]^m + [x+\triangle x, \triangle x]^m + [x+2\triangle x, \triangle x]^m + \ldots$$

$$+ [x + (n-1) \triangle x. \triangle x]^m$$

Овде је дакле:

$$f(x) = [x \ \triangle x]^m, \text{ а } f(x+n\triangle x) = [x + n\triangle x, \triangle x]^m$$

На основу обрасца 9) у №-и 103 јесте:

$$\Sigma\, [x, \triangle x]^m = \frac{[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\triangle x}$$

дакле и:

$$\Sigma\, [x + n\triangle x, \triangle x]^m = \frac{[x + (n-1)\triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\triangle x}$$

Према томе је збир горњега реда 2):

$$2.)\quad S_n = \frac{[x + (n-1)\triangle x, \triangle x]^{m+1} - [x - \triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\triangle x}$$

за $x = 1$ и $\triangle x = 1$ горњи се ред претвара у:

$$[1, 1]^m + [2, 1]^m + [3, 1]^m + \ldots + [n, 1]^m =$$

$$1.\,2.\,3 \ldots m + 2.\,3 \ldots (m+1) + \ldots$$

$$+ n(n+1) \ldots (n+m-1)$$

Збир овога реда јесте дакле по обрасцу 3):

$$S_n = \frac{[n, 1]^{m+1} - [0, 1]^{m+1}}{m+1} = \frac{[n, 1]^{m+1}}{m+1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \ldots (n+m)}{m+1}$$

Кад поделимо последњи ред, као и његов нађени збир, са његовим првим чланом $1.\,2.\,3.\ldots.m$, онда добијамо нов ред:

$$4.)\quad 1 + \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\ 2} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n+1) \ldots (n+m-1)}{1.\ 2.\ \ldots\ m}$$

$$= 1 + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \binom{m+3}{3} + \ldots + \binom{m+n-1}{m}$$

и његов збирни образац:

$$5.)\quad S_n = \frac{n(n+1) \ldots (n+m)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (m+1)} = \binom{m+n}{m+1}$$

Из општег реда 4) постају редови фигурних бројева за $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$, а збирни обрасци тих редова добијају се помоћу истих замена из обрасца 5). Тако н. пр.

за $m = 3$ добијамо фигурни ред: $1 + 4 + 10 + \ldots + \binom{n+2}{3}$, чији је збирни образац:

$$S_n = \binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)n}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$$

3°. Узмимо, да се тражи збир реда:

$$S_n = \frac{1}{[x, \triangle x]^m} + \frac{1}{[x + \triangle x, \triangle x]^m} + \frac{1}{[x + 2\triangle x, \triangle x]^m} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{[x + (n-1)\triangle x, \triangle x]^m}$$

На основу № 136, 2° имамо:

$$\Sigma \frac{1}{[x, \triangle x]^m} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x, \triangle x]^{m-1}}$$

дакле и

$$\Sigma \frac{1}{[x + n\triangle x, \triangle x]^m} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x + n\triangle x, \triangle x]^{m-1}}$$

Према томе је дакле сада:

$$S_n = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x + n\triangle x, \triangle x]^{m-1}} - \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x, \triangle x]^{m-1}}$$

Одавде за н. пр. $x = 1$ и $\triangle x = 1$ налазимо:

$$\frac{1}{[1, 1]^m} + \frac{1}{[2, 1]^m} + \frac{1}{[3, 1]^m} + \ldots + \frac{1}{[n, 1]^m} =$$

$$= \frac{-1}{(m-1)[n+1, 1]^{m-1}} + \ldots + \frac{-1}{(m-1)\,[1, 1]^{m-1}}$$

Или ако факторијеле заменимо вредностима:

$$6.)\quad \frac{1}{1.2.3 \ldots m} + \frac{1}{2.3.4 \ldots (m+1)} + \frac{1}{3.4.5. \ldots (m+2)} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n(n+1) \ldots (n+m-1)}$$

$$= \frac{-1}{(m-1)\,(n+1)\,(n+2) \ldots (n+m-1)}$$

$$-\frac{-1}{(m-1)\,1.\,2.\,3 \ldots (m-1)}$$

Ако узмемо $n = \infty$, онда овај ред постаје безконачан и његов је збир:

$$S = \frac{1}{(m-1)\,(m-1)!}$$

За различне целе и положне вредности m-а добићемо одавде различне особене редове и њихове збирове. Тако н. пр. за $m = 2$ јесте:

$$\frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{2.\,3} + \frac{1}{3.\,4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{(n+1)} + 1 = \frac{n}{n+1}$$

Одавде за $n = \infty$:

$$\frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{2.\,3} + \frac{1}{3.\,4} + \ldots = 1$$

Исто је тако за $m = 3$:

$$\frac{1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{2.\,3.\,4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\,(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)\,(n+2)}$$

а одавде опет за $n = \infty$:

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots = \frac{1}{4} \text{ и т. д.}$$

Кад једначину 6) поделимо са првим чланом на њеној левој страни, добићемо образац, помоћу којег се налазе збирови редова, којима су бројиоци јединице, а фигурни бројеви имениоци. Тај је образац дакле:

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{\binom{m+2}{2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+m-1}{m}}$$

$$= \frac{m}{m-1}\left\{1 - \frac{1}{\binom{n+m-1}{m-1}}\right\}.$$

Из њега добијамо дакле за $m = 2, 3, 4 \ldots$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} = 2\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{1}{\binom{n+2}{2}}\right\}$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+3}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1 - \frac{1}{\binom{n+3}{3}}\right\}$$

и т. д.

Кад у овим обрасцима узмемо $n = \infty$, онда се редови претварају у бесконачне и њихови су збирови редом:

$$\frac{m}{m-1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \text{и т. д.}$$

165. У овој №-и тражићемо збирне обрасце за још један низ редова.

На основу обрасца 1) у № 164 јесте:

$$1^0.\ S_n = x + (x+\triangle x) + (x+2\triangle x) + \ldots + \{x+(n-1)\triangle x\}$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x) - \Sigma(x),$$

дакле услед образаца 2) у № 161:

$$S_n = \frac{(x+n\triangle x)^2}{2\triangle x} - \frac{1}{2}(x+n\triangle x) - \frac{x^2}{2\triangle x} + \frac{1}{2}x.$$

$$2^0.\ S_n = x^2 + (x+\triangle x)^2 + (x+2\triangle x)^2 + \ldots + \{x+(n-1)\triangle x\}^2$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x)^2 - \Sigma x^2,$$

дакле услед образаца 2) у № 161:

$$S_n = \frac{(x+n\triangle x)^3}{3\triangle x} - \frac{1}{2}(x+n\triangle x)^2 + \frac{1}{6}(x+n\triangle x)\triangle x$$

$$-\frac{x^3}{3\triangle x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x\triangle x.$$

$$3^0.\ S_n = x^3 + (x+\triangle x)^3 + (x+2\triangle x)^3 + \ldots + \{x+(n-1)\triangle x\}^3$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x)^3 - \Sigma x^3$$

дакле услед образаца 2) у № 161:

$$S_n = \frac{(x+n\triangle x)^4}{4\triangle x} - \frac{1}{2}(x+n\triangle x)^3 + \frac{1}{4}(x+n\triangle x)^2\triangle x$$

$$-\frac{x^4}{4\triangle x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2\triangle x$$

и т. д. и т. д.

Кад у обрасцима 1°, 2°, 3° и т. д. ставимо $x = 1$ и $\triangle x = 1$, добијамо обирне збрасце за редове, који постају из првих, других итд. степена природних бројева: 1, 2, 3, 4, итд. Исто тако за $x = 1$ а $\triangle x = 2$ добијамо збирне обрасце редовима, којима су чланови први, други, трећи и т. д. степени бројева 1, 3, 5, 7 и т. д. и т. д.

4°. На основу обрасца 1) у № 161 јесте:

$$S_n = \sin x + \sin(x+\triangle x) + \ldots + \sin\{x + (n-1)\triangle x\}$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x) - \Sigma\sin x$$

Дакле услед обрасца под 4° у № 163:

1.) $\sin x + \sin(x+\triangle x) + \sin(x+2\triangle x) + \ldots$

$$+ \sin\{x + (n-1)\triangle x\}$$

$$= \frac{-\cos\left\{x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\triangle x\right\} + \cos\left(x - \frac{1}{2}\triangle x\right)}{2\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

$$= \frac{\sin\left\{x + \frac{1}{2}(n-1)\triangle x)\right\}\sin\frac{1}{2}n\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

На сличан начин добијамо:

2.) $\cos x + \cos(x+\triangle x) + \cos(x+2\triangle x) + \ldots$

$$+ \cos\left\{x + (n-1)\triangle x\right\}$$

$$= \frac{\cos\left\{x + \frac{1}{2}(n-1)\triangle x\right\}\sin\frac{1}{2}n\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

Обрасци 1) и 2) истоветни су са обрасцима 24) и 25) у № 41 тригонометрије и 8) и 9) у № 127 алгеб. анализе.

Из образаца 1) и 2) можемо добити неколико интересних нових образаца. Тако, ако је m цео и положан број, добијамо из 1) за:

$$x = \frac{\pi}{2m},\ \triangle x = \frac{\pi}{m},\ n = m$$

$$\sin\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{3\pi}{2m} + \ldots + \sin\frac{(2m-1)\pi}{2m} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}}$$

Исто тако за $x = \frac{1}{2}\triangle x = \frac{\pi}{2m+1}$, $n = m$:

$$\sin\frac{\pi}{2m+1} + \sin\frac{3\pi}{2m+1} + \ldots$$

$$+ \sin\frac{(2m-1)\pi}{2m+1} = \frac{\sin^2\frac{m\pi}{2m+1}}{\sin\frac{\pi}{2m+1}}$$

Даље за $x = \triangle x = \frac{1}{2}\pi,\ n = m - 1$

$$sin\frac{\pi}{m} + sin\frac{2\pi}{m} + \ldots + sin\frac{(m-1)\pi}{m} = cotg\frac{\pi}{2m}$$

И најзад за $x = \frac{2\pi}{2m+1} = \triangle x,\ n = m$

$$sin\frac{2\pi}{2m+1} + sin\frac{4\pi}{2m+1} + \ldots + sin\frac{2m\pi}{2m+1} = \frac{1}{2}cotg\frac{\pi}{4m+2}$$

На сличан начин добијамо из обрасца 2):

$$cos\frac{\pi}{2m} + cos\frac{3\pi}{2m} + \ldots + cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} = 0,$$

$$cos\frac{\pi}{2m+1} + cos\frac{3\pi}{2m+1} + \ldots + cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1} = \frac{1}{2},$$

$$cos\frac{\pi}{m} + cos\frac{2\pi}{m} + \ldots + cos\frac{(m-1)\pi}{m} = 0,$$

$$cos\frac{2\pi}{2m+1} + cos\frac{4\pi}{2m+1} + \ldots + cos\frac{2m\pi}{2m+1} = -\frac{1}{2}.$$

5°. Да бисмо нашли збир реда:

$$x^k a^x + (x + \triangle x)^k a^{x+\Delta x} + \ldots \{x + (n-1)\triangle x\}^k a^{x+(n-1)\Delta x}$$

треба нам само наћи

$$\Sigma x^k a^x \text{ и } \Sigma(x + n\triangle x)^k a^{x+n\Delta x}$$

Но пошто је:

$$\triangle x^k a^x = (x + \triangle x)^k a^{x+\Delta x} - x^k a^x$$

$$= (a^{\Delta x} - 1)\, x^k a^x + \binom{k}{1}\triangle x a^{\Delta x} x^{k-1} a^x$$

$$+ \binom{k}{2}\overline{\triangle x}^2 a^{\Delta x} x^{k-2} a^x + \binom{k}{3}\overline{\triangle x}^3 a^{\Delta x} x^{k-3} a^x + \ldots.$$

то онда одатле добијамо лако:

$$\Sigma x^k a^x = \frac{x^k a^x}{a^{\Delta x} - 1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x} - 1}\left\{\binom{k}{1}\triangle x\, \Sigma x^{k-1} a^x + \right.$$

$$\left. + \binom{k}{2}\overline{\triangle x}^2 \Sigma x^{k-2} a^x + \binom{k}{3}\overline{\triangle x}^3 \Sigma x^{k-3} a^x + \ldots\right\}$$

Овај образац своди тражење количине $\Sigma x^k a^x$ на тражење количине $\Sigma x^{k-1} a^x$, образац за ову на тражење количине $\Sigma x^{k-2} a^x$ итд. тако, да најзад изналажај количине $\Sigma x^k a^x$ зависи једино од Σa^x. Кад је количина $\Sigma x^k a^x$ израчуната, онда је лако наћи и количину: $\Sigma(x + n\triangle x)^k a^{x+n\Delta x}$ и тада разлика тих двеју количина даје збир горњега реда.

166. Кад нам је већ познат збир горњег реда:

$$1.)\quad f(x) + f(x + \triangle x) + f(x + 2\triangle x) + \ldots$$

$$+ f\{x + (n-1)\triangle x\}$$

онда је лако наћи и збир реда:

$$2.)\ f(x) - f(x + \triangle x) + f(x + 2\triangle x) - \ldots + f\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

Пошто је збир реда 1) извесна функција од x, $\triangle x$ и n, то можемо ставити:

$$3.)\quad F(x, n, \triangle x) = f(x) + f(x+\triangle x) + \dots$$

$$+ f\{x + (n-1)\triangle x\}$$

Одавде кад сменимо $\triangle x$ са $2\triangle x$, добијамо:

$$4.)\quad F(x, n, 2\triangle x) = f(x) + f(x+2\triangle x) + \dots$$

$$+ f\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

Кад пак ред 1) продужимо до $(2n-1)$-ог члана, добићемо:

$$5.)\quad F(x, 2n-1, \triangle x) = f(x) + f(x+\triangle x) + \dots$$

$$+ f\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

Кад од двогубог реда 4) одузмемо ред 5), добићемо:

$$2F(x, n, 2\triangle x) - F(x, 2n-1, \triangle x) =$$

$$f(x) - f(x+\triangle x) + f(x+2\triangle x) - f(x+3\triangle x) + \dots$$

$$- f\left\{ x + (2n-3)\triangle x \right\} + f\left\{ x + (2n-2)\triangle x \right\}.$$

Тако је н. пр.:

$$\sin x - \sin(x+\triangle x) + \sin(x+2\triangle x) - \dots$$

$$+ \sin\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

$$= 2\,\frac{\sin\{x + (n-1)\triangle x\} \sin n\triangle x}{\sin\triangle x}$$

$$- \frac{\sin\left\{x + (n-1)\triangle x\right\} \sin\frac{1}{2}(2n-1)\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

$$= \frac{\sin\left\{x + (n-1)\triangle x\right\} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

Исто је тако:

$$\cos x - \cos(x+\triangle x) + \cos(x+2\triangle x) - \dots$$

$$+ \cos\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

$$= 2\,\frac{\cos\{x + (n-1)\triangle x\} \sin n\triangle x}{\sin\triangle x}$$

$$- \frac{\cos\left\{x + (n-1)\triangle x\right\} \sin\frac{1}{2}(2n-1)\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

$$= \frac{\cos\left\{x + (n-1)\triangle x\right\} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\triangle x}{\cos\frac{1}{2}\triangle x}$$

167. Узмимо, да је:

$$S_x = \varphi(x)$$

функција x-а, у којој је исказан закон, како збир x првих чланова реда:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4 \, \dots \, a_{x-1}, \quad a_x, \, \dots$$

зависи од броја x сабраних чланова. Тада је:

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = a_x$$

Али је $\varphi(x) - \varphi(x-1)$ разлика функције $\varphi(x-1)$ која одговара разлици $= 1$ променљиве x. Дакле је:

$$\Delta\varphi(x-1) = a_x$$

Одавде, кад интегрујемо лево и десно, добијамо:

$$\varphi(x-1) = \Sigma a_x + C$$

Кад ово заменимо у једначину 1) добијамо даље:

$$\varphi(x) = \Sigma a_x + a_x + C$$

или другаче:

2.) $$S_x = \Sigma a_x + a_x + C$$

Дакле: *збирни образац каквог реда добићемо, кад интегралу његовог општег члана додамо сам тај општи члан.*

Што се тиче сталне количине C, њу ћемо у свакој прилици моћи лако наћи, ако само узмемо на ум, да за $x = 0, 1, 2, 3$ и т. д. S_x мора бити редом $=$ нули,

првом члану реда, збиру од прва два, збиру од прва три члана реда и т. д.

Узмимо сад неколико примера за ово:

1°. Тражи се збирни образац реда:

$$a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

Општи — x-ти — члан овог реда јесте a^x. Дакле је:

$$S_x = \Sigma a^x + a^x + C$$

Но како је (№ 163, 3°):

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{a^x}{a - 1},$$

јер је сада $\Delta x = 1$, то је даље:

$$S_x = \frac{a^x}{a-1} + a^x + C,$$

где још остаје, да се израчуна C. Пошто за $x = 0$ и $S_x = 0$ бити мора, то имамо:

$$0 = \frac{1}{a-1} + 1 + C$$

одакле се C добија. Ми налазимо:

$$C = -\frac{a}{a-1}$$

Дакле је најзад:

$$S_x = \frac{a^x}{a-1} + a^x - \frac{a}{a-1}$$

или краће:

$$S_x = \frac{a(a^x - 1)}{a - 1}$$

а то је још из алгебре познати нам образац за збир дате постепености.

2°. Тражимо збирни образац реда, коме је општи или x-ти члан:

$$3.)\quad \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} = \frac{x(x + \triangle x)(x + 2\triangle x) \ldots \{x + (m - 1)\triangle x\}}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ .\ \ .\ \ .\ \ m.}$$

По обрасцу 2) у овој №-и имамо:

$$S_x = \Sigma \left\{ \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} \right\} + \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} + C$$

или:

$$S_x = \frac{1}{m!} \Sigma [x, \triangle x]^m + \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} + C$$

Али је на основу №-е 164, 1°:

$$\Sigma [x, \triangle x]^m = \frac{[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1) \triangle x};$$

и према томе је сад:

$$S_x = \frac{[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\, m! \triangle x} + \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} + C$$

или пошто је (наука о комбинацијама, факторијели):

$$[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1} = [x - \triangle x]\, [x, \triangle x]^m$$

то онда, кад ово заменимо у последњу једначину и за тим прва два члана десно доведемо на истог имениоца:

$$S_x = \frac{(x - \triangle x)\, [x, \triangle x]^m + (m+1) \triangle x\, [x, \triangle x]^m}{(m+1)\, m! \triangle x} + C$$

Одавде, пошто је:

$$(x - \triangle x)\, [x, \triangle x]^m + (m+1) \triangle x\, [x, \triangle x]^m =$$

$$[x, \triangle x]^m \{x - \triangle x + (m+1) \triangle x\} =$$

$$[x, \triangle x]^m\, [x + m\triangle x] = [x, \triangle x]^{m+1},$$

добијамо даље:

$$S_x = \frac{[x, \triangle x]^{m+2}}{(m+1)! \triangle x} + C$$

Пошто је за $x = 0$ и $S_x = 0$, то онда из ове једначине следује, да је и $C = 0$. Дакле је најзад:

$$4.)\quad S_x = \frac{[x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)! \triangle x} = \frac{x(x + \triangle x)(x + 2\triangle x) \ldots (x + m\triangle x)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (m+1) \triangle x}$$

И ово је збирни образац реда, коме је x-ти члан горњи израз 3).

Помоћу обрасца 4) можемо добити збирне обрасце за небројено много редова. Ако у истом обрасцу ставимо $\triangle x = 1$, и у ново добивеном обрасцу:

$$S_x = \frac{[x, 1]^{m+1}}{(m+1)!}$$

ставимо редом $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ добићемо збирне обрасце фигурних бројева:

$$\text{За } m = 1,\ S_x = \frac{x(x+1)}{1.\ 2} = 1 + 2 + 3 + \dots + x$$

$$„\ m = 2,\ S_x = \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3} = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

и т. д.

3°. Узмимо, да се тражи збирни образац реда, коме је x-ти члан:

$$5.)\qquad \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m}$$

По обрасцу 2) ове №-е имамо:

$$S_x = \Sigma \left\{ \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x)^m} \right\} + \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C$$

Али је (№ 163, 2°)

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{[x, \triangle x]^m} \right\} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x\,[x, \triangle x]^{m-1}}$$

Дакле, кад овде сменимо:

$$x \text{ са } \{a + (x-1)\triangle x\}:$$

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} \right\} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^{m-1}}$$

Кад ово заменимо у горњем изразу за S_x добићемо:

$$S_x = \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} - \frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^{m-1}} + C$$

Овај образац, кад помножимо бројиоца и имениоца другога разломка десно са:

$$a + (x-1)\triangle x + (m-1)\triangle x = a + (m+x-2)\triangle x$$

претвара се у:

$$S_x = \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} - \frac{a + (m+x-2)\triangle x}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C,$$

или кад први разломак десно помножимо у бројиоцу и имениоцу са $(m-1)\triangle x$, па за тим оба прва разломка саберемо:

$$S_x = \frac{(m-1)\triangle x - \{a + (m+x-2)\triangle x\}}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C$$

4°. Нека још читалац пронађе сам збирни образац реду, коме је општи члан:

$$\frac{m!}{[x, \triangle x]^m} = \frac{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ m}{x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\dots\{x+(m-1)\triangle x\}}$$

168. У овој №-и још ћемо да покажемо један начин, како се долази до образаца за број комбинација друге, треће и т. д. класе:

1°. Узмимо најпре случај комбинација без понављања.

Ако означимо са $f(n)$ број комбинација друге класе, из n основака, онда је $f(n+1)$ број комбинација друге класе из $(n+1)$ основака. Пошто се сад комбинације друге класе из $(n+1)$ основака добијају (№ 17 наука о комбинацијама), кад се ка комбинацијама друге класе начињеним из n првих основака додаду још све оне комбинације исте класе, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваким од n осталих основака, то је:

$$f(n+1) = f(n) + n$$

Одатле следује:

$$f(n+1) - f(n) = n \quad \text{или} \quad \triangle f(n) = n$$

Одавде, кад интегрујемо, узимајући при том на ум, да је $\triangle n = 1$, добијамо:

$$f(n) = \Sigma(n) = \frac{n(n-1)}{1.\ 2} + C$$

Но пошто за $n = 0$ мора и $f(n) = 0$ бити, то је онда и $C = 0$, дакле је најзад:

$$\overset{2}{C}_n = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

Ако сад означимо са $f(n)$ број комбинација треће класе из n основака, онда је $f(n+1)$ број комбинација исте класе из $(n+1)$ основака. Али је овај последњи број једнак броју $f(n)$ комбинација треће класе, начињених из n првих основака, више броју свију оних комбинација исте класе, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваком комбинацијом друге класе, начињеном из n првих основака. Дакле је:

$$f(n+1) = f(n) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$$

Одатле следује:

$$f(n+1) - f(n) = \binom{n}{2} \quad \text{или} \quad \triangle f(n) = \binom{n}{2}$$

Одавде опет интегровањем добијамо:

$$f(n) = \Sigma\binom{n}{2} = \frac{1}{2}\Sigma n^2 - \frac{1}{2}\Sigma n + C$$

или:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right\} + C$$

Пошто је $f(n) = 0$ за $n = 0$, то онда мора бити и $C = 0$. Дакле је, кад сведемо:

$$\overset{3}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

На сличан начин могли бисмо наћи да је:

$$\overset{4}{C}_n = \binom{n}{4},\quad \overset{5}{C}_n = \binom{n}{5},\quad \overset{6}{C}_n = \binom{n}{6} \text{ и т. д.}$$

Путем више индукције доказује се, као и у науци о комбинацијама, да је у опште;

$$\overset{r}{C}_n = \binom{n}{r}$$

2°. Узмимо сад случај комбинација са понављањем. Ако означимо са $f(n)$ број комбинација друге класе из n основака, онда је $f(n+1)$ број комбинација исте класе из $(n+1)$ основака. Овај последњи број једнак је броју комбинација друге класе из n првих основака, више броју комбинација исте класе, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваким од $(n+1)$ основака — дакле и са самим собом —.

Према томе је:

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)$$

Одатле следује:

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)$$

или:

$$\triangle f(n) = (n+1)$$

или пошто интегрујемо:

$$f(n) = \Sigma n + \Sigma 1$$

или даље (№ 161, 2):

$$f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n + C = \frac{n(n+1)}{1.\ 2} + C$$

Пошто је за $n = 0$ и $f(n) = 0$, то је онда и $C = 0$ и тако је сад;

$$\overset{2}{C'_n} = \frac{n(n+1)}{1.\ 2}.$$

Означимо сад са $f(n)$ број комбинација треће класе из n основака, дакле са $f(n+1)$ број комбинација исте класе из $(n+1)$ основака. Овај последњи број једнак је броју $f(n)$ комбинација треће класе из првих n основака више броју комбинација, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваком комбинацијом друге класе начињеном из $(n+1)$ основака. Дакле је:

$$f(n+1) = f(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}$$

Одавде следује:

$$\triangle f(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}$$

или:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left\{\Sigma n^2 + 3\Sigma n + 2\Sigma 1\right\} + C$$

или (№ 161, 2):

$$f(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right\} + 3\left\{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right\} + 2n + C$$

И одавде, кад узмемо на ум, да за $n = 0$ мора бити $f(n) = 0$ па дакле и $C = 0$, добијамо после лаког свођаја:

$$\overset{3}{C}{}'_{n} = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

На сличан начин можемо наћи, да је:

$$\overset{4}{C}{}'_{n} = \binom{n+3}{4}, \quad \overset{5}{C}_{n} = \binom{n+4}{5} \text{ и т. д.}$$

Путем више индукције доказује се после, да је у опште:

$$\overset{r}{C}{}'_{n} = \binom{n+r-1}{r}$$

ДОДАТАК.

Gräffe-ова метода решавања бројних једначина.

169. У овом додатку показаћемо укратко још једну методу решавања бројних једначина, која се по њеном проналазачу зове Gräffe-ова метода.

Основна мисао те методе састоји се у изналажењу нове једначине, чији су корени извесни степени корена задате једначине и ти су степени толико високи, да мањи корени нове једначине наспрам већих корена њених ишчезавају.

Ако је на пример:

$$1.) \quad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

задата једначина и њени су корени:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots \alpha_m,$$

то се из ње може извести нова једначина:

$$2.) \quad y^m + b_1y^{m-1} + b_2y^{m-2} + \ldots + b_m = 0,$$

чији су корени на пр. k-ти степени корена задате једначине, дакле:

$$\alpha_1^k, \quad \alpha_2^k, \quad \alpha_3^k \ldots \alpha_m^k.$$

Зарад тога треба само у задатој једначини 1) ставити:

$$x^k = y \quad \text{или} \quad x = \sqrt[k]{y}.$$

Претпоставимо да су корени задате једначине сви стварни и међу собом различни, тако да је негледајући на знак:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_m.$$

На основу образаца 2) у № 6 јесте:

$$b_1 = -(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_m^k),$$

одакле:

$$-\frac{b_1}{\alpha_1^k} = 1 + \frac{\alpha_2^k + \alpha_3^k + \ldots + \alpha_m^k}{\alpha_1^k}.$$

Пошто је услед претпоставке α_1 бројно највећи корен задате једначине, то можемо k узети тако велико, да је разломак десно од знака једнакости у последњој једначини мањи од колико му драго малог броја. И тада ћемо врло приближно имати:

$$-\frac{b_1}{\alpha_1^k} = 1 \quad \text{или} \quad b_1 = -\alpha_1^k$$

Даље је на основу истих образаца 2) у № 6:

$$b_2 = \alpha_1^k \alpha_2^k + \alpha_1^k \alpha_3^k + \ldots + \alpha_{m-1}^k \alpha_m^k$$

или:

$$\frac{b_2}{\alpha_1^k \alpha_2^k} = 1 + \frac{\alpha_1^k \alpha_3^k + \alpha_1^k \alpha_4^k + \ldots + \alpha_{m-1}^k \alpha_m^k}{\alpha_1^k \alpha_2^k}$$

За врло велико k разломак десно од знака једнакости биће врло мали број, и ми ћемо добити тим тачније, што год је k веће:

$$\frac{b_2}{\alpha_1^k \alpha_2^k} = 1 \quad \text{или} \quad b_2 = \alpha_1^k \alpha_2^k$$

Сличним умовањем наћићемо даље редом:

$$b_3 = -\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k,$$

$$b_4 = +\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k \alpha_4^k$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$b_{m-1} = (-1)^{m-1} \alpha_1^k \alpha_2^k \ldots \alpha_{m-1}^k$$

$$b_m \;= (-1)^m \;\; \alpha_1^k \alpha_2^k \ldots \alpha_m^k$$

Према томе може се, кад је k врло велико, једначина:

$$3.) \quad y^m - \alpha_1^k y^{m-1} + \alpha_1^k \alpha_2^k y^{m-2} - \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k y^{m-3} + \ldots$$
$$+ (-1)^m \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k \ldots \alpha_m^k = 0$$

узети приближно тачно као заменик једначине 2).

Дакле кад је k врло велико, онда ће се 2-ги, 3-ћи, 4-ти и т. д. сачинилац једначине 2), чији су корени k-ти степени корена задате једначине, врло мало разликовати од α_1^k, $\alpha_1^k \alpha_2^k$, $\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k$ и т. д. Одатле следује, да ће сачиниоци једначине, чији су корени квадрати корена једначине 2) или што је све једно $2k$-ти степени корена задате једначине, бити врло наблизу квадрати одговарајућих сачинилаца у једначини 2), И обратно кад видимо, да су сачиниоци једначине, чији су корени $2k$-ти степени корена задате једначине скоро квадрати одговарајућих сачинилаца у једначини 2), онда одатле можемо с правом закључити, да ће се узастопни сачиниоци једначине 2) врло мало разликовати од α_1^k, $\alpha_1^k\alpha_2^k$, $\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k$, и т. д. Ово нека читалац добро утуби због онога, што ће доцније доћи.

Сад нам ваља показати простији начин, како се поступно добијају једначине, чији су корени све виши и виши степени корена задате једначине. Зарад тога најбоље је поступно квадрирати корене задате једначине, а тим хоћемо да кажемо то, да треба најпре извести из дане једначине другу једначину, чији су корени квадрати корена задате једначине, из те друге једначине трећу једначину, чији су корени квадрати корена друге, дакле четврти степени корена прве т. ј. задате једначине и т. д.

Кад у задатој једначини 1) ставимо $x = \sqrt{y}$ наћићемо као једначину, чији су корени квадрати корена једначине 1), и то кад је m парно:

$$y^{\frac{m}{2}} + a_2 y^{\frac{m-2}{2}} + \ldots + a_{m-2}y + a_m =$$

$$-(a_1 y^{\frac{m-2}{2}} + a_3 y^{\frac{m-4}{2}} + \ldots + a_{m-1})\sqrt{y},$$

а кад је m непарно:

$$(y^{\frac{m-1}{2}} + a_2 y^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + a_{m-1})\sqrt{y} =$$

$$-(a_1 y^{\frac{m-1}{2}} + a_3 y^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + a_m).$$

Из сваке од ових двеју једначина добијамо, кад квадрирамо и уредимо:

$$4.)\left\{\begin{array}{l}
y^m \left.\begin{array}{r}+\,2a_2\\-\,a_1^2\end{array}\right\} y^{m-1} \left.\begin{array}{r}+\,2a_4\\-\,2a_1a_3\\+\,a_2^2\end{array}\right\} y^{m-2} \left.\begin{array}{r}+\,2a_6\\-\,2a_1a_5\\+\,2a_2a_4\\-\,a_3^2\end{array}\right| y^{m-3}+\ldots\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}+\,2a_{2r}\\-\,2a_1a_{2r-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,\\(-1)^{r-1}\,2a_{r-1}a_{r+1}\\(-1)^r\,a_r^2\end{array}\right| y^{m-r}+\ldots \left.\begin{array}{r}+\,2a_{m-4}a_m\\-\,2a_{m-3}a_{m-1}\\+\,a_{m-2}^2\end{array}\right\}(-1)^m y^2+\\[2ex]
\qquad\left.\begin{array}{r}+\,2a_{m-2}a_m\\-\,a_{m-1}^2\end{array}\right\}(-1)^m y+(-1^m a_m^2 = 0
\end{array}\right.$$

И ово је општи образац, помоћу којега се у особеним случајевима добија једначина, чији су корени квадрати корена дате једначине. Из општег т. ј. $(r+1)$-ог члана обрасца 4) добијају се редом сви његови чланови стављајући

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m,$$

при чему треба сматрати сваког чиниоца, да је једнак нули, ако му је казаљка већа од m или мања од нуле, а да је једнак јединици, ако му је казаљка једнака нули.

За $m = 3, 4, 5, 6,$ и т. д. једначина 4) претвара се редом у:

$$y^3 + \left.\begin{matrix} 2a_2 \\ -a_1^2 \end{matrix}\right\} y^2 - \left.\begin{matrix} 2a_1a_3 \\ +a_2^2 \end{matrix}\right\} y - a_3^2 = 0,$$

$$y^4 + \left.\begin{matrix} 2a_2 \\ -a_1^2 \end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix} 2a_4 \\ -2a_1a_3 \\ +a_2^2 \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} 2a_2a_4 \\ -a_3^2 \end{matrix}\right\} y + a_4^2 = 0,$$

$$\text{5.)}\quad y^5 + \left.\begin{matrix} 2a_2 \\ -a_1^2 \end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix} 2a_4 \\ -2a_1a_3 \\ +a_2^2 \end{matrix}\right\} y^3 - \left.\begin{matrix} 2a_1a_5 \\ +2a_2a_4 \\ -a_3^2 \end{matrix}\right\} y^2 - \left.\begin{matrix} 2a_3a_5 \\ +a_4^2 \end{matrix}\right\} y - a_5^2 = 0,$$

$$y^6 + \left.\begin{matrix} 2a_2 \\ -a_1^2 \end{matrix}\right\} y^5 + \left.\begin{matrix} 2a_4 \\ -2a_1a_3 \\ +a_2^2 \end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix} 2a_6 \\ -2a_1a_5 \\ +2a_2a_4 \\ -a_3^2 \end{matrix}\right| y^3 + \left.\begin{matrix} 2a_2a_6 \\ -2a_3a_5 \\ +a_4^2 \end{matrix}\right\} y^2 +$$

$$+ \left.\begin{matrix} 2a_4a_6 \\ -a_5^2 \end{matrix}\right\} y + a_6^2 = 0$$

и т. д.

Ово су обрасци, помоћу којих се у особеним случајевима добијају једначине, чији су корени квадрати корена задате једначине, кад је ова 3-ег, 4-ог, 5-ог, 6-ог, и т. д. степена.

Пример. Да се реши једначина:

$$x^4 - 13x^3 + 37x^2 - 3x - 54 = 0,$$

чији су сви корени стварни.

Помоћу друге једначине под 5) добићемо једначине, којих су корени редом други, четврти, осми, 16-ти, 32-ги, 64-ти и т. д. степени корена задате једначине. Те једначине, у којима почев од друге место њиних сачинилаца стоје логаритми истих сачинилаца, јесу ове:

$$y^4 - 95y^3 + 1183y^2 - 4005y + 2916 = 0,$$

$$y^4 - 3{\cdot}8234090y^3 + 5{\cdot}8091360y^2 -$$
$$- 6{\cdot}9609827y + 6{\cdot}9295750 = 0,$$

$$y^4 - 7{\cdot}6340089y^3 + 11{\cdot}4675744y^2 -$$
$$- 13{\cdot}8609092y + 13{\cdot}8591500 = 0$$

$$\text{6.)}\quad y^4 - 15{\cdot}2678808y^3 + 22{\cdot}9024266y^2 -$$
$$- 27{\cdot}7183079y + 27{\cdot}7183000 = 0,$$

$$y^4 - 30{\cdot}5357616y^3 + 45{\cdot}8035325y^2 -$$
$$- 55{\cdot}4365994y + 55{\cdot}4366000 = 0,$$

$$y^4 - 61{\cdot}0715232y^3 + 91{\cdot}6070650y^2 -$$
$$- 110{\cdot}8731988y + 110{\cdot}8732000 = 0$$

и т. д.

Као што се види, већ од једначине, чији су корени 32-ги степени корена задате једначине, сачиниоци расту по квадрату, јер почев од те једначине логаритми сачинилаца сваке доцније једначине јесу двапут већи од логаритама сачинилаца у предњој једначини. Узимајући дакле на ум оно, што је горе одмах за обрасцем 3) говорено, имамо не водећи рачуна о знаку:

$$log\ \alpha_1^k = log\ \alpha_1^{32} = 30{\cdot}5357616$$

или

$$log\ \alpha_1 = 0{\cdot}9542425 = log\ 9.$$

Даље је:

$$log\ \alpha_1^{32}\alpha_2^{32} = 32\left\{log\ \alpha_1 + log\ \alpha_2\right\} = 45{\cdot}8035325,$$

одакле:

$$log\ \alpha_2 = 0{\cdot}4771213 = log\ 3$$

Исто је тако:

$$log\ \alpha_1^{32}\alpha_2^{32}\alpha_3^{32} = 32\left\{log\ \alpha_1 + log\ \alpha_2 + log\ \alpha_3\right\}$$

$$= 55{\cdot}4365994,$$

одакле:

$$log\ \alpha_3 = 0{\cdot}3010300 = log\ 2,$$

и на послетку

$$log\ \alpha_1^{32}\alpha_2^{32}\alpha_3^{32}\alpha_4^{32} = 32\left\{log\ \alpha_1 + log\ \alpha_2 + log\ \alpha_3 + log\ \alpha_4\right\}$$

$$= 55{\cdot}4366000,$$

одакле:

$$log\ \alpha_4 = 0 = log\ 1.$$

Бројне вредности корена задате једначине јесу дакле:

$$\alpha_1 = 9,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 1,$$

и сад још остаје да се види, који знак коме корену припада.

На основу №-е 16 један је само корен одречан а остала су три положни. Пошто сад збир свију корена мора бити $= 13$ (№ 6), то онда мора -1 бити одречан корен а 2, 3 и 9 морају бити положни корени.

Исто би се тако лако могли наћи корени једначине, кад би они били ирационални. Израчунавање сачинилаца помоћу образаца 5) и 7-месних логаритамских таблица даје повода погрешки, која се осећа на последњем а по каткад и на претпоследњем месту. Али кад смо на овај начин израчунали приближну вредност једног корена, онда из ње а помоћу познатих метода можемо наћи још приближније вредности његове.

170. Претпоставимо сада, да су без обзира на знак α_1 и α_2 два стварна и једнака или два спрегнута уображена корена једначине:

$$1.)\quad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = 0.$$

Имајући на уму обрасце 2) у № 6 можемо написати:

$$a_1 = -(\alpha_1+\alpha_2) - \overset{1}{C}(\alpha_3\,\alpha_4 \ldots \alpha_m),$$

$$a_2 = \alpha_1\,\alpha_2 + (\alpha_1+\alpha_2)\,\overset{1}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) + \overset{2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m),$$

$$a_3 = -\alpha_1\,\alpha_2\,\overset{1}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) - (\alpha_1+\alpha_2)\,\overset{2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$
$$- \overset{3}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m),$$

$$a_4 = \alpha_1\,\alpha_2\,\overset{2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) + (\alpha_1+\alpha_2)\,\overset{3}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$
$$+ \overset{4}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m),$$

. . . .

$$a_r = (-1)^r \{\alpha_1\,\alpha_2\,\overset{r-2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) + (\alpha_1+\alpha_2)\,\overset{r-1}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$
$$+ \overset{r}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)\}.$$

У овим обрасцима значи израз

$$\overset{h}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$

збир комбинација h-ог реда начињених из корена α_3, α_4, . . . α_m.

Ако је

$$2.)\qquad y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + \ldots + b_m = 0$$

једначина, чији су корени h-ти степени корена једначине 1), онда у горњим изразима за a_1, a_2, a_3, . . . a_r треба само корене α_1, α_2, α_3, . . . α_m заменити њиховим k-тим степенима, па ћемо имати аналогне изразе за сачиниоце b једначине 2).

Претпоставимо сада, да су α_1 и α_2 два бројно највећа стварна корена једначине 1), или ако би они били спрегнути уображени корени н. пр. $\alpha_1 = p + qi$ и $\alpha_2 = p - qi$, да је онда њин производ $p^2 + q^2$ или што је све једно рећи да је квадрат њиховог модула већи од производа ма која два остала стварна корена. Доцније ћемо моћи узети, да се поменута два корена налазе, што се тиче њихове величине, ма где међу осталим коренима.

Умујући онако као и при извођењу обрасца 3) у №-и 169 и ослањајући се при том на мало час поменуте изразе за поједине сачиниоце b у једначини 2) наћи ћемо, да за врло велико k једначина:

$$3.)\qquad y^m - (\alpha_1^k + \alpha_2^k)\, y^{m-1} + \alpha_1^k \alpha_2^k\, y^{m-2} -$$

$$- \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{1}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k)\, y^{m-3} + \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{2}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k)\, y^{m-4} -$$

$$\ldots + (-1)^r \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{2}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k)\, y^{m-r} + \ldots$$

може приближно тачно заменити једначину 2), чији су корени k-ти степени корена једначине 1).

Ако претпоставимо $k = 2^n$ а то је допуштено, онда једначина 2) добија се из једначине 1) најлакше поступним квадрирањем корена ове последње.

Ако су α_1 и α_2 стварни и *бројно* једнаки корени, онда је други сачинилац у једначини 3) $= -2\alpha_1^k$. Дакле, почев од једне довољно велике вредности броја $k = 2^n$ или што је све једно броја n па на даље, половина другог сачиниоца расти по квадрату, док међу тим цео трећи сачинилац $\alpha_1^k \alpha_2^k = \alpha_1^{2k}$ расти по квадрату. Али ако други сачинилац не расти ни по квадрату ни на мало час поменути начин, онда корени α_1 и α_2 не могу бити стварни већ уображени. Тада је дакле:

$$4.)\quad \begin{cases} \alpha_1^k + \alpha_2^k = \varrho^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi) + \varrho^k(\cos k\varphi - i \sin k\varphi) \\ \qquad\qquad = 2\varrho^k \cos k\varphi \\ \alpha_1^k \alpha_2^k = \varrho^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)\, \varrho^k(\cos k\varphi - i \sin k\varphi) = \varrho^{2k} \end{cases}$$

Помоћу ових образаца израчунава се модуо уображених корена као и они сами. Пошто су они израчунати, онда ће се лако и трећи корен α_3 моћи израчунати из трећег сачиниоца:

$$-\alpha_1^k \alpha_2^k \overset{1}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k),$$

ако је само тај корен стваран и бројно већи од свију доцнијих корена α_4, α_5, . . . α_m. Јер се тада за довољно велико k тај трећи сачинилац своди на

$$-\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k.$$

Ако ли би α_3 и α_4 били уображени или стварни али бројно једнаки корени, онда би се они израчунавали онако, како су се у тим случајевима израчунавали корени α_1 и α_2. Продужавајући овако и даље моћи ћемо наћи све стварне корене као и модуле уображених корена, после чега ће се као што ћемо мало после видети, лако моћи наћи и потпуни корени.

Пример. Да се реши једначина:

$$x^4 - 17x^3 + 94x^2 - 178x + 100 = 0$$

Помоћу друге једначине под 5) у № 169 добијамо низ једначина, који иде и у којима су почев од друге сачиниоци заступљени својим логаритмима:

$$y^4 - 101y^3 + 2984y^2 - 12884y + 10000 = 0$$

$$y^4 - 3{\cdot}6266483y^3 + 6{\cdot}8008330y^2 - 8{\cdot}0266046y + 8 = 0$$

$$y^4 - 6{\cdot}7722152y^3 + 13{\cdot}5917753y^2 - 16{\cdot}0007190y + 16 = 0$$

$$y^4 + 13{\cdot}6344622y^3 + 27{\cdot}1835167y^2 - 32{\cdot}0000003y + 32 = 0$$

$$y^4 + 27{\cdot}0770963y^3 + 54{\cdot}3670334y^2 - 64{\cdot}0000000y + 64 = 0$$

Почев одавде осим првог сачиниоца, који је свој знак променио и који се не мења — бројно — по каквом закону, који би лако у очи пао, сви остали сачиниоци расту по квадрату. Та околност за нас је миг, да су прва два корена уображени а остала два стварни.

Узимајући на ум образац 3) као и други образац под 4) у овој №-и налазимо:

$$log\,(\alpha_1\,\alpha_2) = log\,(\varrho^2) =$$

$$= \frac{54{\cdot}3670334}{32} = 1{\cdot}6989699 = log\,50.$$

Пошто је даље:

$$log\,(\alpha_1^k\,\alpha_2^k\,\alpha_3^k) = log\,(\varrho^{2k}\alpha_3^k) = 32\,log\,(\varrho^2) + 32\,log\,\alpha_3 = 64$$

то је онда:

$$log\,\alpha_3 = \frac{64 - 54{\cdot}3670334}{32} = 0{\cdot}301030 = log\,2,$$

На сличан начин налазимо:

$$log\,\alpha_4 = \frac{64 - 64}{32} = 0 = log\,1.$$

Путем просте замене у задатој једначини уверавамо се, да је $\alpha_4 = +1$. Пошто је задата једначина парнога степена и последњи јој је члан положан, то онда мора $\alpha_3 = +2$ бити.

Уображени корени α_1 и α_2 могу се овде лако наћи. Пошто је збир свију корена једнак другом сачиниоцу задате једначине узетом са противним знаком, дакле једнак броју 17 и пошто је $\alpha_3 + \alpha_4 = +3$, то је онда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\varrho\,cos\,\varphi = 17 - 3 = 14.$$

Одатле сљедује:

$$\varrho cos\,\varphi = 7,\ \ \varrho sin\,\varphi = \sqrt{\varrho^2(1 - cos^2\varphi)} = \sqrt{50 - 49} = \pm 1.$$

Према томе је дакле најзад:

$$\alpha_1 = 7 + \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 7 - \sqrt{-1}.$$

171. Кад су два највиша корена спрегнути уображени бројеви или су пак стварни али *бројно* једнаки, онда као што видесмо, израчунавање свију корена не иде тешко. Али кад се таква два корена јављају тек после h-ог стварног корена тако, да пред њима има h стварних корена, од којих је сваки већи но ма који од поменута два корена, или, ако су ови уображени, већи од њиховог модула, онда се h поменутих стварних корена израчунавају сасвим онако, како је казато у № 169.

И доиста једначина, која за довољно велико $k = 2^n$ може заменити једначину, чији су корени k-ти степени корена задате једначине, изгледа сада овако:

$$y^m - \alpha_1^k y^{m-1} + \alpha_1^k \alpha_2^k y^{m-2} - \ldots + (-1)^h \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k y^{m-k}$$

$$1.) \quad + (-1)^{h+1} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k (\alpha_{h+1}^k + \alpha_{h+2}^k) y^{m-h-1}$$

$$+ (-1)^{h+2} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k \alpha_{h+1}^k \alpha_{h+2}^k y^{m-h-2} + \ldots.$$

као што се види сви чланови, који су пред чланом

$$2.) \quad (-1)^{h+1} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k (\alpha_{h+1}^k + \alpha_{h+2}^k) y^{m-h-1}$$

расту по квадрату. Што се тиче овог последњег члана, ако су α_{h+1} и α_{h+2} стварни и без обзира на знак једнаки бројеви, онда је ограђени чинилац у истом члану $= 2\alpha_{h+1}^k$ и он — чинилац — дакле тада расти само својом половином по квадрату. Узимајући ово на ум моћићемо α_{h+1} у таквом случају лако израчунати.

Ако се поменути члан под 2) немења ни по квадрату ни на мало час поменути начин, онда одатле закључујемо, да су α_{h+1} и α_{h+2} уображени корени. Њихов производ

$$\alpha_{h+1} \alpha_{h+2}$$

добија се на већ познати начин из следећег сачиниоца, који по квадрату расти т. ј. из

$$(-1)^{h+2} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k \alpha_{h+1}^k \alpha_{h+2}^k = (-1)^{h+2} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k \varrho^{2k}$$

Пошто смо ϱ^2 помоћу овог обрасца израчунали, онда све доцније стварне корене налазимо онако као у № 169. А затим се спрегнути уображени корени:

$$\alpha_{h+1} = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \alpha_{h+2} = \varrho (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

израчунавају помоћу познатог обрасца:

$$3.) \qquad 2\varrho \cos \varphi + s = - a_1,$$

где први члан лево значи збир двају уображених корена, други члан збир стварних корена а a_1 другог сачиниоца задате једначине. Пошто смо све стварне корене израчунали, онда помоћу обрасца 3) налазимо $\varrho \cos \varphi$ и затим:

$$\varrho \sin \varphi = \sqrt{\varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 \varphi},$$

а то су састојци уображених корена.

Ако се међу коренима задате једначине осим α_{h+1} и α_{h+2} налазе друга два бројно једнака или два спрегнута уображена корена, онда се они израчунавају онако као α_{h+1} и α_{h+2}.

172. Сад прелазимо на случај, кад су три корена α_1, α_2, α_3 стварни и бројно једнаки, или кад су α_1 и α_2 уображени корени и њихов је производ

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).\ \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \varrho^2$$

једнак квадрату трећег стварног корена α_3. Претпостављајући опет да су α_1, α_2, α_3 три највиша корена задате једначине m-ог степена, добићемо умовањем сличним ономе у №-и 170 и пошто корене задате једначине n-пута узастопце будемо квадрирали:

$$1.)\ y^m - (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k)\,y^{m-1} + (\alpha_1^k\alpha_2^k + \alpha_1^k\alpha_3^k + \alpha_2^k\alpha_3^k)\,y^{m-2}$$

$$-\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\,y^{m-3} + \alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\,\overset{1}{C}(\alpha_4^k\ldots\alpha_m^k)\,y^{m-4} - \ldots$$

$$+ (-1)^m\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\,\overset{m-3}{C}(\alpha_4^k\ldots\alpha_m^k) = 0$$

као једначину, која за довољно велико $k = 2^n$ може заменити једначину, чији су корени k-ти степени корена задате једначине.

Ако су α_1, α_2, α_3 стварни и бројно једнаки, онда се други, трећи и четврти сачинилац једначине 1) претварају у:

$$-3\alpha_1^k,\quad 3\alpha_1^{2k},\ -\alpha_1^{3k}.$$

Али ако та три сачиниоца не расту ни по овом закону нити по онима, који су у №-ма 169 и 170 поменути, онда у таквом случају закључујемо, да су два корена уображени а трећи да је стваран. Тада α_1^{3k} даје стварни корен α_1 и квадрат модула $\varrho^2 = \alpha_1^2$ двају уображених корена, док међу тим, кад су сва три корена стварни, α_1 даје бројну вредност једног од њих. Ако све оно, што смо горе о коренима α_1, α_2, α_3 претпоставили, стоји, само не то да су они три највиша корена, онда проматрања истоветна са онима у № 171 (обр. 1) наступају тек код три доцнија сачиниоца.

Ако су 4 највиша корена α_1, α_2, α_3, α_4 стварни и без обзира на знак једнаки, онда на сличан начин као горе дознајемо, да се други, трећи, четврти и пети сачинилац јављају у облику:

$$-4\alpha_1^k,\ 6\alpha_1^{2k},\ -4\alpha_1^{3k},\ \alpha_1^{4k}.$$

Али ако поменути сачиниоци не расту ни по овом ни по једном од пређе наведених закона, онда су или два и два од поменута четири корена спрегнути уображени бројеви, или је пак то случај само са два корена а остала су два стварни и бројно једнаки. Ако исти корени нису највиши, онда истоветна проматрања настају тек код 4 доцнија сачиниоца. Као што смо проматрали случајеве са два, три и четири бројно једнака корена, могли бисмо на исти начин проматрати случајеве са пет, шест и т. д. r једнаких корена. Како се пак, пошто су једном израчунати стварни корени и модули уображених корена, израчунавају сабирци ових последњих, видећемо доцније:

Пример. Да се реши једначина:

$$x^7 - 3x^6 - x^5 + 13x^4 - 34x^3 + 52x^2 - 56x + 28 = 0.$$

Из обрасца 4) у № 169 добијамо за $m = 7$:

$$y^7 + \left.\begin{array}{r} 2a_2 \\ -\ a_1^2 \end{array}\right\} y^6 + \left.\begin{array}{r} 2a_4 \\ -2a_1a_3 \\ +\ a_2^2 \end{array}\right\} y^5 + \left.\begin{array}{r} 2a_6 \\ -2a_1a_5 \\ +2a_2a_4 \\ -\ a_3^2 \end{array}\right| y^4 \left.\begin{array}{r} -2a_1a_7 \\ +2a_2a_6 \\ -2a_3a_5 \\ +\ a_4^2 \end{array}\right| y^3 +$$

$$\left.\begin{array}{r} -2a_3a_7 \\ +2a_4a_6 \\ -\ a_5^2 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{r} -2a_5a_7 \\ +\ a_6^2 \end{array}\right\} y - a_7^2 = 0.$$

Одавде добијамо једначине, којих су корени редом 2-ги, 4-ти, 8-ми, 16-ти, 32-ги и т. д. степени корена задате једначине и то наравно приближно тачно. Те једначине, код којих смо у сачиниоцима задржали само пет највиших места, јесу редом:

$$y^7 - 11y^6 + 11y^5 + 99y^4 + 84y^3 + 376y^2 + 224y - 784 = 0,$$

$$y^7 - 99y^6 - 2467y^5 + 767y^4 - 79712y^3 + 51488y^2 \\ + 63874_1 y - 61466_1 = 0,$$

$$y^7 - 4867y^6 + 60785_2 y^5 - 38241_4 y^4 + 93098_5 y^3 \\ - 10370_7 y^2 + 47255_7 y - 37781_7 = 0,$$

$$y^7 - 11531_3 y^6 + 33227_9 y^5 - 34068_{12} y^4 + 13175_{15} y^3 \\ - 21317_{17} y^2 + 14494_{19} y - 14273_{19} = 0,$$

$$y^7 - 66502_9 y^6 + 11033_{23} y^5 - 28516_{28} y^4 + 38359_{33} y^3 \\ - 58324_{37} y^2 + 20400_{42} y - 20374_{42} = 0.$$

Доње казаљке поред сачинилаца показују, колико је целих места занемарено.

Одавде па на даље расти други сачинилац својом половином, а трећи у пет задржаних места тачно по квадрату, и с тога су два највиша корена стварни и бројно једнаки. Почев од сљедеће једначине, чији су корени 64-ти степени корена задате једначине, расти седми сачинилац такође по квадрату и он је у тој једначини 41614_{88}. Три сачиниоца који су пред њим т. ј. шести, пети и четврти не расту ни даље по квадрату, одакле закључујемо на два спрега уображених корена. Модули та два спрега морају бити једнаки, јер кад би степени истих били неједнаки, онда би пети сачинилац морао расти такође по квадрату, и из истог би се сачиниоца модуо првог спрега уображених корена могао наћи. Најзад последњи корен мора бити стваран.

И сад прилазимо израчунавању двају највиших стварних корена, модула уображених као и последњег стварног корена.

Други сачинилац своди се за $k = 32$ на $2\alpha_1^k$ а трећи на α_1^{2k} и за то је:

$$\log 2\alpha_1^{32} = \log 66502_9 = 13{\cdot}82283,$$

одакле:

$$\log \alpha_1 = \frac{13{\cdot}82283 - 0{\cdot}30103}{32} = 0{\cdot}42255;$$

исто је тако:

$$\log \alpha_1^{2k} = \log \alpha_1^{64} = \log 11033_{23}$$

дакле:

$$\log \alpha_1 = \frac{27{\cdot}0427}{64} = 0{\cdot}42254.$$

Ако су ϱ_1 и ϱ_2 модули двају уображених корена, онда се седми сачинилац, који по квадрату расти, своди на $(\alpha_1^2\varrho_1^2\varrho_2^2)^k$. И пошто је $\varrho_1^2 = \varrho_2^2 = \varrho^2$, то је онда:

$$log\,(\alpha_1^2\varrho^4)^{64} = log\,41614_{88} = 92{\cdot}61924$$

одакле:

$$log\,(\varrho^2) = \frac{92{\cdot}61924 - 54{\cdot}08724}{128} = 0{\cdot}30103.$$

По овоме је приближно тачно $\varrho = \sqrt{2}$. Простом заменом двеју граница броја $\sqrt{2}$ у задату једначину увериђемо се, да једначина не може имати два стварна корена једнака броју $\sqrt{2}$. По томе је наше горње тврђење, да једначина има два спрега уображених корена с једнаким модулима, истинито.

Тражимо сад последњи стварни корен. Пошто је последњи члан без обзира на знак једнак производу свију корена, то је:

$$\alpha_1^2\,\varrho^4\,\alpha_7 = 28$$

или:

$$log\,\alpha_7 = log\,28 - 2\,(log\,\alpha_1 + log\,\varrho^2)$$

$$= 1{\cdot}44716 - 2 \times 0{\cdot}72358 = 0.$$

Дакле је $\alpha_7 = \pm 1$. Простом заменом дознајемо, да је $\alpha_7 = +1$ корен једначине. Пошто је једначина потпуна и има само једну сљед, то она може имати највише један одречан корен, и тај она мора имати, јер је она непарнога степена а последњи јој је члан положан (№ 13, 1° и № 16, 4°). Дакле један од прва два стварна корена мора бити положан а други одречан. Пошто је $log\,\alpha_1 = 0{\cdot}42255$, то је:

$$\alpha_1 = 2{\cdot}6457 \text{ а } \alpha_2 = -2{\cdot}6457.$$

Да бисмо још нашли уображене корене из њихових модула ϱ_1 и ϱ_2 и нађених стварних корена, узећемо једначине:

$$\begin{aligned} &2(\varrho_1\,cos\,\varphi_1 + \varrho_2\,cos\,\varphi_2) + s = -a_1, \\ 2.)\quad & \\ &2\left\{\frac{cos\,\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{cos\,\varphi_2}{\varrho_2}\right\} + s_1 = -\frac{a_{m-1}}{a_m}, \end{aligned}$$

где је s збир стварних корена а s_1 збир њихових реципрочних вредности. Прва је једначина с обзиром на обрасце 2) у № 6 по себи јасна, ако се још узме на ум то, да је $2\varrho_1\,cos\,\varphi_1$ збир прва два а $\varrho_2\,cos\,\varphi_2$ збир друга два спрегнута уображена корена. Друга једначина биће нам такође јасна, ако узмемо на ум, да је без обзира на знак:

$$\frac{a_{m-1}}{a_m} = \frac{\overset{m-1}{C}(\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_m)}{\overset{m}{C}(\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_m)},$$

где бројилац десно значи збир комбинација — без понављања — $(m-1)$-ве класе начињених из корена α_1, α_2, . . . α_m, а именилац збир комбинација m-не класе начињених из истих корена. Али обе те јадначине, пошто је сада $\varrho = \sqrt{2}$, своди се на једну и исту једначину:

$$3.)\qquad cos\,\varphi_1 + cos\,\varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Пошто нам дакле једначине 2) овде не помажу, то нам се ваља помоћи на други начин и то овако. Трећи сачинилац задате једначине јесте:

$$a_2 = -1 = \overset{2}{C}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ \alpha_7).$$

он је то јест једнак збиру комбинација друге класе — без понављања — а начињених из седам корена задате једначине. Пошто начинимо све те комбинације и одмах изоставимо све оне, које се узајамно потиру, онда после лаког свођаја оставших комбинација добијамо:

$$\varrho \cos \varphi_1 + \varrho \cos \varphi_2 + 2\varrho^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = 1$$

или због $\varrho = \sqrt{2}$:

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2\sqrt{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Одавде с обзиром на горњу једначину 3) добијамо:

$$2\sqrt{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = 0.$$

Дакле једна од количина $\cos \varphi_1$ и $\cos \varphi_2$ мора бити једнака нули, али не и обадве, пошто четири уображена корена нису — без обзира на знак — једнаки. Ако узмемо да је $\cos \varphi_1 = 0$, онда одатле добијамо $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ као најмањи лук, и по томе је $\sin \varphi_1 = 1$. Из горње једначине 3) сљедује сада:

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ дакле } \sin \varphi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Према томе тражена два спрега уображених корена јесу:

$$\sqrt{2}(0 \pm \sqrt{-1}) = 0 \pm \sqrt{-2},$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 \pm \sqrt{-1}$$

173. У овој №-и остаје нам још да покажемо, како се у случају, кад једначина има више спрегова уображених корена, израчунавају уображени корени, пошто су њихови модули као и стварни корени већ израчунати.

Узмимо да задата једначина има н. пр. q спрегова уображених корена и да су њихови модули почев од највећег па редом до најмањег:

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_q.$$

Из задате једначине изведимо нову једначину, чији су корени за јединицу већи. Ако сад поступним квадрирањем корена нове једначине израчунамо модуле њених уображених корена, и ти су модули:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_q,$$

онда уображене корене нове једначине можемо наћи на начин, који иде. Нека је

$$\varrho_p (\cos \varphi_p + i \sin \varphi_p)$$

уображени корен задате једначине, који одговара модулу ϱ_p. Уображени корен нове једначине, који поменутом корену задате једначине одговара, јесте за јединицу већи Дакле је квадрат модула r_p тог уображеног корена:

$$r_p^2 = (\varrho_p \cos \varphi_p + 1)^2 + \varrho_p^2 \sin^2 \varphi_p,$$

одакле сљедује:

$$1.) \quad \varrho_p \cos \varphi_p = \frac{r_p^2 - \varrho_p^2 - 1}{2}.$$

Одавде се може израчунати $\varrho_p \sin \varphi_p$ па дакле и цео уображени корен. Али зарад тога треба после горе поменутих рачуна најпре сазнати, које вредности модула ϱ и r иду заједно. Ево како се то може дознати. Узмимо н. пр. да су два највиша корена уображени. Тада после n узастопних квадрирања корена задате једначине, дакле у једначини, чији су корени k-ти степени ($k = 2^n$) корена задате једначине, своди се трећи сачинилац на ϱ_1^{2k}, а други сачинилац на $2\varrho_1^k \cos k\varphi_1$, јер се уображени сабирци двају уображених корена узајамно потиру. Тада се дакле може лако израчунати $\cos k\varphi_1$. Сад кад у једначини 1) заменимо ϱ_1 и r_1 њиховим вредностима, видећемо да ли се отуда нађена вредност за $\cos k\varphi_1$, слаже са већ израчунатом вредношћу његовом или не. У првом случају модули ϱ_1 и r_1 иду заједно а у другом не. У овом другом случају испитаћемо на исти начин, да ли модуо ϱ_1 иде са модулом r_2 заједно и т. д.

Онако исто како се налази $\cos k\varphi_1$, могу се наћи и $\cos k\varphi_2$, . . . $\cos k\varphi_q$. Они се добијају увек из сачинилаца, који стоје на парним местима. Тако на пример ако су у задатој једначини шест највиших корена уображени, онда се после n извршених квадрирања корена задате једначине, своде поједини сачиниоци и то

1-ви на $2\varrho_1^k \cos k\varphi_1$, 2-ги на ϱ_1^{2k}

3-ћи на $\varrho_1^{2k}\, 2\varrho_2^k \cos k\varphi_2$, 4-ти на $\varrho_1^{2k}\, \varrho_2^{2k}$

5-ти на $\varrho_1^{2k}\, \varrho_2^{2k}\, 2\varrho_3^k \cos k\varphi_3$, 6-ти на $\varrho_1^{2k}\, \varrho_2^{2k}\, \varrho_3^{2k}$ и т. д.

Слично томе бива, кад су спрегови уображених корена стварним коренима растављени. Израчунавање аргумената φ из сачинилаца, који стоје на парним местима, може још послужити и као контрола рада.

Примедба. Gräffe-ова метода, коју у кратким потезима изложисмо, проматрана са теоријског гледишта не може се казати, да није елегантна, али проматрана са

практичног гледишта она се мора одбацити, јер је доста заметна. То је случај особито онда, кад се највећи корен од непосредно мањег разликује за врло мало. Ево шта сам писац на страни 31 свога списа: Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen о томе вели: „Кад се два стварна корена разликују једно од друго тако мало, да они и после n-ог квадрирања, пошто су већ сви остали корени раздвојени и израчунати, остају још нераздвојени, то тада лако можемо пасти на погрешну мисао, да имамо посла са два уображена корена, којима је модуо производ тих двају стварних корена. Ми ћемо тада израчунати $\varrho \cos \varphi$ и наћи ћемо за φ немогућу вредност а затим ћемо израчунати $\varrho \sin \varphi \sqrt{-1} = \sqrt{\varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 \varphi}\sqrt{-1}$, које ће бити стварна количина. Тада дакле није нужно ићи са квадрирањем тако далеко, док се оба стварна корена не раздвоје, него само дотле, докле њихов производ није нађен. Даље се ради онако као и при израчунавању уображених корена пошто се стварним коренима може такође дати облик $\varrho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$, само што овде $\varrho i \sin \varphi$ има стварну вредност, Пошто ϱ^2 може бити и одречно, то у сумњивим случајевима треба узети у помоћ количину $\cos(2^n\varphi)$. Кад се најзад деси, да су два уображена корена усљед квадрирања постали стварни бројеви, то онда може изгледати, као да једначина има два стварна и бројно једнака корена. Али заменом најближих граница тих корена у намери, да бисмо сазнали њихов знак, увериђемо се о противноме, и тада се уображени корени израчунавају из њихових модула онако као и горе.“

ПОГРЕШКЕ.

СТРАНА	ВРСТА			МЕСТО
25	3	озго:	$M,$	M_1
28	1	»	тежи	аежи
33	10	»	$f'(x)$	$f(x)$
34	3	»	цошто је	остаје
34	7	оздо:	пред	при
38	4	озго:	вредност a	вредностa
40	7	»	вред-	на вред-
40	3	оздо:	onда	овда
41	2	»	сачиниоцима	чиниоцима
43	11	»	више	виш
53	7	»	$f^{\mathrm{IV}}(x ; = 1$	$f^{\mathrm{IV}}(x)$
60	7	»	y свуда	x
62	8	озго:	$(x-\alpha_1)^n$	$(x-\alpha_1)$
69	2	»	реч „стави" с места где је, треба да дође пред знак =	
69	6	оздо:	треба заграда $\}$ на крају	
75	8	озго:	Q_2	Q
76	11	оздо:	$b^2 - 4ac$	$b^2 \quad 4ac$
85	2	»	ξ_1a−b−2	ξ_1a−b−3
87	12	»	$(g-h)$	$(g-p)$
93	5	»	једноимених	једноименованих
96	10	»	поступно	потпуно
103	12	»	$-a_2$	$-a_1$
103	10	»	$-b_1$	$-b$
103	4	»	a свуда	α
112			У детерминанти прва и друга врста чине прву врсту детерминанте Исто тако и 3-ћа и 4-а, 5-а и 6-а, 7-а и 8-а и т. д. m-а и $(m+1)$-а врста чине увек по једну врсту детерминанте.	
117	9	оздо:	Δ_m	⅃
126	11	озго:	$Z_{k,k}x^k$	$Z_{k,k}x$
128	1	»	заграда $\}$ пред изложиоцем 2	
132	4	»	Z_r	z_r
139	9	»	треба заграда $\{$ иза a^2 и заграда $\}$ на крају 10-те врсте	

СТРАНА	ВРСТА			МЕСТО
144	5	озго :	P^1	P_1
147	врсте 10, 11 и 12	оздо	последњи чланои десно треба да су ограђени ( )	
148	5	оздо :	$f(x)+\lambda\varphi(x)=0$	$f(x)+\lambda\varphi(x)$
151	12	»	b_1x^{m-2}	b_1x^{m-1}
154	3	озго :	b_n	a_n
156	6	»	први члан бројиоца десно од знака = треба да је : cx^2	
165	4	»	$\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$	$\frac{m(m-2)}{1.\ 2}$
177	2 и 3	»	први корени знак треба да има над собом изложиоца 3	
186	7	»	треба да стоји : ако још узмемо на ум	
192	6	»	треба да отпадне знак =	
206	2	оздо :	у обрасцу за x_3 треба да стоји $+\sqrt{z_3}$ место $-\sqrt{z_3}$	
222	9	»	$+a^m$	$-a^m$
222	10	»	a^m	a^m
227	1	»	$(m-1)2\pi$	$(m-1)\pi$
264	5 и 7	»	1)	2)
267	3	озго :	њеним	њиним
268	4	оздо:	иза $+1$ треба реч : мали	
274	9	озго :	десно од знака = последњи члан треба да је a_{m-1}	
274	13	»	a_{m-1}	a_{m-2}
275	2	»	a_{m-1}	a_{m-2}
275	10	оздо :	$\frac{b_{m-2}+a_2}{a}$	$b_{m-2}+a_2$
283	15	»	рационалним	стварним
285	8	озго :	q^2	9^2
497	6	оздо :	$\binom{m}{r}$	$\binom{m}{r}$
532	7	»	нових	његових.
663	9	озго :	$2\rho_2 cos\ \varphi_2$	$\rho_2 cos\ \varphi_2$